

# ATRAPADOS

entre

ISOMETRIAS

Trabajo Fin De Master:

Uidad Didactica

F<sup>o</sup> Javier Garcia Auguita

**Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y  
Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas**

**Universidad de Granada**



**Curso: 2011-2012**

**Trabajo Fin De Máster: Unidad Didáctica**

*Atrapados entre Isometrias*

**Alumno: Francisco Javier García Anguita**

**Tutor: Pablo Flores Martínez**

# INTRODUCCIÓN

El presente documento se refiere a la unidad didáctica de Isometrías o Movimientos en el plano del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) para la materia de Matemáticas.

A modo de Trabajo Fin de Master esta unidad didáctica pretende ser la una herramienta resumen, reflejo del conjunto de competencias desarrolladas a lo largo de los diferentes módulos formativos del Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas.

De las posibles opciones para la realización del Trabajo Fin de Máster se ha optado por un diseño curricular fundamentado, centrado en una unidad didáctica de la especialidad cursada.

Esta unidad didáctica busca servir al docente para planificar y dirigir el aprendizaje de los alumnos y las alumnas. Se plantean las metas a alcanzar (competencias básicas y objetivos); los conocimientos, procedimientos y conductas sobre los que se va trabajar (contenidos); las estrategias, métodos, actividades, instrumentos y medios que ayudarán a conseguirlo (metodología); y el modo en el que se va contrastar que este diseño sirve para lograr dichas pretensiones (evaluación).

Esta unidad didáctica tiene en cuenta las características del alumnado, su entorno, sus intereses, sus capacidades, etc. Y, dado que las características de los alumnos no son uniformes, contempla medidas de atención a la diversidad que ayudan, a aquellos que lo necesitan, a alcanzar los objetivos y competencias básicas de la materia.

La unidad didáctica se ha estructurado en dos partes: Esquema y Organizadores.

En la primera parte de la misma, que se ha denominado Esquema, se justifica, en primer lugar, la elección del contenido concreto para la elaboración de dicha unidad, a su vez, se describe las características de los alumnos así como los conocimientos que se les supone y a los que esta unidad pretende contribuir a obtener en un futuro. Seguidamente, se sitúa la unidad en la legislación vigente y se detalla su relación con el currículo. Tras una descripción de la planificación metodológica de

trabajo en el aula y una previsión temporal de su desarrollo en el aula se detallará el qué, el cómo y el cuándo se va a evaluar en esta unidad. Finalmente, la parte más importante, en la que se detallan las actividades que debe realizar diariamente el alumno en clase, acompañadas de las explicaciones que debe dar el profesor.

En la segunda parte, Organizadores, se expone una serie de conocimientos que determinan el enfoque de la enseñanza y la toma de decisiones de la unidad didáctica. Estos organizadores permiten secuenciar los contenidos, diseñar las actividades, preparar la evaluación, etc.

Finalmente, a modo de conclusiones se recogen las impresiones sobre el periodo de formación de máster y una retrospectiva personal de la contribución del mismo a la formación personal de los estudiantes del mismo

# I N D I C E

<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
<b>1.- DATOS E IDENTIFICACIÓN DE LA UD</b> .....	<b>4</b>
<b>2.- CONTEXTUALIZACIÓN, DIAGNÓSTICO Y JUSTIFICACIÓN</b> .....	<b>5</b>
2.1.- Elección de contenido como núcleo de la U.D.....	5
2.2.- ¿Qué se pretende avanzar? .....	8
<b>3.- U.D. y Currículo</b> .....	<b>15</b>
3.1.- Relación de la U.D. con el currículo .....	15
3.2.- Relación de la U.D. con el Proyecto Educativo de Centro.....	19
3.3.- Organización, secuenciación y estructura de contenidos .....	19
3.4.-Objetivos a conseguir con la U.D. ....	20
3.5.- Criterios de evaluación .....	22
<b>4.- METODOLOGÍA</b> .....	<b>23</b>
4.1.- Características Relevantes .....	23
4.2.- Medios y materiales.....	23
4.3.- Organización del aprendizaje.....	24
4.4.- Tipos de actividades propuestas.....	24
<b>5.-TEMPORALIZACIÓN</b> .....	<b>25</b>
<b>6.- EVALUACIÓN</b> .....	<b>26</b>
6.1.- Introducción .....	26
6.2.- Evaluación de los alumnos .....	28
6.3.- Evaluación de la propia U.D. ....	30
<b>7.- A C T I V I D A D E S</b> .....	<b>31</b>
<b>CONCLUSIONES</b> .....	<b>59</b>
<b>ANEXO I: DESGLOSE DE ACTIVIDADES</b> .....	<b>61</b>
<b>ANEXO II: ORGANIZADORES DE LA UD</b> .....	<b>116</b>
Análisis de Contenido .....	117
Análisis Cognitivo .....	127
Análisis de Instrucción .....	133
Contexto Histórico .....	153
<b>ANEXO III: EXTENSIÓN APARTADO 3. UD y currículo</b> .....	<b>162</b>
<b>Bibliografía</b> .....	<b>176</b>

## 1.- DATOS DE IDENTIFICACIÓN DE LA UNIDAD.

**TÍTULO DE LA UNIDAD:** ATRAPADOS ENTRE ISOMETRÍAS.

TÍTULO DE LA UNIDAD: ATRAPADOS ENTRE ISOMETRÍAS.

**AUTORES:**

AUTORES:

**Alumno:** *Francisco Javier García Anguita*

ALUMNO: FRANCISCO JAVIER GARCÍA ANGUITA

**Tutor Supervisor:** Pablo Flores Martínez.

TUTOR SUPERVISOR: PABLO FLORES MARTÍNEZ.

**Área /Materia:** Matemáticas

**Curso:** 3º ESO.

**Etapa:** Segundo Ciclo Educación Secundaria Obligatoria.

**Curso académico:** 2011-2012.

## 2.- CONTEXTUALIZACIÓN, DIAGNÓSTICO Y JUSTIFICACIÓN.

### 2.1.- Elección del contenido como núcleo de la Unidad Didáctica.

Para dar respuesta al por qué de la selección de las ISOMETRÍAS como unidad didáctica es preciso recurrir a aspectos históricos, psicopedagógicos, epistemológicos y sociológicos no solo del tema a tratar sino de las matemáticas, de la geometría y de las transformaciones geométricas.

La sociedad ha generado una serie de expectativas en relación a la enseñanza de las matemáticas que determinan el currículo de las mismas en función de las diferentes etapas de aprendizaje. De este modo, a las matemáticas se les asignan un elevado valor formativo y una gran utilidad práctica, además de considerárseles uno de los hilos conductores de la formación intelectual de los alumnos, junto al lenguaje (Rico, 1997).

¿Pero a qué nos referimos con *matemáticas*? Para analizar este concepto podemos hacer referencia a tres tipos de matemáticas: Culturales, Escolares y Personales (Gómez, 2000).

Las matemáticas culturales hacen referencia al saber de la humanidad sobre dicha disciplina. Desde una perspectiva didáctica, las posiciones ideológicas más útiles son el platonismo, formalismo, empiricismo y constructuismo social.

Las matemáticas escolares son las que se deberían enseñar en una determinada escuela hipotética, no se está particularizando a ninguna institución con este concepto. Pese a estar relacionadas con las anteriores, muestra diferencias en cuanto a su presentación, más informal y con propósitos didácticos, y su contenido, pues son una traducción de la forma de las matemáticas culturales.

Las matemáticas escolares son las generadas por un individuo hipotético: matemático, profesor y alumno. La perspectiva más interesante de las mismas es la que hace referencia a lo que el individuo hace cuando realizan, discuten o comunican algún tipo de discurso matemático. La forma de su discurso y la manera en que se construye es lo más relevante didácticamente hablando.

Dentro de la materia de las matemáticas, esta unidad didáctica se incluye dentro de la rama de la *geometría*.

Epistemológicamente hablando, la palabra geometría tiene un significado práctico puesto que hace referencia a las labores de reconstrucción de parcelas que debían hacer los egipcios tras las inundaciones del río Nilo (Geometría = Medida de la Tierra), según Godino y Ruiz (2003). Es en Grecia cuando las formas, la identificación de sus componentes más elementales y de las relaciones y combinaciones entre dichos componentes, entran a formar parte del estudio de la geometría.

Es esta fuerte tradición de la geometría como ciencia y el respeto con el que se trata algunas de sus partes, lo que hace que, hasta hace muy poco tiempo, la enseñanza de ésta estuviese muy sobrecargada (Klein, 1927). Si queremos entender como ha sido dicha enseñanza hay que remontarse al Renacimiento. En esta época se estudiaban los *Elementos de Euclides* y cuestiones aisladas de los antiguos (Arquímedes, Polonio...), lo que muestra una declinación hacia la parte abstracta y lógica de la deducción geométrica y esta tendencia ha prevalecido hasta ya avanzado el siglo XX.

No es, hasta la segunda mitad del siglo XX con la *La Teoría de van Hiele* o *Modelo de van Hiele* o *Niveles van Hiele*, cuando se reorganiza la enseñanza y aprendizaje de la geometría encauzándola hacia la búsqueda de nuevas metodologías que faciliten la actividad de exploración y descubrimiento por parte de los estudiantes (Gutiérrez, 2011).

Según Vinner (1991), en el aprendizaje de los conceptos geométricos elementales, debido al importante soporte gráfico y visual de la geometría, se produce un desajuste entre los componentes gráficos y verbales de las actividades y respuestas de los estudiantes. Así Vinner apuesta, a que en geometría, se reste importancia a la definición de los conceptos a favor de la imagen conceptual (conjunto de representaciones visuales, imágenes, impresiones o experiencias que se asocian a los conceptos). Como dichas imágenes conceptuales son las que producen un efecto mental más duradero en los alumnos, la mejor manera de mejorar la calidad de las imágenes conceptuales es ofrecer a los estudiantes mayor variedad de ejemplos en detrimento de las definiciones.

Muchos investigadores han destacado la importancia de la percepción visual o visualización en el aprendizaje de conceptos geométricos, ya que es un elemento importante en infinidad de actividades de la vida. La visualización se compone de unos

elementos básicos a los que se les denominan imágenes mentales y que pueden ser de diferentes tipos (Presmeg, 1986). Estas imágenes se manipulan, según dos tipos de procesos, en la actividad de visualización (Bishop, 1989). Las habilidades a través de las que los individuos son capaces de crear y procesar imágenes visuales son lo que se denominan habilidades de visualización y según Del Grande (1990) se pueden identificar siete independiente y varias más resultado de la combinación de éstas. La geometría ofrece un contexto idóneo para que se establezcan relaciones estrechas entre imágenes, actividades y habilidades y la actividad de los estudiantes.

La importancia de la geometría radica en las múltiples y variadas aplicaciones que tiene en la vida cotidiana, puesto que es habitual encontrar, en nuestro día a día, modelos y ejemplificaciones física de los objetos ideales que son estudio de la geometría. En la propia Naturaleza, que en contextos diferentes utiliza un número reducido de formas parecidas, en el entorno artístico y arquitectónico del ser humano y en sus quehaceres diarios (profesiones, juegos...etc.) se necesita y se usa la geometría (Godino y Ruiz, 2003).

En la línea de esta variedad de aplicaciones de la geometría surge la necesidad de prestar atención a las transformaciones geométricas.

Las transformaciones geométricas han estado presentes a lo largo de la historia en todas las culturas. Las podemos encontrar en muchas facetas del mundo físico: en la naturaleza (hojas de los arboles, telas de araña, paneles de abeja etc...), en la arquitectura (fachadas de edificios que presentan simetría axial respecto a un eje, frisos donde se repiten el mismo adorno ornamental...etc.), en la cultura y en muchas creaciones artísticas, (esculturas, pinturas), son muchos los artistas que realizan sus creaciones a base de repeticiones de un mismo elemento o motivo geométrico (Pina y Abellanas, 2010).

Cuando hablamos de transformaciones geométricas estamos haciendo referencia al conjunto de operaciones geométricas mediante las cuales asociamos a los puntos del plano de una figura inicial otros puntos del mismo con lo que se genera la correspondiente obtención de una nueva figura a la nos referimos con el nombre de figura homóloga.

Existen diversos tipos de transformaciones, las cuales dependen del criterio escogido para la clasificación de las mismas. El primero de ellos hace referencia al sentido dela figura homóloga respecto a la original y el segundo a la relación existente entre la forma de ambas.

Las transformaciones geométricas, en función del sentido existente en el plano orientado entre una figura y su homóloga, pueden ser:

- Directas: se conserva el sentido entre las figuras
- Inversas: no se conserva el sentido entre ambas.

Las transformaciones geométricas, en función de la forma entre una figura y su homóloga, pueden ser:

- Isométricas o Movimientos. Se mantienen ángulos y dimensiones.
- Isomórficas: Se conservan ángulos pero no las dimensiones. Sin embargo, las dimensiones de la figura y su homólogo mantienen una relación de proporcionalidad. Las isométricas serían un caso particular de los mismas con relación de proporcionalidad igual a la unidad.
- Anamórficas: No se conservan ni ángulos ni dimensiones.

La unidad didáctica que se presenta versa sobre el primer grupo de esta segunda clasificación de transformaciones geométricas, en concreto, de las isometrías.

En la presente se pretende hacer una máxima del principio didáctico: el estudio y la utilización formales de las isometrías puede tener éxito sólo cuando previamente se ha permitido a los estudiantes descubrir y utilizar el sentido físico y dinámico de las isometrías. Este principio ha sido defendido por Jaime y Gutiérrez (1996) y Alsina *et al.* (1989).

## 2.2.- ¿Qué se pretende avanzar?

Para poder exponer lo que se pretende avanzar es necesario, previamente, describir las características socio-evolutivas de los alumnos para después pasar, a continuación, a analizar los conocimientos previos que se les suponen a los mismos y el interés que tiene lo que se pretende enseñar en esta unidad respecto al conocimiento que en un futuro deben adquirir.

La primera parte a la que se hace mención en el párrafo anterior se concreta, por un lado, en la caracterización del desarrollo cognitivo de los alumnos en lo referente a los conceptos geométricos y, por otro lado, en la progresión del

aprendizaje de la geometría. Para ambas cuestiones, se hace referencia, respectivamente, a las investigaciones de Piaget (Dickson et al., 1991) y al modelo de niveles de van Hiele (Galindo, 1996), al que ya, en la sección anterior, se ha hecho referencia.

Según Piaget, en el desarrollo de los conceptos espaciales en el niño, se distingue dos estadios de desarrollo: percepción y representación. En el niño medio, hasta la edad de dos años se desarrollan las capacidades de percepción y es, a partir de esta edad, cuando comienza la capacidad de representación que se perfecciona a partir de la edad de siete años. La percepción hace referencia al conocimiento de objetos a través del contacto directo con los mismos. En cambio, en la representación se evoca a éstos en su ausencia.

En estos dos estadios se produce una progresiva diferenciación de propiedades geométricas: las topológicas, las proyectivas y las euclídeas. Las primeras independientes de la forma o el tamaño, las segundas asociadas a la predicción de los objetos al verlos desde diferentes ángulos y por último las relacionadas con los tamaños, distancias y direcciones.

El modelo de Van Hiele establece que para la comprensión de cualquier concepto geométrico es necesario dominar y pasar de manera ordenada por cinco niveles de razonamiento, o formas de concebir o ver estos conceptos. A modo de resumen se pueden enumerar de la siguiente forma:

- *Nivel 1.- Reconocimiento.* Se reconocen las figuras como un todo.
- *Nivel 2.- Análisis.* Se analiza las propiedades de las figuras.
- *Nivel 3.- Ordenamiento.* Se ordena lógicamente figuras y se comprende la interrelación entre figuras y la importancia de definiciones exactas.
- *Nivel 4.- Deducción.* Se comprende el significado de la deducción y el papel de los términos indefinidos, postulados, teoremas y demostraciones.
- *Nivel 5.- Rigor.* Se comprende la importancia de la precisión cuando trata con las bases y las interrelaciones entre estructuras. Rara vez es alcanzado este nivel entre los escolares.

La conexión existente entre cada nivel pasa por entender que las relaciones entre las ideas u objetos de un nivel conforman las ideas u objetos del siguiente. Por lo tanto, a medida que se aumenta de nivel, se aumenta la complejidad y la abstracción de los conocimientos empleados.

Las etapas de la teoría del desarrollo de Piaget y los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele son independientes pero si se puede afirmar que la edad proporciona una idea sobre la cantidad y el tipo de experiencias geométricas que se tienen. En función de lo dicho, podría darse el caso de que de bachillerato se encontrase, aún, en un nivel de razonamiento 1 como podría esperarse de un alumno de primaria. Sin embargo, sí que es aceptable afirmar, de manera general, que todos los escolares hasta el segundo ciclo de primaria se hallan en el nivel 1 (Van de Walle, 2001).

Para la segunda parte de este apartado que aborda el pasado-futuro de los conocimientos de los alumnos es de gran utilidad el documento *Los Principios y Estándares para la Educación Matemática (2003)* traducción del *Principles and standards for school mathematics (2000)* del National Council of Teachers of Mathematics. Resulta imposible en este apartado no hacer referencia al Diseño Curricular Base para la Educación Primaria propuesto por el MEC y al Real Decreto por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

En los estándares para las Matemáticas escolares se considera la geometría como el lugar natural para el desarrollo del razonamiento y de las habilidades para la justificación, culminando en la enseñanza secundaria con el trabajo de las demostraciones. Se destaca como un importante aspecto del pensamiento geométrico la visualización espacial, entendiéndola como la capacidad de construir y manipular mentalmente representaciones de objetos de dos y tres dimensiones y percibir un objeto desde perspectivas diferentes. La geometría es, por tanto, más que definiciones, es describir relaciones y razonar.

Según el Estándar de Geometría (NCTM, 2000), los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- ✓ Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas;
- ✓ Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas y otros sistemas de representación;
- ✓ Aplicar transformaciones geométricas y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas;

- ✓ Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas.

Todas estas capacidades anteriores tienen relación en mayor o en menor grado con las Isometrías, objeto de estudio de esta unidad didáctica, pero resulta evidente que es la tercera de ellas es la que tiene una relación más directa con la unidad didáctica en cuestión. Sin intención de dejar de lado el resto de capacidades, puesto que jugarán un importante papel en la concreción de los objetivos de la unidad didáctica, y con el fin de no alargar este apartado se recogerán las expectativas que desarrollan el tercero de los objetivos generales para las diferentes etapas, desde infantil a bachillerato.

Aplicar transformaciones geométricas y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas;

- De infantil a 2º Curso de Primaria.
  - ⇒ Reconocer y aplicar traslaciones, reflexiones y giros.
  - ⇒ Reconocer y crear figuras que tengan simetrías.
  
- De 3º a 5º de Primaria.
  - ⇒ Predecir y describir los resultados de reflejar, trasladar y girar figuras de dos dimensiones;
  - ⇒ Describir un movimiento o una serie de movimientos que muestre que dos figuras son congruentes;
  - ⇒ Identificar y describir la simetría axial y la simetría central en figuras de dos y tres dimensiones y en diseños.
  
- De 6º de Primaria a 2º ESO.
  - ⇒ Describir los tamaños, las posiciones y las orientaciones de figuras geométricas sometidas a transformaciones informales como reflexiones, rotaciones, traslaciones y escalas;
  - ⇒ Examinar la congruencia, la semejanza, y la simetría respecto a una recta o un centro usando transformaciones;
  
- De 3º ESO a 2º Bachillerato.
  - ⇒ Comprender y representar traslaciones, reflexiones, rotaciones y dilataciones de objetos en el plano, utilizando croquis, coordenadas, vectores, notación funcional y matrices;

- ⇒ Usar varias representaciones para ayudar a entender los efectos de las transformaciones y de sus composiciones.

El MEC para la educación Primaria establece ocho objetivos para el área de matemáticas, siendo el número 7 el que hace referencia directa a la geometría (*ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria.*):

*7.- Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción.*

El desarrollo de los ocho objetivos se organiza en doce bloques de contenidos, cuatro para cada uno de los tres ciclos que componen la educación primaria, tres de estos dos bloques se refieren a contenidos de geometría. A continuación se recogen los contenidos de esos bloques con referencia directa a las isometrías.

- Bloque III. Geometría. Primer Ciclo.
  - ⇒ Regularidades y simetrías
  
- Bloque III. Geometría. Segundo Ciclo
  - ⇒ Regularidades y simetrías.
  - ⇒ Transformaciones métricas: giros, traslaciones y simetrías.
  - ⇒ Búsqueda de elementos de regularidad en figuras planas y cuerpos geométricos del entorno próximo.
  
- Bloque III. Geometría. Tercer Ciclo
  - ⇒ Regularidades y simetrías.
  - ⇒ Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos. Elementos de regularidad de figuras planas y cuerpos geométricos.
  - ⇒ Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado.

Para la etapa de la educación secundaria Obligatoria, el *REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*, establece once objetivos

para el área de matemáticas, siendo el número 5 el que hace referencia directa a la geometría.

*5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.*

De los dos ciclos, de dos cursos cada uno, de los que se compone la educación secundaria obligatoria, los contenidos de geometría relativos al núcleo de contenido de esta unidad didáctica, las isometrías, se presentan en el primer y en el tercer curso.

- Bloque 4. Geometría. Primer Curso.
  - ⇒ Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.
  
- Bloque 4. Geometría. Tercer Curso.
  - ⇒ Traslaciones, simetrías y giros en el plano. Elementos invariantes de cada movimiento.
  - ⇒ Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas.
  - ⇒ Planos de simetría en los poliedros.
  - ⇒ Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas.

El interés de esta unidad didáctica reside en la contribución de la misma a la adquisición de las capacidades futuras que los alumnos deben desarrollar. Un buen reflejo de estas capacidades se recoge en *ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato*. Estas capacidades se reflejan en los siguientes objetivos:

1. Comprender y aplicar los conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de otras ciencias, así como en la resolución razonada de problemas procedentes de actividades cotidianas y diferentes ámbitos del saber.

2. Considerar las argumentaciones razonadas y la existencia de demostraciones rigurosas sobre las que se basa el avance de la ciencia y la

tecnología, mostrando una actitud flexible, abierta y crítica ante otros juicios y razonamientos.

3. Utilizar las estrategias características de la investigación científica y las destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación y ensayo, experimentación, aplicación de la inducción y deducción, formulación y aceptación o rechazo de las conjeturas, comprobación de los resultados obtenidos) para realizar investigaciones y en general explorar situaciones y fenómenos nuevos.

4. Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, con abundantes conexiones internas e íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber.

5. Emplear los recursos aportados por las tecnologías actuales para obtener y procesar información, facilitar la comprensión de fenómenos dinámicos, ahorrar tiempo en los cálculos y servir como herramienta en la resolución de problemas.

6. Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, encadenar coherentemente los argumentos, comunicarse con eficacia y precisión, detectar incorrecciones lógicas y cuestionar aseveraciones carentes de rigor científico.

7. Mostrar actitudes asociadas al trabajo científico y a la investigación matemática, tales como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el interés por el trabajo cooperativo y los distintos tipos de razonamiento, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la apertura a nuevas ideas.

8. Expresarse verbalmente y por escrito en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, comprendiendo y manejando términos, notaciones y representaciones matemáticas.

### 3.- UNIDAD DIDÁCTICA Y CURRÍCULO.

#### 3.1.- Relación de la Unidad Didáctica con el Currículo.

Como ya se ha indicado en apartados anteriores la presente unidad didáctica ha sido concebida para el primer curso del segundo ciclo de educación secundaria obligatoria (3º ESO) y es en la legislación referida a dicho nivel y ciclo dónde se debe hallar el contexto en el que relacionar esta unidad con el currículo.

Según la página web del MEC la Educación Secundaria Obligatoria o ESO es una etapa educativa obligatoria y gratuita que completa la educación básica. Consta de cuatro cursos académicos que se realizarán ordinariamente entre los 12 y los 16 años de edad.

La finalidad de esta etapa educativa pasar por pretender que todos los ciudadanos adquieran los elementos básicos de la cultura: humanísticos, artísticos, científicos y tecnológicos.

- Desarrollar y consolidar hábitos de estudio y de trabajo.
- Preparar para la incorporación a estudios posteriores y para su inserción laboral.
- Formar a todos para el ejercicio de sus derechos y obligaciones en la vida como ciudadanos.

Las Comunidades Autónomas, a través de las correspondientes administraciones educativas establecen el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Este currículo debe incluir las enseñanzas mínimas establecidas por el Gobierno central a fin de garantizar una formación común a todo el alumnado dentro del sistema educativo español.

La legislación referente a esta etapa educativa se recoge a continuación:

- La Educación Secundaria Obligatoria en la LOE (Ley Orgánica 3 Mayo de 2006, de Ordenación de la Educación)

- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

Este Real Decreto ya se ha presentado anteriormente, en el apartado 2.2. Las enseñanzas mínimas son los aspectos básicos del currículo referidos a los objetivos, las competencias básicas, los contenidos y los criterios de evaluación.

- Real Decreto 242/2009, de 27 de febrero por el que se establecen convalidaciones entre las enseñanzas profesionales de Música y de Danza y la Educación secundaria obligatoria y el Bachillerato, así como los efectos que sobre la materia de Educación física deben tener la condición de deportista de alto nivel o alto rendimiento y las enseñanzas profesionales de Danza.

- Orden ECI/1845/2007, de 19 de junio por la que se establecen los elementos de los documentos básicos de evaluación de la educación básica regulada por la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, así como los requisitos formales derivados del proceso de evaluación que son precisos para garantizar la movilidad del alumnado.

- Orden EDU/2395/2009, de 9 de septiembre por la que se regula la promoción de un curso incompleto del sistema educativo definido por la Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de ordenación general del sistema educativo, a otro de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Puesto que esta unidad didáctica pretende ser de aplicación en centros y localidades de la Comunidad Autónoma de Andalucía es ineludible hacer referencia a la normativa que la Conserjería de Educación de la Junta de Andalucía ha establecido en relación a la ordenación y enseñanzas de la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. Esta normativa, en concreto para la educación secundaria obligatoria, queda recogida principalmente en un Decreto por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía y en una Orden por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.

- *Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.*

En el mismo, se hace referencia al currículo de la educación secundaria obligatoria en Andalucía como la expresión objetivada de las finalidades y de los contenidos de la educación que el alumnado de esta etapa debe y tiene derecho a adquirir y que se plasmará en aprendizajes relevantes, significativos y motivadores.

Los objetivos que el Decreto 231/2007 pretende alcanzar para esta etapa educativa, que se deben añadir a los fijados en Ley Orgánica 3 Mayo de 2006, de Ordenación de la Educación:

- Adquirir habilidades que les permitan desenvolverse con autonomía en el ámbito familiar y doméstico, así como en los grupos sociales con los que se relacionan, participando con actitudes solidarias, tolerantes y libres de prejuicios.
  - Interpretar y producir con propiedad, autonomía y creatividad mensajes que utilicen códigos artísticos, científicos y técnicos.
  - Comprender los principios y valores que rigen el funcionamiento de las sociedades democráticas contemporáneas, especialmente los relativos a los derechos y deberes de la ciudadanía.
  - Comprender los principios básicos que rigen el funcionamiento del medio físico y natural, valorar las repercusiones que sobre él tienen las actividades humanas y contribuir activamente a la defensa, conservación y mejora del mismo como elemento determinante de la calidad de vida.
  - Conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.
  - Conocer y respetar la realidad cultural de Andalucía, partiendo del conocimiento y de la comprensión de Andalucía como comunidad de encuentro de culturas.

- *Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.*

Esta orden tiene por objeto desarrollar los objetivos, competencias básicas, contenidos y criterios de evaluación del currículo de la educación secundaria

obligatoria, fijar el horario lectivo semanal de la etapa y establecer orientaciones para el desarrollo de la autonomía pedagógica de los centros docentes, de conformidad con el anterior decreto (Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía).

En relación a las matemáticas, como enseñanza propia de la comunidad autónoma de Andalucía para la educación secundaria obligatoria, se pretende que el alumnado de ésta sea consciente de la perspectiva histórica de las matemáticas, su dimensión social y cultural y su presencia e importancia en las actividades de la vida cotidiana y en nuestro entorno. Igualmente se facilitará al alumno pasar de las experiencias matemáticas más intuitivas a las más estructuradas contextualizando todo en la realidad en la que éste se desenvuelve.

La propuesta de contenido que se presenta en dicha orden se compone de seis núcleos temáticos, siendo el núcleo número 5 el que presenta una relación más directa con la unidad didáctica a desarrollar: Las formas y figuras y sus propiedades.

Estos núcleos no se presentan de manera aislada puesto que se señalan interacciones entre ellos como son las del núcleo que nos ocupa con los siguientes contenidos de Matemáticas del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre: *Contenidos comunes, Números, Álgebra, Funciones y gráficas, Estadística y probabilidad*. Además se relaciona con el resto de enseñanzas propias de la Comunidad Autónoma de Andalucía y sus núcleos temáticos.

La enseñanza de la geometría se considera como la oportunidad de conectar al alumno con su entorno., de mejorar la visión espacial del alumnado y de desarrollar capacidades que faciliten una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Los contenidos se mantienen respecto a los presentados en el apartado 2.2 recogidos en el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

Se aconseja el estudio de la geometría a través de la manipulación, el uso de la tecnología y la observación del entorno. Los conocimientos geométricos deben asociarse a la resolución de problemas y considerarse como conectores de las matemáticas con otros ámbitos como la naturaleza, el arte, la arquitectura o el diseño, de manera que el alumnado sea capaz de reconocer su presencia y de valorar su importancia en nuestra historia y en nuestra cultura.

### 3.2.- Relación de la Unidad Didáctica con el Proyecto Educativo de Centro.

Este apartado se expone de manera más exhaustiva en el **Anexo III** (*Extensión del Apartado 3. Unidad Didáctica y Currículo*)

### 3.3.- Organización, Secuenciación y estructura de los contenidos.

En este apartado se pretende hacer una selección, análisis y organización de los contenidos de la unidad didáctica, de carácter conceptual, procedimental y actitudinal. En el análisis de contenidos que se presenta en el **Anexo II** se profundiza más en esta cuestión.

#### Conceptos:

- Transformaciones Geométricas: propiedades; punto doble o invariante.
- Movimientos en el plano: Movimientos simples; movimientos compuestos; Movimientos simples directos; movimiento simples inversos.
- Traslación: Propiedades, Vectores (elementos, componentes o coordenadas, equipolentes, vector libre); Vector guía o vector traslación; Elementos dobles o invariantes; Traslaciones sucesivas o Composición de traslaciones.
- Giros: Elementos; elementos dobles en un giro; figuras con centro de giro; Simetría central; Composición de giros o Productos de giros con el mismo centro y con el distinto centro.
- Simetría axial: Propiedades; eje de simetría; figura simétricas.; Simetrías y coordenadas; composición de simetrías con ejes paralelos y ejes que se cortan.
- Mosaicos, frisos y rosetones.

#### Procedimientos:

- Identificación de vectores equipolentes.
- Localización del «ángulo mínimo» en figuras con centro de giro

- Localización del eje y centro de simetría en figuras planas.
- Utilización de la terminología relativa a las transformaciones geométricas para elaborar y transmitir información sobre el medio.
- Transformación de una figura en otra mediante la aplicación de una sola isometría.
- Producto de transformaciones.
- Reconocimiento del proceso que transforma una figura en otra.
- Identificación de isometrías en algunos mosaicos y cenefas sencillos extraídos del mundo real.
- Cálculo de coordenadas de puntos transformados.

Actitudes:

- Interés por movimientos artísticos de muchas culturas (árabe, cristiana medieval, siglo XX.)
- Concienciación de la preservación de elementos y objetos artísticos, arquitectónicos, de decoración, de ingeniería...por el interés en el estudio de transformaciones por la cantidad de las mismas que encierran.
- Valoración del uso de mosaicos y otras figuras geométricas en el arte y arquitectura.
- Interés por la investigación sobre formas y relaciones geométricas del entorno cotidiano.
- Valoración del conocimiento y buen uso de los instrumentos de dibujo

### 3.4.- Objetivos a Conseguir con la Unidad Didáctica.

Acto seguido se expone una lista de objetivos cuya consecución es la finalidad de esta unidad didáctica focalizada en los distintos tipos de Isometrías. Éstos son los responsables del desarrollo de los contenidos presentados en el apartado anterior y que han sido seleccionados a fin de perseguir dichos objetivos.

Un análisis de los objetivos de esta unidad didáctica, en relación a su conexión específica con las competencias PISA y con los errores y dificultades que se prevén que los estudiantes pueden cometer y afrontar, se refleja en el desarrollo del Análisis Cognitivo relativo a los organizadores de la unidad didáctica recogidos en el **Anexo II:**

✚ O1.- Conocer los elementos necesarios para hacer un giro, una reflexión y una traslación.

✚ O2.- Determinar qué elementos y propiedades permanecen invariables al aplicar una isometría a una figura.

✚ O3.- Transformar mediante isometrías (giro, simetrías y traslaciones) cualquier figura geométrica.

✚ O4.- Entender los efectos de las isometrías a través de diferentes representaciones visuales y de coordenadas.

✚ O5.- Componer sucesivas isometrías (giros, reflexiones, traslaciones) y deducir, en cada caso, su resultado.

✚ O6.- Identificar figuras geométricas homólogas y definir el movimiento o isometrías que las relaciona.

✚ O7.- Construir figuras planas con recursos informáticos, analizar sus propiedades sus propiedades y visualizar sus elementos invariantes al aplicarles alguna isometría.

✚ O8.- Crear teselados usando transformaciones isométricas a partir de una figura inicial.

✚ O9.- Reconocer los tres tipos de isometrías; giros, simetrías y traslaciones, en casos geométricos, en la naturaleza y en el uso de las mismas por parte del hombre en desarrollos artísticos y científicos.

✚ O10.- Expresar y representar aspectos espaciales de la realidad relativos a formas, tamaños, posición, movimiento, distancias, etc., mediante el lenguaje geométrico, eligiendo y utilizando los modelos adecuados.

La elección de estos objetivos se basa y se complementa con los objetivos que corresponden a la etapa, al área y al nivel en el que se enmarca esta unidad didáctica. Estos objetivos quedan recogidos en el **Anexo III** (*Extensión del Apartado 3. Unidad Didáctica y Currículo*)

### 3.5.-Criterios de evaluación.

En este apartado se seguirá el *modus operandi* que en el apartado anterior. Los criterios de evaluación específico para la unidad didáctica de las isometrías se exponen a continuación y se analiza su relación con las competencias Básicas en el **Anejo I**.

✚ CE.1. Entiende la idea de transformación geométrica y, como caso particular, la idea de movimiento.

✚ CE.2. Comprende los conceptos de traslación, giro y simetría axial.

✚ CE.3. Identifica los elementos que definen las traslaciones, los giros y las simetrías axiales.

✚ CE.4. Construye la transformada de una figura mediante una determinada isometría o movimiento.

✚ CE.5. Identifica el movimiento o isometría que lleva de una figura a otra.

✚ CE.6. Calcular las coordenadas y el módulo de un vector, dadas las coordenadas de sus extremos.

✚ CE.7. Reconoce figuras dobles en una cierta transformación o identifica el tipo de transformación que da lugar a una cierta figura doble. Describe verbal y gráficamente las propiedades de las distintas isometrías.

✚ CE.8. Construye la transformada de una figura mediante la composición de dos movimientos.

✚ CE.9. Deduce los resultados de una composición de movimientos a través de la relación de los mismos

✚ CE.10. Utiliza la terminología relativa a las transformaciones geométricas y en concreto de las isometrías para elaborar y transmitir información sobre el medio.

✚ CE.11. Identifica traslaciones, giros y simetrías en algunos mosaicos y cenefas sencillos extraídos del mundo real.

✚ CE.12. Modeliza situaciones reales expresando las mismas en términos matemáticos relativos a las isometrías para dar solución a problemas de la vida cotidiana.

De igual forma que en el apartado anterior, los criterios de evaluación correspondiente al área y a la etapa de interés de la unidad didáctica se presentan en el **Anexo III** (*Extensión del Apartado 3. Unidad Didáctica y Currículo*).

## 4.- METODOLOGÍA.

### 4.1.- Características relevantes.

La intención principal del proceso de enseñanza-aprendizaje que se pretende desarrollar a través de esta unidad didáctica es que por encima de todo prevalezca la funcionalidad de las transformaciones geométricas, en concreto de las isometrías en el plano con vistas a resolver problemas, estudiar regularidades...esto supone una innovación en cuanto a la tradicional intención con la que se aborda este tema que suele ser el aprendizaje de los elementos de cada uno de los movimientos. La declaración de esta intención sirve para enfocar los objetivos de esta unidad didáctica hacia la utilización funcional de la misma.

Esta unidad tiene un sentido unificador de dos elementos: creación de visión espacial e interpretación de los objetos geométricos a fin de usarlos. Este carácter unificador determina los posibles tipos de actividades que tienen lugar en esta unidad didáctica. De acuerdo a las pretensiones que hemos mencionado de la unidad didáctica es del todo coherente proponer tareas de carácter experimental, de investigación...etc.

### 4.2.- Medios y materiales.

La información referente a este apartado viene recogida en la selección de tareas del análisis de instrucción recogido en el **Anexo II**.

Es importante mencionar, que si bien es cierto, que en esta unidad didáctica se propone una metodología que huye de la tradicional forma de abordar este tema, esto no es incompatible con el uso de ciertos libros de texto que hay disponible para esta etapa y curso en concreto. En función del enfoque que en esta unidad didáctica se le otorga a las isometrías, desde aquí se recomienda, apoyar o guiar el aprendizaje en un libros de texto que siguen la línea editorial de Anaya (Colera et al, 2011).

#### 4.3.- Organización del aprendizaje.

En este apartado se expone cómo trabajarán los alumnos en clase. Al igual que en el apartado anterior esta información viene recogida en la selección de tareas del análisis de instrucción recogido en el **Anexo II**

#### 4.4.- Tipos de actividades propuestas

El tipo de tarea de las actividades propuesta en esta unidad queda recogido como sucede en los dos apartados anteriores en la selección de tareas del análisis de instrucción recogido en el **Anexo II**

Se considera tarea matemática toda demanda estructurada de actividad planificada por el profesor que se plantea al estudiante exigiendo de éste reflexión y uso de las matemáticas. Son la parte central de toda unidad didáctica al constituirse como medio para el aprendizaje y su evaluación (Rico, 2012).

La elaboración y selección de las tareas no es un procedimiento aleatorio sino que debe atender a una serie de criterios. La gestión de tareas es fruto del análisis de contenidos, de las necesidades cognitivas, de las expectativas, de las limitaciones y de la secuencia del aprendizaje...entre otros criterios.

Cuando en el título de este apartado se habla de tipo de actividades se pretende hablar, por una parte, del papel o función que la tarea desempeña en el proceso de enseñanza y aprendizaje y, por otro, de la adecuación de las mismas a los niveles cognitivos de los alumnos, en concreto, según su grado de dificultad (Lupiáñez, 2010).

