TRABAJO FIN DE MASTER:

RAZONES TRIGONOMETRICAS Y RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS EN 4º DE LA ESO

Alumno: Antonio Salas Sánchez

Tutor: Pablo Flores Martínez

Co-tutor: Antonio Moreno Verdejo

Índice

1. Introducción

1.1. Identificación

El tema a desarrollar se llama Razones trigonométricas y resolución de triángulos rectángulos en 4º de la ESO.

1.2. Historia de la trigonometría

Según el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, la trigonometría es: "Parte de las matemáticas que trata del cálculo de los elementos de los triángulos planos y esféricos". La palabra trigonometría proviene del griego **TRIGONOS** (triángulo) y **METRÍA** (medida). De este modo etimológicamente, significa medida de triángulos. Su importancia radica fundamentalmente en la medición de campos, la ubicación de barcos en el mar o, más recientemente, el posicionamiento por satélite, e, incluso, la medición de distancias entre estrellas próximas en la astronomía.

Voy a proceder a repasar la historia de la trigonometría desde un punto de vista cronológico ascendente:

Babilonia y Egipto

Hace casi 3000 años, los babilonios utilizaban ya los ángulos de los triángulos y las razones trigonométricas. Se considera que los avances más notables que se les atribuye en trigonometría, se sitúan en relación a los triángulos semejantes y sobre el teorema de Pitágoras.

De este modo los babilónicos ya utilizaban razones para realizar medidas en *agricultura*, en estudios de *astronomía* para el cálculo de la posición de cuerpos celestes y la predicción de sus órbitas, en los calendarios y el cálculo del tiempo, y por supuesto en *navegación* para mejorar la exactitud de la posición y de las rutas.

En fechas similares a los babilónicos, los egipcios toman conciencia del problema de la medición de ángulos y ellos fueron quienes establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos que se mantiene actualmente. Estos utilizaron la trigonometría para el cálculo de áreas de las tierras, volúmenes de los graneros, así como para la construcción de las grandes construcciones (pirámides).

De hecho se puede leer en el Papiro de Rhind que: "Si es una pirámide de 250 codos de alto y el lado de su base de 360 codos de largo, ¿cuál es su seked (inclinación)?"

Grecia Antigua

El estudio de la trigonometría pasó después a Grecia, en donde se destaca el matemático y astrónomo Griego Hiparco de Nicea(S II a. C.), por haber sido uno de los principales desarrolladores de la Trigonometría, es más se le considera el creador de la astronomía matemática y de la trigonometría. Las tablas de "cuerdas" –relacionaba valores de ángulos y lados de triángulos, y que es equivalente a una tabla de senos- que construyó fueron las precursoras de las tablas de las funciones trigonométricas de la actualidad.

Para confeccionar dichas tablas fue recorriendo una circunferencia de radio r desde los 0º hasta los 180º e iba apuntando en la tabla la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central y la circunferencia a la que corta. Esa tabla es similar a la moderna tabla del seno. No se sabe con certeza el valor que usó Hiparco para el radio r de esa circunferencia, pero sí se conoce que 300 años más tarde el astrónomo alejandrino Tolomeo utilizó r = 60, ya que los griegos adoptaron el sistema numérico sexagesimal (base 60) de los babilonios. Todo está compilado en su libro “El Almagesto”, cometió un error menor que 1/3600 de unidad. En dicho libro, explicaba métodos para calcular elementos desconocidos de un triángulo conociendo otros.

Por último Erastótenes de Cirene, utilizando la semejanza de triángulo intentó medir el tamaño de la Tierra (longitud meridiano 39.690 Km) y creó el calendario, que después sería adoptado por Julio Cesar, y al que se le conoce como calendario Juliano.

India

Al mismo tiempo que los griegos, los astrónomos de la India habían desarrollado también un sistema trigonométrico basado en la función seno en vez de cuerdas como los griegos. Esta función seno, era la longitud del lado opuesto a un ángulo en un triángulo rectángulo de hipotenusa dada.

Además, estudiaron otras razones trigonométricas como el coseno y el verseno (1-coseno), y tabularon estos datos en intervalos de 3,75º desde 0º hasta 90º.

Un matemático hindú, Varahamihira, gracias a los trabajos previos de Aryabhata, comenzó a utilizar una de las fórmulas más famosas de la trigonometría moderna, $sen^2(x)+cos^2(x)=1$

Árabes

Los astrónomos Árabes trabajaron con la función seno y a finales del siglo X y habían completado la función seno junto con las otras cinco funciones. Realizaron las tablas con r=1 en vez de con r=60, que dio a lugar a los valores modernos de la razones trigonométricas. Los científicos árabes también compilaron tablas de gran exactitud. Por ejemplo, las tablas del seno y de la tangente, construidas con intervalos de 1/60 de grado (1 minuto) tenían un error menor que 1 dividido por 700 millones.

También descubrieron y demostraron teoremas fundamentales de la trigonometría. Así Abul Wafa, da una expresión para el seno de la suma y diferencia de arcos que coincide con la actual;

$$Sen(\alpha\pm\beta)= sen(\alpha)*cos(\beta)\pm cos(\alpha)*sen(\beta)$$

y Nasir al-Tusi (s. XIII), estableció el teorema del seno: $b/c=r*sen(B)/r*sen(C)$

Occidente

La trigonometría se introdujo en occidente sobre el siglo XII a través de traducciones de libros de astronomía arábigos. En Europa fue el matemático y astrónomo alemán Johann

Müller, más conocido como Regiomontano, quien realizó el primer trabajo importante en esta materia, llamado "De Triangulus".

Durante el siguiente siglo otro astrónomo alemán, Georges Joachim, conocido como Retico, introdujo el concepto moderno de razones trigonométricas como proporciones en vez de como longitudes de ciertas líneas.

Trigonometría en tiempos modernos

En el XVII, el matemático John Napier inventó los logaritmos y gracias a esto los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje.

A mediados del siglo XVII **Isaac Newton** inventó el cálculo diferencial e integral. Newton encontró la serie para el sen *x* y series similares para el cos *x* y la tg *x*. Con la invención del cálculo las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis.

Por último, en el siglo XVIII, el matemático Leonhard Euler demostró que las propiedades de la trigonometría eran producto de la aritmética de los números complejos y además definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos. Establece la notación a, b, c para lados y A, B, C para ángulos

2. Análisis de contenido:

El proceso de determinar un contenido matemático escolar singular para un concepto o unidad didáctica es el eje central y el objeto del análisis de contenido. El proceso de análisis se lleva a cabo utilizando el conocimiento matemático escolar disponible sobre el tema en cuestión.

El análisis de contenido se va a estructurar en torno a 3 organizadores: la estructura conceptual, el sistema de representación y la fenomenología.

2.1. Estructura conceptual:

En este apartado abordo la cuestión de los significados de un concepto en las matemáticas escolares desde la perspectiva de su relación con otros conceptos. Por un lado voy a dividir los conceptos y por otro los procedimientos que identifico para el tema de trigonometría de 4º de la ESO, opción B. Los conceptos están divididos en Hechos, Conceptos y Estructuras. Los procedimientos estarán divididos en Destrezas, razonamientos y estrategias.

CONCEPTOS

HECHOS

Términos

- Arco y cuerda de una circunferencia.
- Ángulo. Medida y unidades: el grado.
- Clases de ángulos: agudos, rectos, obtusos, planos.
- Triángulo.
- Elementos de un triángulo rectángulo: catetos, hipotenusa, ángulos.
- Semejanza y congruencia. Teoremas de Pitágoras y Thales.

- Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno y tangente.

Notaciones

- º
- sen, cos, tan, cosec, sec, cotan,
- Los ángulos se notan normalmente por letras griegas: alfa, beta, gamma..., o con letras mayúsculas: Â. Los lados se notan con letras minúsculas: a,b,c.

