

TRABAJO FIN DE MÁSTER: Semejanza de figuras.

Máster Universitario de Formación de Profesorado de
Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato,
Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Especialidad: Matemáticas



Universidad de Granada

CURSO 2010/2011

**Trabajo realizado por Fabiola Zurita Rejón
Bajo la supervisión de D. Pablo Flores Martínez**

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	3
FUNDAMENTACIÓN INSTITUCIONAL.....	4
ANÁLISIS DE CONTENIDO	6
CONCEPTO DE SEMEJANZA	6
DESARROLLO HISTÓRICO	7
ESTRUCTURA CONCEPTUAL.....	14
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	18
FENOMENOLOGÍA	21
MAPA ESTRUCTURA CONCEPTUAL.....	22
ANÁLISIS CONGNITIVO	23
FOCOS	23
OBJETIVOS Y COMPETENCIAS	23
DIFICULTADES Y ERRORES.....	25
ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN	27
DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA: SEMEJANZA DE FIGURAS.....	28
DESARROLLO DE LAS SESIONES	30
1ª SESIÓN.....	30
2ª SESIÓN	33
3ª SESIÓN.....	36
4ª SESIÓN.....	38
5ª SESIÓN.....	41
6ª SESIÓN: REPASO	44
ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD	46
<i>Tareas de refuerzo</i>	46
<i>Tareas de ampliación</i>	47
EVALUACIÓN	50
CONCLUSIONES.....	51
BIBLIOGRAFÍA	53
ANEXO I: ESTRUCTURA CONCEPTUAL	54
ANEXO II: COMPETENCIAS PISA	56
ANEXO III: ANÁLISIS DE LAS TAREAS	58
ANEXO IV: MODELO DE EXAMEN	63

INTRODUCCIÓN

Este documento es el trabajo fin de máster, consiste en una síntesis de lo realizado en él una vez concluido el periodo de formación teórica y práctica. Entre las diferentes modalidades posibles, consiste en un diseño curricular fundamentado centrado en una unidad didáctica, la enseñanza de Figuras Semejantes, dirigida a alumnos de 2º de ESO.

Para su elaboración, he tenido en cuenta lo visto en las asignaturas del máster, y especialmente en la asignatura de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.

El documento está dividido en dos partes. La primera dedicada a la fundamentación institucional y a los análisis previos al desarrollo de la unidad didáctica (análisis de contenido, cognitivo y de instrucción). La segunda está centrada en el objeto de este trabajo, el desarrollo de la unidad didáctica, con todas sus sesiones detalladas, un apartado dedicado a la atención a la diversidad, con actividades de refuerzo y ampliación y el apartado correspondiente a la evaluación, en el que aparecen los instrumentos que se tienen en cuenta y un modelo de examen.

En el desarrollo de la unidad se aprovechan las opciones que presentan las nuevas tecnologías, se utiliza un programa de geometría dinámica, Geogebra. Además de las ventajas que presenta, el uso de las tecnologías es una fuente de motivación intrínseca para los alumnos.

En las sesiones propuestas, se intercala la realización de tareas (individuales o grupales) con la puesta en común de estas tareas y explicaciones del profesor, con la intención de que las clases no sean monótonas para los alumnos, sino que con el cambio de una actividad a otra, se mantenga su atención.

Al término de cada sesión se propone alguna actividad para casa con la intención de que repasen y afiancen lo visto en dicha sesión.

FUNDAMENTACIÓN INSTITUCIONAL

Esta unidad va dirigida a alumnos del segundo curso del primer ciclo de la ESO. Es en este curso, cuando aparecen por primera vez la semejanza de figuras y la proporcionalidad geométrica. Mi trabajo está centrado únicamente en la semejanza de figuras. Posteriormente, el estudio de la semejanza se continuará en el tercer y cuarto curso.

Según la orden ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria, encontramos en su anexo II, las materias de Educación Obligatoria en matemáticas, dentro del bloque de geometría.

En esta orden, encontramos que *“la geometría, además de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes es, sobre todo, describir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos.*

La utilización de recursos manipulativos que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida por la interacción con un objeto físico. Especial interés presentan los programas de geometría dinámica al permitir a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades, explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas.”(p. 111)

Por estos motivos, se ha incluido en el desarrollo de la unidad algunos materiales con la intención de que su manipulación facilite el aprendizaje de la semejanza.

Los contenidos que aparecen dentro del bloque de geometría relacionados con la semejanza son los siguientes:

- La proporcionalidad de segmentos y el teorema de Tales.
- Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Identificación de relaciones de semejanza.
- Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Interpretación y obtención de valores en planos, mapas y maquetas.
- El triángulo rectángulo y el teorema de Pitágoras.
- Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.
- Utilización de herramientas tecnológicas y materiales manipulativos para facilitar la visualización espacial, la comprensión de las propiedades y la

descripción, con la terminología y notación adecuada, de situaciones, formas y configuraciones geométricas.

Este trabajo está centrado solamente en la semejanza de figuras.

Dentro de los criterios de evaluación relacionados con el tema de la semejanza de figuras, podemos encontrar:

- Utilización de los criterios de semejanza. Este criterio va dirigido a valorar la capacidad para:
 - Reconocer la proporcionalidad entre las medidas de los lados homólogos y la igualdad de ángulos entre triángulos o cuadriláteros semejantes.
 - Reconocer figuras semejantes y obtener la razón de semejanza entre algunos de sus elementos.
- Transmitir con un lenguaje suficientemente preciso, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros.
- Emplear de forma adecuada y con sentido crítico los recursos tecnológicos, calculadoras y programas informáticos adecuados, habituales en el trabajo matemático.

La semejanza es el primer tema del bloque de geometría, que es impartido después del bloque dedicado al álgebra.

ANÁLISIS DE CONTENIDO

El currículo consta de cuatro dimensiones, correspondientes a cuatro focos de atención que determinan las finalidades y el proceso de enseñanza. A continuación se detallan las cuatro partes:

- 1) Cultural/ conceptual que corresponde a qué dice la matemática, y se identifica con el análisis de contenido.
- 2) Personal, que corresponde a cómo aprenden los alumnos, está relacionado con las teorías de aprendizaje y corresponde con el análisis cognitivo.
- 3) Formativa que corresponde a cómo se enseña y se identifica con el análisis de instrucción.
- 4) Social, que corresponde a para qué sirven, y se corresponde con el análisis fenomenológico, dentro del análisis de contenido.

El análisis de contenido es el primero de los análisis que componen el análisis didáctico. Su propósito es concretar el contenido matemático de la unidad, qué aspectos contiene (las estructuras matemáticas que deben enseñarse y aprenderse, delimitar su extensión). Este análisis está dividido en: desarrollo histórico, estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

Concepto de semejanza

La definición actual de semejanza es un objeto muy elaborado como consecuencia de las generalizaciones realizadas a lo largo de los siglos. La semejanza es una transformación geométrica que cumple una serie de propiedades, tal y como se expresa en las siguientes definiciones:

«Semejanza: Transformación de un espacio euclidiano por la cual para cualesquiera dos puntos A y B y sus respectivas imágenes A' y B' tiene lugar la relación $|A'B'| = k |AB|$, donde k es un número positivo llamado razón de semejanza» (Vinogradov, Tomo 9-2, p. 53).

«La Semejanza es el producto de una homotecia por un movimiento, $S=H \cdot M$ » (Martínez et al., 1984, p. 364), considerando definidas previamente las transformaciones de homotecia y de movimiento.

La **homotecia** en el plano: es una transformación mediante la cual, a un punto cualquiera x, le corresponde otro y sólo otro x' tal que la recta que une el punto x' con el punto x pasa obligatoriamente por un punto fijo P, que se llama centro de la homotecia y de manera que $Px = kPx'$ donde k es un número fijo que se llama razón de homotecia. Según sea k positivo o negativo, se llamará directa o inversa.

Dentro del conjunto de las homotecias que tienen el centro en el punto P, se puede definir el producto de dos homotecias como el resultado de aplicar una a

continuación de la otra, el resultado es otra homotecia que tiene el mismo centro y cuya razón de homotecia es el producto de las razones de homotecia. Por tanto, el grupo de las homotecias del mismo centro con la operación producto es un grupo abeliano.

Un **movimiento** en el plano es una transformación que hace corresponder a cada punto del plano otro punto conservando las medidas. Existen cuatro tipos de movimientos en el plano: traslación, giro, simetría axial y simetría con deslizamiento.

Por tanto, se define la semejanza de dos formas, como una transformación, consistente en la composición de un movimiento y una homotecia (dinámica), y como una regularidad entre figuras (estática).

La idea estática de semejanza es una relación binaria entre figuras. La relación de semejanza es una **relación de equivalencia**:

- Reflexiva: toda figura es semejante a sí misma.
- Simétrica: si una figura es semejante a una segunda, esta segunda es semejante a la primera.
- Transitiva: si una figura es semejante a otra, y esta a una tercera, la primera y la tercera son semejantes.

Por tanto es posible establecer el conjunto cociente de las figuras del plano respecto a la relación de equivalencia de semejanza, dando lugar a las clases. Dentro de cada clase se encuentran todas las figuras que son semejantes entre sí.

Como aplicación de las definiciones, se obtienen las siguientes propiedades de la semejanza:

- Los segmentos homólogos son proporcionales.
- Las semejanzas transforman puntos alineados en puntos alineados en el mismo orden y, como consecuencia, rectas en rectas.
- Las semejanzas transforman ángulos en ángulos iguales, en el mismo sentido si la semejanza es directa y de sentido contrario si es inversa.

