TRABAJO FIN DE MÁSTER

UNIDAD DIDÁCTICA: FRACCIONES

Máster de Universitario en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad: Matemáticas.

Realizado por María del Carmen Alguacil Segovia
Bajo la supervisión de D. Pablo Flores Martínez

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El trabajo que a continuación se desarrolla es el Trabajo Final de Máster del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, especialidad Matemáticas.

Entre las diferentes modalidades ofertadas, aquí se elabora una Unidad Didáctica para el tema de Fracciones, centrada en el primer curso de Educación Secundaria Obligatoria.

El documento se compone de dos partes, la primera de ellas consiste en un Análisis Didáctico en profundidad a cerca del tema. Este a su vez está dividido en tres partes; un análisis de contenido en el que se identifican y organizan los significados asociados al tema, un análisis cognitivo donde se exponen las expectativas y dificultades de aprendizaje, y un análisis de instrucción.

La segunda parte del documento está dedicada al desarrollo de la Unidad Didáctica, que constituye la parte central de este trabajo, compuesta de una secuenciación de las sesiones de clase y tareas para realizar en casa, un apartado dedicado a la atención a la diversidad y otro en el que se detalla el sistema de evaluación.

Para elaborar este trabajo se tendrán en cuenta los conocimientos adquiridos en las diferentes asignaturas que integran el máster, especialmente "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas" para desarrollar el Análisis Didáctico e "Innovación Docente e Investigación Educativa" a la hora de diseñar tareas empleando materiales didácticos. Así mismo se integrarán algunos aspectos referentes al periodo de prácticas.

A. ANÁLISIS DIDÁCTICO

El análisis didáctico, como herramienta que nos permite diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas, se articula en torno a los organizadores del currículo.

El currículo de la Educación Obligatoria es un plan de formación que pretende dar respuesta a las siguientes cuestiones (Rico, 1997):

1. ¿Qué es, en qué consiste el conocimiento?
2. ¿Qué es el aprendizaje? ¿Cómo se produce? ¿En qué consiste?
3. ¿Qué es la enseñanza? ¿Cómo puede llevarse a cabo la formación?
4. ¿Para qué sirve el conocimiento?

Según las cuatro cuestiones consideradas, Rico establece cuatro dimensiones en torno a las que organizar los niveles de reflexión curricular: la dimensión cultural/conceptual, la dimensión cognitiva, la dimensión ética y la dimensión social.

Estas cuatro dimensiones, en correspondencia con la actividad del profesor como responsable del diseño de la unidad didáctica, dan lugar a las cuatro componentes que conforman el análisis didáctico: *el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación.*

1. En el análisis de contenido el profesor identifica y organiza la multiplicidad de significados de un concepto.
2. El análisis cognitivo aborda las expectativas y dificultades de aprendizaje por parte de los estudiantes.
3. En el análisis de instrucción el profesor diseña, selecciona y secuencia las tareas que utilizará para lograr las expectativas fijadas. Así mismo establecerá los criterios y procedimiento de evaluación
4. El análisis de actuación se lleva a cabo en último lugar, una vez llevada a cabo la unidad didáctica, y sirve al profesor para recoger información a cerca las expectativas alcanzadas por los estudiantes y las dificultades que se hayan presentado.

A continuación se va a llevar a cabo el análisis didáctico correspondiente a la unidad “Fracciones”, del primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria, es su análisis de contenido, cognitivo y de instrucción.

1. Análisis de Contenido.

El análisis de contenido tal y como aquí se presenta, es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de un concepto matemático, que son conocimientos necesarios para marcar expectativas sobre el aprendizaje de los alumnos y para delimitar y diseñar tareas basadas en la concreción de unas demandas cognitivas. (Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez, 2008)

Estos diferentes significados para un mismo concepto vienen dados por las estructuras conceptuales que lo refieren, por los sistemas de símbolos que lo representan, y por los objetos y fenómenos de los que surge y que le dan sentido. De ahí la necesidad de hacer un análisis de la estructura conceptual, de los sistemas de representación y de la fenomenología asociados a dicho concepto matemático.

Así mismo, los conceptos matemáticos que hoy día conocemos son resultado de un amplio proceso de evolución que ha transcurrido a lo largo de los años, en muchos casos siglos, y que ha implicado la intervención de un cúmulo de escuelas y personalidades relevantes dentro del desarrollo de la matemática.

Para el profesor, la historia de los contenidos matemáticos le permite conectar con un conjunto de medios que hacen más asequible al alumno el conocimiento matemático; también le ayuda a descubrir las dificultades y errores que se han presentado en el desarrollo de los conceptos ya que, probablemente, estas mismas dificultades se presenten en los alumnos. (Segovia y Rico, 2001).

1.1. Desarrollo histórico.

Las fracciones, también conocidas con el nombre de "quebrados", ya eran conocidas por babilonios, egipcios y griegos. Pero el nombre de fracción se lo debemos a Juan de Luna, que tradujo al latín, en el siglo XII, el "*Tratado de Aritmética*" de Al-Kuwarizmi. De Luna empleó la palabra "*fractio*" para traducir la palabra árabe «al-Kasr», que significa quebrar, romper.

El origen histórico de los números racionales se encuentra en las acciones de fraccionar, repartir y medir. Para medir longitudes y áreas que son partes de la unidad de medida, los babilonios y egipcios dividen la unidad en partes iguales, generando las fracciones unitarias. Estas fracciones unitarias permiten generar fracciones más complejas. (Flores, 2011)

Sin embargo, fueron los hindúes quienes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones en el siglo VI después de Cristo. En esa época, Aryabhata se preocupó de estas leyes, y después lo hizo Bramagupta, en el siglo VII.

Múltiples son las referencias y estudios que sobre las fracciones conocemos de la cultura griega. Para los griegos, los números fraccionarios estaban asociados a longitudes y efectuaban cálculos con fracciones bastante complicados. A partir de la medida de segmentos, los matemáticos griegos establecen relaciones de proporcionalidad, dando lugar a las razones entres segmentos, por lo que son precursores de la medida abstracta de longitudes. De su primera época destacamos la tradición que atribuye a Pitágoras el descubrimiento de las proporciones que se dan entre los sonidos armónicos.

De época más tardía es Euclides -fines del siglo IV a.C.- en cuyo texto fundamental "*Elementos de Geometría*" y sus Libros VII y VIII da una definición de fracción y hace un estudio extenso de las propiedades más importantes de las fracciones estudiadas como razones.

Entre las aportaciones de los matemáticos árabes a la cultura matemática occidental de la Baja Edad Media está la introducción del Sistema de Numeración Indo arábigo, el que básicamente dio origen al actual y en particular el empleo de estos números para expresar fracciones con una notación similar a la actual: numerador encima del denominador pero sin raya de fracción; esta notación fue tomada de los hindúes. La cultura árabe continúa la tradición griega de descomposición de unidades fraccionarias.

En 1202 Leonardo de Pisa (Fibonacci) publica el "*Líder Abaci"*, que durante muchos años constituyó referencia obligada para todos los que trabajaron en Aritmética y Álgebra. En este libro aparecían los métodos más perfeccionados del cálculo con enteros y fracciones que se conocían en el momento. El uso de fracciones se emplea y perfecciona en la resolución de problemas.

Leonardo de Pisa explicó cómo descomponer una fracción mediante la suma de unidades fraccionarias y fue uno de los primeros que separó el numerador del denominador mediante la línea fraccionaria. A partir de esta época se perfeccionaron los mecanismos del cálculo con fracciones, adaptándose a la nueva notación ya conseguida y ampliando el campo de las fracciones al caso de las fracciones decimales.

Los matemáticos venían encontrando dificultades para manejar las fracciones desde los tiempos de los sumerios, pese a que se habían enunciado reglas especiales para operar con quebrados. Pero no fue hasta 1585, cuando Simon Stevin publica en su obra "*De Thiende"* (La Décima) el método por el que todos los cálculos que incluían fracciones podían ser realizados fácilmente como si fueran números enteros. Stevin nos legó leyes y reglas para el cálculo con decimales.

La formalización del conjunto de números racionales llegará en el siglo XIX, definiendo la fracción como un par de números enteros, el segundo distinto de cero. La relación de equivalencia entre fracciones ($\frac{a}{b}$ es equivalente a $\frac{c}{d}$ si, y solo si, a×d = b×c), lleva a definir un número racional como clase de equivalencia de fracciones. Se genera así el conjunto Q = $\frac{Z \times Z^*}{R}$, que en álgebra se llama cuerpo de fracciones de los números enteros.

En el Anexo I se puede encontrar el desarrollo histórico con más detalle.

1.2. Estructura conceptual.

Algunos investigadores en educación matemática, expertos en su aprendizaje, han organizado el conocimiento matemático escolar con criterios cognitivos y, para ello, usan la clasificación del contenido de las matemáticas escolares en tres grandes bloques: *conceptual, procedimental y actitudinal.* (Bell, Costello & Küchemann, 1983; Hiebert y Lefevre, 1986; Rico 1995). Dentro de estos tres bloques establecen tres niveles de complejidad.

A) En el *campo conceptual* nos encontramos con aquello con lo que pensamos y, según su mayor o menor concreción, podemos distinguir tres niveles de conocimiento (Rico, 1997): *hechos, conceptos y estructuras.*

Los **hechos** constituyen el nivel básico de complejidad conceptual, son unidades de información, y se pueden diferenciar en:

1. Términos: son las denominaciones o vocablos con los que designamos a los conceptos o las relaciones entre conceptos. En las fracciones:
   - Un medio, un tercio, dos quintos,…
   - Numerador y denominador.
   - Múltiplos y divisores.
   - Mínimo común múltiplo.

2. Notaciones: son los signos y símbolos empleados en matemáticas para expresar una idea de modo breve y preciso. En nuestro caso:
   - Notación fraccionaria: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \ldots$
   - Notación decimal: 0’25, 0’75, 1’05,0'58$\hat{3}$,…
   - Notación porcentual: 25%, 75%,…
   - <, >, ≤, =, ≠, …
   - +, -, ·, :

3. Convenios: son acuerdos tácticos o consensuados para comunicar información sin ambigüedad. Para el caso de las fracciones tenemos:

    - Numerador sobre denominador, separados por una línea horizontal.
    - Jerarquía de operaciones.
    - Uso de paréntesis.
    - Relación de menor o igual.
    - Dividir numerador entre denominador para pasar a notación decimal.

4. Resultados: son unidades de información producto directo o inmediato de relaciones entre términos, susceptibles de memorizar, cuyo dominio y control conviene disponer para trabajar. En las fracciones:

    - $\frac{a}{a} = 1$
    - $\frac{0}{a} = 0$

En un nivel medio de complejidad están los ***conceptos***, que describen una regularidad o relación de un grupo de hechos. Para las fracciones tenemos:

- Fracción inversa, fracción irreducible, fracción mixta, fracción complementaria.
- Fracciones propias e impropias.
- Operaciones con fracciones.
- Comparación y ordenación de fracciones.

En un nivel de complejidad superior están las ***estructuras***, que sirven para unir conceptos o formas de relación entre conceptos, constituyendo, a veces, conceptos de orden superior. El conocimiento de la estructura del Sistema de los Números Racionales se inicia con las operaciones internas, relaciones y propiedades características de los números racionales (Q, +, x, ≤).

- (Q, +) y (Q, x) semigrupos conmutativos.
- (Q,≤) orden total y arquimediano.
- (Q, +, x,≤) semianillo arquimediano.

B) Los *procedimientos* son aquellas formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas, los tres niveles de complejidad que se consideran son: *destrezas, razonamientos y estrategias.*

Las **destrezas** consisten en la transformación de una expresión simbólica en otra expresión. Para ello, hay que ejecutar una secuencia de reglas sobre manipulación de símbolos; por lo general, las destrezas se ejecutan procesando hechos. En las fracciones:

- Nombrar y escribir fracciones.
- Representar fracciones gráficamente.
- Situar fracciones y números decimales en la recta numérica.
- Comparar fracciones mediante la ordenación, representación gráfica y paso a número decimal.
- Reconocer y obtener fracciones equivalentes.
- Reducir fracciones.
- Utilizar los algoritmos tradicionales de suma, resta, producto y división de fracciones.
- Usar paréntesis y la jerarquía de operaciones.
- Pasar de número decimal a fracción en casos sencillos.
- Usar la calculadora para la realización de cálculos con fracciones.