Convenios

- º significa grado.
- sen(α) significa seno.
- cos(α) significa coseno.
- tan(α) significa tangente.
- sen^n(α) significa (sen(α))^n.
- Usos de paréntesis, cuando aparecen operaciones dentro del argumento de las razones trigonométricas.

Resultados

- La razón trigonométrica de un ángulo solo depende de su amplitud y no de la longitud de los lados del triángulo.
- La tangente es cociente entre seno y coseno.
- Teorema de Pitágoras
- Los tres ángulos de un triángulo suman 180º.

CONCEPTOS

- Relaciones fundamentales entre razones trigonométricas.
- Razones trigonométricas de ángulos.

ESTRUCTURAS

- Resolución de problemas de triángulos rectángulos.
- Teorema de la altura.

PROCEDIMIENTOS

DESTREZAS

- Relacionar ángulos y arcos de circunferencia.
- Identificar y dibujar distintos tipos de ángulos y triángulos.
- Conversión de unidades de medida de ángulos de modo manual y con calculadora.
- Identificar cateto mayor, menor e hipotenusa.
- Cálculo de las razones trigonométricas de ángulos agudos, a partir de su definición, en triángulos rectángulos.
- Construir un triángulo rectángulo del que se conocen las razones trigonométricas de sus ángulos.
- Uso de calculadora para cálculo de razones trigonométricas básicas.
- Uso de programas de geometría dinámica para representar ángulos y triángulos.

RAZONAMIENTOS

Deductivo

- Comprobación de las relaciones fundamentales con distintos ángulos.
- Cálculo de razones trigonométricas de ángulos notables a través del triángulo equilátero y de un cuadrado: 30º,45º,60º,90º.

Inductivo

- Reconocimiento de fórmulas.
- Reconocimiento de las relaciones fundamentales.
- Obtención de fórmulas a partir de otra conocida.

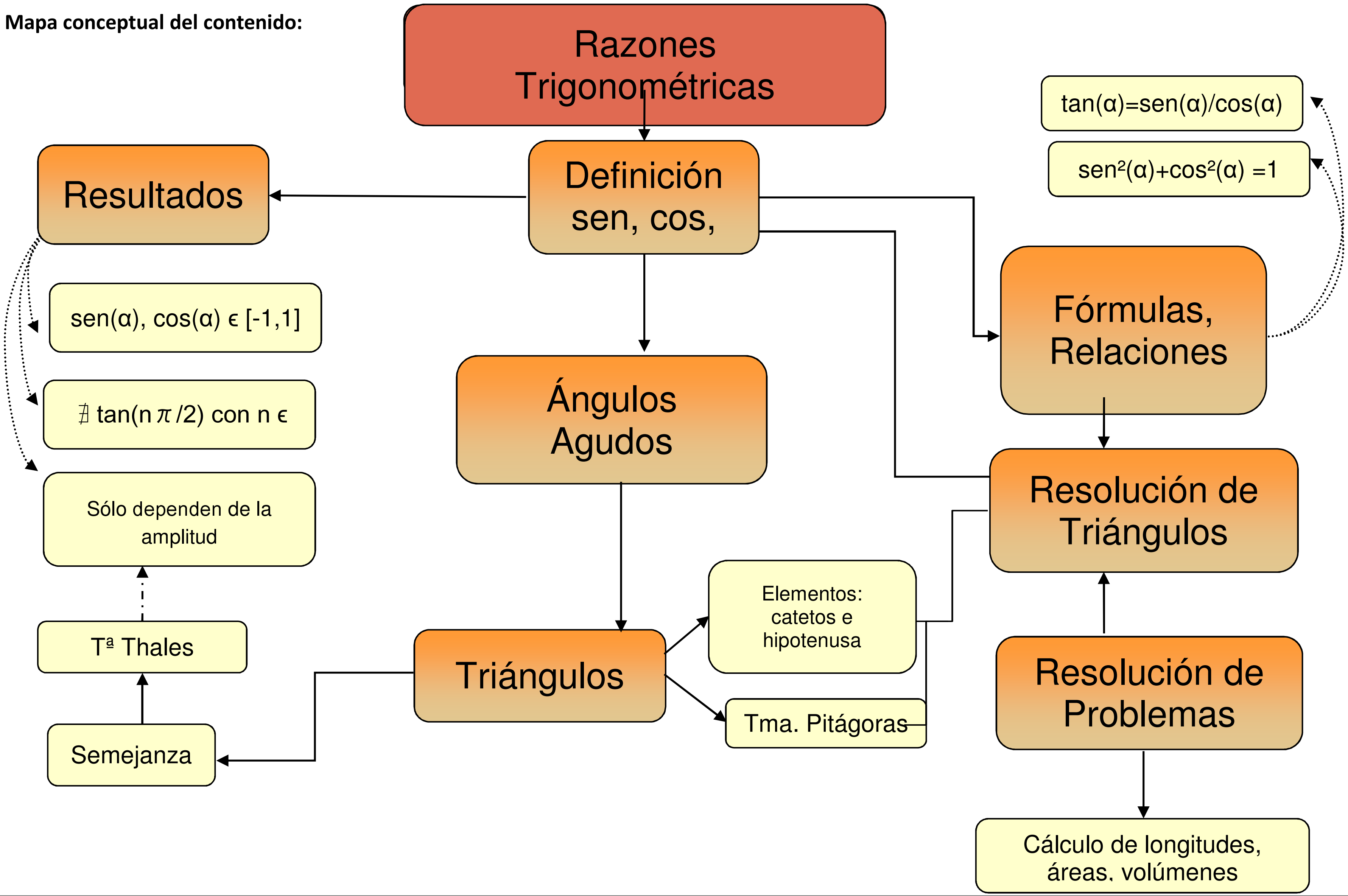
Figurativo

- Estimación del valor de un ángulo y de sus razones trigonométricas a partir de su representación gráfica.
- Uso de tablas de valores de razones trigonométricas.
- Representación de triángulos rectángulos para la resolución de problemas.

ESTRATEGIAS

- Resolución de triángulos rectángulos.
- Cálculo de áreas y longitudes.
- Resolución de diferentes problemas geométricos utilizando los distintos resultados teóricos conocidos
- Resolución de triángulos cualesesquiera mediante la "Estrategia de la altura".

Mapa conceptual del contenido:



2.2. Sistemas de representación

Los sistemas de representación son cualquier modo en que se hace presente un objeto, concepto o idea. Un mismo objeto admite una diversidad de representaciones. Van a contribuir a la comprensión de los conceptos.

Para la unidad didáctica en cuestión, he identificado los siguientes:

1. Verbal: por ejemplo cuando digo el seno cuadrado de x más el coseno cuadrado de x es igual a 1”
2. Simbólicos:

   Dentro de el:

   a. Algebraico: sen α=b/a

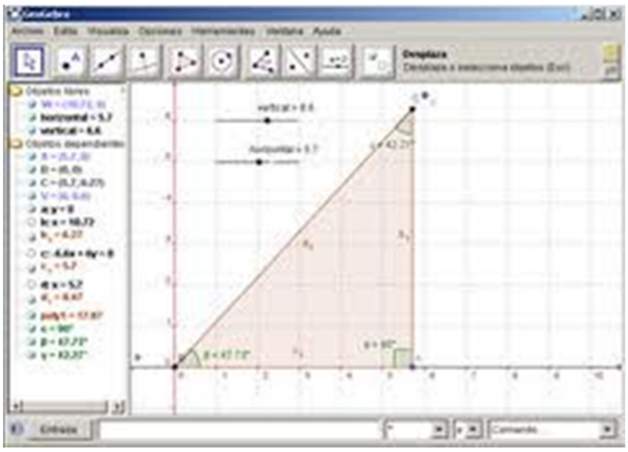
   b. Numérico: sen 30= 0,5
3. Tabular:

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

Razón	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Seno	0	½	√2/2	√3/2	1	0
Coseno	1	√3/2	√2/2	½	0	-1
Tangente	0	√3/3	1	√3	No existe	0
Cotangente	No existe	√3	1	√3/3	0	No existe
Secante	1	2√3/3	√2	2	No existe	-1
Cosecante	No existe	2	√2	2√3/3	1	No existe

4. Gráfico:

5. TIC: a través de “geogebra” , por ejemplo



A su vez, cada uno de estos sistemas de representación que he identificado está interconectado o relacionado entre sí, lo que favorece la comprensión de cada concepto porque puede ser identificado por el alumno a través de diferentes representaciones.