Desarrollo histórico

Ningún tema pierde tanto cuando se divorcia de su historia como las matemáticas (E.T.Bell 1985)

La Historia de las Matemáticas es una fuente de vocación, motivación, orientación, inspiración y autoformación del profesor de Matemáticas. La Historia de la Matemática permite conocer las cuestiones que dieron lugar a los diversos conceptos, las intuiciones e ideas de donde surgieron, el origen de los términos, lenguajes y notaciones singulares en que se expresaban, las dificultades que involucraban, los problemas que resolvían, el ámbito en que se

aplicaban, los métodos y técnicas que desarrollaban. El ser humano fue definiendo y creando en función de lo que necesitaba en cada momento.

Thales es considerado uno de los siete sabios. Viajó al centro del antiguo saber y adquirió información sobre la astronomía y la matemática. De estos conocimientos adquiridos, elaboró un conjunto de teoremas y razonamientos que posteriormente fueron recopilados por Euclides. Se le atribuyen las primeras demostraciones de teoremas geométricos mediante el razonamiento lógico y por esto se le considera el padre de la geometría. Thales medía la distancia desde la costa hasta barcos en alta mar mediante la proporcionalidad de lados de triángulos semejantes, aunque los principios en los que se basaba ya eran conocidos. También calculó las dimensiones de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en el que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura. Thales contribuyó a la organización racional y se dedicó a asuntos prácticos de la vida.

El estudio de las proporciones o igualdades de razones debió formar parte al principio de la aritmética o de la teoría de números pitagórica, aunque más tarde estas cantidades de las proporciones debieron ser consideradas como magnitudes geométricas. En la geometría pitagórica encontramos el pentágono estrellado, en el que se obtiene la sección o razón áurea.

En el año 323 a.C., Euclides escribió su trabajo de geometría llamado Los elementos. Se trata de un libro de texto introductorio que cubría la geometría elemental. Para su elaboración, Euclides se basó en sus predecesores, pero se cree que la ordenación final es suya y posiblemente algunas de las demostraciones. Euclides no hacía hincapié en los aspectos prácticos. En el primer capítulo encontramos los teoremas de congruencias de triángulos. El capítulo 5, se dedica a establecer la teoría de las proporciones, hasta ese momento se evita su uso. Uno de los capítulos más admirados, es el descubrimiento de los inconmensurables, había provocado una crisis lógica que arrojaba dudas sobre las demostraciones que recurrían a la idea de proporcionalidad. Los matemáticos griegos tendían a evitar las proporciones, Euclides, sustituye la relación entre longitudes por la igualdad de áreas. El libro concluye con la demostración del Teorema de Pitágoras pero no lo hace como aparece en los libros de texto, en los que se aplican proporciones simples entre los lados de los triángulos semejantes que se forman al trazar la altura correspondiente a la hipotenusa, debido a las dificultades que trae consigo en el caso de inconmensurables.

La evolución histórica de la semejanza está íntimamente relacionada con la evolución de las transformaciones geométricas y con movimientos y homotecias. En esta evolución, se pueden distinguir tres periodos importantes:

- Antecedentes de la idea de transformación: en la geometría que se recoge en los Elementos de Euclides está ausente la idea de transformación geométrica. En los Elementos se aplica la teoría de proporciones para demostrar teoremas relativos a figuras semejantes. En la Edad Media y el Renacimiento se da una utilización práctica de algunas transformaciones, siendo los problemas prácticos de la representación del espacio el germen para la búsqueda de transformaciones.
- Hacia la consideración de las transformaciones como objetos matemáticos: en el periodo correspondiente a los siglos XVI, XVII y XVIII, la noción de transformación se desarrolla lentamente. No encontramos aún una etapa de utilización consciente y de conceptualización de las transformaciones. Ya en el siglo XVIII, destacan las aportaciones de Euler, que hace uso de algunas ecuaciones analíticas de distintas transformaciones, introduce la noción de transformación afín y define por primera vez el centro de semejanza.
- La transformación como objeto matemático: en el siglo XIX se produce la consideración de la homotecia y la semejanza como objetos matemáticos, debido a los trabajos de Monge y Felix Klein. En esta época, Poncelet y Chasles incorporan las transformaciones como método fundamental de la geometría, intentando dar a esta ciencia, la misma generalidad y fecundidad que había demostrado la geometría analítica durante su desarrollo en el siglo XVIII. La noción de transformación va a constituir la base de la nueva geometría que se desarrollará en el siglo XIX. A partir del trabajo de Klein, los movimientos, la homotecia y la semejanza pasan a considerarse como objetos matemáticos, dentro del concepto más general de grupo de transformaciones. Klein, en su Programa de Erlangen, trata de dar una definición formal de lo que es una geometría, más allá de la idea intuitiva que tenemos de ella. Klein da respuesta a esta pregunta introduciendo en la Geometría un nuevo concepto de carácter algebraico: el concepto de grupo. Un grupo es un conjunto G en el que hay definida una operación, es decir, una aplicación que a cada par de elementos del conjunto le asigna otro elemento del conjunto (que será el resultado de operar dichos dos elementos). El concepto de grupo no es invención de Klein, pero es él el que descubre un hecho fundamental que lo relaciona con las distintas geometrías (deja invariantes ciertas propiedades de las figuras del espacio geométrico que se trate): cada geometría es el estudio de ciertas propiedades que no cambian cuando se le aplican un tipo de transformaciones. Así Klein descubre que, por ejemplo, la geometría euclidiana es el estudio de los invariantes mediante el grupo de los movimientos rígidos (como las simetrías, giros y traslaciones), que la geometría afín es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las traslaciones, que la geometría proyectiva es el estudio de los

invariantes mediante el grupo de las proyectividades, e incluso que la Topología es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las funciones continuas y de inversa continua, entre otras.

Esta evolución histórica ha sido punto de partida de algunos estudios que han extraído implicaciones educativas desde distintos puntos de vista. Algunos de ellos son los trabajos de Piaget y sus colaboradores y los de Lemonidis.

Piaget identifica en este proceso histórico tres etapas relacionadas con estadios en la comprensión de los conceptos:

- 1) Intrafigural: en el periodo de influencia de la geometría de Euclides, las propiedades de las figuras y de los cuerpos geométricos se estudian como relaciones internas entre los elementos de dichas figuras o cuerpos. Para este estudio no se tiene en cuenta el espacio como tal, ni por tanto las transformaciones de las figuras en el interior de dicho espacio.
- 2) Interfigural: en el periodo de predominio de la geometría proyectiva hay una etapa caracterizada por la puesta en relación de las figuras entre sí, que se manifiesta en la búsqueda de transformaciones que relacionen las figuras según múltiples formas de correspondencia, pero si llegar a la subordinación de dichas transformaciones a estructuras de conjuntos. La noción de transformación tiene significado como fuente de nuevas construcciones.
- 3) Transfigural: esta etapa está caracterizada por la preponderancia de las estructuras. Su expresión más característica es el Programa Erlangen de Klein en 1872, en el que se pasa de las transformaciones a las estructuras que las explican. Se trata de sustituir la descripción de las figuras por el cálculo lógico-algebraico.

Lemonidis, de la misma forma que Piaget, realiza un estudio de la semejanza relacionándolo con la situación correspondiente en la enseñanza. Lemonidis distingue tres grandes periodos.

- 1) El griego. La primera demostración del teorema de Thales y algunos teoremas relativos a figuras semejantes se encuentran en los Elementos de Euclides (s. IV a. C.). En este periodo las transformaciones no existen como tales.
- 2) Del siglo XVI al XVIII. Los problemas de la representación del espacio que surgen en el Renacimiento van a ser el germen para el estudio de las transformaciones. Durante estos siglos, se va desarrollando lentamente, pero aún no se puede identificar su utilización consciente y conceptualización. La transformación es considerada como un útil en la resolución de problemas.

- 3) Siglos XIX y XX. Periodo de la estructuración y algebrización de la geometría. En el siglo XIX se produce la consideración de la homotecia y de la semejanza como objetos matemáticos, debido en gran parte al desarrollo que experimenta la geometría, entre las fechas de publicación de la geometría descriptiva de Monge (año 1799) y el Programa Erlangen de Felix Klein (año 1872) y a la evolución del campo numérico.

A partir de aquí, Lemonidis identifica tres momentos distintos en el concepto de semejanza, importantes cuando se la considera como objeto de enseñanza y la relación con los diferentes periodos de la enseñanza de la matemática:

- a) Relación intrafigural. Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante (idea estática), estando ausente la idea de transformar una figura en otra. Esta concepción está presente en la llamada enseñanza tradicional, considerada como el periodo de influencia de la geometría de Euclides.
- b) Transformación geométrica vista como útil. La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Esta concepción como útil funcional en la enseñanza aparece en 1866, se utiliza la semejanza en la resolución de problemas gráficos.
- c) Transformación geométrica como objeto matemático. Caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones. Tiene su preponderancia en la enseñanza durante la influencia de la llamada matemática moderna. Durante su influencia, la geometría desaparece de la enseñanza secundaria en provecho de una simple aplicación del álgebra lineal. Aparece la homotecia en forma estructural, sin necesidad de hacer referencia a las figuras geométricas. (Escudero, 2006)

La semejanza como objeto de enseñanza en las últimas décadas ha manifestado bastantes diferencias tanto entre distintos periodos como dentro de uno mismo.