Independientemente del tipo de tarea es posible caracterizar las mismas haciendo referencia al modelo matemático de PISA. Según el principio de matematización que rige la evaluación de las pruebas PISA, la resolución exitosa de cualquier tarea requiere que el estudiante posea un dominio de un contenido matemático relevante, movilizar determinadas competencias acordes con la exigencia cognitiva de la misma y que pueda ubicar ésta, con mayor o menor cercanía, respecto su situación particular (Caraballo *et al.* 2011).

## 5.- TEMPORALIZACIÓN.

En una unidad didáctica es necesario prever el tiempo para desarrollar las diferentes partes, actividades y evaluación, de la unidad didáctica.

Tras consultar de diferentes editoriales como son Anaya, SM,...se observa que el bloque de geometría junto al del estadística se suele relegar a la parte final del curso, por lo que sería aceptable situar ésta unidad didáctica en el mes de Mayo, penúltimo mes del curso escolar.

La unidad didáctica es viable desarrollarla en su totalidad a lo largo de 9 sesiones, de 50 minutos aproximados de duración, lo que traducido al calendario escolar serían dos semanas completas (cuatro sesiones por semana), más una última sesión correspondiente ya a una tercera semana.

A modo de resumen es posible ubicar la unidad didáctica en las dos primeras semanas del mes de mayo, es decir, primera quincena de mayo.

Sesiones:

Sesión 1. Introducción.

Sesión 2.- Evaluación Inicial.

Sesión 3.- Traslación.

Sesión 4.- Giros I.

Sesión 5.- Giros II.

Sesión 6.- Simetría I

Sesión 7. Simetría II.

Sesión 8.- Isometrías en Conjunto

Sesión 9.- Evaluación.

## 6.- EVALUACIÓN.

La evaluación se llevará a cabo en base a los criterios de evaluación del área, de la etapa y del curso que se detallan en el currículo, que se han presentado en el **Anexo III** (*Extensión del apartado 3*), y que se materializan en los criterios de evaluación mostrados en el apartado 3.5 y que se analizan en el **Anexo II**, análisis cognitivo.

### 6.1.- Introducción.

Se evaluará por competencias y no por contenidos, convirtiéndose así los contenidos en meros elementos de las competencias. Esto no implica que tanto estos, los contenidos, como el resto de elementos del currículo no se tengan en consideración, pero... ¿qué son las competencias?

Las competencias básicas son las capacidades que cualquier individuo de manera imprescindible requiere para un adecuado desempeño de su vida personal y laboral.

En el **Anexo II** del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, se fijan las competencias básicas que el alumnado debe adquirir al final de la Educación Secundaria Obligatoria, caracterizando a las mismas las capacidades que cualquier individuo de manera imprescindible requiere para un adecuado desempeño de su vida personal y laboral.

- Competencia en comunicación lingüística.
- Competencia matemática.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Competencia social y ciudadana.
- Competencia cultural y artística.
- Competencia para aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

Así, de igual manera que se hace con el resto, la competencia matemática se define como la habilidad para utilizar números y operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión del razonamiento matemático (hasta aquí se responde al ¿qué?) para producir e interpretar informaciones (respuesta del ¿Cómo?) y para resolver problemas relacionados con la vida diaria y el mundo laboral (¿Para qué?) .

Se puede decir por tanto, y estará muy relacionado con la evaluación, que alguien es competente si en un “contexto cotidiano”, formal o informal, es capaz de activar “lo que sabe” para resolver una “tarea matemática” (Fernández, 2008).

En el proyecto PISA 2003 se hace referencia a las capacidades que los estudiantes deben desarrollar para considerar que dominan la competencia matemática (OCDE, 2005b). El proyecto PISA 2003 destaca la importancia de centrar los procesos de enseñanza-aprendizaje, hasta la finalización de la educación obligatoria, en conseguir que los estudiantes sean ciudadanos informados, reflexivos y consumidores inteligentes, capaces de leer formularios, pagar facturas, no ser engañados en tratos...etc, es decir, en formar personas matemáticamente alfabetizados (Rico, 2006).

Las competencias, que según PISA (OCDE, 2004b, p. 40), tiene por finalidad dicha alfabetización y que, a su vez, determinarán la calidad y eficacia de un programa de formación son:

- Pensar y razonar.
- Argumentar.
- Comunicar.
- Modelizar.
- Plantear y resolver problemas.
- Representar.
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.
- Uso De Herramientas tecnológicas.

La reconocida dificultad de evaluar el manejo de las matemáticas de los estudiantes al finalizar secundaria se consigue teniendo en cuenta las tres variables de tarea a las que se ha hecho referencia implícitamente en el apartado 4.4. (Contenido, Contexto y Complejidad)

## 6.2.- Evaluación de los alumnos.

La evaluación a los alumnos en el desarrollo de la unidad didáctica se a llevar a cabo en tres momentos que se agrupan bajo la siguiente nomenclatura: evaluación diagnóstica o inicial, continuo-formativa y final-sumativa.

Estos tres momentos a la vez se dividen en tres etapas: recogida de información, valoración de la información y toma de decisiones.

### *Evaluación inicial o diagnóstica.*

Responde a la necesidad de comprobar la preparación que los alumnos tienen para enfrentarse a los objetivos que se esperan lograr con la unidad didáctica. Es una evaluación básica para la realización de pronósticos y se está fuertemente caracterizada por la individualidad del alumno (Santillana, 2009).

La finalidad de la misma será determinar el nivel del alumno, el punto de partida para construir el nuevo aprendizaje y detectar carencias para así poder establecer metas razonables y diseñar actividades adecuadas.

Para esta unidad didáctica la evaluación se llevará a cabo a través de un cuestionario que cada alumno cumplimentará de manera individual. La elaboración de este cuestionario se ha hecho una vez que se establecido de manera clara y segura las metas al alcanzar al final de la unidad. Este cuestionario se llevará a cabo en la segunda sesión prevista para el desarrollo de la unidad didáctica (Apartado 7: Actividades; Sesión 2).

### *Evaluación continuo- formativa.*

De acuerdo con lo expuesto por García Sánchez, (2010), esta evaluación se realiza durante el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje con la finalidad de identificar errores, problemas, obstáculos y deficiencias para su corrección.

Existen discrepancias entre autores a la hora de decidir si esta tipo de evaluación debe influir en la nota final del curso. En este diseño se considera apropiada su repercusión en la nota final del curso pero teniendo presente que se busca que el alumno comente errores y los corrija, sin prejuicio de su nota final.

Este tipo de evaluación se materializará, en la presente unidad, a través de los siguientes instrumentos: Observación en clase, Cuaderno del alumno, Trabajos en

grupo y el diario de profesor. Este último instrumento es muy importante puesto que servirá, al profesor, a modo de recetario para diseñar actuaciones encaminadas a corregir errores, repasar o reforzar puntos débiles, asignar actividades extras y programar la atención diferenciada de los estudiantes.

#### *Evaluación final – Sumativa.*

Esta evaluación se realizará, en este caso, al término de la unidad didáctica, aunque se podría hablar de etapa o ciclo, y proporcionará información sobre el grado de consecución de las metas (objetivos, competencias y criterios) previstas en la unidad didáctica

De acuerdo con Saucedo López (2008), para que de este modo verdaderamente se evalúe la unidad en cuestión debe de dirigir la misma hacia los objetivos finales de ésta. Normalmente la oferta, de este tipo de evaluación, se decanta hacia un examen escrito, al considerarse que refleja el trabajo de preparación del mismo por parte del estudiante.

La prueba final para esta unidad didáctica se recoge en la última sesión de las propuestas para el desarrollo de la unidad didáctica, Sesión 9; Apartado 7: Actividades.

Calificación final del alumno en cada trimestre se obtendrá de la siguiente manera:

#### *Evaluación Continuo-formativa. (40 %)*

- Actitud (10%).
  - Puntualidad (2,5 %).
  - Respeto y cumplimiento de las normas (2,5 %).
  - Participación oral (2,5 %).
  - Voluntariedad en la participación en el aula (2,5 %).
  
- Tareas y trabajo en clase (30 %).
  - Tareas de casa (10 %).
  - Trabajo en clase (10 %).
  - Cuaderno: limpieza, claridad, orden (5 %).
  - Presentación de los exámenes, cuaderno, tareas... (5 %).

*Evaluación final – Sumativa (60%).*

- Prueba escrita de cada unidad: (30%). La nota será la media de las pruebas de todas las unidades.
- Prueba de Evaluación. (60 %):

### 6.3.- Evaluación de la propia Unidad Didáctica.

Se basa fundamentalmente en hacer un balance entre “lo planificado” en la unidad didáctica y “lo desarrollado” en el aula para esta unidad didáctica.

Para comprobar en qué grado se ha logrado el ajuste Planificación-Desarrollo puede ser interesante hacer un pronóstico sobre el éxito en la evaluación de los alumnos. Pese a ser un medidor realmente interesante no se debe considerar el mismo como determinante o infalible, incluso se puede decir que el único empleo del mismo puede ser poco significativo. Por ello, se propone acompañar a este pronóstico de otras herramientas tales como: encuestas a los alumnos, entrevistas individuales o discusiones en conjunto y una vez más el ya mencionado diario del profesor.

Esta unidad didáctica, por lo tanto, se define como un documento abierto a la espera de ser mejorado mediante su puesta en práctica, y su consecuente identificación de problemas y dificultades así como las estrategias llevadas a cabo para salvarlas

## 7. ACTIVIDADES.

Como ya se ha comentado en anteriores apartados, las actividades se han diseñado con el fin de organizar el propio aprendizaje de los alumnos. Sin embargo, esto no quiere decir que se eviten los libros de textos, por ejemplo, la editorial Anaya (Colera *et al.*, 2011) ofrece una adecuada referencia a la que acudir para complementar los contenidos tratados en clase a lo largo de cada una de las actividades.

A continuación se enuncian las diferentes actividades que serán el soporte de la construcción de conocimiento a lo largo de las diferentes sesiones. En el **Anexo I**, (*Desglose de las actividades*), se desarrollan las mismas y se muestra cómo, éstas, dan forma a los diferentes contenidos de la unidad didáctica. En el **Anexo II**, en el análisis de instrucción, se realiza un completo análisis individualizado de las tareas en el cual se resaltan sus particularidades didácticas.

### SESION 1 INTRODUCCION

#### *Alicia en el País de las Transformaciones geométricas.*

La actividad que inicia la secuencia de tareas de la unidad didáctica consiste ser el visionado de un vídeo denominado *ALICIA EN EL PAIS DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS*. Esta actividad pretende ayudar a la motivación y dar significado a los contenidos que se trabajarán a lo largo de la unidad.

Información del vídeo

Productora: Fundacio Serveis de Cultura Popular

Distribuidora: Ancora Audiovisual:

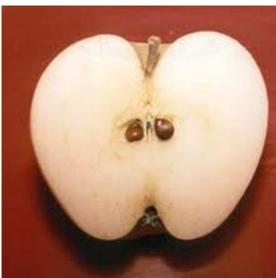
## SESION 2 EVALUACION INICIAL

Es la primera vez que los alumnos se encuentran en Matemáticas con la idea de isometrías, hasta el momento sólo tienen una idea intuitiva de las mismas. Los conocimientos previos están relacionados con la identificación de simetrías de figuras planas, la apreciación de éstas en la naturaleza y en las construcciones y el uso de las herramientas básicas de dibujo técnico: Transportador de ángulos, compás, escuadra, cartabón...etc.

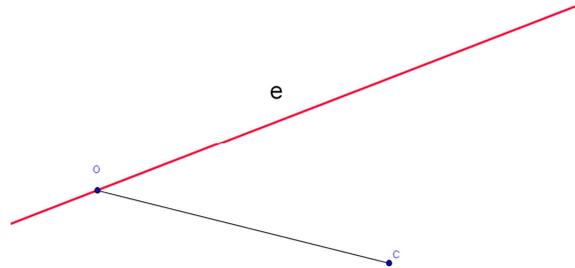
○ 1.- Traza una recta paralela al segmento AB que diste del mismo 2 cm, con el uso de la regla, la escuadra y el cartabón



○ 2.- Traza todos los ejes de simetría que poseen las siguientes figuras:



3.- Obtén el simétrico del segmento  $OC$  respecto de la recta  $e$  mediante el uso del compás. ¿Qué relación tiene la recta  $e$  con el ángulo determinado por los segmentos  $OC$  y su simétrico respecto de  $e$ ?



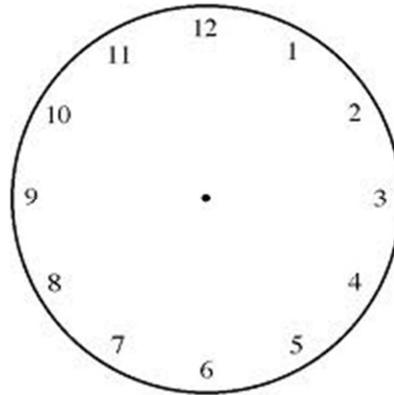
4.- Obtén el simétrico del segmento  $OC$  respecto de la recta  $e$  mediante el uso del compás. ¿Qué relación tiene la recta  $e$  con el segmento formado por los segmentos  $OC$  y su simétrico?



5.- La siguiente figura tiene varios ejes de simetría. Determina el número de ejes de simetría que posee y calcula gráficamente, con el transportador de ángulos, y analíticamente el ángulo formado por dos ejes contiguos.

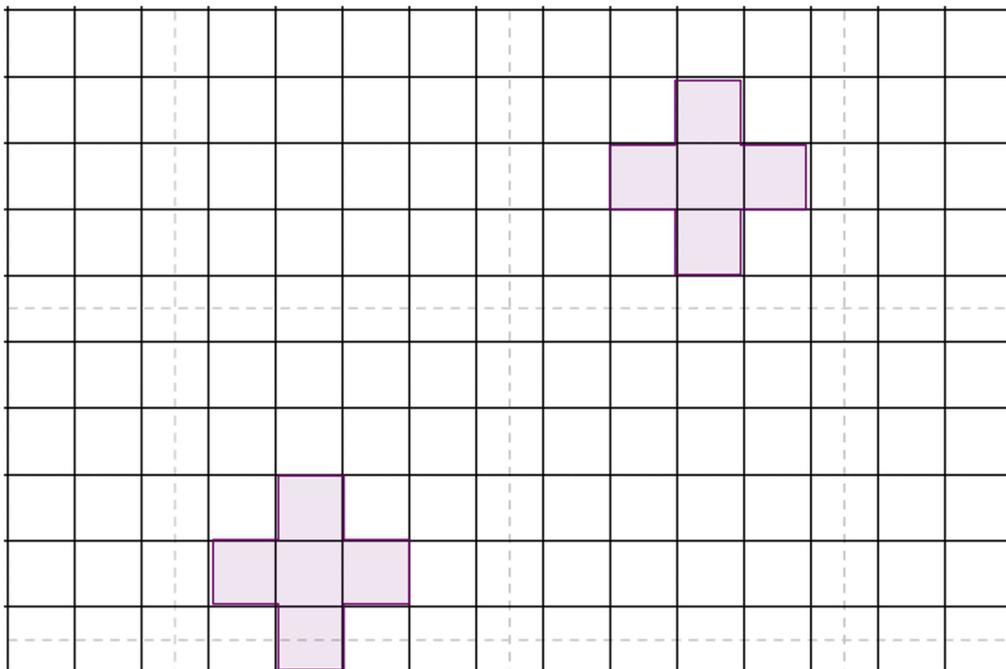


6.- ¿Qué ángulos giran el minutero de un reloj y la aguja horaria de un reloj en el transcurso de tiempo que abarca desde las 2 horas y 5 minutos y las 3 horas y 10 minutos?



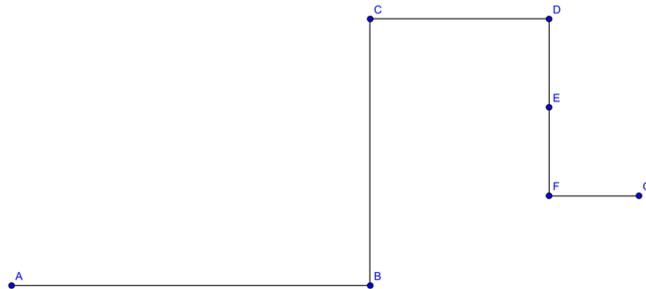
7.- Considerando como unidad de desplazamiento un cuadrado de la cuadrícula. ¿Cuántas unidades de desplazamiento se desplaza la figura en horizontal y en vertical para pasar de la posición 1 a la posición 2?

Colorea la el recorrido directo para pasar de la figura 1 a la figura 2?



8.- ¿Cuáles de los siguientes medios de transporte pueden seguir la siguiente trayectoria pasando por todos los puntos sin recortar la misma?

- Coche
- Autobús
- Avión
- Tren
- Bicicleta
- Helicóptero



9.- Relaciona estas tres columnas y señala de qué isometría, traslación, giro o simetría se trata.

¿Cuánto?	Dirección	Derecha o Izquierda
	Longitud o Distancia	Línea recta
¿Hacia dónde?	Sentido	Mucho o Poco
	<input type="checkbox"/> Giro	
	<input type="checkbox"/> Simetría	
	<input type="checkbox"/> Traslación	

10.- Relaciona estas tres columnas y señala de qué isometría, traslación, giro o simetría se trata

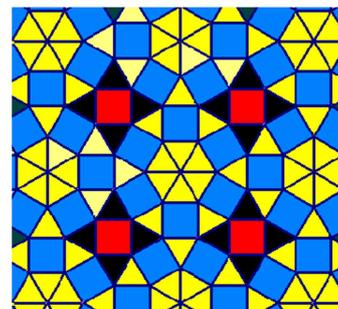
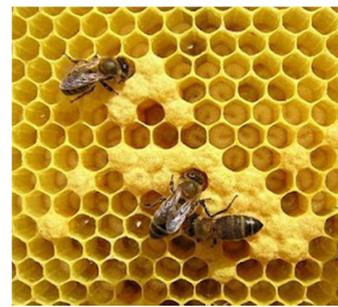
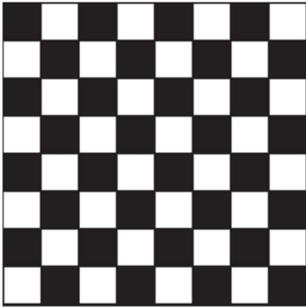
¿Alrededor de?	Ángulo	Derecha o Izquierda
¿Cuánto?	Centro	Punto fijo
¿Hacia dónde?	Sentido	Mucho o Poco
	<input type="checkbox"/> Giro	
	<input type="checkbox"/> Simetría	
	<input type="checkbox"/> Traslación	

## SESION 3 TRASLACION

### T1. La Traslación en Mosaicos.

**Mosaico:** Configuración geométrica a partir de la cual se puede rellenar el plano. Existen mosaicos formados por una sola pieza y otros formados por dos y más piezas.

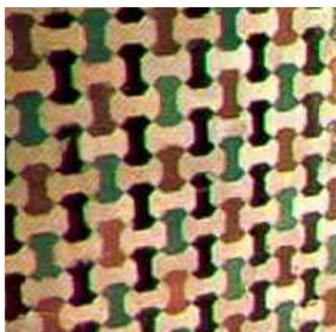
Analiza los siguientes mosaicos.



Fuente: [www.geografiasubjetiva.com](http://www.geografiasubjetiva.com); [www.fondosblackberry.com](http://www.fondosblackberry.com); [www.recuernosdepandora.com](http://www.recuernosdepandora.com); [www.catedu.es/webcatedu/](http://www.catedu.es/webcatedu/); [www.educaciónplástica.es](http://www.educaciónplástica.es); web IES Sierra Minera.

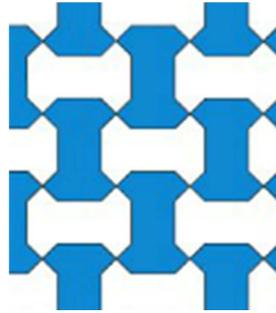
Para rellenar el plano a partir de una o más figuras geométricas se las debe someter a distintas isometrías.

El siguiente mosaico se denomina multihueso y se halla en las proximidades del Salón del Trono de la Alhambra.



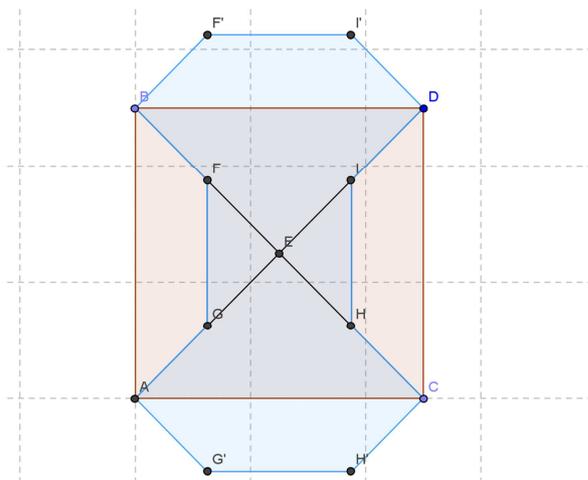
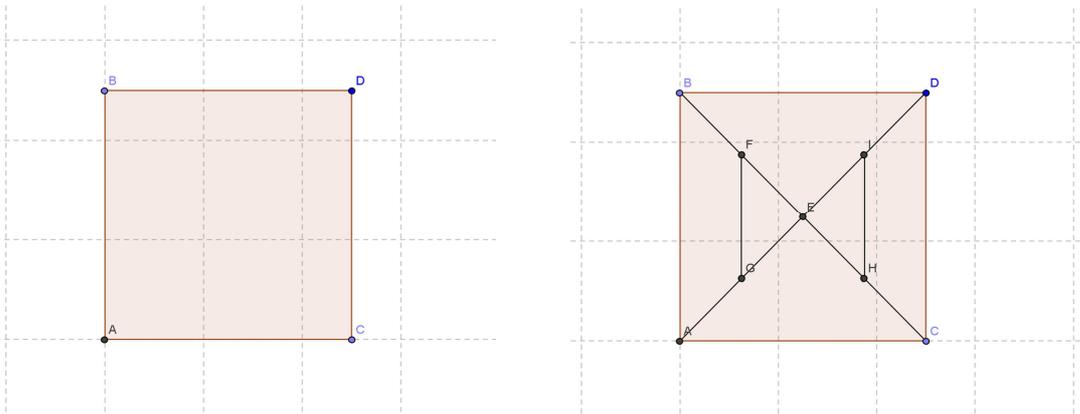
Fuente: [www.catedu.es/webcatedu/](http://www.catedu.es/webcatedu/)

Sometiendo a un “hueso” inicial únicamente a traslaciones... ¿Cómo se podría reproducir este mosaico sobre una cartulina blanca partiendo de cartulinas cuadradas de color azul?



Fuente: Colera et al. (2011)

Para la elaboración del “hueso” a partir de un cuadrado se siguen las siguientes indicaciones.



Fuente: Elaboración propia

**T2. El Comprador Inglés.**

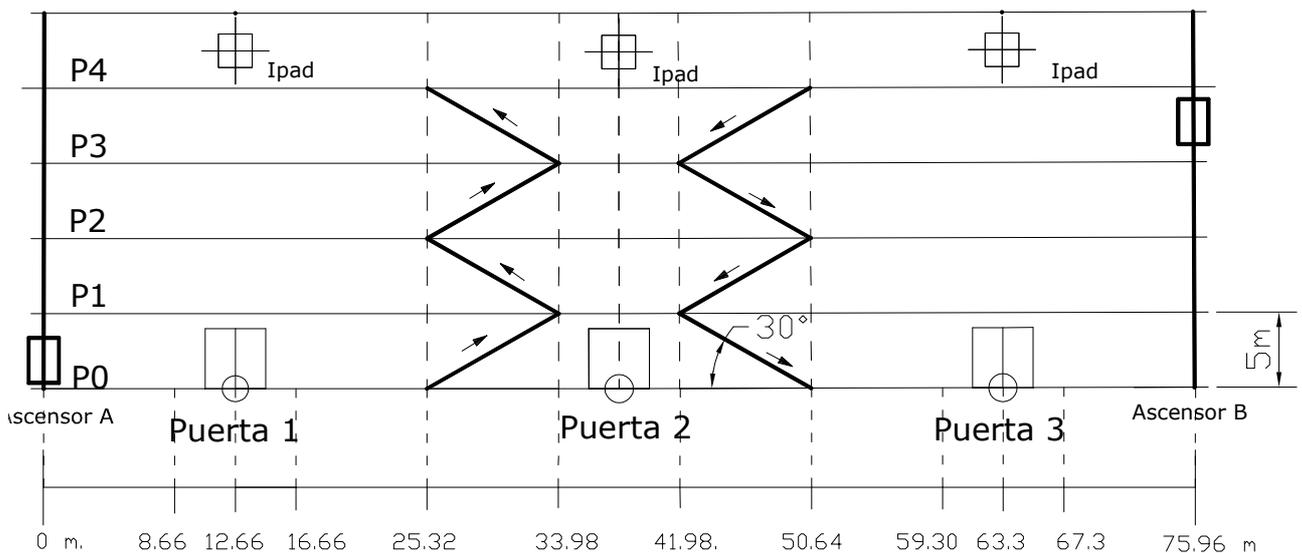
Debido a la apertura de un nuevo centro comercial se lanza la siguiente oferta de lanzamiento.

“Un Ipad3 gratis para las dos primeras personas que consigan uno y pasen por la caja rápida”.

Se sabe que la planta 4 está destinada por completo a la sección de informática y multimedia y que en ella hay tres expositores diferentes donde encontrar los Ipads. El centro comercial posee únicamente dos “cajas rápidas”, situadas en la planta 0 junto a las puertas 1 y 3, respectivamente.

En el momento justo de la apertura, Almudena se encuentra en la puerta número 3 con la intención de conseguir uno de los ipads gratis usando, para ello, el ascensor. Javier, con el mismo fin, se encuentra en la puerta número 2 para dirigirse a las escaleras mecánicas. En la puerta número 1 se encuentra un señor inglés que no está dispuesto a quedarse sin un Ipad gratis.

¿Cuál debería ser su elección, escalera mecánica y salir por la puerta 2 o ascensor y salir por la puerta 1, para ser uno de los dos agraciados con un Ipad gratis?



Fuente: Elaboración Propia

Consideraciones a tener en cuenta:

Croquis: distancias, ángulos y localizaciones.

El ascensor y las escaleras mecánicas se desplazan a la misma velocidad constante.

Los tres candidatos andan a la misma velocidad constante.

Los usuarios de la escalera mecánica se mueven a la velocidad de la misma.

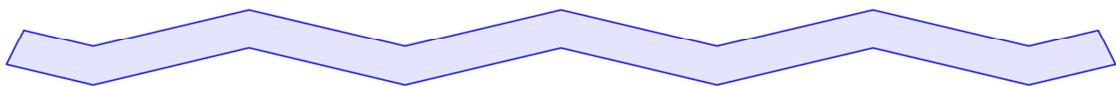
No se consideran pérdidas de tiempo en los cambios de escaleras entre plantas, ni de esperas en los ascensores.

Usa dos colores diferentes para señalar todo el recorrido a realizar por Almudena y por Javier y marca con flechas hacia donde se desplazan en cada tramo del mismo.

**SESION 4 GIROS I****G.1.- Geogebra I. Un friso mediante Giros.**

**Frisos:** Adornos longitudinales en los que hay un motivo que se repite mediante traslaciones (Anaya, 2012)

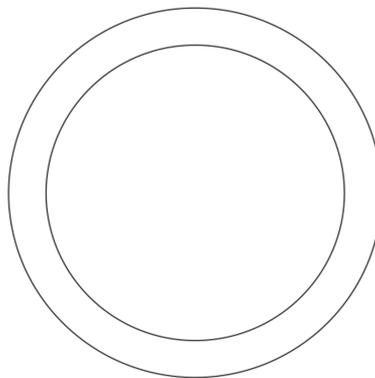
Identifica en el siguiente friso el motivo que se repite mediante traslaciones. A continuación, con Geogebra, reproduce el mismo friso pero a partir de un motivo mínimo que se repita mediante el mismo giro.



*Fuente: Elaboración Propia*

El motivo mínimo, a girar para la obtención del friso, se obtiene a partir de una sección de corona circular de  $R=10$  y  $r=8$  cuyo ángulo es  $53,13^\circ$ .

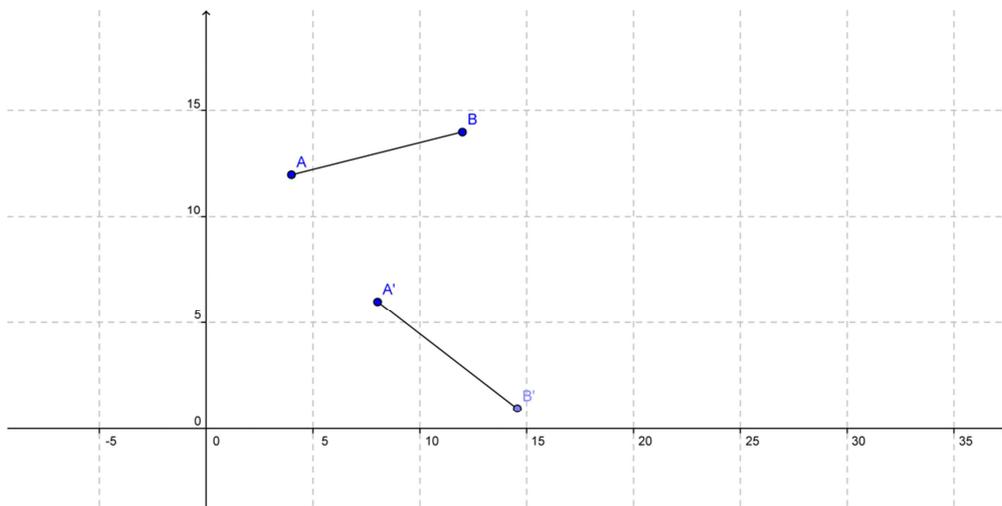
**Corona Circular:** Figura geométrica plana delimitada por dos circunferencias concéntricas.



*Fuente: Elaboración Propia*

**G.2.- Geogebra II. Obtención del centro de Giro de dos segmentos.**

Dado un segmento AB y su transformado A'B' mediante un único giro. Obtén mediante el uso de *Geogebra* el centro y el ángulo de giro.



*Fuente: Elaboración Propia*

**G.3.- Geogebra III. Puentes equidistantes**

Sobre tres ríos de cauces paralelos se pretende construir tres puentes, uno sobre cada río. Los puentes se construyen de tal forma que la distancia en línea recta entre los puentes de los ríos extremos es igual a la distancia de cada uno de esos puentes al puente sobre el río intermedio.

Modeliza en *Geogebra* la situación, mediante rectas y puntos, para obtener las posibles ubicaciones de cada uno de los puentes, teniendo en cuenta la restricción constructiva...

*“... la distancia en línea recta entre los puentes de los ríos extremos es igual a la distancia de cada uno de esos puentes al puente sobre el río intermedio...”.*

**SESION 5 GIROS II****G4.- La cara oculta de la Luna.**

La Luna es el objeto celeste que más ha fascinado a la especie humana. La antigua Unión Soviética envió por primera vez una nave automática que se posó en la superficie de la Luna el año 1959. El 20 de Julio de 1969 Neil Armstrong acompañado de Edwin Aldrin fueron los primeros hombres que caminaron sobre la superficie de la Luna en el marco de la misión Apollo 11. La última vista de los astronautas americanos a la Luna fue en el año 1972.

Uno de los grandes misterios de la Luna su cara oculta, puesto que siempre presenta la misma cara al observador terrestre.

Si sabemos que:

El periodo de rotación de la Tierra sobre sí misma es de 24 horas.

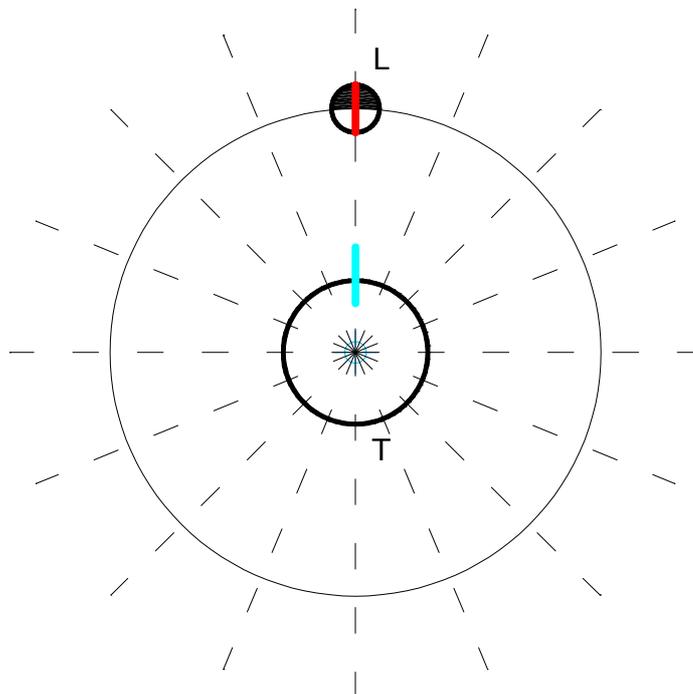
La salida de la Luna cada día se retrasa aproximadamente 50 minutos.

La Luna se traslada alrededor de la Tierra según una trayectoria, aproximadamente, circular y con velocidad constante y menor a la de rotación de la Tierra.

Obtén:

Caracteriza el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, sentido y periodo.

Caracteriza el movimiento de rotación de la Luna sobre sí misma.



*Fuente: Elaboración Propia*

**G 5.- El RompePizza**

Jesús, Laura y Patricia han decidido ir a cenar a una pizzería. Las mesas de la pizzería son para seis comensales y cada uno de ellos se sienta a la misma distancia de los otros dos.

Para cenar eligen la pizza *3flavours* compuesta por tres tipos de porciones diferentes, en la que únicamente dos de ellos comparten un ingrediente. Los ingredientes son: Jamón, atún, aceitunas, bacon, salami, champiñones, cebolla y pollo.

Compón la pizza sabiendo que a...

...Patricia no le gusta la cebolla.

...Laura es vegetariana, no come ningún ingrediente que provenga de un animal.

...Jesús sólo como porciones que lleven atún.

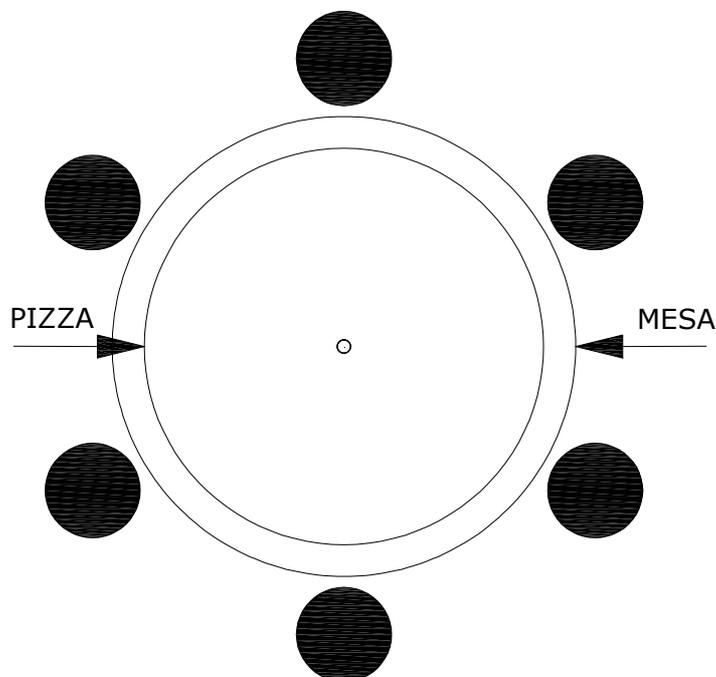
...Laura prefiere sentarse más lejos de la carne que del pescado.

...Jesús es zurdo, por lo que una de las porciones que comerá está a su izquierda.

...Patricia se encuentra entre dos porciones diferentes que no le gustan.

...Jesús come la mitad que Patricia y ésta el doble que Laura.

Según lo anterior, ¿qué lugares de la mesa puede ocupar Patricia? ¿Y Laura? ¿Y Jesús?



*Fuente: elaboración Propia*

**G6.- La noria del Corpus**

La noria que visita Granada en la feria del Corpus tiene capacidad para 200 personas y cada cabina puede contener a 5 personas. Las cabinas pueden ser de tres colores, rojo, azul y verde.

Andrés y Arturo deciden visitar el recinto ferial, antes de encontrarse con el resto de sus amigos. Arturo quiere subir a la noria. En cambio, Andrés prefiere no subir y esperar a Arturo en tierra firme.

Arturo sube en una cabina de color rojo y cuando lleva recorrido un cuarto de giro, a Andrés le apetece ir a comprar un helado, en ese momento justo, se oye el reloj de una iglesia cercana que marca las 11 p.m. De camino a la heladería se detiene a hablar con unos conocidos y cuando llega a la heladería observa en un reloj que son las 12 a.m. Cinco minutos después de que Andrés vuelva a la noria el reloj de la iglesia marca las 2 a.m.

La noria tarda 1 h y 40 minutos en dar una vuelta completa. Tras un primer giro completo la noria mantiene su sentido de giro durante un cuarto del mismo para después invertir su marcha durante medio giro y finalmente, volver a su sentido original, durante un cuarto de giro. Durante todo el recorrido la noria mantiene una velocidad constante y no se detiene. Las cabinas se cargan y se vacían, de pasajeros, una a una en la parte inferior de la noria

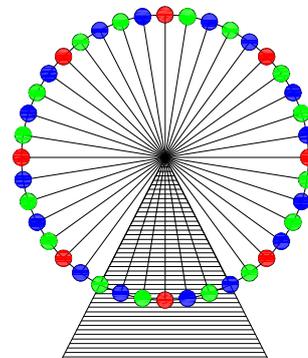
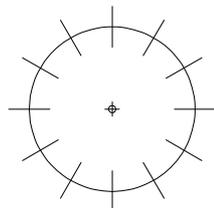
Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores:

¿Quién ha esperado a quién?

¿Cuánto tiempo ha durado la espera?

¿A qué hora exacta se han encontrado?

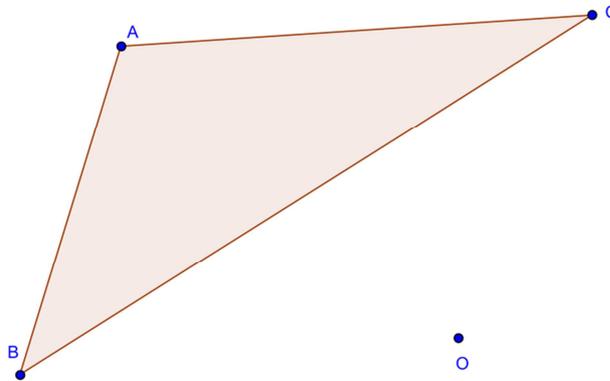
¿Cómo mínimo, cuanto puede tardar en bajar Arturo de la noria si no se encuentra en la cabina roja que sus ocupantes estén desalojando?¿y cómo máximo?