De esta manera, en el siguiente esquema se puede ver claramente cómo están interrelacionados todos los sistemas de representación anteriormente listados:

SIMBÓLICO ⟷ TABULAR

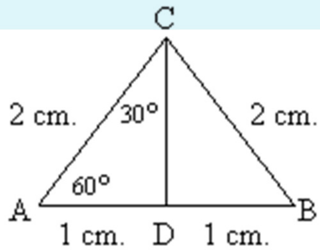
ALGEBRAICO
sen(α)=a/b

NUMÉRICO
•sen(30º)=0,5

VERBAL
El seno de treinta grados es cero coma cinco

α	Sin(α)
0º	0
30º	½
45º	0,7
90º	1
180º	0
270º	-1
360º	0

GRAFICO



2.3. Fenomenología

La Fenomenología estudia los fenómenos. La reflexión fenomenológica trata de establecer los diversos significados de los conceptos matemáticos mostrando cuáles son los sentidos en que estos conceptos se manejan cuando abordan distintas tareas y cuestiones, es decir, en el tratamiento de diversas familias de fenómenos.

Según hemos visto en el análisis conceptual, se pueden identificar las siguientes 3 estructuras para el tema en concreto de trigonometría de 4º de la ESO, a saber:

- Ángulos y triángulos.
- Definición y cálculo de las razones trigonométricas (a través de triángulo rectángulo).
- Resolución de triángulos rectángulos.

A su vez, he encontrado los siguientes contextos:

- Para los ángulos, la clasificación de triángulos
- Para la resolución de triángulos rectángulos, el cálculo de magnitudes (principalmente longitudes y áreas).

Así, principalmente me voy a centrar en la subestructura de resolución de triángulos, relacionada con el cálculo de magnitudes como contexto, para extraer toda la fenomenología. De esta forma, la fenomenología encontrada podría relacionarse como sigue con respecto a las situaciones que propone PISA (1):

- ✓ Cálculo del área de un polígono regular por descomposición en triángulos rectángulos. Las situaciones en las que se pueden ver involucradas este fenómeno van desde la meramente científica, en la que se pide calcular el área de cierto polígono, hasta la educacional o laboral.
- ✓ Determinación de la altura de cualquier entidad, por ejemplo un edificio. Las situaciones involucradas son: laborales, públicas, científicas.
- ✓ Determinar la distancia inaccesible entre 2 puntos. Situaciones educativa-laboral y personal
- ✓ Calcular pendientes medias, por ejemplo la de una carretera, o la de una montaña a través de un mapa. Se implican situaciones como son la laboral o la personal o incluso públicas.
- ✓ Calculo de volúmenes, por ejemplo el de una pirámide. Situaciones científicas y educacionales se pueden poner en juego.
- ✓ Cálculos de ángulos determinados para la orientación, por ejemplo en navegación. Situaciones laborales- educativas podrían verse involucradas.

(1) *Las situaciones que propone PISA son personal, laboral, pública y científica.*

3. Análisis Cognitivo:

En este análisis, el actor principal va a ser el alumno. Debo empezar a acotar el análisis de contenido de manera que se estructure en torno al significado del tópico matemático que será objeto de enseñanza. Expectativas de aprendizaje

¿Qué espero que aprendan mis alumnos? Partiendo de mi análisis de contenido, debo concretar cuáles son mis objetivos para el aprendizaje de mis pupilos y qué competencias matemáticas pretendo movilizar con la consecución de dichos objetivos.

Así, concretando, para el tema de trigonometría de 4º de la ESO, voy a basar mi estudio en los 3 siguientes focos principales (o estructuras principales) extraídos del análisis de contenido realizado en la sección 2:

1. Ángulos y triángulos
2. Definición y cálculo de las razones trigonométricas (a través de triángulo rectángulo)
3. Resolución de triángulos rectángulos.

Para cada uno de estas estructuras he encontrado una serie de objetivos, que a su vez pretenden movilizar una serie de competencias obtenidas del informe PISA. Todo queda recogido en la siguiente tabla:

F	*O*	*OBJETIVOS ESPECÍFICOS*	*PR*	*AJ*	*C*	*M*	*RP*	*R*	*LS*	*HT*
1	*1*	*Identificar y diferenciar distintos tipos de triángulos y sus elementos*	*X*		*X*					
	2	*Convertir distintas unidades de medida de ángulos, de modo manual y con calculadora*							*X*	*X*
2	*3*	*Calcular las razones trigonométricas de ángulos agudos a través del triángulo rectángulo.*	*X*					*X*		
	4	*Deducir las razones trigonométricas de ángulos notables usando figuras geométricas (por ejemplo a partir del triángulo equilátero y el cuadrado)*		*X*				*X*		
3	*5*	*Analizar el enunciado de un problema y construir una representación gráfica que modelice la situación Inicial*				*X*	*X*	*X*		*X*
	6	*Discernir a partir de una representación gráfica si es posible resolver el problema por triangulación*		*X*		*X*	*X*			*X*
	7	*Resolver un triángulo mediante las diversas estrategias aprendidas: teorema de la altura, conocidos 2 lados, conocidos un lado y ángulo*	*X*						*X*	*X*
	8	*Seleccionar y aplicar diferentes técnicas de cálculo del área de un triangulo*					*X*	*X*	*X*	
	9	*Analizar y comentar la coherencia de los resultados obtenidos al resolver un problema justificando su validez*	*X*	*X*	*X*	*X*	*X*			

3.1. Limitaciones del aprendizaje

Son aquellas debidas a la especificidad de mi contenido, es decir, los problemas de conducta, atención, explicación… no se tendrán en cuenta. El error es parte del proceso de aprendizaje y lo que hay que hacer es sacarle el máximo partido posible.

Por tanto, para mi tema en concreto, encuentro los siguientes errores por cada uno de los focos o estructuras atendidas:

1º FOCO

1. Confundir elementos de un triángulo (catetos, hipotenusa, alturas) (E1).
2. Confundir distintos tipos de triángulos (E2).
3. Creer que un triángulo solo tiene una base y una altura (E3).
4. Error en el paso de grados a sistema decimal (E4).
5. Inadecuada conversión de escala de medida: 37´5 º ≠ 37º 50´(E5).

2º FOCO

6. Calcular razones trig. de agudos a partir de triángulo no rectángulo (E6).
7. Confundir la definición del seno y el coseno (E7).
8. No caer en la cuenta de que lo valores del seno y el coseno son siempre menores o iguales que 1(E8).
9. No considerar que las razones trigonométricas se definen a partir de un ángulo. Sen α = 0,5 --> α = 0,5/sen (E9).

3º FOCO

10. No identificar el triángulo rectángulo en el modelo de resolución propuesto (o identificarlo mal, es decir, que no sea rectángulo) (E10).
11. Aplicar incorrecta de las diferentes estrategias de resolución de triángulos (E11).
12. Utilizar de la calculadora con un modo erróneo DEG en el cálculo de las razones trigonométricas (E12).
13. Errores derivados de la falta de conocimientos geométricos básico. Por ejemplo: el radio de la circunferencia es perpendicular a su tangente (E13).
14. Errores debidos a la incorrecta comprensión de los enunciados (E14).
15. No comprobar la adecuación de los resultados del problema a la realidad (E15).