Por otra parte, en la semejanza de figuras se da la proporcionalidad de segmentos. En el siglo V a.C. el descubrimiento de las magnitudes llamadas "incomensurables" conmovió los fundamentos de la matemática griega. Desplazó la aritmética y su lugar lo ocupó la geometría. La teoría de proporciones (que se encuentra en los libros V y VI de los Elementos de Euclides y que se atribuye en su mayor parte a Eudoxo de Cnido) parece ser un intento de solución del problema de las magnitudes incomensurables. La teoría de proporciones esconde un intento de construcción de una nueva teoría numérica desde la geometría. La teoría de la proporción es actualmente un cuerpo doctrinal que desde la matemática y la geometría irradian su influjo sobre las carreras de Arte y Arquitectura. Durante toda la historia de la

matemática, han sido utilizadas numerosas proporciones, a continuación se presentan algunas de ellas:

- Cuarto proporcional. Sean a, b y c números positivos, se llama cuarto proporcional al número x que verifica que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.
- Tercero proporcional. Sean a y b dos números positivos, se llama tercero proporcional al número x que verifica que $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$.
- Media proporcional. Sean a y b dos números positivos, se llama media proporcional al número x que verifica $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$.
- Cuarteta armónica. Dados los puntos alineados a, b, x y x', se dice que forman una cuarteta armónica si se verifica que $\frac{xa}{xb} = -\frac{x'a}{x'b}$.
- $\sqrt{2}$. Es una de las proporciones más famosas de la matemática. La demostración de la no racionalidad de dicho número es una de las primeras joyas de la demostración en matemáticas. Es la proporción existente entre la diagonal y el lado de un cuadrado.
- La razón áurea. Es un número irracional conocido desde la antigüedad que se representa con la letra Φ . Fue un hallazgo de los griegos de la época clásica. Su aparición continuada en toda clase de manifestaciones naturales y artísticas le ha merecido apelativos como divina proporción o número de oro. El número áureo se obtiene al dividir un segmento en lo que en la Grecia clásica se llamaba media y extrema razón. Su historia documentada comienza en los Elementos de Euclides, donde encontramos *"Se dice que una recta está dividida en media y extrema razón cuando la longitud de la línea total es a la de la mayor parte, como la de esta parte mayor a la de la menor"*. (El todo es a la parte como la parte es al resto. Se cree que el valor del número de oro se tomaba como patrón ideal de belleza, de aquí su aparición en la pintura, arquitectura, escultura...
- El número de plata. Es un número irracional definido por la suma $1 + \sqrt{2}$.
- La proporción cordobesa. Es la proporción existente entre el radio y el lado del octógono regular $(\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{2}})$. Aparece en muchos monumentos y mosaicos de la época de los califas en la ciudad de Córdoba. La

generación de cuadrados y octógonos inscritos y circunscritos hace de la proporción cordobesa una herramienta ideal en la repetición de formas y patrones.

- El número pi. Sin esta proporción no sería posible la geometría de los cuerpos redondos. Es la proporción existente entre el perímetro de cualquier circunferencia y su diámetro.

Una vez estudiado el concepto de semejanza y su historia, a continuación, se analizan sus componentes para la enseñanza, el análisis conceptual.

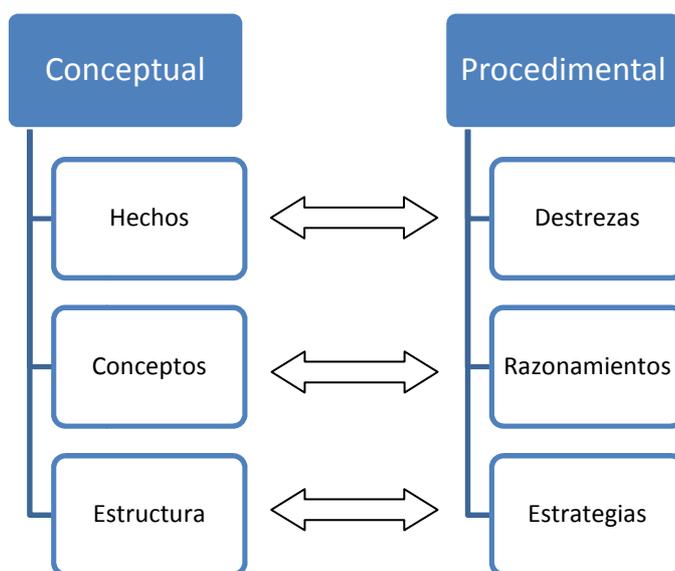
Esta revisión histórica y los estudios llevados a cabo a partir de ella, dan una idea de las pautas a seguir en la planificación de la unidad de semejanza. Al igual que en la evolución del concepto se distinguen diferentes periodos, también se pueden distinguir distintos periodos para su aprendizaje. En primer lugar, se buscan las regularidades entre figuras (idea estática), introduciendo la semejanza a través de la intuición. Después, se utiliza la semejanza para la resolución de problemas prácticos. Y posteriormente se da rigor, formalización y estructura a la semejanza. Estas tres etapas, se pueden ver reflejadas en los cursos en los que se imparte la semejanza, 2º, 3º y 4º de ESO.

Estructura conceptual

A la hora de la enseñanza de un concepto es necesario identificar sus componentes y distinguir entre las ideas que se tiene que formar el alumno y los procedimientos que debe interiorizar.

La estructura conceptual permite organizar los elementos, los distintos significados de un concepto y las relaciones con otros conceptos.

Dentro de la estructura conceptual podemos distinguir entre el campo conceptual y el campo procedimental:



A continuación se muestran los elementos fundamentales de la parte conceptual y procedimental que han sido extraídos de la lista completa que se puede consultar en el [Anexo I](#) de este documento.

HECHOS

Los hechos quedan divididos en las siguientes partes:

Términos:

- Lados y ángulos homólogos.
- Polígono.
- Perímetro, área.

Notación:

- a/b ó $a:b$.
- k
- $a/b = c/d$ ó $a:b = c:d$
- $ABC \sim DEF$
- P, A .

Convenios:

- En una razón el numerador se llama antecedente y el denominador consecuente.
- En una proporción hay cuatro términos $a:b = c:d$, a y d se llaman extremos y los otros medios.
- a/b se lee como a es a b .
- El símbolo \sim denota la semejanza de figuras.

Resultados:

- Si la razón de semejanza entre figuras, k , es mayor que 1, la figura se amplía. Si es menor que 1, se reduce.
- En las figuras semejantes los segmentos homólogos son proporcionales.
- En las figuras semejantes los ángulos homólogos son iguales.
- Las semejanzas transforman puntos alineados en puntos alineados.
- Las semejanzas transforman segmentos en segmentos.

DESTREZAS

- Medir longitudes, amplitudes de ángulos y superficies.
- Construir ángulos.
- Identificar lados proporcionales en polígonos.
- Construir segmentos proporcionales.

CONCEPTOS

- Razón y semejanza.
- Figuras y polígonos semejantes.
- Figuras y polígonos congruentes.
- Criterios de semejanza de triángulos.

RAZONAMIENTOS

- Deductivo:
 - Identificar polígonos semejantes.
 - Aplicar los criterios de semejanza.
- Inductivo: establecer la relación entre las razones de perímetro y área de polígonos en relación de semejanza.
- Figurativo: dibujar un polígono semejante a otro dada la razón.
- Cálculo de la razón de semejanza entre figuras.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL

- Las semejanzas constituyen un grupo equiforme.

Desde el punto de vista algebraico formal, es el grupo de las semejanzas del espacio, que constituye un grupo no abeliano. Se trata del grupo de todas las transformaciones que conservan la forma, aunque no necesariamente el tamaño ni la orientación de las figuras.

ESTRATEGIAS

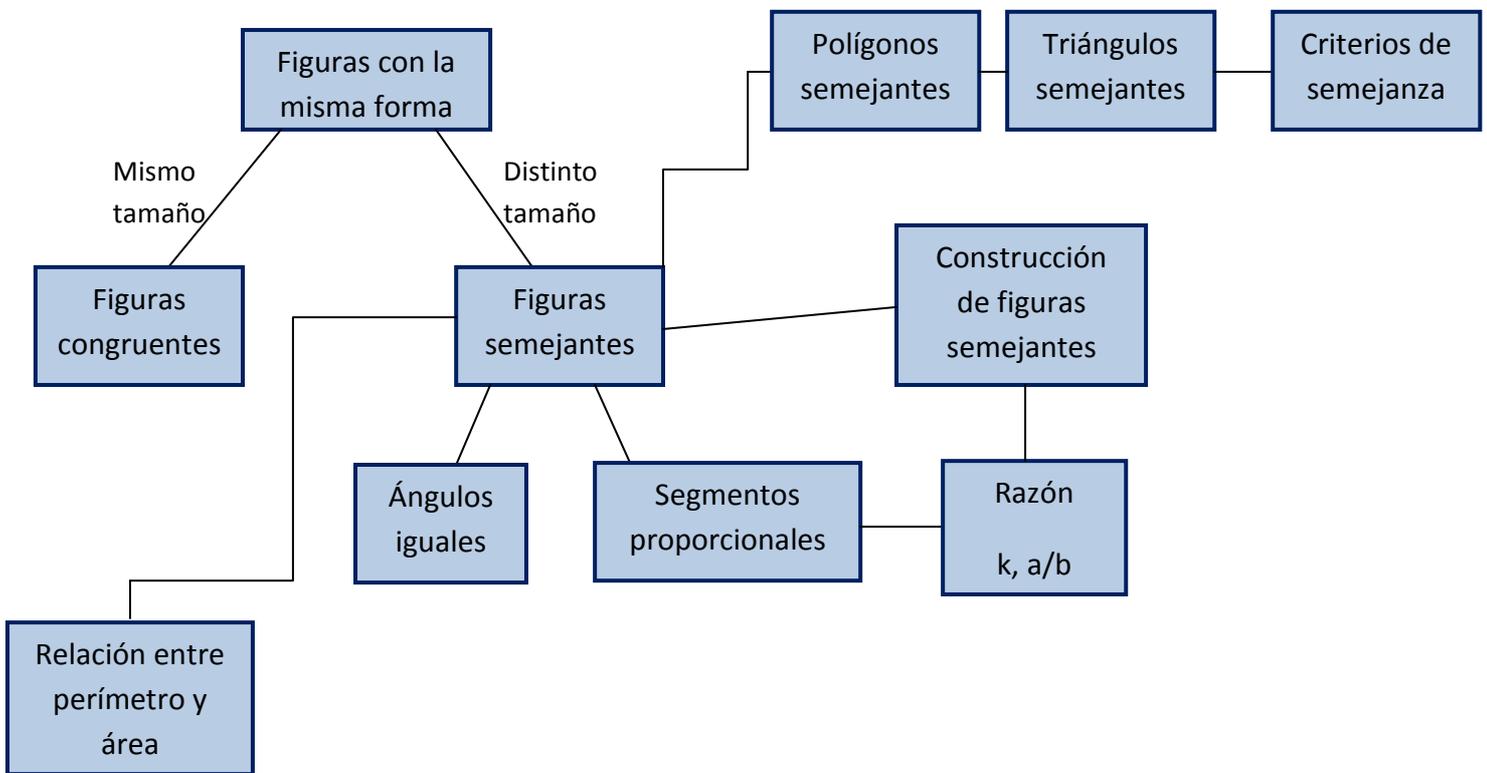
- Construcción de polígonos semejantes.

