UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

TRABAJO FIN DE MÁSTER

SIGNIFICADOS DE LA DERIVADA EN LAS PRUEBAS DE EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

ANTONIO JIMÉNEZ FERNÁNDEZ

Granada

Septiembre, 2017

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Curso 2016/2017

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela del doctor D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo y del doctor D. José Antonio Fernández Plaza del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Antonio Jiménez Fernández, dentro del Máster Universitario en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Antonio Jiménez Fernández

Vº Bº del tutor

Fdo.: D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Vº Bº del cotutor

Fdo.: D. José Antonio Fernández Plaza

RESUMEN

En este trabajo se describe una investigación cuyo objetivo es determinar los significados de la derivada que se manifiestan en las PEBAU de Andalucía y caracterizar aquellas tareas donde este concepto interviene mediante el empleo de nociones y constructos del análisis didáctico. Es una investigación cualitativa y de carácter descriptivo, donde se analiza una muestra de las PEBAU andaluzas a través del método del análisis de contenido, determinando así aspectos de la estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos y modos de uso de la derivada que se dan en las tareas junto con características y variables significativas de estas.

ABSTRACT

In this document we describe the results of a research process which aim is to determine the derivative meanings manifested in the Andalusian PEBAU and to characterize the tasks where this concept is involved through the use of notions and constructs of the didactic analysis. It is a qualitative and descriptive research, where a sample of the Andalusian PEBAU is analyzed using the method of content analysis, thus determining aspects of the conceptual structure, representation systems and senses and modes of use of the derivative that are involved in the tasks along with their characteristics and significant variables.

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO I

Introducción

En el actual sistema educativo español, el cual se encuentra regido por la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa o LOMCE (Jefatura del Estado, 2013), pueden distinguirse una serie de etapas bien diferenciadas: la educación infantil, la educación primaria, la educación secundaria, la cual se desglosa a su vez en educación secundaria obligatoria y bachillerato, y la educación universitaria, además de otros estudios como la formación profesional. Las transiciones que tienen lugar entre las distintas etapas son una cuestión de interés y, en particular, encontramos un elemento determinante que va a mediar en la transición del bachillerato a la universidad y este es un conjunto de pruebas conocido comúnmente como “la selectividad”, pruebas que se realizan al término del bachillerato y que permiten regular el ingreso de aquellos estudiantes que quieren cursar estudios universitarios.

Estas pruebas tienen su origen en las últimas décadas del siglo XIX (González, 2001) y su actual denominación es (Pruebas de) Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2016), o según sus siglas (P)EBAU. Aun así, han recibido muchos otros nombres a lo largo de su historia como por ejemplo Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) o Pruebas de Acceso a Estudios de Grado (PAEG). El objetivo de estas pruebas es, según lo que se recoge en la normativa vigente para este último curso 2016/2017 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014; Ministerio de la Presidencia, 2008), valorar de forma objetiva la madurez académica, los conocimientos y las capacidades adquiridas en bachillerato por los alumnos, permitiendo esto regular el flujo de aquellos que buscan ingresar en la universidad. Por el papel tan importante que juegan estas pruebas, muchas investigaciones se han interesado por ellas, en particular por las PEBAU en la especialidad de Matemáticas, y han concluido que son de una influencia decisiva en el contenido matemático que se prioriza en bachillerato y la forma que tienen los docentes de abordarlo (por ejemplo, Huidobro, Méndez y Serrano, 2010; Ruiz de Gauna, Dávila, Etxeberría y Sarasua, 2013).

Precisamente, uno de los bloques de contenido que es clave en bachillerato es el cálculo infinitesimal. Si atendemos al currículo de secundaria que establece la LOMCE (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015), el primer elemento con el que se inicia el alumno en el cálculo infinitesimal es el límite, el cual se introduce en 1º de bachillerato. Asimismo, continuará con la derivada que resultará una herramienta de gran potencial pues le permitirá, entre otras cuestiones, el estudio del comportamiento de funciones, la resolución de problemas de optimización y el cálculo de límites en los que se den ciertas indeterminaciones haciendo uso de la regla de L'Hôpital.

Sin embargo, este es un concepto cuya comprensión no es nada sencilla (Artigue, 1995), de tal forma que suele conllevar múltiples dificultades para el alumnado que intenta trabajar con él (por ejemplo, Hitt 2005; Silva, 2016; Siyepu, 2013). Esta complejidad ha generado que desde la Didáctica de la Matemática surjan diversas investigaciones que buscan indagar en distintos aspectos de la comprensión de la derivada (Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2008). Asimismo, con base en la riqueza de significados que tiene asociada este concepto, se hallan investigaciones que han estudiado los significados e ideas que poseen los alumnos, los significados recogidos en libros de texto o los expresados por los currículos de Matemáticas (por ejemplo, Camacho, Perdomo y Santos, 2010; Dolores, 1998; Pino-Fan, Castro, Godino y Font, 2013), obteniéndose en muchos de los casos una visión parcial y sesgada, con gran parte de los alumnos mostrando un registro y manejo bastante pobre.

1.1 EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Una cuestión a plantearse según los puntos que acabamos de desarrollar sería qué tratamiento se le da a un concepto tan complejo como es el de derivada en las PEBAU que, como ya se ha dicho, son unas pruebas determinantes y con una influencia significativa en la enseñanza de las matemáticas de bachillerato.

En este sentido, existen investigaciones previas que se han preocupado por analizar los significados de algunos conceptos matemáticos que se recogen en las PEBAU. Por ejemplo, encontramos a López-Martín, Batanero, Díaz-Batanero y Gea (2016), quienes abordan el significado evaluado de la inferencia estadística en las PEBAU andaluzas de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, obteniendo que no todos los contenidos asociados se evaluaban con la misma intensidad y que únicamente se recurría a un enfoque frecuencial de la inferencia. También ha habido otros estudios que han tratado conceptos propios del cálculo infinitesimal, como es el caso de Contreras, Ordoñez y Wilhelmi (2010), quienes estudian el significado de la integral definida en las PEBAU de Matemáticas II; este estudio puso de manifiesto un tratamiento desigual de los distintos significados de la integral, predominando ante todo configuraciones epistémicas de carácter geométrico y algebraico.

Por los resultados tan llamativos que salen a relucir en este tipo de investigaciones sobre las PEBAU, por la complejidad e importancia que tiene el objeto derivada y por la trascendencia de las PEBAU en la enseñanza, nos surge la siguiente pregunta que determina el problema de investigación: *¿cuáles son los significados de la derivada que se dan en las PEBAU en la especialidad de Matemáticas y cómo son las tareas donde esta interviene?*

Consideramos que esta cuestión es de interés pues, más allá de resolver la duda que se plantea, esta investigación puede servir de base para otras que busquen indagar en cuestiones como son si hay correspondencia entre los significados de la derivada presentes en las PEBAU y los recogidos en el currículo de bachillerato o si los significados de la derivada que se dan en las PEBAU están en consonancia con los requisitos de distintos estudios universitarios. En definitiva, consideramos que estudiar la cuestión que nos planteamos permitirá arrojar un poco de luz con respecto a esa transición del bachillerato a la universidad de la que hablábamos anteriormente.

Asimismo, el acercamiento que consideramos para abordar esta cuestión difiere del usado en trabajos anteriores, los cuales se apoyan principalmente en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Sin embargo, nosotros abordamos el estudio de los significados partiendo del análisis didáctico como marco teórico, en particular, tomando como eje central la noción de significado de un contenido matemático escolar y las tres componentes semánticas que establece: estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos y modos de uso (Rico, 2016). Mención especial merece el trabajo de Herrera (2017) que analiza y compara las tareas de las pruebas de Matemáticas II de distintas comunidades autónomas y que ha influido en la línea de trabajo aquí seguida.

1.2 OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN Y ORGANIZACIÓN

Buscando dar respuesta a la pregunta que guía nuestro estudio, y ateniéndonos por motivos operativos a las pruebas de Andalucía, nos proponemos como objetivo general el siguiente: *Analizar los significados del objeto derivada que se recogen en las tareas que conforman las PEBAU andaluzas en la especialidad de Matemáticas junto con las características de tales tareas*. A su vez, este objetivo general lo desglosamos en una serie de objetivos específicos que recogemos en la tabla 1.1.

Tabla 1.1
Objetivos específicos de la investigación

Código	Descripción del objetivo
O1	Diseñar un sistema de categorías que permita recoger información acerca de los significados del objeto derivada que se dan en las tareas de las PEBAU andaluzas de Matemáticas II y las características de tales tareas.
O2	Determinar los términos, notaciones, conceptos y relaciones propios de la estructura conceptual de la derivada que se dan en las PEBAU andaluzas de Matemáticas II.
O3	Determinar los sistemas de representación con los que se ha de trabajar en aquellas tareas de las PEBAU andaluzas de Matemáticas II en las que interviene la derivada.
O4	Determinar los sentidos y modos de uso del objeto derivada que se han de emplear en las PEBAU andaluzas de Matemáticas II.
O5	Caracterizar las tareas de las PEBAU andaluzas de Matemáticas II en las que interviene la derivada.

Estos son los objetivos que guiarán nuestra investigación. En relación con la consecución de tales objetivos, el presente trabajo se organiza de la siguiente manera: en el capítulo 2 se desarrolla la fundamentación teórica, tratando entre otras cuestiones los antecedentes bibliográficos y el análisis didáctico como marco teórico, con especial interés en la noción de significado de un contenido matemático escolar. En el capítulo 3 se describe la metodología empleada, tratando en particular el análisis de contenido como método de investigación y la formación del sistema de categorías que aquí se considera. En el capítulo 4 se procede a la descripción de los resultados obtenidos a partir del análisis mientras que es en el capítulo 5 donde se lleva a cabo la discusión de tales resultados. Finalmente, en el capítulo 6 se abordan las conclusiones, las limitaciones encontradas y las futuras líneas de investigación que surgen a raíz de lo aquí estudiado.

CAPÍTULO II

Fundamentación teórica

Se abordan en este capítulo aquellos referentes teóricos que guiarán el diseño de este trabajo y la interpretación de los resultados que se obtengan. La estructura que se sigue para ello es la siguiente: en primer lugar, se presentan brevemente el origen, soporte legal y algunas características de las PEBAU, y se describe asimismo qué recoge el currículo de bachillerato en relación con la derivada. En segundo lugar, se desarrollan algunos antecedentes teóricos relativos al estudio de las distintas pruebas para el acceso a la universidad en la especialidad de Matemáticas y al estudio de los significados y concepciones de la derivada. Por último, se describe el análisis didáctico como marco teórico, el cuál será clave para el diseño del sistema de categorías considerado en este trabajo.

2.1 MARCO CURRICULAR

Tratamos a continuación las pruebas para el acceso y admisión a la universidad, llamadas actualmente PEBAU, describiendo brevemente su origen, la legislación en la que se sustentan y algunas de sus características. Tras esto, mostramos qué recoge el currículo de bachillerato en relación con la derivada.

2.1.1 Las pruebas de evaluación del bachillerato para el acceso a la universidad

La conocida como selectividad, es decir, las pruebas que determinan y regulan el acceso del alumnado a la universidad, ha recibido diversos nombres a lo largo de la historia. Su nomenclatura actual, que ha sido introducida en el curso académico 2016/2017, es la de Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2016), o PEBAU según sus siglas, pero también ha recibido la denominación de Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) y con el posterior cambio en 2010 de los estudios universitarios, que pasaron a ser estudios de grado en lugar de licenciaturas, se adoptó el nombre de Pruebas de Acceso a Estudios de Grado (PAEG). Sin embargo, no únicamente ha presentado una nomenclatura irregular, su historia también lo ha sido.

Según González (2001), la realización de una prueba de ingreso para la selección del alumnado universitario surge como una medida que Francisco Giner de los Ríos y otros institucionistas defendieron, teniendo esta especial incidencia en las dos últimas décadas del siglo XIX. De las distintas razones esgrimidas a su favor destacan dos: afrontar el exceso de alumnos en la universidad y buscar una homogeneidad en la preparación del alumnado, cuya heterogeneidad suponía un problema en aquella época. De esta forma, el ministro Germán Gamazo implantó la prueba en 1898, esperando que esta iniciase una serie de cambios de los estudios superiores. Sin embargo, el periodo que comprende los años 1898 y 1902 fue convulso y, aunque allanó el camino para consolidar esta prueba, hubo sucesivas derogaciones y restablecimientos de la misma.

Con el paso de los años, su uso se tornaría algo más estable, pero no sus características. Muñoz (1995), quien estudia las pruebas de acceso a la universidad del periodo 1940-1995, recoge una gran cantidad de modificaciones que se suceden en las pruebas, acompañadas en muchos casos de cambios en el sistema educativo. El autor señala tres variables esenciales que afectan al planteamiento de las pruebas a lo largo de los años: el número de posibles candidatos, la cantidad de plazas y las necesidades sociales de titulados en las distintas profesiones; estas variables a su vez se relacionan con otras como sería el desarrollo económico y cultural del país. De esta manera, cambian a lo largo de este periodo la especificidad y opcionalidad en las pruebas, su estructura y la ponderación de sus partes, su finalidad fundamental, etc.

Pasando ahora a tratar las pruebas en sí, para aquellas realizadas el pasado curso 2016/2017 se recogen una serie de características en cuanto a su diseño y contenido a tratar en la Orden ECD/1941/2016 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2016). Sin embargo, esta no afecta a la muestra de pruebas seleccionada en este trabajo, que abarca el periodo que comprende los cursos 2012/2013 y 2015/2016. Estas últimas se basan en el Real Decreto 1892/2008 por el que se regula las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas (Ministerio de la Presidencia, 2008) y, si bien es cierto que el Real Decreto 412/2014 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014) lo deroga, considera un periodo transitorio hasta el curso 2016/2017, apoyándose hasta entonces en gran parte de lo recogido por el anterior decreto.

Las pruebas se realizan en dos convocatorias al año, una ordinaria y otra extraordinaria, y tal y como se marca en este Real Decreto 1892/2008, la finalidad de la prueba consiste en valorar la madurez académica del alumno, sus conocimientos obtenidos en bachillerato y su capacidad para continuar con éxito las enseñanzas universitarias correspondientes.

Respecto a la prueba de Matemáticas II, atendiendo al periodo considerado y a las pruebas de Andalucía exclusivamente, cada una de ellas consta siempre de dos opciones, A y B, estando cada una de estas opciones conformada por cuatro tareas que tienen asignada una puntuación de 2,5 puntos sobre 10 cada una. Generalmente, para un mismo año se confeccionan seis pruebas distintas, se eligen dos al azar para las dos convocatorias existentes y, una vez que al alumno se le presenta la prueba correspondiente en alguna de las convocatorias, este debe decantarse por uno de los dos modelos propuestos en la prueba. Nuestro interés radicará precisamente en analizar las tareas de todas las pruebas del periodo considerado que involucren a la derivada.

Finalmente, como medida para evitar la confusión que genera la gran cantidad de nombres que han recibido estas pruebas, adoptaremos la denominación más actual, Pruebas de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (PEBAU), para referirnos indistintamente a las diferentes pruebas con las que tratemos.

2.1.2 La derivada en el currículo de bachillerato

Tal y como se recoge en el Real Decreto 1892/2008 (Ministerio de la Presidencia, 2008), son las administraciones educativas y las universidades correspondientes las que habrán de organizar la prueba y asegurar que esta se adecua al currículo de bachillerato. En este sentido, no existe ningún documento oficial que recoja contenidos concretos para las pruebas, sino que estas se apoyan sobre los contenidos del correspondiente currículo de bachillerato. Vemos pues de interés describir qué se recoge en relación con la derivada dentro de la asignatura Matemáticas I y II en el currículo vigente en el momento de la realización de las pruebas consideradas, este es, el Real Decreto 1467/2007, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007). En primer lugar, en la introducción de las asignaturas Matemáticas I y II encontramos:

> Con la introducción de la noción intuitiva de límite y geométrica de derivada, se establecen las bases del cálculo infinitesimal en Matemáticas I, que dotará de

> precisión el análisis del comportamiento de la función en las Matemáticas II. Asimismo, se pretende que los estudiantes apliquen estos conocimientos a la interpretación del fenómeno modelado. (p. 45448)

Por otro lado, presentamos en las tablas 2.1 y 2.2 los contenidos y criterios de evaluación que recoge el anterior Real Decreto 1467/2007 en relación con las asignaturas de Matemáticas I y II, respectivamente, y que tengan alguna relación con la derivada.

Tabla 2.1
Contenidos y criterios de evaluación de Matemáticas I sobre la derivada

Elementos	Descripción de los elementos
Contenidos	Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo. Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.
Criterios de evaluación	Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente.

Tabla 2.2
Contenidos y criterios de evaluación de Matemáticas II sobre la derivada

Elementos	Descripción de los elementos
Contenidos	Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto. Función derivada. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización.
Criterios de evaluación	Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas algebraicamente en forma explícita. Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización.

Asimismo, si bien la aplicación de la LOMCE a 2º de bachillerato ha sido posterior a la realización de las pruebas analizadas, vemos de interés comparar brevemente los cambios que han sufrido las dos anteriores asignaturas atendiendo al Real Decreto 1105/2014 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015). Respecto a Matemáticas I, se adelantan una gran cantidad de contenidos como son la definición de derivada de una función en un punto y su interpretación geométrica, la función derivada, la regla de la cadena y la recta tangente y normal, además de considerar también la representación gráfica. Respecto a Matemáticas II, encontramos contenidos que no estaban o no se explicitaban en la LOE como el Teorema de Rolle y del valor medio o la regla de L'Hôpital. Para ambas asignaturas se recoge como criterio el aplicar la derivada a fenómenos naturales, sociales y tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos, y en Matemáticas II se añaden el cálculo de límites y los problemas de optimización.

2.2 ANTECEDENTES

Debido al objeto de estudio de este trabajo, ya descrito en la introducción, se ha decidido dividir los antecedentes bibliográficos en dos secciones: una correspondiente a las investigaciones sobre las PEBAU en la especialidad de Matemáticas y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, a la que nos referiremos de ahora en adelante por MACS, y otra correspondiente a las investigaciones en torno al concepto de derivada, con especial interés en cuestiones relativas a significados y concepciones.

2.2.1 Antecedentes sobre el estudio de las PEBAU

Si bien el interés por el estudio de las PEBAU en la especialidad de Matemáticas se remonta a unos cuantos años atrás, apareciendo ya investigaciones hace más de una treintena de años que estudiaron su influencia y las compararon con pruebas de otros países europeos (Goberna, 1983; Goberna, López y Pastor, 1985; Pastor, 1984), no existe una literatura muy extensa sobre este tema, cuestión que se entiende por su especificidad. Con base en la búsqueda realizada, podemos agrupar la mayoría de los antecedentes encontrados en una serie de temáticas que, si bien en algunos trabajos no serán excluyentes, sí que aglutinan y dan una idea de las cuestiones mayoritariamente estudiadas. Así pues, no debe entenderse como una clasificación absoluta, sino simplemente como un intento de guiar eficaz y ordenadamente la presentación de estos antecedentes. A continuación, se describen tales temáticas y trabajos que pudieran incluirse en estas.

Estudios de la resolución de problemas y sus dificultades en las PEBAU

Un primer bloque sería el estudio de la resolución de ciertos problemas y de los errores y dificultades encontrados. Por ejemplo, en Ramos, Espinel y Ramos (2009) se detectaron múltiples errores cometidos en los problemas de contraste de hipótesis de una muestra de las PEBAU en la especialidad de MACS y se propusieron sugerencias para abordarlos. En Nortes y Nortes (2010) se parte de una muestra de pruebas de la misma especialidad de las que se analizó su resolución y los errores más significativos, detectando entre otras cuestiones una tendencia a decantarse por procesos rutinarios conocidos sin considerar métodos alternativos más eficientes. Otra investigación de la misma índole es Mallart (2014), donde se estudia la resolución de una muestra de las PEBAU de Matemáticas de 2012, encontrándose que más de la mitad de los alumnos no resolvió el ejercicio de derivación correspondiente a pesar de tener un enfoque geométrico y ser de resolución inmediata.

Comparación de las PEBAU con otras pruebas

Un segundo bloque serían los estudios que abordan la comparación de las PEBAU de Matemáticas, o MACS si corresponde, con las pruebas de acceso a la universidad de otros países. Incluimos aquí estudios como Goberna (1983) o el más reciente Ruiz de Gauna y Sarasua (2015). El primero compara los contenidos de las pruebas de Inglaterra, Francia y España, detectándose múltiples diferencias; en particular, destaca que las pruebas españolas fueron la más cercanas a un contenido universitario. El segundo estudio, más reciente, compara las pruebas de Alemania, España, Francia e Italia. Se detectaron diferencias como una menor duración de las pruebas españolas o el uso de diferentes notaciones y lenguajes, aunque también se encontraron similitudes como es la presencia de actividades que parten de la gráfica de una función, salvo en las pruebas italianas.

Estudios de las opiniones acerca de las PEBAU

Un tercer bloque sería el conformado por el estudio de las opiniones de individuos que, de una forma u otra, intervienen en el proceso de preparación y realización de las PEBAU de Matemáticas. Destaca aquí Ruiz de Gauna et al. (2013) donde, a través de la opinión dada por profesores de bachillerato de País Vasco sobre la selectividad, se determina la existencia de una relación entre el objetivo de la enseñanza expresado y los resultados de las pruebas, encontrándose que en la mayoría de casos la preparación de la prueba estaba integrada en la dinámica de clase. Ruiz de Gauna (2010) trata esta idea pero con mayor amplitud, complementando el estudio de opinión con análisis minuciosos de libros de texto de distintas épocas, de leyes educativas y de las propias pruebas de País Vasco. Por otro lado, en Huidobro et al. (2010) se estudia la transición del bachillerato a la universidad y cómo intervienen las PEBAU partiendo, entre otras cuestiones, de la opinión de alumnos de primer curso de distintas carreras. Los autores concluyen que la anterior transición es dificultosa y que hay una influencia decisiva de las PEBAU en el bachillerato.

Estudios de aspectos concretos de las PEBAU

Finalmente, un cuarto bloque más amplio estaría conformado por aquellos trabajos que se encargan de analizar y describir algún aspecto concreto de la prueba en sí. Por ejemplo, en Ruiz de Gauna, Sarasua y García (2011) se determina una tipología general de los ejercicios que pueden encontrarse en las PEBAU de Matemáticas y MACS de la Universidad del País Vasco para, posteriormente, ponerla en relación con las calificaciones obtenidas. Por otro lado, en Boal, Bueno, Lerís y Sein-Echaluce (2008) se estudia si los objetivos marcados en bachillerato relativos a las capacidades y habilidades en el uso de las matemáticas realmente se evalúan en las PEBAU, obteniéndose precisamente que muchos de estos objetivos no se valoran ni evalúan con la intensidad adecuada.