3.2. Oportunidades de aprendizaje

Voy a estudiar las oportunidades de aprendizaje basándome en las tareas que el profesor plantea a sus alumnos. Son demandas que el profesor plantea a los escolares. Las tareas movilizan su conocimiento sobre un tema matemático determinado. Concretan los objetivos específicos de ese tema en términos de actuaciones. Implican que un escolar ponga en juego su conocimiento sobre conceptos y procedimientos. Activan sus competencias y contribuyen a su desarrollo. Pueden servir para la detección o tratamiento de errores

De esta forma las tareas deben atender a varios criterios:

- Que sean compatibles con los contenidos que se están trabajando
- Que contribuyan al logro de los objetivos específicos seleccionados y a superar errores de los escolares
- Que permitan incorporar recursos que optimicen el logro de esos objetivos
- Que sean compatibles con técnicas de gestión del aula
- Que constituyen un conjunto coherente.

4. Unidad didáctica

En este apartado, voy a diseñar/seleccionar una serie de tareas, de tal manera que pueda barrer todos los objetivos propuestos en la anterior sección pero para el foco 2 con una pequeña incursión en el foco 3. Las tareas deben ser capaces de superar todos los errores encontrados. Más tarde, justificaré la secuenciación que he seguido, haciendo hincapié en que objetivos se han tratado y sobre que competencias y en qué grado de dificultad pueden repercutir cada tarea. La secuenciación de las tareas deberá ser coherente con el orden ascendente en dificultad de las tareas.

De esta forma propondré una serie de tareas, para luego analizarlas. Más tarde analizaré la secuenciación en general justificándola con respecto a secuenciación, coherencia finalidad, cubrimiento expectativas y errores, coherencia con la complejidad y por ultimo con el número de sesiones y fases.

4.1. El currículo para la opción 2 de 4º de la ESO

El Real Decreto 1631/2006, de 29 de Diciembre habla de los contenidos comunes para la opción 2 en cuanto a trigonometría. Dichos contenidos son: Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos. Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.

4.2. Propuesta de secuencia de tareas

A continuación, voy a presentar todas las tareas de las que está compuesta la unidad didáctica que propongo. Dichas tareas están clasificadas según la fase a la que pertenezcan: inicial, desarrollo o de cierre.

Cada tarea, estará analizada según los siguientes ítems:

a) <u>Recursos:</u> se especificarán los recursos necesarios para realizar la tara propuesta. Ya sean recursos tipo papel y lápiz o más tecnológico como pueden ser la calculadora u ordenador portátil.

b) Agrupamiento: se describirá cómo será el agrupamiento en clase, ya sea individual, en parejas, en grupos,…

c) Interacción: se detallará cómo será la relación entre el profesor y los alumnos y entre esto últimos entre sí.

d) Objetivo: cual o cuales de los objetivos descritos en el análisis cognitivo se está tratando con esta tarea.

e) Errores: que errores se están intentando detectar o que errores se están tratando de superar de los descritos en el análisis cognitivo de la sección 3. Por tanto, la tarea puede estar enfocada a detectar errores (Diagnostico) o a superarlos (superación).

f) Complejidad: que grado de dificultad de cada una de las competencias descritas por PISA (pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelizar, resolver problemas, lenguaje simbólico y herramientas tecnológicas) se cree que se está movilizando con esta tarea. A saber, que los grados de complejidad son 3: reproducción, conexión y reflexión.

g) Finalidad: cuál es la intención de la tarea. Es una tarea para conocer los aprendizajes previos, o es para motivar. Es una tarea de exploración, o es de construcción de significados. Es una tarea de aplicación o de ejercitación.

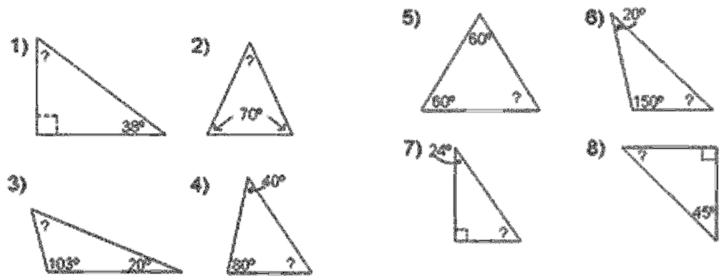
Así, la secuenciación de las tareas es la siguiente:

Tareas de la fase de inicio:

Tarea 1

Nombre: Analizando triángulos

Enunciado:



POR SUS LADOS →	Escaleno	Isósceles	Equilátero
Triángulos			
POR SUS ÁNGULOS →	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
Triángulos			

a) Halla el ángulo que falta en cada triángulo.

b) Clasifica los triángulos por sus ángulos y sus lados rellenando esta tabla:

c) Intenta dibujar los siguientes triángulos, y en el caso en el que no sea posible, explica la razón:

- Obtusángulo equilátero.
- Obtusángulo isósceles.
- Rectángulo equilátero.

d) Localiza en cada triángulo las tres alturas. ¿Qué ocurre en los triángulos rectángulos?

Análisis de la tarea 1 atendiendo a los puntos anteriormente descritos:

a. Recursos: Lápiz, papel y pizarra

b. Agrupamiento: Individualmente.

c. Interacción: El profesor resuelve las dudas que puedan surgir. Después resuelve el ejercicio a toda la clase.

d. Objetivo: Identificar y diferenciar distintos tipos de triángulos y sus elementos.

e. Errores: Confundir elementos de un triángulo (catetos, hipotenusa, alturas), Confundir distintos tipos de triángulos, Creer que un triángulo solo tiene una base y una altura

f. Complejidad:

Pensar y razonar, en modo reproducción: puesto que aborda preguntas del tipo, ¿Cuánto vale…?. A mi entender no llega a ser conexión puesto que no hay que extraer de entre diferentes tipos información como pueden ser gráficos, tablas, etc.

Argumentar y razonar: entiendo que está en modo reproducción, pues simplemente se tienen que seguir procesos cuantitativos estándar. Por ejemplo procesos sencillos de cálculo y sus resultados: despejar un ángulo sabiendo que los 3 en un triángulo suman 180.

Comunicar: en grado reproducción, puesto que se le pide al alumno que se exprese por escrito sobre cuestiones sencillas, tales como reproducir nombres o propiedades de triángulos.

g. Finalidad: es una tarea enfocada a conocer los conocimientos previos del grupo clase.

Tarea 2:

Nombre: La calculadora y los ángulos

Enunciado: Recuerda cómo se introduce un ángulo en grados en este ejemplo: Se introduce el modo Deg (degree =grado), con la tecla $\boxed{\text{MODE}}$ y después, para introducir el ángulo 63º 52 ’41’’ introducimos la secuencia 63 $\boxed{\circ\,'\,''}$ 52 $\boxed{\circ\,'\,''}$ 41 $\boxed{\circ\,'\,''}$

Realiza ahora los siguientes cálculos:

a) 2.5 · 62º32’25’’
b) 32º25’ – 24.5º

Análisis de la tarea 2 atendiendo a los puntos anteriormente descritos:

a. Recursos: Lápiz, papel, calculadora y pizarra

b. Agrupamiento: Individualmente.

c. Interacción: El profesor resuelve las dudas que puedan surgir. Después resuelve el ejercicio a toda la clase.

d. Objetivo: Convertir distintas unidades de ángulos de modo manual y con calculadora.

e. Errores: Inadecuada conversión de escala de medida: 37´5 º ≠ 37º 50´ e inadecuada conversión de escala de medida.

f. Complejidad:

Lenguaje simbólico: en modo conexión, puesto que la tarea está en un contexto en el que se ha de manejar fórmulas con expresiones con símbolos de 2 maneras diferentes mezcladas (una sexagesimal y la otra decimal)

Herramientas tecnológicas: en modo reproducción.

g. Finalidad: es una tarea enfocada a conocer los conocimientos previos del grupo clase

Tarea 3

Nombre: Los bomberos

Enunciado:

Unos bomberos necesitan saber a qué altura máxima pueden llegar con su camión. Saben que el ángulo máximo que forma el brazo de la grúa con la horizontal es de 60º, y que la longitud máxima del brazo es de 30 metros. ¿Puedes ayudarles?

a. Realiza un dibujo en el que se recojan los datos del enunciado.

b. Dibuja, usando el transportador de ángulos, un triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 60º, ¿es este triángulo semejante al del apartado anterior? ¿Por qué?

c. Utiliza lo que sabes sobre semejanza para, con la ayuda del triángulo que has construido en el apartado b, calcular la altura máxima de la grúa.

d. Sabemos que el seno de 60º es 0'86 aproximadamente (compruébalo en el triángulo que dibujaste en el apartado b). A partir de este dato, ¿podrías haber resuelto el problema inicial sin necesidad de dibujar el triángulo del apartado b para ayudarte? Resuélvelo siguiendo ese procedimiento.

e. ¿Tiene alguna ventaja el procedimiento del apartado anterior frente al del apartado c? ¿cuál?