*Fuente: Elaboración Propia*

**SESION 6 SIMETRÍAS I****S1. Entre el Giro y la Simetría hay un paso.**

Gira  $180^\circ$  en sentido horario la figura respecto del punto O.



Fuente: Elaboración Propia

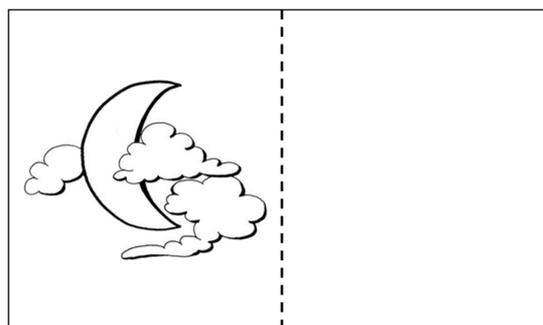
Usa para ello el transportador de ángulos y compás.

**S2. Si no lo veo no lo creo.**

La clase se divide en grupos de tres alumnos.

A cada componente del grupo se le da una plantilla con un determinado formato. Esta plantilla será igual para cada componente del grupo y distinta para cada grupo.

La plantilla será un folio horizontal, DIN A4, con una recta trazada por su centro que divide lo divide en dos partes iguales (dos DIN A5). En la parte izquierda del mismo habrá un determinado dibujo.



Fuente: Elaboración Propia; [www.dibujos-imprimir-colorear.blogspot.com.es](http://www.dibujos-imprimir-colorear.blogspot.com.es)

A cada grupo se le entrega un “mira”, un papel de acetato acompañado de un rotulador adecuado para dicho material y un carboncillo para que cada componente de ellos trabajé con uno de esos tres elementos. El papel de acetato tendrá las dimensiones de cada una de las partes en las que la plantilla queda dividida (formato A5).

Con el “mira” situado sobre la línea que divide la plantilla en dos partes, el correspondiente alumno deberá trazar el dibujo reflejado a través del “mira” en la parte derecha de la plantilla.

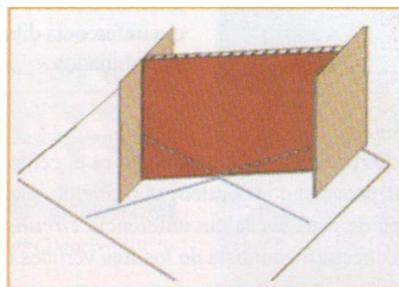
Situando el acetato sobre la parte izquierda de la plantilla, la parte que posee el dibujo, el segundo integrante el grupo deberá repasar con un rotulador adecuado el dibujo de la plantilla sobre el acetato. Una vez finalizado hará el efecto de volver la página de un libro con el papel de acetato, rotando este sobre el lateral que se haya sobre la línea que divide la plantilla, quedando, ahora, el acetato sobre la parte derecha de la plantilla apoyada sobre la cara que se ha dibujado.

El tercer alumno deberá repasar el dibujo con el carboncillo y doblar la plantilla a fin de plasmar sobre el lado derecho de la misma el dibujo inicial.

Llegados a este punto los tres alumnos tendrán en ambas cara de la plantilla, por cualquiera de los tres métodos, el dibujo inicial y su reflejado.

A continuación cada alumno marcará tres puntos cualesquiera del dibujo original, así por cada grupo es previsible obtener nueve puntos diferentes. Una vez marcados, deben aproximar cuál será su imagen reflejada respecto de la línea central de la plantilla. Para determinar las imágenes con precisión, y comprobar si estaban en lo cierto, deben aplicar las propiedades vistas en la actividad anterior para las reflexiones...¿Coinciden los puntos supuestos con los determinados según las propiedades establecidas?

Para que los alumnos se aseguren que han aplicado bien dichas propiedades bastará con doblar la plantilla y observar que los puntos marcados a ambos lados coincidan.



Fuente: [www.platea.pntic.mec.es/anunezca/experiencias/experiencias\\_AN\\_0607/3\\_eso/mosaicos/mosaicos.htm](http://www.platea.pntic.mec.es/anunezca/experiencias/experiencias_AN_0607/3_eso/mosaicos/mosaicos.htm)

S3. *Mirror Mirror... ¿Cuántas figuras soy?*

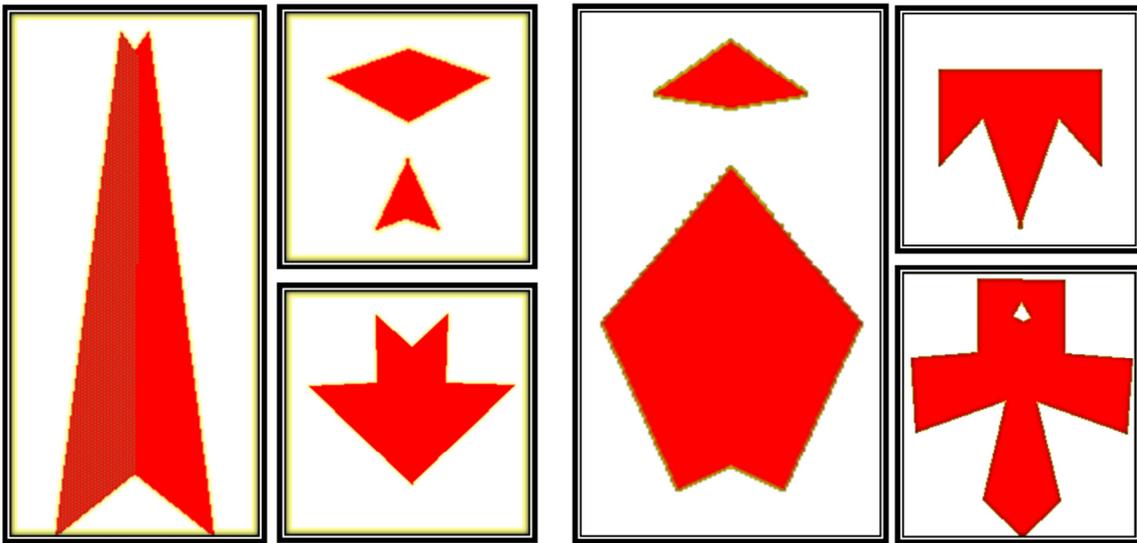
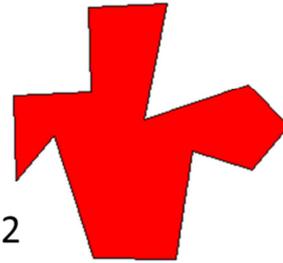
Fuente: MEC (CEDEC)

Coloca el libro de espejos sobre las dos figuras superiores de forma que visualices las figuras asociadas a éstas que se muestran bajo las mismas.

Figura 1



Figura 2

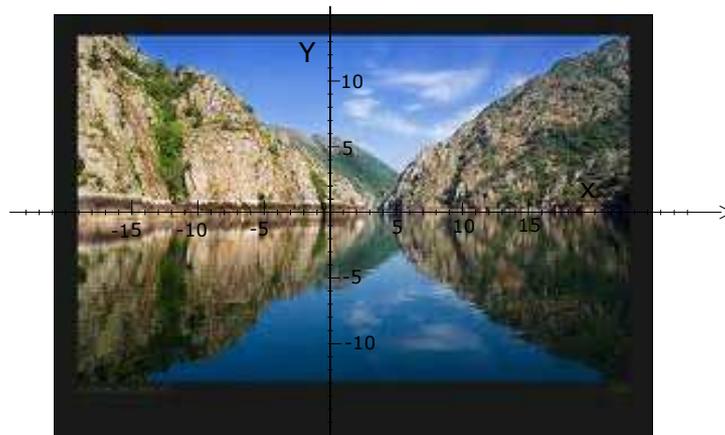


Fuente: [www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo); Elaboración Propia.

**SESION 7 SIMETRÍAS II****S4. Coordenadas simétricas.**

A continuación se presentan una serie de imágenes simétricas en las que se ha incorporado un eje de coordenadas. En base a los mismos, completa las tablas de coordenadas que acompaña a las imágenes.

Establece, en cada caso, las relaciones existentes entre las abscisas y las ordenadas según la posición que ocupe el eje de simetría de las imágenes respecto al eje de coordenadas.

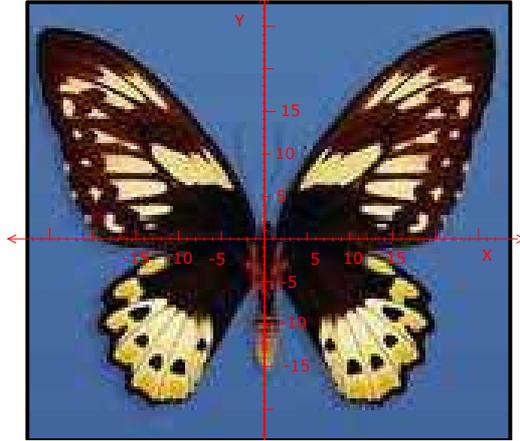


Fuente: [www.ojodigital.com](http://www.ojodigital.com); Elaboración Propia

<b>Punto</b>	<b>Transformado</b>
(-5, 5)	
(-5, 10)	
(10,0)	
(-10,0)	
(0,10)	

<b>Simetría respecto...</b>	<b>...</b>
<b>PUNTO</b>	<b>TRANSFORMADO</b>
<b>(x,y)</b>	

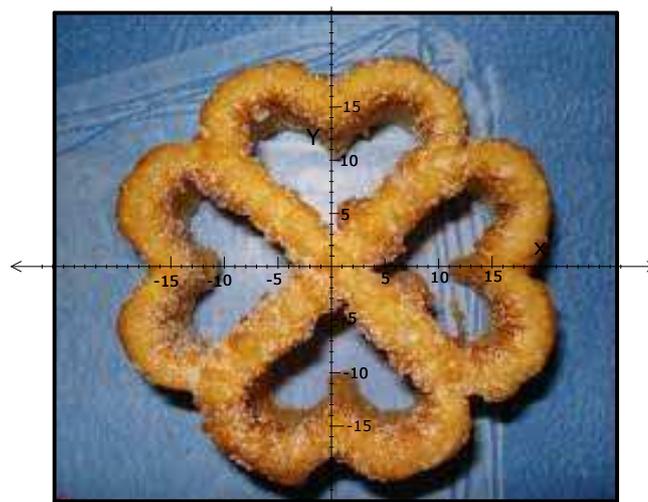
## S E S I Ó N 7



Fuente: [www.scienceinschool.org](http://www.scienceinschool.org); Elaboración Propia

<b>Punto</b>	<b>Transformado</b>
(-5, 5)	
(-5, 10)	
(10,0)	
(-10,0)	
(0,10)	

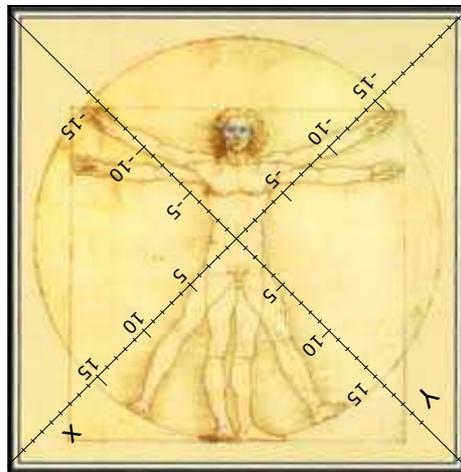
<b>Simetría respecto...</b>	<b>...</b>
<b>PUNTO</b>	<b>TRANSFORMADO</b>
<b>(x,y)</b>	



Fuente: [www.iescerrodelosinfantes.es](http://www.iescerrodelosinfantes.es); Elaboración Propia

<b>Punto</b>	<b>Transformado</b>
(-5, 5)	
(-5, 10)	
(10,0)	
(-10,0)	
(0,0)	

<b>Simetría respecto...</b>	<b>...</b>
<b>PUNTO</b>	<b>TRANSFORMADO</b>
<b>(x,y)</b>	



Fuente: [www.xanvilar.com](http://www.xanvilar.com); Elaboración Propia

<b>Punto</b>	<b>Transformado</b>
(-5, 5)	
(-5, 10)	
(10,0)	
(-10,0)	
(0,10)	

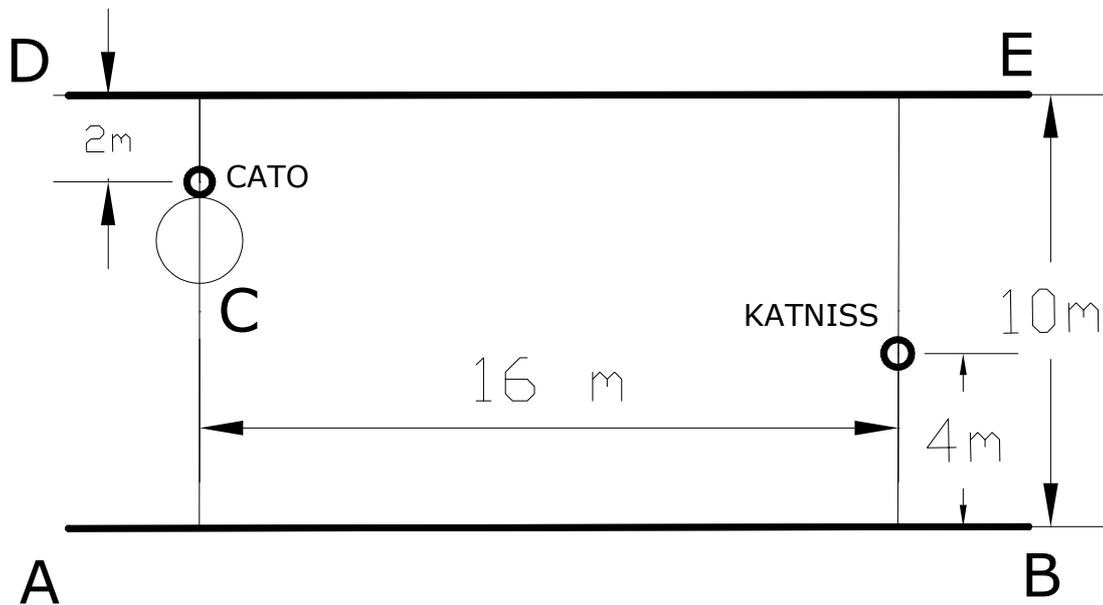
<b>Simetría respecto...</b>	<b>...</b>
<b>PUNTO</b>	<b>TRANSFORMADO</b>
<b>(x,y)</b>	

**S5.- Los Juegos del Hambre.**

En los septuagésimos cuartos juegos del hambre, sólo quedan con vida dos de los 24 tributos de los 12 distritos de Panem, Katniss Everdeen, tributo del distrito 12, y Cato, tributo del distrito 1.

Ambos contrincantes se encuentran en un pasillo de espejos, Cato consciente de la maestría de Katniss con el arco se oculta tras una columna situada en el pasillo. La habilidad de Katniss le dota de una gran capacidad para calcular distancias y de esta forma ser una de las mejores cazadoras de Panem.

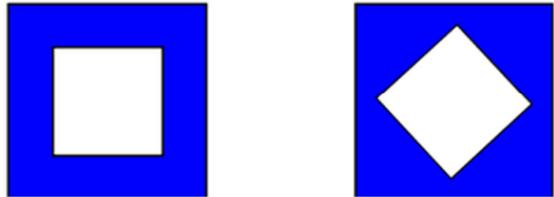
Si Katniss se sitúa frente al pasillo AB, considerando la posición de la columna tras la que se esconde Cato, ¿A qué distancia Katniss cree ver a Cato?



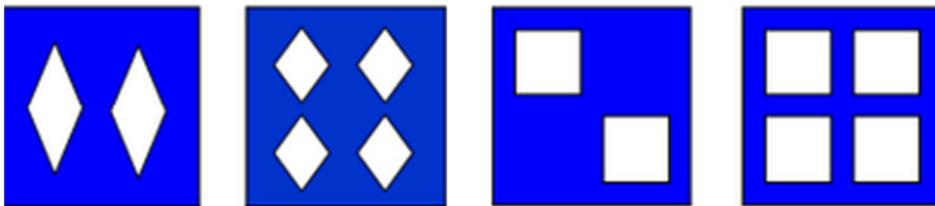
Fuente: [www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/)  
(Solucionarios: TEXTOS DE ANAYA (HASTA EL CURSO 2007/2008);)  
Elaboración Propia

S6.- Recortes en Educación.

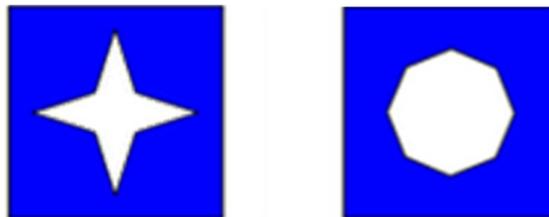
Realizando un corte recto con tijeras en el interior de un cuadrado de papel doblado todas las veces que sean necesarias. Obtén las siguientes figuras geométricas:



Fuente: [www.i-matematicas.com/blog/](http://www.i-matematicas.com/blog/)



Fuente: [www.i-matematicas.com/blog/](http://www.i-matematicas.com/blog/)



Fuente: [www.i-matematicas.com/blog/](http://www.i-matematicas.com/blog/)



Fuente: [www.i-matematicas.com/blog/](http://www.i-matematicas.com/blog/)

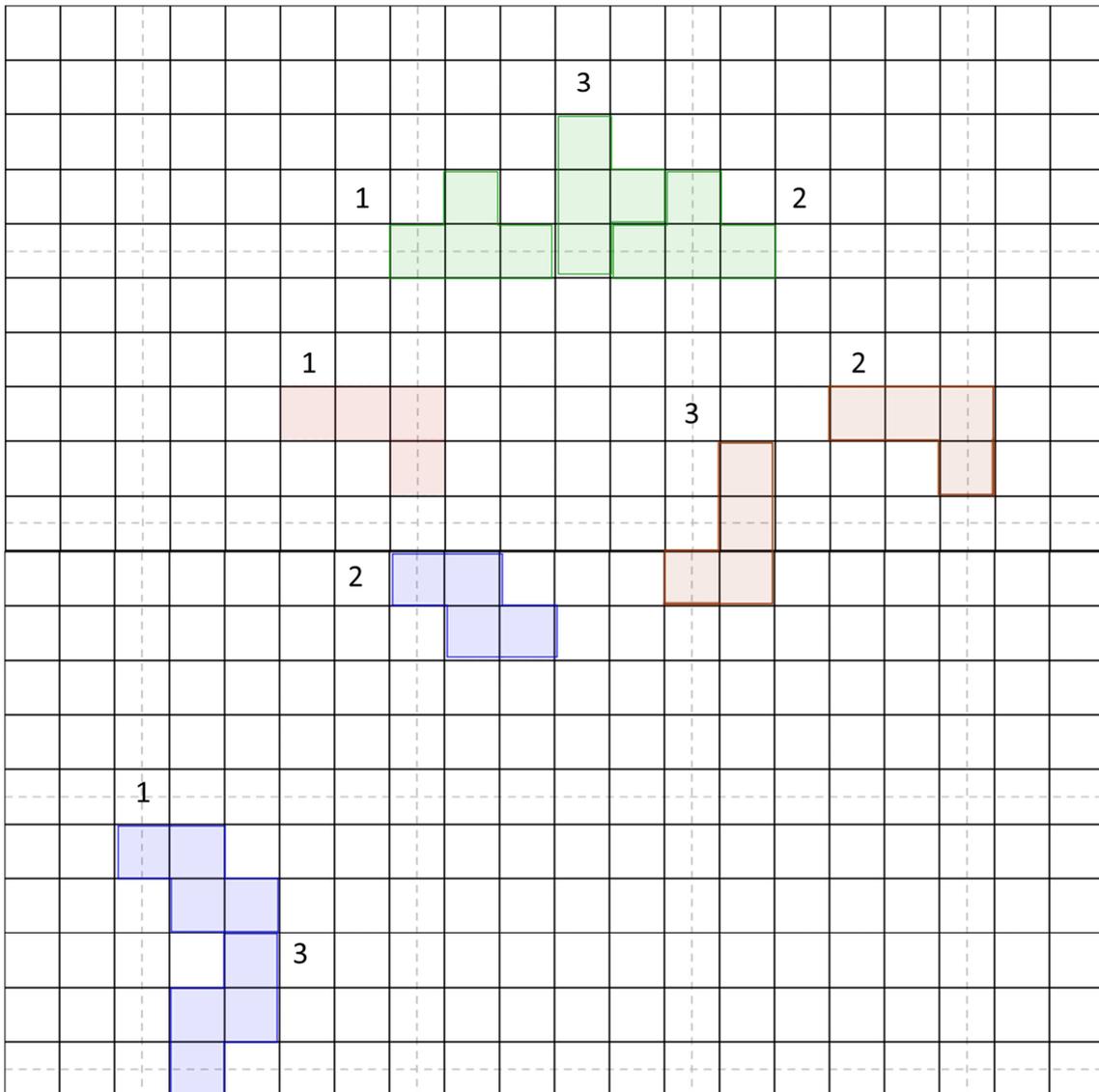


Fuente: [www.i-matematicas.com/blog/](http://www.i-matematicas.com/blog/)

## SESION 8 ISOMETRIAS

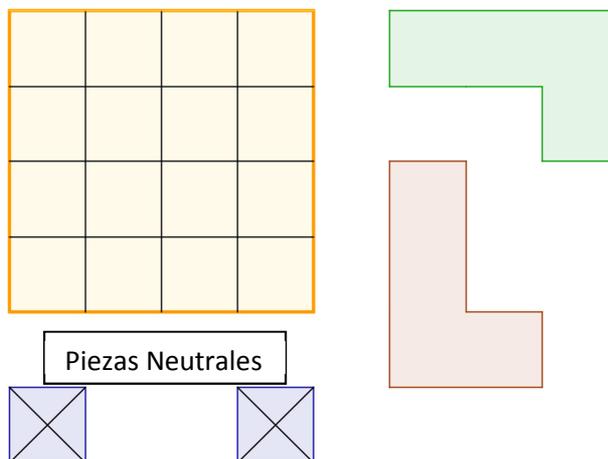
### 11.- ¿Qué fue antes... la gallina o la reflexión?.

Consigue en este tablero de TETRIS pasar de las figuras 1 a las figuras 2 y de las figuras 1 a las figuras 3, mediante el mínimo número posible de reflexiones.



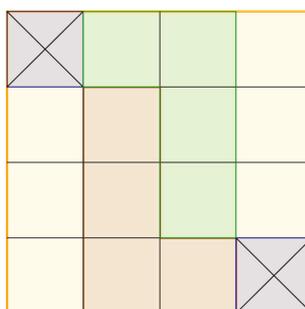
**12.- El Juego de la L.**

Con los siguientes elementos se propone un juego:

**Elementos Juego de la L**

Fuente: [www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/maticas/taller/juegos/juegos.htm](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/maticas/taller/juegos/juegos.htm)

Partiendo de la posición inicial, El juego consiste en disponer las piezas de tal forma que tu adversario no pueda mover su L.

**Posición Inicial**

Fuente: [www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/maticas/taller/juegos/juegos.htm](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/maticas/taller/juegos/juegos.htm)

En cada turno, el movimiento que puede hacer es el siguiente:

Trasladar, Girar o dar la vuelta a tu L, de forma que esta ocupe al menos un cuadrado diferente a los cuatro de su posición inicial.

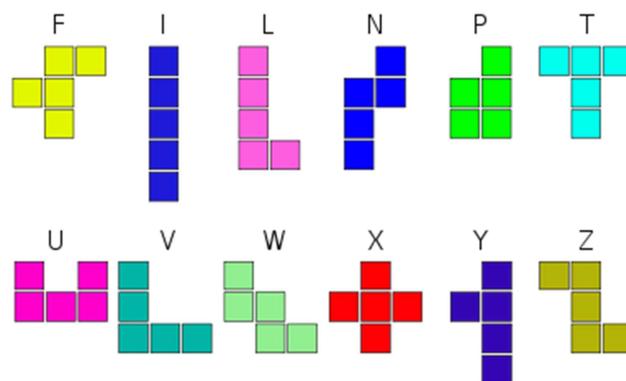
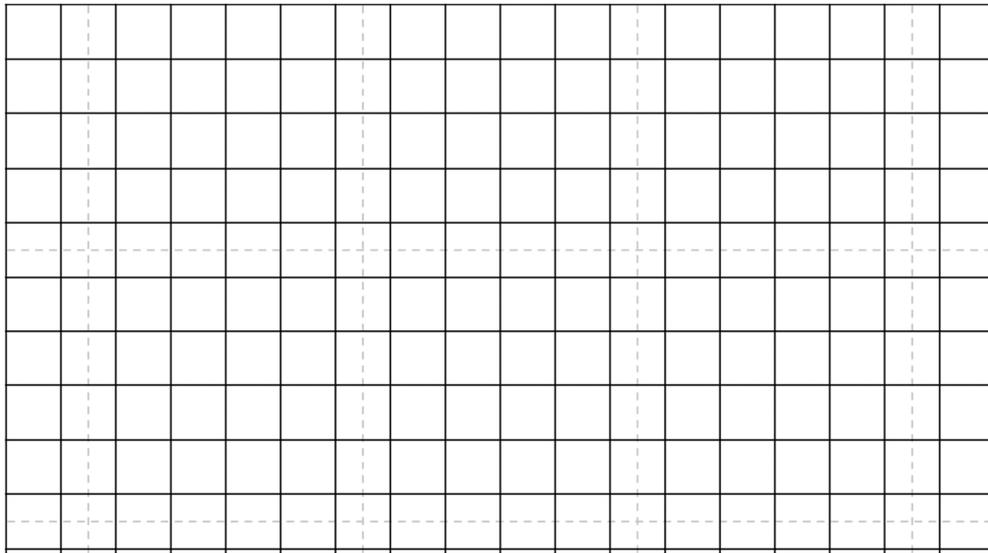
Si se desea se puede mover una de las dos piezas neutrales (2 cuadrados azules con aspas).

13. - Pentominós.

**PENTOMINÓS:** Son figuras formadas por 5 cuadrados, unidos lado a lado de todas las formas posibles. Hay 12 pentominós diferentes (<http://thales.cica.es/>).

¡OJO!: *Los pentominós obtenidos a partir de otros por simetría axial o por rotación no cuentan como un pentominó diferente.*

Haz uso de la cuadrícula para la obtención de los 12 pentominós.



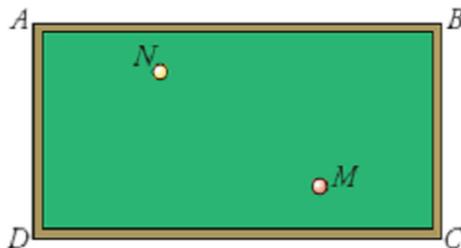
Fuente: Wikipedia

## SESION 9 EVALUACION FINAL

○ 1.- El siguiente juego desarrollado en una mesa de billar tiene una regla muy sencilla:

Gana el primer jugador que mediante una de las bolas golpee a la otra, golpeando previamente y una sola vez a una de las bandas de la mesa.

Para ganarte los dos puntos de esta pregunta tienes que ganarme la partida. Es tu turno así que expón todos los casos o jugadas ganadoras con las que puedes ganar el juego. Recuerda que no se impone ninguna bola a la que golpear inicialmente ni ninguna banda en concreto.



Fuente: [www.sonmismatematicas.blogspot.com.es](http://www.sonmismatematicas.blogspot.com.es)

○ 2.- En esta unidad hemos visto adornos originados mediante movimientos como son los mosaicos y los frisos. Existe un adorno que añadir a estos dos anteriores. Este adorno es circular y se origina girando un motivo mínimo, su nombre es rosetón.

En examen oral se ha propuesto la siguiente figura:



Se trata del rosetón presente en la fachada occidental de la Iglesia de la Colegiata de Covarrubias.

Covarrubias es una preciosa villa medieval de la comarca de Arlanza, situada al sureste de la provincia de Burgos.

Fuente: <http://www.arteguias.com/catedral/colegiatacovarrubias.htm>

Tras estudiar la misma unidad didáctica que tú, en el examen se le ha preguntado a Teresa que como podría relacionar la geometría de esta fotografía con los contenidos de la unidad.

Teresa ha hablado sobre las figuras simétricas, ha contabilizado correctamente los ejes de simetría que posee la figura y además ha calculado correctamente el ángulo comprendido entre dos ejes de simetría consecutivos. Sin embargo, pese a no cometer ningún error no ha obtenido la puntuación máxima. ¿Cómo complementarías la respuesta de Teresa teniendo en cuenta los movimientos estudiados en esta unidad?

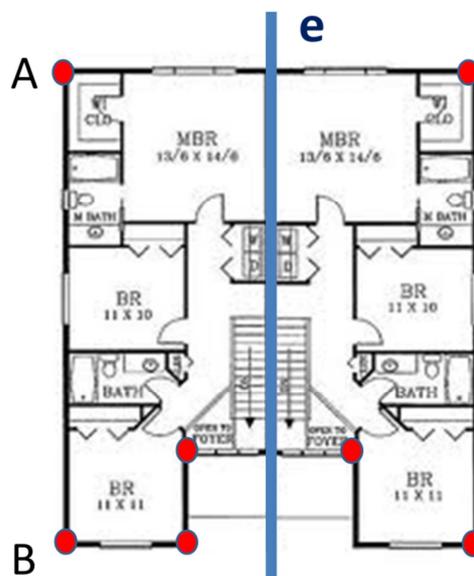
3.- A continuación se presenta el plano en planta de la planta superior de dos dúplex adosados.

Define el movimiento resultante de aplicar al plano la siguiente composición de movimientos:

Reflexión respecto del eje  $e$  que separa las dos viviendas.

Reflexión respecto a la recta en la que se apoya la imagen del segmento  $AB$  a respecto al movimiento anterior.

Si el movimiento es un giro define o determina gráficamente su ángulo, su sentido y su centro. Si el movimiento es una traslación representa el vector guía que la define.



Fuente: <http://www.planosde.net>

○ 4.- La autovía A-44 une la ciudad de Jaén y Granada, se supone que al recorrer la misma desde una ciudad a la otra ambas quedan al mismo de la carretera. Se pretende trasladar el Aeropuerto Federico García Lorca a otra ubicación de forma que la salida en la autovía para dirigirse al mismo equidiste de ambas ciudades. Obtén la ubicación de la salida en un plano.

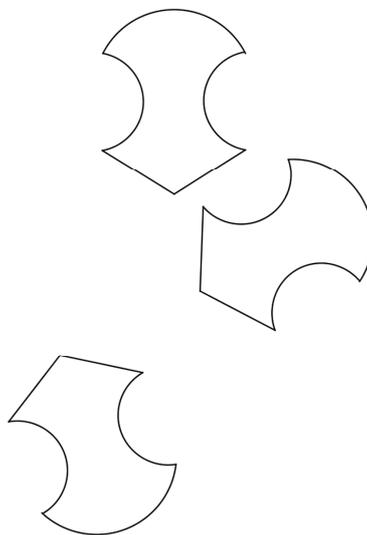
Para modelizar la situación en un plano sigue las siguientes instrucciones:

Usa puntos para determinar la situación de las ciudades

Representa la autovía por una línea recta.

No tenas en cuenta ningún tipo de escala, es decir, elige libremente las distancias entre las dos ciudades y la distancia de cada una de ellas a la autovía que no debe ser la misma.

○ 5.- Cada una de estas figuras se obtiene de las dos restante mediante un giro de igual centro pero de distinta amplitud. Determina el centro de giro y el ángulo que transforma cada figura en las otras dos.



*Fuente: Elaboración*

# CONCLUSIONES

En este trabajo fin de máster se ha desarrollado una propuesta de unidad didáctica dedicada al grupo de las isometrías en el plano. Esta Unidad pretende destacar aspectos importantes que han llamado mi atención en el máster y que, normalmente, en el ejercicio diario no se tienen en cuenta a la hora de programar unidades.

La incorporación de estos aspectos se ha hecho fundamentándola en los textos disponibles para ello, según el caso, buscando siempre la máxima calidad y rigor científico.

Un primer aspecto a tener en cuenta es al alumno, de manera individual, en el sentido de desde dónde partimos en el trabajo con el mismo y hacia dónde nos dirigimos, sin obviar cómo conducir esa construcción del conocimiento. Para ello se ha tenido en cuenta las teorías de Piaget y de Van Hiele.

El siguiente paso ha sido enmarcar la unidad didáctica en la legislación vigente que rige los procesos de enseñanzas y aprendizajes teniendo en cuenta para enriquecer a la misma a documentos internacionales que otorgan un carácter globalizador a la unidad didáctica.

Con los límites establecidos, en primer lugar, por las condiciones de los alumnos y, en segundo lugar, por las leyes, se ha propuesto una actuación con un marcado carácter innovador. En este sentido, la metodología propuesta rompe la tradicional forma de abordar las isometrías buscando potenciar su funcionalidad frente a una descripción exhaustiva de elementos geométricos abstractos.

Aunar estas tres vertientes, que provienen de los alumnos, de las leyes y recomendaciones en educación y de la creatividad de uno mismo como docente, es posible a través del análisis didáctico. Éste no es más que, un conjunto integrado de análisis, desde diferentes perspectivas, que permite que esta unidad didáctica cumpla su función de ayudar al docente a guiar el aprendizaje de los alumnos, a partir los recursos de los que estos disponen y pueden ofrecer y lo que la legislación permite.

Este trabajo fin de máster pretende ser un breve reflejo del dominio de las capacidades o competencias adquiridas en el máster, competencias que dibujan un perfil, tanto profesional como personal, idóneo para la docencia.

Este perfil, alcanzado a través del máster, nos permite contribuir al desarrollo personal de las nuevas generaciones de estudiantes y, a la vez, mejorar su preparación frente a los retos que se les presente.

La adquisición de estas competencias es posible gracias a la perspectiva interfacultativa e interdisciplinar de la que goza este máster. Entre las competencias desarrolladas cabe destacar, entre otras, las siguientes:

Conocer el contenido curricular de las matemáticas y el conjunto de normativas que rigen el sistema educativo. A este aspecto han contribuido de manera destacable asignaturas como Enseñanza y Aprendizaje, Complementos de Formación y Procesos y Contextos Educativos.

Diseñar y desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje, así como espacios de aprendizaje. Por un lado, asignaturas como Innovación Docente y Aprendizaje y Enseñanza de las matemáticas y, por otro lado, Sociedad familia y escuela han sido decisivas en la adquisición de estas competencias.

Adquirir estrategias para fomentar la autonomía, la confianza y la iniciativa personal del estudiante, sin olvidar el fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula. Estos aspectos son contenidos fundamentales de asignaturas como Aprendizaje y desarrollo de la personalidad.

Una importante mención merecen las prácticas docentes. Éstas han dotado de una dimensión práctica, dentro de un contexto real y de situaciones concretas, al conocimiento teórico – práctico adquirido en las disciplinas comunes y específicas del máster. Las prácticas me han permitido comprobar cómo se hace del centro un lugar de participación y cultura dentro del entorno en el que está inmerso, cómo llevar a cabo las tareas de información, asesoramiento e integración en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las familias de los estudiantes, qué tareas conlleva la concreción del currículo en un centro en concreto, conocer cuál es la situación del docente en relación a la realidad social de hoy en día...entre otras muchas más aportaciones.

# Anexo I

## DESCGLOSE DE ACTIVIDADES

Sesióu I.- Introduccióu.

Sesióu II.- Evaluacióu Inicial

Sesióu III.- Traslacióu. Tareas: T1, T2.

Sesióu IV.- Giros I. Tareas: G1, G2, G3.

Sesióu V.- Giros II. Tareas: G4, G5, G6.

Sesióu VI.- Simetrías I. Tareas: S1, S2, S3.

Sesióu VII.- Simetrías II. Tareas: S4, S5, S6.

Sesióu VIII.- Isometrías. Tareas: I1, I2, I3.

Sesióu IX. - Evaluacióu Final

## SESION 1 INTRODUCCION

### *Alicia en el País de las Transformaciones geométricas.*

La actividad que inicia la secuencia de tareas de la unidad didáctica consiste en el visionado de un vídeo denominado *ALICIA EN EL PAIS DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS*. Esta actividad pretende ayudar a la motivación y dar significado a los contenidos que se trabajarán a lo largo de la unidad.

El objetivo del vídeo es familiarizar a los alumnos con conceptos geométricos básicos, como son las transformaciones geométricas, con la ayuda de los personajes y situaciones correspondientes al libro de Lewis Carroll, *Alicia en el país de las maravillas*.

El vídeo de una duración aproximada de 40 minutos se estructura en tres partes:

1.- Deformaciones y Sombras. Se tratan los aspectos fundamentales de las transformaciones en general, guiados por la oruga de la seta.

2.- Simetrías. En una merienda de locos los personajes experimentan abundantes situaciones y ejemplos de la vida real y de creación relacionados, en concreto, con la simetría.

3.- Giros y traslaciones. Se presentan situaciones de juegos en las que intervienen el resto de isometrías: giros y traslaciones.

La visión de este vídeo se acompaña de un debate, posterior a la misma, en el que se pretenderá establecer las particularidades de las isometrías dentro del grupo general de las transformaciones geométricas.

Información del vídeo

Productora: Fundacio Serveis de Cultura Popular

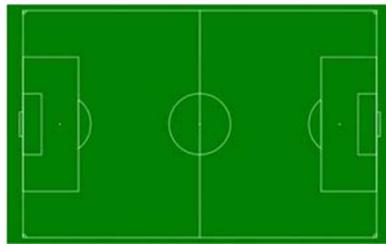
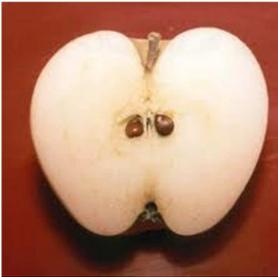
Distribuidora: Ancora Audiovisual:

## SESION 2 EVALUACION INICIAL

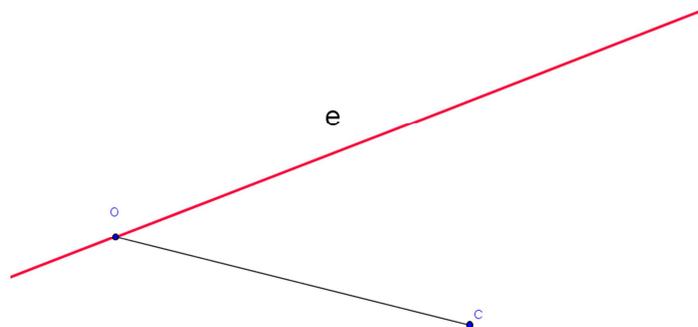
1.- Traza una recta paralela al segmento AB que diste del mismo 2 cm, con el uso de la regla, la escuadra y el cartabón



2.- Traza todos los ejes de simetría que poseen las siguientes figuras:

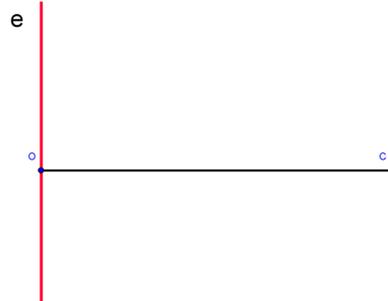


3.- Obtén el simétrico del segmento OC respecto de la recta e mediante el uso del compás. ¿Qué relación tiene la recta e con el ángulo determinado por los segmentos OC y su simétrico respecto de e?