Sin embargo, dentro de este último bloque, los estudios más afines al presente trabajo son aquellos que analizan y describen el significado evaluado en las PEBAU de un cierto concepto matemático. En Contreras et al. (2010), se estudia el significado de la integral definida en una muestra de libros de texto de 2º de bachillerato y en una muestra de las PEBAU de Andalucía. En el análisis de los libros y de las PEBAU se observó, por lo general, una reducción a métodos de carácter algebraico y, respecto a las configuraciones epistémicas de la integral definida identificadas, la geométrica y la algebraica predominaron en las PEBAU analizadas, cuestión que se vio correspondida en los libros de texto. Más recientemente, López-Martín et al. (2016) estudian cuál es el significado evaluado de la inferencia estadística en una muestra de las PEBAU andaluzas en la especialidad de MACS y si se corresponde con el significado pretendido en las correspondientes orientaciones curriculares. Se observó que no todos los contenidos fijados en el significado previsto se evalúan con la misma intensidad, destacando el peso dado a los intervalos de confianza y a su interpretación, y que la inferencia se presenta exclusivamente desde un punto de vista frecuencial, ocultando así otras aproximaciones posibles. Este trabajo se apoya a su vez en uno previo (López-Martín, Contreras, Batanero y Carretero, 2015) donde trabajando con la misma muestra se analizan los problemas de probabilidad.

2.2.2 Antecedentes sobre el estudio de la derivada

La derivada es un elemento fundamental del cálculo. Junto al límite, el estudio de la derivada permite al alumno de bachillerato seguir adentrándose en el análisis infinitesimal, cuestión que más tarde retomará con el estudio de la integral; además, la derivada actúa como una herramienta de gran potencial que tendrá una aplicación inmediata en el estudio de funciones y en los problemas de optimización. Sin embargo, su enseñanza y aprendizaje son problemáticos y dificultosos.

Ya Artigue (1995) advierte de esta problemática pues afirma que, si bien los estudiantes son capaces de aprender a realizar cálculos de derivadas de forma mecánica y a resolver problemas estándar, estos encuentran dificultades para alcanzar una comprensión plena y satisfactoria de aquellos conceptos y métodos que constituyen el centro del cálculo matemático. Asimismo Hitt (2005), al indagar en problemas de aprendizaje sobre temas de cálculo, señala problemas relativos a la derivada como son dificultades de los estudiantes para visualizar este concepto y para resolver problemas no rutinarios y un exceso de énfasis de la manipulación algebraica por parte de algunos profesores. Esta preocupación por las dificultades y errores de los alumnos en cuestiones relativas a las derivadas, y a otros elementos del cálculo, ha seguido presente en los últimos años (Londoño, Kakes y Decena, 2013; Silva, 2016; Siyepu, 2013).

En base pues a la riqueza, importancia y complejidad de este concepto, muchas investigaciones de distinta índole se han llevado a cabo y esto se refleja en trabajos como Sánchez-Matamoros et al. (2008), donde se realiza un estudio bibliográfico sobre las investigaciones en torno a la derivada y a su comprensión. Tales estudios permiten indagar en los significados del concepto de derivada y en su desarrollo. Y es que precisamente, por afinidad con lo realizado en el presente trabajo, destacan aquellas investigaciones que estudian los significados de la derivada, sus interpretaciones, sus concepciones, etc.

Significados y concepciones de los estudiantes en relación con la derivada

Encontramos una literatura extensa en lo que respecta a los significados e ideas que los alumnos tienen sobre la derivada. En este sentido, Dolores (1998) estudia las ideas que poseen estudiantes de bachillerato acerca de este concepto, encontrando dificultades relacionadas con las concepciones de la derivada como velocidad instantánea, como límite y como pendiente de la tangente. Asimismo, Bingolbali y Monaghan (2008) analizan las diferencias existentes entre estudiantes de Matemáticas e Ingeniería en lo que respecta a la interpretación de la derivada. Camacho et al. (2010) estudian la red de significados que poseen estudiantes de Química en relación con la derivada, encontrándose con una cuarta parte asociando la derivada únicamente a reglas de derivación. Vrancken, Engler y Müller (2012) analizan las nociones que estudiantes de ingeniería construyen al trabajar con tareas relativas a la variación y el cambio, detectando que tienden a usar procedimientos analíticos y algorítmicos. Algo similar se ve en García y Dolores (2012), donde estudiantes universitarios primerizos de Matemáticas identifican en su mayoría la derivada con una mera fórmula. En la misma línea pero con mayor interés en los sistemas de representación, Sandoval (2014) recoge las dificultades que muestran estudiantes universitarios al realizar conversiones entre sistemas de representación en cuestiones relativas a la razón de cambio y a la pendiente.

Estudios sobre significados distintos de los personales en relación con la derivada

Existen también trabajos que estudian otros tipos de significados distintos de los personales de los alumnos. Por ejemplo, en Inglada y Font (2003) se describe el significado institucional pretendido de la derivada en libros de texto usados en Cataluña y se estudian los conflictos semióticos existentes, con especial interés en los relacionados con la notación $\Delta x/\Delta y$. Por otro lado, en Pino-Fan, Godino y Font (2011) se busca reconstruir el significado epistémico global de la derivada a través de un estudio histórico-epistemológico.

Estudios sobre descripciones y comparaciones de significados de la derivada

Por último, también encontramos estudios que, además de describir estos significados, buscan compararlos y contrastarlos. Por ejemplo, Pino-Fan et al. (2013) caracterizan el significado pretendido de la derivada en el currículo mexicano de bachillerato para, posteriormente, compararlo con el significado global determinado en el trabajo anterior. En Silva (2016) se estudia el significado referencial de la derivada a través del análisis de libros de texto y programas y se complementa con un estudio del significado personal de alumnos universitarios. Finalmente, en Contreras, Luque y Ordóñez (2003) se describen en relación con la continuidad y la derivada sendos análisis histórico-epistemológicos, análisis comparativos de distintos libros de bachillerato y de primer curso de universidad y un estudio sobre la evolución de las concepciones y obstáculos asociados de una serie de alumnos de ambos cursos.

2.3 EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

El análisis didáctico juega un papel esencial en este trabajo pues va a presentar una doble vertiente: por un lado, nos va a proveer de una batería de conocimientos que nos permitirán interpretar los resultados que se obtengan en este estudio; asimismo, también intervendrá metodológicamente en el diseño del sistema de categorías a emplear en el análisis de las PEBAU que más adelante se desarrolla. Así pues, describimos a continuación en qué consiste el análisis didáctico y cuáles son sus componentes.

El análisis didáctico conforma un método de investigación que es propio de la Didáctica de la matemática; este se sustenta en la matemática, en la historia y en la filosofía del conocimiento y de la educación, y tiene por finalidad el "fundamentar, dirigir y sistematizar la planificación y puesta en práctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos, tal y como los establece la comunidad educativa y tienen lugar en el medio escolar" (Rico, 2013, p. 19). En este sentido, Rico (2016) define el análisis didáctico de un contenido matemático escolar como un método para indagar, organizar e interpretar los contenidos didácticos de las matemáticas escolares desde un marco curricular, teniendo como objetivo planificar, implementar en el aula y evaluar tales contenidos; se presenta así como una herramienta de gran potencial para el docente, entre otros. El análisis didáctico está a su vez integrado por distintos tipos de análisis, los cuales surgen de considerar las dimensiones del currículo que se describen en Rico (1997): conceptual, cognitiva, formativa y social. De esta forma, el análisis didáctico se estructura en los siguientes cuatro tipos de análisis, cada uno con su objeto de estudio y sus propias categorías: el análisis de los significados, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis evaluativo.

Así pues, atendiendo a lo descrito en Rico (2016), el análisis didáctico comienza por un *análisis de los significados* de los contenidos matemáticos escolares del tema de interés. Tras esto, se lleva a cabo un *análisis cognitivo* de tales contenidos, en el que se abordan las condiciones y la orientación del aprendizaje matemático correspondiente. Le sigue el *análisis de instrucción*, el cual trata la planificación e implementación de la enseñanza de los contenidos anteriores, para lo que se consideran las tareas, la organización y los recursos necesarios. Por último, se da el *análisis evaluativo*, con el que se aborda la valoración de los aprendizajes logrados y de la información recogida, junto con la consecuente toma de decisiones derivada de esta valoración. Cada uno de estos cuatro tipos de análisis se organiza con base en unas categorías propias, las cuales concretamos a continuación.

- *Análisis de significados*: Las categorías que organizan este análisis son la estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y modos de uso.
- *Análisis cognitivo*: Sus categorías correspondientes son las expectativas de aprendizaje, las limitaciones existentes y las oportunidades para el aprendizaje.
- *Análisis de instrucción*: Las categorías correspondientes a este análisis son las tareas y su secuenciación, la organización y gestión del trabajo propio del aula y los materiales y recursos para la enseñanza.
- *Análisis evaluativo*: Las categorías que se emplean aquí son las modalidades y el diseño de evaluación, la intervención y toma de decisiones, y los indicadores de calidad.

A continuación, se detallan con mayor profundidad el análisis de significados y aspectos concretos del análisis cognitivo y del análisis de instrucción que serán de interés para este trabajo.

2.3.1 Análisis de significados

El análisis de significados es el primero de los análisis que conforman el análisis didáctico y con él se busca examinar el significado de los contenidos matemáticos. En Frege (1998) se indaga en la noción de significado de un concepto, quien desde un enfoque lógico y formal la fundamenta en las siguientes tres componentes: el signo o término, la referencia o concepto y el sentido.

Este significado se adapta posteriormente al ámbito de la matemática escolar en trabajos como Rico (2012) y Rico y Moreno (2016), de tal forma que se consideran tres componentes para el significado de un contenido matemático escolar: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y modos de uso, los cuales son precisamente las categorías que guían el análisis de significados, como ya se dijo. Estas tres componentes se conocen como triángulo semántico de un contenido matemático escolar y son las que determinan su significado, realizándose a través de ellas su estudio e interpretación (Rico, 2016). Pasamos a continuación a describir cada componente de este triángulo semántico, basándonos para ello en gran medida en lo tratado en Rico y Moreno (2016).

Estructura conceptual

La estructura conceptual de un contenido matemático abarca los conceptos y procedimientos, sus propiedades y relaciones, y los argumentos, proposiciones y correspondientes criterios de veracidad relativos a este contenido. Corresponde a la componente *referencia* según la caracterización de Frege. Atendiendo a Fernández-Plaza (2016), en el estudio de esta estructura se consideran tres ámbitos, el conceptual, el procedimental y el actitudinal, y tres niveles de complejidad para cada uno. Vamos a tratar únicamente los dos primeros ámbitos por ser los de interés para este trabajo.

Respecto al *ámbito conceptual*, se abordan en él los conceptos, entendiendo estos como aquellas ideas con las que pensamos, y las relaciones que se forman, tratando en particular las estructuras que constituyen los conceptos y las que estas forman a su vez. De hecho, en el conocimiento conceptual tienen tanta importancia las propias relaciones como las piezas individuales de información (Hiebert y Lefevre, 1986). Según el nivel de complejidad, y en relación con las estructuras de las que hablábamos, dentro de este ámbito podemos distinguir entre hechos, conceptos y estructuras conceptuales.

- *Hechos*: Son unidades de información básicas y entre ellos se pueden distinguir términos, notaciones, convenios y resultados. Los términos son las palabras usadas para denominar un objeto, noción, relación u operación relativos a un tema matemático; las notaciones son aquellos símbolos que hacen presente los conceptos y expresan sus propiedades y relaciones; los convenios hacen referencia a acuerdos a los que se han llegado por parte de la comunidad matemática; los resultados son inferencias elementales obtenidas a partir de los hechos anteriores.
- *Conceptos y relaciones*: Los conceptos, junto con las relaciones, corresponden al segundo nivel de complejidad; estos son redes organizadas de hechos y permiten establecer clases o conjuntos de objetos.
- *Estructuras conceptuales*: Corresponden a redes de conceptos y suponen el tercer nivel de complejidad en este ámbito. Asimismo, estas estructuras pueden originar conceptos de un “orden superior”.

Por otro lado, el *ámbito procedimental* abarca las operaciones, propiedades y métodos matemáticos relativos al contenido en cuestión. De nuevo, se distinguen tres niveles de complejidad: las destrezas, los razonamientos y las estrategias.

- *Destrezas*: Corresponden al primer nivel de complejidad del ámbito procedimental y están relacionadas con el mismo nivel del ámbito conceptual, ya que consisten en el procesamiento de hechos; tienen lugar a través del uso de convenios y de la manipulación de notaciones.
- *Razonamientos*: Corresponden al procesamiento de relaciones existentes entre conceptos, junto con las correspondientes inferencias lógicas.
- *Estrategias*: Las estrategias atienden a diversas cuestiones a través del procesamiento de conceptos y la relación de razonamientos propios de una o varias estructuras conceptuales.

Los sistemas de representación

La representación ha jugado un papel esencial tanto en el avance de las matemáticas a lo largo de la historia como en el propio aprendizaje de las matemáticas escolares (Lupiáñez, 2016). Una definición de esta noción la encontramos en Castro y Castro (1997), para quienes las representaciones constituyen las notaciones de carácter simbólico o gráfico a través de las cuales se expresan tanto conceptos y procedimientos matemáticos como sus propiedades y características más destacables. Precisamente, esta componente corresponde a la componente *signo* de la caracterización de Frege.

Las representaciones pueden asimismo agruparse en función de sus propiedades y particularidades en lo que se llaman sistemas de representación, de tal forma que cada sistema abarca una serie estructurada de notaciones, símbolos y gráficos regidos por un conjunto de normas y convenios. Asimismo, los sistemas de representación permiten identificar distintas propiedades e incluso significados de las nociones matemáticas. Las representaciones pueden dividirse en dos grandes familias de sistemas: las simbólicas y las gráficas, y ya a partir de estas surgen distintos sistemas de representación como son el verbal, el gráfico, el tabular, el simbólico, etc.

Sentidos y modos de uso

Los sentidos y modos de uso constituyen la última componente por tratar del significado de un contenido matemático escolar, y corresponden precisamente a la componente *sentido* de la caracterización de Frege. Se busca aquí precisar para qué sirven los conceptos y las posibles formas de usarlos. Siguiendo lo tratado en Ruiz-Hidalgo (2016), en el estudio de los sentidos se considerarán los siguientes elementos:

- *Términos y modos de uso*: Los términos usados para referirse a un concepto ayudan a comprender sus diversos sentidos pues ponen de manifiesto las distintas acepciones e interpretaciones del concepto. Así pues, los términos pueden condicionar el modo de uso de un concepto.
- *Contextos*: Los contextos abarcan las cuestiones y problemas a los que un concepto matemático da respuesta, de tal forma que describen a qué necesidades atiende.
- *Fenómenos*: Intervienen también en el estudio del sentido de un concepto matemático los fenómenos de los que tal concepto emerge y aquellos que organiza.
- *Situaciones*: Un último aspecto a tratar en el estudio del sentido son las situaciones y ámbitos en los que se aplica y trabaja un concepto matemático.

Para finalizar, describimos de forma breve algunos aspectos del análisis cognitivo y del análisis de instrucción. Téngase presente que estos análisis están dirigidos a situaciones de enseñanza y aprendizaje en general, pero como aquí abordamos tareas de evaluación de las PEBAU, únicamente desarrollamos aquellos aspectos que puedan ser de interés.

2.3.2 Análisis cognitivo: expectativas de aprendizaje

El análisis cognitivo examina propuestas acerca de "para qué" aprenden los estudiantes un cierto contenido matemático, abordando las condiciones y la orientación de tal aprendizaje. De entre las tres categorías que lo organizan, únicamente desarrollamos brevemente las *expectativas de aprendizaje* por ser de nuestro interés.

Estas expectativas corresponden a los propósitos que han de establecerse en torno al aprendizaje de los contenidos de un cierto tema matemático, tratando en particular qué puede y qué debe aprender el alumno. Tres son los componentes que determinan el análisis de estas expectativas de aprendizaje: los elementos del contenido matemático implicados, la demanda que se formula a través de las tareas y actividades y las capacidades observadas al afrontar tales tareas. En este sentido, los *objetivos de aprendizaje* enuncian expectativas de aprendizaje de tal forma que recogen aquellas capacidades cuyo logro se persigue. Las expectativas de aprendizaje se concretan por tanto a través del desarrollo y logro de capacidades que están relacionadas con los conocimientos matemáticos que se espera que adquieran y manejen los escolares, capacidades que se muestran a través de la realización de tareas y problemas en diversas situaciones y contextos (Flores y Lupiáñez, 2016).

2.3.3 Análisis de instrucción: análisis de tareas

El análisis de instrucción era el tercero de los cuatro tipos de análisis que conforman el análisis didáctico. Con él se busca estudiar la planificación e implementación de la enseñanza de ciertos contenidos con base en lo obtenido en los dos análisis previos. De las categorías que lo organizan, únicamente será de interés el análisis de las tareas, análisis que a continuación tratamos brevemente. Para ello, nos basaremos en lo recogido en Moreno y Ramírez (2016a) y Moreno y Ramírez (2016b).

Una de las partes primordiales del análisis de instrucción es el estudio y diseño de tareas, en particular, se ha de indagar en las variables de tarea, sus funciones y los distintos tipos existentes. Así pues, una noción a aclarar es la de tarea matemática escolar; esta puede definirse como "una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje" (Moreno y Ramírez, 2016b, p. 244).

En un primer análisis de una tarea, salen a relucir una serie de datos que la caracterizan y describen: la *meta* de la tarea, que indica la expectativa de aprendizaje que se trabaja; la *formulación* de la tarea; los *materiales y recursos* necesarios; el *tipo de agrupamiento*, el cual indica cómo se dispondrán los alumnos; la *situación de aprendizaje* donde se propone la acción; y la *temporalización*, esto es, su duración. Asimismo, además de la concreción de estos datos, es importante realizar un estudio metódico que permita indagar en las siguientes variables de tarea para así tener una visión más certera de lo que esta implica: el contenido que interviene, la situación que se plantea y la complejidad que supone; estas son precisamente variables que también se han empleado en los sucesivos marcos PISA (OECD, 2003; OECD, 2016). Finalmente, otros dos últimos aspectos de una tarea a considerar son su estructura (según la información que da y lo solicitado) y la distinción entre problema y ejercicio.

Los anteriores aspectos serán de utilidad para confeccionar un sistema de categorías que nos permita realizar adecuadamente el análisis que nos proponemos, por lo que posponemos una descripción en profundidad para cuando detallemos tales categorías.

CAPÍTULO III

Metodología

La investigación que se ha llevado a cabo es principalmente de tipo cualitativo, la cual se basa en el análisis de contenido de documentos, y presenta un alcance eminentemente descriptivo pues nuestro interés es describir una serie de características y propiedades (Hernández, Fernández y Baptista, 2014); en particular, buscamos describir las tareas de una muestra de las PEBAU en las que interviene la derivada y los significados de la derivada que aparecen en estas.

Asimismo, como recogen Hernández et al. (2014), puede haber investigaciones que presenten básicamente un tipo de alcance, pero que aun así contengan aspectos de varios tipos. En este sentido, consideramos que este estudio también presenta algunas características propias de uno exploratorio pues en la revisión bibliográfica no se ha encontrado ningún estudio sobre el significado de la derivada en las PEBAU y, por otro lado, ninguna de las investigaciones encontradas sobre el estudio de los significados de otros conceptos matemáticos en estas pruebas ha basado su marco teórico en el análisis didáctico. De esta forma, se indaga en una temática no estudiada y haciendo uso de una perspectiva poco común, rasgos que Hernández et al. (2014) atribuye a los estudios de alcance exploratorio.

Describimos a continuación el principal método seguido para realizar esta investigación, que ha sido el ya mencionado análisis de contenido; tras esto, detallamos la muestra considerada y el sistema de categorías empleado.

3.1 EL MÉTODO DEL ANÁLISIS DE CONTENIDO

El método que se ha utilizado en este estudio para indagar en las tareas de las PEBAU en las que interviene la derivada y, en particular, en los significados de la derivada que se dan en estas ha sido el análisis de contenido como método de investigación. Atendiendo a lo desarrollado en Cohen, Manion y Morrison (2011) y Rico (2013), se entiende este método como un grupo de procedimientos, de carácter sistemático y estricto, que persigue el análisis riguroso, el examen y la verificación de contenidos de datos escritos, entre otros, y que tiene por finalidad revelar la estructura interna de la comunicación a través del estudio de su contenido semántico. Rico (2013) señala que el análisis de contenido puede ayudar en cuestiones propias de la investigación educativa como es el inferir significados interpretativos en un texto, lo cual precisamente perseguimos con este estudio.

Por otro lado, en Hernández, Fernández y Baptista (2006) se presenta el análisis de contenido como un método de investigación que posibilita realizar inferencias correctas y confiables de datos en relación con su contexto, y señala que este se efectúa a través de la codificación, el cual es un proceso que transforma las características relevantes del contenido en unidades de información, permitiendo así una descripción y análisis precisos. Respecto a cómo llevar a cabo el análisis de contenido, Rico (2013) propone una serie de fases o etapas a seguir:

- *Delimitar el corpus del contenido a analizar.* En nuestro caso, hemos considerado una muestra de las PEBAU andaluzas de la especialidad de Matemáticas que se detalla en la próxima sección; en particular, estábamos interesados en aquellos apartados de las tareas de estas pruebas en los que interviniese la derivada pero que no estuviesen guiados por la integración.
- *Concretar la unidad de análisis.* La unidad de análisis en este estudio ha sido los apartados de tarea, o tareas completas en caso de que no hubiese apartados.
- *Localizar en el texto las unidades de análisis.* Durante este proceso se identificaron en la muestra escogida los apartados y tareas sin apartados de interés, con los que se usó un sistema de códigos que, junto con una descripción detallada de la muestra, abordamos en la próxima sección.
- *Denominar, definir e interpretar las categorías.* El sistema de categorías empleado se describe al final de este capítulo. Su confección ha seguido un proceso tanto deductivo como inductivo pues, si bien en un comienzo se creó de forma previa al análisis un primer sistema de categorías basándonos en el marco teórico, este sistema se refinó según se fueron analizando distintas pruebas, debiendo de modificar algunas categorías y añadir otras para atender mejor a la descripción y recogida de información.

- *Codificar y cuantificar*. La cuantificación ha resultado interesante en muchos de los casos y, según la naturaleza de la categoría, se ha recogido esta cuantificación en términos de frecuencia o de porcentaje de distribución.
- *Relacionar entre sí e interpretar las categorías establecidas*. En este sentido, se ha buscado dar una visión global de lo obtenido para cada categoría, además de poner de relieve las relaciones más significativas que se hubieran identificado entre ellas. La descripción y discusión de los resultados se llevan a cabo respectivamente en los capítulos IV y V.
- *Relacionar el proceso de análisis de contenido con la cuestión que se indaga*. Esto se ha tenido presente no solo en el análisis, sino desde la misma confección de las categorías en las que ha intervenido de manera decisiva el marco teórico y, por ende, la cuestión que guía este trabajo, que es describir los significados de la derivada en las tareas de las PEBAU de Andalucía y caracterizar las tareas en las que interviene este concepto.

3.2 MUESTRA SELECCIONADA

La muestra que se ha seleccionado para nuestro estudio está conformada por las PEBAU andaluzas de Matemáticas II de los años 2013, 2014, 2015 y 2016, incluyendo tanto las correspondientes a las dos convocatorias oficiales, la ordinaria y la extraordinaria, como las restantes usadas como pruebas de reserva. De esta forma, como para cada año se confeccionan seis pruebas distintas y cada prueba consta a su vez de dos modelos, se han considerado un total de cuarenta y ocho modelos distintos, cada uno conformado por cuatro tareas. Si bien es cierto que en un principio se consideraron una mayor cantidad de años e incluso las PEBAU andaluzas de Matemáticas Aplicadas a Ciencias Sociales II, por cuestiones operativas con base en la extensión física y temporal de este trabajo se decidió la restricción a la muestra recién descrita. Para la obtención de las pruebas seleccionadas se recurrió a Junta de Andalucía (2017).