Análisis de la tarea 3 atendiendo a los puntos anteriormente descritos:

a. Recursos: Uso transportador para representar ángulos. Uso regla para medir longitudes. Uso de calculadora científica para cálculo numéricos. Lápiz, papel y pizarra

b. Agrupamiento: Apartados a y b individualmente. Apartados c y d en parejas. Apartado e en 4 grupos.

c. Interacción: El profesor resuelve las dudas que puedan surgir. Después de apartados c y d hace puestas en común. Después del e se recopilan las diferentes opiniones de los grupos y se debate entre grupo clase para llegar a conclusión final.

d. Objetivo: Calcular las razones trigonométricas de ángulos agudos a través del triángulo rectángulo.

e. Errores: Confundir elementos de un triángulo (catetos, hipotenusa, alturas)

f. Complejidad:

Argumentar y justificar: en modo conexión pues, al relacionar la semejanza de triángulos, con las razones trigonométricas, se conduce al alumno a seguir un encadenamiento de razonamientos matemáticos de diferentes tipos.

Comunicar en conexión, puesto que es necesario explicar resultados que implican relaciones entre ellos. Además implica entender expresiones orales o escritas provenientes de terceros.

Resolver problemas en reproducción: se resuelve un problema de manera cerrada, en la que solo hay una manera de hacerlo

g. Finalidad: Aprendizaje previo, motivación y realidad.

Tareas de la fase de desarrollo:

Tarea 4

Nombre: Dibuja y calcula tú mismo.

Enunciado:

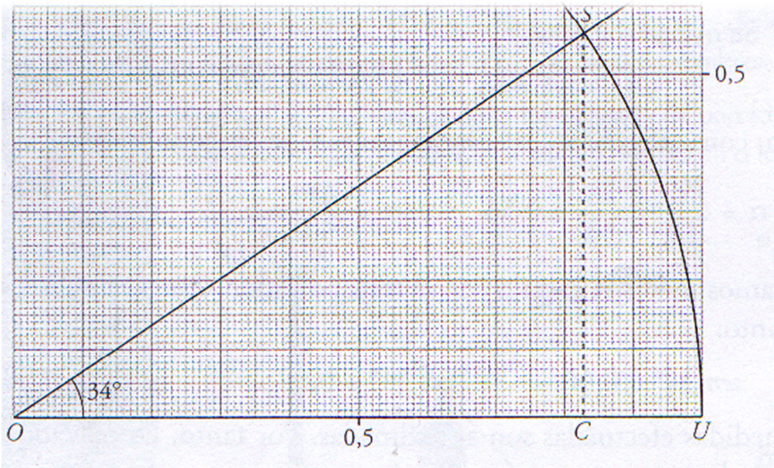
Sobre papel milimetrado se traza un cuadrante de circunferencia de radio 10 cm, que tomaremos como unidad.

Los ángulos se sitúan con un lado sobre el eje X y el otro lado donde corresponda para e ángulo requerido.

Como la hipotenusa mide 1, los catetos SC Y OC miden senα y cos, respectivamente. Las lecturas se hacen con facilidad en el papel milimetrado: sen34=0,56 y cos34=0,8

Puesto que OU =1, la tangente se mide también directamente: Tg 34=UT/OU=UT/1=UT=0,68

Utilizando el anterior aparato y un transportador de ángulos, calcula el seno y coseno y tangente de 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60 y 80 grados, ¿puedes explicar que ocurre en 0 y 90 grados?



Análisis de la tarea 4 atendiendo a los puntos anteriormente descritos:

a. Recursos: Uso transportador para representar ángulos. Uso regla para medir longitudes. Uso de calculadora científica para cálculo numéricos. Lápiz, papel y pizarra

b. Agrupamiento: en parejas

c. Interacción: El profesor resuelve las dudas que puedan surgir. Se mueve por la clase atendiendo a los subgrupos y observando sus respuestas. Después resuelve todos los apartados en la pizarra.

d. Objetivo: Calcular las razones trigonométricas de ángulos agudos a través del triángulo rectángulo.

e. Errores: Confundir los elementos de un triángulo rectángulo (catetos, hipotenusas,..) , confundir la definición de seno y coseno, no caer en la cuenta de que los valores de seno y coseno son siempre menores o iguales que 1.

f. Complejidad:

Argumentar y justificar: conexión, puesto que en = y 90º, el alumno debe hacerse preguntas de que puede y no puede pasar, por ejemplo que en 90 no existe la tangente.

Representación: en modo reproducción, puesto que solo se le pide al alumno que extraiga información de una sola fuente (sin tener que relacionar con otra). Además es un proceso estándar previamente conocido.

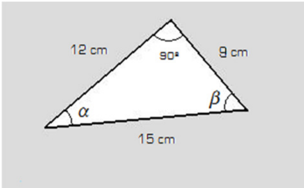
g. Finalidad: Es una tarea de exploración y de construcción de significados

Tarea 5

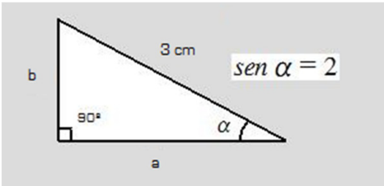
Nombre: Aquí pasa algo

Enunciado:

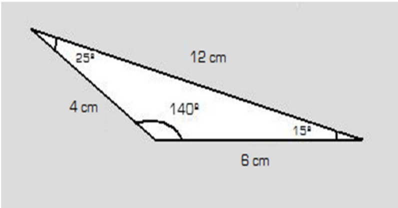
a) Calcula las razones trigonométricas de todos los ángulos del siguiente triángulo. ¿Has podido calcular las del ángulo de 90º? Obtén los ángulos agudos del triángulo a partir de sus razones, con ayuda de la calculadora y exprésalos en radianes y grados.



b) Con los datos de la figura, calcula la longitud del cateto a. Calcula ahora la longitud del cateto b utilizando el Teorema de Pitágoras, ¿has encontrado algún problema? ¿a qué se debe?



c) Calcula las razones trigonométricas de los ángulos del siguiente triángulo.



d) Calcula ayudándote de un triángulo equilátero de lado 1, y de un cuadrado de lado 1, las razones trigonométricas de los ángulos de 30º,60º y 45º.

Análisis de la tarea 5 atendiendo a los puntos anteriormente descritos:

a. Recursos: Calculadora para algunos cálculos y para el uso de las funciones arco. Lápiz, papel y pizarra

b. Agrupamiento: todos los apartados de forma individual.

c. Interacción: El profesor resuelve las dudas que puedan surgir, y al final se recogen los resultados y se debate acerca de las cuestiones expuestas, apoyándose en explicación en la pizarra.

d. Objetivo: Convertir distintas unidades de medida de ángulos, de modo manual y con calculadora y calcular las razones trigonométricas de ángulos agudos a través del triángulo rectángulo y deducir razones trigonométricas de ángulos notables usando figuras geométricas (cuadrados, triángulos equiláteros,…)

e. Errores: Confundir elementos de un triángulo (catetos, hipotenusa, alturas),confundir la definición de seno y coseno, no considerar la acotación del seno y coseno y calcular razones trigonométricas a partir de los elementos de triángulos no rectángulos

f. Complejidad:

Pensar y razonar. Conexión. Se pide que se calculen razones trigonométricas en conceptos que difieren ligeramente de cómo fueron introducidas por primera vez, como por ejemplo calcular el seno de un ángulo mayor de 90 en un triángulo no rectángulo el cálculo de razones trigonométricas de ángulos notables a través de ciertas figuras geométricas

Comunicar: conexión. La actividad pide al alumno explicar asuntos que implican relaciones, va más allá de la simple reproducción de propiedades básicas de objetos (triángulos).

g. Finalidad: exploración, elaboración y construcción de significados

Tarea 6

Nombre: ¿Qué ángulo forma los rayos solares con la Tierra?