A continuación, se presenta un mapa de la estructura conceptual:

En primer lugar, se identifican figuras con la misma forma, y dentro de éstas, se distinguen entre aquellas que tienen el mismo tamaño, y las que tienen distinto tamaño.

Si nos quedamos con aquellas que tienen distinto tamaño, se definen las figuras semejantes, que tienen ángulos iguales y lados proporcionales.

Dentro de las figuras semejantes, en particular, se identifican polígonos semejantes, y dentro de estos los triángulos semejantes, que se pueden identificar de una forma más rápida a través de los criterios de semejanza.



Sistemas de representación

Los sistemas de representación son la forma de hacer presente los conceptos. La importancia de los sistemas de representación está ampliamente reconocida en Educación Matemática por dos motivos, porque los conceptos matemáticos son abstractos y los sistemas de representación les asignan significado y facilitan su comprensión; y porque para comprender un concepto hay que usar estructuras mentales que se forman transformando unas formas de representación en otras. Un gran número de investigadores se ha ocupado del análisis del papel de las representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En un sentido amplio, podemos entender las representaciones matemáticas como todas aquellas herramientas que hacen presentes los conceptos y procedimientos y que permiten interactuar con el conocimiento matemático (Rico, 2000).

Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico (Radford, 1998).

Dentro del tema de la semejanza de figuras, podemos encontrar los siguientes sistemas de representación:

Simbólico:

- a/b
- $a/b = c/d$
- \sim

Verbal:

- “a sobre b”
- “a es a b como c es a d”
- “Figuras semejantes”

Tabular:

Lado1 polígono	Lado2 polígono	Lado3 polígono
2 cm	4 cm	6 cm
1.3 cm	2.6 cm	3.9 cm

Conjuntista:

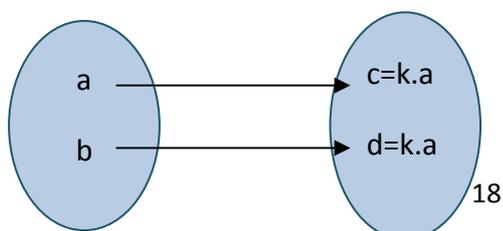
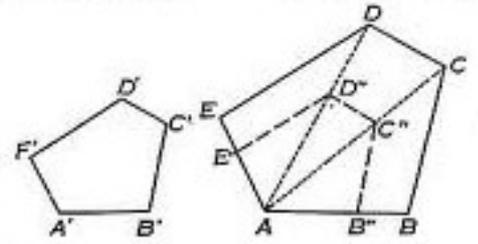
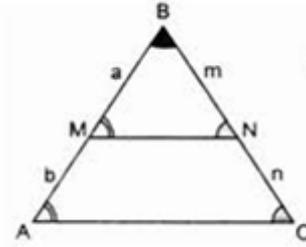
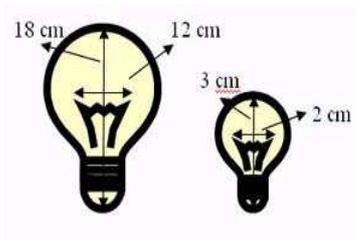
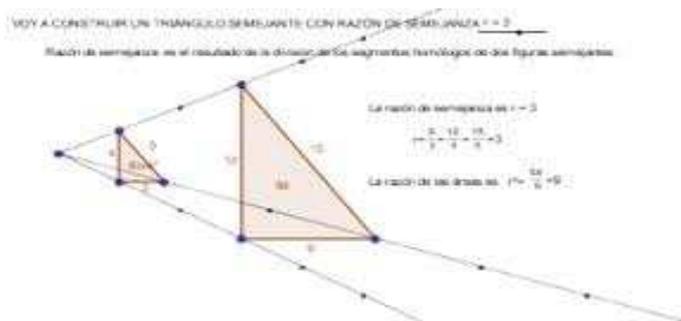


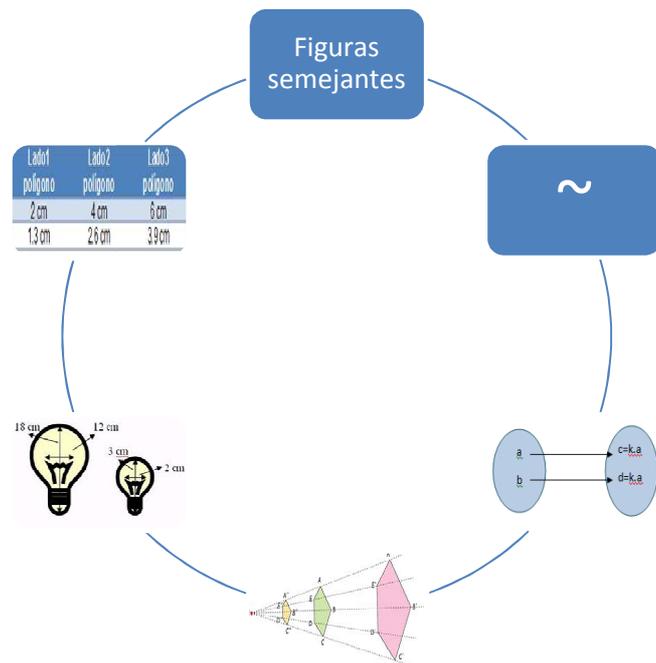
Gráfico y numérico:



Herramientas y lenguaje informático:



El concepto de semejanza puede ser representado mediante los seis sistemas de representación.