## A n e x o I S E S I Ó N 2

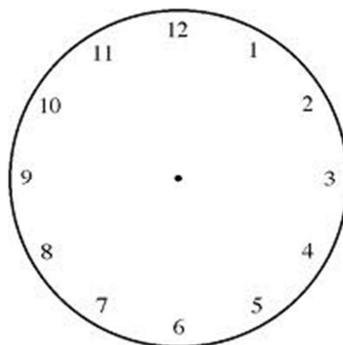
4.- Obtén el simétrico del segmento  $OC$  respecto de la recta  $e$  mediante el uso del compás. ¿Qué relación tiene la recta  $e$  con el segmento formado por los segmentos  $OC$  y su simétrico?



5.- La siguiente figura tiene varios ejes de simetría. Determina el número de ejes de simetría que posee y calcula gráficamente, con el transportador de ángulos, y analíticamente el ángulo formado por dos ejes contiguos.

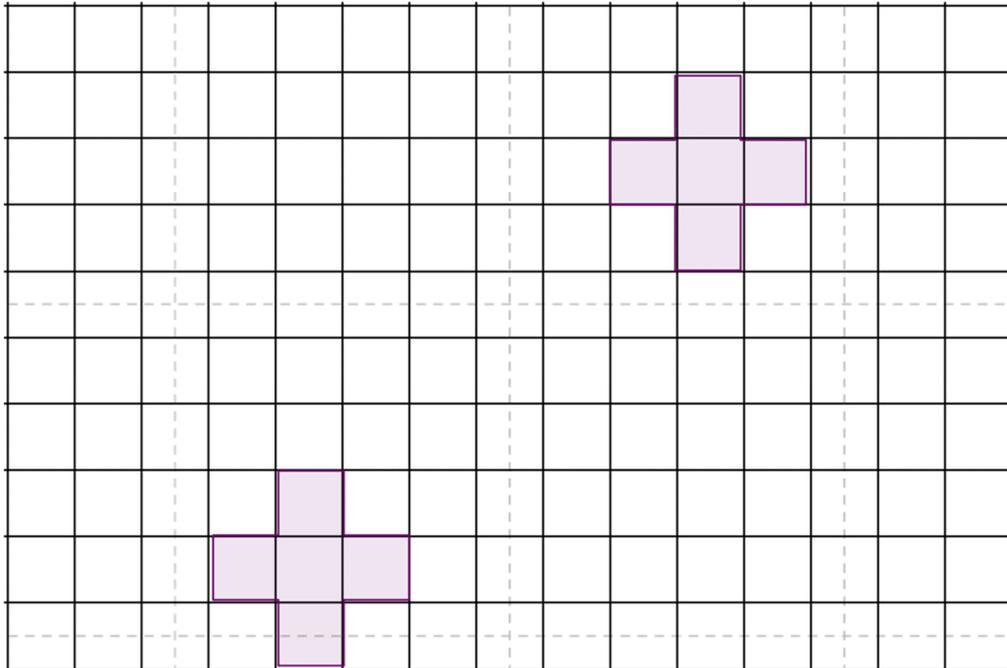


6.- ¿Qué ángulos giran el minutero de un reloj y la aguja horaria de un reloj en el transcurso de tiempo que abarca desde las 2 horas y 5 minutos y las 3 horas y 10 minutos?



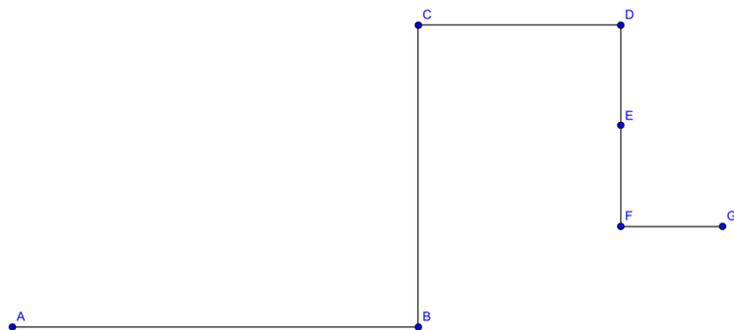
7.- Considerando como unidad de desplazamiento un cuadrado de la cuadrícula.  
¿Cuántas unidades de desplazamiento se desplaza la figura en horizontal y en vertical para pasar de la posición 1 a la posición 2?

Colorea la el recorrido directo para pasar de la figura 1 a la figura 2?



8.- ¿Cuáles de los siguientes medios de transporte pueden seguir la siguiente trayectoria pasando por todos los puntos sin recortar la misma?

- Coche
- Autobús
- Avión
- Tren
- Bicicleta
- Helicóptero



## A n e x o I S E S I Ó N 2

9.- Relaciona estas tres columnas y señala de qué isometría, traslación, giro o simetría se trata.

¿Cuánto?	Dirección	Derecha o Izquierda
	Longitud o Distancia	Línea recta
¿Hacia dónde?	Sentido	Mucho o Poco

- Giro
- Simetría
- Traslación

10.- Relaciona estas tres columnas y señala de qué isometría, traslación, giro o simetría se trata

¿Alrededor de?	Ángulo	Derecha o Izquierda
¿Cuánto?	Centro	Punto fijo
¿Hacia dónde?	Sentido	Mucho o Poco

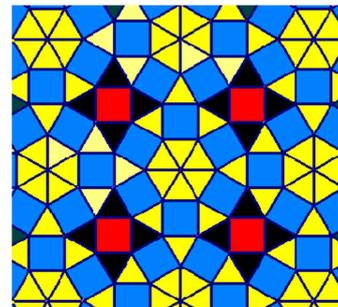
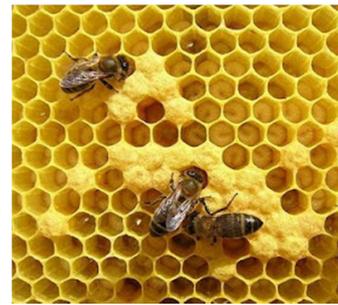
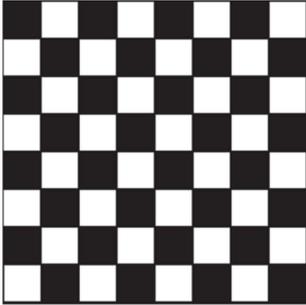
- Giro
- Simetría
- Traslación

## SESION 3 TRASLACION

### T1. La Traslación en Mosaicos.

**Mosaico:** Configuración geométrica a partir de la cual se puede rellenar el plano. Existen mosaicos formados por una sola pieza y otros formados por dos y más piezas.

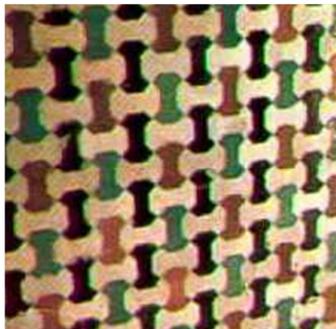
Analiza los siguientes mosaicos.



Fuente: [www.geografiasubjetiva.com](http://www.geografiasubjetiva.com); [www.fondosblackberry.com](http://www.fondosblackberry.com); [www.recuerdosdepandora.com](http://www.recuerdosdepandora.com); [www.catedu.es/webcatedu/](http://www.catedu.es/webcatedu/); [www.educaciónplástica.es](http://www.educaciónplástica.es); web IES Sierra Minera.

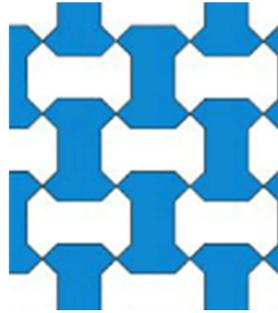
Para rellenar el plano a partir de una o más figuras geométricas se las debe someter a distintas isometrías.

El siguiente mosaico se denomina multihueso y se halla en las proximidades del Salón del Trono de la Alhambra.



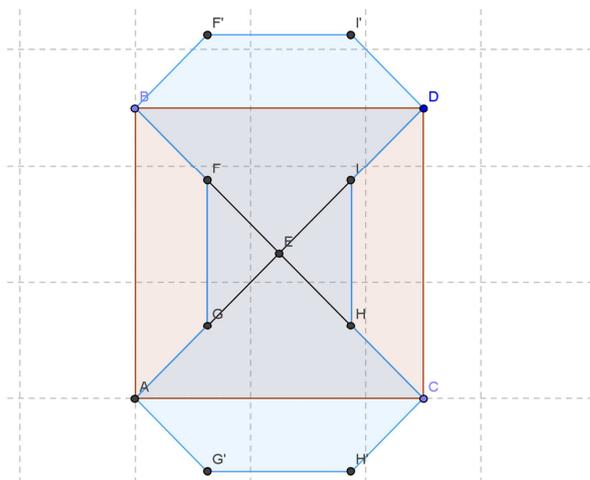
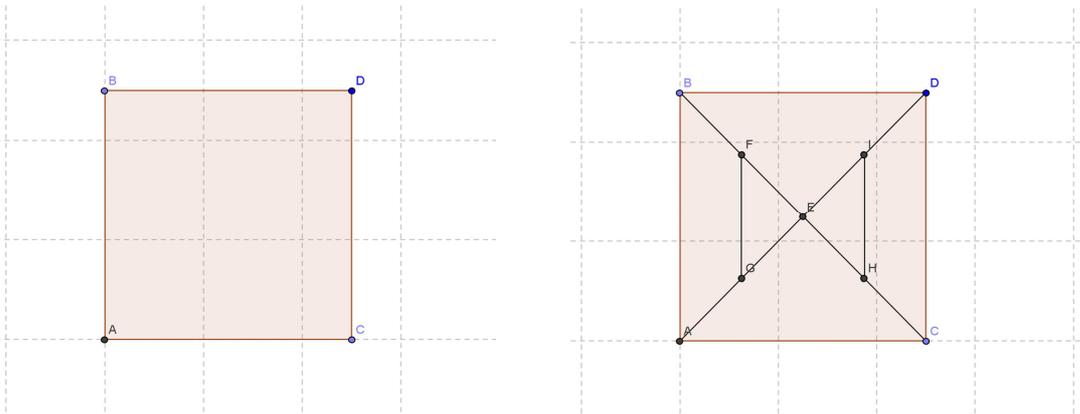
Fuente: [www.catedu.es/webcatedu/](http://www.catedu.es/webcatedu/)

Sometiendo a un “hueso” inicial únicamente a traslaciones... ¿Cómo se podría reproducir este mosaico sobre una cartulina blanca partiendo de cartulinas cuadradas de color azul?



Fuente: Colera et al. (2011)

Para la elaboración del “hueso” a partir de un cuadrado se siguen las siguientes indicaciones.



Fuente: Elaboración propia

D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
T 1

La propia actividad comienza dando la definición de mosaico. Esta se puede aprovechar, junto con las imágenes que se proporcionan, para definir e identificar los diferentes **tipos de mosaicos**:

- *Mosaicos regulares.*
- *Mosaicos semirregulares.*

Una vez reconocidas las distintas isometrías a la que se somete al o a los polígonos regulares a partir de los cuáles se forman los mosaicos de las imágenes se pasa a analizar el mosaico árabe del que se pide hacer la réplica.

Tal y como se observa en esquema de la elaboración del hueso se parte de un cuadrado, un polígono regular, por lo que los alumnos ya podrían, y así se les pedirá, que identifiquen el tipo de mosaico. En este caso se trataría de un mosaico regular.

Para crear el mosaico una vez que se tienen varios huesos de color azul contruidos el siguiente paso sería decidir cómo disponerlos. Aquí se enlaza la actividad con el concepto de **traslación**. Al tener de fondo la cartulina blanca los huesos de color blanco, no serán problemáticos para su construcción, puesto que se obtienen como consecuencia de la correcta posición de los huesos azules.

De este modo colocando un primer hueso azul, la posición de los siguientes se consigue desplazando éste únicamente horizontalmente desde su posición inicial hasta conseguir una franja de huesos situados uno a continuación del otro. El siguiente paso sería desplazar un hueso sí, otro no, verticalmente hasta hacer coincidir los puntos de contactos inferiores de los huesos desplazados verticalmente, con los de contacto superior de los que mantienen su posición.

Cada desplazamiento que se realiza al hueso tiene una dirección, vertical u horizontal en estos casos, un sentido, dependiendo de hacia que lado del hueso original se empieza a generar el mosaico, derecha, izquierda o ambos, y un módulo, que en este caso coincide con el valor de la arista del cuadrado que origina el hueso. Estos tres **elementos** definen un **vector**. Los vectores que tienen en común estos elementos se denominan **vectores equipolentes**.

Desplazando según un vector una figura se transforma la misma mediante una traslación, todos los puntos de la figura se mueven una determinada magnitud en la misma dirección y sentido. En concreto, se dice que se está trasladando la figura

mediante un determinado vector guía determinado por su módulo, dirección y sentido. Al trasladar una figura se comprueba que esta mantiene su sentido de giro por lo tanto es un movimiento directo, en este punto puede ser que el hueso no ayude a ejemplificar dicha afirmación por lo que podríamos hacer referencia a otra figura como un triángulo que no se apoye en ninguna de sus bases. La traslación mediante el vector guía vertical es la que mejor muestra que al trasladar una figura y desplazar todos sus puntos una misma magnitud, dirección y sentido, ninguno de ellos se mantiene en su posición inicial, por lo tanto, las traslaciones no tienen elementos invariantes

Algunos huesos del mosaico se trasladan dos veces, una vez según un vector de dirección horizontal y otra mediante un vector de dirección vertical, esto equivale a una única traslación de vector guía igual a la suma geométrica de los dos vectores guías que determinan la traslación horizontal y vertical, respectivamente. A partir de esto se puede generalizar que cualquier vector se puede definir mediante dos componentes: una vertical y otra horizontal.

T2. El Comprador Inglés.

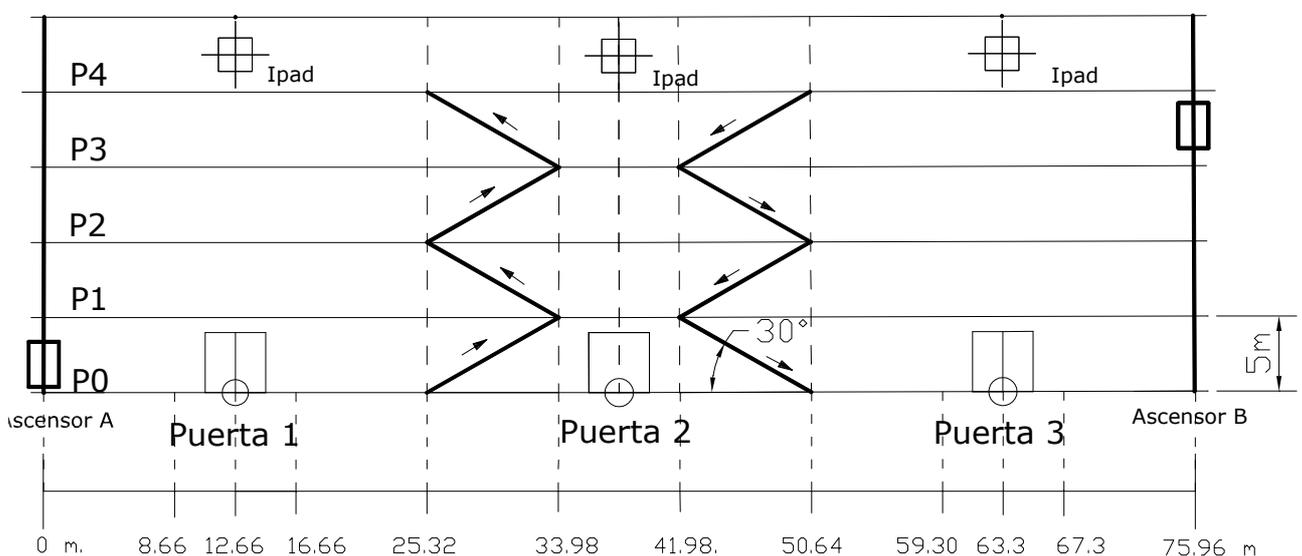
Debido a la apertura de un nuevo centro comercial se lanza la siguiente oferta de lanzamiento.

“Un Ipad3 gratis para las dos primeras personas que consigan uno y pasen por la caja rápida”.

Se sabe que la planta 4 está destinada por completo a la sección de informática y multimedia y que en ella hay tres expositores diferentes donde encontrar los Ipads. El centro comercial posee únicamente dos “cajas rápidas”, situadas en la planta 0 junto a las puertas 1 y 3, respectivamente.

En el momento justo de la apertura, Almudena se encuentra en la puerta número 3 con la intención de conseguir uno de los ipads gratis usando, para ello, el ascensor. Javier, con el mismo fin, se encuentra en la puerta número 2 para dirigirse a las escaleras mecánicas. En la puerta número 1 se encuentra un señor inglés que no está dispuesto a quedarse sin un Ipad gratis.

¿Cuál debería ser su elección, escalera mecánica y salir por la puerta 2 o ascensor y salir por la puerta 1, para ser uno de los dos agraciados con un Ipad gratis?



Fuente: Elaboración Propia

Consideraciones a tener en cuenta:

Croquis: distancias, ángulos y localizaciones.

El ascensor y las escaleras mecánicas se desplazan a la misma velocidad constante.

Los tres candidatos andan a la misma velocidad constante.

Los usuarios de la escalera mecánica se mueven a la velocidad de la misma.

No se consideran pérdidas de tiempo en los cambios de escaleras entre plantas, ni de esperas en los ascensores.

Usa dos colores diferentes para señalar todo el recorrido a realizar por Almudena y por Javier y marca con flechas hacia donde se desplazan en cada tramo del mismo.

## D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D T 2

Para dar respuesta a esta actividad se puede guiar a los alumnos con las siguientes indicaciones

⇒ Contabiliza los tramos de los que consta cada uno de los recorridos.

*La existencia de diferentes tramos supone la existencia de cambios de direcciones. Se hará hincapié en que cuando dos segmentos o rectas se cortan o existe un cambio de dirección. En cada tramo podemos definir un vector, mediante los elementos que hemos visto en el ejercicio anterior, la dirección vendrá dada por la recta en la que se haya cada tramo, el sentido se indicará en cada tramo o vector con mediante la flecha que nos indican cómo se trasladan Javier y Almudena. Finalmente, el módulo de cada vector se puede obtener a partir del croquis. En el caso concreto de Almudena sobre la misma recta tendremos vectores diferentes.*

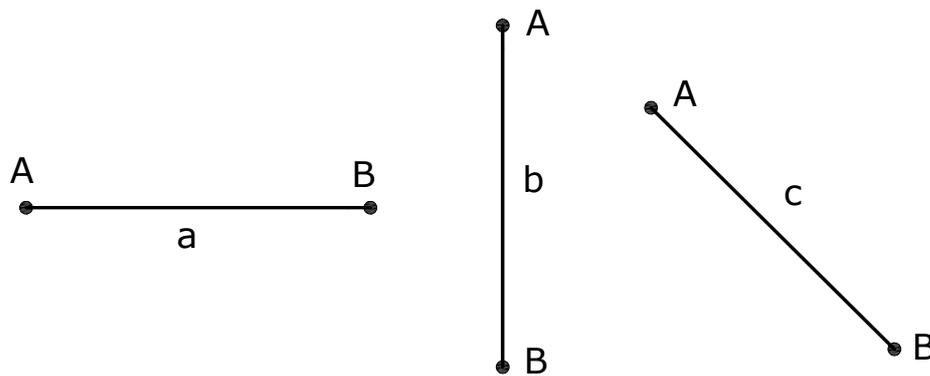
⇒ ¿Cuántas y cuáles direcciones se reconocen en cada recorrido?

*Es importante hacerles saber a los alumnos que los tramos no son direcciones. Las direcciones son las rectas donde se sitúan los diferentes tramos y que dos rectas paralelas tienen la misma dirección, puesto que nunca se cortan como se ha indicado en el apartado anterior. Por lo tanto los  $n$  tramos no significa  $n$  direcciones distintas, pero sí  $n$  cambios de éstas. Teniendo en cuenta los vectores definidos en el apartado anterior ahora se puede decir cuál de ellos son equipolentes.*

⇒ Considerando un sistema de coordenadas de origen en el ascensor A, la abscisa positiva hacia el ascensor B y la ordenada negativa hacia la planta 4, Obtén para cada vector las coordenadas de sus puntos origen y fin así como las coordenadas del mismo.

*Recurriremos al siguiente ejemplo para aclarar este apartado y poder así calcular correctamente las coordenadas o componentes de cada vector:*

- *El segmento a tiene la dirección de la recta horizontal y tiene dos posibles sentidos: De izquierda a derecha (de A a B) y de derecha a izquierda (de B a A).*
- *El segmento b tiene la dirección de la recta vertical y tiene dos posibles sentidos: De arriba abajo (de A a B) y de abajo a arriba (De B a A).*
- *El segmento c tiene una determinada dirección inclinada y dos sentidos: De A a B y de B a A.*



*Fuente: elaboración Propia*

Conocido el módulo de cada vector así como sus componentes se puede mostrar la obtención del primero a partir de las segundas. También es posible obtener cualquier vector como suma analítica y gráfica de un vector horizontal y un vector vertical.

⇒ ¿Qué distancia real y en vertical en función de los desplazamientos señalados, recorren Almudena y Javier cuando se desplazan únicamente mediante el ascensor y por la escalera mecánica, respectivamente, durante sus recorridos?

*Para el cálculo de la distancia real los alumnos únicamente deben de sumar los módulos de los vectores asociados a los tramos, en ascensor o escalera, que definen sus recorridos.*

## A n e x o I S E S I Ó N 3

⇒ ¿Qué distancia o longitud recorren ambos tanto en vertical como en horizontal?

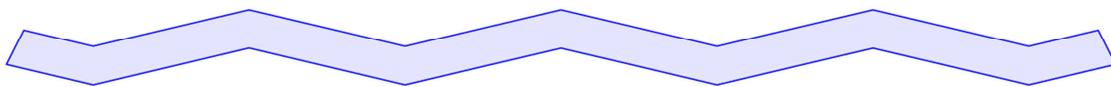
*Para el cálculo de la distancia vertical a los alumnos deberán de considerar, de los anteriores vectores, únicamente el recorrido vertical, desde su origen hasta su extremo, es decir, su componente vertical. Esta idea ayudará a los alumnos a descubrir como en términos de distancia vertical ambos recorridos son similares y así se ejemplificará el concepto de suma de vectores.*

## SESION 4 GIROS I

### G.1.- Geogebra I. Un friso mediante Giros.

**Frisos:** Adornos longitudinales en los que hay un motivo que se repite mediante traslaciones (Anaya, 2012)

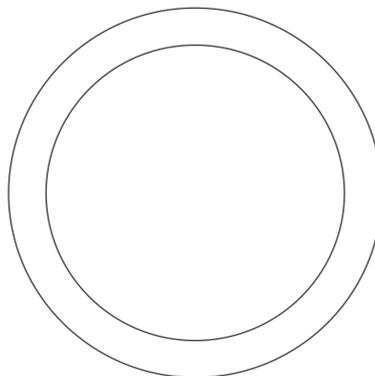
Identifica en el siguiente friso el motivo que se repite mediante traslaciones. A continuación, con Geogebra, reproduce el mismo friso pero a partir de un motivo mínimo que se repita mediante el mismo giro.



*Fuente: Elaboración Propia*

El motivo mínimo, a girar para la obtención del friso, se obtiene a partir de una sección de corona circular de  $R=10$  y  $r=8$  cuyo ángulo es  $53,13^\circ$ .

**Corona Circular:** Figura geométrica plana delimitada por dos circunferencias concéntricas.



*Fuente: Elaboración Propia*

### D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D G 1

Esta actividad pretende enlazar el concepto de traslación con giro. Se puede comenzar la misma indicando que se va a tratar un nuevo tipo de isometría o de movimiento directo, es decir, que conserva el sentido de giro.

Una vez se ha identificado el motivo mínimo mediante el cual este friso, nuevo concepto que también se introduce en la actividad, se obtiene mediante traslaciones y estudiar las sucesivas traslaciones que componen el mismo y los vectores guía de las mismas, se pasa a construir el mismo friso mediante giros.

La obtención del motivo mínimo a girar es fácil de conseguir con las instrucciones que se dan en la actividad, la única complejidad pasa por obtenerlo mediante el software *Geogebra*, (las indicaciones se dan a continuación).

En la figura que se observa a continuación se muestra el motivo mínimo a girar delimitado por las rectas que forman un ángulo de  $53'13^{\circ}$ . El friso se consigue girando la figura a ambos lados de la misma.

¿Qué se necesita para girar dicho motivo?:

- Un punto respecto al cual girar;
- Una determinada amplitud o ángulo de giro;
- Un sentido de giro u orientación.

Estas tres características son las que se denominan elementos de un giro, y a través de un trío de estos datos se define cualquier giro.

¿Qué deben cumplir estos elementos?:

Puesto que no hay discontinuidad en el friso el centro de giro debe de estar contenido en el motivo mínimo. Puesto que el motivo se reproduce tal cual sin que se superponga la figura original y su homóloga o transformada mediante el giro, el centro de giro debe de estar contenido en las aristas laterales del mismo.

Para determinar la amplitud de giro basta observar que se pretende girar un motivo mínimo en forma de flecha apuntando al norte hasta que dicha flecha apunte al sur y al contrario, por lo que es evidente que el ángulo de giro es de  $180^{\circ}$ . Este ángulo de giro a la vez nos fija el centro de giro en la arista del mismo, puesto que éste es el único punto invariante o doble en un giro. El centro de giro será el punto medio de las aristas laterales del motivo mínimo. En este momento al hacer referencia al único punto invariante en un giro se puede hacer mención a la existencia de figuras dobles e invariantes en un giro, como son, las circunferencias de centro de giro el centro de la misma y de cualquier amplitud y las rectas de centro cualquier punto de las mismas y de amplitud  $180^{\circ}$

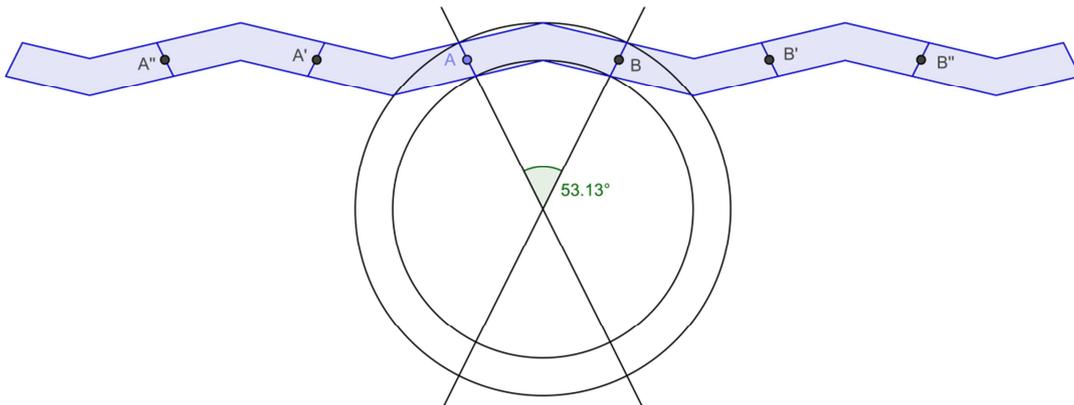
El sentido de giro en este caso es irrelevante puesto que al tratarse de un ángulo de  $180^{\circ}$  el resultado es el mismo al girar hacia el sentido antihorario, negativo, o horario, positivo.

El giro de cualquier punto P del motivo mínimo cumple lo siguiente, siendo P' el punto transformado de P mediante un giro:

$$AP = AP' \text{ y } \alpha = 180^\circ = PAP'$$

$$BP = BP' \text{ y } \alpha = 180^\circ = PBP'$$

Aplicando el mismo giro a las figuras transformadas del motivo mínimo a ambos lados del mismo y así sucesivamente se obtiene el friso inicial.



Fuente: Elaboración Propia

Quizás sea la primera vez que los alumnos se enfrentan a este software informático, por ello deberemos guiarlos a través de las herramientas con las que disponen.

Corona circular: **Circunferencias dados su Centro y su Radio.**

Sección: **Angulo dada su Amplitud y Recta que pasa por Dos Puntos.**

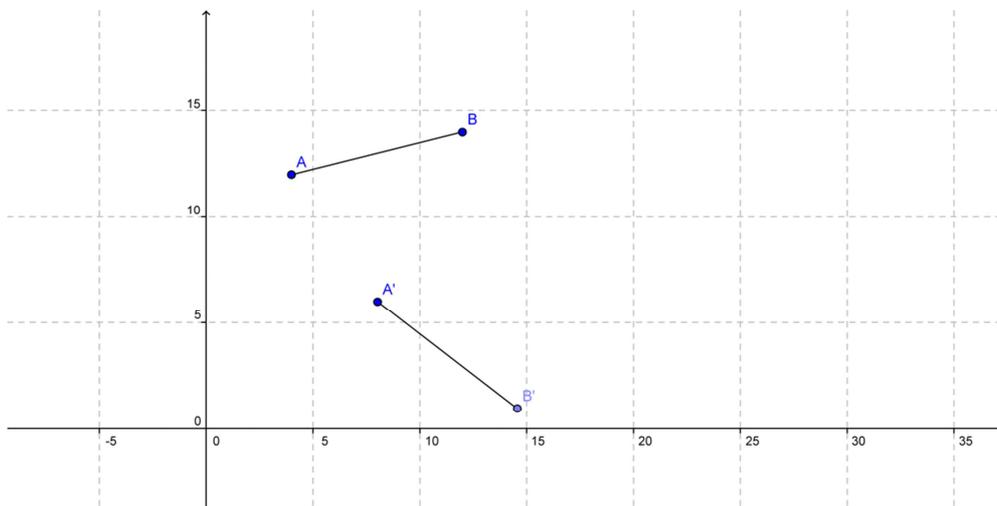
Motivo mínimo: **Polígono**

Puntos de giros: **Mediatriz.**

Giros: **Herramientas de Transformación\_Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado.**

**G.2.- Geogebra II. Obtención del centro de Giro de dos segmentos.**

Dado un segmento AB y su transformado A'B' mediante un único giro. Obtén mediante el uso de *Geogebra* el centro y el ángulo de giro.



*Fuente: Elaboración Propia*

D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
G 2

Como se ha dicho en el ejercicio anterior, cualquier giro se define a través de tres elementos que son: el centro de giro, la amplitud o ángulo de giro y el sentido. Normalmente los alumnos realizarán giros a partir de conocer estos elementos, por lo que resulta interesante que al menos una vez obtengan dichos elementos a partir de un elemento, en este caso un segmento, girado dado.

Para ayudar a los alumnos a analizar el problema se les dan las siguientes indicaciones:

Si A se transforma en A', mediante un giro ¿Qué característica tiene el segmento AA'?

¿Qué lugar geométrico del segmento AA' se sabe que pasa por el centro buscado y por qué?

Si todo lo dicho para el segmento AA' es válido para el segmento BB' ¿Cómo queda determinado el centro de giro?

El alumno deber llegar a visualizar que el segmento AA' es una cuerda de la circunferencia de centro el centro de giro buscado C y radio CA. Si CA y CA' son

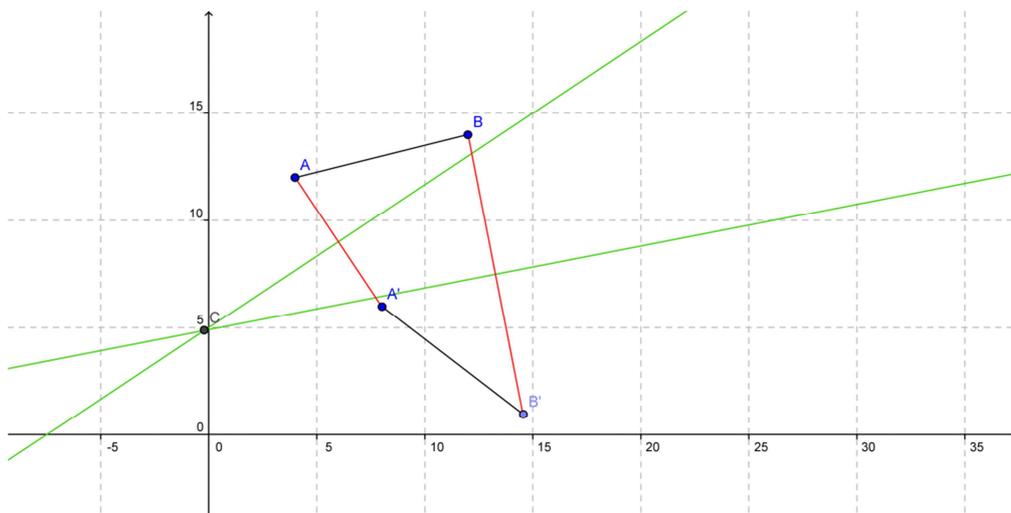
radios de dicha circunferencia la bisectriz del ángulo  $ACA'$ , delimitado por dichos radios, es evidente que pasa por el centro  $C$ . Esta bisectriz a su vez coincide con la mediatriz de la cuerda de circunferencia  $AA'$ . Si aplicamos todo lo anterior al caso del segmento  $BB'$  es lógico deducir que el punto de corte de ambas cuerdas,  $AA'$  y  $BB'$ , es el centro de giro buscado  $C$ .

La amplitud o ángulo de giro es de fácil obtención midiendo el ángulo  $ACA'$  o  $BCB'$ .

Herramientas de Geogebra para la resolución:

$AA'$  y  $BB'$ : **Segmento entre Dos Puntos.**

Mediatriz  $AA'$  y Mediatriz  $BB'$ : **Mediatriz**



Fuente: Elaboración Propia

**G.3.- Geogebra III. Puentes equidistantes**

Sobre tres ríos de cauces paralelos se pretende construir tres puentes, uno sobre cada río. Los puentes se construyen de tal forma que la distancia en línea recta entre los puentes de los ríos extremos es igual a la distancia de cada uno de esos puentes al puente sobre el río intermedio.

Modeliza en Geogebra la situación, mediante rectas y puntos, para obtener las posibles ubicaciones de cada uno de los puentes, teniendo en cuenta la restricción constructiva...

*“... la distancia en línea recta entre los puentes de los ríos extremos es igual a la distancia de cada uno de esos puentes al puente sobre el río intermedio...”.*

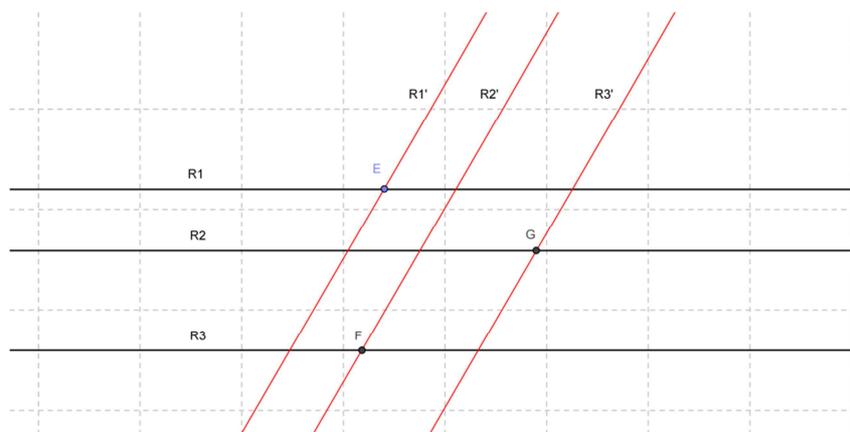
D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
G 3

Esta actividad busca aplicar los conceptos aprendidos sobre giros, con ayuda de Geogebra, para la resolución de problemas de la vida real.

La condición se traduce por tres puentes equidistantes y dada la característica de que los ríos son paralelos, los tres puentes darán lugar a un triángulo equilátero.

Por todo esto, el problema en Geogebra se traduce en construir un triángulo equilátero con sus vértices apoyados en tres rectas paralelas.

La clave para la resolución del problema consiste en girar el problema  $60^\circ$ , valor de los ángulos interiores de un triángulo equilátero, respecto a un punto cualquiera escogido de uno de las rectas.



*Fuente: Elaboración Propia*

Punto en una de las rectas. **Nuevo Punto.** (E, R1).

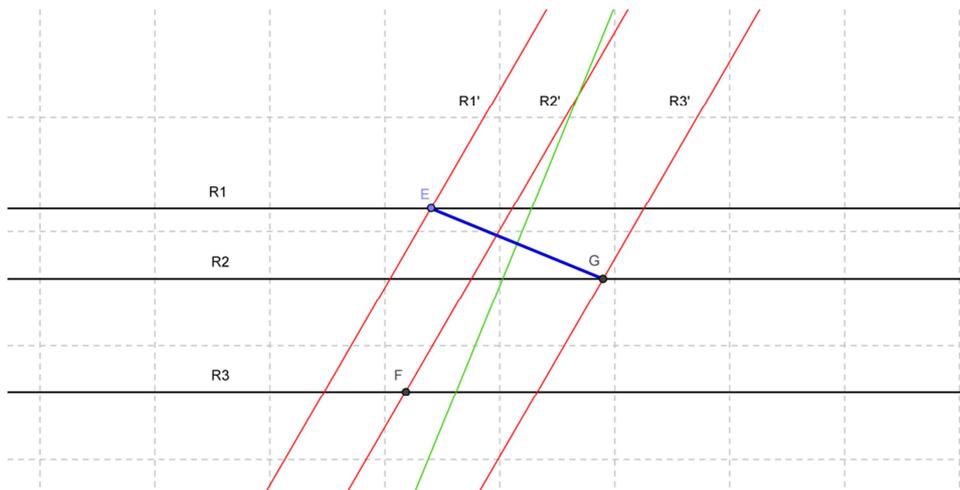
Giro de  $60^\circ$  de las rectas respecto del Punto. **Herramientas de Transformación \_ Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado.** (E\_ R1', R2', R3').