Los **razonamientos** se presentan al procesar relaciones entre conceptos, y permiten establecer relaciones de inferencia entre ellos.

- Deductivo: obtener propiedades de las operaciones.
- Inductivo: extraer regularidades numéricas.
- Interpretar de manera geométrica o gráfica.

Las **estrategias**, que se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones; las estrategias operan dentro de una estructura conceptual y suponen cualquier tipo de procedimiento que pueda ejecutarse, teniendo en cuenta las relaciones y conceptos implicados. En nuestro caso:

- Elaboración de estrategias personales de cálculo mental con fracciones sencillas.
- Uso de la calculadora para representar, comparar y calcular fracciones.
- Utilización de los diferentes sistemas de representación estableciendo correspondencias entre los mismos.
- Automatización de los algoritmos para realizar operaciones con fracciones.

C) En los contenidos *actitudinales* encontramos los siguientes:

- Apreciar la utilidad de los números fraccionarios en la vida cotidiana.

- Sensibilidad e interés por las informaciones y mensajes de naturaleza fraccionaria y reconocimiento de la utilidad de las fracciones para representar la cantidad.

- Curiosidad por indagar y explorar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números fraccionarios.

- Tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones a un problema.

- Gusto por la presentación ordenada y clara de los cálculos y de sus resultados.

1.3. Sistemas de representación.

El estudio y revisión de los sistemas de representación es otra de las componentes del Análisis de Contenido. Por representación entendemos cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación. (Castro y Castro, 1997). Esos diferentes modos de representar comparten una estructura, y por ello se habla de sistemas de representación.

En Matemáticas, los conceptos requieren necesariamente algún modo de representación que permita mostrar adecuadamente y con cierta simplicidad el concepto y sus propiedades, así como las posibles operaciones y transformaciones a las que puede someterse posteriormente. En este sentido, algunos conceptos pueden adoptar diversas formas de representación. Tal es el caso de los Números Racionales.

Consideramos cuatro categorías de representación: simbólica, numérica, verbal y gráfica.

- **<u>Sistema de Representación Simbólico:</u>**

  - El símbolo Q de los números racionales.
  - El símbolo a/b, que es usado en el campo del Álgebra.
  - Los símbolos presentes en otras culturas:

    - Mesopotamia:  $= \frac{1}{20}$  $= \frac{1}{60}$  $\frac{1}{30}$

    - Babilonia:  $= \frac{30}{60}$  $= \frac{3}{2}$  $\frac{7}{3}$

- Egipcios:  = $\frac{1}{2}$  = $\frac{1}{3}$  : $\frac{2}{3}$

- **<u>Sistema de Representación Numérico:</u>**

  Numéricamente podemos representar los Números Racionales en forma decimal o fraccionaria, teniendo esta última varias acepciones:

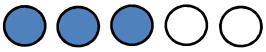
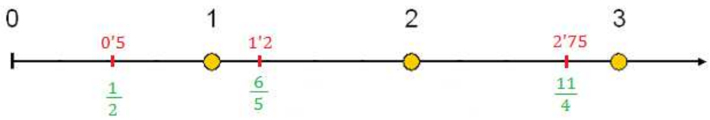
  - Notación fraccionaria: $\frac{1}{2}$
  - Notación decimal: 0’5
  - Equivalencia: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
  - Número mixto: $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

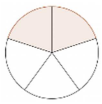
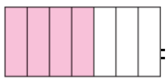
- **<u>Sistema de Representación Verbal:</u>**

  Vinculado al sistema de representación numérico está el verbal, en el que las reglas del lenguaje organizan y condicionan la representación de los números racionales, un medio, un tercio, la mitad, la tercera parte, dos dieciochoavo, cuarto, … En este caso, nuestro lenguaje impone normas y reglas para representar los números racionales.

- **<u>Sistema de Representación Gráfico:</u>**

  Dentro de esta categoría diferenciamos los modelos discretos y continuos:

  - Discreto:  $\frac{3}{5}$
  - Continuo:
    - Recta numérica: 

    - Modelo de áreas:  = $\frac{2}{5}$  : $\frac{4}{7}$

1.4. Fenomenología.

Según Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2008) el análisis fenomenológico que aquí se presenta aporta una técnica para mostrar cuáles son los sentidos con que se utilizan conceptos y estructuras; pone el acento en el uso y aplicación de los conceptos, en los medios y en los modos en que, con ellos, se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a determinados problemas, en definitiva, cuándo contribuyen a la compresión de ciertos fenómenos.

El análisis fenomenológico propone mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, y que los vinculan con los mundos natural, cultural, social y científico. Y esto con la finalidad de dotar de sentido el aprendizaje de tales conceptos y estructuras. Para ello se ayuda de la reflexión sobre situaciones y contextos, con la cual el profesor inicia el análisis fenomenológico.

El análisis fenomenológico de una estructura matemática comienza por delimitar aquellas ***situaciones*** donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, aquellas en las que éstos muestran su funcionalidad. Cualquier tarea matemática a la que se enfrenta un individuo viene asociada a una situación, considerando ésta como aquella parte del mundo real en la cual se sitúa la tarea para el individuo. Una situación viene dada por una referencia al medio (natural, cultural, científico y social) en el que se sitúan tareas, cuestiones matemáticas que pueden encontrar los ciudadanos, que se proponen a los estudiantes y que centran su trabajo. Según el medio que destaquen, los expertos consideran distintos tipos de situaciones.

Ejemplificamos aquí el caso de los números racionales con las situaciones del estudio PISA: personales, educativas o laborales, públicas y científicas.

- **Situaciones personales:** son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema.

> *Elena se ha gastado un cuarto de su paga mensual en un regalo para su padre. Le ha comprado una pluma por 2’50 €. ¿Cuánto le dan de paga al mes?*

- **Situaciones laborales:** son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo propone tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta.

Una empresa quiere embotellar 912 litros de zumo de naranja, si cada botella tiene una capacidad de 2/3 de litro, ¿cuántas botellas necesitará?

- **Situaciones públicas:** se refieren a la comunidad local o a otra más amplia, en la cuál los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación.

Un autobús hace el servicio entre Granada - Madrid. Cuando ha recorrido la cuarta parte del trayecto se encuentra a 25 km de la primera parada, que está a 125 km de Granada. ¿Cuál es la distancia entre las dos ciudades?

- **Situaciones científicas:** son más abstractas e implican la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. De hecho, cada una de las disciplinas científicas o técnicas hacen cierto un uso técnico específico, en ocasiones muy elaborado, de los conceptos y estructuras matemáticas.

El principio activo de una cápsula de un analgésico pesa $\frac{3}{4}$ miligramo. ¿Cuántos gramos de principio activo son necesarios para fabricar una caja con 20 cápsulas?

Independientemente de la situación en la que se produzca el uso de los números racionales, éste se produce entorno a un **contexto**, atendiendo a los diferentes significados e interpretaciones del concepto.

- El primer contexto que deriva del uso de las fracciones es el de **parte-todo**, el número racional expresa una relación entre el número de partes que forman la porción y el total de partes consideradas.
  - Se presenta en situaciones de tipo aritmético y geométrico.
  - Se pueden utilizar contextos discretos o continuos.
  - Ejemplo: *Juan comió $\frac{3}{4}$ de pizza.*
- Un segundo contexto es el de **medida**, el número racional expresa una comparación multiplicativa entre dos cantidades, tomando como unidad una de ellas.
  - Se presenta en situaciones de tipo físico.
  - Surge de la necesidad de tener unidades inferiores a la unidad-patrón. Por eso, medir longitudes, área, volúmenes, ángulos o tiempo cuyo tamaño es menor que la unidad de medida son problemas que se incluyen en este contexto.
  - Ejemplo: *En un vaso cabe un cuarto de litro.*

- El tercer contexto que consideramos es el de **operador**, el número racional expresa una operación multiplicativa sobre una cantidad, indicando una división en tantas partes iguales como dice el denominador y una multiplicación por el número de partes que dice el numerador.
    - Esta interpretación de las fracciones es vista en el papel de las transformaciones como "algo que actúa sobre una cantidad y la modifica".
    - Esta interpretación enfatiza el papel de las fracciones como elementos del álgebra de funciones.
    - Ejemplo: *A Cristina le corresponden los* $\frac{3}{4}$ *de 100 €.*
- Como cuarto contexto consideramos el de **cociente**, el número racional es visto como la porción que resulta de una división entre dos cantidades. En este caso el todo es la unidad de la cantidad a repartir.
    - La diferencia de esta interpretación con la de parte-todo es que la fracción indica lo que corresponde a cada parte y no las partes que se toman, aunque el resultado es el mismo. (Kieren, 1980).
    - Este contexto aparece en situaciones de reparto, tanto en contextos discretos como continuos.
    - Ejemplo: *Hemos repartido 3 panes entre 5 personas.*
- El quinto y último contexto es el de **razón**, el número racional expresa una razón entre dos cantidades de la misma magnitud.
    - En este caso, el todo no está definido, ya que propone la relación entre dos cantidades.
    - Se presenta en situaciones de tipo geométrico o aritmético.
    - Una aplicación de la fracción como razón son las proporciones, las cuáles se establecen a partir de la igualdad de razones.
    - Establecer proporciones, semejanzas, razones y cambios de escala son problemas incluidos en este tipo de contexto.
    - Ejemplo: *La rebaja es del 10%* (en una proporción de 10 a 100)

1.5. Ubicación en el currículo.

Una vez realizado el análisis de contenido correspondiente al tema, vamos a revisar los documentos oficiales, para establecer cuáles son los contenidos específicos correspondientes a la unidad didáctica "Fracciones", en el curso 1º de E.S.O.

Los contenidos relacionados con este tema se recogen en el actual documento curricular del BOE número 174, orden ECI/2220/2007, de 21 de Julio, en el bloque 2 titulado "Números" del primer curso de la E.S.O.

En este documento aparecen los siguientes contenidos:

- Diferentes significados y usos de las fracciones en la vida real.
- Simplificación y ampliación de fracciones; identificación y obtención de fracciones equivalentes.
- Reducción de fracciones a común denominador. Comparación de fracciones.
- Operaciones con fracciones: suma, resta, producto y cociente.
- Relaciones entre fracciones y decimales.

También encontramos alusión a los contenidos correspondientes al tema en la Orden de 10 de agosto de 2007, por el que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía, en el núcleo temático 4 titulado "Desarrollo del sentido numérico y la simbolización matemática":

"*El conocimiento de los números, iniciado en la educación primaria, y su aplicación práctica a las distintas situaciones que se presentan en la vida cotidiana continúa en la educación secundaria obligatoria con la ampliación de los conjuntos numéricos que se utilizan, como es el caso de fracciones, decimales y porcentajes, así como el de números irracionales en el caso de la opción B de las matemáticas de 4º curso.*

(…) más importante que el ejercicio de destrezas basadas en cálculos descontextualizados, es relacionar las distintas formas de representación numérica con sus aplicaciones y comprender las propiedades de cada conjunto de números para poder realizar un uso razonable de las mismas."

1.6. Clasificación de los contenidos en focos conceptuales.

Una vez establecidos los contenidos específicos referentes al tema según los documentos oficiales, conviene delimitar relaciones y prioridades entre los conceptos, procedimientos y estrategias que intervienen. Es fácil observar que dentro de un mismo tema hay conceptos y procedimientos que pueden estar al servicio de una estrategia importante. Desde la perspectiva del tema que se está planificando, las estrategias ocupan lugares predominantes y hacen que otros conceptos o procedimientos se supediten a ellas. Para ello, se requiere capacidad para fijar los conceptos que articulan el tema y mostrar el sistema de relaciones que se generan entre los distintos tipos de contenidos a partir de dichos focos conceptuales. Se habla entonces de *focos conceptuales prioritarios* cuando se propone la organización de los contenidos de un tema a partir de un número reducido de ideas prioritarias. Los focos conceptuales consisten en agrupaciones específicas de conceptos, estrategias y estructuras, que adquieren importancia especial ya que expresan, organizan y resumen agrupamientos coherentes de los contenidos. Los focos conceptuales se identifican porque establecen prioridades sobre las expectativas de aprendizaje del tema y permiten una adecuada secuenciación de tareas para su enseñanza. (Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez, 2008)

Los focos conceptuales seleccionados para la unidad didáctica “Fracciones” son los siguientes:

1. Concepto y usos de las fracciones.
2. Comparación de fracciones.
3. Adición y sustracción de fracciones.
4. Multiplicación y división de fracciones.