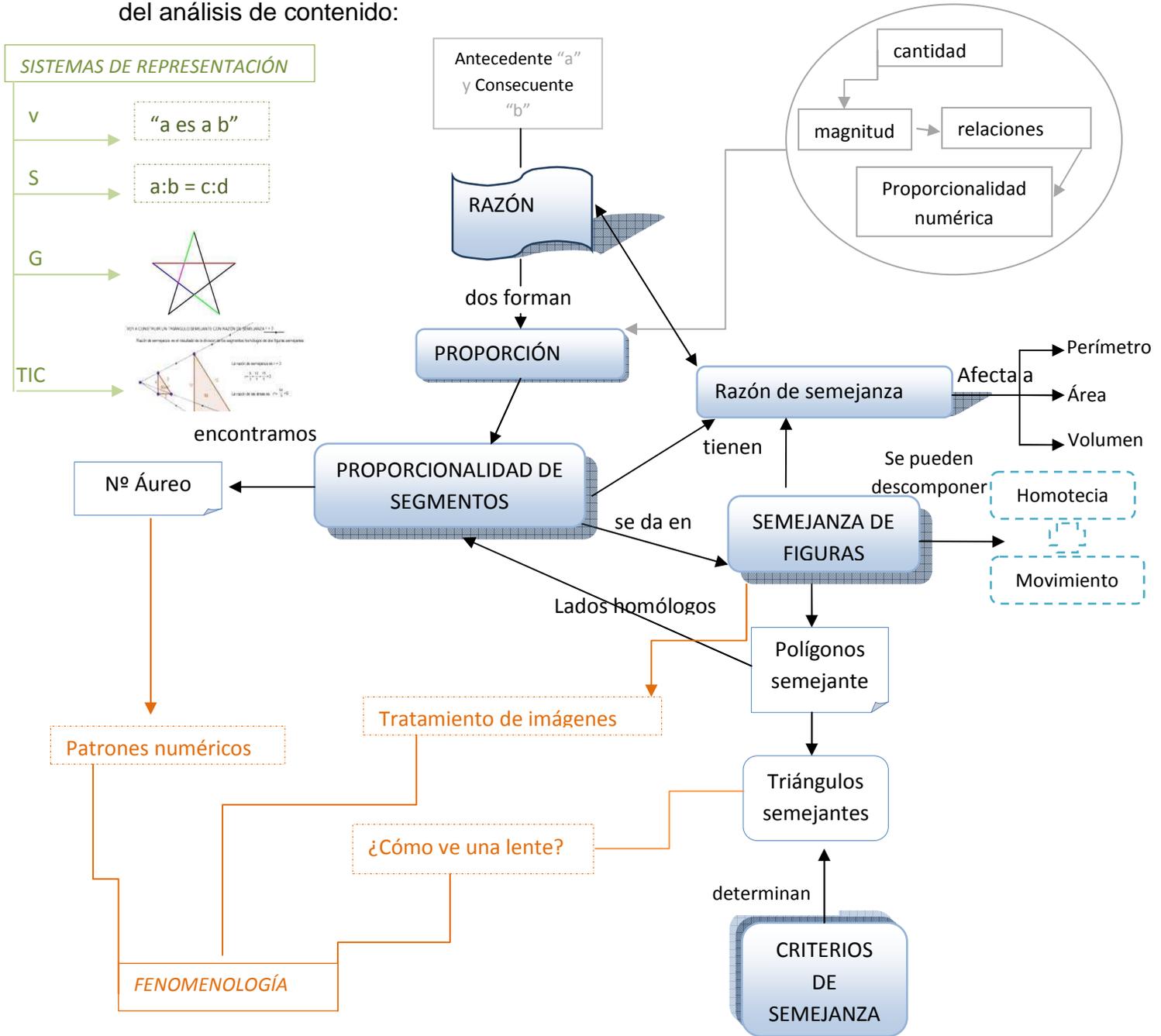
Fenomenología

El análisis fenomenológico tiene como finalidad dar sentido al aprendizaje de conceptos y estructuras matemáticas, vinculándolos con ciertos fenómenos y en relación a distintas situaciones. La fenomenología corresponde a la visión funcional del currículo. Para su estudio se clasifican según el contexto, la situación o los conceptos a los que hace referencia.

	CONTEXTO	FENÓMENO	SITUACIÓN	Conceptos a los que hace referencia
Idea dinámica	Tratamiento de imágenes	Proyectores Fotocopiadoras	Laboral	Homotecia
Idea dinámica	¿Cómo ve una lente?	El ojo humano Cámara de fotos	Científica	Semejanza de triángulos
	¿Cómo se representa la realidad?	Planos y mapas	Personal o científica	Semejanza de figuras
		Representación del Sistema Solar	Científica	
	Identificación de patrones numéricos	En el universo: dinámica de agujeros negros y galaxias.	Científica o social	Número áureo
En la naturaleza: cristales en minerales, caracolas...				
Búsqueda de la belleza: pirámide de Keops o La Gioconda				
Idea práctica	Cálculo de alturas inaccesibles	*Altura de un edificio por el método de Euclides. *Método de Geberto de Aurillac. *Con escuadra y cartabón	Laboral o personal	Semejanza de triángulos

Mapa estructura conceptual

A continuación se muestra un mapa conceptual que relaciona todas las partes del análisis de contenido:



ANÁLISIS CONGNITIVO

Con el análisis cognitivo se pretende describir y analizar qué puede aprender el alumno. Para ello, se concretan las expectativas que se tienen dentro del tema de la semejanza de figuras. Estas expectativas están organizadas en dos focos. Cada foco consta de una serie de objetivos, que serán relacionados con las competencias Pisa.

Después se analizarán los errores y dificultades que pueden presentar los alumnos a la hora de enfrentarse a este tema.

Focos

A la vista del mapa de la estructura conceptual realizado en el análisis de contenido, se pueden considerar dos focos:

- Proporcionalidad de segmentos (Identificación y construcción).
- Semejanza de figuras (Identificación y construcción).

Objetivos y competencias

A continuación, se muestran los objetivos de cada foco, a la vez que se relacionan con las competencias PISA a las que contribuirá cada uno. Las competencias se introducen en el currículo escolar español con la LOE. Estas competencias implican una reformulación de los métodos de enseñanza. La incorporación de las competencias permite poner el acento en aquellos aprendizajes que se consideran imprescindibles, desde un planteamiento integrador. El ser competente es un objetivo a largo plazo que se desarrolla a lo largo de toda la etapa escolar. Algunas competencias pueden verse referenciadas por el enunciado de los objetivos, mientras que otras pueden ser involucradas por el tipo de tareas que persiguen la consecución de dichos objetivos. En el [Anexo II](#) de este documento se encuentran las ocho competencias Pisa detalladas con sus descriptores.

Proporcionalidad de segmentos		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Reconocer series de segmentos proporcionales.		X	X					
2	Calcular la razón de semejanza de dos segmentos.	X					X	X	
3	Construir segmentos proporcionales dada la razón de semejanza.	X		X			X		X

Semejanza de figuras		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
4	Identificar y describir elementos invariantes entre dos figuras semejantes. (Ángulos iguales y lados proporcionales)	X	X	X					
5	Calcular la razón de semejanza entre dos figuras semejantes.	X					X	X	
6	Dibujar un polígono o figura semejante a otro, dada la razón de semejanza.						X		X
7	Identificar triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza.	X	X			X			
8	Establecer la relación entre las razones de perímetro y superficie de figuras semejantes.	X	X		X	X		X	

El objetivo de reconocer series de segmentos proporcionales está asociado a la competencia de pensar y razonar porque se trata de aplicar un procedimiento para su reconocimiento. Con la competencia de comunicar, siempre que en la tarea se pida que los alumnos se expresen, comenten la tarea o discutan con sus compañeros sobre su veracidad.

El segundo objetivo está asociado con la competencia de pensar y razonar y con la competencia de representar y el lenguaje simbólico debido a que la razón tiene una forma de representación y es necesario traducir desde el lenguaje natural al simbólico.

El tercer objetivo está vinculado con la competencia de pensar y razonar debido a que es necesario aplicar y desarrollar procedimientos para ello; con la competencia de comunicar, siempre que así se demande en la tarea; con la competencia de representar y también con el uso de herramientas tecnológicas siempre que la tarea se lleve a cabo con el uso de programas de matemática dinámica.

El cuarto objetivo está asociado a las competencias de argumentar y justificar porque se trata de describir los invariantes presentes en la semejanza; y la de comunicar siempre que se pida en la tarea implicada.

El objetivo cinco está asociado a las mismas competencias que el objetivo dos, ya que se trata de hacer lo mismo, pero en este caso hay que comprobar todos los segmentos de la figura o polígono

El objetivo siete está relacionado con las competencias de argumentar y justificar, porque se pretende que el alumno justifique sus respuestas; y con la

de resolver problemas porque es necesario conocer los criterios y saber aplicarlos a una situación particular.

El último objetivo es el que está relacionado con un mayor número de competencias. Este objetivo se pretende conseguir al final de tema, una vez que los alumnos dominen los contenidos anteriores.

A continuación se muestra una tabla recuento de las competencias involucradas en los objetivos.

	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Recuento por competencias	6	4	3	1	2	4	3	2

Como se puede observar, la competencia de pensar y razonar es la que más aparece, esto se debe a que están relacionados con plantear y dar respuesta a cuestiones propias de la matemática.

La competencia a la que menos se contribuye es la de modelizar. El desarrollo de esta competencia se da en problemas de la vida real, que se traducen al lenguaje matemático para la búsqueda de un modelo (o su construcción, en niveles más avanzados) que dé solución al problema, y una vez obtenida la solución, se traduce al problema inicial del que se parte. Esta unidad es una introducción al tema de la semejanza, esta competencia tendrá un mayor desarrollo en cursos posteriores.

Dificultades y errores

Las dificultades que presentan los alumnos ante un tema concreto distorsionan o frenan su aprendizaje. Estas dificultades se reflejan en los errores que cometen los escolares. Ante la aparición de un error, es importante conocer su causa, esta nos ayudará a planificar de una forma u otra nuestra actuación. Las causas pueden ser diversas, complejidad de los conceptos, conocimientos previos no adquiridos, la forma de transmitir o errores del profesor, un concepto que necesita un proceso más largo para ser asimilado...

Los errores pueden contribuir positivamente al proceso de aprendizaje. Una vez que el alumno resuelve o responde erróneamente, es posible ayudarle a superar este error mediante la realización de unas tareas específicas. El desarrollo de estas tareas le mostrará que su razonamiento no le lleva a una solución adecuada. Por ejemplo, si se quiere realizar un puzle a escala, si en lugar de su usar un razonamiento multiplicativo se utiliza el aditivo, al unir las piezas, no encajarán, prueba de que la estrategia utilizada no es adecuada.

En la unidad de semejanza se presenta algunas tareas que permiten identificar si los alumnos incurren en algunos errores ya estudiados; y otras tareas que ayudan a su superación. Lo ideal sería superar todos los errores detectados, pero la búsqueda de tareas adecuadas no es fácil.

Dentro del tema de la semejanza de figuras podemos encontrar los siguientes errores:

1. Confundir figuras parecidas con figuras semejantes o con figuras congruentes.

Es muy frecuente que se confundan estos términos porque en el lenguaje cotidiano se pueden usar como sinónimos. Al comienzo de la unidad es importante que quede clara su diferencia.

2. Interpretar la razón de semejanza como parte de la unidad u operador fraccionario.
3. Dificultades propias del lenguaje (doble, mitad,...).
4. No verificar la solución apoyándose en la razón de semejanza.

Obtener como resultado una figura ampliada, cuando la razón de semejanza es menor que la unidad o viceversa.

5. Falta de visión espacial a la hora de representar.
6. Identificar erróneamente polígonos semejantes.

Comprobar sólo algunos lados o verificar todos los lados pero no los ángulos. O utilización del razonamiento aditivo en lugar del multiplicativo.