Puntos de intersección de las rectas giradas con las rectas originales sin que sean sus homólogas ni la recta en la que se ha elegido el punto inicial. **Nuevo Punto.** (F\_R2'R3, G\_R3'R2).

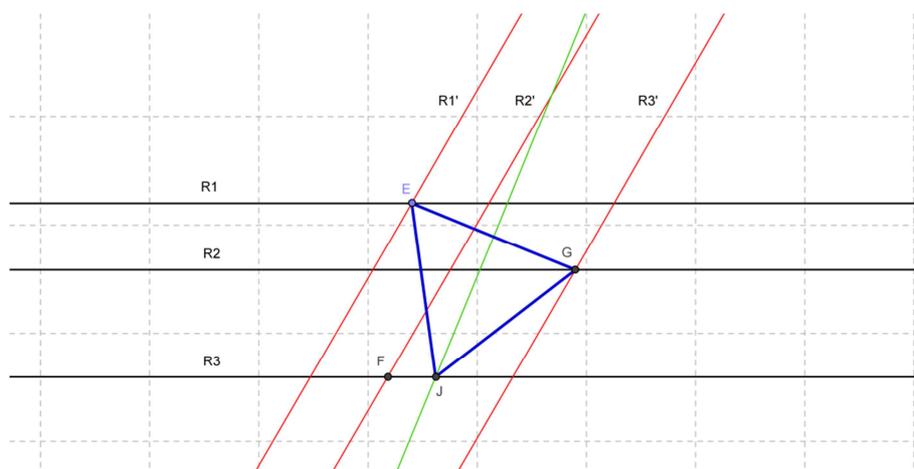
Dos posibles soluciones:

Segmento EF. **Polígono Regular** de tres lados. (H)

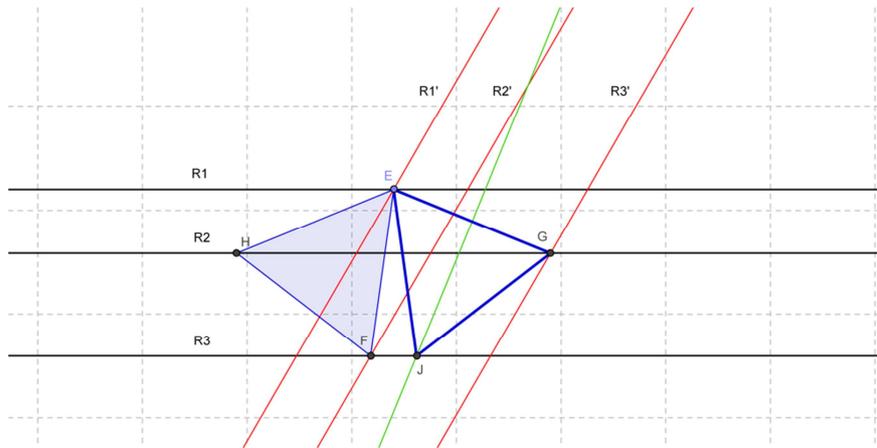
Segmento EG. **Mediatriz** (EG), **Nuevo Punto** (J\_Mediatriz, R3 )



*Fuente: Elaboración Propia*



*Fuente: Elaboración Propia*



Fuente: *Elaboración Propia*

## SESION 5 GIROS II

### G4.- La cara oculta de la Luna.

La Luna es el objeto celeste que más ha fascinado a la especie humana. La antigua Unión Soviética envió por primera vez una nave automática que se posó en la superficie de la Luna el año 1959. El 20 de Julio de 1969 Neil Armstrong acompañado de Edwin Aldrin fueron los primeros hombres que caminaron sobre la superficie de la Luna en el marco de la misión Apollo 11. La última vista de los astronautas americanos a la Luna fue en el año 1972.

Uno de los grandes misterios de la Luna su cara oculta, puesto que siempre presenta la misma cara al observador terrestre.

Si sabemos que:

El periodo de rotación de la Tierra sobre sí misma es de 24 horas.

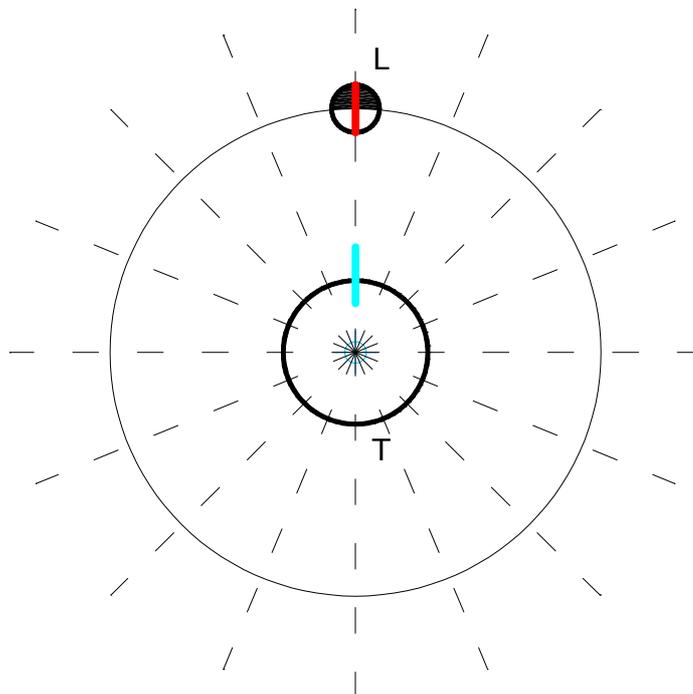
La salida de la Luna cada día se retrasa aproximadamente 50 minutos.

La Luna se traslada alrededor de la Tierra según una trayectoria, aproximadamente, circular y con velocidad constante y menor a la de rotación de la Tierra.

Obtén:

Caracteriza el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, sentido y periodo.

Caracteriza el movimiento de rotación de la Luna sobre sí misma.



*Fuente: Elaboración Propia*

D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
G 4

Esta actividad pretende hacer ver a los alumnos que las isometrías, y en concreto los giros, están en todas partes y no son un artefacto abstracto creado por el hombre si no que en la propia naturaleza es posible observar estas transformaciones. Para ello nada mejor que caracterizar los giros en los que, diariamente y sin ser casi conscientes, se ven involucrados.

En esta actividad se guiará la construcción de conocimiento de los alumnos aportándole las claves necesarias para dar respuesta a los problemas que se les plantean.

Para la primera cuestión es importante recordarles que la salida de la luna se retrasa cada día un determinado periodo de tiempo, por lo tanto, el sentido de giro queda definido y es igual al de rotación de la tierra sobre sí misma, antihorario.

De un día al siguiente la Tierra debe rotar 50 minutos más para encontrarse de nuevo frente a la Luna, por lo tanto, en un día la Luna recorrerá el ángulo recorrido por la Tierra en 50 minutos. Mediante el uso de la proporcionalidad ( regla de tres) y prestando atención a las unidades con las que se trabaja, se obtiene que la Luna recorre cada día aproximadamente  $12^{\circ}5'$  en 24 horas y que tarda aproximadamente 29 días en dar una vuelta completa a la Tierra.

Para que los alumnos sean capaces de caracterizar el periodo de rotación de la Luna es importante subrayar que la Luna siempre presenta la misma cara al observador terrestre.

Teniendo en cuenta esta particularidad será de utilidad aconsejarles dibujar para cada día el giro de la Luna alrededor de la Tierra. Si marcamos un punto de referencia en la circunferencia terrestre (en azul en el dibujo) y una línea que atraviesa a la Luna (en rojo en el dibujo) y tras el giro diario forzamos a que la línea y el punto de referencia estén alineados, a efectos de simular la visión de la misma cara siempre. Finalmente se obtiene que el periodo de traslación de la Luna alrededor de la Tierra es igual al periodo de rotación sobre sí misma.

Para finalizar esta actividad se puede hacer uso de un modelo planetario elemental, de venta en jugueterías, para que el alumno perciba los movimiento relativos de la Luna, la Tierra y el Sol

**G 5 . - E l R o m p e P i z z a**

Jesús, Laura y Patricia han decidido ir a cenar a una pizzería. Las mesas de la pizzería son para seis comensales y cada uno de ellos se sienta a la misma distancia de los otros dos.

Para cenar eligen la pizza *3flavours* compuesta por tres tipos de porciones diferentes, en la que únicamente dos de ellos comparten un ingrediente. Los ingredientes son: Jamón, atún, aceitunas, bacon, salami, champiñones, cebolla y pollo.

Compón la pizza sabiendo que a...

...Patricia no le gusta la cebolla.

...Laura es vegetariana, no come ningún ingrediente que provenga de un animal.

...Jesús sólo como porciones que lleven atún.

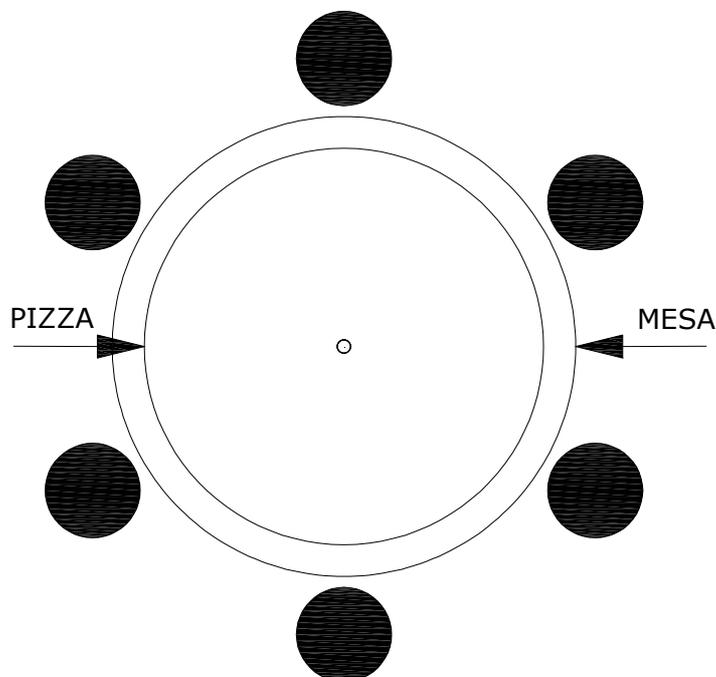
...Laura prefiere sentarse más lejos de la carne que del pescado.

...Jesús es zurdo, por lo que una de las porciones que comerá está a su izquierda.

...Patricia se encuentra entre dos porciones diferentes que no le gustan.

...Jesús come la mitad que Patricia y ésta el doble que Laura.

Según lo anterior, ¿qué lugares de la mesa puede ocupar Patricia? ¿Y Laura? ¿Y Jesús?



*Fuente: elaboración Propia*

D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
G 5

Con esta actividad se les presenta a los alumnos las **figuras con centro de giro**. Estas figuras tienen la particularidad de permanecer invariante respecto, al menos, un giro de ángulo mayor de  $0^\circ$  y menor de  $360^\circ$ .

Lo anterior se puede reescribir diciendo que una figura con **centro de giro** O es invariante mediante n giros de ángulos distintos a  $0^\circ$  y  $360^\circ$ , siendo n un número natural.

Teniendo en consideración la anterior afirmación una figura con centro de giro O se puede girar respecto a O de manera que se obtengan n+1 coincidencias de la misma figura teniendo en cuenta la posición inicial.

Si se denomina n+1 al número de veces que una figura con centro de giro O coincide consigo misma, al realizar la operación  $360 / (n+1)$  se obtiene **el menor ángulo** de giro que hace coincidir a la figura consigo misma al girarla respecto de O.

En esta actividad en realidad lo que se está pidiendo es averiguar el menor ángulo de giro de la pizza.

Los alumnos deberán de dar forma a una pizza buscando que se cumplan determinadas exigencias y que cumpla ser una figura con centro de giro.

En lugar de girar la figura (la pizza) un determinado número de veces, un cierto ángulo, y obtener así una configuración igual a la inicial, lo que se propone es girar lo que hay alrededor de dicha figura, (los comensales), buscando obtener tal configuración.

**G6.- La noria del Corpus**

La noria que visita Granada en la feria del Corpus tiene capacidad para 200 personas y cada cabina puede contener a 5 personas. Las cabinas pueden ser de tres colores, rojo, azul y verde.

Andrés y Arturo deciden visitar el recinto ferial, antes de encontrarse con el resto de sus amigos. Arturo quiere subir a la noria. En cambio, Andrés prefiere no subir y esperar a Arturo en tierra firme.

Arturo sube en una cabina de color rojo y cuando lleva recorrido un cuarto de giro, a Andrés le apetece ir a comprar un helado, en ese momento justo, se oye el reloj de una iglesia cercana que marca las 11 p.m. De camino a la heladería se detiene a hablar con unos conocidos y cuando llega a la heladería observa en un reloj que son las 12 a.m. Cinco minutos después de que Andrés vuelva a la noria el reloj de la iglesia marca las 2 a.m.

La noria tarda 1 h y 40 minutos en dar una vuelta completa. Tras un primer giro completo la noria mantiene su sentido de giro durante un cuarto del mismo para después invertir su marcha durante medio giro y finalmente, volver a su sentido original, durante un cuarto de giro. Durante todo el recorrido la noria mantiene una velocidad constante y no se detiene. Las cabinas se cargan y se vacían, de pasajeros, una a una en la parte inferior de la noria

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores:

¿Quién ha esperado a quién?

¿Cuánto tiempo ha durado la espera?

¿A qué hora exacta se han encontrado?

¿Cómo mínimo, cuanto puede tardar en bajar Arturo de la noria si no se encuentra en la cabina roja que sus ocupantes estén desalojando?¿y cómo máximo?

## D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D

## G 6

Esta actividad pretende ser un resumen de lo aprendido durante las dos sesiones de giros.

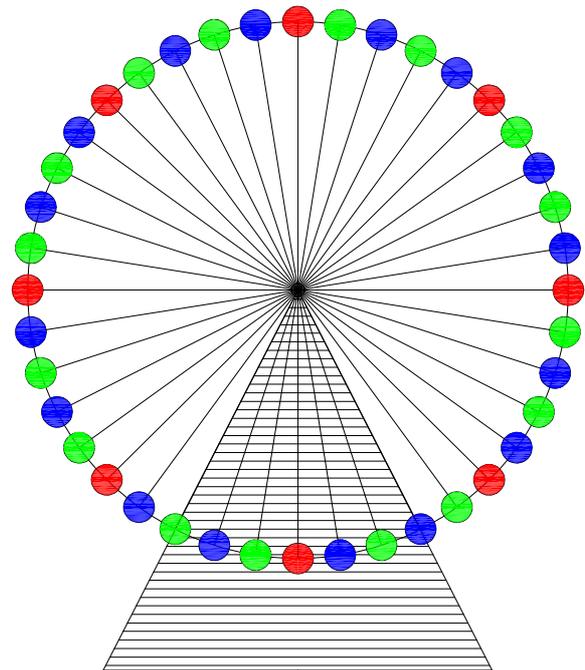
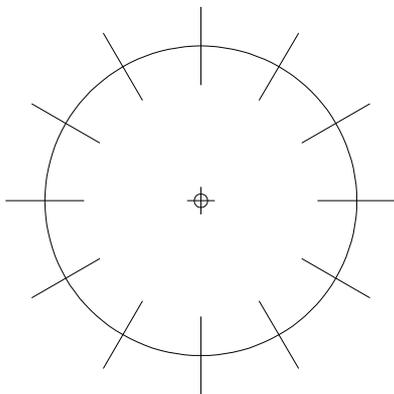
En primer lugar se caracteriza el giro de la noria en función del giro del reloj por lo que se puede hablar de unidades de tiempo, en lugar de grados, al analizar el

giro de la noria. Teniendo en cuenta esto se puede dar respuesta a las tres primeras cuestiones.

En la segunda parte, se trabaja con la noria como figura con centro de giro. La respuesta a la cuarta y última pregunta viene determinada por el cálculo del menor ángulo de giro.

Le sugeriremos a los alumnos que para resolver este ejercicio se ayuden, de forma complementaria con el dibujo dado de la noria, con el dibujo de un reloj y que intenten sincronizar el giro de ambos para dar respuesta a las preguntas que se les presenta.

Para la última pregunta se recomendará en primer lugar identificar si es una figura con centro de giro. Si esto es así, a partir de las propiedades de las mismas será fácil obtener el giro mínimo necesario para hacer coincidir la configuración que se describe, pero con la cabina roja más próxima y más alejada de la cabina roja que se menciona en la cuestión.

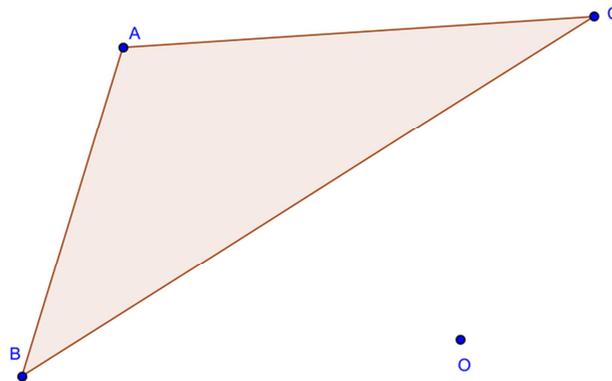


*Fuente: Elaboración Propia*

## SESION 6 SIMETRÍAS I

### S1. Entre el Giro y la Simetría hay un paso.

Gira  $180^\circ$  en sentido horario la figura respecto del punto O.



*Fuente: Elaboración Propia*

Usa para ello el transportador de ángulos y compás.

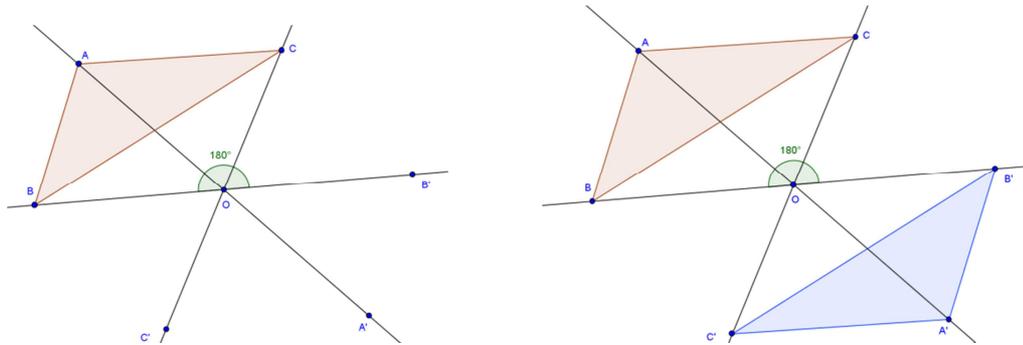
### D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D S 1

A estas alturas de la unidad esta actividad los alumnos no deberían encontrar dificultad alguna en llevar a cabo esta actividad. Su aparente facilidad encierra importantes conceptos.

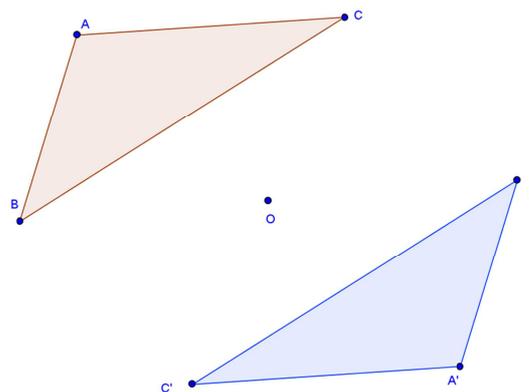
Previsible y relativamente rápido los alumnos obtendrán la transformación solicitada a través de los siguientes pasos:

- Trazar de los segmentos B-O, A-O, C-O.
- Colocar el transportador sobre cada uno de los segmentos anteriores y centro en O.
- Marcar con el transportador el ángulo de  $180^\circ$  en cada uno de los casos.
- Trazar las semirrectas de extremo O y que formen  $180^\circ$  con los tres segmentos iniciales. (Coincidirán con las rectas que pasan por los puntos B-O, A-O, C-O).

- Con el compás y con centro O, trasladar los puntos B, A y C sobre sus respectivas semirrectas trazadas en el paso anterior., hasta obtener A', B', C'.
- Unir los puntos transformados hasta obtener la figura girada.



Fuente: Elaboración Propia



Fuente: Elaboración Propia

La solución obtenida no únicamente es un giro de  $180^\circ$  respecto del punto O en sentido horario, puesto que si se tratase del mismo giro en sentido contrario, antihorario, las soluciones coincidirían.

Además esta transformación o, en este caso, isometría, giro de  $180^\circ$ , se considera también, según diferentes clasificaciones, **Simetría Central** o Simetría respecto de un punto.

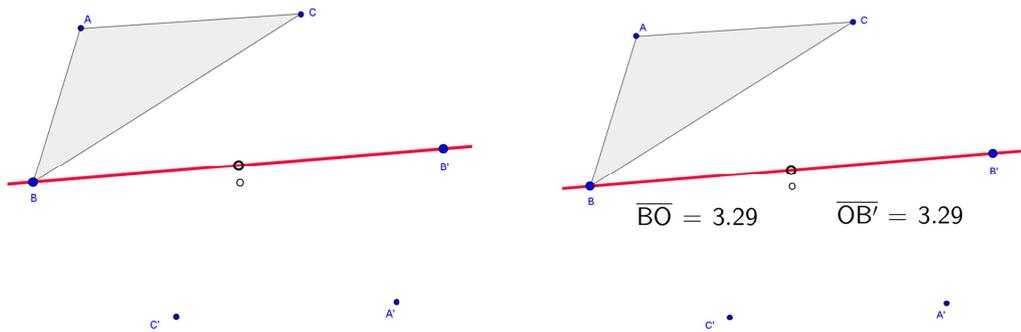
Por lo tanto, el estudio de este giro concreto nos permite obtener las características y o propiedades de esta particular simetría y generalizarlos para las simetría respecto a ejes o rectas, **reflexiones**.

A partir de la solución obtenida se puede decir que, a grandes rasgos, en una simetría central...

...los imágenes o transformados de los puntos iniciales se hallan sobre la recta que une estos con el centro de simetría,

...los puntos y sus imágenes equidistan del centro de simetría y...

...el centro de simetría permanece invariante, no se altera, en la transformación.

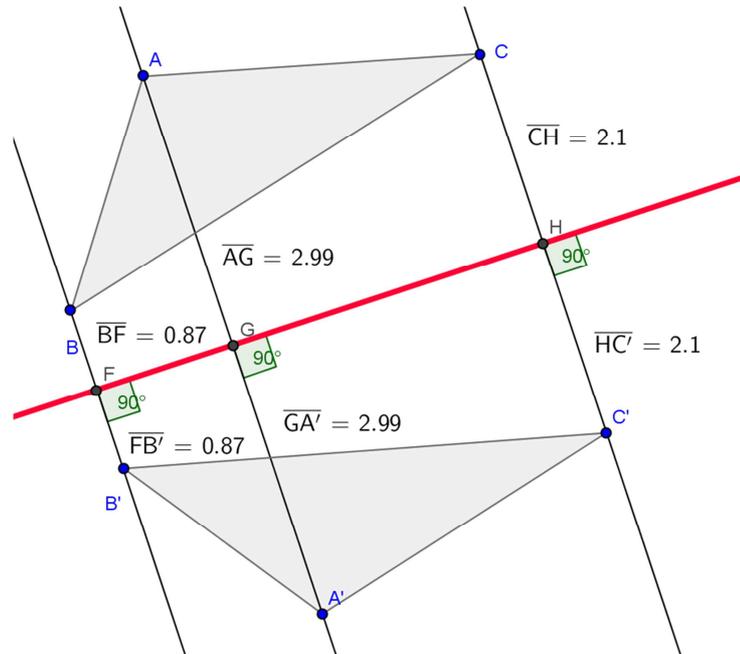


Fuente: Elaboración Propia

Un giro de  $180^\circ$  o, dependiendo de la clasificación, una simetría central, puede considerarse como una reflexión o simetría respecto a un eje donde éste se reduce a un punto. En relación a esto último, los aspectos señalados para la simetría respecto a un punto son válidos para las reflexiones o simetrías respecto a un eje.

Si damos por cierta esta afirmación, cuando decimos...“... *los imágenes o transformados de los puntos iniciales se hallan sobre la recta que une estos con el centro de simetría...*” en el caso de una simetría respecto a un eje hay infinitas rectas que unen un punto con el eje ¿A qué recta nos referimos?

Entre las infinitas posibilidades escogeremos aquella que se mantenga invariante en la transformación. Esta condición únicamente la cumple las rectas perpendiculares al eje, por lo tanto, el problema se resume en hallar las rectas perpendiculares que unen los puntos de la figura original con el eje de simetría.



Fuente: Elaboración Propia

Podemos, así, concluir diciendo que en una simetría respecto a un eje o Reflexión:

...los imágenes o transformados de los puntos iniciales se hallan sobre las rectas perpendiculares al eje que pasen por los mismos.

...los puntos y sus imágenes equidistan del eje de simetría y...

...el eje de simetría y las rectas perpendiculares al mismo son elementos dobles, es decir, permanece invariante (no se alteran) mediante la transformación.

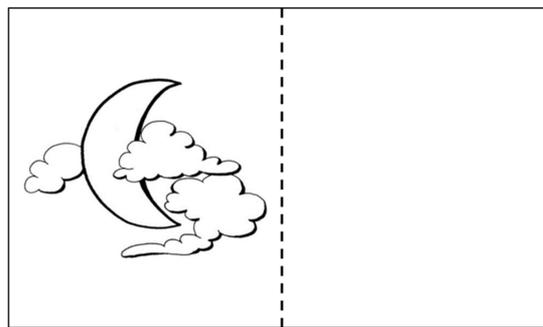
...la figura homóloga o transformada de la inicial no conserva su sentido de giro por lo que la simetría axial es un movimiento inverso.

### S2. Si no lo veo no lo creo.

La clase se divide en grupos de tres alumnos.

A cada componente del grupo se le da una plantilla con un determinado formato. Esta plantilla será igual para cada componente del grupo y distinta para cada grupo.

La plantilla será un folio horizontal, DIN A4, con una recta trazada por su centro que divide lo divide en dos partes iguales (dos DIN A5). En la parte izquierda del mismo habrá un determinado dibujo.



*Fuente: Elaboración Propia; [www.dibujos-imprimir-colorear.blogspot.com.es](http://www.dibujos-imprimir-colorear.blogspot.com.es)*

A cada grupo se le entrega un “mira”, un papel de acetato acompañado de un rotulador adecuado para dicho material y un carboncillo para que cada componente de ellos trabajé con uno de esos tres elementos. El papel de acetato tendrá las dimensiones de cada una de las partes en las que la plantilla queda dividida (formato A5).

Con el “mira” situado sobre la línea que divide la plantilla en dos partes, el correspondiente alumno deberá trazar el dibujo reflejado a través del “mira” en la parte derecha de la plantilla.

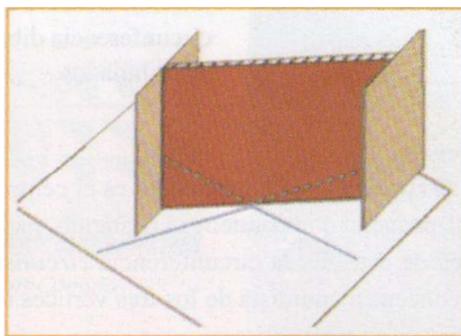
Situando el acetato sobre la parte izquierda de la plantilla, la parte que posee el dibujo, el segundo integrante el grupo deberá repasar con un rotulador adecuado el dibujo de la plantilla sobre el acetato. Una vez finalizado hará el efecto de volver la página de un libro con el papel de acetato, rotando este sobre el lateral que se haya sobre la línea que divide la plantilla, quedando, ahora, el acetato sobre la parte derecha de la plantilla apoyada sobre la cara que se ha dibujado.

El tercer alumno deberá repasar el dibujo con el carboncillo y doblar la plantilla a fin de plasmar sobre el lado derecho de la misma el dibujo inicial.

Llegados a este punto los tres alumnos tendrán en ambas cara de la plantilla, por cualquiera de los tres métodos, el dibujo inicial y su reflejado.

A continuación cada alumno marcará tres puntos cualesquiera del dibujo original, así por cada grupo es previsible obtener nueve puntos diferentes. Una vez marcados, deben aproximar cuál será su imagen reflejada respecto de la línea central de la plantilla. Para determinar las imágenes con precisión, y comprobar si estaban en lo cierto, deben aplicar las propiedades vistas en la actividad anterior para las reflexiones...¿Coinciden los puntos supuestos con los determinado según las propiedades establecidas?

Para que los alumnos se aseguren que han aplicado bien dichas propiedades bastará con doblar la plantilla y observar que los puntos marcados a ambos lados coincidan.



Fuente: [www.platea.pntic.mec.es/anunezca/experiencias/experiencias\\_AN\\_0607/3\\_eso/mosaicos/mosaicos.htm](http://www.platea.pntic.mec.es/anunezca/experiencias/experiencias_AN_0607/3_eso/mosaicos/mosaicos.htm)

## D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D S 2

El enunciado de esta actividad ya desglosa la misma, por lo que sólo decir que ésta pretende que los alumnos demuestren por ellos mismos de las afirmaciones hechas en la actividad anterior, S1, relativas a las propiedades de la reflexión o simetría axial. De ahí su nombre “*Si no lo veo no lo creo*”.

S3. *Mirror Mirror... ¿Cuántas figuras soy?*

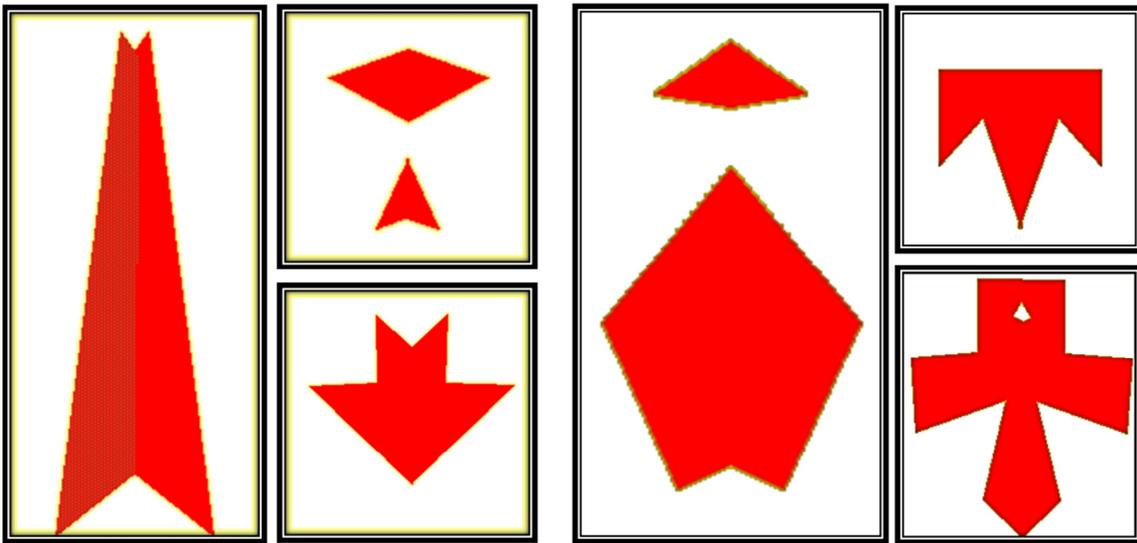
Fuente: MEC (CEDEC)

Coloca el libro de espejos sobre las dos figuras superiores de forma que visualices las figuras asociadas a éstas que se muestran bajo las mismas.

Figura 1



Figura 2



Fuente: [www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo); Elaboración Propia.

D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
S 3

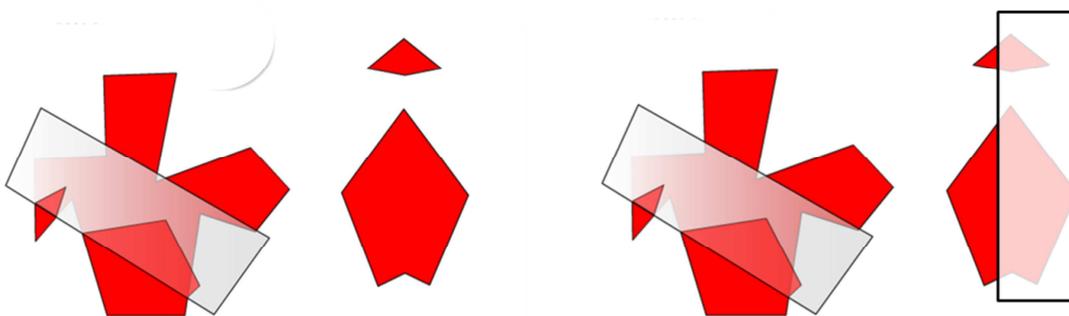
Este ejercicio se basa en la identificación de ejes de simetría.

Los alumnos deberán de identificar los ejes de simetría que contienen las seis figuras que se pretenden encontrar. Estas figuras son lo que se denominan **figuras simétricas**, puesto que poseen un eje, al que se denomina eje de simetría, respecto al cual permanecen invariantes según una simetría axial.

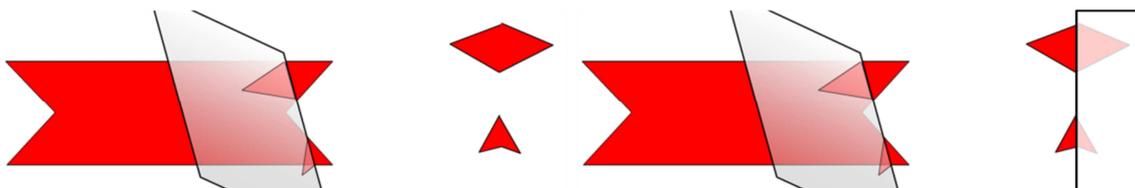
Pueden ayudarse de una octavilla de papel que para ocultar las partes reflejadas de las mismas. Esto les permitirá visualizar los únicos elementos que deben reflejar en el libro de espejos en las figuras iniciales que se les proporcionan.

Puede ser útil apoyarse en el uso de otra octavilla de papel para reconocer o diferenciar en las figuras “bases” solamente los elementos que son precisos reflejar. Con el uso de las dos cuartillas es de suponer que los alumnos conseguirán contemplar únicamente, tanto en las figuras “bases” como en las figuras a obtener, los mismos elementos aún sin reflejar.

Posicionando el libro de espejos adecuadamente en las figuras bases se obtendrán las figuras deseadas o buscadas.



Fuente: [www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo); Elaboración Propia.



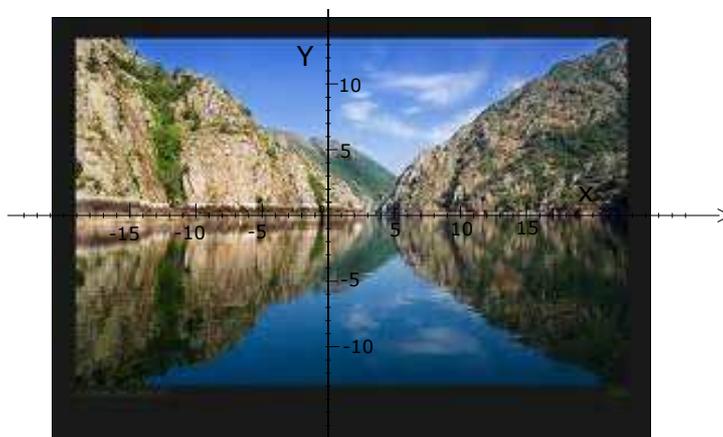
Fuente: [www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo); Elaboración Propia.

## SESION 7 SIMETRÍAS II

### S4. Coordenadas simétricas.

A continuación se presentan una serie de imágenes simétricas en las que se ha incorporado un eje de coordenadas. En base a los mismos, completa las tablas de coordenadas que acompaña a las imágenes.

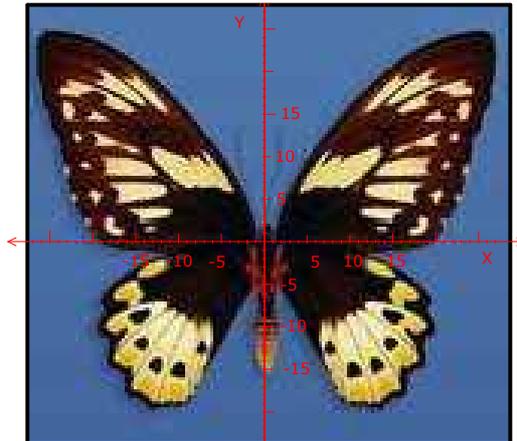
Establece, en cada caso, las relaciones existentes entre las abscisas y las ordenadas según la posición que ocupe el eje de simetría de las imágenes respecto al eje de coordenadas.



Fuente: [www.ojodigital.com](http://www.ojodigital.com); Elaboración Propia

<b>Punto</b>	<b>Transformado</b>
(-5, 5)	
(-5, 10)	
(10,0)	
(-10,0)	
(0,10)	

<b>Simetría respecto...</b>	<b>...</b>
<b>PUNTO</b>	<b>TRANSFORMADO</b>
<b>(x,y)</b>	

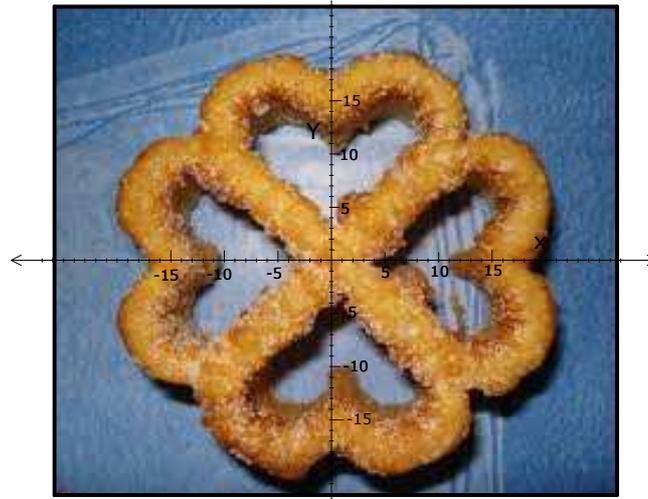


Fuente: [www.scienceinschool.org](http://www.scienceinschool.org); Elaboración Propia

<b>Punto</b>	<b>Transformado</b>
(-5, 5)	
(-5, 10)	
(10,0)	
(-10,0)	
(0,10)	

<b>Simetría respecto...</b>	<b>...</b>
<b>PUNTO</b>	<b>TRANSFORMADO</b>
<b>(x,y)</b>	

## A n e x o I S E S I Ó N 7

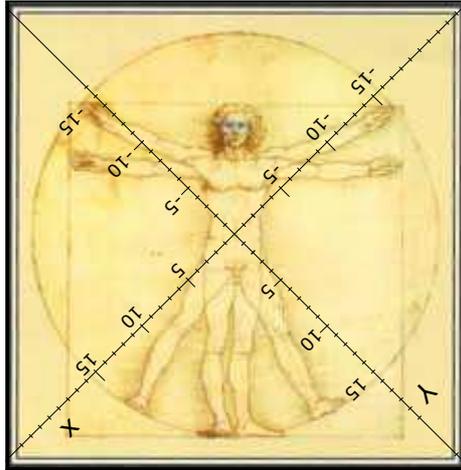


Fuente: [www.iescerrodelosinfantes.es](http://www.iescerrodelosinfantes.es); Elaboración Propia

<b>Punto</b>	<b>Transformado</b>
(-5, 5)	
(-5, 10)	
(10,0)	
(-10,0)	
(0,0)	

<b>Simetría respecto...</b>	<b>...</b>
<b>PUNTO</b>	<b>TRANSFORMADO</b>
<b>(x,y)</b>	

## A n e x o I S E S I Ó N 7



Fuente: [www.xanvilar.com](http://www.xanvilar.com); Elaboración Propia

<b>Punto</b>	<b>Transformado</b>
(-5, 5)	
(-5, 10)	
(10,0)	
(-10,0)	
(0,10)	

<b>Simetría respecto...</b>	<b>...</b>
<b>PUNTO</b>	<b>TRANSFORMADO</b>
<b>(x,y)</b>	

D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
S 4

Esta actividad sirve para que los alumnos descubran la relación existente entre las coordenadas de un punto y las de su simétrico.