Cada uno de estos focos prioritarios incluye una diversidad de hechos, conceptos y procedimientos a partir de los que podemos organizar los contenidos del tema.

1. Concepto y usos de fracciones.
    - Relación entre el número de partes que forman una porción y el número de partes consideradas (parte-todo).
    - Fraccionamineto.
    - Transformación de una cantidad (operador).
    - Fracciones propias e impropias. Números mixtos.
    - Representación de fracciones.
2. Comparación de fracciones.
    - Fracciones equivalentes.
    - Relación entre términos de fracciones equivalentes.
    - Fracción irreducible.
    - Comparación de fracciones con igual numerador o denominador.
    - Reducción a común denominador y mínimo común denominador.
    - Comparación y ordenación de fracciones con distinto denominador.
3. Adición y sustracción de fracciones-
    - Noción de suma y resta.
    - Procedimientos de la suma y resta con igual o distinto denominador.
    - Propiedades de la suma.
4. Multiplicación y división de fracciones y decimales.
    - Nociones de multiplicación y división.
    - Procedimiento de multiplicación.
    - Fracción inversa.
    - Comparación de fracciones.
    - Procedimiento de división
    - Regla de los productos cruzados.

2. Análisis cognitivo.

El análisis cognitivo, como parte del análisis didáctico, es un proceso que lleva a cabo el profesor de matemáticas al planificar su actuación docente. En el análisis cognitivo el profesor estudia un tópico matemático desde la perspectiva de que va a ser objeto de aprendizaje; se trata de analizarlo a efectos de su comprensión por los escolares de secundaria. Para llevar a cabo ese análisis el profesor se apoya en la problemática de los procesos de aprendizaje.

El análisis cognitivo se organiza y fundamenta según dos componentes. La primera de ellas es relativa a las competencias que deseamos que los estudiantes desarrollen, es decir, lo que queremos que sean capaces de hacer a partir de los contenidos, a cómo pueden movilizar y usar los conocimientos aprendidos. Es un término que adoptamos y que recoge parte del significado de lo que entendemos como objetivo de aprendizaje.

La segunda componente se refiere al estudio de los errores en que los escolares pueden incurrir en la ejecución de tareas, y al análisis de las dificultades que subyacen a esos errores y permiten su interpretación. (Lupiáñez, 2009)

2.1. Objetivos de aprendizaje.

A continuación se van a exponer los objetivos que se espera alcancen los alumnos en relación con cada uno de los focos conceptuales seleccionados en el apartado anterior. Así mismo se va a relacionar cada objetivo con las competencias PISA que se esperan desarrollar con ellos: Pensar y Razonar (PR), Argumentar y Justificar (AJ), Comunicar (C), Modelizar (M), Resolver Problemas (RP), Representar (R), uso del Lenguaje Simbólico (LS) y uso de Herramientas Tecnológicas (HT).

1. Concepto y usos de fracciones.

1.1. Comprender los distintos conceptos de fracción. (C, M)
1.2. Reconocer las distintas interpretaciones el significado del numerador y del denominador de una fracción. (PR, C, LS)
1.3. Representar una misma fracción de distinta forma y justificarlo. (AJ, M, R)
1.4. Reconocer fracciones en la vida cotidiana. (C, M)
1.5. Representar gráficamente fracciones mayores que la unidad. (R)

1.6. Escribir fracciones mayores que la unidad en forma de número mixto. (R, LS)
1.7. Obtener una porción a partir de cantidades y fracciones. (PR, R)
1.8. Obtener fracciones que representen las partes de un todo. (PR, R)
1.9. Identificar, clasificar y relacionar las fracciones y los decimales usando distintos métodos, formas de representación y materiales o herramientas tecnológicas. (PR, R, LS, HT)
1.10. Inventar y resolver problemas donde se vean involucradas. (PR, C, M, RP)

2. Comparación de fracciones.

2.1. Reconocer fracciones equivalentes. (PR, R, LS)
2.2. Obtener fracciones equivalentes. (PR, R, LS)
2.3. Obtener la fracción irreducible de una dada. (PR, LS)
2.4. Comparar fracciones gráficamente. (PR, R)
2.5. Comparar fracciones calculando equivalentes. (PR, LS)
2.6. Comparar fracciones reduciendo a común denominador. (PR, LS)
2.7. Ordenar fracciones. (PR, LS, R)

3. Adición y sustracción de fracciones.

3.1. Sumar y restar fracciones de igual o distinto denominador. (R, LS)
3.2. Realizar mentalmente sumas y restas de fracciones en casos sencillos. (PR, C)
3.3. Enunciar y resolver problemas aditivos en los que aparecen fracciones. (PR, AJ, C, M, RP)
3.4. Manejar la calculadora para realizar sumas y restas de. (RP, LS, HT)

4. Multiplicación y división de fracciones.

4.1. Multiplicar y dividir fracciones. (LS)
4.2. Calcular la fracción de una cantidad dada. (R, LS, HT)
4.3. Calcular la fracción inversa a una dada. (R, LS)
4.4. Enunciar y resolver problemas multiplicativos con fracciones. (PR, AJ, C, M, RP)
4.5. Realizar cálculos mentales y con calculadora. (PR, C, HT)
4.6. Utilizar la jerarquía de operaciones. (PR, RP, LS)

2.2. Errores y dificultades.

Muchas veces al proponer a los estudiantes una determinada tarea matemática, nos encontramos con que la forma resolverla por parte de los niños no se ajusta a aquella que nosotros habíamos esperado.

A veces estos procedimientos dan respuestas correctas, aunque el camino seguido no sea el que nosotros pensamos sería lógico. El hecho de que el procedimiento seguido no sea el más apropiado no implica que haya que tacharlo de erróneo.

Otras, por el contrario, el proceso o el resultado no son los correctos, y tradicionalmente, este fallo es considerado como un error.

El estudio de estos errores es una parte muy importante en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que los niños combinan las nociones nuevas que se les presentan en un momento determinado en la escuela con sus experiencias previas.

En general, se entiende por error una aplicación sistemática de reglas inadecuadas.

A continuación se van a clasificar los errores y dificultades relacionados con el tema “Fracciones”, en torno los focos seleccionados.

1. Concepto y usos de fracciones.

E1.1. Existencia de defectos en la comprensión del concepto de fracción. Densidad de Q.

E1.2. Problemas para identificar la unidad o todo.

E1.3. Problemas en la división exhaustiva del todo.

E1.4. Problemas en la división igualitaria del todo.

2. Comparación de fracciones y decimales

E2.1. Obtener fracciones equivalentes sumando o restando la misma cantidad en numerador y denominador.

3. Adición y sustracción de fracciones y decimales

E3.1. Extrapolar los algoritmos de cálculo con números naturales para realizar sumas y restas de fracciones.

E3.2. Extrapolar el algoritmo de multiplicación de fracciones para realizar sumas y restas.

E3.3. Olvidar algún paso del algoritmo (aditivo, comparación o equivalencia)

E3.4. Aplicar la simplificación del producto a la suma o resta de fracciones.

4. Multiplicación y división de fracciones y decimales

E4.1. Entender que el producto de un número entero por una fracción propia disminuye. Entender que la división de un número entero por una fracción propia aumenta.

E4.2. Olvidar algún paso del algoritmo de multiplicación o división de fracciones.

E4.5. Extrapolar el algoritmo de multiplicación de fracciones para realizar divisiones.

3. Análisis de instrucción.

El tercer y último análisis de los que se compone el análisis didáctico es el de instrucción.

Los objetivos de aprendizaje acerca de un tema de matemáticas pueden describirse en términos de capacidades. Esas capacidades se movilizan, desarrollan y evalúan según las diferentes tareas que los escolares pueden afrontar. Pero es posible diseñar tareas de diferente dificultad que están relacionadas con el mismo grupo de capacidades, y que sin duda amplían la posibilidad de promover el aprendizaje. La selección, diseño y análisis de las tareas que se van a emplear en el proceso de enseñanza-aprendizaje conforman el análisis de instrucción. (Lupiáñez, Rico)

Así pues, el análisis de instrucción consiste en seleccionar y diseñar las tareas más adecuadas para desarrollar los objetivos de aprendizaje y competencias, así como para detectar los errores y dificultades que se presenten y poder tomar las medidas oportunas para paliarlos.

En cada tarea de la secuenciación de clase se hace un breve análisis de la misma.

B. UNIDAD DIDÁCTICA

Para comenzar a organizar una Unidad Didáctica hay que tener presentes los contenidos del tema que se desarrollaron en el curso anterior. La Unidad Didáctica que se va a elaborar corresponde al primer curso de la ESO, por lo tanto, vamos a hacer una revisión de los contenidos referentes al tema de Fracciones en el tercer ciclo de Educación Primaria. Según la ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Primaria, estos contenidos son:

- Números fraccionarios. Obtención de fracciones equivalentes.
- Suma y resta de fracciones con igual denominador en situaciones de resolución de problemas.
- Ordenación de números fraccionarios por comparación y representación gráfica.
- Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

1. Secuenciación de la Unidad Didáctica.

Una vez establecidos los conocimientos que se suponen adquiridos en cursos anteriores y teniendo en cuenta los contenidos que se han de desarrollar en 1º de ESO, hay que proceder a organizar los contenidos atendiendo a los focos seleccionados y al número de sesiones necesarias para tratar dichos contenidos.

SESIÓN	CONTENIDOS	FOCO
1	• Fracción como parte-todo. • Fraccionamiento. • Representación gráfica de fracciones.	Concepto y usos de las fracciones
2	• Fracciones propias e impropias. Número mixto. • Fracción como operador. • Fraccionamiento inverso.	
3	• Fracciones equivalentes.	Comparación de fracciones
4	• Fracciones equivalentes. • Fracción irreducible.	

5	• Comparación de fracciones con igual denominador o numerador. • Reducción de fracciones a común denominador. • Comparación de fracciones con distinto denominador.	
6	• Suma y resta de fracciones con igual denominador. • Reducción de fracciones a mínimo común denominador. • Suma y resta de fracciones con distinto denominador.	Suma y resta de fracciones
7	• Producto de una fracción por un número entero. • Producto de fracciones.	Multiplicación y división de fracciones
8	• Producto de fracciones.	
9	• Fracción inversa. • División de una fracción por un número entero. • Cociente de dos fracciones.	
10	• Cociente de dos fracciones.	
11	• Relación entre fracciones y decimales	
12	• Exposición historia de las fracciones.	

2. Desarrollo de las sesiones de clase.

SESIÓN I. Fracciones en la vida real. Fracción como parte-todo.

Contenidos	Objetivos
• Fracción como parte-todo. • Fraccionamiento. • Representación gráfica de fracciones.	• Reconocer fracciones en la vida cotidiana. • Comprender el concepto de fracción como parte-todo. • Reconocer el significado del numerador y del denominador de una fracción. • Obtener una porción a partir de cantidades y fracciones. • Obtener la fracción que representa la parte de un todo. • Representar gráficamente fracciones. • Enunciar y resolver problemas.

<u>Tarea 1</u> (10')

El profesor propone a los alumnos que nombren fracciones que usen a diario, indicando la situación en que son usadas.

Con esta tarea se pretende que haya una comunicación entre el profesor y los alumnos y que perciban la importancia y necesidad del uso de las fracciones en la vida cotidiana.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Motivación	Conexión	Cualquiera

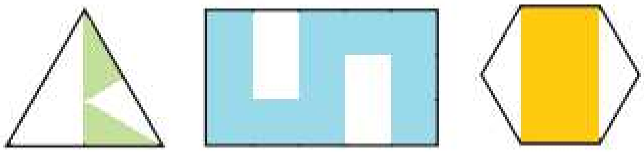
<u>Explicación</u> (5')

El profesor recuerda el concepto de fracción como parte-todo, indicando cuál es el significado del numerador y del denominador. Es preciso aclarar que las partes en que se divide el todo han de ser iguales.

El profesor ha de poner varios ejemplos, en diferentes situaciones, y ayudarse de diversas representaciones gráficas para una mejor compresión del concepto.

Tarea 2 (7')

a) *Escribe la fracción que representa la parte coloreada en cada figura:*



b) *Representa la fracción* $\frac{2}{3}$ *en distintas figuras.*

Con esta actividad se pretende que los alumnos trabajen individualmente para posteriormente corregir en la pizarra.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Ejercitación	Reproducción	Educativo

Tarea 3 (8')

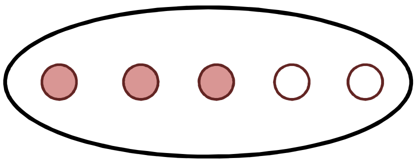
Averigua que fracción de hora son 12 minutos. Ayúdate haciendo un dibujo.