Una vez determinadas las pruebas con las que trabajar, se pasó a identificar los apartados de tareas, o tareas completas en caso de que no tengan distintos apartados, de la muestra descrita que involucren a la derivada; sin embargo, aquellos apartados o tareas sin apartados que están guiados por la integración se descartaron, aunque intervenga de modo alguno la derivada. De ahora en adelante, para clarificar la terminología, nos referiremos por ítem a cada apartado de tarea o tarea completa sin apartados que se haya considerado; por otro lado, nos referiremos por tarea a cada una de las cuatro actividades que se proponen en cada modelo, de tal forma que siguiendo esta terminología una tarea puede abarcar varios ítems.

Para realizar el análisis de los distintos ítems se utilizó un sistema de codificación que a continuación describimos y que usaremos en la descripción y discusión de los resultados. Un ejemplo de código es el siguiente: *M-2015-1-A-1-a*; en la figura 3.1 explicamos sobre este ejemplo cómo funciona el sistema de códigos.

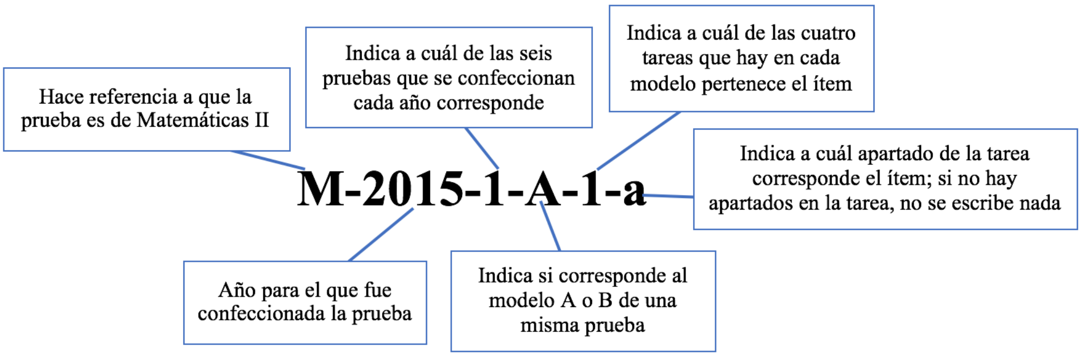


Figura 3.1. Explicación del sistema de códigos utilizado para los ítems

Todos los ítems analizados se recogen en el anexo I acompañados de sus correspondientes códigos.

3.3 SISTEMA DE CATEGORÍAS

Para organizar el análisis de contenido, se ha considerado un sistema de categorías con el que describir las características de las pruebas según nuestros intereses. Para ello, como ya se dijo, se ha seguido un proceso tanto de carácter deductivo como inductivo en la confección de las categorías: en primer lugar, el marco teórico considerado dio lugar a una primera versión de este sistema; en segundo lugar, tras llevar a cabo el análisis de varias de las pruebas consideradas en la muestra, se estimó conveniente modificar y añadir ciertas categorías para que atendiesen mejor a la recogida de datos de tal forma que, al perfilar el sistema de categorías, las unidades de información estuviesen exhaustiva e independientemente representadas.

Se describe a continuación la primera versión del sistema de categorías, relacionándolo con el marco teórico. Seguidamente, se presentan de forma justificada las modificaciones realizadas. Se finaliza esta sección recogiendo a modo de conclusión y síntesis el sistema de categorías final.

3.3.1 Sistema de categorías inicial

Describimos a continuación cada una de las categorías de las que constaba el sistema de categorías inicial y en qué elementos del marco teórico se apoyan. Tanto la confección de este sistema como las sucesivas modificaciones se llevaron a cabo a través de la triangulación entre el autor y los tutores del trabajo, de tal forma que se debatieron y acordaron las categorías óptimas para el propósito de esta investigación. Distinguimos dos grandes grupos entre las categorías que conforman este sistema: aquellas que están dirigidas a realizar un primer análisis de los ítems, basándonos para ello en lo desarrollado para el análisis de tareas en el marco teórico y partiendo de la información que se desprende de los enunciados (*categorías vinculadas con el análisis de tareas*), y aquellas que corresponden a un segundo análisis en el que se indaga en aspectos propios de la resolución de los ítems (*categorías relativas a la resolución de los ítems*). Comenzamos describiendo las primeras.

Categorías vinculadas con el análisis de tareas

Recuérdese que en la descripción del análisis de tareas hemos considerado una serie de datos que las caracterizan: meta, formulación, materiales y recursos necesarios, tipo de agrupamiento, situación de aprendizaje y temporalización (los tres últimos no son de nuestro interés por estar trabajando con tareas de evaluación). Asimismo, hemos marcado como variables de tarea el contenido, la situación y la complejidad de tarea, según lo desarrollado en los marcos PISA (OECD, 2003; OECD, 2016), y además presentábamos dos últimos aspectos a considerar que eran la estructura de un ítem y la distinción entre ejercicio y problema. Con las categorías que describimos en esta sección buscamos realizar un primer análisis de los ítems, y precisamente por ello van a estar relacionadas de forma directa o indirecta con alguno o varios de los aspectos anteriores; nos referiremos a ellas por *categorías vinculadas con el análisis de tareas*. Para mayor claridad en la explicación de tales categorías, las recogemos de forma esquemática en la figura 3.2.

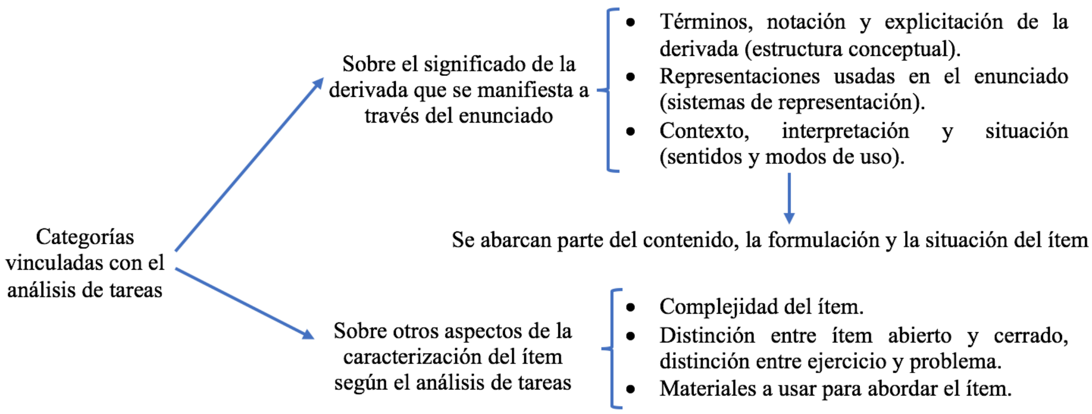


Figura 3.2. Esquema de las categorías iniciales vinculadas con el análisis de tareas

Dentro del grupo de categorías vinculadas con el análisis de tareas diferenciamos a su vez dos subgrupos. El primero está dirigido a determinar *el significado de la derivada que se manifiesta a través del enunciado*. Atendiendo a los tres componentes semánticos de la derivada, vamos a distinguir entre términos y notaciones que aparecen en el enunciado, además de si se explicita su uso (estructura conceptual), las representaciones que se usan (sistemas de representación) y el contexto, situación e interpretación que se proponen (sentidos y modos de uso). Estas categorías están relacionadas precisamente con la formulación del ítem, los contenidos y la situación de la tarea.

♦*Términos usados en el enunciado con significado matemático en relación con la derivada*: Con esta categoría se ha buscado recoger los términos empleados en el enunciado en relación con el concepto de derivada, que corresponde a uno de los cuatro tipos de hechos, esto es, el primer nivel de complejidad del ámbito conceptual correspondiente a la estructura conceptual de la derivada. Así pues, se han recogido en esta categoría aquellos términos que aparecen en el enunciado de los ítems y que hacen referencia al objeto derivada o a otros objetos, nociones, etc., directamente relacionados con esta.

♦*Notación usada para la derivada*: De nuevo en relación con la estructura conceptual, nos centramos en las notaciones empleadas para el concepto de derivada. Se ha buscado así recoger qué notación de la derivada aparece explícitamente en los enunciados, si es que aparece alguna. Posibles notaciones que cabrían encontrarse serían la de Newton, $\dot{f}(x)$, la de Leibniz, $d(f(x))/dx$, o la de Lagrange, $f'(x)$.

♦*Explicitación del uso de la derivada en el enunciado*: Esta es una categoría con modalidad de tipo dicotómico que surge en cierta manera como conclusión de las dos anteriormente descritas. Con ella se busca determinar si la derivada se explicita o no en el enunciado, para lo que se atiende tanto a los términos como a la notación usados. Como indicadores para tal explicitación se consideró el uso de algún término que compartiese su raíz léxica con los adjetivos derivable o diferenciable o el uso de cualquier tipo de notación para la derivada.

♦*Sistemas de representación usados en el enunciado*: Con las anteriores categorías se ha atendido a la estructura conceptual de la derivada. Otro de los componentes del significado de un contenido matemático escolar eran los sistemas de representación y, en este sentido, se busca con esta categoría describir los sistemas de representación que se usan en los enunciados de los ítems; de esta forma, también podemos considerar que se atiende a la propia formulación del ítem. A priori, consideramos que podrían aparecer los siguientes sistemas de representación: verbal, simbólico, gráfico, tabular y geométrico; si bien también se tuvo en cuenta el pictórico, su presencia pareció poco probable. Asimismo, cabe decir que para considerar que en un enunciado aparece una representación de carácter simbólico no hemos interpretado como suficiente la presencia de cifras que hiciesen referencia a cantidades; por el contrario, consideramos necesario que apareciese algo más como son letras con el papel de variables o parámetros, una fórmula, etc. La presencia de estos sistemas no tiene por qué darse de forma aislada; de hecho, se esperaba encontrar enunciados con representaciones múltiples. Así pues, las modalidades para esta categoría serían los sistemas de representación antes listados y combinaciones de estos.

♦*Contextos de la derivada:* Pasamos ahora a tratar tres categorías que surgen de considerar la tercera componente del significado de un contenido matemático: los sentidos y modos de uso. En particular, recogemos en esta categoría los contextos propios de la derivada que aparecen en los ítems analizados. De esta forma, basándonos en lo descrito en Ruiz-Hidalgo (2016), se busca describir a qué funciones o necesidades atiende el concepto de derivada en los distintos ítems.

♦*Interpretación de la derivada:* Con esta categoría, que de nuevo corresponde a los sentidos y modos de uso de la derivada, se busca describir la interpretación de la derivada que se da en los distintos ítems. En este sentido, si bien se han recogido varios artículos sobre concepciones de la derivada en la descripción de los antecedentes, como sería Contreras et al. (2003) entre otros, nos hemos basado en Dolores (1998) y, en particular, en cuatro posibles concepciones que pueden construir los estudiantes de las que parte el anterior trabajo. De esta forma, a priori hemos considerado como posibles interpretaciones de la derivada a encontrar las siguientes: la derivada como límite de un cociente incremental, la derivada como pendiente de la recta tangente, la derivada como velocidad o aceleración de un móvil y la derivada como un mero algoritmo relacionado con la aplicación de reglas de derivación.

♦*Situación:* Otras de las componentes del sentido de un contenido matemático eran las situaciones, componente que hace referencia precisamente a aquellas situaciones y ámbitos en los que se trabaja el contenido correspondiente; asimismo, esta era una de las variables de tarea que anteriormente hemos mencionado. Cuatro son los tipos de situaciones que se consideran en el marco PISA (OECD, 2016): personales, cuando la tarea está relacionada con actividades diarias que realizan los estudiantes; las laborales–educativas, que son situaciones propias del entorno de trabajo o del propio centro escolar; las públicas o sociales, que son relativas a la comunidad, destacando aquí los medios de comunicación; y finalmente las científicas, que son de carácter abstracto y están relacionadas con alguna actividad científica y/o tecnológica. Estas son precisamente las modalidades que se han adoptado para esta categoría, si bien para el último tipo de situación, las científicas, se concretará también con cuál ámbito científico o tecnológico está relacionado el ítem correspondiente.

Por otro lado, hemos considerado un segundo subgrupo de categorías que busca describir otros aspectos que caracterizan propiamente al ítem y que aún no se han tratado como son la complejidad, la estructura, la distinción entre ejercicio y problema y los materiales necesarios (vuelva a verse la figura 3.2).

♦*Complejidad del ítem:* La dificultad o complejidad de una tarea es una cuestión que puede ser difícil de precisar pues dependerá en gran medida del alumno que la afronte. Desde los marcos PISA se han venido utilizando tres grados de dificultad para describir la complejidad de las tareas: reproducción, conexión y reflexión (OECD, 2003); si bien es cierto que a partir de 2012 esta clasificación dejó de emplearse en los estudios PISA, hemos optado por considerarla por lo extendido de su uso, siendo de hecho la clasificación escogida por Moreno y Ramírez (2016b). El grado *reproducción* corresponde a ejercicios familiares y que se basan en la reiteración de conocimientos;

una tarea de *conexión* requiere relacionar representaciones distintas de una misma situación o enlazar aspectos diferentes para poder alcanzar la solución; una tarea de *reflexión* implica un mayor número de elementos y competencias más complejas, requiriendo de generalizaciones, explicaciones y justificación de los resultados. Adoptaremos precisamente estos tres grados como las modalidades para esta categoría.

♦*Ítem abierto y cerrado:* Otro aspecto de las tareas considerado en el análisis de tareas es la estructura. Se dice que una tarea es cerrada si se concreta claramente aquello que se solicita y la información dada; por el contrario, en caso de que haya incertidumbre en algunos de los dos aspectos anteriores, se dice que es abierta (Moreno y Ramírez, 2016a). En este sentido, buscamos recoger en esta categoría la estructura de los ítems, distinguiendo entre ítems abiertos y cerrados. Por el formato propio de las PEBAU, cabría esperar que todos los ítems a analizar fuesen cerrados.

♦*Ejercicio o problema*: También se incluyó en el análisis de tareas la distinción entre ejercicio y problema. Siguiendo a Moreno y Ramírez (2016a), usaremos esta categoría para referirnos a la incertidumbre que existe en relación con la resolución de un ítem: hablaremos de ejercicio cuando el proceso de resolución sea totalmente conocido; por el contrario, hablaremos de problema cuando consideremos que puede existir un cierto grado de incertidumbre.

♦*Materiales a usar*: Se recoge en esta categoría qué materiales ha de usar el alumno para abordar los distintos ítems, lo cual como se ha dicho corresponde a una de las características a estudiar en el análisis de tareas. En particular, se entiende que será necesario usar "lápiz y papel" en todos. Pero también pudiera ocurrir que fuese necesario, o al menos muy conveniente, usar la calculadora en alguno concreto, un compás, etc.

Categorías relativas a la resolución de los ítems

Además de las anteriores categorías vinculadas con el análisis de tareas, se ha considerado también otro conjunto de categorías encaminadas a indagar en aspectos propios de la resolución de los ítems, conjunto que recogemos de forma esquemática en la figura 3.3. En particular, buscamos con ellas describir el *significado de la derivada que hay que poner en juego para resolver los ítems*.

Categorías relacionadas con la resolución del ítem → Sobre el significado de la derivada que hay que poner en juego para la resolución

- Contenido relativo a la derivada que interviene en la resolución (estructura conceptual).
- Sistemas de representación que se solicita usar en la resolución, realización de conversiones o procesamientos (sistemas de representación).
- Uso local, global o del operador (sentidos y modos de uso).

Figura 3.3. Esquema de las categorías iniciales relacionadas con la resolución

Atendiendo de nuevo a las tres componentes del significado de un contenido matemático escolar, hemos distinguido entre el contenido relativo a la derivada que interviene en la resolución (estructura conceptual), los sistemas de representación a usar y si es necesario realizar conversiones o solo procesamientos (sistemas de representación) y el uso local, global o del operador (sentidos y modos de uso).

♦*Contenido relativo a la derivada que interviene en la resolución*: Esta categoría atiende a los contenidos relacionados con la derivada que se han de usar en la resolución de los distintos ítems, lo que supone indagar en el ámbito conceptual relativo a la estructura conceptual de la derivada; en particular, se aborda su segundo nivel de complejidad, es decir, los conceptos y las relaciones que intervienen. En un primer momento, se recogía en esta categoría cada definición y teorema relacionados con la derivada que fuesen necesarios en la resolución, tomando como base los contenidos recogidos en la LOE (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) y considerando también los de la LOMCE (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015). Pero, como se verá más adelante, resultó poco operativo el desgranar tanto los contenidos por lo que finalmente se optó por considerar bloques de contenido.

♦*Sistemas de representación que se solicita usar en la resolución*: Tratando ahora los sistemas de representación, se busca estudiar con esta categoría aquellos sistemas de representación que se han de usar en la resolución de los ítems, con especial interés en los relativos a la derivada y a la función a derivar. Precisamente, basándonos en los sistemas de representación usados con otros conceptos del análisis matemático (Blázquez y Ortega, 2001), a priori se han considerado como posibles sistemas de representación a usar el simbólico, el gráfico y el tabular. No hemos considerado interesante en este sentido recoger el uso del sistema de representación verbal, el cual es claro que se dará en la resolución de la casi totalidad de los ítems. Así pues, en principio consideramos como modalidades para esta categoría los tres sistemas de representación anteriores y combinaciones de estos.

♦*Conversión o procesamiento*: Siguiendo a Duval (1999), entenderemos por procesamiento el realizar transformaciones de una representación en el mismo sistema de partida y por conversión el realizar traducciones de una expresión creada en un cierto sistema de representación a su expresión en otro sistema diferente del de partida. Con esta categoría buscamos recoger precisamente si en la resolución del ítem se ha de llevar a cabo alguna conversión o únicamente se han de realizar procesamientos.

♦*Uso local, global o del operador*: En esta categoría, atendiendo a uno de los actuales intereses en la investigación de la comprensión de la derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2008), se busca determinar si en la resolución de los ítems se pone en juego un aspecto local o global de la derivada, esto sería el uso de la derivada de una función en un punto o la función derivada respectivamente; también hemos incluido en esta categoría el estudiar si se recurre al operador derivada, algo a priori poco probable. Asimismo, si se han de usar varios de los anteriores aspectos en un mismo ítem, se busca determinar si alguno permite el paso a otro; por ejemplo, es de esperar que en varios de los ítems se requiera el cálculo de la función derivada, lo que corresponde al aspecto global, para posteriormente evaluarla en algún punto o buscar puntos donde se anule con el fin de encontrar los extremos de la función original, lo que correspondería a un aspecto local. En este último caso descrito, ha sido necesario primero abordar el aspecto global para posteriormente pasar al local. Así pues, esta categoría presenta a priori un gran número de modalidades, pues estas incluirían si se hace uso del aspecto local, global y/o del operador derivada, junto con combinaciones de estos, además de recoger si alguno permite el paso a otro.

3.3.2 Modificaciones al sistema de categorías

El anterior sistema de categorías nos pareció adecuado en un primer momento. Sin embargo, a medida que se usaba para ir analizando distintas pruebas, se consideró conveniente realizar una serie de cambios que incluían modificar algunas categorías y añadir otras nuevas para así atender mejor al objetivo de este trabajo, buscando que las unidades de información pudieran estar mejor descritas y representadas. Como se ha dicho, todas las propuestas de modificación llevadas a cabo se tomaron de mutuo acuerdo entre el autor y los tutores de este trabajo. Se describen a continuación las categorías modificadas y las nuevas categorías.

En primer lugar, la categoría relativa al estudio del contenido necesario para la resolución de un ítem se simplificó en una serie de bloques que aglutinaban conceptos y resultados relacionados con la derivada. Así pues, las modalidades de esta categoría se redujeron a las siguientes: derivadas laterales, caracterización de extremos, estudio de la monotonía de una función, caracterización de los puntos de inflexión, representación gráfica, rectas tangentes, rectas normales y la regla de L'Hôpital. Como apreciación, decir que respecto al bloque "representación gráfica" se ha considerado que ya incluye los contenidos propios de "caracterización de extremos" y "estudio de la monotonía de una función" que son necesarios para la representación de funciones. Asimismo, se añadieron las siguientes categorías.

♦*Puntuación asignada*: Como ya se describió, cada modelo de las PEBAU de Andalucía en la especialidad de Matemáticas consta siempre de cuatro tareas, cada una de las cuales es puntuada sobre 2,5 puntos en total, dividiéndose esta puntuación entre los distintos apartados que tenga. Sin embargo, como la unidad de análisis son los apartados de las tareas, o las tareas completas cuando estas no se dividan en distintos apartados, hemos considerado oportuno recoger a través de esta categoría la puntuación asignada a cada uno de los ítems analizados, pues es algo que podría tener especial interés no por sí solo pero sí en la comparación de esta categoría con otras.

♦*Capacidad requerida*: Otra cuestión importante que no había sido recogida es qué procesos cognitivos espera el evaluador que el estudiante lleve a cabo para resolver un ítem, esto es, lo que el evaluador pretende que el alumno realice. Estas capacidades que se requieren del estudiante están relacionadas tanto con las expectativas de aprendizaje asociadas al ítem como con su meta, pero han de tratarse desde el prisma de las tareas de evaluación que es el tipo de tareas que abordamos en este estudio. En este sentido, el marco PISA (OECD, 2016) considera que la competencia matemática hace referencia a la capacidad de los individuos para *formular*, *emplear* e *interpretar* las matemáticas; estos tres elementos indican los procesos que tiene que llevar un individuo para resolver un problema. En particular, *formular* se refiere a la capacidad de identificar oportunidades para usar las matemáticas y, tras esto, dotar de la estructura matemática necesaria a un cierto problema; *emplear* se refiere a la capacidad de aplicar conceptos, procedimientos, datos y razonamientos en la resolución de problemas con el fin de llegar a conclusiones de carácter matemático; *interpretar* se refiere a la capacidad de reflexionar acerca de los resultados, soluciones o conclusiones e interpretarlos y valorarlos en el contexto del problema correspondiente. Basándonos en lo anterior, recogemos en esta categoría cuáles de estos tres procesos son los más enfatizados (y por tanto en los que tiene mayor interés el evaluador) en cada uno de los ítems.

♦*Tipo de función*: Otro aspecto que no quedaba recogido en las anteriores categorías y que consideramos importante, pudiendo incluso afectar a la dificultad general de un ítem, era la función con la que se debía trabajar. Así pues, hemos considerado esta categoría para describir el "aspecto" de las funciones a derivar en los distintos ítems, categoría que consideramos propia del estudio del *significado de la derivada que se manifiesta a través del enunciando*, en particular de su parte estructural. Para realizar esta descripción, hemos usado lo que llamamos rasgos de una función, que busca determinar las distintas características de esta en relación con las funciones más sencillas que la conforman y a las técnicas de derivación a usar. Por ejemplo, diremos que la función $f(x) = sen(2x^3 + x) + \sqrt{x}$ tiene cuatro rasgos: trigonométrico, polinómico, de composición y potencia de exponente racional. En este sentido, los rasgos considerados son los siguientes: polinómico, potencia de exponente negativo, potencia de exponente racional, fracción algebraica, exponencial, logarítmico, trigonométrico, valor absoluto, producto, cociente, composición y a trozos. Téngase presente que la suma y la resta no se han considerado rasgos relevantes y que para contabilizar el rasgo polinómico ha de aparecer un polinomio de grado mayor que uno y/o con dos o más términos.