Para tal fin se presentan unas imágenes que muestran algún tipo de simetría y sobre las mismas se sitúan unos ejes de coordenadas. En función de la posición de dichos ejes coordinados con los ejes de simetrías que contienen las imágenes los alumnos deberán completar las tablas que acompañan a las cuatro figuras. Cada figura posee dos tablas. En la primera de ellas, el alumno deberá de situar el punto que se le indica, encontrar su simétrico y calcular sus coordenadas. En la segunda, en función de lo obtenido en la primera de las tablas deberá hallar la relación existente entre las coordenadas de un punto y de su simétrico.

Se presentan los siguientes casos en el siguiente orden:

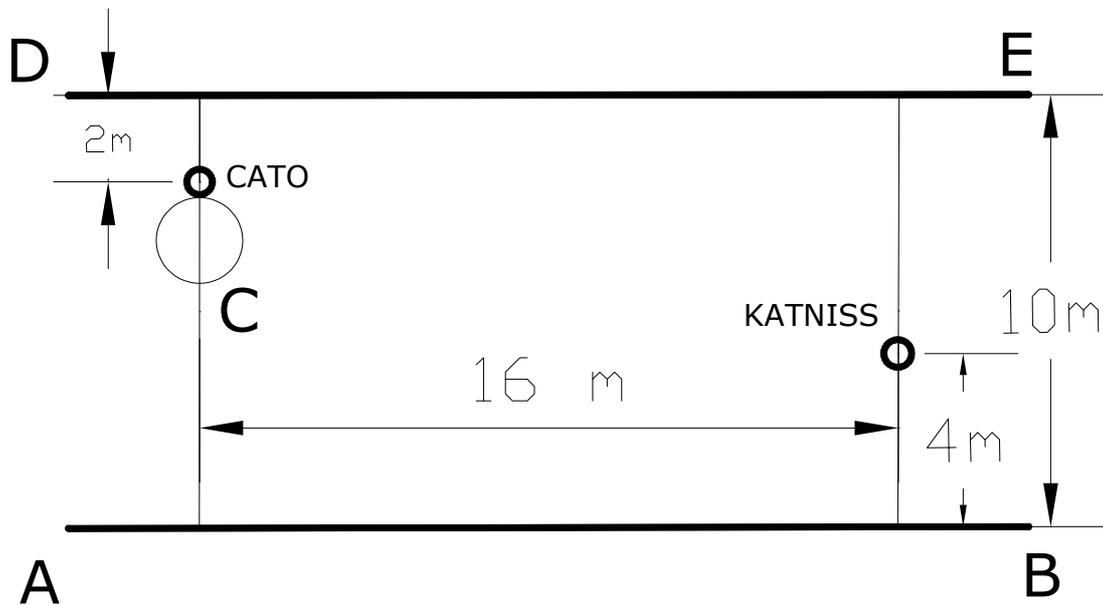
- Simetría respecto del eje de abscisas o eje X:  $P(x, y) \rightarrow P'(x, -y)$
- Simetría respecto del eje de coordenadas o eje Y:  $P(x, y) \rightarrow P'(-x, y)$
- Simetría respecto del centro de coordenadas u origen:  $P(x, y) \rightarrow P'(-x, -y)$
- Simetría respecto de la recta  $y=x$ .  $P(x, y) \rightarrow P'(y, x)$

S5.- Los Juegos del Hambre.

En los septuagésimos cuartos juegos del hambre, sólo quedan con vida dos de los 24 tributos de los 12 distritos de Panem, Katniss Everdeen, tributo del distrito 12, y Cato, tributo del distrito 1.

Ambos contrincantes se encuentran en un pasillo de espejos, Cato consciente de la maestría de Katniss con el arco se oculta tras una columna situada en el pasillo. La habilidad de Katniss le dota de una gran capacidad para calcular distancias y de esta forma ser una de las mejores cazadoras de Panem.

Si Katniss se sitúa frente al pasillo AB, considerando la posición de la columna tras la que se esconde Cato, ¿A qué distancia Katniss cree ver a Cato?



Fuente: [www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/)  
 (Solucionarios: TEXTOS DE ANAYA (HASTA EL CURSO 2007/2008);)  
 Elaboración Propia

D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
S 5

Esta tarea es puramente de aplicación de las propiedades de la simetría axial para resolver un problema real.

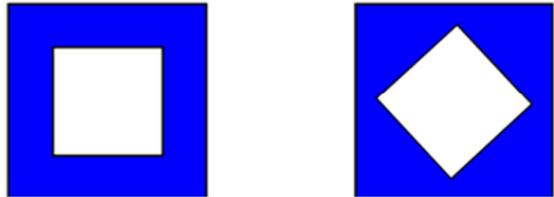
Hay que hacer a los alumnos recaer en la presencia de la columna. Ésta impide que Katniss vea a Cato directamente al mirar al espejo AB, por lo que una trayectoria dirigida desde Katniss al espejo AB y de éste a Cato, no es válida.

Como resultado, la trayectoria a calcular tiene que ir de Katniss al espejo AB, de aquí al espejo DE y de éste hasta Cato. Entre todas las posibles trayectorias, la correcta será aquella que respetando la distancia de ambos tributos a los espejos los enfrente mediante una línea recta.

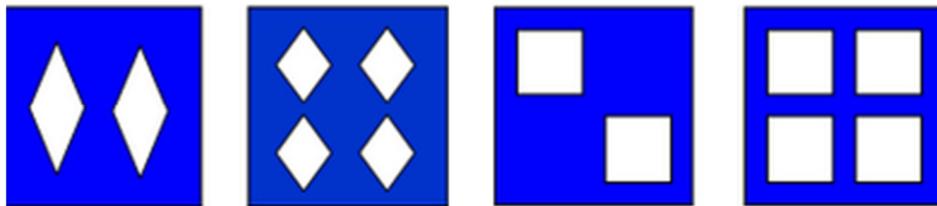
Obtenida la trayectoria recta que une a Katniss y a Cato su longitud se calculará haciendo uso de semejanzas de triángulos

S6.- Recortes en Educación.

Realizando un corte recto con tijeras en el interior de un cuadrado de papel doblado todas las veces que sean necesarias. Obtén las siguientes figuras geométricas:



Fuente: [www.i-matematicas.com/blog/](http://www.i-matematicas.com/blog/)



Fuente: [www.i-matematicas.com/blog/](http://www.i-matematicas.com/blog/)



Fuente: [www.i-matematicas.com/blog/](http://www.i-matematicas.com/blog/)



Fuente: [www.i-matematicas.com/blog/](http://www.i-matematicas.com/blog/)



Fuente: [www.i-matematicas.com/blog/](http://www.i-matematicas.com/blog/)

## A n e x o I S E S I Ó N 7

D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
S 6

Esta actividad busca conjugar la lógica y la visión espacial de los alumnos.

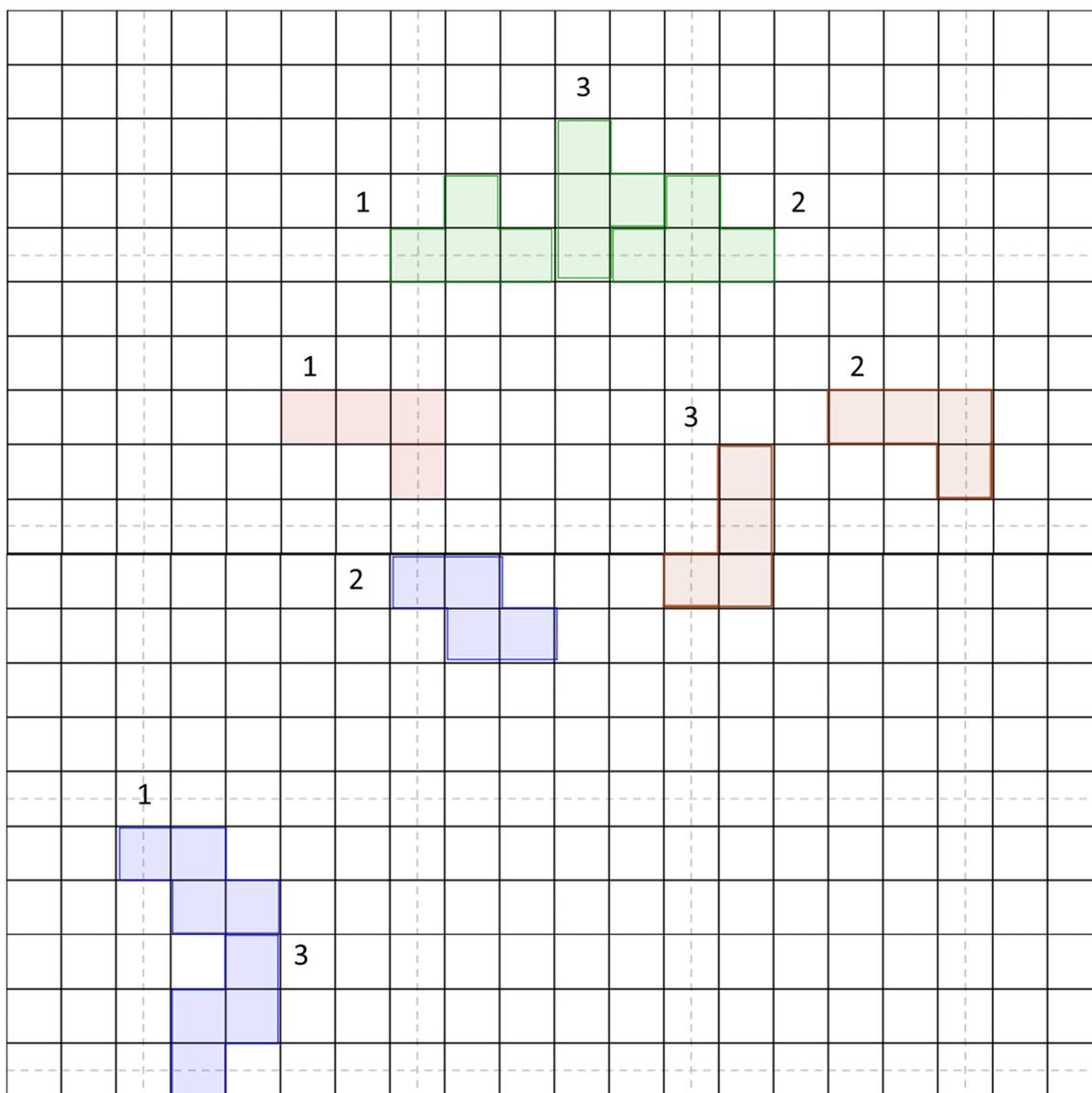
Estos deberán analizar cada figura y hallar sus ejes de simetría y a partir de ahí pensar cuantas veces hay que doblar el papel y por dónde para realizar un oportuno corte directo con las tijeras que proporcione las figuras que se les muestran.

Se les proporcionará hojas cuadradas de papel en blanco y tijeras.

## SESION 8 ISOMETRIAS

### 11.- ¿Qué fue antes... la gallina o la reflexión?.

Consigue en este tablero de TETRIS pasar de las figuras 1 a las figuras 2 y de las figuras 1 a las figuras 3, mediante el mínimo número posible de reflexiones.



D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
I 1

El nombre viene determinado por el resultado obtenido una vez que se estudia la **composición de simetrías axiales**. Por esta razón, para entender dicho nombre hay que estudiar dicha composición de movimientos.

Cuando a una figura se somete a un movimiento o isometría y posteriormente a otra, decimos que la tercera figura se obtiene de la primera a través de la composición de dos movimientos o isometrías. Es relevante resaltar que el orden en el que se aplican los movimientos se ha de tener en cuenta puesto que la composición de movimientos generalmente no es conmutativa.

Someter una figura a dos giros sucesivos de amplitudes  $\alpha$  y  $\beta$ , respecto al mismo centro O y de igual sentido, es igual que someter a la misma a un único giro de amplitud  $\alpha+\beta$ .

Someter una figura a dos traslaciones sucesivas de vectores guía  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , es igual que someter a ésta a una traslación de vector  $\vec{u}+\vec{v}$ .

Al igual que se aplican dos o más giros o dos o más traslaciones a una figura es posible aplicar un giro y sucesivamente o una traslación y una simetría, las combinaciones en la composición son infinitas.

En función de que los movimientos que forman la composición de movimientos, directos (D) o inversos (I), se puede deducir lo siguiente:

Composición: Mov.D+Mov.D = Movimiento Directo.

Composición: Mov.I+Mov.D = Movimiento Inverso.

Composición: Mov.D+Mov.I = Movimiento Inverso.

Composición: Mov.I + Mov.I = Movimiento Directo.

Se acaba de decir que la composición de dos giros es un giro y que la composición de dos traslaciones es una traslación pero... ¿La composición de dos reflexiones es una reflexión?

Para dar respuesta a esta pregunta nada mejor que comprobar qué ocurre en la composición de reflexiones.

Para ello lo primero que hay que diferenciar es si ambas reflexiones son de ejes paralelos o por el contrario se cortan.

- Si los ejes son paralelos:  $e_1 \parallel e_2$ : El resultado es una **Traslación** cuyo vector guía tiene...
  - ...módulo igual al doble de las distancias entre  $e_1$  y  $e_2$ .
  - ...dirección perpendicular a los ejes  $e_1$  y  $e_2$ .
  - ...sentido el que va de  $e_1$  a  $e_2$ .
- Si los ejes se cortan:  $e_1 \times e_2$ : El resultado es una **Giro**.  
Como caso particular dentro de esta opción mencionar que la composición de dos reflexiones con ejes perpendiculares es un giro de  $180^\circ$ .

Una vez conocidos estos conceptos se deben aplicar a la resolución de actividad propuesta.

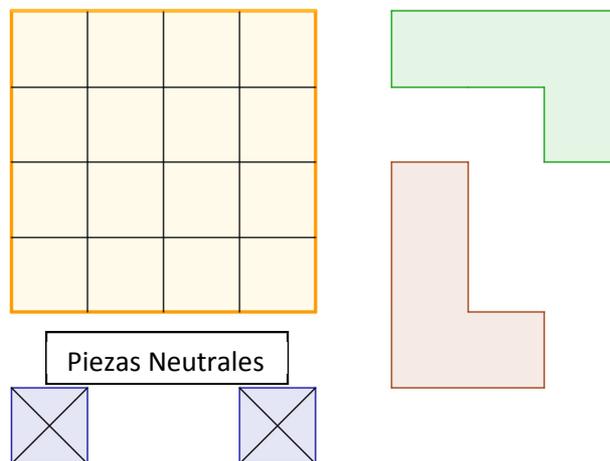
A partir de las figuras etiquetadas por el número 1, y mediante la composición de dos reflexiones hay que obtener las figuras número 2, y mediante otras dos reflexiones las figuras número 3. Es posible que en alguno de los tres casos la obtención de las número 2 y de las número 3 comparta una de las dos reflexiones.

Es importante que el alumno identifique las figuras que son una traslación de su original y las que son un giro de su original.

Ahora sí, es posible explicar el título de la actividad al igual de la incógnita de...qué es antes el huevo o la gallina podríamos decir lo mismo respecto a las reflexiones o los giros y traslaciones. ¿Se podría hablar únicamente de reflexiones y a partir de ahí tratar al resto de isometrías como casos particulares de las mismas?

12.- El Juego de la L.

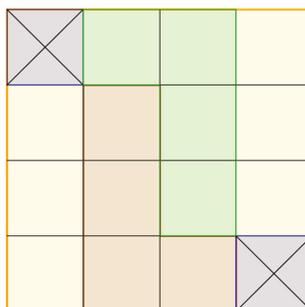
Con los siguientes elementos se propone un juego:



## Elementos Juego de la L

Fuente: [www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/matematicas/taller/juegos/juegos.htm](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/matematicas/taller/juegos/juegos.htm)

Partiendo de la posición inicial, El juego consiste en disponer las piezas de tal forma que tu adversario no pueda mover su L.



## Posición Inicial

Fuente: [www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/matematicas/taller/juegos/juegos.htm](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/matematicas/taller/juegos/juegos.htm)

En cada turno, el movimiento que puede hacer es el siguiente:

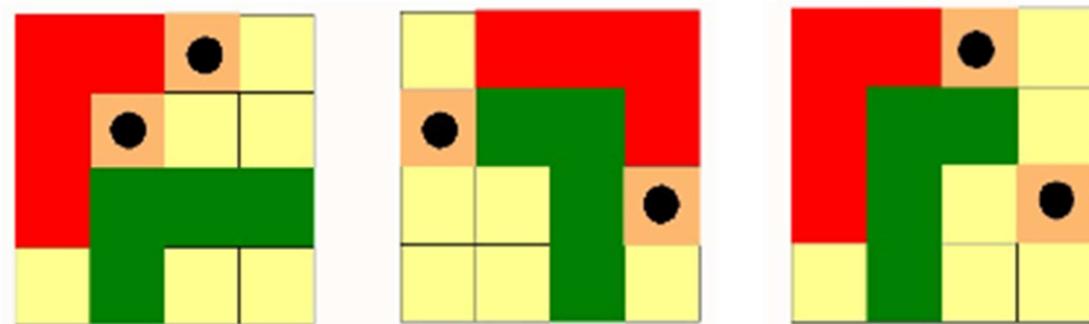
Trasladar, Girar o dar la vuelta a tu L, de forma que esta ocupe al menos un cuadrado diferente a los cuatro de su posición inicial.

Si se desea se puede mover una de las dos piezas neutrales (2 cuadrados azules con aspás).

D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
I 2

A través de esta tarea se pretende poner en práctica las capacidades desarrolladas por los alumnos a lo largo de la unidad didáctica, o de terminar de desarrollarlas para conseguir un determinado fin distinto a la resolución de un problema, ganar un juego.

En este juego los alumnos deben de hacer uso de su visión espacial, para ejecutar las jugadas ganadoras y evitárselas a su adversario.



Ejemplos de jugadas ganadoras.

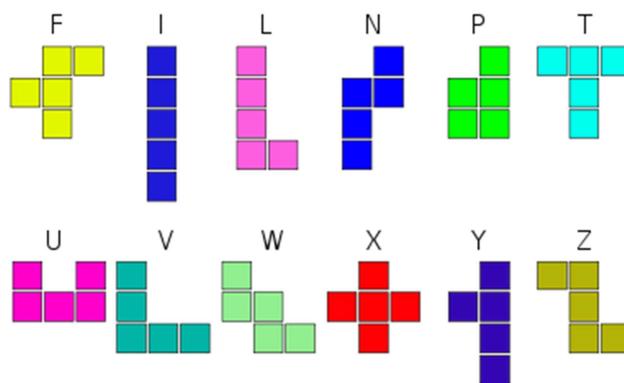
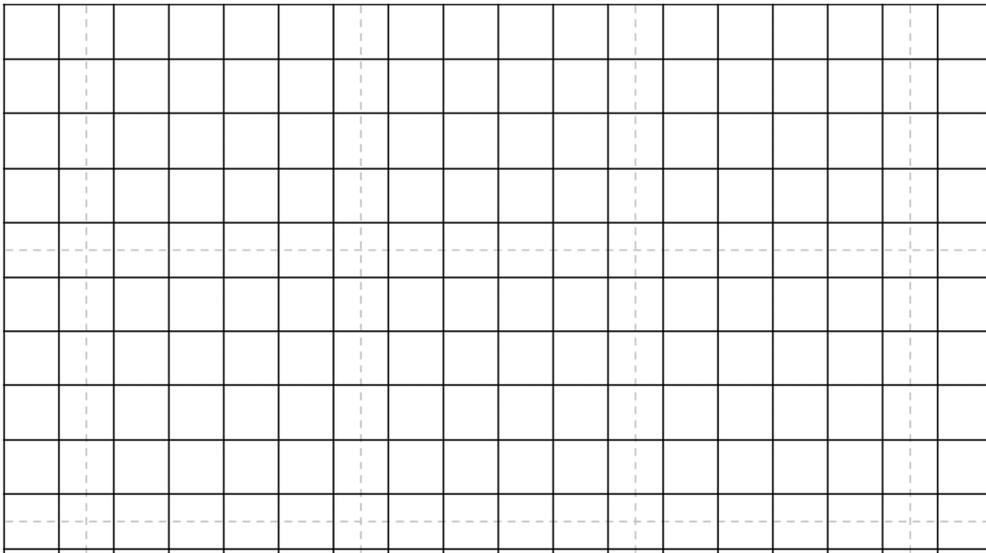
Fuente: [www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/matematicas/taller/juegos/juegos.htm](http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/matematicas/taller/juegos/juegos.htm)

13. - Pentominós.

**PENTOMINÓS:** Son figuras formadas por 5 cuadrados, unidos lado a lado de todas las formas posibles. Hay 12 pentominós diferentes (<http://thales.cica.es/>).

¡OJO!: *Los pentominós obtenidos a partir de otros por simetría axial o por rotación no cuentan como un pentominó diferente.*

Haz uso de la cuadrícula para la obtención de los 12 pentominós.



Fuente: Wikipedia

## A n e x o I S E S I Ó N 8

D E S G L O S E D E L A A C T I V I D A D  
I 1

Al principio puede ser difícil encontrar las 12 piezas, ya que una misma pieza puede parecer ser distinta. Hay que saber diferenciar cuándo se está repitiendo una pieza, si ésta está rotada o reflejada, porque esto puede confundir y hacer caer al alumno en algunos errores.

Una vez obtenidas las 12 piezas se puede proponer la siguiente actividad:

Acomodar las 12 piezas dando lugar a los siguientes rectángulos:

- Base 10 unidades de la cuadrícula y altura 6 unidades.
- Base 20 unidades de la cuadrícula y altura 3 unidades.
- Base 12 unidades de la cuadrícula y altura 5 unidades.
- Base 15 unidades de la cuadrícula y altura 4 unidades.

Una buena técnica para la construcción de los rectángulos es recomendable identificar las figuras simétricas, aquellas que permanecen invariantes respecto al giro de  $180^\circ$  y las que no cumple ninguna de las condiciones anteriores.

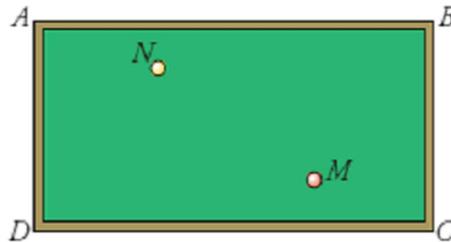
Dejar estas últimas piezas para el final de la construcción de los rectángulos puede ser útil a la hora de conseguir componerlos con éxito.

## SESION 9 EVALUACION FINAL

1.- El siguiente juego desarrollado en una mesa de billar tiene una regla muy sencilla:

Gana el primer jugador que mediante una de las bolas golpee a la otra, golpeando previamente y una sola vez a una de las bandas de la mesa.

Para ganarte los dos puntos de esta pregunta tienes que ganarme la partida. Es tu turno así que expón todos los casos o jugadas ganadoras con las que puedes ganar el juego. Recuerda que no se impone ninguna bola a la que golpear inicialmente ni ninguna banda en concreto.



Fuente: [www.sonmismatematicas.blogspot.com.es](http://www.sonmismatematicas.blogspot.com.es)

2.- En esta unidad hemos visto adornos originados mediante movimientos como son los mosaicos y los frisos. Existe un adorno que añadir a estos dos anteriores. Este adorno es circular y se origina girando un motivo mínimo, su nombre es rosetón.

En examen oral se ha propuesto la siguiente figura:



Se trata del rosetón presente en la fachada occidental de la Iglesia de la Colegiata de Covarrubias.

Covarrubias es una preciosa villa medieval de la comarca de Arlanza, situada al sureste de la provincia de Burgos.

Fuente: <http://www.arteguias.com/catedral/colegiatacovarrubias.htm>

Tras estudiar la misma unidad didáctica que tú, en el examen se le ha preguntado a Teresa que como podría relacionar la geometría de esta fotografía con los contenidos de la unidad.

Teresa ha hablado sobre las figuras simétricas, ha contabilizado correctamente los ejes de simetría que posee la figura y además ha calculado correctamente el ángulo comprendido entre dos ejes de simetría consecutivos. Sin embargo, pese a no cometer ningún error no ha obtenido la puntuación máxima. ¿Cómo complementarías la respuesta de Teresa teniendo en cuenta los movimientos estudiados en esta unidad?

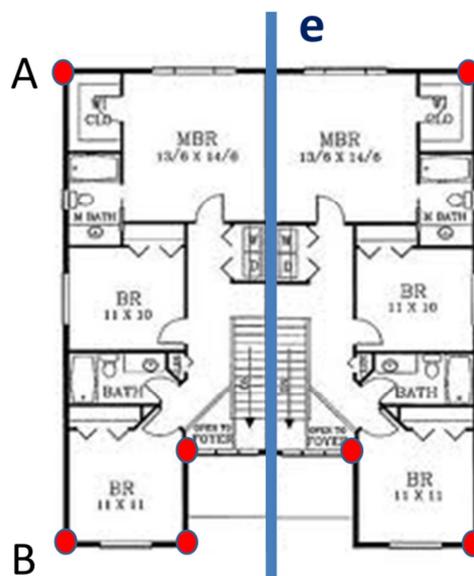
3.- A continuación se presenta el plano en planta de la planta superior de dos dúplex adosados.

Define el movimiento resultante de aplicar al plano la siguiente composición de movimientos:

Reflexión respecto del eje  $e$  que separa las dos viviendas.

Reflexión respecto a la recta en la que se apoya la imagen del segmento  $AB$  a respecto al movimiento anterior.

Si el movimiento es un giro define o determina gráficamente su ángulo, su sentido y su centro. Si el movimiento es una traslación representa el vector guía que la define.



Fuente: <http://www.planosde.net>

4.- La autovía A-44 une la ciudad de Jaén y Granada, se supone que al recorrer la misma desde una ciudad a la otra ambas quedan al mismo de la carretera. Se pretende trasladar el Aeropuerto Federico García Lorca a otra ubicación de forma que la salida en la autovía para dirigirse al mismo equidiste de ambas ciudades. Obtén la ubicación de la salida en un plano.

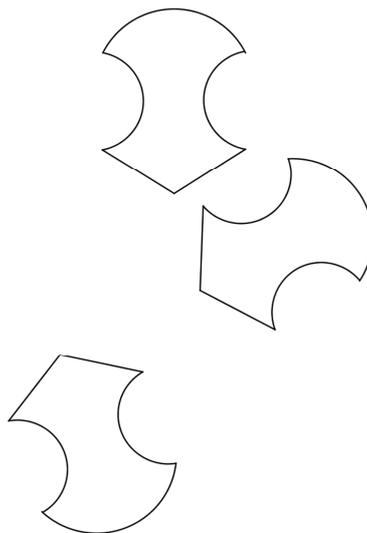
Para modelizar la situación en un plano sigue las siguientes instrucciones:

Usa puntos para determinar la situación de las ciudades

Representa la autovía por una línea recta.

No tenas en cuenta ningún tipo de escala, es decir, elige libremente las distancias entre las dos ciudades y la distancia de cada una de ellas a la autovía que no debe ser la misma.

5.- Cada una de estas figuras se obtiene de las dos restante mediante un giro de igual centro pero de distinta amplitud. Determina el centro de giro y el ángulo que transforma cada figura en las otras dos.



*Fuente: Elaboración*

# Anexo II

## ORGANIZADORES

## UNIDAD DIDÁCTICA

Análisis de Contenido.

- 1.- Estructura Conceptual.
- 2.- Sistemas de Representación.
- 3.- Fenomenología.
- 4.- Mapa Conceptual de la Unidad Didáctica

Análisis Cognitivo.

- 1.- Objetivos.
- 2.- Errores y dificultades.

Análisis de Instrucción.

- 1.- Evaluación.
- 2.- Selección de Tareas.

Contexto Histórico.

**A N A L I S I S D E C O N T E N I D O****1 . E S T R U C T U R A C O N C E P T U A L****1.1.- CAMPO CONCEPTUAL**HECHOS

## TÉRMINOS

Punto, recta, figura, plano, tamaño, forma, distancia, sentido, sentido de giro, origen, extremo, módulo, dirección, ejes de coordenadas, componentes de un vector, vector guía o de traslación, ángulo de giro o amplitud, centro de giro, orden del centro de giro, eje de simetría, figura simétrica, mediatriz, perpendicularidad, paralelismo, composición,..

## NOTACIONES:

., A, B, C,....., \_\_\_\_\_,  $\pi$ , d, l,  $\overline{AB}$ ,  $\cup$ ,  $\cup$ ,  $\mathcal{T}(A)$ , A', A(x, y),  $\overrightarrow{OA}$ , (x-0, y-0), (x, y),  $|\overrightarrow{OA}|$ ,  $\vec{v}$ ,  $T_{\vec{v}}$ ,  $\alpha$ , punto O, P'=G(P), P' = S(P),  $\perp$ , ||, e,  $M_2$ ,  $M_1$ ,  $F \xrightarrow{M_1} F' \xrightarrow{M_2} F''$

## CONVENIOS:

- Los puntos se representan mediante letras mayúsculas y las rectas mediante letras minúsculas.
- Los movimientos directos son los que conservan el sentido de giro. Los inversos son los que cambian el sentido de giro.
- Dos vectores son iguales o equipolentes si tienen igual módulo, dirección y sentido.
- Los ejes de coordenadas o cartesianos son dos rectas perpendiculares entre sí que se cortan en el origen 0 de coordenadas (0,0).
- El eje horizontal se llama eje X o eje de abscisas.

## A n e x o I I

- A la derecha del origen de coordenadas se define la abscisa positiva y a la izquierda la abscisa negativa.
- En la parte superior del origen se define la ordenada positiva y en la parte inferior la ordenada negativa
- El eje vertical se llama eje Y o eje de ordenadas.
- Los ángulos de giros deben ser ángulos orientados.
- El sentido de giro positivo es aquél contrario al giro de las agujas del reloj u antihorario.
- Para contabilizar el orden de giro de una figura con centro de giro O, se contabiliza el número de giros de distinta amplitud respecto a O que mantiene a la figura invariante considerando la posición inicial.
- La simetría respecto a un eje se llama simetría axial.
- La simetría respecto a un punto se denomina simetría central.

## RESULTADOS:

- Las figuras se transforman en otras figuras
- P' es el punto transformado o correspondiente a P mediante la transformación T.  $P' = T(P)$ .
- En un movimiento la distancia entre dos puntos cualquiera permanece invariable.
  - En los ejes de coordenadas, un vector queda determinado dando el recorrido horizontal y el vertical, desde el origen del vector hasta su extremo.
  - Se llama vector de posición de un punto, aquel que tiene por origen el origen de coordenadas O y por extremo dicho punto.
    - Las traslaciones son movimientos directos.
    - En una traslación no hay puntos dobles.
    - Toda recta paralela al vector de traslación o guía es doble.
    - En una traslación se cumple que  $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \vec{v}$
    - La traslación de una figura respecto un determinado vector,  $\vec{v}$ , se corresponde con la traslación de todos los puntos de la misma respecto a dicho vector.
      - Los giros son movimientos directos.
      - Se cumple que  $\angle POP' = \alpha$  s decir, el ángulo formado por un punto P, el centro de giro O y su correspondiente punto girado, P', es ángulo de giro  $\alpha$ .

## A n e x o I I

- El centro o punto de giro  $O$  es el único punto doble o invariante en un giro.
- Las circunferencias de centro  $O$  son figuras dobles en cuanto al giro.
- El resultado de girar todos los puntos de una figura una determinada amplitud es el giro de la misma esa misma amplitud.
  - El cociente  $360^\circ: n$ , siendo  $n$  el orden de giro de una figura con centro de giro  $O$ , es el menor ángulo por el que se hace coincidir a la figura consigo misma al girarla respecto al centro  $O$ .
- La composición de giros de distinto centro no es conmutativa.
- Las simetrías son movimientos inversos.
- Los puntos del eje de simetría son puntos dobles.
- Las rectas perpendiculares al eje de simetría,  $e$ , son invariantes.
- Las figuras invariantes respecto a una simetría axial son figuras simétricas.
  - Dos puntos  $P$  y  $P'$  son simétricos respecto a un eje  $e$ , cuando el eje  $e$  es mediatriz del segmento  $PP'$ .
  - En una simetría central el único punto invariante es el centro de simetría.
  - En una simetría central las rectas que pasan por el centro de simetría son invariantes.
  - La composición de movimientos no es indiferente al orden en el que estos se apliquen.
  - El resultado de componer dos simetrías de ejes paralelos es una traslación.
  - El resultado de componer dos simetrías de ejes que se cortan es un giro.
  - La composición de dos simetrías centrales de distintos centros es una traslación.
    - La composición de dos simetrías centrales con el mismo centro es una transformación involutiva, es decir, se obtiene la figura original.
  - La composición de dos giros de igual centro,  $O$ , pero de diferentes amplitudes,  $\alpha$  y  $\beta$ , es un giro de centro  $O$  y de amplitud  $\alpha+\beta$ .
  - La composición de dos traslaciones de vectores,  $\vec{v}$  y  $\vec{u}$ , es una traslación de vector,  $\vec{v} + \vec{u}$ .

CONCEPTOS

Transformación, movimiento, isometría, deslizamiento, traslación, giro, simetría axial, simetría central, mosaico, friso, rosetón, elementos invariantes, composición de movimientos, suma de vectores, producto de traslaciones, producto de giros.

ESTRUCTURAS**Conceptual:**

Formas posibles de enfocar el tema o de trabajar el contenido, con el propósito de organizar información para compartirla entre iguales o con otros.

- Estudio de los grupos de simetrías. Simetría radial, central, axial
- Estudios a partir de los tres movimientos fundamentales o isometrías: Giros, traslaciones y Reflexiones.
  - *Programa Erlangen*. Los movimientos surgen como los invariantes para la construcción de geometrías. Los movimientos como forma de organizar procesos de la vida cotidiana no sólo como elementos a definir.

**Algebraicas**

- $(V_2, +)$  Grupo Abelianiano de los vectores libres en el plano.
- $T = \{T_{\vec{u}}, / \vec{u} \in V_2\}$  Conjunto de las traslaciones de vectores en el plano.
- $(T, \circ)$  Grupo Conmutativo conjunto T con la operación de composición definida.
- $G_O = \{G_{O,\alpha} / \alpha \in R\}$  Conjunto de todos los giros de centro O.
- $(G_O, \circ)$  Grupo Conmutativo del conjunto de todos los giros con el mismo centro con la operación de composición o producto.
- $S\{F\} = \{f: R^2 \rightarrow R^2 / f(F)=F\}$  Grupo de simetría de la figura plan F que considera todas las isometrías que transforman la figura en sí misma.

## A n e x o I I

- $C_n = \{G_P^{\frac{2\pi k}{n}}, k=1,2,\dots,n\}$  Grupos Cíclicos. Grupos de simetría que contienen los giros que se obtienen por composición reiterada de  $G_P^{\frac{2\pi}{n}}$ .
- $D_n = \{G_P^{\frac{2\pi k}{n}}, S_P, k=1,2,\dots,n\}$  Grupo Diédricos. Grupos de simetría que contiene los giros alrededor del punto fijo P y contienen simetrías axiales cuyos ejes pasan por P.

**1.2.- CAMPO PROCEDIMETAL.**DESTREZAS

- Identificar vectores equipolentes.
- Transformar una figura mediante una isometría: Traslación, giro o simetría.
- Caracterizar los elementos invariantes de una isometría
- Calcular coordenadas de puntos transformados.
- Aplicar un producto de transformaciones.
- Rellenar el plano a través de un único polígono regular, dos o más.
- Obtener el orden de giro de una figura con centro de simetría.
- Manejar herramientas informáticas para aplicar isometrías a una figura.

RAZONAMIENTOS

- Determinar las propiedades de cada isometría.
- Justificar los movimientos que hacen corresponder a una figura con su transformada.
- Argumentar el resultado de aplicar una transformación sobre una determinada figura.
- Reconocer el eje y el centro de simetría de figuras planas.
- Relacionar las coordenadas de una figura transformada con su posición respecto al eje de coordenadas.
- Inferir el movimiento resultante de una composición de movimientos.

ESTRATEGIAS

- Visualización y percepción.
- Orientación espacial
- Estimación de los resultados de una transformación.
- Reconocimiento de regularidades o patrones en composiciones geométricas.
  - Estrategias de trazado mediante instrumentos de dibujo, como regla, compás, escuadra, cartabón, transportador de ángulos...etc. así como de herramientas informáticas.
  - Agrupación de movimientos bajo determinadas propiedades.
  - Experimentar transformaciones en el plano de coordenadas.

**2 . - S I S T E M A S D E R E P R E S E N T A C I Ó N**

La idea que encierran los sistemas de representación en líneas generales puede entenderse, por ejemplo, de la siguiente manera.

Los conceptos matemáticos son elementos abstractos. Las diferentes formas que utilizamos para eludir a los mismos en el proceso de comunicación con los alumnos para compartir los mismos o trasmitírselos es lo que denominamos sistemas de representación.

2.1.- Verbal

- Transmisión de simple **enunciados**.

*“A partir de un triángulo acutángulo construye una reflexión tomando como eje uno de sus lados”*

Al transmitir oralmente dicho enunciado, supuestamente, los alumnos deben ser capaces de crear una imagen mental de cómo es la figura origen y cómo es la reflexión deseada.