La tarea se resolverá individualmente y después se corregirá en la pizarra.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualización	Conexión	Científico

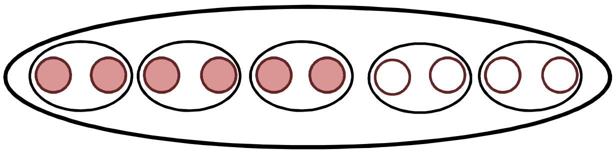
Explicación (15')

Hasta ahora la representación gráfica de fracciones se ha visto usando unidades continuas, dividiendo un área o un segmento, por tanto el *todo* está formado por una sola unidad. Pero una fracción también se puede representar en un contexto discreto, donde el *todo* está formado por el conjunto de todos los elementos, por ejemplo:



Aquí el *todo* está formado por el conjunto de las cinco bolas, tres de las cuales están coloreadas. $\frac{3}{5}$ indica la relación entre el número de bolas coloreadas y el número total de bolas.

Es importante que el profesor utilice contextos discretos, ya que se fuerza al niño a ampliar su esquema de la realización de parte-todo. Si por ejemplo, se pide representar la fracción $\frac{3}{5}$ (dividir en cinco partes y tomar 3) usando un conjunto de objetos discretos como unidades, los subconjuntos que resultan también pueden estar formados por varios objetos:



en contradicción al contexto continuo en que las partes están formadas por trozos simples.

Lógicamente aumenta la dificultad si se el *todo* no se puede dividir en tantas partes iguales como indica el denominador.

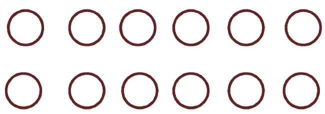
Aquí no se pueden representar los $\frac{3}{5}$.

<u>Tarea 4</u> (10')

a) Expresa mediante una fracción la parte coloreada.

b) Colorea la fracción indicada en cada caso.

$\frac{2}{6}$ 

$\frac{3}{4}$ 

$\frac{1}{2}$ 

Una vez finalizada la tarea se corregirá en la pizarra. Para ello el profesor sacará a varios alumnos.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Ejercitación	Reproducción	Educativo

Tarea 5 (5')

De una caja de 12 bombones María se ha comido 8. ¿Qué fracción de bombones se ha comido?

La tarea se realizará de forma individual y posteriormente se corregirá en la pizarra.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualización	Reproducción	Personal

Tarea para casa

Siguiendo la propuesta del instituto donde realicé las prácticas, se va a proponer una tarea de investigación por parte de los alumnos, para que posteriormente algunos de ellos expongan su trabajo. Esta tarea consiste en buscar información acerca de las fracciones en las civilizaciones antiguas, para que no hagan todos el mismo trabajo se propondrán varias opciones, por las diferentes civilizaciones o matemáticos importantes que hicieron uso de las fracciones. La tarea la realizarán todos los alumnos y tendrán que entregarla antes de finalizar el tema. El último día de clase algunos de ellos tendrán que exponer su trabajo ante sus compañeros.

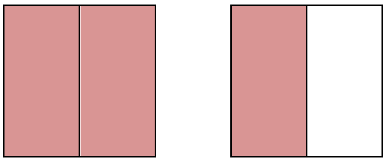
Con esta tarea se pretende que los alumnos desarrollen alguna de las competencias básicas de forma transversal, tales como, la competencia en comunicación lingüística, tratamiento de la información y competencia digital, competencia para aprender a aprender y autonomía e iniciativa personal.

SESIÓN 2. Fracciones propias e impropias. Fracción como operador.

Contenidos	Objetivos
• Fracciones propias e impropias. Número mixto. • Fracción como operador. • Fraccionamiento inverso.	• Reconocer el significado del numerador y del denominador de una fracción. • Representar gráficamente fracciones mayores que la unidad. • Escribir fracciones mayores que la unidad en forma de número mixto. • Comprender el concepto de fracción como operador. • Enunciar y resolver problemas.

Tarea 1 (5')

Expresa mediante una fracción la parte coloreada.



Con esta tarea se pretende que los alumnos profundicen sobre la idea de unidad, llegando así al concepto de fracciones propias e impropias. La tarea se resolverá de forma individual y después se discutirá entre todos, par mostrar a importancia de fijar la unidad a la que se refiere la fracción.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Exploratoria	Reflexión	Educativo

Explicación (10')

Tras corregir la tarea anterior el profesor propondrá un par de ejemplos más y presentará las fracciones impropias como aquellas en las que la porción es más grande que la unidad y cómo se expresan en forma de número mixto. El resto de fracciones se definen como propias.

Tarea 2 (15')

a) *Escribe una regla para diferenciar entre fracciones propias e impropias.*
b) *Escribe una regla para expresar una fracción impropia como número mixto y explícala con un ejemplo.*

La tarea se realizará por parejas y una vez finalizada cada grupo expondrá su propuesta para poder elegir la más adecuada.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Elaboración y construcción de significados	Reflexión	Educativo

Tarea 3 (5')

Enunciar situaciones de la vida cotidiana en las que se usen fracciones impropias y números mixtos.

Esta tarea se realizará de forma oral para que participen todos los alumnos.

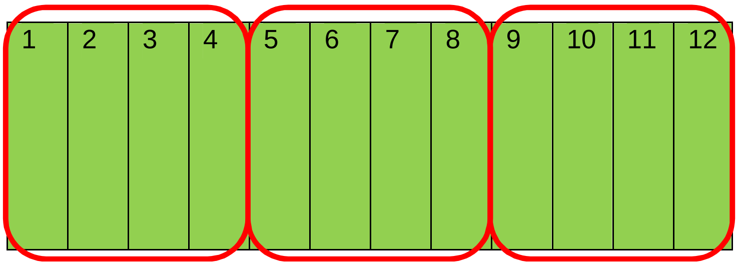
FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Motivar y relacionar con el entorno	Reproducción	Cualquiera

Explicación (5’)

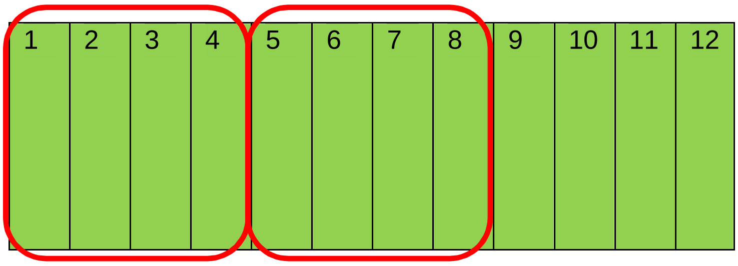
Fraccionamiento: Explicar los términos de un fraccionamiento: Cantidad a la que se refiere la fracción, o todo, porción que se toma y fracción que expresa la relación que existe entre la porción y el todo (qué parte del todo es la porción). Hasta ahora se ha identificado qué fracción representa una porción dada, conocido el todo. También se puede calcular la porción, dado el todo y la fracción.

Queremos calcular cuanto miden los $\frac{2}{3}$ de una pared de 12 metros.

1º) Dividimos en 3 partes iguales, como indica el denominador:



2º) Cogemos 2 partes, como indica el numerador:



3º) Los $\frac{2}{3}$ de 12 son 8.

Tarea 4 (5’)

a) ¿Cuántos minutos son $\frac{3}{4}$ de hora? ¿y $\frac{2}{3}$ de hora?

La tarea se realizará de forma individual y posteriormente es corregirá en la pizarra.

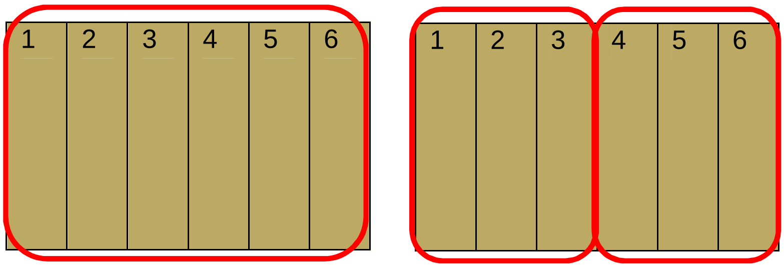
FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualizar	Reproducción	Personal

<u>Explicación</u> (10')

Fraccionamiento inverso: dada la porción y la fracción obtener el todo.

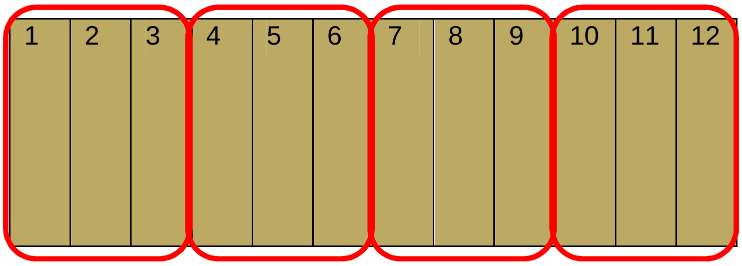
¿Cuántos listones de parqué necesitamos para cubrir el suelo de una habitación si en los $\frac{2}{4}$ hemos usado 6?"

1º) Dividimos en tantas partes como indica el numerador, para averiguar cuanto vale una unidad:



$\frac{2}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

2º) Necesitamos tantas unidades como indica el denominador, para obtener el todo:



3º) Los $\frac{2}{4}$ de **12** = 6.

<u>Tarea 5</u> (5')

¿Cuántos gramos pesa un paquete de arroz si los $\frac{3}{4}$ pesan 750 gramos?

Esta tarea se resolverá de forma individual y después saldrá un alumno a la pizarra para corregirla.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualizar	Reproducción	Personal

Tareas para casa.

1) *Alicia ha escrito los* $\frac{4}{9}$ *de un trabajo de 36 páginas. ¿Cuántas páginas ha escrito?*

2) Se dice que pasamos un tercio de nuestra vida durmiendo. Si vivimos 81 años, ¿cuánto tiempo habremos estado durmiendo?

3) Pedro se ha gastado los $\frac{3}{5}$ *de su paga. ¿Cuál es su paga si se ha gastado 24€?*

4) Inventa un problema en el que haya que calcular los $\frac{3}{4}$ *de una cantidad.*

SESIÓN 3. Fracciones equivalentes.

Contenidos	Objetivos
• Fracciones equivalentes	• Reconocer fracciones equivalentes. • Representar fracciones gráficamente.

Corrección tareas (15')

Para que haya una mayor implicación de los alumnos, se pedirá que salgan voluntarios a corregir los ejercicios en la pizarra dando la explicación pertinente, a la misma vez que se consigue conocer los errores que han cometido y resolver las dudas que hayan surgido.

Tarea 1 (20')

Se reparte a los alumnos, por parejas, un Diagrama de Freudenthal y un libro de fracciones. Primero se les da unos minutos para que experimenten con él y después se les va haciendo una serie de preguntas para ir guiando el aprendizaje:

1) *Coge el libro de fracciones e intenta expresar la relación que hay entre las diferentes fracciones que aparecen en el libro.*
2) *Coge la regleta de longitud* $\frac{1}{2}$ *e intenta construir otra de la misma longitud usando otras regletas del mismo tamaño. Intenta expresar la longitud de la regleta usando una fracción.*

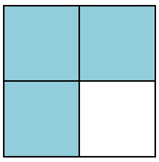
3) *Une dos regletas longitud $\frac{1}{3}$ para construir otra de longitud $\frac{2}{3}$. Usa otras regletas que sean iguales para construir regletas de longitud $\frac{2}{3}$. Expresa en forma de fracción la longitud de las regletas que construyas.*
4) *Construye el Diagrama de Freudenthal en su forma original y traza líneas verticales desde el final de cada regleta. ¿Qué observas? Intenta hacer todas las construcciones posibles, en las que una regleta se pueda construir como unión de otras.*

Con esta tarea se pretende que los alumnos vean que una misma cantidad se puede expresar usando fracciones diferentes.