Enunciado: calcular a partir de tu sombra y de tu altura, el ángulo que forman los rayos de sol con la horizontal.

Análisis de la tarea 6 atendiendo a los puntos anteriormente descritos:

a. Recursos: Calculadora para algunos cálculos , fluxómetro, papel y lápiz

b. Agrupamiento: Esta tarea se realizaría invitando a los alumnos en un día soleado a salir al patio. Allí, se les colocaría de 3 en 3. Un alumno sirve para proyectar la sobra y entre los otros 2 miden.

c. Interacción: El profesor resuelve las dudas que puedan surgir, y al final se recogen los resultados y se debate acerca de las cuestiones expuestas, apoyándose en explicación en la pizarra

d. Objetivo: Analizar el enunciado de un problema y construir una representación gráfica que modelice la situación inicial.

e. Errores: Confundir elementos de un triángulo (catetos, hipotenusa, alturas), no identificar el triángulo rectángulo en el modelo de resolución propuesto (o identificarlo mal, es decir, que no sea rectángulo) y no comprobar la decuación de los resultados del problema a la realidad.

f. Complejidad:

Construcción de modelos: conexión, puesto que hay que "exportar" a la realidad las estructuras matemáticas necesarias y el contexto es diferente a como se introdujo en un principio, además, comporta saber interpretar el resultado, comparándolo con la realidad del problema.

Resolución de problemas: modo reproducción, puesto que comporta resolver de manera cerrada en problemas ya practicados.

g. Finalidad: motivación y aplicación.

Tareas de la fase de cierre:

Tarea 7

Nombre: Los ciclistas

Enunciado:

Dos amigos salen en bicicleta a dar una vuelta. Uno de ellos lleva un cuentakilómetros y el otro un altímetro. La altitud de salida es de 600 m. y tras subir una rampa de pendiente constante, el cuentakilómetros marca 4 km y el altímetro indica una altitud de 900 m. A continuación recorren un segundo tramo entre dos puntos que en el mapa distan 2 km. y cuya diferencia de alturas es de 100 m. Posteriormente vuelven a ascender otra rampa de pendiente 7%, según indica una señal de tráfico, cuya distancia según el cuentakilómetros es de 4 Km. No conocen la altura final por haberse estropeado el altímetro. A partir de estos datos:

a) ¿Cuál es el ángulo que forma la primera rampa con la horizontal?
b) ¿Cuál es el ángulo que forma la segunda rampa con la horizontal?
c) ¿Cuál es la altitud final a la que llegaron?
d) Construye una gráfica del perfil longitudinal en el que aparezca la altitud en función de la distancia recorrida.
e) Si el camino recorrido estuviera compuesto por una sola rampa, ¿cuál sería la pendiente media de este tramo?

Análisis de la tarea 7 atendiendo a los puntos anteriormente descritos:

a. Recursos: Uso de calculadora científica para diversos cálculos y el uso de las funciones arco. Lápiz, papel y pizarra o proyector

b. Agrupamiento: 2 grandes grupos para los apartados a, b y c. Apartado d un representante de cada grupo y apartado e grupo clase.

c. Interacción: El profesor resuelve dudas a los grupos. Apartado d y e orienta a representantes y grupo clase y destaca los conceptos más representativos.

d. Objetivos: *Analizar el enunciado de un problema y construir una representación gráfica que modelice la situación Inicial. Discernir a partir de una representación gráfica si es posible resolver el problema por triangulación Resolver un triángulo mediante las diversas* *estrategias aprendidas: teorema de la altura, conocidos 2 lados, conocidos un lado y ángulo. Analizar y comentar la coherencia de los resultados obtenidos al resolver un problema justificando su validez.*

e. Errores: Confundir elementos de un triángulo (catetos, hipotenusa, alturas) y confundir la definición de seno y coseno. No identificar el triángulo rectángulo en el modelo de resolución propuesto (o identificarlo mal, es decir, que no sea rectángulo. Aplicar incorrectamente las diferentes estrategias de resolución de triángulos. Errores derivados de la falta de conocimientos geométricos básico. Errores debidos a la incorrecta comprensión de los enunciados. No comprobar la adecuación de los resultados del problema a la realidad.

f. Complejidad:

Pensar y razonar en grado reflexión. Requiere la comprensión por parte del alumno de conceptos matemáticos que difieren de cómo se introdujeron por primera vez Existe matices entre estos conceptos, por ejemplo., no es lo mismo un pendiente expresada en grados que en tanto por ciento

Modelizar en conexión. Requiere una traducción de la realidad a un modelo matemático, haciendo uso de estructuras matemáticas ligeramente a diferentes a como se introdujeron al inicio. Por ejemplo, pasar de una carretera ascendente, a un triángulo rectángulo.

Resolver problemas en reflexión: para la resolución de la tarea, se requiere establecer diferentes conexiones entre distintas formas de representar (del lenguaje verbal al gráfico y de este al algebraico). Conlleva además una reflexión de la manera de llegar a la solución y de contrastar esta con la realidad.

g. Finalidad: Construcción de significados, aplicación y ejercitación.

Tarea 8

Nombre: La pirámide de Dashur

Enunciado: El faraón Snofru ha decidido construir una pirámide en Dashur, al sur de la necrópolis de Menfis.

Para ello ha escogido una pequeña meseta cuadrangular de 300x300 metros. Es su deseo que la altura del monumento sea 150 metros. Por motivos constructivos los obreros no pueden levantar la construcción más allá de un ángulo de 45º grados.

a) ¿Es posible satisfacer el deseo del faraón? Razona tu respuesta
b) Temiendo la posible entrada de saqueadores a la pirámide el faraón exige la construcción de una galería subterránea descendente y rectilínea de 150 metros de longitud partiendo de la base de la pirámide. Si las aguas subterráneas se encuentran a 75 metros de profundidad y pretendemos alcanzarlas, ¿con qué ángulo se debe realizar la excavación?
c) Para ocultar los tesoros del faraón se decide construir una cámara subterránea descendente con una pendiente de 60º y una longitud total excavada de 50 metros. ¿A qué distancia en horizontal se encuentra de su entrada?
d) Tras llegar a los 100 metros de altura se comienzan a apreciar grietas en la base de la pirámide, por lo que se decide reducir la altura final del monumento a 125 metros. ¿Qué nuevo ángulo se debe dar a la fachada a la pirámide a partir de este punto para alcanzar la altura deseada?

Análisis de la tarea 8 atendiendo a los puntos anteriormente descritos:

a. Recursos: Uso de calculadora científica para cálculo de razones trigonométricas y operaciones. Lápiz y papel, pizarra o proyector.

b. Agrupamiento: Grupos de 4 para todos los apartados

c. Interacción: El profesor resuelve dudas a los grupos. Al final de la actividad el profesor mostrará a través del proyector el método de resolución

d. Objetivos: Analizar el enunciado de un problema y construir una representación gráfica que modelice la situación Inicial. Discernir a partir de una representación gráfica si es posible resolver el problema por triangulación Resolver un triángulo mediante las diversas estrategias aprendidas: teorema de la altura, conocidos 2 lados, conocidos un lado y ángulo. Analizar y comentar la coherencia de los resultados obtenidos al resolver un problema justificando su validez.

e. Errores: Confundir elementos de un triángulo (catetos, hipotenusa, alturas) y confundir la definición de seno y coseno. No identificar el triángulo rectángulo en el modelo de resolución propuesto (o identificarlo mal, es decir, que no sea rectángulo. Aplicar incorrectamente las diferentes estrategias de resolución de triángulos. Errores derivados de la falta de conocimientos geométricos básico. Errores debidos a la incorrecta comprensión de los enunciados. No comprobar la adecuación de los resultados del problema a la realidad.

f. Complejidad:

Pensar y razonar en grado reflexión: Requiere la comprensión por parte del alumno de conceptos matemáticos que difieren de cómo se introdujeron por primera vez Existe matices entre estos conceptos, por ejemplo.,

Argumentar y justificar en conexión: para el apartado a) se debe se debe razonar en el ¿se puede o no se puede y por qué? ¿Qué queremos obtener?