Cabe recordar la definición de función elemental, con la que Spivak (2006) se refiere a aquellas funciones que surgen de combinar funciones racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus inversas mediante las operaciones de suma, producto, cociente o composición. Siguiendo esta idea, vamos a introducir la noción de función simple, que atendiendo al álgebra de derivadas serán funciones sencillas de derivar; llamaremos función simple a una función que únicamente tenga por rasgos algunos de los siguientes: polinómico, trigonométrico, logarítmico, exponencial o potencia de exponente entero o racional. Si la función incluye un rasgo distinto de los recién listados, diremos que es no simple pues consideramos que en este caso su derivación entraña una mayor dificultad.

3.3.3 Sistema de categorías final

Para finalizar esta sección, presentamos a modo de síntesis las categorías que han conformado finalmente el sistema de categorías usado en el análisis de contenido, habiendo un total de dieciocho. Las recogemos en la figura 3.4.

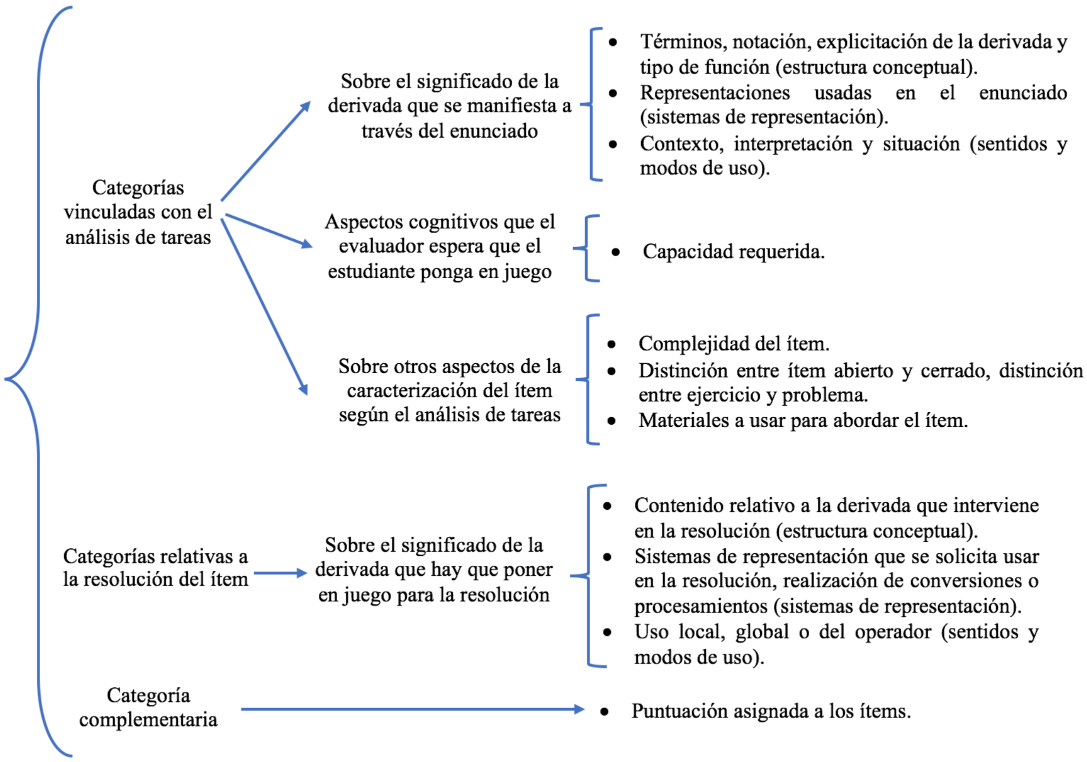


Figura 3.4. Síntesis del sistema de categorías final

CAPÍTULO IV

Descripción de los resultados

Desarrollamos a continuación la descripción de los resultados obtenidos para cada una de las categorías indicadas en el anterior capítulo III, donde se detalló la metodología de este trabajo. Si bien se contrastarán y enlazarán algunos de los resultados obtenidos, posponemos una discusión más profunda de estos para el capítulo V.

4.1 NÚMERO DE ÍTEMS IDENTIFICADOS Y DISTRIBUCIÓN

En primer lugar, antes de describir los resultados obtenidos para cada categoría, es pertinente concretar el número de ítems de interés identificados en el análisis de la muestra seleccionada. Recuérdese que en la descripción de la metodología concretamos que la unidad de análisis serían los apartados de tareas o las tareas completas en caso de que estas no tuviesen distintos apartados; con base en esto, se han identificado un total de 73 ítems relativos a la derivada. Estos 73 ítems corresponden a su vez a 56 tareas distintas en las que interviene la derivada, ya sea en toda la tarea o únicamente en algunos de sus apartados. Como se han analizado un total de 48 pruebas, la media de ítems por prueba sería 1,52 ítems, mientras que la media de tareas por prueba sería 1,17 tareas. La presencia de estos ítems y tareas según los distintos años considerados queda recogida en la tabla 4.1.

Tabla 4.1
Número de ítems y tareas identificados en las pruebas analizadas

	Número identificado en las pruebas				
Elementos a identificar	2013	2014	2015	2016	Total
Ítems	18	21	17	17	73
Tareas	14	16	12	14	56

Se observa pues que el número de ítems identificados por año y el número de tareas correspondientes por año no varía demasiado; en particular, las medias por año son 18,25 ítems y 14 tareas respectivamente y es en 2014 donde encontramos un mayor número tanto de ítems como de tareas en los que interviene la derivada. Para dar una información más detallada, recogemos en la figura 4.1 el porcentaje del total de tareas de cada año en las que interviene la derivada en todos o alguno de sus apartados, y que por tanto han sido analizadas, comparándose con el porcentaje global que corresponde a un 29,17% de las tareas de toda la muestra.

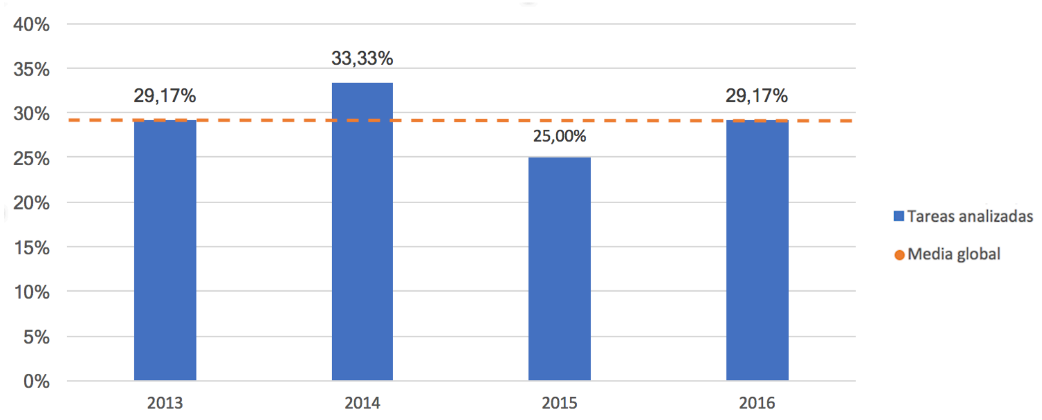


Figura 4.1. Porcentaje de tareas analizadas total o parcialmente por año

Respecto a la posición de estas tareas destaca que, de las cuatro que conforman cada opción de las distintas pruebas, la primera casi siempre involucra el uso de la derivada. Ya la segunda tarea varía en función de la prueba, pudiendo encontrar algunas dedicadas en su totalidad a la derivada, lo cual no es muy común, algunas en las que interviene de forma secundaria siendo la integral el eje alrededor del cual gira la tarea, y algunas donde no interviene en absoluto (obsérvense las medias mostradas anteriormente).

4.2 CATEGORÍAS VINCULADAS CON EL ANÁLISIS DE TAREAS

Describimos en esta sección los resultados obtenidos para aquellas categorías que están vinculadas con el análisis de tareas. Recuérdese que aquí se abordaba el estudio de los significados de la derivada que se manifiestan a través del enunciado, los aspectos cognitivos que el evaluador requería del alumno y otros aspectos directamente dirigidos a caracterizar los ítems.

Términos usados en el enunciado en relación con la derivada

Con esta categoría se buscaba identificar términos presentes en los enunciados que hiciesen referencia directa al objeto derivada o a alguna de sus interpretaciones, propiedades, etc., según lo descrito en la metodología. En este sentido, se han encontrado los siguientes términos: derivable, derivabilidad, máximo/a, mínimo/a, mayor, menor, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos, máximo relativo, mínimo relativo, punto de inflexión, esboza (la gráfica), tangente y recta normal. Asimismo, se ha añadido la modalidad "Otros" que aglutina otros términos no directamente relacionados con la derivada, como lo son "límite" o "asíntota". Algunas consideraciones que el lector debe tener presente son: los singulares y plurales de los términos se han contabilizado por igual; los términos "máximo/a" y "mínimo/a" anteriormente señalados no hacen referencia a los extremos de una función, sino a cantidades; algunos términos han aparecido en una parte común del enunciado a varios apartados, de tal forma que solo se han contabilizado para el apartado al que hemos considerado que va dirigido en especial (véase en la figura 4.2 como aparece el término "derivable" en una parte del enunciado común a los ítems M-2014-3-B-1-a y M-2014-3-B-1-b, habiéndose asignado al primero).

Ejercicio 1.- Considera la función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

M-2014-3-B-1-a
a) **[1'75 puntos]** Calcula a y b.
M-2014-3-B-1-b
b) **[0'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

Figura 4.2. Ejemplo de término en una parte común del enunciado a varios ítems

En la tabla 4.2 se recoge la frecuencia de aparición de los términos identificados según los distintos años considerados.

Tabla 4.2
Frecuencia de aparición de los términos de interés identificados

	Veces que aparecen en las pruebas				
Términos identificados	2013	2014	2015	2016	En total
Derivable	1	2	1	0	4
Derivabilidad	0	0	1	0	1
Máximo/a	1	1	1	1	4
Mayor	1	0	1	0	2
Mínimo/a	1	2	2	1	6
Menor	0	1	0	1	2
Intervalos de crecimiento y decrecimiento	2	1	2	4	9

Tabla 4.2
Frecuencia de aparición de los términos de interés identificados

Términos identificados	Veces que aparecen en las pruebas 2013	2014	2015	2016	En total
Extremos	2	3	4	5	14
Máximo relativo	1	1	0	0	2
Mínimo relativo	1	0	0	0	1
Punto de inflexión	3	1	1	2	7
Esboza (la gráfica)	0	0	1	0	1
Tangente	3	6	3	4	16
Recta normal	4	1	0	1	6
Otros	5	3	4	5	17

Se tiene que, dejando de lado la modalidad "Otros", el término "tangente" es el que se da con mayor frecuencia, apareciendo un total de 16 veces en los ítems analizados. Asimismo, encontramos con un total de 14 apariciones el término "extremo" seguido por las 9 apariciones de los términos "intervalos de crecimiento y decrecimiento". Respecto a variaciones significativas a lo largo de los años cabe señalar como el término "recta normal" prácticamente desaparece a partir de 2014 y que el término "extremos" aumenta su frecuencia según los años, algo interesante junto con el repunte en el 2016 del término "Intervalos de crecimiento y decrecimiento". Términos con una presencia ínfima son "derivabilidad", "mínimo relativo" y "esboza". El resto de términos se mantiene relativamente estables u oscilantes. La modalidad "Otros" tiene una presencia considerable, dándose 17 veces, pero esto se entiende por ser una modalidad que abarca distintos términos.

Se tiene que hay un gran número de términos relativos al estudio de una función ("Intervalos de crecimiento y decrecimiento", "extremos", "máximo relativo", "mínimo relativo", "punto de inflexión" y "esboza la gráfica") que suponen un 36,96% del total de términos identificados, mientras que "tangente" y "recta normal" juntos suponen un 23,91%. Sin embargo, no debe concluirse precipitadamente de esto que los contextos más comunes estén relacionados con el estudio de una función o el cálculo de rectas tangentes y normales pues es usual que varios términos aparezcan juntos en un mismo ítem, como es común que ocurra con "extremos" e "intervalos de crecimiento y decrecimiento" (por ejemplo, en el ítem M-2013-3-B-1-b), por lo que podrían darse dos o más términos distintos de un mismo bloque, o de varios, para un mismo ítem. De hecho, llegan a encontrarse un total de 16 ítems en cuyos enunciados sólo aparece un término de la modalidad Otros; además, hay dos ítems en cuyos enunciados no se ha identificado ningún término (M-2014-5-A-1 y M-2015-4-B-1), lo cual se debe a que se apoyan en la notación $\lim_{x \to a}$, evitando así el término "límite".

Notación usada para la derivada

Respecto a esta categoría, no se tiene ningún ítem analizado que utilice alguna notación simbólica para la derivada. Sí es cierto que en algunas tareas que giran en torno a la aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo Integral, en particular en aquellas que buscan el cálculo de una primitiva de una cierta función dada, se hace uso de la notación de Lagrange, es decir, $f'(x)$. Si bien estas tareas no son de nuestro interés, se ha creído conveniente hacer esta apreciación.

Concluimos pues que hay una escasez total en el uso de notaciones para la derivada de una función, no únicamente en lo que respecta a variedad de notaciones, también en cuanto a la presencia de estas pues, como se ha dicho, no se ha analizado absolutamente ningún ítem cuyo enunciado recogiese alguna notación para la derivada.

Explicitación del uso de la derivada en el enunciado

Con esta categoría se buscaban identificar ítems en los que se explicitase el uso de la derivada, bien a través de algún término del enunciado que hiciese referencia directa a esta o bien a través del uso de alguna notación simbólica. Teniendo en cuenta lo descrito para las dos anteriores categorías, no debiera sorprender que únicamente se identificasen cinco tareas en las que se explicita el uso de la derivada: una en 2013, dos en 2014, dos en 2015 y ninguna en 2016. Se presenta la información por tareas y no por ítems porque en aquellas tareas de varios apartados en las que se explicita el uso de la derivada, esta explicitación tiene lugar al comienzo del enunciado en una parte común para los distintos apartados, como se ha visto en la figura 4.2; con lo cual entendemos que tiene poco interés mostrar los resultados de esta categoría por ítems, resultando más coherente recoger la información atendiendo a las tareas completas.

En los cinco casos identificados, el indicador para esta explicitación ha sido o bien el término "derivable", el cual aparece en cuatro de estas cinco tareas (como en el ya mostrado ítem M-2014-3-B-1-a), o bien el término "derivabilidad", el cual aparece en la tarea restante (véase el ítem M-2015-2-B-1-a). No se ha identificado esta explicitación a través de la notación pues, como ya se describió en el análisis de la anterior categoría, no se hace uso alguno de la notación simbólica para la derivada en ninguno de los enunciados de los ítems considerados.

Tipo de función

Con esta categoría se buscaba describir las funciones con las que se ha trabajar en los ítems analizados, apoyándonos en lo que hemos llamado rasgos de una función; en particular, hemos recogido la información de aquellas funciones que se deben derivar. A partir del análisis, se han encontrado funciones muy variadas en cuanto a forma y complejidad. Se recoge en la tabla 4.3 los rasgos de estas funciones y su frecuencia según los años considerados. Téngase en cuenta que, para realizar este recuento, en los ítems en los que se debía de aplicar la regla de L'Hôpital para el cálculo del límite de un cociente, numerador y denominador se han considerado como dos funciones distintas a derivar (véase por ejemplo el ítem M-2015-6-B-1-a).

Tabla 4.3
Rasgos identificados en las funciones a derivar

	Número de funciones en las que se dan				
Rasgos de función	2013	2014	2015	2016	En total
Polinómico	10	13	13	10	46
Potencia de exponente negativo	2	5	2	2	11
Potencia de exponente racional	2	1	0	0	3
Fracción algebraica	1	1	2	1	5
Exponencial	3	5	5	6	19
Logarítmico	5	4	1	4	14
Trigonométrico	1	5	4	2	12
Valor absoluto	0	1	1	1	3
Producto	1	5	0	5	11
Cociente	2	1	2	1	6
Composición	5	3	2	5	15
A trozos	1	2	1	0	4

El rasgo que aparece con mayor frecuencia es el polinómico, con un total de 46 apariciones, seguido del rasgo exponencial, de la composición y del logarítmico con 19, 15 y 14 apariciones respectivamente. Es llamativo, tal y como se observa en la tabla, que no exista algo más de uniformidad en la presencia de los distintos rasgos, dándose así un esbozo del tipo de función que con mayor probabilidad podríamos encontrarnos.

Pero para proporcionar una visión un poco más exacta de la complejidad de aquellas funciones con las que se ha de trabajar hemos recurrido a la noción de función simple introducida en la metodología; no únicamente se ha buscado determinar el número de funciones simples y no simples, sino también indicar para aquellas que no sean simples cuántos rasgos la conforman. Recogemos en la figura 4.3 la distribución global de los distintos tipos de función. Cabe decir que, en este caso, cada rama de una función definida a trozos se ha contabilizado como una función independiente pues entendemos que el estar definida a trozos no supone una mayor complejidad en cuanto al uso de técnicas de derivación, sino que simplemente se ha de abordar cada rama de forma separada; por lo tanto, el rasgo "a trozos" no se ha tenido presente en esta ocasión.

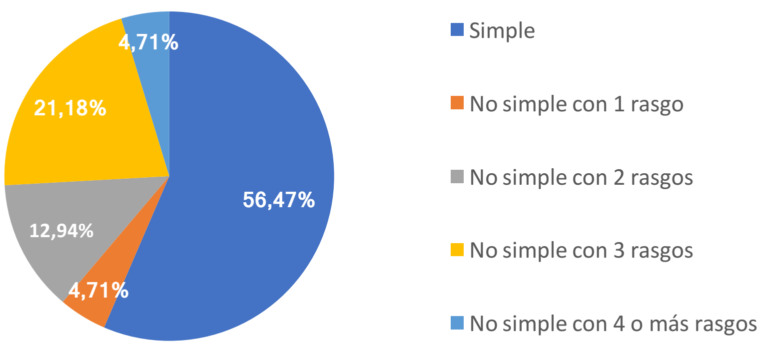


Figura 4.3. Distribución global de los tipos de función

Destaca ante todo como predominan las funciones simples con un 56,47% del total de funciones consideradas (es en 2015 cuando más predominan con un 66'67% del total), siendo el siguiente tipo más común las funciones no simples de tres rasgos. La proporción de funciones simples y funciones no simples es por tanto bastante similar. Cabe decir que apenas hay variaciones significativas en la distribución de estos tipos de función a lo largo de los años.

Sistemas de representación usados en el enunciado

Con esta categoría se buscaba describir los sistemas de representación en los que se apoyan los enunciados de los ítems. En el análisis llevado a cabo se han identificado únicamente tres tipos de representaciones: representaciones verbales, representaciones múltiples que abarcan aspectos verbales y simbólicos y, de forma marginal, también aparece una representación múltiple de carácter verbal y geométrico. Recuérdese que, como se describió en la metodología, para que se considerase que un enunciado estaba conformado en parte por una representación simbólica, debía de aparecer en él algo más que meras cifras para indicar cantidades; nos referimos así a letras con el significado de parámetros o variables, fórmulas, etc. La distribución correspondiente según los distintos años considerados se recoge en la figura 4.4.

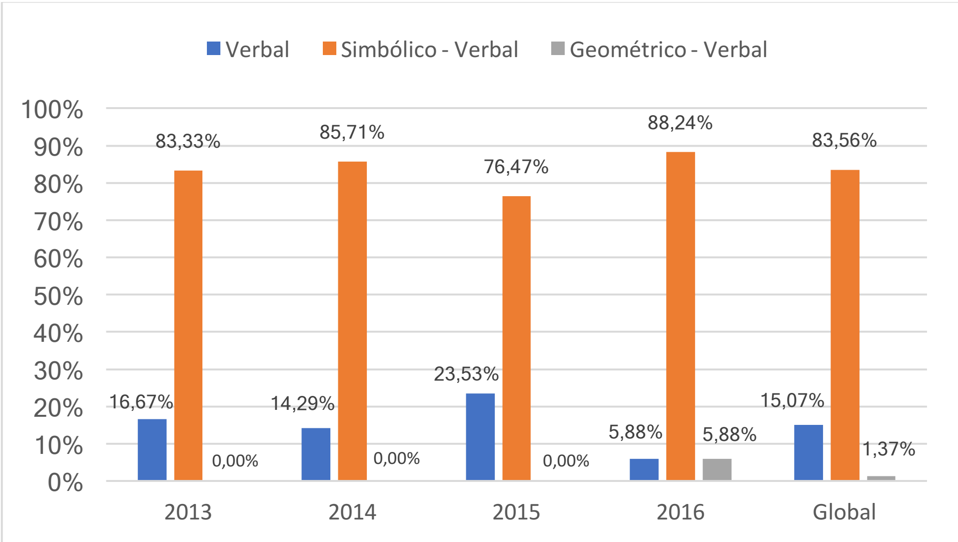


Figura 4.4. Distribución de los sistemas de representación usados en los enunciados

Se observa en la figura que en todos los años predominan los enunciados conformados por representaciones múltiples de carácter simbólico y verbal, constituyendo estos un 83,56% del total. Precisamente, el sistema de representación simbólico suele usarse en la mayoría de estos ítems para explicitar la función con la que se requiere trabajar a través de su fórmula. Con una diferencia considerable, le siguen los enunciados puramente verbales, que corresponden a un 15,07% de los ítems analizados y son en su totalidad problemas de optimización. El uso de la representación de carácter geométrico indicado anteriormente corresponde al ítem M-2016-1-B-1 recogido en la figura 4.5, que es un problema de optimización que describe una situación en el enunciado verbal apoyándose en una figura geométrica. Se tiene pues que en todos los enunciados aparecen representaciones verbales, lo cual era de esperar por el propio formato de las pruebas consideradas.

M-2016-1-B-1

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12 800 m^2 dividido en 3 parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo.

Se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas). Determina las dimensiones del solar y de cada una de las tres parcelas para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.

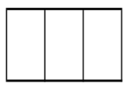


Figura 4.5. Único ítem que hace uso de una representación geométrica

Concluimos que hay una carencia absoluta en lo que respecta a los sistemas de representación gráfico y tabular, que el geométrico aparece de forma marginal y que, como se esperaba, tampoco ha aparecido el pictórico.

Contextos de la derivada

Con esta categoría se buscaba describir qué contextos de la derivada se dan en los distintos ítems, esto es, a qué cuestiones atiende la derivada en ellos. Se recogen en la tabla 4.4 los contextos identificados en el análisis y sus frecuencias de aparición según los años; ténganse en cuenta para su interpretación que para algunos ítems se han asignado más de un contexto (véase por ejemplo el ítem M-2014-3-B-1-a al que se le han asignado los contextos de interpolación y cálculo de límites).