2.2.- Simbólica:**Analítica.***Traslación.*

$$x' = x + v_x$$

$$y' = y + v_y$$

*Giro.*

$$x' = O_x + (x - O_x) \cos \alpha - (y - O_y) \sin \alpha$$

$$y' = O_y + (x - O_x) \sin \alpha + (y - O_y) \cos \alpha$$

*Simetría Axial*

$$x' = x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2}$$

$$y' = y - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2}$$

**Simple.**

Traslación  $P' = T_{\vec{v}}(P)$

$$P = (x, y)$$

$$P' = (x', y')$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

Giro  $P' = G(O, \hat{\alpha})(P) / O = (O_x, O_y)$

Simetría  $P' = S_e(P) / e \xrightarrow{ec. implícita} aX + bY + c = 0$

2.3.- Gráfico

**Sistema de referencia cartesiano:** origen de coordenadas, eje de ordenadas, eje de abscisas, traslación según la bisectriz del primer cuadrante, giro de un determinado ángulo respecto al origen de coordenadas, simetría respecto uno de los ejes de coordenadas, simetría respecto al origen de coordenadas....

2.4.- Geométrico

En el Plano.

En el Espacio.

Dirección, sentido, eje, punto de giro, ángulo, centro...etc

2.5.- Numérico

**Matrices de simetría.**

- Giro

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Simetrías

- *Respecto al eje x*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- *Respecto al eje y*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- *Respecto a la recta  $y = x$*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- *Respecto al **origen de coordenadas***

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.6.- Materiales manipulativos

Libro de espejos, espejos, miras, caleidoscopios, papel de acetato, compás, escuadra, cartabón, compás....

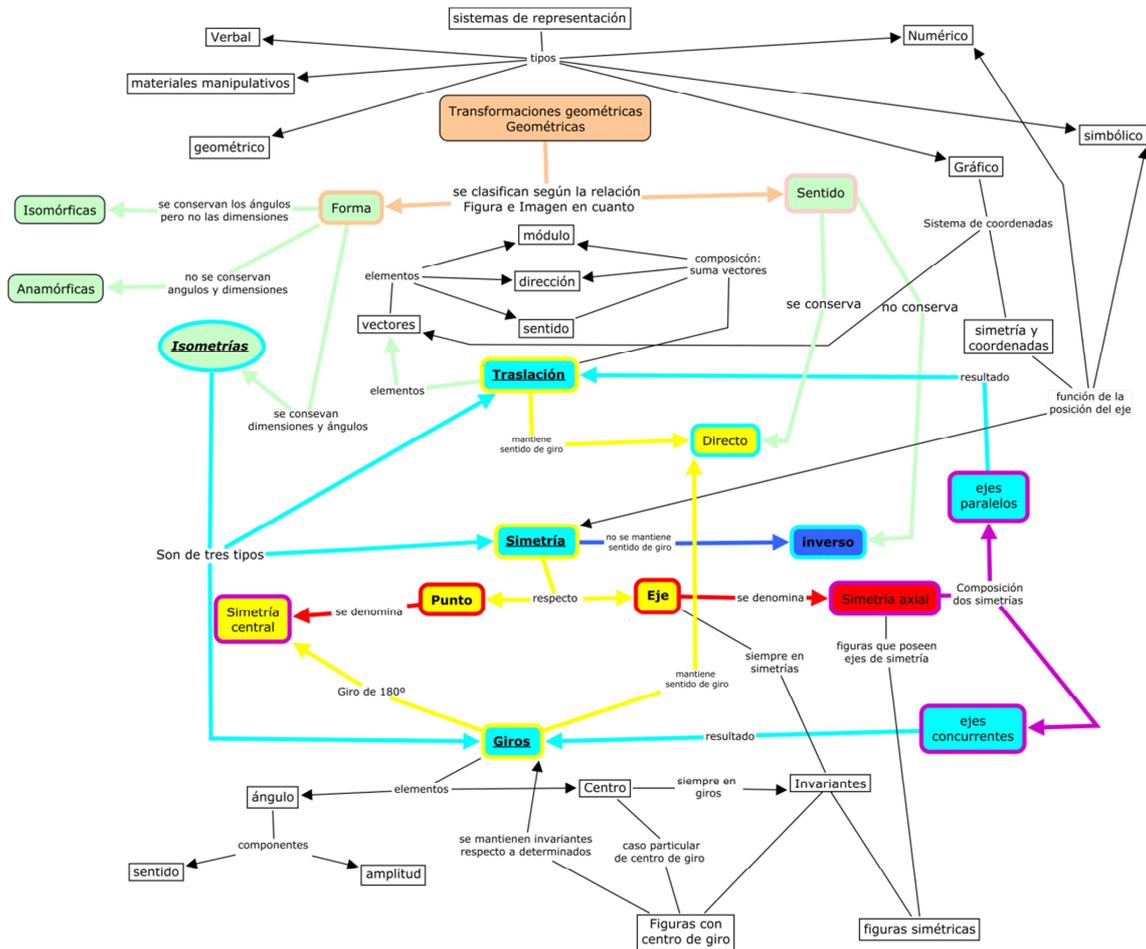
**3 . - F E N O M E N O L O G Í A**

Para llevar a cabo el análisis fenomenológico se ha tomado como referencia las consideraciones hechas por Gómez y Cañada, (2010).

En esta línea se ha optado por la identificación de subestructuras para motivar la búsqueda de fenómenos. Así cada isometría se considera un tipo de subestructuras.

Subestructura	TRASLACIÓN	GIRO		REFLEXIÓN
		Figuras y centro de giro	Figuras con centro de giro	
Situación				
Personal	Carcasa móvil	Monitor del portátil Reproducción CD	Rueda bicicleta Peonza	<b>Terrenos de juegos.</b>
Educativa Lab			<b>Agua Congelada</b>	<b>Construcciones</b>
Pública	Ascensor Escalera mecánica Teleférico Guillotina Arquero y flecha Ventanilla del coche Puertas automáticas	Puerta Gimnasta en barras. Martillo atleta Patinadora Agujas reloj. Manivela puerta Brújula	Patio de los Leones (Alhambra) Mitad naranja o limón. Puerta giratoria. Molino de viento Ventilador Noria <b>Condensadores</b>	
Científica		Luna-Tierra	<b>Moléculas Radiación Estrella de mar</b>	

# 4.- MAPA CONCEPTUAL U.D.



# ANÁLISIS COGNITIVO

## FOCO: EL GRUPO DE LAS ISOMETRÍAS EN EL PLANO

### 1. - OBJETIVOS

#### 1.1. OBJETIVOS.

- ✓ O1.- Conocer los elementos necesarios para hacer un giro, una reflexión y una traslación.
- ✓ O2.- Determinar qué elementos y propiedades permanecen invariables al aplicar una isometría a una figura.
- ✓ O3.- Transformar mediante isometrías (giro, simetrías y traslaciones) cualquier figura geométrica.
- ✓ O4.- Entender los efectos de las isometrías a través de diferentes representaciones visuales y de coordenadas.
- ✓ O5.- Componer sucesivas isometrías (giros, reflexiones, traslaciones) y deducir, en cada caso, su resultado.
- ✓ O6.- Identificar figuras geométricas homólogas y definir el movimiento o isometrías que las relaciona.
- ✓ O7.- Construir figuras planas con recursos informáticos, analizar sus propiedades sus propiedades y visualizar sus elementos invariantes al aplicarles alguna isometría.
- ✓ O8.- Crear teselados usando transformaciones isométricas a partir de una figura inicial.
- ✓ O9.- Reconocer los tres tipos de isometrías; giros, simetrías y traslaciones, en casos geométricos, en la naturaleza y en el uso de las mismas por parte del hombre en desarrollos artísticos y científicos.
- ✓ O10.- Expresar y representar aspectos espaciales de la realidad relativos a formas, tamaños, posición, movimiento, distancias, etc., mediante el lenguaje geométrico, eligiendo y utilizando los modelos adecuados.

**1.2. RELACIÓN OBJETIVOS Y COMPETENCIAS PISA****Competencias PISA**

1. Pensar y Razonar (PR).
2. Argumentar y Justificar (AJ).
3. Comunicar (C).
4. Modelizar (M).
5. Resolución Problemas (RP).
6. Representar (R).
7. Utilización Lenguaje Simbólico (LS).
8. Herramientas Tecnológicas (HT).

	<b>PR</b>	<b>AJ</b>	<b>C</b>	<b>M</b>	<b>RP</b>	<b>R</b>	<b>LS</b>	<b>HT</b>
O1.- Conocer los elementos necesarios para hacer un giro, una reflexión y una traslación.	X	X					X	
O2.- Determinar qué elementos y propiedades permanecen invariables al aplicar una isometría a una figura.	X					X		
O3.- Transformar mediante isometrías (giro, simetrías y traslaciones) cualquier figura geométrica.						X	X	
O4.- Entender los efectos de las isometrías a través de diferentes representaciones visuales y de coordenadas.	X	X				X	X	
O5.- Componer sucesivas isometrías (giros, reflexiones, traslaciones) y deduciendo, previamente en cada caso, su resultado.	X	X				X	X	

	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
O6.- Identificar figuras geométricas homólogas y definir el movimiento o isometrías que las relaciona.	X	X						
O7.- Construir figuras planas con recursos informáticos, analizar sus propiedades y visualizar sus elementos invariantes al aplicarles alguna isometría.	X							X
O8.- Crear teselados usando transformaciones isométricas a partir de una figura inicial.	X					X		
O9.- Reconocer los tres tipos de isometrías; giros, simetrías y traslaciones, en casos geométricos, en la naturaleza y en el uso de las mismas por parte del hombre en desarrollos artísticos y científicos.		X		X	X			
O10.- Expresar y representar aspectos espaciales de la realidad relativos a formas, tamaños, posición, movimiento, distancias, etc., mediante el lenguaje geométrico, eligiendo y utilizando los modelos adecuados.	X		X	X	X	X		

## 2.- ERRORES Y DIFICULTADES

### 2.1.- ERRORES.-

- × E1.- Aplicación incorrecta de las propiedades que relacionan una figura con su imagen reflejada. (Equidistancia y Perpendicularidad).
- × E2.- Considerar concepciones erróneas de tipo visual en reflexiones. .
- × E3.- Uso incorrecto de la nomenclatura en la imagen reflejada de una figura simétrica respecto a su eje de simetría.
- × E4.- Sumar de forma errónea los vectores guía de dos traslaciones sucesivas, como puede ser sumar los módulos de ambos vectores.
- × E5.- Girar una figura respecto a un punto únicamente girando uno de sus puntos, obteniendo finalmente una traslación.
- × E6.- Asociar la propiedad conmutativa a la composición de movimientos.

### 2.2.- DIFICULTADES.-

- × D1.- Identificar ejes de simetrías oblicuos en figuras simétricas.
- × D2.- Encontrar el motivo mínimo de un mosaico, friso u rosetón.
- × D3.- Estimar la amplitud de un ángulo.
- × D4.- Comparar ángulos en distintas posiciones.
- × D5.- Comprender el concepto de vector libre asociado a una traslación.
- × D6.- Trasladar figuras poligonales cuando el vector de traslación asociado al movimiento es paralelo a algún lado.

**2.3.- RELACIÓN ERRORES Y DIFICULTADES Y OBJETIVOS**

	<b>01</b>	<b>02</b>	<b>03</b>	<b>04</b>	<b>05</b>	<b>06</b>	<b>07</b>	<b>08</b>	<b>09</b>	<b>010</b>
E1.- Aplicación incorrecta de las propiedades que relacionan una figura con su imagen reflejada. (Equidistancia y Perpendicularidad).		X	X	X			X			
E2.- Considerar concepciones erróneas de tipo visual en reflexiones.				X		X			X	
E3.- Uso incorrecto de la nomenclatura en la imagen reflejada de una figura simétrica respecto a su eje de simetría.			X	X		X				
E4.- sumar de forma errónea los vectores guía de dos traslaciones sucesivas, como puede ser sumar los módulos de ambos vectores.				X	X					
E5.- Girar una figura respecto a un punto únicamente girando uno de sus puntos, obteniendo finalmente una traslación.	X		X	X	X	X		X		
E6.- Asociar la propiedad conmutativa a la composición de movimientos.					X				X	X

## A n e x o I I

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	010
D1.- Identificar ejes de simetrías oblicuos en figuras simétricas.		X				X				
D2.- Encontrar el motivo mínimo de un mosaico, friso u rosetón.					X	X		X	X	
D3.- Estimar la amplitud de un ángulo.	X								X	
D4.- Comparar ángulos en distintas posiciones.		X		X		X			X	
D5.- Comprender el concepto de vector libre asociado a una traslación.	X		X	X	X					
D6.- Trasladar figuras poligonales cuando el vector de traslación asociado al movimiento es paralelo a algún lado.		X	X			X				

**A N A L I S I S D E I N S T R U C C I O N****1 . - E V A L U A C I Ó N****1.1.- CRITERIOS DE EVALUACIÓN.**

- CE.1. Entiende la idea de transformación geométrica y, como caso particular, la idea de movimiento.
- CE.2. Comprende los conceptos de traslación, giro y simetría axial.
- CE.3. Identifica los elementos que definen las traslaciones, los giros y las simetrías axiales.
- CE.4. Construye la transformada de una figura mediante una determinada isometría o movimiento.
- CE.5. Identifica el movimiento o isometría que lleva de una figura a otra.
- CE.6. Calcular las coordenadas y el módulo de un vector, dadas las coordenadas de sus extremos.
- CE.7. Reconoce figuras dobles en una cierta transformación o identifica el tipo de transformación que da lugar a una cierta figura doble. Describe verbal y gráficamente las propiedades de las distintas isometrías.
- CE.8. Construye la transformada de una figura mediante la composición de dos movimientos.
- CE.9. Deduce los resultados de una composición de movimientos a través de la relación de los mismos
- CE.10. Utiliza la terminología relativa a las transformaciones geométricas y en concreto de las isometrías para elaborar y transmitir información sobre el medio.
- CE.11. Identifica traslaciones, giros y simetrías en algunos mosaicos y cenefas sencillos extraídos del mundo real.
- CE.12. Modeliza situaciones reales expresando las mismas en términos matemáticos relativos a las isometrías para dar solución a problemas de la vida cotidiana.

**1.2.- CONTRIBUCIÓN A LA ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS BÁSICAS.****Competencia Lingüística:**

El alumno...

...comprende los textos que aparecen en enunciados contextualizados y es capaz de sacar la información relevante de los mismos.

...describe con un correcto vocabulario geométrico cualquier objeto.

**Competencia Matemática:**

El alumno...

...usa correctamente elementos y herramientas matemáticas.

...Domina las traslaciones, los giros, las simetrías y la composición de movimientos como medio para resolver problemas geométricos.

**Interacción con el mundo Físico**

El alumno...

...analiza la morfología del mundo que le rodea (medio natural, cultural, científico...etc) y reconoce en ella elementos de las isometrías.

**Social y ciudadana**

El alumno...

...conoce y comprende la realidad histórica y social del mundo y su carácter evolutivo a través de las referencias sobre la evolución histórica de la geometría y de los movimientos en el plano, que acompañan a la unidad.

**Cultural y Artística**

El alumno...

...Valora las aportaciones de culturas pasadas al desarrollo de la geometría.

...Crea y describe elementos artísticos con ayuda de los conocimientos geométricos adquiridos en esta unidad.

**Tratamiento de la Información y Competencia Digital**

El alumno...

...resuelve las actividades de la sesión 4 a través de herramientas y software informáticos.

**Aprender a aprender**

El alumno...

... es capaz de analizar su dominio de los conceptos geométricos referentes a las isometrías adquiridas en esta unidad mediante las dos últimas actividades de la sesión 8, referidas a los juegos de la L y el pentominó.

**Autonomía e iniciativa personal**

El alumno...

...Sabe qué movimientos hay que aplicar a una figura para conseguir el resultado pedido.

...Elige, entre las distintas características de los cuerpos espaciales, la más idónea para resolver un problema.

**2. - SELECCIÓN DE TAREAS**

<b>Sesión 3.</b>		<b>LA TRASLACIÓN EN MOSAICOS</b>
<b>Tarea T.1.</b>		
Elementos de la Tarea	Función y meta	Tarea de Motivación y relación con la realidad. Se introducen los conceptos relacionados con la Traslación, mediante la construcción de un mosaico presente en la Alhambra
	Recursos / Operaciones	Imágenes, cartulina azul y blanca, tijeras, regla./ Exposición
	Contenido	Traslación Espacio y Forma
	Contexto	Contexto Público
	Complejidad	Reflexión: El estudiante tiene que usar su creatividad para reconocer las matemáticas. Conexión: El docente guía al alumno a encontrar la respuesta. Contexto de orden 1
Condiciones	Presentación	Instrucciones Escritas y Verbales. Lenguaje Cotidiano. Presentación Visual
	Comunicación	El docente explica los conceptos relacionados con la traslación apoyándose en la tarea, que le sirve de guía en la explicación de los mismos. La tarea se lleva a cabo a medida que se explican los conceptos
	Agrupamiento de alumnos	Grupo Grande. Toda la clase
Observaciones	Además de desarrollar los contenidos relacionados con el concepto de traslación, tales como características del movimiento, vector, elementos de un vector, vectores equipolentes..etc se introduce el concepto de mosaicos Ejercicio: tarea cerrada y accesible.	
Criterios de Evaluación		CE.2, CE.3, CE.4, CE.5, CE.11,
Objetivos		O3, O4, O6, O8, O9,
Competencias Pisa		PR, AJ; C, M
Errores y Dificultades		D5, D6

<b>Sesión 3.</b>		<b>EL COMPRADOR INGLÉS</b>
<b>Tarea T.2.</b>		
Elementos de la Tarea	Función y meta	Tarea de descontextualización y de aplicación. Se aplican los conceptos aprendidos sobre traslaciones modelizado una actividad diaria como es moverse por un centro comercial
	Recursos / Operaciones	Enunciado, croquis, indicaciones del profesor ./ identificar traslaciones
	Contenido	Vectores, composición de traslaciones Espacio y Forma y Cantidad
	Contexto	Contexto Público
	Complejidad	Reflexión: El estudiante tiene que desarrollar modelos matemáticos y juzgar el más idóneo. Conexión: el alumnos debe relacionar distintos dominios matemáticos Contexto de orden 2
Condiciones	Presentación	Instrucciones Escritas, Verbales, Gráficas Lenguaje Cotidiano. Presentación Visual
	Comunicación	El docente propone esta tarea en la segunda mitad de la clase y da una serie de indicaciones para comenzar la tarea e clase y terminarla en casa.
	Agrupamiento de alumnos	Individual
Observaciones	Problema: tarea cerrada y difícil.	
Criterios de Evaluación		CE.3, CE.6, CE.8, CE.9, CE.10,
Objetivos		O4, O5, O9, O10
Competencias Pisa		PR, AJ; C, M,LS,R,RP
Errores y Dificultades		E4, E6,D5

<b>Sesión 4.</b>		<b>UN FRISO MEDIANTE GIROS</b>
<b>Tarea G.1.</b>		
Elementos de la Tarea	Función y meta	Tarea de motivación y de relación con la realidad. Se introducen los contenidos relacionados con el concepto de giro como movimiento o isometría, mientras se construye un friso
	Recursos / Operaciones	Portátiles, software informáticos (Geogebra) / usar Geogebra para el estudio y resolución de problemas geométricos
	Contenido	Giro, Centro de Giro, Amplitud de Giro, Sentido de Giro, Invariantes de un Giro Espacio y Forma
	Contexto	Contexto Educativo
	Complejidad	Reproducción: El estudiante debe poner en práctica el conocimiento aprendido. Conexión: Incluye los procesos de aplicar, analizar y valorar Contexto de orden 0
Condiciones	Presentación	Instrucciones Verbales y Gráficas Lenguaje Cotidiano. Presentación Visual
	Comunicación	El docente usa la tarea como marco de fondo para construir aprendizaje e introducir nuevos conceptos..
	Agrupamiento de alumnos	Individual y Gran Grupo (Toda la clase)
Observaciones	Además de los contenidos relacionados con el movimiento Giro en esta tarea se introduce el concepto de Friso Ejercicio: tarea accesible y cerrada.	
Criterios de Evaluación		CE.2, CE.3, CE.4, CE.5, CE.8, CE.9, CE.11
Objetivos		O1, O2, O3, O4, O5,O6, O7, O8
Competencias Pisa		PR, RP, R, HT, C, AJ
Errores y Dificultades		E5, D2,D3,D4

<b>Sesión 4.</b>		<b>OBTENCIÓN DEL CENTRO DE GIRO</b>
<b>Tarea G.2.</b>		
Elementos de la Tarea	Función y meta	Tarea de elaboración y construcción de significados. Se subraya la importancia de los elementos necesario para determinar un Giro determinándolos a partir de las propiedades del Giro.
	Recursos / Operaciones	Portátiles, software informáticos (Geogebra) / usar Geogebra para el estudio y resolución de problemas geométricos
	Contenido	Elemento y propiedades de los Giros Espacio y Forma
	Contexto	Contexto Educativo
	Complejidad	Reproducción: El estudiante debe poner en práctica el conocimiento aprendido. Conexión: el alumno debe establecer relaciones entre conceptos e integrar informaciones. Contexto de orden 0
Condiciones	Presentación	Instrucciones Verbales y Gráficas Lenguaje Cotidiano. Presentación Visual
	Comunicación	La tarea se propone y, dejando a los alumnos unos momentos para su análisis y resolución, a el profesor desarrolla la solución ante el grupo .
	Agrupamiento de alumnos	Individual
Observaciones	Esta tarea en la línea de la anterior permite introducir a los alumnos en el manejo de herramientas informáticas Problema: tarea difícil y cerrada.	
Criterios de Evaluación		CE.2, CE.5
Objetivos		O1, O2, O4,O6, O7
Competencias Pisa		AJ, R, LS, HT
Errores y Dificultades		E5, D3,D4

<b>Sesión 4.</b>		<b>PUENTES EQUIDISTANTES</b>
<b>Tarea G.3.</b>		
Elementos de la Tarea	Función y meta	Tarea de descontextualización y de aplicación. Aplicar los conocimientos relativos a los Giros y las herramientas informática para modelizar y resolver problemas reales.
	Recursos / Operaciones	Portátiles, software informáticos (Geogebra) / usar Geogebra para el estudio y resolución de problemas geométricos
	Contenido	Elemento y propiedades de los Giros Espacio y Forma
	Contexto	Contexto Público
	Complejidad	Reflexión: El estudiante debe reconocer las matemáticas involucradas en el problema. Conexión: el alumno debe establecer relaciones entre conceptos e integrar informaciones. Contexto de orden 0
Condiciones	Presentación	Instrucciones Verbales y Gráficas Lenguaje Cotidiano. Presentación Visual
	Comunicación	La dificultad de la tarea frente a las anteriores hace que esta se proponga al final de la sesión y que el profesor apoye la resolución de la misma.
	Agrupamiento de alumnos	Parejas
Observaciones	La tarea sigue la línea de las dos anteriores y permite a los alumnos manejar herramientas informáticas, modelizar situaciones y resolver problemas relativas a las mismas Exploración : abierta y accesible.	
Criterios de Evaluación		CE.4, CE.10, CE.12
Objetivos		O3, O4, O7, O9, O10
Competencias Pisa		PR, AJ, M, RP, R, HT.
Errores y Dificultades		E5, D4

<b>Sesión 5.</b>		<b>LA CARA OCULTA DE LA LUNA</b>
<b>Tarea G.4.</b>		
E Elementos de la Tarea	Función y meta	Tarea exploratoria fomentadoras de la interrogación y del cuestionamiento. Aplicar los conocimientos relativos a los Giros para un problema tan cercano como es el movimiento de la Luna y la Tierra.
	Recursos / Operaciones	Compás, transportador de ángulos, calculadora, Croquis / Sincronizar el movimiento de rotación de la Tierra, el de rotación de la Luna y el de traslación de ésta alrededor de la Tierra
	Contenido	Elemento y propiedades de los Giros Espacio y Forma, Cantidad
	Contexto	Contexto Público - Científico
	Complejidad	Reflexión: El estudiante debe desarrollar modelos matemáticos. Conexión: el alumno debe establecer relaciones entre distintos dominios matemáticos. Contexto de orden 2
Condiciones	Presentación	Instrucciones Verbales y Escritas Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	La tarea se propone como aplicación de los conceptos y procedimientos relacionados con los giros, fuera de las herramientas informáticas y previamente a la introducción de figuras con centro de Giro.
	Agrupamiento de alumnos	Individual
Observaciones	Permite emplear herramientas básicas de dibujo Problema: cerrada y difícil.	
Criterios de Evaluación		CE 1, CE 4, CE 5, CE 7, CE 10, CE 12.
Objetivos		O2, O3, O4, O9, O10
Competencias Pisa		AJ, C, M, R
Errores y Dificultades		E5, D3, D4

<b>Sesión 5.</b>		<b>EL ROMPEPIZZA</b>
<b>Tarea G.5.</b>		
Elementos de la Tarea	Función y meta	Tarea de Motivación. Introducir mediante un rompecabezas lógico los conceptos de figuras con centro de giro.
	Recursos / Operaciones	Calculadora, transportador de ángulos, dibujo / identificar figuras con centro de giro
	Contenido	Figura con centro de Giro Espacio y Forma, Cantidad
	Contexto	Contexto Público
	Complejidad	Reproducción Reflexión: Conexión: Contexto de orden 2
Condiciones	Presentación	Instrucciones Verbales y Escritas Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	A través de la resolución de esta actividad el profesor introduce los conceptos relacionados con las figuras con centro de giro
	Agrupamiento de alumnos	Gran – Grupo (Toda la clase)
Observaciones	Ejercicio: cerrada y accesible.	
Criterios de Evaluación	CE 7, CE 10, CE 12.	
Objetivos	O2, O4, O10	
Competencias Pisa	AJ, C, M, R	
Errores y Dificultades	D3, D4	

<b>Sesión 5.</b>		<b>LA NORIA DEL CORPUS</b>
<b>Tarea G.6.</b>		
Elementos de la Tarea	Función y meta	Tarea descontextualización y aplicación. Obtener información de una situación modelizada a través de figuras con centro de giro.
	Recursos / Operaciones	Dibujo, transportador de ángulos, dibujo / identificar Medir la amplitud de giros en tiempo además de en grados
	Contenido	Figura con centro de Giro Espacio y Forma, Cantidad, Relaciones
	Contexto	Contexto Personal
	Complejidad	Reproducción Reflexión: Conexión: Contexto de orden 1
Condiciones	Presentación	Instrucciones Verbales, Escritas y Gráficas Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	Esta actividad es la tarea final que cierra las dos sesiones referidas a giros. En ella se aplican los últimos conceptos aprendidos sobre los mismos junto con los anteriores. Los alumnos podrán llevarla a cabo en casa
	Agrupamiento de alumnos	Individual
Observaciones	Ejercicio: cerrado y accesible.	
Criterios de Evaluación	CE2, CE4, CE 7, CE 10, CE 12.	
Objetivos	O2, O3, O4, O9, O10	
Competencias Pisa	PR, AJ, C, M, RP, R	
Errores y Dificultades	D3, D4	

<b>Sesión 6.</b>		<b>ENTRE EL GIRO Y LA SIMETRÍA HAY UN PASO</b>
<b>Tarea S.1.</b>		
Elementos de la Tarea	Función y meta	Elaboración y construcción de significados. Construir nuevos significados aplicando conocimientos adquiridos.
	Recursos / Operaciones	Regla, Compás. Girar figuras 180° y hacer su simetría respecto un punto
	Contenido	Giro de 180° y Reflexiones Espacio y Forma
	Contexto	Contexto Educativo
	Complejidad	Reproducción: reproducir un procedimiento Conexión: establecer relaciones entre diferentes contenidos Reflexión: Contexto de orden 0
Condiciones	Presentación	Instrucciones Verbales y Gráficas Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	Esta actividad introduce el apartado destinado a las reflexiones, para ello se relaciona estas con los giros mediante lo que se conoce, también, como simetría central
	Agrupamiento de alumnos	Individual – Gran Grupo
Observaciones	Ejercicio: cerrado y accesible.	
Criterios de Evaluación	CE1, CE2, CE3, CE4, CE5	
Objetivos	O1, O2, O3,	
Competencias Pisa	AJ, C, R, LS	
Errores y Dificultades	E5, E1	

<b>Sesión 6.</b>		<b>SI NO LO VEO NO LO CREO</b>
<b>Tarea S.2.</b>		
pE Elementos de la Tarea	Función y meta	Tarea de ejercitación. Consolidar los aprendizajes adquiridos en la tarea anterior.
	Recursos / Operaciones	Libro de espejos, papel en blanco, imágenes. Visión espacial
	Contenido	Identificación de patrones o motivos mínimos. Espacio y Forma
	Contexto	Contexto Educativo
	Complejidad	Reproducción: seguir unas determinadas instrucciones Conexión: procesos de análisis Contexto de orden 0
Condiciones	Presentación	Instrucciones Escritas Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	Esta segunda actividad de la parte dedicada a las reflexiones pretende que los alumnos demuestren y comprueben por ellos mismos las propiedades que se han asociado a las reflexiones en la actividad anterior
	Agrupamiento de alumnos	Pequeños Grupos: Grupos de tres.
Observaciones	Ejercicio: cerrado y accesible.	
Criterios de Evaluación		CE1, CE2, CE3, CE4, CE7.
Objetivos		O2, O3, O4.
Competencias Pisa		AJ, C.
Errores y Dificultades		E1, E2.

<b>Sesión 6.</b>		<b>MIRROR MIRROR...¿CUÁNTAS FIGURAS SOY?</b>
<b>Tarea S.3.</b>		
pE Elementos de la Tarea	Función y meta	Elaboración y Construcción de significados. Que el alumno ponga en práctica la visión espacial adquirida en durante la unidad.
	Recursos / Operaciones	Plantilla de dibujo, Mira, Carboncillo, Acetato, rotulados indeleble. Aplicar diferentes técnicas para obtener imágenes reflejadas
	Contenido	Reflexiones, propiedades. Espacio y Forma
	Contexto	Contexto Educativo
	Complejidad	Reflexión: desarrollar estrategias para la búsqueda de la solución Conexión: aplicar, analizar y valorar Contexto de orden 0
Condiciones	Presentación	Instrucciones Escritas Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	Esta actividad se propone una vez se han dado a conocer los conceptos relacionados con las reflexiones para que, a partir de los mismos, los alumnos sean capaces de deducir la figura que origina una determinada imagen transformada.
	Agrupamiento de alumnos	Individual.
Observaciones	Exploración: abierta y accesible.	
Criterios de Evaluación	CE3, CE4, CE5, CE7	
Objetivos	O1, O4, O6, O9	
Competencias Pisa	PR	
Errores y Dificultades	E2, D1.	

<b>Sesión 7.</b>		<b>COORDENADAS SIMÉTRICAS</b>
<b>Tarea S.4.</b>		
pE Elementos de la Tarea	Función y meta	Elaboración y Construcción de significados. Determinar relaciones entre transformaciones y sistemas de coordenadas
	Recursos / Operaciones	Imágenes con sistemas de coordenadas, escuadra y cartabón Aplicar reflexiones a coordenadas
	Contenido	Reflexiones, sistemas de coordenadas. Espacio y Forma, Cambio y Relaciones
	Contexto	Contexto Educativo - Público
	Complejidad	Reproducción Conexión: relación entre distintos dominios matemáticos Contexto de orden 0
Condiciones	Presentación	Instrucciones Escritas Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	En esta primera actividad de la segunda sesión dedicada a reflexiones, el profesor introduce los últimos contenidos sobre las mismas, que se tratan en la unidad: Reflexiones y coordenadas
	Agrupamiento de alumnos	Gran grupo.
Observaciones	Problema: difícil y cerrado.	
Criterios de Evaluación	CE3, CE5, CE7, CE10	
Objetivos	O2, O4, O6	
Competencias Pisa	PR, AJ, C, LS, R	
Errores y Dificultades	E3, D1.	

<b>Sesión 7.</b>		<b>LOS JUEGOS DEL HAMBRE</b>
<b>Tarea S.5.</b>		
pE Elementos de la Tarea	Función y meta	Descontextualización y Aplicación. Resolver una problema mediante las propiedades de la reflexión
	Recursos / Operaciones	Escuadra, cartabón, compás, dibujo de la situación Reflejar puntos
	Contenido	Reflexiones Espacio y Forma, Cantidad, Cambio y Relaciones
	Contexto	Contexto Personal
	Complejidad	Conexión: relación entre distintos dominios matemáticos. Reflexión: desarrollar modelos y estrategias Contexto de orden 1
Condiciones	Presentación	Instrucciones Escritas y gráficas Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	Esta actividad se realizará una vez se hayan impartido los contenidos asociados a las reflexiones y los alumnos también hayan experimentado o practicado con ellos.
	Agrupamiento de alumnos	Individual .
Observaciones	Problema: difícil y cerrado.	
Criterios de Evaluación		CE3, CE7, CE12.
Objetivos		O2, O3, O4, O10
Competencias Pisa		PR, AJ, C, M, LS, R, RP
Errores y Dificultades		E1, E2.

<b>Sesión 7.</b>		<b>RECORTES EN EDUCACIÓN</b>
<b>Tarea S.6.</b>		
pE Elementos de la Tarea	Función y meta	Exploratorias (interrogación y cuestionamiento). Reproducir diferentes geometrías con tijeras y papel
	Recursos / Operaciones	Papel Cuadrado y Tijeras. Determinar ejes de simetrías y relación entre ellos
	Contenido	Reflexiones Espacio y Forma
	Contexto	Contexto Educativo
	Complejidad	Reflexión: desarrollar estrategias y argumentar técnicas Contexto de orden 0
Condiciones	Presentación	Instrucciones verbales Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	Es una entretenida actividad para fomentar la visión espacial de los alumnos que pueden continuarla en casa. Se propondrá al final de la sesión una vez impartido los contenidos correspondientes a dicha sesión.
	Agrupamiento de alumnos	Individual – Pequeños grupos.
Observaciones	Problema: difícil y cerrado.	
Criterios de Evaluación		CE3, CE5, CE7, CE9.
Objetivos		O1, O4, O5, O6
Competencias Pisa		PR, AJ, C
Errores y Dificultades		D1, D2, E2.

<b>Sesión 8.</b>		<b>¿QUÉ FUE ANTES... LA GALLINA O LA REFLEXIÓN?</b>
<b>Tarea I.1.</b>		
pE Elementos de la Tarea	Función y meta	Elaboración y construcción de significados. Relacionar las reflexiones con los giros y traslaciones
	Recursos / Operaciones	Cuadrícula con las figuras. Deducir los resultados de una sucesivas reflexiones
	Contenido	Reflexiones Espacio y Forma
	Contexto	Contexto Educativo
	Complejidad	Conexión: relación reflexiones – traslaciones y giros Contexto de orden 0
Condiciones	Presentación	Instrucciones verbales Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	En esta actividad el profesor introduce a los alumnos en la composición de varias isometrías y en la relación que se establecen entre éstas mediante las mismas
	Agrupamiento de alumnos	Gran Grupo.
Observaciones	El profesor enmarca la explicación de los contenidos relacionados con la composición de isometrías a través de esta actividad Exploración: accesible y abierta.	
Criterios de Evaluación		CE4, CE8, CE9.
Objetivos		O3, O4, O5, O6
Competencias Pisa		PR, AJ, C
Errores y Dificultades		E1, E2, E6,D6

<b>Sesión 8.</b>		<b>¿EL JUEGO DE LA L?</b>
<b>Tarea I.2.</b>		
pE Elementos de la Tarea	Función y meta	Ejercitación Desarrollar la visión espacial de los alumnos
	Recursos / Operaciones	Tablero 4x4, 2 piezas en L, 2 piezas comodín. Aplicar isometrías de las piezas en L sobre el tablero
	Contenido	Isometrías Espacio y Forma
	Contexto	Contexto Educativo
	Complejidad	Reflexión: desarrollar estrategias Contexto de orden 0
Condiciones	Presentación	Instrucciones Escritas Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	Es una tarea para el final de la unidad didáctica destinada a que los alumnos se motiven con las matemáticas y no las consideren abstractas
	Agrupamiento de alumnos	Parejas.
Observaciones	Exploración: accesible y abierta.	
Criterios de Evaluación	CE1, CE2	
Objetivos	O2, O3, O4, O6	
Competencias Pisa	PR, R	
Errores y Dificultades		

<b>Sesión 8.</b>		<b>PENTOMINÓS</b>
<b>Tarea I.3.</b>		
pE Elementos de la Tarea	Función y meta	Ejercitación - Exploratorias
	Recursos / Operaciones	Papel Cuadrulado.
	Contenido	Isometrías Espacio y Forma
	Contexto	Contexto Educativo
	Complejidad	Reflexión: identificar las matemáticas en el problema (descartar figuras transformadas mediante isometrías) Contexto de orden 0
Condiciones	Presentación	Instrucciones escritas Lenguaje Cotidiano.
	Comunicación	Actividad final que pone a prueba la visión espacial desarrollada por los alumnos a lo largo de la unidad
	Agrupamiento de alumnos	Individual – Pequeños grupos.
Observaciones	Problema: difícil y cerrado.	
Criterios de Evaluación		CE2, CE4, CE5
Objetivos		O2, O4, O6, O9
Competencias Pisa		PR, R, C
Errores y Dificultades		

## C O N T E X T O H I S T O R I C O

### ***Grecia: La Observación VS La Deducción***

Resulta inevitable comenzar esta breve reseña histórica haciendo referencia a la Geometría Euclídea. Dicha geometría tiene su origen en el tratado de Euclides (330 a.C. - 275 a.C.) *Los Elementos*. Este texto se consideró, rápidamente, ejemplar para la enseñanza de las matemáticas y actualmente rivaliza por su difusión con las obras más famosas de la literatura universal, como la Biblia o el Quijote.

Euclides construye su argumentación basándose en un conjunto de definiciones, postulados y nociones comunes (principios o propiedades que se admiten como ciertas por ser evidentes y a partir de los cuales se deduce todo lo demás) con los que comienza el libro I de los Elementos (Euclides, 1991). La deducción lógica de enunciados o proposiciones matemáticas a partir de esos principios previamente aceptados dan lugar al desarrollo del método deductivo (la conclusión está implícita en las premisas) que caracteriza a la Geometría de Euclides.

El Postulado V, Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela, fue controvertido y dio pie en los siglos XVIII y XIX al nacimiento de las Geometrías no euclidianas (Vilchez, N., 2005). Aún así, esta geometría domina todo el periodo de tiempo comprendido entre la antigüedad y la geometría de Hilbert a fines del siglo XIX.

En la obra de Euclides existen discrepancias a la hora de afirmar si se recurre al concepto de transformación o al de desplazamiento de figuras, a la hora de establecer criterios de igualdad (Moriena y Scaglia, 2005)

### ***El Renacimiento: Las Matemáticas a Disposición del Arte***

No sería hasta el Renacimiento cuando la geometría, nuevamente, marcara un hito en la historia de las matemáticas. En esta época el arte se preocupa incesantemente en fundamentar racionalmente su ideal de belleza. Es así como las matemáticas se convierten en un principal aliado del arte renacentista a la hora de plasmar el mundo real tridimensional en un lienzo bidimensional.