Resolver problemas en reflexión: para la resolución de la tarea, se requiere establecer diferentes conexiones entre distintas formas de representar (del lenguaje verbal al gráfico y de este al algebraico). Conlleva además una reflexión de la manera de llegar a la solución y de contrastar esta con la realidad.

g. Finalidad: Síntesis, ejercitación y aplicación

4.3. Justificación de la secuencia

Atendiendo a cada uno de los criterios expuestos al inicio de la sección 4.1, voy a justificar la secuenciación que he seguido y si se ha logrado con la unidad didáctica la consecución de los objetivos y detección de errores propuestos en el anaisi cognitivo..

En primer lugar voy a analizar el número de sesiones y la distribución de tareas atendiendo a cada fase.

<u>Análisis de sesiones y fases</u>

Sesiones y fases:		**Tareas**							
Fase	**Sesión**	1	2	3	4	5	6	7	8
Inicial	1	▲							
	1		▲						
	2			▲					
Desarrollo	3				▲				
	3					▲			
	4					▲			
	4						▲		
Cierre	5							▲	
	6								▲

Fijándonos en la tabla, se puede observar que hay un total de 8 tareas distribuidas en un total de 6 sesiones. Hay 3 tareas iniciales, otras 3 de desarrollo y 2 de cierre. Son precisamente estas las que más sesiones se llevan, por ser más complicadas, en general, necesitan de una sesión cada una. La tarea 3, la de los bomberos, necesita también de una sesión entera pues participa todo el bloque de clase en ella, se debe llegar a unas conclusiones entre toda la clase y por tanto requiere mas tiempo.

Análisis del cubrimiento de expectativas u objetivos.

Fijándonos en la siguiente tabla, se puede interpretar en qué medida se han cubierto los objetivos propuestos en el análisis cognitivo de la sección 3. La tabla muestra que objetivo se ha cubierto en función de la tarea.

Cubrimiento de objetivos o expectativas		Tareas							
Objetivo		1	2	3	4	5	6	7	8
O1	*Identificar y diferenciar distintos tipos de triángulos y sus elementos*	▲							
02	*Convertir distintas unidades de medida de ángulos, de modo manual y con calculadora*		▲			▲			
O3	*Calcular las razones trigonométricas de ángulos agudos a través del triángulo rectángulo.*			▲	▲	▲			
O4	*Deducir las razones trigonométricas de ángulos notables usando figuras geométricas (por ejemplo a partir del triángulo equilátero y el cuadrado)*					▲			
05	*Analizar el enunciado de un problema y construir una representación gráfica que modelice la situación Inicial*						▲	▲	▲
06	*Discernir a partir de una representación gráfica si es posible resolver el problema por triangulación*						▲	▲	▲
07	*Resolver un triángulo mediante las diversas estrategias aprendidas: teorema de la altura, conocidos 2 lados, conocidos un lado y ángulo*						▲	▲	▲
08	*Seleccionar y aplicar diferentes técnicas de cálculo del área de un triangulo*								
09	*Analizar y comentar la coherencia de los resultados obtenidos al resolver un problema justificando su validez*						▲	▲	▲

Atendiendo a la tabla se puede concluir que se a lo largo de todas las tareas se barren todos los objetivos propuestos en el análisis cognitivo, con la excepción del Objetivo 8. Hay tareas, como la 6, 7, 8, pertenecientes a las tareas de cierre, en la que se barren hasta 4 objetivos, todos ellos de la estructura de o foco de resolución de problemas, veremos luego que esto es lógico que sea al final, pues son las tareas que tiene un mayor grado de complejidad. Sin embargo, hay tareas en las que apenas solo se toca un objetivo, como son las 3 primeras, ambas pertenecientes a la fase de inicio. Esto también tiene su lógica, pues son tareas enfocadas al conocimiento de aprendizajes previos y fomentar la motivación y es por esto que cada una trata un único objetivo.

Análisis del cubrimiento de errores o limitaciones.

Observemos la siguiente tabla, está estructurada de tal manera que identifica el error que es tratado en cada tarea. Recoge los errores descritos en el análisis cognitivos en relación a cada una de las tareas propuestas en la unidad didáctica:

Cubrimiento de errores o limitaciones		TAREAS							
Errores		1	2	3	4	5	6	7	8
E1	Confundir elementos de un triángulo rectángulo (catetos, hipotenusa, alturas) (E1).	▲	▲	▲	▲	▲	▲		▲
E2	Confundir distintos tipos de triángulos (E2).	▲							
E3	Creer que un triángulo solo tiene una base y una altura (E3).	▲				▲			
E4	Error en el paso de grados a sistema decimal (E4).		▲						
E5	Inadecuada conversión de escala de medida: 37´5 º ≠ 37º 50´(E5).		▲						
E6	Calcular razones trig. de agudos a partir de triángulo no rectángulo (E6).					▲	▲		
E7	Confundir la definición del seno y el coseno (E7).				▲	▲			
E8	No caer en la cuenta de que lo valores del seno y el coseno son siempre menores o iguales que 1(E8).				▲				
E9	No considerar que las razones trigonométricas se definen a partir de un ángulo. Sen α = 0,5 --> α = 0,5/sen (E9)								
E10	No identificar el triángulo rectángulo en el modelo de resolución propuesto (o identificarlo mal, es decir, que no sea rectángulo) (E10).						▲	▲	▲
E11	Aplicar incorrecta de las diferentes estrategias de resolución de triángulos (E11).							▲	▲
E12	Utilizar de la calculadora con un modo erróneo DEG en el cálculo de las razones trigonométricas (E12).								
E13	Errores derivados de la falta de conocimientos geométricos básico. Por ejemplo: el radio de la circunferencia es perpendicular a su tangente (E13)							▲	▲
E14	Errores debidos a la incorrecta comprensión de los enunciados							▲	▲
E15	No comprobar la adecuación de los resultados del problema a la realidad (E15).						▲	▲	▲

Indagando en la tabla, se puede observar que de todos los errores propuestos en el análisis cognitivo, solo hay 2 que no se tratan a lo largo de todas las actividades. Estos son el error nº 9 “No considerar que las razones trigonométricas se definen a partir de un ángulo” y el error nº 12 “Utilizar de la calculadora con un modo erróneo DEG en el cálculo de las razones trigonométricas”. De todas formas, para un total de 15 errores detectados, barrer con las tareas propuestas, 13 errores supone un porcentaje bastante alto, un 87%.

Hay un error que es común a todas las actividades, y ese es el nº1 “Confundir elementos de un triángulo rectángulo (catetos, hipotenusa, alturas) (E1).” El resto de errores está bien repartido entre todas las tareas.

Nuevamente me gustaría destacar, que son las ultimas 3 actividades, las que tratan de detectar los errores del 3 foco o estructura principal, debido a que esta es la más compleja en cuanto a contenido de las 3 estructuras.

Los primeros errores tratados son relativos a actividades de conocimientos previos y motivación, lo cual, de primeras puede dar una idea del conocimiento general del conjunto de la clase.

<u>Análisis del cubrimiento de la finalidad de las actividades.</u>

En la siguiente tabla se relaciona la finalidad de las actividades en función del orden de estas.