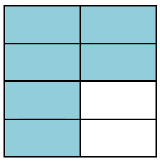
FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Exploratoria	Conexión	Educativo

<u>Explicación</u> (15')

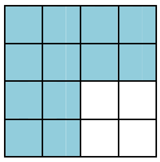
El profesor define fracciones equivalentes como aquellas que representan la misma porción de un todo usando diversas representaciones gráficas:



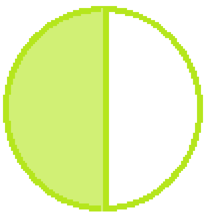
$\frac{3}{4}$



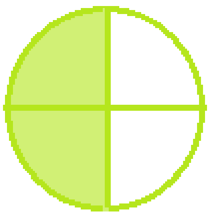
$\frac{6}{8}$



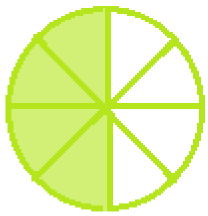
$\frac{12}{16}$



$\frac{1}{2}$



$\frac{2}{4}$



$\frac{4}{8}$

Una vez que los alumnos tienen claro cuando dos fracciones son equivalentes a partir de su representación gráfica, el profesor explica como comprobar si dos fracciones son equivalentes a partir de la relación multiplicativa que existe entre sus términos. (Regla de los productos cruzados)

<u>Tarea 2</u> (10')

Busca pares de fracciones equivalentes, ayúdate representándolas gráficamente o usando la regla de los productos cruzados.

$$\frac{2}{3} \quad \frac{9}{15} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{6}{18} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{6}{21} \quad \frac{1}{3}$$

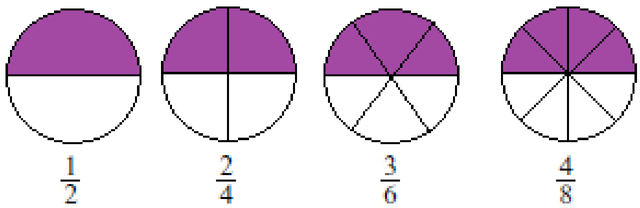
Esta tarea se realizará individualmente y después se corregirá en la pizarra.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Ejercitación	Reproducción	Educativo

SESIÓN 4. Amplificación y reducción de fracciones. Fracción irreducible.

Contenidos	Objetivos
• Fracciones equivalentes. • Fracción irreducible.	• Obtener fracciones equivalentes. • Obtener la fracción irreducible de una dada.

<u>Tarea 1</u> (15’)



¿Cuál es la regla de formación de fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$*? Descríbela.*

Representa otras dos fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$*.*

La tarea se realizará de manera individual y posteriormente se expondrán las reglas descritas por los alumnos para elegir la más adecuada. La parte de representación se corregirá en la pizarra.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Exploratoria. Elaboración y construcción de significados	Reflexión	Educativo

<u>Tarea 2</u> (10’)

Obtén tres fracciones equivalentes a cada una de las dadas:

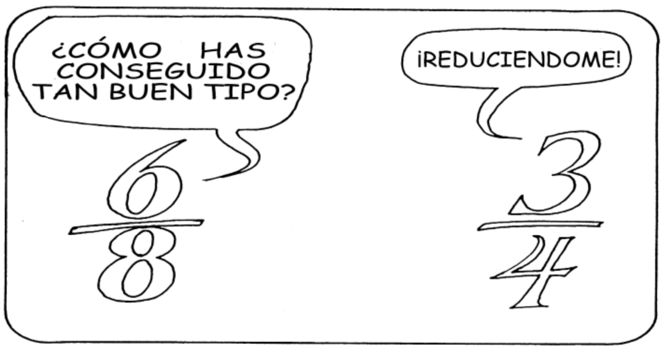
$$\frac{2}{3} \qquad \frac{1}{9} \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{5}{6}$$

La tarea se realizará de forma individual y posteriormente se expondrán los resultados de forma oral.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Ejercitación	Reproducción	Educativo

<u>Tarea 3</u> (10’)

Se presenta la siguiente tarea a los alumnos usando el cañón o pizarra digital:



a) *¿Qué relación hay entre las dos fracciones de la viñeta?*
b) *¿Cómo crees que se ha obtenido la fracción* $\frac{3}{4}$ *a partir de* $\frac{6}{8}$*?*

Está tarea se realizará de forma oral, fomentando así la participación de todos los alumnos y la puesta en común de sus opiniones. Con esta tarea se pretende que los estudiantes intuyan la posibilidad de obtener fracciones equivalentes por reducción.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Exploratoria. Elaboración y construcción de significados	Reflexión	Educativo

Explicación (5')

Una vez finalizada la tarea anterior el profesor definirá una fracción irreducible como aquella a partir de la cuál no podemos encontrar otra equivalente con los términos más pequeños y pondrá varios ejemplos.

Tarea 4 (10')

Busca la fracción irreducible de cada una de las siguientes:

$$\frac{6}{18} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{7}{21} \quad \frac{6}{18} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{10}{15}$$

La tarea se realiza de forma individual y posteriormente se corrige de forma oral.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Ejercitación	Reproducción	Educativo

Tarea 5 (10')

Estudia razonadamente si son equivalentes las siguientes fracciones: $\frac{999009}{17}$ *y* $\frac{5870470}{999}$.

Con esta tarea se pretende generalizar las formas numéricas que se utilizan para saber si dos fracciones son equivalentes: obtención a partir de multiplicaciones o divisiones de numerador y denominador por un número, multiplicación en cruz, reducción de divisores comunes, obtener la expresión decimal, etc. Estas dos fracciones tienen una cantidad de cifras que dificulta la mayoría de los criterios, por lo que obliga a considerar otros.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Exploración	Reflexión	Educativo

Tareas para casa

1) *Busca:*
   a) *Una fracción equivalente a* $\frac{2}{3}$ *que tenga 12 por denominador.*
   b) *Una fracción equivalente a* $\frac{3}{5}$ *que tenga numerador 9.*

c) *Una fracción equivalente a* $\frac{10}{15}$ *cuyo denominador sea 18.*

d) *Una fracción equivalente a* $\frac{15}{20}$ *que tenga denominador 8.*

e) *Una fracción equivalente a* $\frac{14}{21}$ *que tenga numerador 10.*

2) *De los 1575 libros que tiene la biblioteca del colegio están prestados 630. ¿Qué fracción de libros están prestados?*

SESIÓN 5. Comparación de fracciones. Reducción a común denominador.

Contenidos	**Objetivos**
• Comparación de fracciones con igual denominador o numerador. • Reducción de fracciones a común denominador. • Comparación de fracciones con distinto denominador.	• Comparar fracciones gráficamente. • Comparar fracciones calculando equivalentes. • Comparar fracciones reduciendo a común denominador. • Ordenar fracciones.

<u>Corrección de tareas</u> (15')

Los quince primeros minutos se dedicarán a corregir los ejercicios que había pendientes para casa. Es importante que el profesor saque alumnos a la pizarra para corregirlos, de esta manera participan y el profesor puede ver los errores que han cometido.

<u>Tarea 1</u> (15')

Ordena las siguientes fracciones de menor a mayor. Ayúdate haciendo su representación gráfica o situándolas sobre la recta numérica o empleando representaciones en el diagrama de Freudenthal o similares.

a) $\frac{2}{7}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{2}{5}$

b) $\frac{5}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{9}{7}$ $\frac{3}{7}$

c) *Explica una regla para comparar fracciones cuando tienen igual numerador o denominador.*

Esta tarea se resolverá de forma individual y posteriormente se corregirán en la pizarra los apartados a y b y de forma oral el apartado c.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Exploración. Elaboración y construcción de significados.	Reflexión	Educativo

Explicación (10')

Para continuar el profesor expondrá varios ejemplos en los que haya que comparar fracciones que no tengan igual numerador ni denominador, y los resolverá gráficamente. Al comenzar con fracciones que aparecen en el diagrama de Freudenthal, pueden llevarlas a comparar regiones. Cuando haya diferencias pequeñas conviene llevarlas a equivalentes que tengan igual denominador.

Tarea 2 (10')

Reduce a común denominador y ordena de menor a mayor:

a) $\frac{3}{4} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{5}{8}$ *b)* $\frac{7}{2} \quad \frac{8}{3} \quad \frac{9}{5}$

Esta tarea se realizará individualmente y después se corregirá en la pizarra con alumnos como voluntarios.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Ejercitación	Reproducción	Educativo

Tareas para casa

1) *Pon el signo <, > o = según corresponda*

$\frac{1}{2} \dots \frac{5}{6}$ $\frac{17}{21} \dots \frac{5}{7}$ $\frac{12}{20} \dots \frac{21}{35}$

2) *Reduce a común denominador y ordena de mayor a menor:*

a) $\frac{3}{12} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{5} \quad \frac{3}{7} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{7}{9}$

SESIÓN 6. Suma y resta de fracciones.

Contenidos	**Objetivos**
• Suma y resta de fracciones con igual denominador. • Reducción de fracciones a mínimo común denominador. • Suma y resta de fracciones con distinto denominador.	• Sumar y restar fracciones de igual o distinto denominador. • Enunciar y resolver problemas.

Corrección tareas (10')

Al comenzar se corregirán las actividades enviadas para casa. Para ello se sacará a varios alumnos a la pizarra. La corrección de la última actividad motivará la explicación posterior.

Tarea 2 (20')

Se reparte a los alumnos, por parejas, un juego de fracciones circulares. Los primeros minutos se deja que jueguen y conozcan el material. A continuación se les vas haciendo una serie de preguntas para que vayan trabajando el concepto de suma y resta de fracciones. Por ejemplo:

1) *Usando los sectores realiza la suma* $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$. *¿Puedes expresar el resultado usando una fracción del juego? Usando el mismo proceso haz la suma* $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ y obtén una fracción que represente el resultado**.** Realiza otras sumas de fracciones e intenta expresarlas usando una única fracción.
2) *Construye un sector de tamaño* $\frac{5}{6}$ *y réstale* $\frac{2}{6}$. *¿Qué fracción representa la porción que has obtenido? Realiza otras restas de fracciones usando los sectores.*
3) *Construye ahora la suma* $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$. *¿Puedes expresar el resultado usando sectores de otros tamaños?*
4) *Usando los sectores construye la resta* $\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$ *e intenta expresar el resultado usando una fracción.*
5) *A partir de las operaciones realizadas en los apartados anteriores, ¿puedes sacar alguna conclusión a cerca de la suma y resta de fracciones?*

Con esta actividad se pretende que los alumnos recuerden como se suman y restan fracciones con igual denominador, ya que es un contenido visto en cursos anteriores. Así mismo, se espera que observen que el procedimiento para fracciones con distinto denominador no es el mismo.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Exploración	Reflexión	Educativo

<u>Tarea 3</u> (5')

Elena va a elaborar una tarta para la que necesita medio kilo de harina de trigo y un cuarto de kilo de harina de maíz. ¿Cuánto pesa el total de la harina?

La tarea se resuelve de forma individual y después se resuelve en la pizarra.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualización	Conexión	Personal

<u>Tarea 4</u> (5')

Manu tarda tres cuartos de hora en ir de casa al colegio andando. Cuando va en bici tarda media hora menos. ¿Cuánto tiempo tarda en ir al colegio en bici?

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualización	Conexión	Personal

<u>Explicación</u> (10')

Tras haber jugado con las fracciones circulares, los alumnos han comprobado que las fracciones que tienen distinto denominador no se suman y restan como se conocía. El profesor debe explicar que para expresar la suma o resta de fracciones con distinto denominador mediante otra fracción hay que reducirlas a común denominador. Como los alumnos ya conocen el proceso para reducir fracciones a común denominador el profesor expondrá el procedimiento para reducirlas a mínimo común denominador. Para ello empezará poniendo ejemplos sencillos y propondrá alguno para que los alumnos lo resuelvan.

<u>Tarea 5</u> (10’)

Calcula:

a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$ *b)* $\frac{2}{5} - \frac{1}{10}$ *c)* $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

La tarea se resolverá de forma individual y una vez finalizada varios alumnos saldrán a la pizarra para corregir. Es importante que los alumnos vayan explicando como resuelven el ejercicio, para poder detectar posibles errores y resolver las dudas.