7. Mezclar los criterios de semejanza.
8. Generalizar la razón de semejanza en superficies.

A continuación se muestra una tabla en la que se relacionan los errores con los objetivos a los que están asociados:

Errores		Objetivos
1	Confundir figuras parecidas con figuras semejantes o con figuras congruentes.	1,4
2	Interpretar la razón de semejanza como parte de la unidad u operador fraccionario.	2,3,6
3	Dificultades propias del lenguaje (doble, mitad,...).	3,6
4	No verificar la solución apoyándose en la razón de semejanza.	3,6
5	Falta de visión espacial a la hora de representar.	6
6	Identificar erróneamente polígonos semejantes.	1,2,4,5
7	Mezclar los criterios de semejanza	7
8	Generalizar la razón de semejanza en superficies.	8

ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

El análisis de instrucción es otra de las partes del análisis didáctico. La importancia de este análisis es crucial antes de la planificación de una unidad.

El análisis de instrucción se apoya en el análisis de contenido y cognitivo. Con este análisis se obtiene una base de tareas analizadas, de las que se seleccionarán las más adecuadas para el desarrollo de la unidad, según colaboren al logro de los objetivos, a la detección o superación de los errores, tomando en cuenta su grado de complejidad. Para ello se estudian las tareas y las condiciones en las que se realizan, y el orden en el que se ponen en juego dichas tareas.

Además, a la vista de los resultados del análisis, las tareas pueden ser modificadas para que sean lo más adecuadas posibles.

Una vez realizado el análisis, se elabora la propuesta de actuación, determinando el número de sesiones de clase que se dedican al tema, qué se hace en cada una de ellas, qué tareas se plantean y con qué función.

En el [Anexo III](#) de este documento se encuentra el análisis detallado de todas las actividades que intervienen en el desarrollo de la unidad.

En el siguiente apartado se desarrolla la secuencia completa de la unidad.

DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA: Semejanza de figuras.

Esta unidad pretende introducir el concepto de semejanza. Una transformación del plano que conserva la forma aunque no su tamaño. La unidad se desarrollará en seis sesiones, siendo la última sesión de repaso.

Según lo observado en las prácticas a los alumnos del primer ciclo de ESO, les cuesta más trabajo mantener la atención. Por este motivo, se propone un trabajo en clase basado en la realización de tareas intercaladas con explicaciones. Con este ritmo de trabajo se pretende implicar al alumno.

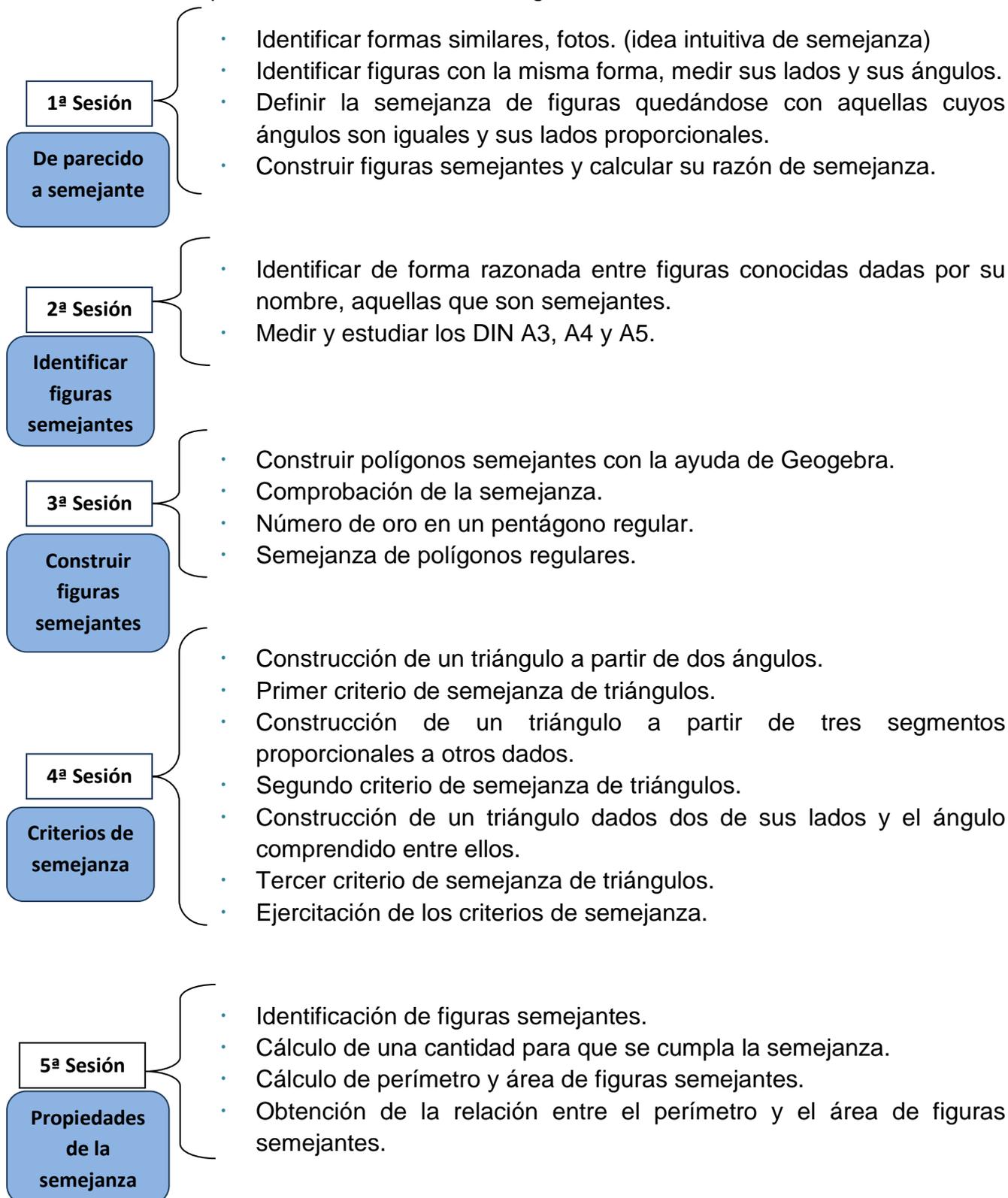
Las actividades que se trabajan persiguen el razonamiento y la argumentación en pequeño grupo primero y después en gran grupo, siempre asistidos por el profesor.

Se pretende fomentar la comunicación matemática, que los alumnos sean tengan la oportunidad de expresarse utilizando los términos correctos, que se esfuercen por entender lo que dicen sus compañeros y que ellos mismos sean capaces de corregirse dando argumentos razonados. El profesor dirigirá estos debates, pero no será la persona clave, sino que serán los alumnos.

En todas las sesiones se propondrán tareas para casa con la intención de que repasen lo visto en clase. Al día siguiente se corregirán aclarando las posibles dudas o dificultades encontradas.

En dos de las sesiones se utilizará el programa Geogebra para la construcción de figuras semejantes porque presenta distintas ventajas frente a su realización a mano. Las nuevas tecnologías son fuente de motivación, además de su facilidad de construcción, los programas de geometría dinámica permiten mover sus elementos y observar cómo cambia la construcción sin necesidad de repetirla desde el principio más veces.

El esquema de las sesiones es el siguiente:



Desarrollo de las sesiones

1ª Sesión

En esta primera sesión se quiere hacer una introducción al concepto de figuras semejantes. Estos alumnos han visto en el curso anterior el concepto de razón y proporción visto en el tema de proporcionalidad numérica. Aún así, se recordará el concepto de razón porque será fundamental en este tema.

Objetivos de la sesión, que los alumnos:

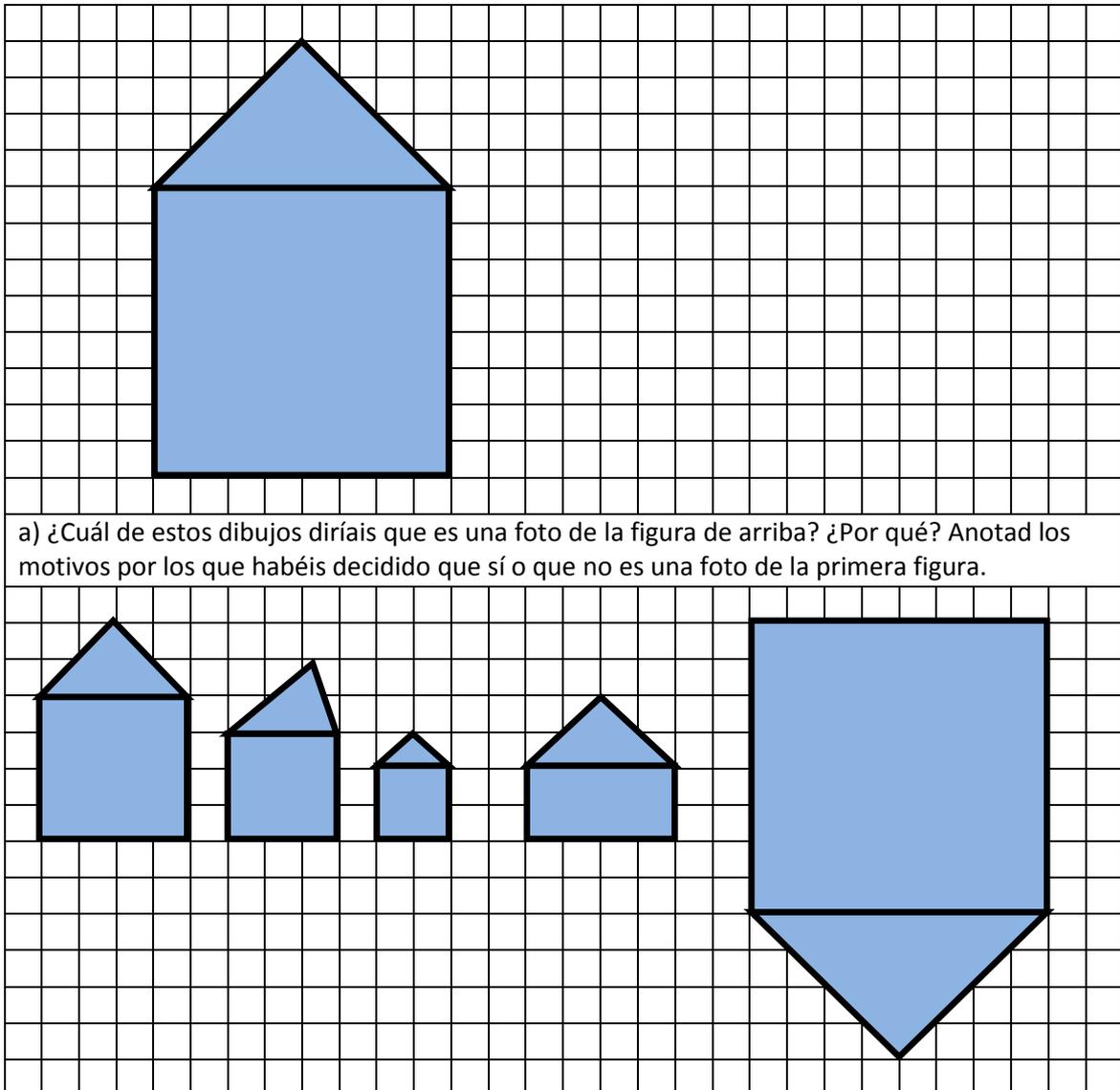
- Reconozcan series de segmentos proporcionales.
- Calculen la razón de semejanza entre dos segmentos.
- Identifiquen y describir elementos invariantes entre dos figuras semejantes.
- Calculen la razón entre dos figuras semejantes.