Coherencia y finalidad	**Tareas**							
Finalidad	1	2	3	4	5	6	7	8
Aprendizajes Previos	▲	▲	▲			▲		
Motivar y realidad		▲	▲					
Exploración			▲	▲	▲			
Construcción de significados				▲	▲		▲	
Aplicación							▲	▲
Ejercitación							▲	▲
Síntesis								▲

De la resultante en diagonal de las marcas de la tabla, se puede extraer la conclusión que la finalidad de las tareas cumple el orden deseado. Las tareas iniciales son de tratar de conocer los aprendizajes previos de los alumnos y de intento de motivación motivación.

Las actividades centrales van encaminadas a la exploración y la construcción de significados, estas actividades están basadas en que es el propio alumno quien a través de sus propios dibujos es capaz de calcular las razones trigonométricas y de asimismo ver qué significado geométrico tienen.

Por último, son las 2 últimas actividades las que buscan la ejercitación y la síntesis.

Análisis de la coherencia y complejidad

La siguiente tabla, muestra el grado de complejidad del informe PISA en función del orden de la tarea.

Coherencia y complejidad	**Tareas**								
Competencia	1	2	3	4	5	6	7	8	Total
Pensar y Razonar	Rp						Rfl	Rfl	3
Argumentar	Rp		Rp	Cnx	Cnx			Cx	5
Comunicar	Rp		Cnx						2
Modelizar						Cnx	Cnx		2
Representar			Rp				Rp		2
R. Problemas						Rp	Rfl	Rfl	3
Operaciones y Lenguaje		Cnx							1

Nota: Rp: reproducción, Cnx: conexión, Rfl: reflexión.

Observando la tabla, se puede ver como la complejidad delas actividades va in crescendo. De la reproducción de las primeras actividades se pasa a la reflexión conexión de las 2 últimas.

La distribución de las competencias PISA por actividades es bastante homogénea. Aunque son las de Argumentar y Resolver problemas las que más se movilizan. Por el contrario la competencia de operaciones y lenguaje matemático es la menos tratada.

Comentarios finales:

Barremos todos los objetivos.

Hay pocas tareas que contribuyan a la superación de limitaciones.

Hay 4 errores que solo son tratados con una única tarea.

Hay bastantes errores que se tratan en muchas tareas.

En orden creciente (se moviliza la reflexión en las últimas tareas).

Buen equilibrado entre las 3 categorías de dificultad de competencias.

Suficientes tareas de motivación y aprendizajes previos al inicio.

Buenas dosis de construcción de significados, aplicación y la ejercitación.

5. Análisis de la evaluación:

5.1. Técnicas

Técnica 1:

La primera de las técnicas para evaluar el tema de razones trigonométricas va ser la de las intervenciones diarias en clase.

El objetivo no es más que obtener información acerca del desarrollo de las competencias de argumentar y justificar, modelizar y resolver problemas.

Para ello el profesor tendrá varias posibilidades:

Al inicio de clase el profesor hará un batida de preguntas sobre lo tratado el día anterior.

Durante el desarrollo de la clase, se provocará la intervención de los alumnos, tanto desde sus mesas como en la pizarra, incitándoles explicar lo preguntado.

Al final de clase se seleccionará a un alumno para que resuma lo visto durante la clase.

TÉCNICA 1	
NOMBRE	Intervenciones diarias.
FINALIDAD	Obtener información sobre el grado de desarrollo competencia de argumentar y justificar, modelizar y resolución de problemas en el alumnado.
DESCRIPCIÓN	❖ inicio clase: profesor realiza ronda preguntas sobre tratado el día anterior. ❖ Durante desarrollo de la clase: • se provocará intervención alumnos que han comprendido los conceptos para que los expliquen a los que no. • Cuando se resuelvan problemas en pizarra, se incitará a los alumnos a que los expliquen a sus compañeros. ❖ Final clase: se seleccionará un alumno para que haga un resumen de los conceptos /procedimientos tratados ese día. ❖ Después de cada intervención el profesor matizará, si es necesario, lo expresado por cada alumno.

Técnica 2

Al inicio de clase habrá una pequeña prueba escrita, llamada prueba de motivación.

En ella se realizarán ejercicios sobre lo tratado el día anterior.

Al día siguiente del final del tema se realizará una prueba escrita o examen con ejercicios de todo tipo sobre lo visto durante todo el tema. Los ejercicios serán muy parecidos a las tareas vistas en clase.

TÉCNICA 2	
NOMBRE	TAREA ESCRITA
FINALIDAD	Obtener información sobre el grado de desarrollo competencia de argumentar y justificar, Modelizar y resolución de problemas en el alumnado.
DESCRIPCIÓN	Ejercicios realizados de modo diario y por escrito.
	Ejercicios orientados a la argumentación, modelización y la resolución de problemas
	Control final: prueba por escrito con 4 problemas en los que de nuevo se va a insistir en la resolución de problemas y la modelización. Las pruebas serán similares a las tareas vistas en clase.

5.2. Escala de valoración:

Las intervenciones diarias tendrán un valor de un 15% sobre el final de la nota.

Las pruebas diarias escritas tendrán un valor del 15 % sobre el total de la nota.

La prueba final escrita tendrá un peso del 70%.

6. Valoración final.

En general he seguido la técnica para el desarrollo de esta unidad didáctica aprendida en la asignatura Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Partiendo del análisis de contenido, he identificado las 3 principales estructuras o focos en torno a los cuales se iba a articular esta unidad didáctica de trigonometría de 4º de la ESO. Dichos focos han sido: triángulos, razones trigonométricas de ángulos para triángulos rectángulos y resolución de triángulos rectángulos.

A través del análisis cognitivo, para cada una de estas estructuras o focos he buscado unos objetivos especificados y he buscado también los errores más comunes que el alumnado puede cometer.

He continuado, a través del análisis de instrucción, a estructurar la unidad didáctica en una sucesión de tareas en orden in crescendo de dificultad.

Para acabar con el método para la evaluación de los conocimientos adquiridos por los alumnos a través del análisis de evaluación.

Como puntos fuertes del Trabajo, destacaría el análisis de contenido y el cognitivo. Para encontrar las estructuras principales, me ha servido de mucha ayuda confeccionar un mapa conceptual (el cual está adjuntado en el apartado 2 del Trabajo). En cuanto a los errores, me he basado en mi experiencia como profesor particular y en la parte práctica vivida en el instituto. Aquí quizás debería haber buceado un poco más en la bibliografía existente.

Como puntos a mejorar destacaría la evaluación. Me ha sido difícil encontrar un método eficaz para valorar el conocimiento adquirido por el alumnado. Al final he optado por la técnica poco innovadora del examen, siendo éste una continuación de las actividades propuestas para la unidad didáctica.

Destacar también la vinculación de todas las tareas con el método de evaluación de PISA. En la estructuración de la unidad didáctica, he puesto especial interés en que grado cada tarea vehiculiza en el alumnado cada una de las competencias de PISA.

No me gustaría despedirme de este trabajo, sin agradecer a todos y cada uno de los profesores de éste Máster, la contribución tan profesional que han hecho al aprendizaje de su alumnado de las diferentes técnicas de para enseñar que existen. Gracias.

7. Bibliografía

- Esteban Piñeiro, Mariano. (1998). *Trigonometría*. Madrid: Editorial Síntesis.
- (1999).Guía y recursos matemáticas órbita 2000. Madrid Edit. Santillana.
- Álvarez, María Dolores et all. *Matemáticas 4º ESO, "La Casa del Saber*. Ed. Santillana
- R.Barceló et al. (2002). *Matemáticas 1º Bachillerato*. Madrid : Ed. Almadraba.
- De Guzmán,M. et all. (1994). *Matemáticas 2, 2º de B.U.P*. Madrid: Ed. Anaya.
- Bescós Esther et all.*Matemáticas 1 Bachillerato*. Madrid: Editorial Oxford educación.
- Apuntes de clase