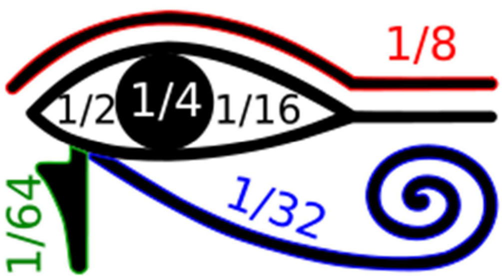
FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Ejercitación	Reproducción	Educativo

<u>Tareas para casa</u>

1) *Un paseante recorre en la primera hora* $\frac{3}{7}$ *del camino; en la segunda* $\frac{1}{4}$ *del camino y en la tercera hora el resto. ¿Qué fracción de camino ha recorrido en las dos primeras horas?*

2) *La familia de Óscar gasta un tercio de su presupuesto en pagar el alquiler y* $\frac{3}{7}$ *en alimentación. ¿Qué fracción del presupuesto le queda para otros gastos?*
3) *Inventa un problema en le que haya que realizar una suma y una resta de fracciones y resuélvelo.*
4) *De un depósito se han sacado, primero,* $\frac{4}{10}$*de su contenido y, después,* $\frac{5}{10}$*. Expresa en forma de fracción la cantidad de agua que se ha sacado y la cantidad de agua que queda en el depósito.*
5) *Calcula:*

   a) $\frac{3}{4} - 1 - \frac{1}{3} + \frac{5}{9}$ *b)* $\left(2 + \frac{3}{15}\right)\text{-}\left(3 - \frac{1}{3}\right)$ *c)* $\frac{3}{4} - \left[1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right]$
6) *Esta imagen, de origen egipcio, es el ojo de Horus, el Udyat. Horus había perdido el ojo en combate, pero fue sustituido por el Udyat por intervención del dios Thot.*
   Para los antiguos egipcios, el Udyat Simbolizaba el estado de perfección y le atribuían cualidades sanadoras. También les servía para escribir números.



*Es posible escribir cualquier fracción positiva como suma de fracciones de numerador la unidad. Una suma de este tipo se llama una fracción egipcia. Son **fracciones egipcias**:*

$\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{19}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

¿Serías capaz de encontrar alguna otra fracción egipcia?

SESIÓN 7. Multiplicación de fracciones.

Contenidos	Objetivos
• Producto de una fracción por un número entero. • Producto de fracciones.	• Calcular la fracción de una cantidad. • Multiplicar fracciones. • Enunciar y resolver problemas.

<u>Corrección tareas</u> (20')

El principio de la clase se dedicará a la corrección de los ejercicios que había para casa. Es conveniente que sean los alumnos los que corrijan los ejercicios en la pizarra y que se corrijan unos a otros.

<u>Tarea 1</u> (30')

Se agrupan a los alumnos en grupos de 3 o 4 y se entrega un Diagrama de Freudenthal. Para esta tarea también se hará uso de una aplicación diseñada en Geogebra que permite multiplicar fracciones, y a su vez se puede usar en la pizarra digital.

1) *Usando el Diagrama de Freudenthal realiza las siguientes operaciones:*

$$\frac{1}{4}\cdot 2 \qquad \frac{1}{8}\cdot 7 \qquad \frac{2}{12}\cdot 5 \qquad \frac{3}{10}\cdot 3$$

2) *¿Podrías explicar cómo se multiplica una fracción por un número entero?*
3) *Como habrás podido observar un medio es el doble de un cuarto. Busca una relación multiplicativa que exprese esa relación.*

   Busca relaciones multiplicativas entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{10}$. Encuentra y escribe, igualmente, relaciones multiplicativas entre $\frac{5}{6}$ y $\frac{1}{3}$.

4) *Cuando calculamos la fracción de una cantidad primero dividimos por el numerador y después multiplicamos por el numerador. Hacer un producto de dos fracciones es calcular una fracción de una fracción. Sabiendo esto y ayudándote de Geogebra realiza las siguientes operaciones.*

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \qquad \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8} \qquad \frac{2}{4}\cdot\frac{3}{7} \qquad \frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}$$

5) *¿Encuentras alguna relación entre los términos de las fracciones que multiplican y el resultado?*
6) *¿Podrías explicar cómo se multiplican dos fracciones?*

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Exploración. Elaboración y construcción de significados.	Reflexión	Educativo

Explicación (5')

Una vez que se ha finalizado la tarea anterior el profesor explica formalmente el algoritmo para multiplicar fracciones.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Tarea 2 (5')

Realiza las siguientes multiplicaciones y simplifica el resultado:

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9} \qquad \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{8} \qquad \frac{7}{3}\cdot\frac{6}{12}$$

Esta tarea se resuelve de forma individual y después se corrige de forma oral.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Ejercitación	Reproducción	Educativo

Tareas para casa

1) *En un laboratorio farmacológico se producen 200000 pastillas al día,* $\frac{1}{5}$ *de las cuales son para el resfriado, y los* $\frac{3}{4}$ *de éstas son efervescentes. ¿Qué fracción del total representan las pastillas efervescentes? ¿Cuántas pastillas hay para el resfriado no efervescentes?*
2) *En una empresa los* $\frac{5}{6}$ *son empleados de oficina. Si* $\frac{1}{5}$ *de los empleados son mujeres, ¿qué fracción del total son mujeres?*
3) *La base de un rectángulo mide* $\frac{3}{5}$ *de metro y la altura medio metro. ¿Cuál es su superficie?*
4) *El abuelo de Cristina tiene un terreno que dejará en herencia a sus dos hijos. Si Cristina tiene dos hermanos, ¿qué fracción de terreno heredará ella de su padre?*
5) *Inventa un problema que se resuelva mediante una multiplicación de fracciones y escribe la solución.*

SESIÓN 8. Multiplicación de fracciones.

Contenidos	Objetivos
• Producto de fracciones.	• Multiplicar fracciones. • Enunciar y resolver problemas.

Corrección tareas (30')

Para empezar se corrigen las tareas de casa. Los problemas se resuelven en la pizarra por parte de los alumnos. Para corregir el ejercicio de invención de un problema salen varios alumnos a la pizarra he intentan resolver los problemas que han inventado sus compañeros, así se provoca que los alumnos decidan si el problema está bien enunciado y son ellos mismos los que se corrigen.

Tarea 1 (10')

Un pintor está pintando una casa. El primer día pintó $\frac{2}{7}$ *del total y el segundo día ha pintado* $\frac{2}{5}$ *de lo que quedaba. ¿Qué fracción del total se ha pintado el segundo día? ¿Qué fracción queda por pintar?*

La tarea se realizará de forma individual y después saldrá un alumno a la pizarra para corregirlo.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualización	Conexión	Laboral

Tarea 2 (10')

En una finca se va a construir una casa en una de las esquinas, ocupando un solar de dimensiones $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{1}{5}$. *¿Qué fracción representa la parte de la finca que queda sin edificar?*

Esta tarea se resolverá de forma individual y posteriormente un alumno la corregirá en la pizarra. Para resolver este problema se puede ayudar con la aplicación de Geogebra que permite multiplicar fracciones.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualización	Conexión	Público

Tarea 3 (10')

Una ciudad tiene 300.000 habitantes; los $\frac{2}{8}$ *son menores de 20 años y de estos los* $\frac{4}{5}$ *son estudiantes. ¿Cuántos estudiantes menores de 20 años tiene esa ciudad?*

La tarea se resolverá individualmente y después un alumno saldrá a la pizarra para corregirla.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualización	Conexión	Público

SESIÓN 9. División de fracciones.

Contenidos	Objetivos
• Fracción inversa. • División de una fracción por un número entero. • Cociente de dos fracciones.	• Calcular la fracción inversa de una dada. • Dividir fracciones. • Enunciar y resolver problemas.

<u>Tarea 1</u> (10')

Dadas las fracciones $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{8}{10}$ *busca fracciones de manera que al multiplicarlas por éstas obtengas como resultado la unidad.*

La tarea se resolverá de individualmente y después se corregirá de forma oral, para posteriormente dar el profesor la definición de fracción inversa.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Experimentación	Conexión	Educativo

<u>Tarea 2</u> (30')

Se agrupa a los alumnos de 3 en 3 y se reparte a cada grupo un Diagrama de Freudenthal y unas transparencias de fracciones. El profesor irá realizando una serie de preguntas para guiar el aprendizaje, por ejemplo:

1) *Usando el Diagrama de Freudenthal, ¿podrías decir cuántas veces cabe* $\frac{1}{8}$ *en* $\frac{1}{2}$*? Expresa la relación que hay entre* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{1}{8}$ *usando una división.*
2) *Usando las piezas del Diagrama realiza la siguiente división* $\frac{1}{3}$: 3 = …
3) *Busca otras fracciones que se puedan relacionar mediante una división y exprésalas con palabras.*
4) *Usando las transparencias divide* $\frac{2}{5}$: 2*. ¿Qué relación hay entre la operación* $\frac{2}{5}$: 2 y $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$*?*

5) *En general, sabemos que dividir por un número es lo mismo que multiplicar por su inverso. Sabiendo esto y usando las transparencias calcula las siguientes divisiones.*

$$\frac{1}{2} : 5 \qquad \frac{2}{8} : \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{12} : \frac{6}{5}$$

6) *Cuando multiplicábamos números naturales la cantidad obtenida era un número mayor, ¿ocurre lo mismo cuando multiplicamos fracciones? ¿Si dividimos una fracción por un número el resultado obtenido es mayor o menor?*
7) *¿Podrías explicar una regla para dividir fracciones?*

Durante el desarrollo de toda la actividad el profesor debe interactuar con los alumnos para ir dando indicaciones de cómo tienen que hacer los ejercicios y aclarando las dudas.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Experimentación	Reflexión	Educativo

<u>Tarea 3</u> (5')

Queremos repartir los tres cuartas partes de una caja de bombones entre 5 amigos. ¿Qué parte de fracción le corresponde a cada uno?

La tarea se resuelve de forma individual para después corregir en la pizarra.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualización	Reproducción	Personal

<u>Explicación</u> (10')

Como se ha dicho en la tarea número 2 el cociente de dos fracciones es equivalente a multiplicar por el inverso. A partir de esta idea el profesor explica el algoritmo para dividir dos fracciones.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

O lo que es igual, multiplicar en cruz:

$$\frac{a}{b}\ \frac{c}{d}\ \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Tareas para casa

1) *Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado:*

a) $\frac{7}{3} : \frac{2}{9}$ *b)* $\frac{1}{2} : \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{3}\right)$ *c)* $1 - \left(\frac{3}{4} : \frac{5}{6}\right) \cdot \frac{2}{8}$

SESIÓN 10. División de fracciones.

Contenidos	Objetivos
• Cociente de dos fracciones.	• Calcular la fracción inversa de una dada. • Dividir fracciones. • Enunciar y resolver problemas.

Corrección tareas (10')

Algunos alumnos saldrán a la pizarra para corregir las tareas que se enviaron el día anterior.

Explicación (10')

El profesor recuerda el algoritmo de multiplicación de dos fracciones, para ello propone varios ejemplos que los alumnos han de resolver.

Tarea 1 (10')

¿Cuánto mide la altura de un rectángulo cuya superficie es $\frac{3}{4}m^2$ *y su base* $\frac{1}{5}m$*?*

El problema se resuelve de forma individual y posteriormente se corrige en la pizarra.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualización	Conexión	Educativo

<u>Tarea 2</u> (10’)

Un labrador ha dividido su campo en 8 parcelas iguales ya que cada una de ellas la dedicará a un cultivo diferente. ¿Cuántas parcelas forman los $\frac{3}{4}$ *del campo?*

La tarea se realizará de forma individual y posteriormente se resolverá en la pizarra.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualización	conexión	Educativo

<u>Tarea 4</u> (20’)

Se agrupa a los alumnos de 3 en 3. Cada grupo tiene que inventar un problema que se resuelva mediante una división de fracciones. Cada grupo intercambia su problema con otro e intenta resolver el que ha recibido. Una vez que se han resuelto los problemas cada grupo tiene que exponer como lo ha resuelto, en caso de que se pueda, y tendrá que decidir si es un problema bien planteado.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Descontextualización y aplicación.	Reflexión	Cualquiera

<u>Tareas para casa</u>

1) *En una fiesta de cumpleaños se han preparado 25 litros de chocolate. ¿Cuántas tazas de cuarto de litro se pueden distribuir?*
2) *Eva ha comprobado que sus pasos miden aproximadamente* $\frac{3}{5}$ *de metro. ¿Cuántos pasos dará para recorrer 3 kilómetros?*
3) *España es el tercer país del mundo que más agua consume por habitante y día: 300 litros aproximadamente. El consumo de los hogares representa* $\frac{3}{20}$ *del total y de esta cantidad los* $\frac{3}{5}$ *se van por la cisterna. ¿Qué cantidad de agua se va por la cisterna cada día en una casa con 4 habitantes?*
4) *Paula estudia 2 horas y media al día. Dedica un tercio del tiempo a matemáticas y un quinto a ciencias. ¿Cuántos minutos dedica a cada asignatura? ¿Qué fracción dedica a las otras asignaturas?*

SESIÓN 11. Relación entre fracciones y decimales.