Tarea 1

Como introducción, los primeros 5 minutos de clase se pedirá a los alumnos que dibujen en su cuaderno el contorno de la pizarra y que decidan y que expliquen cuál de ellos representa mejor la pizarra.

Tarea 2

Se entregará a cada dos alumnos la siguiente ficha:



a) ¿Cuál de estos dibujos diríais que es una foto de la figura de arriba? ¿Por qué? Anotad los motivos por los que habéis decidido que sí o que no es una foto de la primera figura.

- b) ¿Son parecidos estos dibujos?
- c) ¿Tienen la misma forma? ¿Tienen el mismo tamaño?
- d) ¿Alguno es exactamente igual al original?

Con esta actividad se pretende que identifiquen las figuras con la misma forma que la original aunque tengan distinto tamaño.

La duración de esta tarea será aproximadamente 20 minutos. En los 10 primeros minutos, cada pareja realizará la actividad. Una vez transcurrido este tiempo, cada pareja expondrá al resto de la clase su solución de forma justificada, las demás parejas mostrarán su acuerdo o desacuerdo, llegando a establecer qué se entiende por figuras parecidas, cuál de ellas se parecen más.

En la realización del debate, según las respuestas de los alumnos, serán guiados hacia el tema que se quiere tratar con esta tarea ayudados por la cuadrícula en la que están dibujadas las figuras.

Tarea 3

Se entregará por parejas la siguiente ficha:

Dados los siguientes polígonos:

Figura 1

Figura 2

Figura 3

Figura 4

a) ¿Qué figuras tienen la misma forma?

b) Completad las siguientes tablas, tomando como unidad el lado del cuadrado:

	Medida lado 1	Medida lado 2	Medida lado 3	Medida lado 4	Medida lado 5
FIGURA 1					
FIGURA 2					
FIGURA 3					
FIGURA 4					

	Medida ángulo 1	Medida ángulo 2	Medida ángulo 3	Medida ángulo 4	Medida ángulo 5
FIGURA 1					
FIGURA 2					
FIGURA 3					
FIGURA 4					

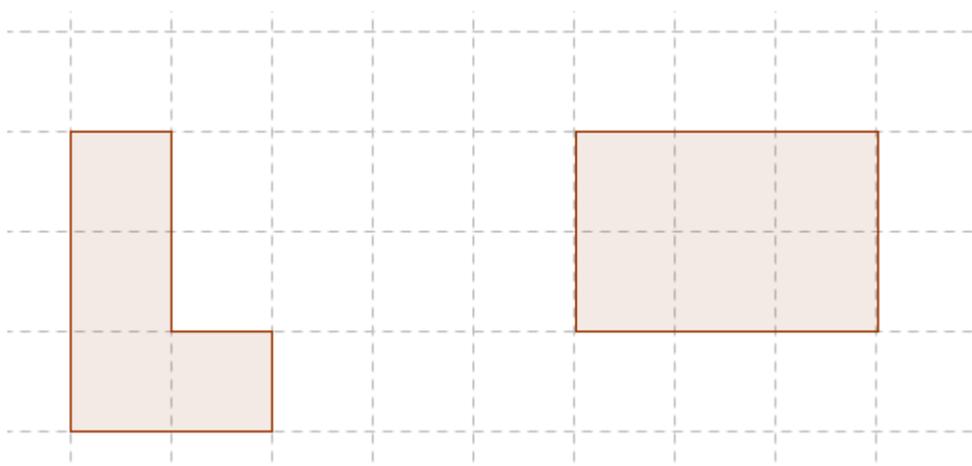
c) Ahora quedaos sólo con las figuras que tienen la misma forma, ¿observas alguna relación entre sus lados y sus ángulos?

Con esta tarea se pretende definir el concepto de figuras semejantes.

La realización de esta tarea tiene una duración de 30 minutos. Los primeros 15 minutos se dedicarán a que los alumnos realicen la actividad por parejas. Posteriormente, se pondrán en común las respuestas. Una vez identificadas las figuras con la misma forma, se espera que los alumnos observen que estas figuras tienen los ángulos iguales. Después se estudiará la relación entre sus lados y se obtendrá y recordará el concepto de razón. A continuación, se dará la definición de figuras semejantes y congruentes. Para las figuras semejantes nos quedaremos con aquellas que tiene los ángulos iguales y sus lados proporcionales y para las congruentes, nos quedaremos con aquellas que tienen los lados y los ángulos iguales.

Como actividad para casa, repartiré una ficha como la siguiente a cada alumno.

Copia las siguientes figuras en tu cuaderno:



Con la ayuda de la cuadrícula de tu cuaderno:

- Dibuja una figura semejante a cada una de ellas.
- Calcula su razón de semejanza.

Una vez realizadas las figuras, comprueba que efectivamente son semejantes.

2ª sesión

Los primeros 10 minutos de la clase se dedicarán a la corrección de la actividad propuesta el día anterior. Se elegirá a dos alumnos, uno para cada figura, para que salgan a la pizarra y expliquen el procedimiento seguido para la realización de la actividad. Antes de continuar se resolverán las posibles dudas tanto de esta actividad como del día anterior. Se identificará la razón de

semejanza con la escala, empleando la escala de las fotocopiadoras, de los proyectores, de las fotografías...

Con esta sesión se pretende afianzar el concepto de figuras semejantes y hacer una introducción a la relación existente entre el perímetro y la superficie de figuras semejantes.

Objetivos de la sesión, que los alumnos:

- Reconozcan series de segmentos proporcionales.
- Calculen la razón de semejanza entre dos figuras semejantes.
- Identifiquen y describan elementos invariantes entre dos figuras semejantes.

Tarea1

Como repaso y afianzamiento del concepto de figuras semejantes se propone la siguiente actividad.

Estudiar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando argumentando de forma justificada tu respuesta.

- Todos los rectángulos son semejantes entre sí.
- Todos los cuadrados son semejantes entre sí.
- Dos rombos iguales son semejantes.
- Un triángulo isósceles es semejante a un triángulo rectángulo.

La duración de esta tarea será de 15 minutos. Se llevará a cabo en gran grupo. Se escribirá una frase en la pizarra, se dará un par de minutos para que cada alumno piense individualmente. Posteriormente, el alumno que tenga la respuesta levantará la mano y contestará. Después el resto de alumnos mostrará su acuerdo o desacuerdo con la respuesta presentada hasta convencer a los demás. Para ello se utilizarán los ejemplos propuestos por los alumnos. En caso de no ser suficiente, se buscarán otros ejemplos, por ejemplo en el primer caso se puede estudiar la semejanza entre un cuadrado y un rectángulo o un cuadrado y el rectángulo formado al unir dos cuadrados.

Tarea 2

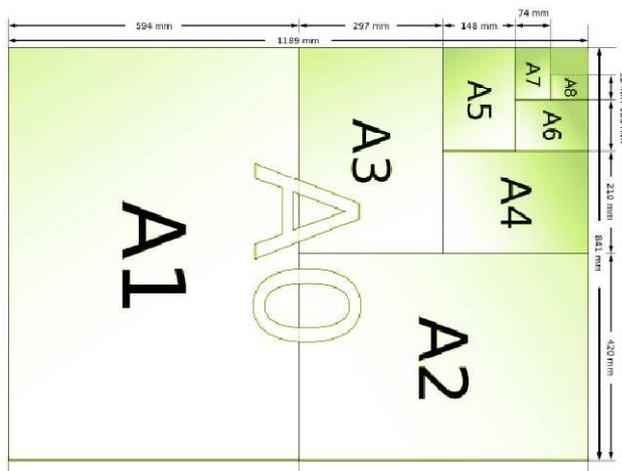
Para la realización de la siguiente tarea será necesario que los alumnos se agrupen en parejas. Se reparte una hoja de papel DIN A3, A4 y A5 a cada pareja. A continuación, se pide que busquen todas las regularidades posibles.