El estudio de la geometría a partir del uso de la perspectiva marca una importante diferencia entre el arte de la edad media y el arte renacentista (Courant, 1964)

Quienes hicieron contribuciones a la geometría en el siglo XVI fueron, principalmente: Johannes Werner (1468-1522), con su trabajo sobre los elementos de las cónicas, y Albrecht Dürer (1471-1528) en Alemania. En Italia, Leonardo da Vinci (1452-1519), se distinguió más por su aplicación de las matemáticas a la ciencia y la teoría de la perspectiva, en su *Trattato della pittura* inicia con la advertencia: “quien no sea un matemático no lea mi trabajo”, Francesco Maurolico (1494-1575), revivió el interés por lo más avanzado de los trabajos clásicos de la antigüedad y tuvo acceso a la geometría antigua disponible, ya que leía griego y latín. Así mismo contribuyeron los geógrafos (Mercator, 1512-1594), ya que la navegación está estrechamente relacionada con la representación geográfica y, con la empresa de Magallanes y Elcano, se dió una carta de autenticidad al concepto del Mapa Mundi representado como una esfera.

Durer, fue el mejor matemático renacentista, escribió un libro sobre geometría: “*Instrucción en la medida con regla y compás*” (1525), para ayudar a los artistas sobre la perspectiva. (Kline, 1991); generó epicicloides (dibujándolas con un punto fijo en un círculo, el cual rueda a lo largo de la circunferencia de otro círculo); pero no las estudió analíticamente, ya que no contaba con la herramienta algebraica necesaria. Aunque dio construcciones ingeniosas para polígonos y otras curvas planas (obtenidas al proyectar curvas en el espacio sobre un plano), al no tener los fundamentos matemáticos, no distinguía fácilmente entre resultados exactos y aproximaciones

Aunque en ese tiempo no se apreció la importancia de las transformaciones geométricas, las proyecciones resultaron esenciales para los cartógrafos.

Desde la muerte de Maurolico en 1575, hasta la publicación de *La géométrie* de René Descartes (1596-1650) en 1637, la geometría tuvo que esperar a que los progresos en álgebra alcanzaran un nivel que hiciera posible la geometría algebraica.

### ***Geometría Proyectiva (s.XVII): Un Gigante con Pies de Barro***

En el contexto de los trabajos de perspectiva del Renacimiento y ante la aparición de nuevos problemas en la ciencia aplicada, surgen en el siglo XVII varias figuras clave en la recuperación de los conocimientos geométricos griegos y en los nuevos enfoques que dieron lugar al nacimiento de la Geometría Proyectiva.

El arquitecto e ingeniero francés Gerard Desargues (1591-1661), mostró gran interés por las matemáticas, en particular por la geometría. Obtuvo resultados muy importantes en el estudio de "la perspectiva" siendo precursor de la idea de transformación en geometría y de la utilización de propiedades invariantes. A su nueva forma de hacer geometría la denominó "geometría proyectiva".

Un matemático precoz fue Pascal (1623-1662), su trabajo, siguiendo a Desargues se concentra en su *Essay pour les coniques*, donde aparece el teorema que hoy lleva su nombre, uno de los más bellos y sugestivos de la matemática.

Desgraciadamente, el siglo XVII no era adecuado para la geometría pura. Los problemas científicos del momento requerían métodos algebraicos más efectivos para los cálculos que la tecnología necesitaba. Por esto, la Geometría Proyectiva fue abandonada en favor de la Geometría Analítica, el Álgebra y el Cálculo Infinitesimal.

### ***La Geometría Analítica: Eclipse de la Geometría Proyectiva***

Según Jahn (Jahn, 1998), los autores Piaget y García en su obra "Psicogénesis e historia de las ciencias" (1983) concluyen que "la noción de transformación tiene su origen innegable en la Geometría Analítica".

El término de Geometría Analítica es introducido en el siglo XVII de forma paralela por Fermat (1601-1665) y por Descartes (1596- 1650)

El ansia de saber, el apetito de curiosidad que caracterizó al Renacimiento, se prolongó hasta el, siglo XVII, que es el de los grandes matemáticos, cuya primera mitad ilustran especialmente los nombres de Fermat y de Descartes.

Descartes publica su Geometría en 1637 y Fermat escribe su Isagoge el mismo año, mas no lo da a conocer. Son dos obras de orientaciones distintas, pero de igual

contenido técnico. Ambos perfeccionan la teoría de las secciones cónicas hasta que los recursos del Cálculo Infinitesimal, ampliando el principio de correspondencia entre las curvas y las ecuaciones, abrieron nuevos horizontes fecundos. Fermat sólo utiliza el Álgebra como auxiliar del estudio de las figuras que son siempre para él objeto de la Geometría; Descartes, en cambio, coloca el Álgebra, con todos sus caracteres específicos, en un primer plano y hace surgir un nuevo mundo geométrico mediante el automatismo a que se presta el método algebraico, independientemente de la intuición directa de las figuras.

Durante este periodo los resultados de Desargues y Pascal se olvidaron hasta el resurgimiento de la geometría pura, a principios del siglo XIX.

### ***Las Transformaciones en la Guerra de Geometrías (s.XIX)***

“Una de las características principales de la geometría que se desarrolló durante la segunda mitad del siglo XIX, fue el entusiasmo con que estudiaron los matemáticos una gran variedad de transformaciones. Las más conocidas fueron las que constituyen el grupo de transformaciones que define la llamada geometría proyectiva. Los orígenes de esta geometría estaban ya, en realidad, en las obras de Pascal y de Desargues, pero hasta comienzos del siglo XIX no se produjo su desarrollo sistemático, desarrollo debido especialmente a Poncelet. (1788- 1867)” (Boyer, 1968).

Mongue (1746-1818), quien publicó entre 1795 y 1799 *Géométrie descriptive*, y Lázaro Carnot (1753-1823), responsable de *De la corrélation des figures de la géométrie* en 1801 y *Géométrie de position* en 1803, son considerados los fundadores de la geometría pura moderna. Ambos dos junto con Charles Julien Brianchon (1785-1864), iniciador de los primeros resultados de lo que después se ha conocido como "teoremas duales", establecieron el contexto perfecto para la obra de Poncelet.

Poncelet, discípulo de Monge, recluido en prisión entre 1813 y 1814, elaboró dos manuscritos, *Applications d'analyse et de géométrie* y *Traité des propriétés projectives des figures*, llegando a convertirse este último en histórico.

En este momento, llega a hacerse evidente el enfrentamiento entre géometras. Por un lado, los partidarios de una geometría sintética, basada en métodos

analíticos, y los defensores de una geometría pura, clara y sencilla, entre los que se encontraba Poncelet.

Entendió Poncelet que la geometría podía alcanzar el mismo nivel de generalidad que el álgebra, puesto que operaba también con símbolos indeterminados, y una demostración hecha sobre una figura no tenía por qué ser válida exclusivamente para ella, como se decía, sino también para cualquier otra que pudiera obtenerse de ella mediante algunas variaciones (Etayo, 1992).

Esta "permanencia" de relaciones, entre figuras relacionadas mediante ciertas variaciones, se enuncia de la siguiente manera con el nombre de principio de continuidad: "Si una figura resulta de otra por un cambio continuo y es tan general como la primera, entonces una propiedad demostrada para la primera figura puede ser transferida a la otra sin consideraciones ulteriores".

Como se ha señalado en el apartado anterior, la obra de Desargues no vuelve a tener relevancia hasta 1847, gracias a Michel Chasles (1793-1880), geómetra francés, quien encontró una copia hecha por La Hire (1640 - 1719), matemático, astrónomo y gnomonicista francés.

Chasles, innovó en el campo de la geometría proyectiva a través de su *Traité de géométrie supérieure*, editado en 1852, pero además su aportación fue decisiva para conectar la geometría de Euclides y la proyectiva, esta conexión eran los porismas de Euclides. Se trata de tres libros desaparecidos, formado por 171 teoremas organizados en 29 géneros, de los que se tienen constancia a través de Pappus (320 d.C.). De la obra de Chasles sobre los porismas, se deduce que Euclides, 600 años antes, conocía la invarianza de la razón doble y se intuye una configuración semejante a la de Desargues, por lo que la geometría proyectiva, de no ser por esa valiosa pérdida, podría haber surgido mucho antes.

Diez años transcurren entre la publicación del libro de Poncelet y el de Jacob Steiner (1796-1863) *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* (Desarrollo sistemático de la dependencia mutua de las figuras geométricas), de 1832. Durante ellos se produce la gran floración de métodos, analíticos y gráficos, que ilustran toda una época de la geometría y dejan a la proyectiva en situación de buscar su rigurosa fundamentación.

Steiner, el primer geómetra alemán que adoptó ideas francesas, apostó por los métodos sintéticos. Su prolífica mente engrosó de manera asombrosa el campo de la geometría, con teoremas que en la actualidad siguen vigente con su nombre, pero a la vez dificultó el plasmar todas sus ideas por escrito. Su método se caracterizó por ser, como el mismo lo nombró “sistemático”, plagado de consistencia y uniformidad en el tratamiento de las figuras.

El prestigio de Steiner en Alemania y su evidente animadversión hacia los métodos analíticos, provocaron la desaparición “forzada” de Plücker (1801-1868) del panorama geométrico de la época.

Plücker, iniciado en la geometría analítica debido a su mala relación con Poncelet, pronto se levantó como uno de los grandes maestros analíticos al establecer la “notación abreviada de Plücker”, que sintetizó y aclaró las expresiones y cálculos algebraicos que caracterizaban a dicha geometría. Así se llegó al entendimiento de la geometría de las congruencias, superficies regladas y complejos de rectas, o familias de dos o tres parámetros. Todo ello queda recogido en los dos volúmenes (1828 y 1831) de su *Analytisch-geometrische Entwicklungen*.

Importante fue también el uso que emprendió de las coordenadas proyectivas para el estudio analítico del espacio proyectivo, recogido en los dos volúmenes anteriores y en la memoria, fechada en 1829, *Üherein neues Coordinaten System*. Pero en esta tarea no fue el único, Mōbius (1790-1868), entre otros y salvo variaciones, también introdujeron dichas coordenadas.

Mōbius, responsable de las “coordenadas afines”, establece el concepto fundamental de transformación en el plano y en el espacio y el de homografía que conserva las relaciones gráficas puesto que no altera la incidencia o pertenencia, y apunta que esta relación no difiere de la establecida mediante proyecciones y secciones.

Plücker y Mōbius, entre otros, desarrollaron de gran manera la corriente analítica de la geometría, pero a la geometría pura, tras Steiner, aún le quedaba una gran baza a jugar, Staudt (1798-1867).

**Staudt (1798-1867): “El Euclídes” Moderno**

Karl Georg Christian von Standi (Baviera), considerado un adelantado a su tiempo y por tanto de escasa repercusión en él, elaboró una de las obras más completas hasta el momento existente que, caracterizada por su modernidad, luminosidad y uniformidad, destacaba por su acentuado carácter aritmético.

Staudt, motivado por la hecho de conseguir, por un lado, mayor rigor en la base de la geometría pura y, por otro, hacer una clara separación entre propiedades de posición (descriptivas) y de magnitud (métricas). Así nace *Die Géométrie der Lage* (Fr. Korn,

Nuremberg, 1847) y *Beitrage zur Géométrie der Lage*, (Fr. Korn, Nuremberg, 1856-1860). Lo novedoso de su obra queda recogido en el *teorema fundamental de la proyectividad*. Este teorema viene a decir algo así como que si dos figuras con la misma base son proyectivas en el sentido de Staudt y hay tres elementos que coinciden con sus homólogos, todo elemento es homólogo de sí mismo.

La obra de Staudt pretende desarrollar la capacidad de intuición geométrica. El lector no encontrará ninguna fórmula que lo distraiga, pero tampoco una sola figura, todo se deja a manos de la razón del lector. Lo peculiar de esta obra la convertirán en un clásico, llegándose a comparar a Staudt con Euclídes, al igual que se hizo con Steiner y Apolonio.

En 1979 P.Abellanas, entre varias reflexiones matemáticas, apunta que Staudt demuestra que el conjunto de todos esos puntos, incluidos los imaginarios, es isomorfo al cuerpo de los números complejos, con lo que en realidad acaba probando la identidad de la geometría pura con la geometría analítica sobre el cuerpo complejo. Finalidad contraria a la de éste, que no era otra que liberar a la geometría de la noción de número y de magnitud

**La Hora de la Axiomatización (s. XX)**

La elaboración de este método geométrico completo, a partir de la construcción axiomática del espacio proyectivo, supuso un hito en la historia de la geometría

sintética a partir del cual no se pretendía idear nuevos métodos sino extender éste a nuevos problemas.

Dentro de esta corriente, el inglés Cayley (1821-1895) profundizó en la teoría de invariantes y estudió la geometría proyectiva con el empleo de coordenadas llegando a afirmar que toda geometría, euclídea y no euclídea, era una subordinada de la proyectiva.

Félix Klein (1849-1925), ayudante de Plücker, profundizó en la clasificación de las geometrías por los grupos de transformaciones: cada geometría es así la teoría de los invariantes de un cierto grupo; en nuestro caso, del proyectivo. Ahí queda resumido el célebre "programa de Erlangen".

"El programa Erlangen libera el pensamiento geométrico de toda intuición, enriquece la geometría abstracta". (Jahn, 1998).

"Considerar al espacio como objeto de estudio geométrico es el otro punto importante que se desprende del análisis del programa de Erlangen" (Jahn, 1998).

El conjunto de todas las transformaciones del espacio, se denomina grupo principal de estas transformaciones; las transformaciones de éste grupo no altera las propiedades geométricas. Se puede decir que una clasificación de geometrías equivale a una clasificación de los grupos de transformaciones.

Por lo tanto, en el desarrollo del siglo XIX (El siglo de oro de la geometría) se llega a la geometría algebraica, de la que la proyectiva es el primer capítulo. Gracias, tanto a los métodos puramente geométricos propios de Poncelet, Chasles, Steiner y Staudt como a los analíticos de Móbius, Plücker y Cayley, en la geometría proyectiva se establecen métodos que añaden a su íntima conexión con las geometrías no euclídeas y con el álgebra, su efecto aclaratorio sobre la geometría en su conjunto y, de un modo muy singular, su indiscutible encanto estético (Etayo, 1992).

Este grado de desarrollo requiere de una formalización que si iniciará con el libro de M. Pasch (1843-1930) *Vorlesungen über neuere Géométrie*, donde se presenta la dependencia de la geometría de la elaboración de diez axiomas sobre congruencia. Por su parte, Klein para la formalización apuesta por el concepto de continuidad, construyendo un axioma con su debido rigor. D. Hilbert (1862-1943), en su libro *Grundlagen der Geometrie* formaliza el espacio euclídeo. Define el concepto moderno de espacio y, por consiguiente, de toda la geometría. Sus axiomas son los de incidencia,

ordenación, congruencia, paralelismo y continuidad y fueron puestos en prácticas por autores como Hessenberg, Veblen y Young.

En busca de dar una mayor solidez a la axiomatización de la geometría proyectiva, se dirigen los trabajos de Peano, Schur, Veronese,...pero este esfuerzo de formalización no pudo desarrollarse de manera debida hasta el siglo XX. Los trabajos en este sentido pueden seguirse en *Historia de las matemáticas*, (Collette, 1985).

# Anexo III

## EXTENSION

## APARTADO 3

### UNIDAD DIDACTIA Y CURRÍCULO

3.2.- Relación de la Unidad Didáctica y Currículo.

3.4.- Objetivos a Conseguir con la Unidad Didáctica.

3.5.- Criterios de Evaluación.

### Desarrollo 3.2.-

#### Relación de la Unidad Didáctica con el Proyecto Educativo de Centro.

En la Comunidad Autónoma de Andalucía, la Ley 17/2007 de Educación de Andalucía (LEA), de 10 de diciembre, establece que los centros docentes de Andalucía deberán elaborar su propio PROYECTO EDUCATIVO, en el que se fijarán los objetivos y las prioridades de la acción educativa.

En el artículo 8 del Capítulo II, Currículo, del Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, se regula a lo largo de seis apartados la autonomía de los centros en la concreción del currículo. Se subraya la importancia de adaptar éste a las necesidades de su alumnado y a las características específicas del entorno social y cultural en el que se encuentra.

En la línea de la anterior especificación se dice que el proyecto educativo de centro recogerá los criterios generales para la elaboración de las programaciones didácticas de cada una de las materias, los criterios para organizar y distribuir el tiempo escolar, así como los objetivos y programas de intervención en el tiempo extraescolar, los procedimientos y criterios de evaluación, las medidas de atención a la diversidad, el plan de orientación y acción tutorial, el plan de convivencia, el plan de formación del profesorado y, en su caso, el plan de compensación educativa, así como cualesquiera otras consideraciones que favorezcan la mejora de los resultados escolares del alumnado. Orientados hacia esta mejora de resultados se contempla la posibilidad de incluir la adopción de compromisos educativos con las familias y otras relaciones de entorno.

La redacción por parte de los centros de estos proyectos educativos supone una gran responsabilidad para los mismos. En base a lo recogido en éste documento y, en particular, en la concreción de los contenidos curriculares de Educación Secundaria Obligatoria, los distintos departamentos didácticos desarrollarán sus programaciones didácticas de las correspondientes materias que tengan asignados. Es aquí el interés del éste documento en la elaboración de una unidad didáctica como ésta, pues este se perfila así como el punto de partida y el documento de referencia al que recurrir en la concreción del currículo a través de una unidad didáctica para una determinada área o materia dentro de un nivel o etapa determinada.

Según el equipo editor de Anaya, (2012), en un proyecto educativo de centro se deben desarrollar los siguientes apartados:

- Líneas generales de actuación pedagógica.

Se trata de concretar y priorizar los principios, valores y normas legitimadas por el ordenamiento legal vigente, dotando de identidad y estilo propio a cada Centro. Estas líneas de actuación se deberán dividir en tres ámbitos de actuación: convivencial, pedagógico y de organización y gestión.

- Adecuación de los objetivos generales al contexto del centro y a las características del alumnado.

Se debe incluir un análisis de la realidad sociocultural del barrio, del pueblo o de la aldea y sus implicaciones en las demandas específicas educativas del tipo de alumno, padres, familias y entorno en general.

Se debe caracterizar las capacidades que los alumnos y las alumnas han de desarrollar a lo largo de la etapa, como resultado de la acción educativa intencionalmente planificada, indicando sus rasgos distintivos y sus funciones fundamentales.

La adquisición de estas capacidad u objetivos implican la adquisición de las competencias básicas que permiten a cualquier persona utilizar sus recursos personales para actuar de manera activa y responsable en la construcción de su proyecto de vida tanto personal como social.

- Metodología didáctica.

Hace referencia al el conjunto de decisiones y actuaciones que organizan la acción didáctica en el aula. Existen diversas metodologías aplicables en el aula pero cualquier elección de las mismas debe contar con una fundamentación teórica en el contexto de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Todo esto hace conveniente establecer unos principios relativos a cómo deben ser las mismas: activa y participativa, basadas en las ideas y concepciones previas de los alumnos, debe considerar la diversidad en base a las características individuales de los alumnos, contribuir a la formación integral de los alumnos, centrada en el desarrollo de los objetivos planteados y en la adquisición de las competencias básicas, multidisciplinar y, finalmente, debe hacer partícipes a las familias de los procesos de enseñanzas y aprendizajes.

La metodología debe tener en cuenta la agrupación de los alumnos y la organización de tiempos y espacios.

- Tratamiento transversal de la Educación en Valores.

Se considera educación en valores al conjunto de contenidos comunes a todas las áreas y materias que constituyen el mecanismo para reconceptualizar el conocimiento «vulgar» al ayudar a conectar la realidad social y los intereses personales con los problemas que actualmente aquejan a la humanidad. Es importante no definir los mismos como un añadido al currículo.

Para el desarrollo de los mismos es de gran utilidad agruparlos en distintos ámbitos, así se encuentran temas relacionados con la salud, con la sociedad y con el medio ambiente.

Para introducir estos conceptos de educación en valores se habla de diferentes formas como son: La transversalidad disciplinar, en el espacio, en el tiempo, curricular y ambiental.

- Plan de Evaluación.

El marco legislativo para la evaluación en la ESO en Andalucía es el siguiente:

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

Del mismo se deducen los rasgos distintivos de la misma: continua, diferenciada y con un marcado carácter formativo y orientador.

- Plan de Atención a la Diversidad.

Las diferencias entre las personas es un hecho incuestionable, por ello la ESO se concibe como una etapa comprensiva y diversificada. Comprensiva en cuanto a que se establece unos conocimientos mínimos para todos los alumnos y, a la vez, diversificada porque se ajusta a las necesidades de los alumnos, tanto en lo referentes a dificultades como en posibilidades de enriquecimiento.

Hablar de diversidad no es solo hablar de diferentes capacidades intelectuales, sino que también se debe de tener en cuenta las condiciones de los alumnos y alumnas: etapa de desarrollo en el que se encuentran, sus motivaciones, su manera personal de afrontar y responder a las actividades escolares, la dimensión social y familiar donde se desenvuelven.

- Plan de Orientación y de Acción Tutorial.

La redacción de este plan además de ser una exigencia legal resulta estar justificado por la importancia del proceso de crecimiento personal de los alumnos y del crecimiento profesional de los profesores. Para el apoyo y orientación de los alumnos y profesores en estos procesos se establece la presencia de los Departamentos de orientación en los centros.

La ambición de objetivos de este departamento hace que sea necesario concretar diferentes programas con su correspondiente ámbito de actuación.

- Dimensión correspondiente a la Acción Tutorial. Se desarrolla con el alumnado, con las familias y con el equipo educativo de cada grupo
- Dimensión correspondiente a la Orientación Académica y Profesional. Se desarrolla con todo el alumnado del centro.
- Dimensión correspondiente a la Atención a la Diversidad.

- Plan de Convivencia.

Establecer la convivencia y restablecerla mediante el tratamiento eficaz de los conflictos escolares sin que estos deterioren el clima escolar es una meta necesaria de las instituciones escolares. Con este fin es preciso redactar un plan de convivencia que recoja las reglas que regulen dicha convivencia.

Un plan de convivencia debe pretender alcanzar los siguientes objetivos:

- Facilitar a los órganos de gobierno y al profesorado, instrumentos y recursos en relación con la promoción de la cultura de paz, la prevención de la violencia y la mejora de la convivencia en el Centro.
- Concienciar y sensibilizar a la comunidad educativa sobre la importancia de una adecuada convivencia escolar y sobre los procedimientos para mejorarla.

## A n e x o I I I

- Fomentar en el Centro los valores, las actitudes y las prácticas que permitan mejorar el grado de aceptación y cumplimiento de las normas y avanzar en el respeto a la diversidad y en el fomento de la igualdad entre hombres y mujeres.

- Facilitar la prevención, detección, tratamiento, seguimiento y resolución pacífica de los conflictos que pudieran plantearse en el Centro, y aprender a utilizarlos como fuente de experiencia de aprendizaje.

- Facilitar la prevención, detección y eliminación de todas las manifestaciones de violencia, especialmente de la violencia de género y de las actitudes y comportamientos xenófobos y racistas.

- Facilitar la mediación para la resolución pacífica de conflictos.

- Plan de Formación del profesorado.

La formación permanente del profesorado de los centros andaluces es un derecho y un deber tal y como queda legislado en la Ley 17/2007 de Educación de Andalucía.

Esta parte del Proyecto Educativo de Centro es de gran importancia e imprescindible puesto que parece imposible que se puedan alcanzar los objetivos de dicho proyecto sin que los responsables de llevarlo a cabo estén adecuadamente cualificados.

Para conseguir esta formación se han establecido distintas modalidades para hacerla factible a través de diferentes centros de profesorado.

- Procedimientos de evaluación interna.

En la actualidad la optimización y mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje son una máxima de los sistemas educativos.

Es inevitable para llevar a la práctica esta máxima someter a evaluación la práctica docente, la oferta curricular, las programaciones didácticas y el desarrollo del currículum, tomando como referencia los objetivos educativos y los criterios de evaluación establecidos.

Esta autoevaluación debe de ir acompañada de un programa de mejora de aquellos aspectos que han resultado inadecuados o incompatibles con las características de los alumnos, del centro o del entorno.

## A n e x o I I I

- Concreción de los contenidos curriculares.

En la concreción de los contenidos curriculares para la Educación Secundaria Obligatoria, se deben establecer los objetivos que se pretende alcanzar en cada una de las materias así como los criterios de evaluación para las mismas, además de contemplar la organización y distribución de los contenidos de cada materia y su contribución al desarrollo de las competencias básicas.

**Desarrollo 3.4:****Objetivos a Conseguir con la Unidad Didáctica.**

A continuación se detallan los objetivos que a través de esta unidad didáctica se pretende alcanzar, haciendo distinción entre objetivos de etapa, de área y de ciclo. Los objetivos específicos o concretos a los que se aspira mediante la unidad didáctica se presentarán

De tal modo aquí se presentarán los objetivos relativos a la etapa de Educación Secundaria obligatoria, al área de matemáticas y al primer ciclo del segundo ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria.

ETAPA	ÁREA	CURSO
REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.		Editorial: Anaya. SM, Santillana
1.- Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.	1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.	1.- Incorporar, al lenguaje y a formas habituales de argumentación las distintas formas de expresión matemática (numérica, algebraica, de funciones, geométrica...) con el fin de mejorar su comunicación en precisión y rigor
2.- Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.	2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.	2.- Ampliar el conocimiento sobre los distintos campos numéricos hasta llegar a los números racionales e irracionales, con el fin de mejorar su conocimiento de la realidad y sus posibilidades de comunicación.
3.- Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.	3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.	3.- Cuantificar ciertos aspectos de la realidad para interpretarla mejor, empleando distintas clases de números (fraccionarios, decimales, enteros...) mediante la realización de cálculos adecuados a cada situación.
4.- Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.	4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.	4.- Deducir las leyes que presentan distintas secuencias numéricas y utilizarlas para facilitar la resolución de situaciones problemáticas.

## A n e x o I I I

<p>5.- Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.</p>	<p>5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.</p>	<p>5.- Identificar y distinguir progresiones aritméticas y geométricas y utilizar sus propiedades para resolver problemas de la vida cotidiana.</p>
<p>6.- Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas.</p>	<p>6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.</p>	<p>6.- Valorar las virtudes del lenguaje algebraico y valerse de él para representar situaciones diversas y facilitar la resolución de problemas.</p>
<p>7.- Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.</p>	<p>7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.</p>	<p>7.- Utilizar algoritmos y procedimientos de polinomios y fracciones algebraicas para resolver problemas.</p>
<p>8.- Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua co-oficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.</p>	<p>8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado</p>	<p>8.- Identificar figuras geométricas planas y espaciales. Representar en el plano figuras espaciales, desarrollar la percepción de sus propiedades y deducir leyes o fórmulas para averiguar superficies y volúmenes.</p>
<p>9.- Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.</p>	<p>9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.</p>	<p>9.- Conocer las regularidades, las propiedades y las leyes de los poliedros y de los cuerpos de revolución.</p>
<p>10.- Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.</p>	<p>10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.</p>	<p>10.- Utilizar las propiedades de los movimientos en el plano en relación con las posibilidades sobre teselación y formación de mosaicos.</p>
<p>11.- Conocer el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.</p>	<p>11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.</p>	<p>11.- Conocer características generales de las funciones y, en particular, de las funciones lineales, de sus expresiones gráfica y analítica, de modo que puedan formarse juicios valorativos de las situaciones representadas.</p>

<p>12.- Appreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.</p>		<p>12.- Utilizar las regularidades y leyes que rigen los fenómenos de la estadística para interpretar los mensajes y sucesos de toda índole. Identificar conceptos matemáticos en situaciones de azar, analizar críticamente las informaciones que de ellos recibimos por los medios de comunicación y usar herramientas matemáticas para una mejor comprensión de esos fenómenos.</p>
<p><i>Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía</i></p>		
<p>13.- Adquirir habilidades que les permitan desenvolverse con autonomía en el ámbito familiar y doméstico, así como en los grupos sociales con los que se relacionan, participando con actitudes solidarias, tolerantes y libres de prejuicios.</p>		<p>13.- Conocer algunos aspectos básicos sobre el comportamiento del azar, así como sobre probabilidades de diversos fenómenos. Tomar conciencia de las regularidades y leyes que rigen los fenómenos de azar y probabilidad.</p>
<p>14.- Interpretar y producir con propiedad, autonomía y creatividad mensajes que utilicen códigos artísticos científicos y técnicos.</p>		<p>14.- Actuar en los procesos de resolución de problemas aspectos del modo de trabajo matemático como la formulación de conjeturas, la realización de inferencias y deducciones, organizar y relacionar información.</p>
<p>15.-Comprender los principios y valores que rigen el funcionamiento de las sociedades democráticas contemporáneas, especialmente los relativos a los derechos y deberes de la ciudadanía.</p>		<p>15.- Conocer técnicas heurísticas para la resolución de problemas y desarrollar estrategias personales, utilizando variados recursos y valorando la riqueza del proceso matemático de resolución.</p>
<p>16.- Comprender los principios básicos que rigen el funcionamiento del medio físico y natural, valorar las repercusiones que sobre él tienen las actividades humanas y contribuir activamente a la defensa, conservación y mejora del mismo como elemento determinante de la calidad de vida.</p>		
<p>17.- Conocer y apreciar las peculiaridades de la modalidad lingüística andaluza en todas sus variedades.</p>		
<p>18.- Conocer y respetar la realidad cultural de Andalucía, partiendo del conocimiento y de la comprensión de Andalucía como comunidad de encuentro de culturas.</p>		

### Desarrollo 3.5

#### Criterios de evaluación.

Criterios de evaluación de área y etapa: Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria.

Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.

Se trata de valorar...

1.- Las destrezas que intervienen en el estudio de la situación problemática, tales como la lectura comprensiva del enunciado, la formulación e interpretación de los datos que intervienen, el planteamiento de la estrategia a seguir, la realización de las operaciones o la ejecución del plan, la validación de los resultados obtenidos y la claridad de las explicaciones.

2.-La capacidad de Interpretar, sintetizar, razonar, expresar situaciones, tomar decisiones, manejo diestro de las herramientas, facilidad de trabajar en equipo, entre otros aspectos a considerar.

3.-La interpretación de la historia y su proyección hacia el conocimiento matemático y general, la actitud crítica, la capacidad de interpretación, de análisis y de síntesis, así como la capacidad de trabajo en equipo.

4.-El conocimiento de las propiedades de los distintos conjuntos numéricos y su aplicación a cálculos numéricos orientados a situaciones prácticas, la correcta traducción al lenguaje algebraico de situaciones reales y la correcta traducción al lenguaje verbal de expresiones y resultados algebraicos, la capacidad de resolver ecuaciones y sistemas que se aplican para resolver problemas prácticos, y la determinación de la exactitud, el error o el nivel de aproximación de los resultados de los cálculos realizados, según el caso.

5.-Los procesos de investigación y deducción realizados para determinar las características y propiedades de las distintas formas planas y espaciales, a la vez que los procesos seguidos en el análisis, planteamiento y resolución de las situaciones y problemas de la vida cotidiana.

6.-La capacidad para representar, clasificar y establecer relaciones entre datos y, sobre todo, la deducción de conclusiones y estimaciones a partir de los datos representados. La capacidad de diseñar y utilizar técnicas adecuadas para la obtención de datos, de cuantificar, representar y sobre todo deducir características a partir de los parámetros más representativos, demostrando que comprende el significado de éstos, en lo relativo a estudios estadísticos. La capacidad de razonar sobre los posibles resultados de un experimento aleatorio a la vez que la capacidad de asignar probabilidades a sucesos equiprobables o no

Criterio de evaluación de curso. Tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria.

REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

Se valorará que el alumno...

2. Utilice los números racionales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.

Las capacidades a valorar serán las relacionadas con:

- Identificar y emplear los números y las operaciones.
- Elegir la forma de cálculo apropiada.
- Emplear la notación científica.
- Redondear a una determinada precisión y valorar el error asociado a ello.

3. Exprese mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observe regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos.

Las capacidades a valorar serán las relacionadas con:

- Transformar un fenómeno en una expresión algebraica.
- Analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas.

4. Resuelva problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Las capacidades a valorar serán las relacionadas con:

- Traducir problemas a ecuaciones y sistemas.
- Aplicar técnicas de manipulación de expresiones literales.
- Combinar los métodos de resolución algebraicos con los numéricos y los gráficos.

5. Reconozca las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilice dichos movimientos para crear sus propias composiciones y analiza, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

Las capacidades a valorar serán las relacionadas con:

- Analizar una forma natural o artística mediante movimientos.
- Identificar los elementos característicos de los movimientos.
- Manipular objetos y componer movimientos para generar creaciones propias.

6. Utilice modelos lineales para estudiar diferentes situaciones reales expresadas mediante un enunciado, una tabla, una gráfica o una expresión algebraica.

Las capacidades a valorar serán las relacionadas con:

- Analizar fenómenos que se pueden expresar mediante una aplicación lineal.
- Aplicar los medios técnicos al análisis de los aspectos más relevantes de una gráfica, a fin de profundizar en el conocimiento del fenómeno estudiado.

7. Elabore e interprete informaciones estadísticas teniendo en cuenta la adecuación de las tablas y gráficas empleadas, y analice si los parámetros son más o menos significativos.

Las capacidades a valorar serán las relacionadas con:

- Organizar en tablas de frecuencias y gráficas información estadística.

## A n e x o I I I

- Calcular parámetros centrales y de dispersión de una distribución.
- Interpretar gráficas y tablas estadísticas.
- Obtener conclusiones a partir de los parámetros de una población.

8. Hace predicciones sobre la posibilidad de que un suceso ocurra a partir de información previamente obtenida de forma empírica o como resultado del recuento de posibilidades, en casos sencillos.

Las capacidades a valorar serán las relacionadas con:

- Identificar sucesos elementales y otros asociados a un experimento aleatorio.
- Determinar o interpretar la probabilidad de un suceso por experimentación o cálculo.

9. Planifique y utilice estrategias y técnicas de resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines y que compruebe el ajuste de la solución a la situación planteada y que exprese verbalmente con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas, e informaciones que incorporen elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello.

Las capacidades a valorar serán las relacionadas con:

- Planificar e Incorporar estrategias complejas para la resolución de problemas.
- Perseguir la búsqueda de soluciones y ajustar las mismas a la situación que se pretende resolver en un determinado problema.
- Usar un lenguaje preciso a la hora de expresar informaciones, estrategias y razonamientos empleados en la resolución de un problema.

## BIBLIOGRAFÍA:

- Alsina, C., Pérez, R., y Ruiz, C. (1989). *Simetría Dinámica*. Madrid: Síntesis.
- Arévalo, R., González, J.L., Torresano, J.A. (2011). *Pitágoras Matemáticas 3º ESO*. Equipo de Educación Secundaria del Grupo SM. España.
- Anaya (2012). *Proyecto Educativo de Centro*. Educación Secundaria Obligatoria. Andalucía.
- Bishop, A.J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.
- Carballo, R., Rico, L., Lupiáñez, L. (2011) Análisis de los ítems de las evaluaciones autonómicas de diagnóstico en España: 2008-2009. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, Junio 2011, Nº 26 , p31
- Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira M.J., Colera, L. (2011). *Matemáticas 3 Educación Secundaria*. Madrid. Grupo Anaya, S.A.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, 37(6), 14-20.
- Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. Conserjería de Educación. Junta de Andalucía
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: MEC y Ed. Labor.
- Fernández, S. (2008). *Competencia matemática, Evaluación por competencias y evaluación diagnóstica*. Berritzeguneak Bilbao, web del Centro de Apoyo a la Formación e Innovación Educativa (<http://b01.berritzeguneak.net/es/index.php>).
- Galindo, C. (1996). Desarrollo de Habilidades Básicas para la Comprensión de la Geometría. *Revista EMA* 1996, VOL. 2, Nº 1, 49-58.
- García Sánchez, I.M., (2010). *Sistema de Evaluación*. Universidad de Salamanca. BIBLIOTECA VIRTUAL de Derecho, Economía y Ciencias Sociales.
- Godino, J. D. y Ruiz, F. (2003). *Geometría y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-1-1. [ 164 páginas; 8,3MB] (Recuperable en, <http://www.ugr.es/local/jgodino/>)
- Gómez, P. (2000). Epistemología, fenomenología, matemáticas, sistemas de representación, análisis de contenido, modelización y resolución de problemas. Página personal de Pedro Gómez, (<http://cumbia.ath.cx/>).

Gómez, P., y Cañadas, M. C. (2010). *La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas*. Documento no publicado (Documento de Trabajo). Granada: Universidad de Granada

Gutiérrez, Á. (2011). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en los niveles de primaria y secundaria. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 3-14). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las isometrías del plano*. Madrid: Síntesis.

Klein, F. (1927). *Matemática Elemental desde un punto de vista superior* (Volumen II). Berlín: Ed. Springer. Traducido por R. Fontanilla (1945). Madrid: Biblioteca Matemática (Julio Rey Pastor).

LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. LOE.

Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía. LEA.

Lupiáñez, J. L. (2010). *Diseño y selección de tareas para el desarrollo de la competencia matemática*. Trabajo presentado en Matemáticas y Competencias Básicas, Oviedo.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. ISBN 0-87353-480-8.

NCTM (2000). *Principles and Standards of School Mathematics*. Reston, VA: Natl Council of Teachers of Mathematics. (ISBN: 0-87353-480-8)

OCDE: *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París, OCDE. ((2005b): Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana. Madrid, Santillana.)

OCDE: *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París, OCDE. ((2004b): Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003. Paris, OECD.)

Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. Conserjería de Educación. Junta de Andalucía

ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. Ministerio de Educación y Ciencia.

ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato. MINISTERIO DE EDUCACION, POLITICA SOCIAL Y DEPORTE

Pina, J. y Abellanas, M. (2010). *TRABAJO FIN DE CARRERA: Generación de Teselaciones Periódicas: grupos de friso y de rosetones*. Universidad Politécnica de Madrid. Facultad de Informática.

Presmeg, N.C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46.

REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Ministerio de Educación y Ciencias.

Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, extraordinario Marzo 2006, pp. 275-294.

Santillana Docentes. (2007). La Evaluación como Oportunidad de Aprendizaje. Fuente: [www.santillana.cl](http://www.santillana.cl). Fecha: 28 de Diciembre de 2007.

Saucedo, H. (2008). *Evaluación de aprendizaje en la DACEA*. Departamento de Pedagogía Aplicada. Universidad Autónoma de Barcelona.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (4ª edición). New York: Longman.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.