Contenidos	Objetivos
• Relación entre fracciones y decimales.	• Identificar y relacionar las fracciones y los decimales usando distintos métodos, sistemas de representación y herramientas tecnológicas.

<u>Corrección tareas</u> (30')

Para corregir las tareas que había pendientes de casa se va a pedir a los alumnos que las intercambien entre ellos por parejas. Cada tarea se corregirá en la pizarra con un alumno voluntario y los demás irán anotando las correcciones en las tareas que han recibido. Cuando se termine la corrección cada alumno se sentará con su pareja y tendrá que indicarle donde se ha equivocado y explicarle como se resuelve correctamente.

<u>Tarea 1</u> (15')

Representa en la recta real las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$$

Usando la misma recta representa los siguientes números:

1'5, 0'4, 0'75, 0'3

a) ¿Qué observas?
b) Intenta explicar la relación que hay entre las fracciones y los decimales.
c) ¿Cómo crees que se pasa una fracción a número decimal?

La tarea se resuelve de forma individual y después se puede corregir usando la pizarra digital.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Elaboración y construcción de significados.	Conexión	Educativo

<u>Explicación</u> (10')

Una vez que los alumnos han intuido la equivalencia entre fracciones y decimales el profesor explica como se transforma una fracción en número decimal y viceversa. Esta explicación no tiene que ser muy profunda, ya que la transformación de fracciones en decimales o al contrario ya se ha tratado en cursos anteriores.

<u>Tarea 2</u> (5')

Transforma en número decimal o fracción según corresponda.

a) $\frac{7}{3}$ *b)* 54'6 *c)* $\frac{4}{6}$ *d)* 0'02 *e)* 6'78

Esta tarea se resuelve de forma individual y después se ponen en común los resultados. Para pasar las fracciones a número decimal pueden usar la calculadora ya que dispone de una tecla que transforma fracciones impropias en números mixtos y viceversa.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Ejercitación	Reproducción	Educativo

SESIÓN 12. Relación entre fracciones y decimales.

Contenidos	Objetivos
• Relación entre fracciones y decimales. • Exposición de trabajos sobre historia de las fracciones.	• Comparar fracciones pasando a su forma decimal.

<u>Explicación</u> (10')

Al comenzar la clase el profesor hace un recordatorio del procedimiento para expresar una fracción como número decimal. Como ya se vio en la clase anterior la expresión decimal y fraccionaria son equivalentes, por lo tanto, para comparar fracciones se pueden pasar a su forma decimal y posteriormente comparar los números decimales.

Tarea 1 (10')

Ordena los siguientes números de menor a mayor.

$\frac{7}{3}$ 0'4 $\frac{4}{9}$ 0'6 $\frac{5}{9}$

La tarea se resuelve de forma individual y después se expone el resultado.

FUNCIÓN	COMPLEJIDAD	CONTEXTO
Ejercitación	Reproducción	Educativo

Exposición trabajos (40')

El resto de la clase se dedica a la exposición de trabajos sobre historia de las fracciones que se propuso el primer día.

3. Atención a la diversidad.

Tal y como se contempla en el artículo 8 de la Orden ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se estable el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria, en esta etapa se pondrá especial énfasis en la atención a la diversidad del alumnado, en la atención individualizada orientada a lograr el máximo desarrollo de cada alumno y alumna, y en la respuesta a las dificultades de aprendizaje ya identificadas o en aquellas que surjan a lo largo de la etapa.

De acuerdo con este artículo el profesor debe hacer un seguimiento pormenorizado del aprendizaje de los alumnos, de los errores y las dificultades que se presentan durante el desarrollo de la unidad, tanto en el transcurso de las clases como en las tareas realizadas en casa.

Así pues, a los alumnos que tengan más dificultades o presenten algún tipo de problema en la comprensión de los conceptos y procedimientos básicos del tema se les propondrán actividades para reforzar esas carencias. De igual modo, a los alumnos más avanzados se les pueden proponer otras actividades en las que tengan que movilizar varias capacidades y conectar más de un contenido.

4. Evaluación.

La evaluación que realiza el profesor en el aula se propone determinar, mediante la recopilación y el análisis sistemático de datos, hasta qué grado se han cumplido las expectativas de aprendizaje establecidas al inicio del proceso de enseñanza-aprendizaje y cómo pueden mejorarse sus resultados. Un proceso evaluativo proporciona datos para dictaminar el logro de los objetivos propuestos por parte de los estudiantes participantes y usa ese diagnóstico para mejorar las actividades educativas subsiguientes con los mismos u otros participantes. Evaluar es, por tanto, recoger y sistematizar información para tomar decisiones. (Rico, 2003)

Durante el desarrollo de la unidad didáctica se distinguen tres fases en el proceso de evaluación.

- <u>Evaluación inicial</u>: las actividades planteadas en la primera sesión servirán para identificar los conocimientos previos y poder adaptar la planificación docente.
- <u>Evaluación continua</u>: se llevará cabo durante el desarrollo de las clases, mediante la revisión de las tareas que realicen los alumnos, tanto en clase como en casa. Así se podrán identificar las dificultades y el progreso de los alumnos y permitirá al profesor adaptar y regular el proceso de aprendizaje.
- <u>Evaluación final</u>: se realizará al final del proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de determinar el estado del logro de los objetivos propuestos al inicio de la unidad. Se llevará a cabo mediante la realización de una serie de tareas que integren los contenidos más relevantes de la unidad y que impliquen conectar estos contenidos. Habrá tareas de diferente dificultad para que todos los alumnos puedan contestar alguna.

Para constituir la valoración final que recibirá el alumno se tendrán en cuenta los siguientes aspectos:

- Participación en clase. (10%)
- Revisión del cuaderno. (10%)
- Trabajo sobre historia. (5%)
- Prueba escrita. (75%)

CONCLUSIONES

La elaboración de este trabajo me ha permitido poner de manifiesto el aprendizaje adquirido en el desarrollo de la mayoría de las asignaturas que integran este máster.

Principalmente, se hace uso de los conocimientos propios de la asignatura “Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas”, gracias a la cuál he sido capaz de desarrollar un Análisis Didáctico del tema, en el que se han trabajado en profundidad cada uno de los análisis de los que se compone: análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción. Esto me ha permitido tener una visión general del tema para poder organizar los contenidos que se han desarrollado en las sesiones de clase. Así mismo se ha empleado el contenido de la asignatura “Complementos de Formación” para elaborar un amplio desarrollo histórico en relación con el tema.

La asignatura “Innovación Docente e Investigación Educativa” también se ve bastante reflejada en esta Unidad Didáctica, ya que se hace un uso importante de materiales y recursos didácticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. La mayoría de ellos trabajados en clase con el profesor Pablo Flores Martínez.

El aprendizaje de las demás asignaturas, aunque menos, también se ha intentado emplear en el desarrollo de la Unidad Didáctica. Así, por ejemplo, gracias a la asignatura “Procesos y Contextos Educativos” he sabido en qué documentos tenía que buscar el currículo de matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria; y el diseño de actividades en las que hay un agrupamiento especial de los alumnos se ha hecho siguiendo la metodología empleada en las clases de “Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad”.

Me hubiese gustado poder llevar a la práctica alguna de las sesiones que se han planteado, para comprobar si realmente están bien estructuradas. Aunque no ha sido posible, si se han integrado aspectos del periodo de prácticas en este trabajo, como la propuesta de un trabajo de historia por parte de los alumnos o el hecho de intercalar explicaciones del profesor con la realización de tareas para afianzar el aprendizaje de los alumnos y que ellos sean los protagonistas de la clase, para que elaboren su propio conocimiento.

La realización de este máster, y en particular de este trabajo, me ha permitido consolidar mi pasión por la enseñanza y espero poder emplear todos los conocimientos adquiridos en el desarrollo de la profesión docente.

Concluyo con una cita de Benjamin Franklin que resume el modelo de enseñanza que he pretendido reflejar en esta Unidad Didáctica.

"Dime y lo olvidaré, enséñame y lo recordaré, involúcrame y lo aprenderé"

BIBLIOGRAFÍA

Smith, D.E. (1953). *History of Mathemat*ics. Editorial Constable And Company. Reino Unido.

Santos, I.; González, J. L.; Laca, C. R. (2007). *Esfera. 1º de ESO. Editorial SM*. Madrid.

Llinares, S.; Sánchez, M.V. (1988). *Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Fracciones Editorial Síntesis, S.A.* Madrid.

Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Martín, S.; (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Editorial Horsori.* Barcelona.

Castro, E.; (2008). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria. Editorial Síntesis, S.A.* Madrid.

Segovia, I.; Rico, L.; (2011). *Matemáticas para maestros en Educación Primaria. Editorial Pirámide.* Madrid.

Rico, L.; Marín, A.; Lupiáñez, J.L.; Gómez, P.; (2008). *Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Número Naturales. Revista Suma 58.* Valencia.

Gómez, P.; (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L.; (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 5, 670-687.* Ministerio de Educación y Ciencia.

ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. *BOE, 174*, 31680-31828. Ministerio de Educación y Ciencia.

ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación dela Educación Primaria. Ministerio de Educación y Ciencia.

ORDEN de 10 de agosto de 2007, por el que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. Consejería de Educación.

Alguacil, M.C.; Bueno, F.; Calvillo, C.; Castro, E.; García, C.; (2009). *Unidad Didáctica: Fracciones.* Universidad de Granada.

http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/eso/actividades/aritmetica/decimales_y_fracciones/fracciones_propias_multiplica_divide/actividad.html

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/1eso/solucionlibronuevo/u-7.pdf

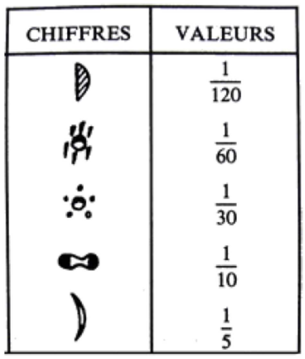
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/1eso/unidad6.pdf

ANEXO I. Historia de las fracciones.

Las fracciones, también conocidas con el nombre de “quebrados”, ya eran conocidas por babilonios, egipcios y griegos. Pero el nombre de fracción se lo debemos a Juan de Luna, que tradujo al latín, en el siglo XII, el “*Tratado de Aritmética*” de Al-Huwarizmi. De Luna empleó la palabra “*fractio*” para traducir la palabra árabe «al-Kasr», que significa quebrar, romper.

Los avances en los trabajos arqueológicos han proporcionado una amplia información sobre los conocimientos matemáticos de culturas muy antiguas. Desde los primeros documentos conocidos aparecen notaciones para simbolizar conceptos fraccionarios.

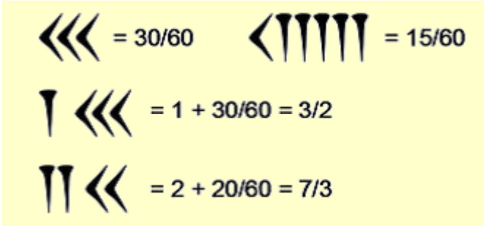
Así, en un texto protosumerio de Uruk (3000 a.C. aprox.) se simbolizan las cinco primeras fracciones de una unidad de capacidad m simbolizada por:



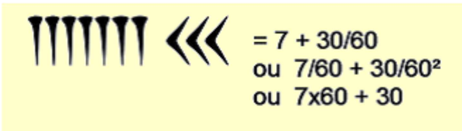
En el sistema sexagesimal empleado por los matemáticos sumerios y de Babilonia se hizo uso también de las fracciones. La base 60 era empleada en la construcción de tablas de peso y medidas. La división del día 24 horas, de la hora en 60 minutos y del minuto en 60 segundos es atribuida a los babilonios. Así armonizaron la notación numérica de base 60 con las medidas angulares y temporales, algunos de cuyos usos se mantienen aún hoy día.

Utilizaban una escritura cuneiforme (sistema de pictogramas) y combinaban el principio aditivo (el valor de un número es igual a la suma de los símbolos que lo componen) y el principio de posición (el valor de un símbolo varía en función de la posición que ocupa en la escritura de un número). Con esta escritura las fracciones se representaban con denominadores de 60 o 3600 (60^2). La gran riqueza de divisores de 60 permite expresar sus fracciones más importantes con datos enteros, de aquí que 30 y 20 sean las fracciones de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de 60.