Tabla 4.4
Contextos identificados en los ítems analizados

	Número de ítems en los que se dan				
Contextos	2013	2014	2015	2016	En total
Estudio de la derivabilidad	0	0	1	0	1
Cálculo de límites (L'Hôpital)	5	6	4	5	20
Cálculo de extremos	2	3	2	4	11
Estudio de la monotonía	2	1	2	4	9
Optimización	3	4	4	3	14
Representación gráfica	0	1	0	0	1
Interpolación	5	6	5	6	22
Cálculo de pendientes o rectas tangentes	3	3	1	2	9
Cálculo de puntos de tangencia con recta	0	2	1	0	3
Cálculo de rectas normales	3	1	0	1	5

Se tiene que los contextos más frecuentes son la interpolación de funciones y el cálculo de límites, apareciendo respectivamente en un 30,14% y un 27,40% de los ítems analizados, los cuales se han dado simultáneamente en varias ocasiones. Le siguen con cierta diferencia los contextos de optimización, cálculo de extremos, estudio de la monotonía y cálculo de pendientes o rectas tangentes. Resulta interesante que solo se haya identificado un ítem cuyo contexto sea el estudio de la derivabilidad de una función, el ítem M-2015-2-B-1-a que mostramos en la figura 4.6.

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.
M-2015-2-B-1-a
a) **[0'5 puntos]** Estudia la derivabilidad de f.
M-2015-2-B-1-b
b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
M-2015-2-B-1-c
c) **[1 punto]** Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Figura 4.6. Único ítem en el que se da como contexto el estudio de la derivabilidad

Asimismo, otro contexto que apenas se ha dado ha sido la representación gráfica, pero posponemos la explicación de esto para la categoría *contenido que interviene en la resolución*, por encontrarse parte de la razón precisamente en el contenido requerido. Respecto a las variaciones a lo largo de los años, se observa un decrecimiento del número de contextos sobre el cálculo de rectas normales y un leve aumento del estudio de la monotonía en los últimos años. Pasamos a recoger en la figura 4.7 el porcentaje de los ítems analizados en los que se da cada contexto.

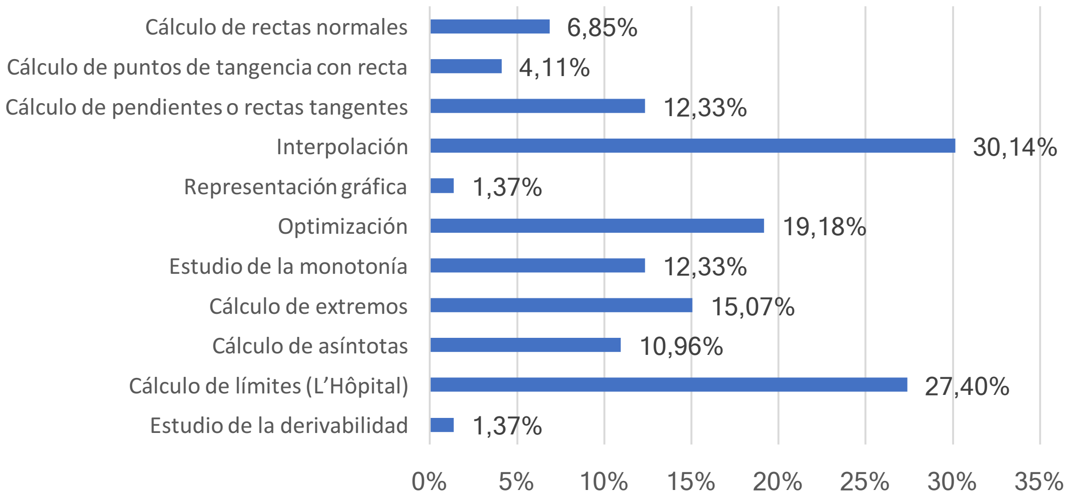


Figura 4.7. Porcentaje de ítems en los que se da cada contexto

Para finalizar, presentamos dos consideraciones pertinentes para la interpretación de los anteriores datos. Por un lado, se ha dado la existencia de tareas a lo largo de las pruebas en las que se solicitaba el cálculo de asíntotas, pero sólo en algunas de estas la derivada era necesaria y únicamente lo era para resolver una indeterminación. Así pues, téngase presente que en estos casos el contexto asignado ha sido el de "cálculo de límites". Una última cuestión es que en ocho de los nueve ítems en los que se dio el contexto "estudio de la monotonía" también se dio el contexto "cálculo de extremos"; en el caso restante en que esto no era así, la búsqueda de extremos y el estudio de la monotonía aparecían separados en dos apartados distintos, correspondiendo pues a dos ítems diferentes (ítems M-2015-2-B-1-b y M-2015-2-B-1-c).

Interpretación de la derivada

En esta categoría buscábamos determinar las interpretaciones de la derivada que se ponían en juego en los distintos ítems. Se han identificado tres interpretaciones, entre las que están la derivada como pendiente de la recta tangente y la derivada como un algoritmo. La tercera interpretación no se encuentra entre las modalidades consideradas a priori para esta categoría; corresponde a aquellos ítems en los que se ha de estudiar la monotonía de una función a través de su derivada (véase por ejemplo el ítem M-2013-2-B-1-a), pues entendemos que se promueve en cierto modo la interpretación de esta como un indicador de la variación de la función original, interpretación a la que nos hemos referido por "variación de la función". Aun así, como en estos ítems simplemente se recurre a estudiar el signo de la derivada, lejos queda esta interpretación de la concepción de la derivada como razón de cambio que recoge Contreras et al. (2003), donde sí queda patente que existe una relación entre las variables de tal forma que una modifica a la otra. En la figura 4.8 se recoge la distribución según los años de tales interpretaciones.

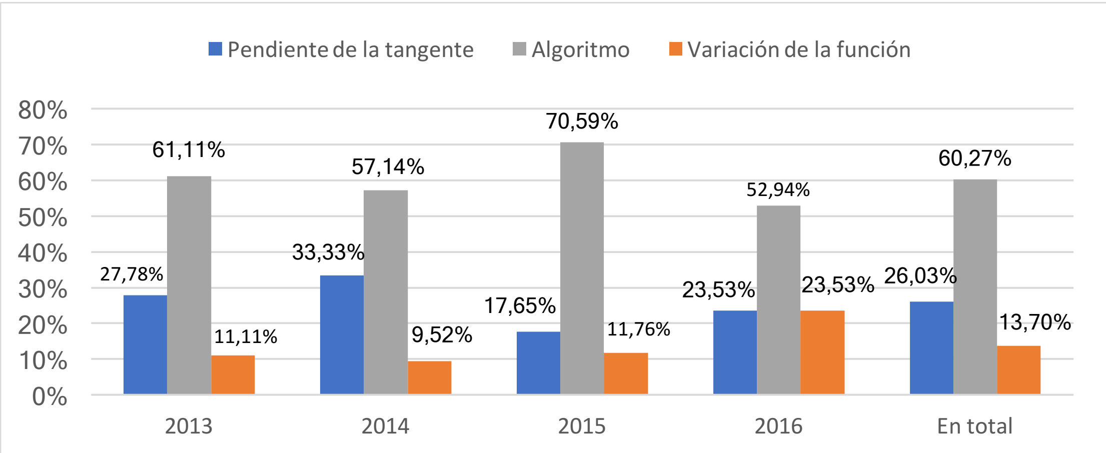


Figura 4.8. Porcentaje de ítems en los que se da cada interpretación

Vemos así que la interpretación que más veces se da ha sido precisamente la derivada como un algoritmo, correspondiendo a un 60,27% de los ítems; ha de decirse que la asignación de esta interpretación se ha realizado cuando no se ha identificado ninguna otra en el ítem, de tal forma que consideramos que se potenciaba esta interpretación de la derivada como mero conjunto de técnicas de derivación a realizar (véase por ejemplo el ítem M-2013-1-B-1-a). La siguiente interpretación que más se ha dado ha sido la de la derivada como pendiente de la recta tangente, apareciendo en un 26,03% de los ítems analizados, aunque su frecuencia llega a igualarse en el último año con la de la interpretación que hemos denominado variación de la función. Aquellos ítems en los cuales se ha dado la interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente han sido de naturaleza muy variada: cálculo de rectas tangentes y normales, cálculo de puntos de tangencia, ítems de interpolación en la que se imponía una condición sobre cierta recta tangente, etc. Vemos pues que hay ausencias de otras interpretaciones como son la derivada como velocidad o aceleración de un móvil y la derivada como límite de un cociente incremental.

Situación

Con esta categoría se buscaba describir las situaciones que se proponen en las tareas; recuérdese que cuatro eran las modalidades contempladas para esta categoría: personal, laboral-educativa, social y científica, debiendo a su vez concretar en esta última con qué ciencia está relacionado el ítem. Respecto al análisis, se ha considerado más adecuado presentar sus resultados por tareas completas en vez de por ítems pues era de esperar, y así ha ocurrido, que la situación no variase entre los distintos apartados de una misma tarea. Abordando entonces los resultados del análisis, encontramos que la mayoría de las tareas tratan una situación científica, en particular, una situación de carácter matemático, lo que podría denominarse "tareas sin contextualizar". Asimismo, de los otros posibles tipos de situación curiosamente solo se ha detectado uno, que serían situaciones laborales–educativas. La distribución por año de las situaciones propuestas en las tareas queda recogida en la figura 4.9.

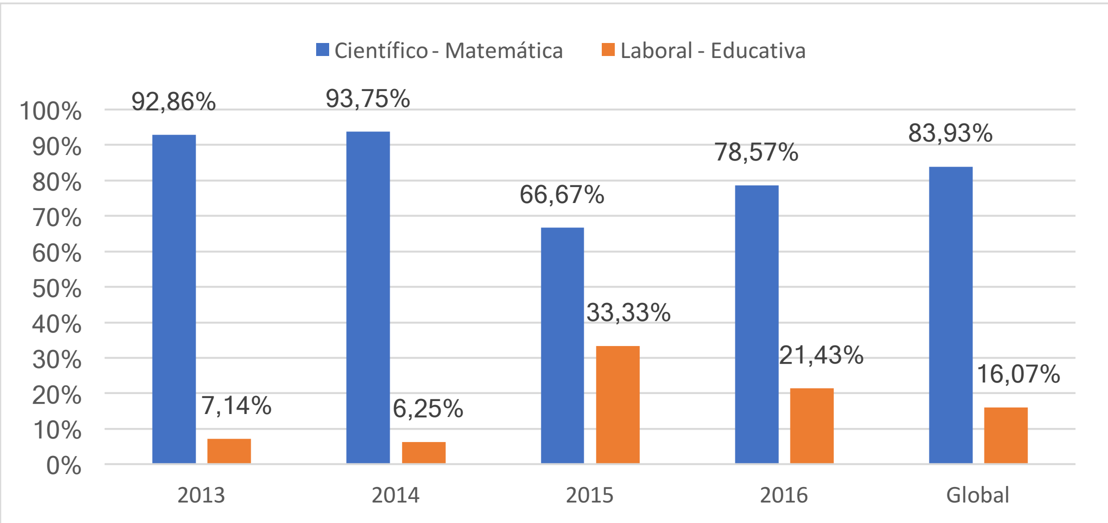


Figura 4.9. Distribución de las situaciones identificadas en las tareas

Se observa claramente una diferencia significativa en el número de tareas con una situación científico-matemática frente a tareas con una situación laboral-educativa, conformando respectivamente un 83,93% y un 16,07% de las tareas consideradas en este estudio. Cierto es que en los dos últimos años la proporción entre ambos tipos de tareas se ha visto aumentada a favor de aquellas con situación laboral-educativa.

Es reseñable que en este último tipo de tareas solamente se haga referencia a situaciones relativas a la construcción de envases y depósitos (como en el ítem M-2014-2-B-1) o al vallado de una determinada zona de tal forma que se busca minimizar o maximizar alguna variable como sería la cantidad de valla, superficie, dinero a usar, etc. y del que recogemos un ejemplo en la figura 4.10.

M-2015-3-B-1

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El terreno debe tener 180 000 m^2 para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita vallado?

Figura 4.10. Ejemplo de problema de optimización sobre vallado de una zona

Este tipo de tareas corresponde en su totalidad a problemas de optimización, aunque lo contrario no es cierto, es decir, se han identificado algunos problemas de optimización que presentan una situación científico-matemática (véase por ejemplo el ítem M-2013-1-A-1). Tenemos pues una escasez de tareas con situaciones que no sean intra-matemáticas, ya no sólo porque no aparezcan tareas con situaciones personales o sociales, sino que además aquellas con situaciones laborales-educativas abarcan una misma temática de forma reiterada.

Para terminar con el análisis de esta categoría cabe señalar que, en la muestra considerada, prácticamente no se ha encontrado ninguna tarea que tuviese una situación distinta de la científico-matemática y que no tratase algún aspecto de la derivada; es decir, la mayoría de las tareas de la muestra considerada con una situación distinta de la científico-matemática quedan recogidas en los ítems analizados en este trabajo.

Capacidad requerida

Recuérdese que con esta categoría, basándonos en el marco PISA (OECD, 2016), se buscaba identificar cuáles de entre los siguientes procesos son los más enfatizados en cada uno de los ítems, esto es, cuáles son los procesos en los que tiene más interés el evaluador al proponer tales actividades: formular, emplear e interpretar. En el análisis, se ha identificado dos tipos de ítems: aquellos cuya capacidad requerida era ante todo el empleo de conceptos, procedimientos, etc., y aquellos en los que destacaban tanto la formulación como la interpretación. A su vez, para los ítems del primer grupo hemos considerado distinguir aquellos en los que únicamente se ha de recurrir a un resultado teórico de forma inmediata, sin necesidad de calcular la función derivada por ser esta ya conocida; nos referiremos a tales ítems como ítems de empleo inmediato. En la figura 4.11 queda recogida la distribución de las capacidades requeridas por año.

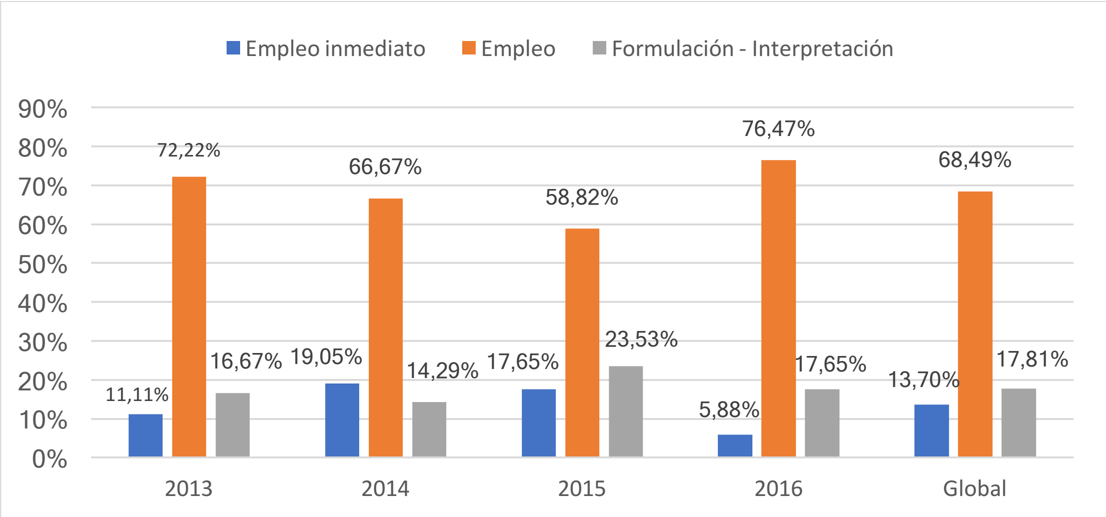


Figura 4.11. Distribución de las capacidades requeridas en los ítems

Atendiendo a la anterior figura, se observa claramente como predominan los ítems de empleo, suponiendo un 68,49% de todos los ítems analizados, mientras que los de empleo inmediato y los de formulación-interpretación corresponden respectivamente a un 17,81% y a un 13,70%. Respecto a las variaciones según los años, destaca que los ítems de empleo inmediato se reducen drásticamente en 2016 a uno solo mientras que los otros dos tipos de ítem, de empleo y de formulación-interpretación, se mantienen relativamente estables a lo largo de los cuatro años analizados, con una leve bajada de los primeros en 2015. Cabe decir que todos los ítems de formulación-interpretación corresponden a problemas de optimización en los que se ha de identificar y construir la función con la que trabajar y, posteriormente, interpretar los resultados que se obtengan según la situación propuesta en el ítem, ya sea esta intra-matemática o extra-matemática (véase por ejemplo el ítem M-2013-2-A-1). Por otro lado, los ítems de empleo inmediato corresponden, como se ha dicho anteriormente, a apartados en los que la función derivada ya es conocida y únicamente se debe recurrir a aplicar un cierto resultado teórico (véase por ejemplo el ítem M-2013-6-B-1-b que se recoge en la figura

4.12, para el que ya se ha calculado la función derivada en el apartado anterior y únicamente resta aplicar la fórmula de la recta tangente y de la recta normal).

Ejercicio 1.- Sea $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si} \quad x \leq 0, \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$

M-2013-6-B-1-a

a) [**1'5 puntos**] Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

M-2013-6-B-1-b

b) [**1 punto**] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Figura 4.12. Ejemplo de ítem de empleo inmediato

Para abordar con algo más de detalle lo encontrado en el análisis, se recoge en la figura 4.13 ya no solo la capacidad requerida en el ítem, sino de cuántos pasos o fases hemos considerado que consta cada ítem, con un mero carácter orientativo. Se ha estimado conveniente contabilizar pasos de naturaleza muy similar y dependientes como uno único: por ejemplo, si se pide determinar los extremos y la monotonía (ítem M-2013-2-B-1-a) o si se solicita el cálculo simultáneo de la recta tangente y la recta normal (ítem M-2013-3-A-1-b), se ha contabilizado como un único paso. Por otro lado, ejemplos de ítems con dos pasos serían el ítem M-2016-1-A-1 que corresponde a una tarea de interpolación en la que para el cálculo de parámetros se ha de imponer un extremo y un punto de inflexión, o también el ítem M-2016-6-A-1 que corresponde a un problema de optimización en el que primero se ha de realizar un proceso de matematización para construir la función y luego usar la caracterización de extremos para encontrar el máximo o mínimo correspondiente.

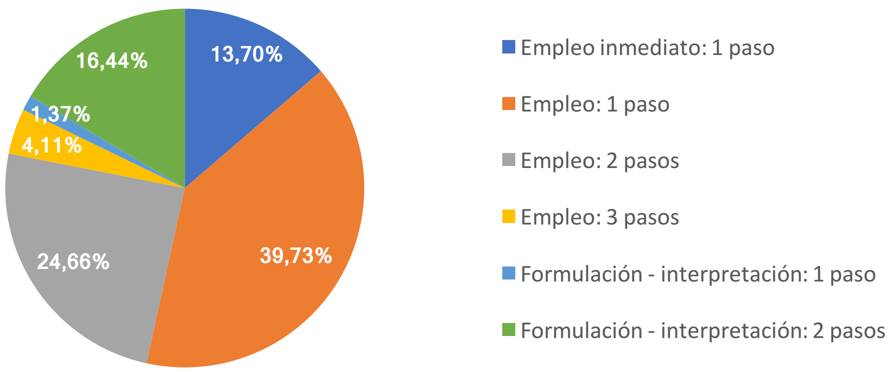


Figura 4.13. Distribución global de las capacidades requeridas indicando el número de pasos

Atendiendo a este desglose, se identificó en el análisis otra leve variación según el año y es que, además de la disminución de ítems de empleo inmediato en 2016, el número de ítems de empleo con dos o tres pasos es algo voluble según los años, cuestión que sin embargo no ocurre con los ítems de empleo con un paso, de los cuales siempre hay siete u ocho por año. Es destacable asimismo la existencia de un único ítem de formulación-interpretación que conste de un paso, el ítem M-2014-6-B-1; este corresponde a un problema de optimización en el que para la obtención de la función a derivar simplemente debía de hacerse una traducción "sencilla" desde un enunciado verbal al lenguaje simbólico, lo cual no se ha considerado como un paso propiamente.

Complejidad del ítem

Con esta categoría se describe la complejidad de un ítem atendiendo a lo marcado en el marco PISA (OECD, 2003), de tal forma que se consideraron tres modalidades: reproducción, conexión y reflexión. Se recoge en la figura 4.14 la distribución de los ítems de cada tipo de complejidad según los años.

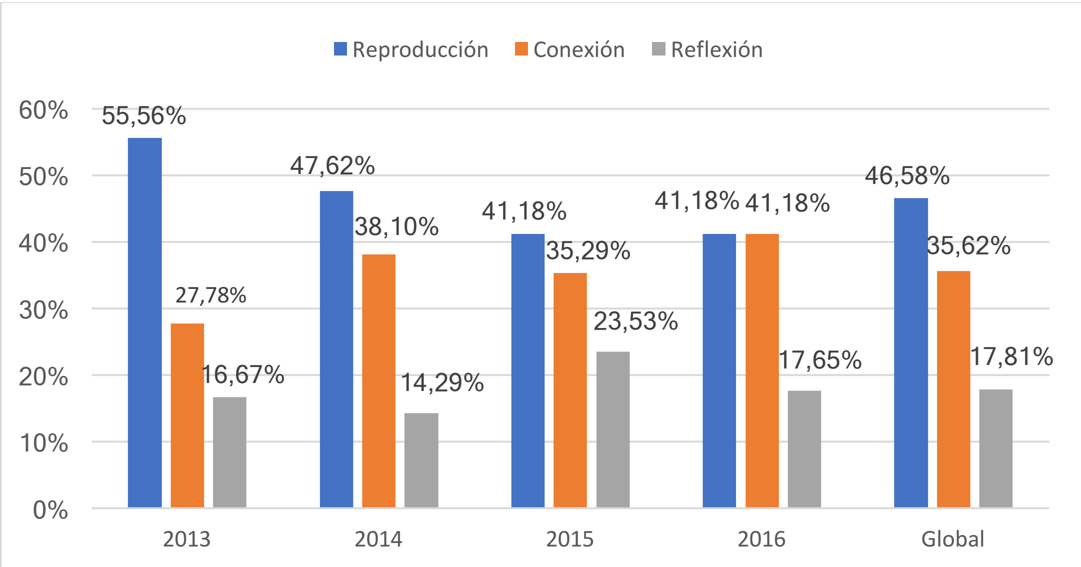


Figura 4.14. Distribución de la complejidad de los ítems atendiendo al marco PISA

Se observa como predominan los ítems de reproducción, siendo un 46,58% del total, mientras que los ítems de conexión y reflexión corresponden respectivamente a un 35,62% y un 17,81%; es interesante que la proporción de ítems de conexión frente a ítems de reproducción vaya aumentando a favor de los primeros a medida que avanzamos en los años.

Entrando más en detalle, todos los ítems de reflexión corresponden a tareas de optimización, debiendo en la mayoría de casos construir una función a optimizar que modelice la situación descrita en el enunciado. Cierto es que existe algún caso en que no es necesario un proceso de matematización como tal y la construcción de la función con la que trabajar es relativamente sencilla (véase el ya mencionado ítem M-2014-6-B-1 que recogemos en la figura 4.15), lo cual como ya se ha visto queda reflejado en la correspondiente *capacidad requerida*, en particular en el número de pasos asignados; pero en la mayoría de estos casos sigue siendo necesario una interpretación del enunciado y una justificación y explicación de los resultados que entendemos que sobrepasan los límites del nivel de complejidad conexión.