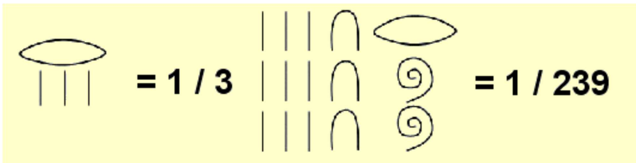
En la escritura babilónica sólo existían dos símbolos: el “*clavo vertical*” y el “*arco*”. Las nueve primeras cifras se representaban por repetición de clavos verticales y el 10 era representado por el arco. Para escribir los números del 11 al 59 se repetían los símbolos tantas veces como fuera necesario. El número 60 se representaba de nuevo por el clavo. Esta regla se aplicaba tanto a los números enteros como a los n numeradores de las fracciones.



El sistema de numeración babilónico, a veces ambiguo, no era empleado por los astrónomos para realizar cálculos sofisticados ya que cabían varias interpretaciones al no disponer de un símbolo para diferenciar la parte entera de la parte no entera.



En el año 2000 a.C. los escribas egipcios escribían los números sobre papiros en forma de jeroglífico. Al igual que los babilonios utilizaban un sistema de numeración basado en el principio de adición. Representaban las fracciones unitarias $\frac{1}{n}$ colocando una especie de boca por encima del numerador.



Sólo ciertas fracciones disponían de un símbolo específico, es el caso de $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ y $\frac{1}{4}$:

Así, todas las fracciones eran expresadas como suma de fracciones unitarias. Por otra parte, la descomposición no era necesariamente la más simple, pues tenían que expresar la fracción como suma de fracciones diferentes.

Por ejemplo: $\frac{3}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2}$ en lugar de $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$.

En su sistema de escritura la multiplicación por dos jugaba un papel esencial. Los egipcios disponían por otra parte de tablas de descomposición del doble de una fracción dada. En el lenguaje actual la fracción $\frac{2}{7}$ se descompondría:

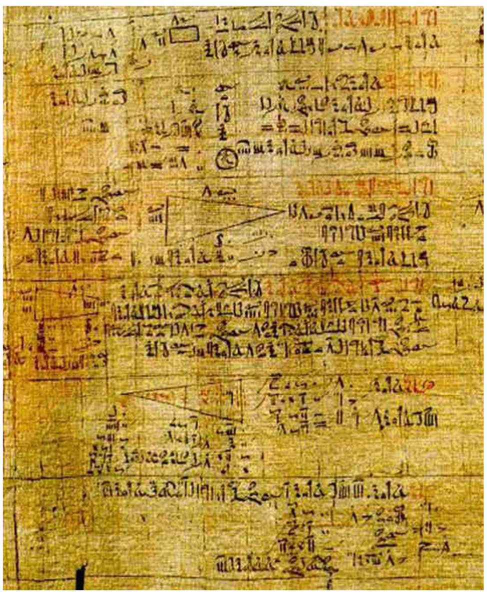
$$\frac{2}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}=\frac{1}{28}+\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}=\frac{1}{28}+\left(\frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{28}+\frac{1}{4}$$

El Papiro de Ahmes es un documento escrito en un papiro de unos seis metros de longitud y 33 cm de anchura con escritura hierática y contenidos matemáticos. También se le conoce con el nombre de Papiro Rhind. Su contenido data del 2000 al 1800 a.C.

Fue escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en 1650 a.C., a partir de escritos de doscientos años de antigüedad, según reivindica Ahmes al principio del texto, aunque resulta imposible saber qué partes del papiro corresponden a estos textos anteriores.

Encontrado en el siglo XIX, entre las ruinas de una edificación de Luxor, fue adquirido por Henry Rhind en 1858. Contiene 87 problemas matemáticos con cuestiones aritméticas básicas, fracciones, cálculo de áreas, volúmenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica. En él encontramos el tratamiento de las fracciones. No se considera las fracciones en general, sólo las unitarias, las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{6}$ se representan con un signo especial y, en algunos casos, fracciones del tipo $\frac{n}{n+1}$. Trataban de utilizar preferentemente fracciones unitarias divisores de $\frac{1}{2}$. El papiro proporciona información de cómo descomponer algunas fracciones mediante suma de unidades fraccionarias y resuelve algunos casos tipo, como el cálculo de cualquier fracción de la forma $\frac{2}{2n+1}$, $1 \leq n \leq 49$, sin justificar o explicar el procedimiento de obtención.

Los primeros problemas del papiro de Rhind (del 1 al 6), los que aparentemente son más elementales, consisten en repartir distinto número de panes (1, 2, 6, 8, 9) entre diez hombres, señalando así una de las actividades principales en la que surge el uso de fracciones.



Problema 3: División de 6 panes entre 10 hombres. Ahmes da como respuesta $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ y así lo escribió:

$1 \rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ $\qquad$ $2 \rightarrow 1+\frac{1}{5}$

$4 \rightarrow 2+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ $\qquad$ $8 \rightarrow 4+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$

Por lo tanto:

$$1+\frac{1}{5}+4+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=6$$

El trabajo con fracciones es empleado para resolver problemas de reparto cuando la cantidad a repartir es menor que el número de partes y que suele resolverse por el método de falsa posición.

Es curioso ver cómo los matemáticos egipcios trabajaban con fracciones y qué tipos de problemas resolvían. Queda en su haber el primer intento de obtener un sistema de numeración para las fracciones mediante el empleo de sólo las unidades fraccionarias, empeño en el que fracasaron; desde entonces la búsqueda de una expresión adecuada para las fracciones tuvo que prescindir de la pretensión de número reducido de signos -unidades fraccionarias- mediante los cuales escribir cualquier fracción.

Sin embargo, fueron los hindúes quienes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones en el siglo VI después de Cristo. En esa época, Aryabhata se preocupó de estas leyes, y después lo hizo Bramagupta, en el siglo VII.

Posteriormente, otros estudiosos hindúes efectuaron estudios más amplios. Es así como las reglas que utilizamos en la actualidad para trabajar con fracciones, fueron obra de Mahavira- en el siglo IX- y Bháskara -en el siglo XII-.

En China se hizo uso de las fracciones con una dificultad considerable. El libro "*Chóu-peï*" (de autor desconocido) fue escrito probablemente sobre el año 1105 a.C. y contiene varios problemas que involucran al número 247 933/1460. El trabajo incluye divisiones como la de 119 por 182 5/8, en las que previamente se multiplicaba por 8.

Las fracciones unitarias también tuvieron cabida en este trabajo, así en la sección nueve aparece el siguiente problema:

Hay un campo cuya longitud es 1 pu y medio, $\frac{1}{3}$ pu, $\frac{1}{4}$ pu, $\frac{1}{5}$ pu. Si el área es 240 pu^2, ¿cuál es su extensión?

Alrededor del siglo I después de Cristo los matemáticos chinos escribieron el libro "*Jiu Zhang suan Shu*" (El arte del cálculo), en el que aparecen tanto la noción de fracción como operaciones con fracciones, así como la expresión de divisiones inexactas como número mixto, el cálculo del mínimo común múltiplo y un procedimiento semejante al algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor (desg shu).

Múltiples son las referencias y estudios que sobre las fracciones conocemos de la cultura griega. Los griegos trabajaban con un sistema de numeración alfabético, introduciendo así fracciones con números distintos de la unidad en el numerador, valiéndose para ello de letras. Para los griegos, los números fraccionarios estaban asociados a longitudes y efectuaban cálculos con fracciones bastante complicados. Algunas fracciones unitarias eran notadas por el símbolo correspondiente al denominador seguido de uno o dos acentos $\left(\frac{1}{3} = \gamma'\right)$ y en general eran escritas por el numerador seguido de un acento y por el denominador seguido de dos acentos, aunque algunas fracciones concretas tenían símbolos específicos propios.

De su primera época destacamos la tradición que atribuye a Pitágoras el descubrimiento de las proporciones que se dan entre los sonidos armónicos.

Arquímedes de Siracusa (287 - 212 a.C.) utiliza la fracción $\frac{10}{71}$ en su aproximación del número PI y Diofanto de Alejandría (s.II d.C.) comienza a usar una notación menos ambigua de fracción en la que pone al denominador como exponente del numerador.

El estudio de las fracciones para expresar razones, no sólo en el campo de la música sino también en la escultura, arquitectura, literatura, etc., que reflejaran situaciones armónicas y equilibradas, es una constante del uso de las Matemáticas -y de las fracciones- por parte de los griegos durante el amplio período histórico que va desde el 500 a.c. hasta el 300 d.c.

De época más tardía es Euclides -fines del siglo IV a.c.- en cuyo texto fundamental "*Elementos de Geometría*" y sus Libros VII y VIII da una definición de fracción y hace un estudio extenso de las propiedades más importantes de las fracciones estudiadas como razones.

En los 200 años transcurridos entre Pitágoras y Euclides la Matemática griega ha puesto las bases axiomáticas para su desarrollo sistemático que continuará avanzando aún otros 500 años por lo menos, y desde el principio el concepto de fracción como proporción geométrica y como relación entre números no divisibles aparece y adquiere vigor. La fracción -aunque ligada al soporte intuitivo de la figura geométrica- es un concepto autónomo y como tal se trata, y permite avanzar en el estudio de las propiedades geométricas y en bastantes aritméticas. Se continúa el intento, ya iniciado por los egipcios, de reducir el trabajo con fracciones a las unidades fraccionarias, sin llegar a dar ningún paso decisivo al respecto.

Entre las aportaciones de los matemáticos árabes a la cultura matemática occidental de la Baja Edad Media está la introducción del Sistema de Numeración Indoarábigo, el que básicamente dio origen al actual y en particular el empleo de estos números para expresar fracciones con una notación similar a la actual: numerador encima del denominador pero sin raya de fracción; esta notación fue tomada de los hindúes. La cultura árabe continúa la tradición griega de descomposición de unidades fraccionarias.

En 1202 Leonardo de Pisa (Fibonacci) publica el “*Líder Abaci”*, que durante muchos años constituyó referencia obligada para todos los que trabajaron en Aritmética y Álgebra. En este libro aparecían los métodos más perfeccionados del cálculo con enteros y fracciones que se conocían en el momento. El uso de fracciones se emplea y perfecciona en la resolución de problemas y su notación continúa siendo la ya conocida de los árabes pero escribiendo el numerador en caracteres más gruesos y el denominador a continuación en más pequeño.

Leonardo de Pisa explicó cómo resolver una fracción mediante la suma de unidades fraccionarias y fue uno de los primeros que separó el numerador del denominador mediante la línea fraccionaria. A partir de esta época se perfeccionaron los mecanismos del cálculo con fracciones, adaptándose a la nueva notación ya conseguida y ampliando el campo de las fracciones al caso de las fracciones decimales. La fracción se incorpora cada vez más al dominio del Álgebra y su estudio, sobre todo partir de Vieta, se va desligando de sus componentes intuitivas y representativas; el camino que conduce al concepto de Número Racional tiene aquí su comienzo.

Todavía faltan casi dos siglos para la obra de Gauss “*Disquisitiones Aritmeticae*” (1801) en donde se fundamenta la teoría moderna de números. El cuerpo de los Números Racionales, que simetriza el dominio de integridad de los Números Enteros, correspondiente a la actual teoría estructural y que sirve de modelo para generalizar el proceso de la primitiva idea de fracción más que su base intuitiva y el tipo de problemas que pueden resolverse mediante estos conceptos.

Los matemáticos venían encontrando dificultades para manejar las fracciones desde los tiempos de los sumerios, pese a que se habían enunciado reglas especiales para operar con quebrados. Pero no fue hasta 1585, cuando Simon Stevin publica en su obra “*De Thiende”* (La Décima) el método por el que todos los cálculos que incluían fracciones podían ser realizados fácilmente como si fueran números enteros.

La formalización del conjunto de números racionales llegará en el siglo XIX, definiendo la fracción como un par de números enteros, el segundo distinto de cero. La relación de equivalencia entre fracciones ($\frac{a}{b}$ es equivalente a $\frac{c}{d}$ si, y solo si, $a \times d = b \times c$), lleva a definir un número racional como clase de equivalencia de fracciones. Se genera así el conjunto Q = $\frac{Z\ x Z^{*}}{R}$, que en álgebra se llama cuerpo de fracciones de los números enteros.