M-2014-6-B-1
Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

Figura 4.15. Problema de optimización donde no es necesario un proceso de matematización

Respecto a los ítems de conexión corresponden en su mayoría a tareas, o apartados de tareas, en los que se busca la interpolación de una determinada función dependiente de varios parámetros para que satisfaga ciertas condiciones descritas en el enunciado (véase el ítem M-2013-5-A-2), los cuales requieren de un menor nivel de justificación, explicación e ingenio en comparación con los anteriores problemas de optimización.

Finalmente, los ítems de reproducción corresponden a cuestiones algorítmicas y de reiteración de conocimientos como son calcular los extremos de una función, estudiar el crecimiento y decrecimiento, calcular rectas tangentes o normales, calcular límites en los que interviene la regla de L'Hôpital, etc. (véanse por ejemplo los ítems M-2014-1-B-1-b y M-2014-5-B-1-a).

Ítem abierto o cerrado

Distinguíamos en esta categoría entre ítems cerrados y abiertos según si se expresaba con claridad lo solicitado y los datos de los que se disponían o si existía cierta incertidumbre en alguno de estos dos puntos. En este caso, todos los ítems analizados han sido cerrados, sin excepción. Esto era de esperar porque, debido al formato y finalidad de la prueba, es necesario que esta sea clara tanto en aquello que se pide como en la información de la que se nos provee.

Por el contrario, la existencia de tareas abiertas que no concretasen alguno de los dos puntos anteriores y que para su resolución fuese necesario buscar información, plantearse conjeturas, etc., no tienen cabida en las PEBAU de Matemáticas por la forma en las que estas se realizan y evalúan.

Problema o ejercicio

Esta categoría atendía a la incertidumbre que pudiera tener el alumno en relación con el proceso de resolución; de esta forma, consideramos dos modalidades: ejercicio y problema. En el análisis de los ítems hemos encontrado que el número de ejercicios y de problemas ha sido bastante similar, correspondiendo respectivamente a un 50,68% y un 49,32% del total de ítems analizados. La distribución por año de los ejercicios y problemas se recoge en la figura 4.16.

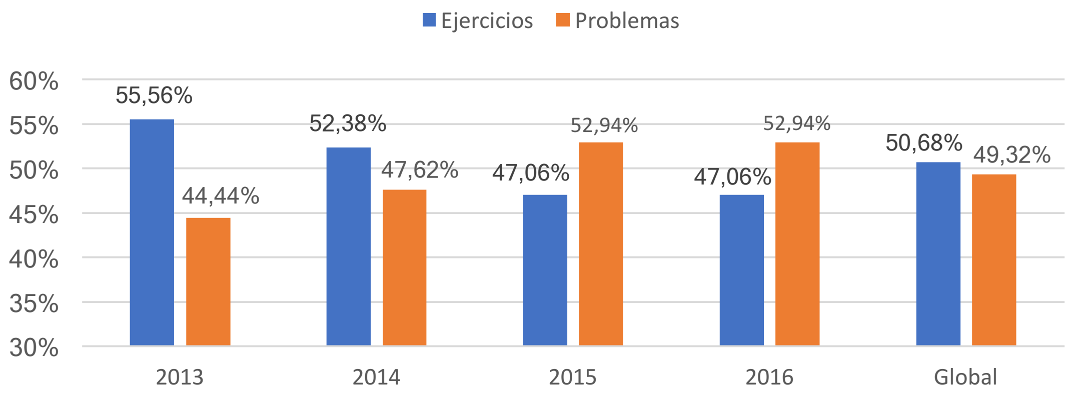


Figura 4.16. Distribución de los ejercicios y problemas

Vemos en la figura que la proporción de problemas frente a ejercicios va aumentando a favor de los problemas de tal forma que a pesar de que en 2013 había más ejercicios que problemas, la situación se invierte a partir de 2015. Aun así, a pesar de esta leve evolución, no se observa una diferencia excesiva entre el número de ejercicios y de problemas en los distintos años considerados.

La mayoría de ítems catalogados como problemas corresponden a tareas de optimización o de interpolación, con lo cual, no parece haber mucha variedad para este tipo de ítems (véanse por ejemplo los ítems M-2016-6-A-1 o M-2016-4-B-1). Respecto a los ejercicios, encontramos aquí ítems que se resuelven de forma algorítmica por tener un proceso de resolución de sobra conocido como sería el calcular extremos, estudiar la monotonía, calcular la recta tangente o un punto de tangencia, etc., encontrando entre ellos por ejemplo el ítem M-2013-2-B-1-a. Así pues, los ítems catalogados como ejercicios muestran una mayor variedad frente a los catalogados como problemas.

Una relación que se deja entrever, y que retomamos en la discusión de los resultados en el capítulo V, es la relación de esta categoría con la *complejidad del ítem*. Se tiene que los problemas son todos ítems de conexión o de reflexión (por ejemplo, véanse los ítems M-2014-2-B-1 y M-2015-2-A-1, problemas de optimización e interpolación respectivamente, de tal forma que el primero es un ítem de reflexión y el segundo un ítem de conexión) mientras que la gran mayoría de ejercicios corresponde a ítems de reproducción (hay excepciones como los ítems M-2015-2-B-1-a y M-2016-6-B-1-a, dos ejercicios en los que la función dada incluye un rasgo de valor absoluto que implica el realizar una transformación o reescritura de esta antes de comenzar su estudio a través de la derivada, lo que hace que consideremos estos ítems como ítems de conexión).

Materiales a usar

El propósito de esta categoría era describir los materiales que debían usarse en los ítems analizados. Se ha obtenido un resultado dentro de lo que cabría esperar, con todos los ítems necesitando únicamente del uso de lápiz y papel. En ningún momento se ha encontrado la necesidad de recurrir a la calculadora y en los pocos ítems que abarcaban representaciones gráficas o geométricas en su resolución, el uso de la regla no ha sido estrictamente obligatorio por la sencillez relativa de tales representaciones.

4.3 CATEGORÍAS RELATIVAS A LA RESOLUCIÓN DE LOS ÍTEMS

Describimos en esta sección los resultados obtenidos para aquellas categorías con las que se indagaba en aspectos propios de la resolución de los ítems, en particular, en el significado de la derivada que ha de ponerse en juego en la resolución.

Contenido relativo a la derivada que interviene en la resolución

Se presenta en la tabla 4.5 la frecuencia de aparición según el año de cada uno de los bloques de contenido necesarios en los ítems analizados. Nótese que un mismo ítem puede requerir de contenidos de distintos bloques al mismo tiempo, cuestión importante que en breve abordamos más en detalle.

Tabla 4.5
Frecuencia de los bloques de contenido a usar en los ítems

	Número de ítems en los que se dan				
Contenidos	2013	2014	2015	2016	En total
L'Hôpital	5	6	4	5	20
Extremos	7	8	8	8	31
Monotonía de f	2	1	2	4	9
Derivadas laterales	1	2	2	0	5

Tabla 4.5

Frecuencia de los bloques de contenido a usar en los ítems

	Número de ítems en los que se dan				
Contenidos	2013	2014	2015	2016	En total
Puntos de inflexión	3	1	1	2	7
Representación gráfica	0	1	0	0	1
Recta tangente	3	6	3	4	16
Recta normal	4	1	0	1	6

Vemos pues que el bloque de contenidos más requerido es el de la determinación de extremos de una función, que es necesario en un 42,47% de los ítems analizados, seguido por la regla de L'Hôpital y por el cálculo de la recta tangente, siendo necesarios respectivamente en un 27,40% y un 21,92% de los ítems. Si nos fijamos en las variaciones de la frecuencia de los distintos bloques a lo largo de los años, parece haber un leve aumento del bloque relativo al estudio de la monotonía de una función y un descenso del bloque relativo a la recta normal, como ocurría en el estudio de los *contextos de la derivada* con los contextos homólogos; el resto de bloques se muestran relativamente estables. Se recoge en la figura 4.17 el porcentaje de ítems analizados en los que interviene cada bloque de contenidos.

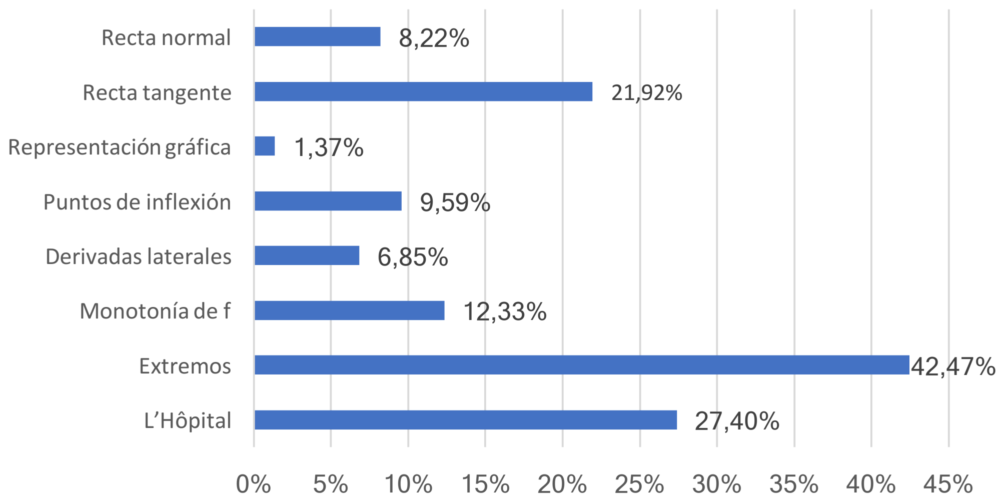


Figura 4.17. Porcentaje de ítems en los que es necesario cada bloque de contenidos

La prácticamente nula presencia de ítems analizados que requiriesen del bloque de representación gráfica se debe a que la mayoría de las tareas que solicitan esbozar la gráfica de una función cumplen alguna o varias de las tres siguientes características que hacen que no hayan sido consideradas tareas de interés: en primer lugar, las funciones dadas en estos casos son sencillas y/o conocidas por lo que pueden graficarse sin necesidad de realizar un estudio previo con la derivada; en segundo lugar, muchas de estas tareas buscan que se determine el área del recinto que determinan las gráficas de varias funciones sencillas dadas, así que son actividades guiadas por la integración que no se han considerado; en tercer lugar, se ha encontrado de manera excepcional alguna tarea no guiada por la integración en la que, si bien se solicitaba esbozar la gráfica de una función que sí que requería un breve estudio previo, este estudio y el esbozo de la gráfica se separaban explícitamente en distintos apartados, con lo cual el apartado correspondiente a esbozar la gráfica no se ha considerado un ítem de derivación propiamente dicho.

Prosiguiendo con el análisis, es reseñable que bloques como el de cálculo de extremos, determinación de rectas tangentes o derivadas laterales se pusiesen en juego en un número considerable de ítems que estaban guiados por la interpolación, que recuérdese fue el contexto que más se dio, debiendo imponerse que un punto dado fuese extremo, que una cierta recta fuese tangente a un punto de la gráfica, etc.; esto se ve por ejemplo en el ítem M-2015-2-A-1 recogido en la figura 4.18.

M-2015-2-A-1

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Halla los coeficientes a, b, c y d sabiendo que f presenta un extremo local en el punto de abscisa $x=0$, que $(1,0)$ es punto de inflexión de la gráfica de f y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3.

Figura 4.18. Ejemplo de ítem de interpolación que requiere de varios contenidos

Finalmente destacamos que, de forma análoga a como ocurría con los *contextos de la derivada*, en la mayoría de ítems en los que se requería del bloque relativo al estudio de la monotonía también se solicitaba el uso del bloque de la determinación de extremos. Aun así, resaltamos que a pesar de existir ciertas similitudes con lo descrito para los *contextos de la derivada*, es conveniente tener presente las diferencias existentes pues una cosa es el contenido que se ha de usar y otra cosa es a qué necesidad o función concreta se está atendiendo en ese ítem.

Sistemas de representación que se solicita usar en la resolución

Con esta categoría se buscaba describir qué sistemas de representación debía usar el alumno para resolver el ítem correspondiente, con especial interés en lo concerniente a la derivada y a la función con la que se ha de trabajar; con base en esto, recuérdese que se decidió no considerar aquí el sistema de representación verbal aunque se entienda que el alumno hará uso de él en algún momento. En el análisis se ha obtenido que el sistema de representación más solicitado o necesario con diferencia es el simbólico para trabajar con la función correspondiente. Otros dos casos han aparecido de forma marginal: uno es el uso del sistema de representación gráfico para representar una cierta función, el otro caso corresponde a problemas de enunciado verbal en los que por la situación planteada sería de esperar e incluso conveniente, aunque no estrictamente necesario, que el resolutor se apoyase en el sistema de representación geométrico. La distribución correspondiente según el año puede encontrarse en la figura 4.19.

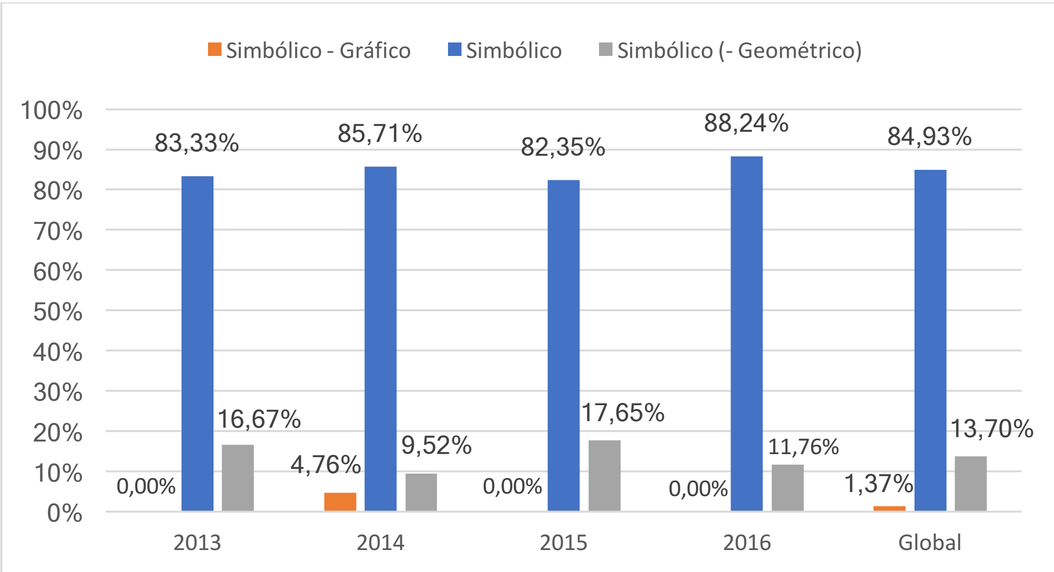


Figura 4.19. Distribución de los sistemas de representación a usar en la resolución

Se observa según los datos mostrados una clara tendencia al uso exclusivo del sistema de representación simbólico, correspondiente a un 84,93% de todos los ítems analizados; en cualquier caso, y como era de esperar, las representaciones simbólicas han de usarse en todos y cada uno de los ítems, ya sea de forma aislada o junto con otro tipo de representaciones. La prácticamente nula presencia de ítems en los que hubiera de recurrirse al sistema de representación gráfico se explica por las mismas razones dadas para la ausencia del bloque de contenidos relativo al esbozo de gráficas de funciones. El número de ítems en los que se ha considerado conveniente apoyarse en el sistema de representación geométrico se han mantenido estable a lo largo de los años, conformando un 13,70% del total de ítems analizados. Este último tipo de ítems, del que recogemos un ejemplo en la figura 4.20, corresponden a problemas de optimización en los que se ha de construir una cierta función con origen en, precisamente, una situación con un trasfondo geométrico.

M-2014-2-B-1
Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

Figura 4.20. Ejemplo de ítem donde es conveniente el uso de una representación geométrica

Entendemos que el resolutor no tiene por qué recurrir a esta representación, al menos no de forma externa y explícita sobre el papel, pero se ha considerado pertinente hacer esta apreciación para dar una visión más detallada de los sistemas de representación que se solicita usar.

Conversión o procesamiento

Esta categoría se apoya en los *sistemas de representación usados en el enunciado* y *los sistemas de representación a usar en la resolución,* y en concreto con ella se buscaba describir si era necesario realizar conversiones entre distintos sistemas de representación o bastaba con procesamientos dentro de un mismo sistema para resolver un ítem. En el análisis se ha determinado que predominan los procesamientos frente a las conversiones, correspondiendo los procesamientos a un 80,82% de los ítems analizados y las conversiones a un 19,18%. En la figura 4.21 se recoge su distribución según los distintos años.

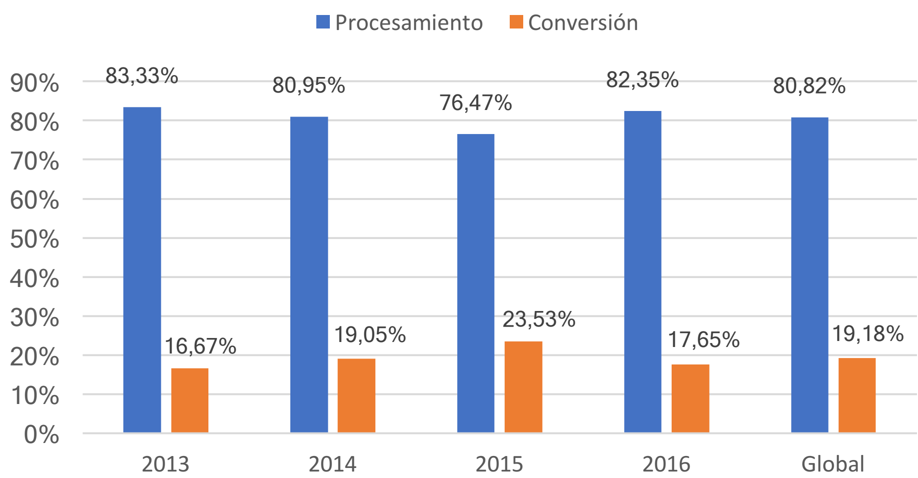


Figura 4.21. Distribución de los ítems de procesamiento y conversión

La mayoría de los casos donde es necesaria una conversión corresponden a problemas de optimización similares a los ya mostrados con enunciados puramente verbales en los que el resolutor ha de construir la función correspondiente mediante una representación simbólica. También aparece aquí de forma marginal un ítem, con código M-2014-2-A-

2-a, que requería en su resolución dibujar la gráfica de una función para lo que debía llevarse a cabo un estudio previo de esta.

No hay pues un gran número de conversiones y además estas se realizan casi siempre en un mismo sentido, este es desde una representación verbal a una simbólica. Asimismo, no aparece en ningún caso una tarea que involucre una representación gráfica o tabular de la derivada, quedando esta siempre relegada al sistema de representación simbólico. Respecto a los procesamientos, se observa que todos los años predominan con una proporción alrededor del 80%. Estos ítems corresponden a tareas en los que ya se da la expresión simbólica de la función a derivar o ítems en los que en algún apartado anterior de la misma tarea ya se ha obtenido la expresión simbólica de la función derivada correspondiente. Vemos así que no se propicia una traducción variada entre distintos sistemas de representación.

Uso local, global o del operador

Con esta categoría se buscaba describir si en la resolución de los ítems se hacía necesario recurrir a la derivada de una función en un punto (aspecto local), a la función derivada (aspecto global) o al operador derivada, y de qué forma se relacionaban estos.

Respecto a los resultados, destaca que no se encontró ningún ítem en el que se trabaje únicamente con el aspecto local de la derivada ni ninguno en el que aparezca el operador derivada. Sólo se han identificado dos tipos de ítem: uno de ellos está conformado por aquellos ítems en los que se debe recurrir primero a la función derivada para luego dar paso a la derivada de una función en un punto, esto es, un paso del aspecto global al local. Esto lo vemos por ejemplo en el ítem M-2014-1-B-2-a que se recoge en la figura 4.22; aquí se ha de calcular primero la función derivada haciendo uso de técnicas de derivación (aspecto global) y tras esto evaluarla en $x = 0$ para obtener la derivada en ese punto (aspecto local).

Ejercicio 2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x \cos(x)$.
M-2014-1-B-2-a

a) [**1 punto**] Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

b) [**1'5 puntos**] Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 0)$.

Figura 4.22. Ejemplo de ítem con paso de aspecto global a local

El otro tipo de ítem ha estado conformado por aquellos en los que únicamente se requería trabajar con la función derivada (véase el ítem M-2014-3-A-1). La distribución correspondiente por año de estos dos tipos de ítem queda recogida en la figura 4.23.

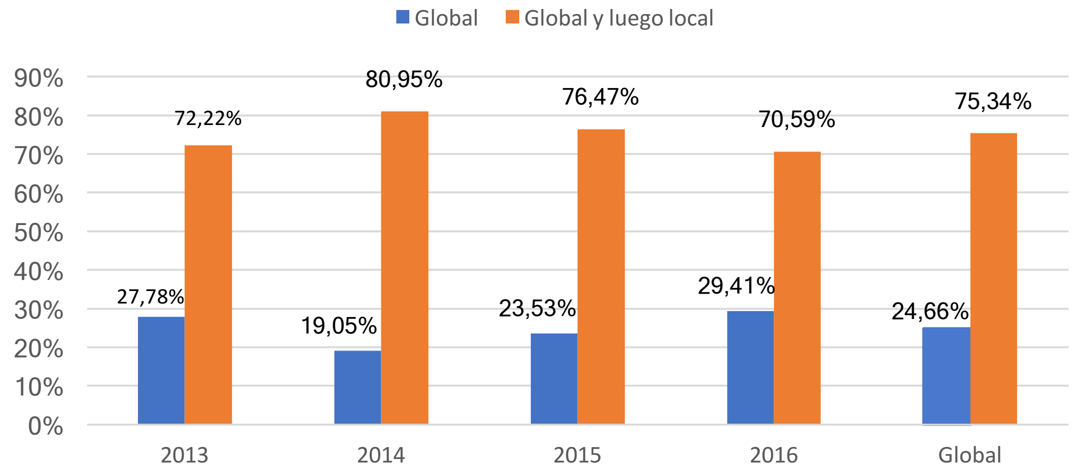


Figura 4.23. Distribución del uso local, global o del operador

Se observa una clara diferencia a favor de los ítems en los que se ha de realizar algún paso del aspecto global al local a lo largo de todos los años, triplicando al número de ítems en los que aparece exclusivamente un uso global de la derivada. Respecto a este último tipo de ítems, destaca que la mayoría corresponden a apartados de tareas, o tareas completas, en los que se ha de usar la regla de L'Hôpital para el cálculo de límites.

Entrando un poco más en detalle, y considerando las distintas formas de calcular tanto la función derivada como la derivada de una función en un punto descritas en Inglada y Font (2003), se tiene que en la inmensa mayoría de casos en los que se pasa del aspecto global al local, el cálculo de la derivada de una función en un punto $f'(a)$ tiene lugar de forma indirecta, sustituyendo en la expresión algebraica de $f'(x)$ que ha tenido que ser calculada previamente, como ocurría con el anterior ítem M-2014-1-B-2-a. Asimismo, es reseñable que este último cálculo, el de $f'(x)$, se promueve realizar en la mayoría de casos de forma indirecta debiendo de hacer simplemente uso de las reglas de derivación; se dejan de lado por tanto las otras técnicas de cálculo de la función derivada consideradas en Inglada y Font (2003), que son a través del uso de límites, gráficamente y por aproximación.

4.4 CATEGORÍA COMPLEMENTARIA

Finalmente, recogemos los resultados obtenidos para la categoría *puntuación asignada*.

Puntuación asignada

Como ya se describió, cada modelo de las PEBAU de Andalucía en la especialidad de Matemáticas consta siempre de cuatro tareas, cada una de las cuales es puntuada sobre 2,5 puntos en total, dividendo esta cantidad entre sus distintos apartados en caso de que los tenga. La media global de la puntuación de los ítems analizados es 1,70; asimismo, la media de las puntuaciones por año se recoge en la figura 4.24, donde se compara con la media global.

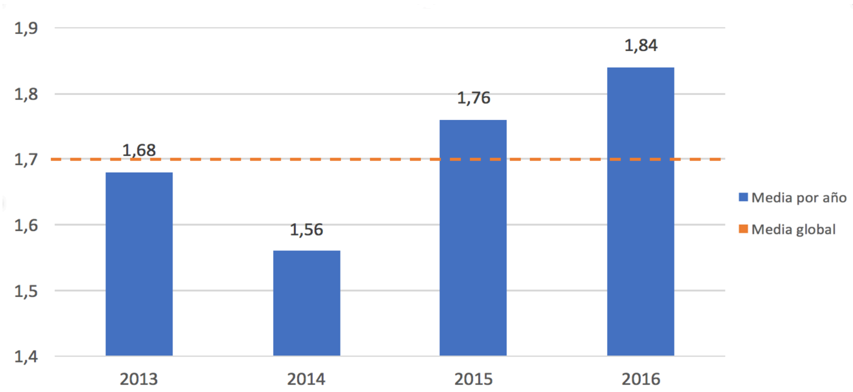


Figura 4.24. Media de las puntuaciones de los ítems analizados según el año

Se observa que apenas hay leves variaciones según los distintos años. En cualquier caso, la interpretación de estas medias ha de realizarse con sumo cuidado pues, por el hecho de que a toda tarea completa se le asignan 2,5 puntos sin atender a priori a su complejidad o a cualquier otra variable de tarea, el interés radicará ante todo en la comparación de los ítems, en particular de aquellos correspondientes a apartados de tareas, con el resto de categorías y no tanto en el análisis individual de las puntuaciones asignadas a los ítems.

CAPÍTULO V

Discusión de los resultados

En este capítulo realizamos una discusión de los resultados obtenidos mediante el análisis de contenido, centrándonos primero en cuestiones propias de los significados de la derivada y, tras esto, en las características de los ítems analizados. Para ello, presentamos una síntesis de los resultados con el fin de aclarar lo obtenido e indagamos en los aspectos y relaciones más relevantes, contrastándolos con los antecedentes bibliográficos cuando corresponda.

5.1 SIGNIFICADOS DE LA DERIVADA

Síntesis de los resultados y significados determinados

Sintetizamos a continuación los resultados que se han obtenido en relación con los significados de la derivada que se manifiestan a través del enunciado. Respecto a la *estructura conceptual*, hay una diversidad considerable de términos, siendo las modalidades "Otros" (que recuérdese aglutina términos no directamente relacionados con la derivada como "límite" o "asíntota"), "tangente" y "extremos" las que presentan una mayor frecuencia. No ha aparecido notación alguna para la derivada en los ítems analizados y la explicitación de esta en el enunciado ha sido ínfima. Las funciones con las que se ha de trabajar presentan una variedad considerable de rasgos, predominando el polinómico, y se observa una proporción bastante similar de funciones simples y no simples. Respecto a los *sistemas de representación*, más allá del verbal, predominan las representaciones simbólicas frente a la práctica o total ausencia de otras como las representaciones gráficas y tabulares. Finalmente, para los *sentidos y modos de uso* se ha detectado una variedad de contextos, destacando la interpolación y el cálculo de límites; la interpretación de la derivada se reduce esencialmente a la derivada como un conjunto de reglas a aplicar, apareciendo en menor medida su interpretación geométrica; por último, hay un exceso de situaciones científico-matemáticas y una reiteración de las mismas temáticas en las pocas situaciones laborales-educativas encontradas (construcción de envases y, en menor medida, vallado de zonas).

A continuación, resumimos los resultados obtenidos en el estudio de los significados de la derivada que se han de poner en juego en la resolución. El contenido a usar en los distintos ítems (*estructura conceptual*) ha sido variado, destacando los bloques sobre la caracterización de extremos, la regla de L'Hôpital y la relación entre la recta tangente y la derivada. Respecto a los *sistemas de representación a usar*, existe una predominancia casi absoluta del sistema de representación simbólico y apenas se solicita realizar conversiones, dándose estas además en el mismo sentido casi siempre (desde una representación verbal a una simbólica, con un posible apoyo en una representación geométrica). Finalmente, en cuanto al uso local, global y del operador (*sentidos y modos de uso*), se obtuvo que en la mayoría ítems se ha pasar del aspecto global al local, debiendo calcular primero la función derivada a través de reglas de derivación y luego la derivada de una función en un punto sustituyendo en la expresión algebraica de la función derivada correspondiente.

La anterior síntesis nos permite dilucidar los significados de la derivada predominantes en los enunciados y los más solicitados en la resolución. En este sentido, vemos que existe una clara relación entre estos significados pues en ambos casos se tiene una cierta diversidad en aspectos de la estructura conceptual (términos, contenido que interviene, funciones con las que trabajar) a la vez que encontramos carencias en los sistemas de representación (predominancia de representaciones simbólicas en los enunciados y en la propia resolución, junto con limitadas ocasiones de realizar conversiones) y en los sentidos y modos de uso (enfoque excesivo en cuestiones algorítmicas y mecanicistas como se ve en la interpretación predominante, la escasa variedad de situaciones propuestas y el exceso de ítems en los que se pasa del aspecto global al local, haciendo uso únicamente de técnicas de cálculo indirectas). Todas estas limitaciones parecieran estar en consonancia con una tendencia problemática, llamada por algunos algebrización del cálculo diferencial, que promueve un enfoque reduccionista y mecánico del cálculo a través de una excesiva manipulación algebraica (Contreras et al., 2003).

Aun así es cierto que, más allá de esa perspectiva algorítmica e instrumental que ha predominado en los significados de la derivada, también han destacado aspectos propios de la concepción de la derivada como pendiente de la recta tangente, la cual se ha visto reflejada en los contenidos más requeridos para la resolución, en los términos identificados en el enunciado y en una variedad de contextos en los que interviene (cálculo de rectas tangentes y normales, determinación de puntos de tangencia y en algunos casos la interpolación de funciones), con una presencia en poco más de un 25% de los ítems. En cualquier caso, ha estado sujeta a algunas de las limitaciones anteriormente descritas, como son el exceso de situaciones científico-matemáticas y la predominancia del sistema de representación simbólico.

Aspectos destacables de los significados y relación con los antecedentes

Una vez descritos los significados predominantes, pasamos a tratar algunos aspectos destacables de estos significados y relaciones que pudiera haber entre estos, comparándolos y contrastándolos cuando corresponda con lo que recogen los antecedentes teóricos y el marco legislativo que hemos desarrollado en el capítulo II.

Una primera cuestión a tratar es que, a pesar de la variedad que han mostrado las categorías *contenido relativo a la derivada que interviene en la resolución* y *contextos de la derivada*, existen también ciertas ausencias para estas. Por un lado, no aparecen ítems que involucren el uso del Teorema de Rolle o el del valor medio, los cuales son contenidos que se recogen en la LOMCE (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015), aunque estas ausencias pueden entenderse pues las pruebas consideradas no están regidas por la mencionada ley. Asimismo, remarcamos el poco uso que se le da a la derivada segunda, que pareciera utilizarse únicamente en relación con los puntos de inflexión y nunca para calcularlos, solo para imponerlos como condición en problemas de interpolación, dejando de lado cuestiones y contextos como son el estudio de la convexidad y concavidad a través de la segunda derivada.

Las dos anteriores categorías están muy relacionadas, de tal forma que los contextos identificados han sido determinantes en los bloques de contenido más solicitados (caracterización de extremos, regla de L'Hôpital y relación entre la derivada y la recta tangente). Estos bloques además de ser solicitados en ítems con contextos directamente relacionados con ellos (cálculo de extremos, determinación de la recta tangente, etc.), también se dan en un gran número de ítems cuyo contexto es la "interpolación", que precisamente es el contexto que más veces se ha identificado. Asimismo, se han encontrado variaciones notables a lo largo de los años como son la disminución del cálculo de rectas normales y el aumento del estudio de la monotonía, variaciones que se han visto reflejadas en las dos anteriores categorías.

Una categoría similar es *términos usados en el enunciado*. De nuevo, a pesar de esa variedad encontrada, hay claras ausencias de términos que cabrían encontrarse como son “diferenciable”, “variación”, “razón”, “concavidad” y “convexidad”. Además, los cuatro términos que más se han dado se corresponden con los cuatro bloques de contenido más solicitados, y las anteriores variaciones mencionadas también han tenido lugar en los términos identificados, con lo cual pareciera que los términos empleados en los enunciados son ciertamente un indicativo del contenido que se ha de usar.

Pasando a tratar los sistemas de representación, un aspecto a destacar es que el objeto derivada se manipula esencialmente a través de representaciones simbólicas, lo cual refuerza ese enfoque mecánico y algorítmico identificado previamente. En este sentido, varias son las investigaciones encontradas que en relación con el cálculo matemático recogen la falta de articulación entre sistemas de representación que tienen los alumnos, quedando relegados al sistema de representación simbólico por el que muestran una clara preferencia (Sandoval, 2014; Vrancken et al., 2012) de tal forma que consecuentemente desarrollan algoritmos sin sentido (Hitt, 2005). Así pues, lo encontrado en las PEBAU parece reforzar esta problemática. Asimismo, en relación aún con los sistemas de representación, en Ruiz de Gauna y Sarasua (2015) se asevera que atendiendo a las PEBAU de todas las comunidades pueden encontrarse ejemplos de tareas que parten de la gráfica de una función; en nuestro caso, no hemos encontrado ninguna tarea de este tipo.

Abordamos ahora aspectos de los sentidos y modos de uso, de los cuales hay bastantes puntos destacables. Hay ausencias importantes como es la interpretación de la derivada como velocidad instantánea de un móvil, la cual precisamente se recoge en la LOE (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) que es la ley por la que se rigen las pruebas analizadas. Por otro lado, tampoco se ha dado la interpretación de la derivada como límite de un cociente incremental. En este sentido, no ha habido ítems que abordasen una concepción de la derivada como razón de cambio, ausencia que ya recogía Contreras et al. (2003), que afirmaban que en las PEBAU no se prestaba atención a esta concepción; así pues, a pesar de la fecha de publicación de tal trabajo, parece mantenerse esta carencia al menos en las pruebas del periodo estudiado. En definitiva, y como se ha dicho antes, la interpretación que claramente ha predominado en las pruebas analizadas ha sido la derivada como una serie de reglas a aplicar, la cual precisamente es muy común entre los alumnos y puede llegar a ser incluso la única que manejen (Camacho et al., 2010; García y Dolores, 2012).

Por otro lado, la poca variedad de situaciones encontradas, con un exceso de las científico-matemáticas, sorprende cuando en la misma LOE (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) se recoge entre sus criterios de evaluación la aplicación al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos, cuestión que retoma la LOMCE (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015) añadiendo además la necesidad de tratar fenómenos sociales.

Respecto a los contextos, si tenemos presente los tipos de tareas sobre la derivada que Ruiz de Gauna et al. (2011) determinan para las pruebas de País Vasco, se echan en falta tareas de carácter eminentemente teórico o que tengan por fin relacionar funciones y representaciones gráficas.

Finalmente, un último aspecto destacado es que en la muestra analizada no se identifica el cálculo de la derivada a través de su definición como límite de un cociente incremental, técnica que junto con el cálculo indirecto sí estaba presente en los libros de texto de bachillerato analizados en Inglada y Font (2003). Esta limitación de las PEBAU a cálculos indirectos explica la falta de ítems en los que se aborde el aspecto local sin tener que recurrir previamente al global y concuerda con la mencionada ausencia de la interpretación de la derivada como límite de un cociente incremental.

5.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS ÍTEMS

Teniendo presente las características de los ítems que ya se han puesto de manifiesto a través de algunas de las anteriores categorías dirigidas a estudiar los significados de la derivada (situación del ítem, formulación del ítem, contenido que interviene en el ítem, etc.), pasamos ahora a tratar los resultados de las categorías restantes, entre las que incluimos los aspectos cognitivos requeridos por el evaluador y la puntuación asignada, las cuales están más enfocadas en caracterizar los ítems con los que trabajamos.

Síntesis de los resultados

Comenzamos esta sección presentando una síntesis de los resultados obtenidos para las categorías restantes. Respecto a la *capacidad requerida*, existe un predominio de los ítems de empleo (los cuales junto con los de empleo inmediato abarcan más de un 80% de los ítems), de tal forma que tiene un carácter bastante homogéneo. Asimismo, todos los ítems han sido cerrados, en lo que a estructura se refiere, y todos han necesitado únicamente de lápiz y papel, con lo cual las dos categorías correspondientes tienen nula variabilidad. Respecto a la *complejidad*, han destacado los ítems de reproducción, mientras que la proporción de ejercicios y problemas es similar. Finalmente, en relación a la *puntuación asignada*, no se obtuvieron resultados interesantes *per se*, sino que el interés radicaba en compararlos con los resultados de otras categorías, cuestión que tratamos más adelante en esta misma sección.

Aspectos y relaciones destacables

Una primera cuestión a tratar respecto a la *complejidad* del ítem, según lo recogido en el marco PISA (OECD, 2003), es que en múltiples ocasiones ha resultado difícil asignar una modalidad siguiendo las características y directrices que establece PISA para cada una, pues estas van dirigidas a contenidos escolares de nivel elemental, que presentan una mayor diversidad del grado de demanda cognitiva. Esto ha requerido de un exceso de interpretación y, si bien finalmente se ha llevado a cabo la asignación de las modalidades en todos los ítems, consideramos que esta clasificación se siente un tanto ineficiente cuando se trata con contenidos matemáticos escolares de cierta complejidad como es el que nos ocupa.

Respecto a los aspectos a destacar, uno de ellos es el leve aumento de la proporción de ítems correspondientes a indicadores medios y/o superiores de las categorías que describen algún aspecto de la dificultad de los ítems. En particular, en la categoría *complejidad del ítem* se pudo observar que la proporción de ítems de reproducción y de conexión tiende a igualarse en 2016, mientras que en los resultados de la categoría *problema o ejercicio* se identificó un aumento paulatino de la proporción de ítems correspondientes a problemas, en relación con la de ejercicios. Respecto a la *capacidad requerida* se observa una disminución de los ítems de empleo inmediato (los que podríamos considerar más sencillos y cuyo papel en las PEBAU cabría plantearse), mientras que si nos fijamos en la *puntuación asignada* se observa un aumento de la puntuación media de los ítems de los últimos años analizados.

En relación con lo anterior, llama la atención la pertinencia de la categoría *capacidad requerida*, pues no únicamente se incide en la meta del ítem desde un punto de vista cognitivo, sino que además la clasificación propuesta también nos provee de un esbozo de parte de la dificultad general que puede suponer la resolución del ítem (no es lo mismo un ítem en el que prima el empleo que otro que se apoya fuertemente en la formulación y la interpretación). Si atendemos entonces a la relación que pudiera haber entre la *capacidad requerida* y la *complejidad*, vemos que hay una correspondencia entre los ítems de formulación-interpretación y los ítems de reflexión, y que los ítems de empleo inmediato forman parte de los ítems de reproducción. Sin embargo, no se ha detectado relación alguna entre los ítems de empleo y los niveles de complejidad reproducción y conexión, dado que se distribuyen de manera diferente (véanse por ejemplo los ítems M-2016-2-B-1-b y M-2015-2-A-1, ambos de empleo pero con el primero de reproducción y el segundo de conexión). En este sentido, las modalidades de la categoría *complejidad* se han mostrado distribuidas sin diferencias excesivamente grandes, al contrario que la categoría *capacidad requerida*, donde la modalidad "empleo" ha sobrepasado con creces a "empleo-inmediato" y a "formulación-interpretación", lo cual contrasta con la recomendación del marco PISA (OECD, 2016) de igualar el peso de las tareas de empleo con el de las tareas de formulación e interpretación juntas.

Otras dos categorías a contrastar serían la *complejidad* y la distinción entre *problema o ejercicio*, de lo que se deduce un hecho interesante. Se tiene que la casi totalidad de ítems catalogados como ejercicios son ítems de reproducción mientras que los ítems catalogados como problemas pueden ser tanto de conexión como de reflexión. Como la inmensa mayoría de ítems de conexión y reflexión corresponden respectivamente a problemas de interpolación y de optimización, tenemos que los problemas son poco variados en sus contextos aunque abarcan un espectro amplio en su complejidad (conexión y reflexión), mientras que los ejercicios muestran una complejidad más limitada (como se ha dicho antes son en su mayoría ítems de reproducción) pero abarcan mayor variedad de contextos como son el cálculo de extremos, el estudio de la monotonía, la determinación de puntos de tangencia a rectas dadas, etc. De esta forma, hay menor variedad entre los ítems más "difíciles".

Una última cuestión en relación con la dificultad general de los ítems sobre la que incidimos se refiere a la categoría *tipo de función*, la cual en alguna ocasión ha llegado a afectar a la *complejidad* de un ítem (como ya dijimos en los resultados, en los ítems M-2015-2-B-1-a y M-2016-6-B-1-a el rasgo de valor absoluto que incluyen las respectivas funciones y la consecuente necesidad de transformarlas o reescribirlas antes de su estudio hacía que considerásemos estos ejercicios como ítems de conexión). En particular, la distinción entre función simple y no simple nos indica en cierto modo el grado de la dificultad relativa del ítem que involucran tales funciones y, como se dijo previamente, se encontró un número bastante similar de ambos tipos de funciones, lo que puede interpretarse como una "dificultad equilibrada". Sin embargo, se decidió descartar varios ítems relativos a esbozar gráficas por tratar con funciones tan sencillas o familiares que no requerían un estudio previo de su comportamiento a través de la derivada (funciones afines, cuadráticas, etc.); esto tratado desde una perspectiva global (es decir, considerando todas las tareas de las pruebas) puede inclinar la balanza hacia una mayor presencia de funciones simples en las PEBAU.

Pasamos finalmente a tratar la *puntuación asignada a los ítems*. Si intentamos relacionar los resultados de esta categoría con otras que indiquen ciertos aspectos de la dificultad de los ítems, como son las categorías *complejidad del ítem* y *problema o ejercicio*, se obtiene lo siguiente: los ítems de reflexión siempre cuentan 2,5 puntos, puntuación que también tienen asignada gran parte de los ítems de conexión, aunque es cierto que existen varios con menor puntuación; consecuentemente, la mayoría de los problemas tienen asignado 2,5 puntos. Por otro lado, aquellos ítems catalogados como ejercicios muestran una gran variación en la puntuación asignada pero pocas veces alcanzan o superan los 2 puntos, cuestión que por tanto se da también con los ítems de reproducción. Una última categoría a la que atender es la *capacidad requerida*, que como se ha dicho también puede indicar parte de la dificultad general del ítem: los ítems de empleo inmediato rara vez tienen asignada una puntuación mayor a 1 y los de formulación-interpretación tienen todos 2,5; para los ítems de empleo hay un amplio espectro de puntuaciones sin ninguna tendencia apreciable. Concluimos pues que la puntuación está bastante bien definida para casos de dificultad extremos, pero no tanto para ítems que presentan una "dificultad general media".

CAPÍTULO VI

Conclusiones

Abordamos en este capítulo las conclusiones de la investigación que hemos llevado a cabo. En este sentido, trataremos la consecución de los objetivos que nos planteamos al comienzo del trabajo, señalaremos las aportaciones de la investigación junto con las limitaciones que han existido y finalizaremos proponiendo posibles vías de investigación futuras.

6.1 CONCLUSIONES GENERALES SEGÚN LOS OBJETIVOS PLANTEADOS

El objetivo general que nos planteamos era analizar los significados del objeto derivada que se manifiestan en las PEBAU andaluzas de Matemáticas II y las características de las tareas donde interviene este concepto. Para ello, nos propusimos en primer lugar la confección de un sistema de categorías que permitiese obtener información sobre tales significados y características. Consideramos que este objetivo se ha logrado pues a través del uso del sistema de categorías elaborado a partir del análisis didáctico hemos podido recoger una gran cantidad de información en relación con la derivada que ha podido ser interpretada partiendo de la noción de significado de un contenido matemático escolar, en particular, desde la terna semántica que establece, además de poder caracterizar aquellos ítems en los que interviene la derivada con base en lo que se contempla en el análisis de tareas. En este sentido, concluimos la consecución de este objetivo O1.

El segundo objetivo planteado fue determinar los términos, notaciones, conceptos y relaciones que, en relación con la estructura conceptual de la derivada, se dan en estas pruebas. Según la información obtenida a través de los enunciados pudimos observar que, aunque con algunas ausencias, se emplea en ellos una diversidad importante de términos pero, por el contrario, no se hace uso de ninguna notación para la derivada salvo en ítems guiados por la integración; consecuentemente, la explicitación de la derivada en el enunciado prácticamente no se da. Además, se han descrito los rasgos más comunes de aquellas funciones con las que se ha de trabajar (y por tanto, las reglas de derivación que más se han de usar). En relación con aspectos de la resolución de los ítems, se obtuvo una diversidad de contenidos a emplear, pero también se detectaron ausencias, destacando el limitado uso de la derivada segunda. En general se obtuvo que, salvo para la notación, los elementos estudiados de la estructura conceptual muestran una variedad notable a pesar de identificarse ciertas ausencias de algunos elementos conceptuales de la derivada presentes en otros documentos curriculares.

Respecto al tercer objetivo específico, que trataba la determinación de los sistemas de representación que intervenían en las tareas, pudimos identificar que existe una predominancia del sistema de representación simbólico pues aparece en la mayoría de los enunciados para especificar la función con la que trabajar y es el sistema de representación que más se solicita usar en la resolución. El sistema de representación gráfico tuvo muy poca presencia y se notaron ausencias de otros como el tabular. Asimismo, se obtuvo que en la mayoría de ítems únicamente se debe recurrir a procesamientos y que, cuando se requiere de una conversión, se indica esencialmente de forma unidireccional.

Con el cuarto objetivo buscábamos determinar los sentidos y modos de uso de la derivada que se dan en las pruebas. Si bien hemos identificado una variedad de contextos, concretando cuáles son los más usuales y cómo han influido en los contenidos requeridos, el análisis y la discusión del resto de categorías reveló diversas carencias: por un lado, hay una predominancia de la interpretación de la derivada como una serie de reglas a aplicar, notándose la ausencia de su interpretación física o como límite de un cociente incremental; la mayoría de situaciones identificadas son científico-matemáticas y hay una ausencia total de situaciones personales y sociales; finalmente, en la resolución de los ítems predomina el uso del aspecto global con un posterior paso al local, debiendo de hacer uso exclusivamente de técnicas de cálculo indirectas.

Con el quinto objetivo se buscaba caracterizar las tareas de la muestra en las que interviene la derivada, y para su consecución se consideraron categorías que indagasen en aspectos y variables de los ítems aún no tratados en el estudio de los significados (objetivos O2, O3 y O4). Respecto a la complejidad según el marco PISA (OECD, 2003), si bien resultó una categoría cuya delimitación técnica fue algo difícil de abordar, se obtuvo que más de la mitad de los ítems son de reproducción. Por otro lado, se determinó la existencia de un número bastante similar de ejercicios y problemas; además, como era de esperar, todos los ítems son cerrados y únicamente requieren del uso de lápiz y papel en lo que a materiales se refiere. En relación con otras características de los ítems, también se obtuvo que la capacidad requerida es bastante homogénea, con una predominancia de los ítems de empleo, y se encontraron pautas en lo que respecta a la puntuación asignada para los ítems con dificultad más "extrema". La discusión y comparación de los resultados obtenidos también ha permitido identificar un aumento progresivo de la dificultad general de los ítems y una mayor variedad entre los ítems más "sencillos".

6.2 APORTACIONES DEL ESTUDIO

Esta investigación ha arrojado información en torno a dos cuestiones que no habían sido abordadas previamente: por un lado, se han determinado los significados de la derivada presentes en una muestra reciente de las PEBAU andaluzas de Matemáticas II, detectándose carencias en algunos aspectos de las distintas componentes semánticas de la derivada, sobre todo en lo que respecta a los sistemas de representación y a los sentidos y modos de uso; por otro lado, se han caracterizado las tareas de esta muestra en las que interviene la derivada. Estas aportaciones permiten iniciar una reflexión de carácter curricular sobre la idoneidad del diseño de las PEBAU de Matemáticas II en Andalucía, en particular, en lo que respecta al tratamiento que se le da a la derivada.

Por otro lado, hemos relacionado los anteriores resultados con la literatura previa, encontrando algunas similitudes, concordancias y también contrastes: ausencia de tareas que aborden la concepción de la derivada como razón de cambio, tal y como afirman Contreras et al. (2003); ausencia de tareas que partan de una gráfica en contra de lo que afirmaban Ruiz de Gauna y Sarasua (2015) pero a nivel de las PEBAU de toda España; etc. En particular, se han obtenido múltiples resultados que ponen de manifiesto la algebrización del cálculo reportada en varios de los antecedentes revisados.

Finalmente consideramos que, con una perspectiva más amplia, los resultados aquí obtenidos pueden resultar de utilidad para otros estudios relacionados con la transición del bachillerato a la universidad, en particular, en lo que respecta al cálculo matemático.

En este sentido, nos remitimos al último apartado de este capítulo donde describimos posibles líneas de investigación futuras.

6.3 LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Consideramos que la principal limitación del estudio es la elección de la muestra, que ha venido determinada por la gran cantidad de categorías de las que hemos hecho uso y por las limitaciones temporales existentes. Si bien no únicamente hubiera sido interesante considerar un mayor número de convocatorias, sino también las pruebas de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, consideramos que el describir la información buscada con el nivel de detalle que nos hemos marcado hubiera sido inabarcable en estos casos.

Asimismo, otra limitación ha sido el emplear como forma de medir parte de la dificultad de los ítems los grados de complejidad que se establecen en el marco PISA (OECD, 2003). Como se ha dicho, las descripciones dadas para tales grados se muestran un tanto ineficientes para contenidos matemáticos complejos como es el caso de la derivada, por lo que se ha tenido que hacer un exceso de interpretación por nuestra parte en algunas ocasiones.

6.4 FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

A partir del estudio que hemos realizado, consideramos que pueden surgir otras investigaciones futuras, las cuales describimos a continuación. Algunas surgen de considerar las limitaciones anteriormente descritas:

- Este estudio podría complementarse y contrastarse con otros de la misma índole que traten las convocatorias de otros años, pudiendo así comprobar si hay alguna evolución de los significados de la derivada que se dan en las PEBAU a lo largo del tiempo, o las pruebas de otras comunidades.
- También podrían hacerse estudios similares que aborden las pruebas de MACS II o incluso de otras especialidades del ámbito científico en las que intervenga la derivada, para posteriormente compararlos entre sí.

Asimismo, con vistas a indagar en esa transición del bachillerato a la universidad de la que hablábamos en la introducción de este trabajo, podrían considerarse cuestiones como las siguientes:

- Estudiar los significados de la derivada que se recogen en el currículo de matemáticas de bachillerato y en los libros de texto más usados actualmente en este nivel para posteriormente compararlos con los significados encontrados en las PEBAU, buscando si existe una correspondencia o si hay diferencias destacables.
- Estudiar de forma análoga a lo anterior el currículo y libros de texto más frecuentes de distintos grados universitarios del ámbito científico-tecnológico y compararlos con los significados encontrados, viendo si los significados que se dan en las PEBAU realmente se corresponden con los requeridos en estos grados universitarios.

Por otro lado, también podría resultar de interés el analizar los significados de la derivada que se dan en las pruebas de acceso a la universidad de otros países, pudiendo así compararlos con los significados recogidos en las PEBAU.

Finalmente, otro estudio que podría llevarse a cabo con base en lo aquí desarrollado sería uno que parta de la realización de un análisis clúster para la determinación de una tipología de tareas entre otras posibles cuestiones, análisis que hemos realizado pero que por motivos de redacción y espacio no hemos incluido.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bingolbali, E. y Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, *68*(1), 19-35.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(3), 219-236.

Boal, N., Bueno, C., Lerís, M. D. y Sein-Echaluce, M. L. (2008). Las habilidades matemáticas evaluadas en las pruebas de acceso a la universidad. Un estudio en varias universidades públicas españolas. *Revista de Investigación Educativa*, *26*(1), 11-23.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos, M. (2010). La concepción de derivada de una función en primer curso de universidad. *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática*, *10*, 43-66.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Nueva York, NY: Routledge.

Contreras, A., Luque, L. y Ordóñez, L. (2003). Una perspectiva de la enseñanza-aprendizaje de la continuidad y la derivada de una función en bachillerato y universidad. *Revista de Educación*, *331*, 399-419.

Contreras, A., Ordoñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 367-384.

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones* *en Matemática Educativa II* (pp. 257-272). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Fernández-Plaza, J. A. (2016). Análisis de contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 103-118). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Flores, P. y Lupiáñez, J. L. (2016). Expectativas de aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 177-194). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Frege, A. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84-111). Madrid, España: Tecnos.

García, M. y Dolores, C. (2012). Una propuesta para contribuir a la comprensión de la derivada. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 25, pp. 385-394). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Goberna, M. A. (1983). El currículum de matemáticas en la prueba de acceso. *Enseñanza de las Ciencias*, *1*(2), 99-105.

Goberna, M. A., López, M. A. y Pastor, J. (1985). La influencia del examen de selectividad en la enseñanza. Análisis de una experiencia en matemáticas de C.O.U. *Enseñanza de las Ciencias*, *3*(3), 181-184.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2-3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1-2), 127-135.

González, A. (2001). Los orígenes de la selectividad en la Universidad española: el examen de ingreso en facultades (1898-1902). *Hispania*, *61*(207), 315-338.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (Cuarta edición). México, DF: McGraw Hill.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*

(Sexta edición). México, DF: McGraw Hill.

Herrera, M. E. (2017). *Análisis de las tareas de las pruebas de acceso a la universidad: Matemáticas II, 2016* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-23). Abingdon, Reino Unido: Routledge.

Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. Cortés y F. Hitt (Eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp 81-107). Michoacán, México: Morevallado Editores.

Huidobro, J. A., Méndez, M. A. y Serrano, M. L. (2010). Del bachillerato a la universidad: las Matemáticas en las carreras de ciencias y tecnología. *Aula Abierta*, *38*(1), 71-80.

Inglada, N. y Font, V. (2003, abril). *Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental*. Trabajo presentado en las XIX Jornadas del SI-IDM, Córdoba, España. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cordoba_2003/IngladaFont.pdf

Jefatura del Estado (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *BOE*, *295*, 97858-97921.

Junta de Andalucía (2017). *Distrito Único Andaluz: Exámenes y orientaciones sobre la prueba de acceso y/o admisión a la universidad.* Recuperado de http://www.juntadeandalucia.es/economiainnovacionyciencia/sguit/g_b_examenes_anteriores.php

Londoño, N., Kakes, A. y Decena, V. (2013). Algunas dificultades en la resolución de problemas con derivadas. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 933-940). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

López-Martín, M. M., Batanero, C., Díaz-Batanero, C. y Gea, M. M. (2016). La inferencia estadística en las pruebas de acceso a la universidad en Andalucía. *Revista Paranaense de Educaçao Matemática*, *5*(8), 33-59.

López-Martín, M. M., Contreras, J. M., Batanero, C. y Carretero, M. (2015). Los problemas de probabilidad propuestos en las pruebas de acceso a la universidad en Andalucía. *Areté*, *1*(1), 39-60.

Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 119-137). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Mallart, A. (2014). La resolución de problemas en la prueba de Matemáticas de acceso a la universidad: procesos y errores. *Educatio Siglo XXI*, *32*(1), 233-254.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 412/2014, de 6 de junio, por el que se establece la normativa básica de los procedimientos de admisión a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado. *BOE*, *138*, 43307-43323.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *BOE*, *3*, 169-185.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2016). Orden ECD/1941/2016, de 22 de diciembre, por la que se determinan las características, el diseño y el contenido de la evaluación de bachillerato para el acceso a la universidad, las fechas máximas de realización y de resolución de los procedimientos de revisión de las calificaciones obtenidas, para el curso 2016/2017. *BOE*, *309*, 89890-89949.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE*, *266*, 45381-45477.

Ministerio de la Presidencia (2008). Real Decreto 1892/2008, de 14 de noviembre, por el que se regulan las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas. *BOE*, *283*, 46932-46946.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016a). Complejidad y estructura de las tareas escolares. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 259-273). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016b). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 244-258). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Muñoz, F. (1995). El acceso a la universidad en España: perspectiva histórica. *Revista de Educación*, *308*, 31-61.

Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de problemas de matemáticas en las pruebas de acceso a la universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI*, *28*(1), 317-342.

OECD (2003). *The PISA 2003 assessment framework: mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. París, Francia: OECD Publishing.

OECD (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematic and financial literacy*. París, Francia: OECD Publishing.

Pastor, J. (1984). Las pruebas de matemáticas en los exámenes de acceso. *Enseñanza de las Ciencias*, *2*(1), 17-24.

Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 123-150.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Ramos, C. E., Espinel, M. C. y Ramos, R. M. (2009). Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de bachillerato. *SUMA*, *61*, 25-44.

Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid, España: Síntesis.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 39-63.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión*, *33*, 11-27.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Romero (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 85-100). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Rico, L. y Moreno, A. (Eds.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Ruiz de Gauna, J. (2010). *La enseñanza de las matemáticas del bachillerato, los libros* *de texto y las pruebas de acceso a la UPV-EHU (1970-2008)* (Tesis doctoral). Universidad del País Vasco, Donostia, España.

Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberría, J. y Sarasua, J. (2013). Pruebas de selectividad en matemáticas en la UPV-EHU. Resultados y opiniones del profesorado. *Revista de educación*, *362*, 217-246.

Ruiz de Gauna, J. y Sarasua, J. (2015). Las pruebas de matemáticas en el acceso a la universidad de algunos países europeos (Alemania, España, Francia, Italia). *Unión*, *42*, 114-132.

Ruiz de Gauna, J., Sarasua, J. y García, J. M. (2011). Una tipología y clasificación de los ejercicios de matemáticas de selectividad. *Epsilón*, *28*(78), 21-38.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 139-151). Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 267-296.

Sandoval, J. C. (2014). Introducción al concepto derivada: Un diseño experimental con estudiantes universitarios de humanidades. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 27, pp. 1197-1204). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Silva, L. (2016). Los significados de la derivada en un proceso de estudio en la asignatura matemática del DAC-UCLA. Estudio de caso. *Gestión y Gerencia*, *10*(1), 85-110.

Siyepu, S. W. (2013). An exploration of students' errors in derivatives in a university of technology. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 577-592.

Spivak, M. (2006). *Calculus*. Barcelona, España: Reverté.

Vrancken, S., Engler, A. y Müller, D. (2012). La comprensión de la derivada en estudiantes de ingeniería agronómica. Logros y dificultades. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 25, pp. 235-244). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

ANEXO

ÍTEMS ANALIZADOS

ÍTEMS DE 2013

M-2013-1-A-1
Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en un triángulo isósceles de 6 metros de base (el lado desigual) y 4 metros de alto.

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ para $x \geq -1, x \neq 0$.
M-2013-1-B-1-a
a) [**1 punto**] Calcula los límites laterales de f en $x = 0$.
M-2013-1-B-1-b
b) [**1'5 puntos**] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

M-2013-2-A-1
Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Un alambre de 10 metros de longitud se divide en dos trozos. Con uno de ellos se forma un triángulo equilátero y con el otro un cuadrado. Halla la longitud de dichos trozos para que la suma de las áreas sea mínima.

Ejercicio 2.-

a) [**2 puntos**] Determina la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = (2x+1)e^{-x}$ y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.
M-2013-2-A-2-b
b) [**0'5 puntos**] Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Ejercicio 1.- Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x^2}$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).
M-2013-2-B-1-a
a) [**1'75 puntos**] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).
M-2013-2-B-1-b
b) [**0'75 puntos**] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

Ejercicio 2.- Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = -x^2 + 6x - 5$.
M-2013-2-B-2-a
a) [**0'75 puntos**] Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de g en el punto de abscisa $x = 4$.

b) [**1'75 puntos**] Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $x - 2y + 2 = 0$. Calcula el área de este recinto.

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$ para $x > 0, x \neq 1$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).

M-2013-3-A-1-a

a) [**1'25 puntos**] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

M-2013-3-A-1-b

b) [**1'25 puntos**] Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{k}{(x-a)(2x-1)}$ para $x \neq a$ y $x \neq \frac{1}{2}$.

a) [**1 punto**] Halla a y k sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto $(0,2)$ y que la recta $x = 2$ es una asíntota de dicha gráfica.

M-2013-3-B-1-b

b) [**1'5 puntos**] Para $k = 4$ y $a = 2$, halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

M-2013-4-A-1

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm. de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

M-2013-4-B-1

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y + x = -3$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x = 1$.

M-2013-5-A-2

Ejercicio 2.- [**2'5 puntos**] De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que alcanza un máximo relativo en $x = 1$, que la gráfica tiene un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d.

M-2013-5-B-1

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Se sabe que un punto de inflexión de la gráfica de f tiene abscisa $x = 1$ y que f tiene un mínimo relativo en $x = 2$ de valor -9. Calcula a, b y c.

M-2013-6-A-1

Ejercicio 1.- [**2'5 puntos**] Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

Ejercicio 1.- Sea $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si} \quad x \leq 0, \\ a\sqrt{b-x} & \text{si} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$

M-2013-6-B-1-a

a) [**1'5 puntos**] Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.

M-2013-6-B-1-b

b) [**1 punto**] Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

M-2014-1-A-1
Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** De entre todos los triángulos rectángulos de área 8 cm^2, determina las dimensiones del que tiene la hipotenusa de menor longitud.

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función derivable definida por

$$f(x) = \begin{cases} a - x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{b}{x} + \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

donde ln denota el logaritmo neperiano.
M-2014-1-B-1-a
a) **[1'25 puntos]** Calcula a y b.
M-2014-1-B-1-b
b) **[1'25 puntos]** Para $a = 3$ y $b = 2$ calcula los extremos absolutos de f en el intervalo $[0, e]$ (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 2.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^x \cos(x)$.
M-2014-1-B-2-a
a) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

b) **[1'5 puntos]** Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(0, 0)$.

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.
M-2014-2-A-1-a
a) **[1'75 puntos]** Halla a, b y c para que la gráfica de f tenga un punto de inflexión de abscisa $x = \frac{1}{2}$ y que la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$ tenga por ecuación $y = 5 - 6x$.
M-2014-2-A-1-b
b) **[0'75 puntos]** Para $a = 3$, $b = -9$ y $c = 8$, calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Ejercicio 2.- Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por

$$f(x) = \frac{|x|}{2} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

M-2014-2-A-2-a
a) **[1 punto]** Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) **[1'5 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

M-2014-2-B-1
Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Se desea construir un depósito en forma de cilindro recto, con base circular y sin tapadera, que tenga una capacidad de 125 m^3. Halla el radio de la base y la altura que debe tener el depósito para que la superficie sea mínima.

M-2014-3-A-1
Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{a}{\ln x} \right)$ es finito, calcula a y el valor del límite (ln denota el logaritmo neperiano).

Ejercicio 1.- Considera la función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x} & \text{si} \quad x<0\\[2ex] ax+b & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$$

M-2014-3-B-1-a

a) **[1'75 puntos]** Calcula a y b.

M-2014-3-B-1-b

b) **[0'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$.

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{1}{2x}+\ln x$ para $x>0$ (ln denota el logaritmo neperiano).

M-2014-4-A-1-a

a) **[1'75 puntos]** Determina el punto de la gráfica de f en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.

M-2014-4-A-1-b

b) **[0'75 puntos]** Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=1$.

M-2014-4-B-1

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$. Halla b,c y d sabiendo que f tiene un máximo relativo en $x=-1$ y que $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=4$.

Ejercicio 2.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=-x^2+2x+3$.

M-2014-4-B-2-a

a) **[0'5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.

b) **[0'75 puntos]** Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $2x+y-7=0$ y el eje OX, calculando los puntos de corte.

c) **[1'25 puntos]** Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

M-2014-5-A-1

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\operatorname{sen} x}{x-\operatorname{sen} x}$.

Ejercicio 2.- Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3-3x^2-x+3$.

M-2014-5-A-2-a

a) **[0'75 puntos]** Halla, si existe, el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y=3-x$.

b) **[1'75 puntos]** Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior.

Ejercicio 1.- Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2e^{-x^2}$

M-2014-5-B-1-a

a) **[0'75 puntos]** Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

M-2014-5-B-1-b

b) **[1'25 puntos]** Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) **[0'5 puntos]** Esboza la gráfica de f.

M-2014-6-A-1

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x) - e^x + ax}{x\,\mathrm{sen}(x)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

M-2014-6-B-1

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** De entre todos los números reales positivos, determina el que sumado con su inverso da suma mínima.

ÍTEMS DE 2015

Ejercicio 1.- Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ para $x \neq 1$.

M-2015-1-A-1-a

a) **[1 punto]** Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.

M-2015-1-A-1-b

b) **[1'5 puntos]** Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) de f.

M-2015-1-B-1

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Queremos fabricar una caja con base cuadrada, de tal manera que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determina sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible.

M-2015-2-A-1

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla los coeficientes a, b, c y d sabiendo que f presenta un extremo local en el punto de abscisa $x = 0$, que $(1, 0)$ es punto de inflexión de la gráfica de f y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3.

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.

M-2015-2-B-1-a

a) **[0'5 puntos]** Estudia la derivabilidad de f.

M-2015-2-B-1-b

b) **[1 punto]** Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

M-2015-2-B-1-c

c) **[1 punto]** Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

M-2015-3-A-1

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Halla los valores a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{ax^2 + b}{x + c}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, una asíntota oblicua de pendiente 2, y un extremo local en el punto de abscisa $x = 3$.

M-2015-3-B-1

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El terreno debe tener $180\,000\ m^2$ para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita vallado?

M-2015-4-A-1

Ejercicio 1.- **[2'5 puntos]** Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13'5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el mínimo posible.

M-2015-4-B-1
Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{ax^2+bx+1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x^2)}$ es finito e igual a uno, calcula los valores de a y b.

M-2015-5-A-1
Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 80 euros/metro y la de los otros lados 10 euros/metro, halla las dimensiones del campo de área máxima que puede vallarse con 28 800 euros.

M-2015-5-B-1
Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Determina a y b sabiendo que $b > 0$ y que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} a\cos(x) + 2x & \text{si} \quad x < 0 \\ a^2 \ln(x+1) + \dfrac{b}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

es derivable. ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

M-2015-6-A-1
Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Halla a y b sabiendo que es continua la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos(x) - a\,e^x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ b & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{-x}$.

M-2015-6-B-1-a
a) [1 punto] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f.

M-2015-6-B-1-b
b) [1 punto] Halla los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente es horizontal.

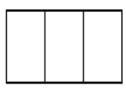
M-2015-6-B-1-c
c) [0'5 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

ÍTEMS DE 2016

M-2016-1-A-1
Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (e^{ax} + b)x$, con $a \neq 0$. Calcula a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 0$ y su gráfica, un punto de inflexión en el punto cuya abscisa es $x = 1$.

M-2016-1-B-1
Ejercicio 1.- [2'5 puntos] De un terreno se desea vender un solar rectangular de 12 800 m^2 dividido en 3 parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo.

Se quieren vallar las lindes de las tres parcelas (los bordes y las separaciones de las parcelas). Determina las dimensiones del solar y de cada una de las tres parcelas para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



M-2016-2-A-1

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\,\text{sen}(x) + x\cos(3x)}{x^2}$$

es finito, calcula a y el valor del límite ($\ln$ denota logaritmo neperiano).

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

a) **[0'75 puntos]** Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f. Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica de f.

M-2016-2-B-1-b

b) **[1'25 puntos]** Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) **[0'5 puntos]** Esboza la gráfica de f.

Ejercicio 2.- Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \ln(x)$ ($\ln$ representa logaritmo neperiano).

M-2016-2-B-2-a

a) **[0'5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) **[2 puntos]** Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de f, la recta $y = x - 1$ y la recta $x = 3$. Calcula su área.

M-2016-3-A-1

Ejercicio 1. (2'5 Puntos). Sabiendo que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\pi x)\cdot(1 + a\cos(\pi x))}{sen(x^2)}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

M-2016-3-B-1

Ejercicio 1. (2'5 Puntos). Se dispone de un cartón cuadrado de 50 cm de lado para construir una caja sin tapadera a partir del cartón. Para ello, se corta un cuadrado de x cm de lado en cada una de las esquinas. Halla el valor de x para que el volumen de la caja sea máximo y calcula dicho volumen.

Ejercicio 1.- Sea la función $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

M-2016-4-A-1-a

a) **[1 punto]** Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

M-2016-4-A-1-b

b) **[1'5 puntos]** Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

M-2016-4-A-2

Ejercicio 2.- [2'5 puntos] De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ae^x - bx$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ se sabe que su gráfica tiene tangente horizontal en $x = 0$ y que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = e - \frac{3}{2}$. Halla los valores de a y b.

M-2016-4-B-1

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b, c sabiendo que la gráfica de f tiene tangente horizontal en el punto de abscisa $x = 1$ y un punto de inflexión en $(-1, 5)$.

M-2016-5-A-1

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{m}{2x} \right)$ es finito, calcula m y el valor del límite.

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

M-2016-5-B-1-a

a) [0'75 puntos] Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f.

M-2016-5-B-1-b

b) [1'25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

M-2016-6-A-1

Ejercicio 1.- [2'5 puntos] Se quiere construir un bote de conservas cilíndrico, con tapa, de un litro de capacidad. Calcula las dimensiones del bote para que en su construcción se utilice la menor cantidad posible de hojalata.

Ejercicio 1.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 4|$.

M-2016-6-B-1-a

a) [1'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y calcula sus extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

M-2016-6-B-1-b

b) [1 punto] Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.