Una de las primeras cosas a observar sería que el formato A5 es la mitad del formato A4 y este a su vez es la mitad del A3. Como hemos estado trabajando con ángulos y lados, se espera que anoten los ángulos y las medidas de sus lados (si observamos que esto no se produce y se desvían de este tema, se

darán indicaciones para volver al tema que nos interesa). A partir del estudio de los lados y los ángulos, se espera que estudien si los formatos son semejantes.

Una vez realizada la tarea, se explicará que la norma DIN 476 es la que regula el tamaño del papel de oficina y que:

- Todos los formatos son semejantes.
- Cada formato se obtiene del anterior, doblándolo en dos partes iguales por el lado mayor.



A continuación, se realizarán las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la razón entre el lado mayor y el lado menor en todos los formatos?
- ¿Cuál es la razón de semejanza que permite pasar del formato A4 al A3?
- ¿Cuál es la razón de semejanza que permite pasar del formato A3 al A5? En el caso anterior hemos obtenido una ampliación, mientras que ahora se obtiene una reducción. ¿Qué relación guarda esto con la razón de semejanza?
- Calcular el perímetro del A3, A4 y A5. ¿Existe alguna relación entre ellos?
- Sabiendo que el formato A4 se obtiene doblando un A3, ¿cuál es el área del A4 en relación con el A3?
- Organizar todos los datos anteriores en una tabla.

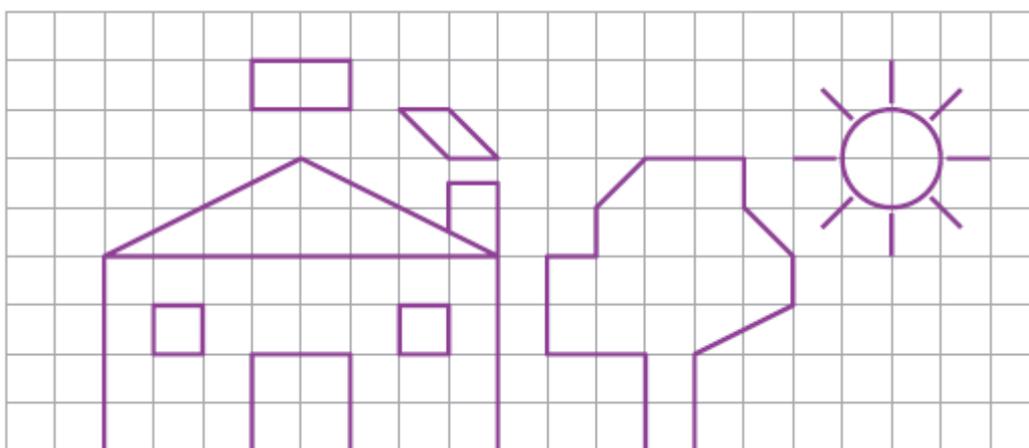
La duración de esta actividad será de 30 minutos.

Tareas para casa

Para finalizar la clase, se propondrán para casa una tarea de investigación y otra de aplicación:

- Estudiar las medidas de las tarjetas de crédito, DNI, bancarias, de la biblioteca, que haya en casa. Estudiar si son semejantes y calcular la razón entre el lado mayor y el lado menor.
- Dada la siguiente figura:
 - Realizar una copia que tenga el doble de tamaño.
 - Realizar una copia que tenga la mitad de tamaño.

Describir el procedimiento seguido para ello.



3ª Sesión

Para comenzar se preguntará a los alumnos por las dos actividades propuestas el día anterior. Con ellas se repasarán figuras semejantes y en particular las figuras congruentes. Su duración será de 15 minutos.

En la primera tarea, a partir del cociente calculado, se explicará que ese cociente es conocido como el número áureo o de oro y se visualizará el video de la serie Más por Menos: razón áurea disponible en <http://www.youtube.com/watch?v=q2KjZOIOwyQ>.

En la segunda tarea, se preguntará por el procedimiento seguido para dibujar la figura con doble y mitad de tamaño y por las dificultades encontradas. Se comprobará si los dibujos obtenidos son semejantes al original.

En esta sesión se pretenden construir polígonos semejantes con la ayuda de Geogebra.

Objetivos de la sesión, que los alumnos:

- Calculen la razón de semejanza entre dos segmentos.
- Identifiquen y describan elementos invariantes entre dos figuras semejantes.
- Dibujen un polígono o figura semejante a otro, dada la razón de semejanza.

Tarea 1

Hasta ahora, la identificación y construcción de figuras semejantes se ha hecho con la ayuda de una cuadrícula. A continuación, se mostrarán distintos procedimientos por los que obtener figuras semejantes con la ayuda del programa Geogebra. Este programa facilitará la construcción y la comprobación de la semejanza. Antes de comenzar se darán unas nociones básicas del manejo del programa, pero se parte de que los alumnos manejan el programa.

- Dibujar un polígono (el que quieran).
- Dibujar un punto fuera del polígono.
- Trazar semirrectas con origen en el punto dibujado que pasen por cada uno de los vértices del polígono.
- Con la ayuda de la opción “Homotecia desde un punto por un factor de escala”, pinchamos esta opción, a continuación el vértice que queremos trasladar, el punto dibujado fuera y después aparecerá una ventana en la que se puede introducir la razón de semejanza que se quiera (sólo hay que tener en cuenta que para que la figura sea semejante, al repetir este proceso con los demás vértices, es necesario mantener la razón de semejanza).
- Con la opción que muestra el programa, distancia o longitud y medida de ángulos, medir los segmentos y ángulos de ambos polígonos y comprobar que son semejantes.
- Mover los vértices del polígono inicial y comprobar si las figuras que se obtienen son figuras semejantes.

Al mover los vértices del polígono inicial, se pretende diferenciar entre lo que se entiende por figura y construcción en Geogebra. Si los alumnos han realizado una figura, al mover los vértices del polígono, no obtendrán figuras semejantes; mientras que si han realizado una construcción, sí serán semejantes.

Si los alumnos han sido capaces de seguir estos pasos sin mucha dificultad, se introducirá la opción de deslizador, que permite obtener distintas figuras semejantes sin necesidad de realizar los pasos anteriores para cada una de las razones.

Variando la posición del punto que dibujamos fuera del polígono y repitiendo este mismo proceso, se obtienen figuras semejantes. Además de dibujar el punto fuera del polígono, lo podemos dibujar en el interior del polígono o en alguno de sus vértices.

A continuación, se deja tiempo para que los alumnos construyan un polígono semejante a uno dado dibujando el punto en el interior del polígono o en alguno de sus vértices y que lo comprueben.

La duración de esta actividad será de 40 minutos. Se irán dando los pasos a seguir y los alumnos la realizarán individualmente. Se irán observando las posibles dudas de los alumnos, si estas dudas son particulares, se irán resolviendo, mientras que si observa una duda general, se parará y se explicará mejor para toda la clase.

Tarea 2

Para finalizar la clase:

- Construir un pentágono regular.
- Trazar algunas de sus diagonales.
- Calcular el cociente entre la longitud de la diagonal y el lado del pentágono. ¿Te suena este valor de algo?
- Mover los vértices del pentágono y volver a calcular el cociente entre la diagonal y su lado. ¿Es la misma? ¿Qué relación guarda con el pentágono anterior?

La tarea se realizará individualmente. Con ella se pretende recordar el número de oro visto en la sesión anterior y llegar a que todos los polígonos regulares son semejantes.

4ª Sesión

En esta sesión se seguirá trabajando con la ayuda del programa Geogebra, con ella se pretende introducir los criterios de semejanza para triángulos.

Objetivos de la sesión, que los alumnos:

- Construyan segmentos proporcionales dada la razón de semejanza.
- Calculen la razón de semejanza entre dos figuras.
- Dibujen un polígono semejante dada la razón de semejanza.
- Identifiquen y describan elementos invariantes entre dos figuras semejantes.
- Identifiquen triángulos semejantes utilizando los criterios.

Tarea 1

- Dibujar con Geogebra, con la ayuda de la opción construir ángulo, un triángulo en el que un ángulo mida 90 grados y otro de 20 grados.
- Anotar las medidas de los lados y ángulos de este triángulo.
- A continuación mover un vértice del triángulo. ¿Es semejante al anterior?
- Construir otro triángulo con dos ángulos fijos cualesquiera. ¿Al mover los vértices ambas figuras son semejantes? ¿Por qué crees que pasa esto?

La duración de esta tarea será de 15 minutos. Se realizará en parejas. Al poner en común los resultados con la clase, se explicará que existe una serie de criterios que nos permiten identificar si dos triángulos son semejantes sin la necesidad de medir y comparar todos sus lados y ángulos. A partir de esta tarea se dará el primer criterio de semejanza de triángulos. (Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales, el tercero no es necesario comprobarlo porque la suma de los ángulos de un triángulo es 180 y si tenemos dos ángulos, podemos conocer el tercero).

Tarea 2

- Dibujar tres segmentos cualesquiera.
- Construir tres segmentos proporcionales a los anteriores.
- Formar un triángulo con los tres primeros segmentos y otro con los tres proporcionales a los primeros.
- ¿Son semejantes el primer y el segundo triángulo? ¿Por qué?

La duración de esta tarea será de 15 minutos. También se realizará en parejas. Después de la puesta en común de los resultados, se dará el segundo criterio de semejanza (Para que dos triángulos sean semejantes, basta que sus lados sean proporcionales).

Tarea 3

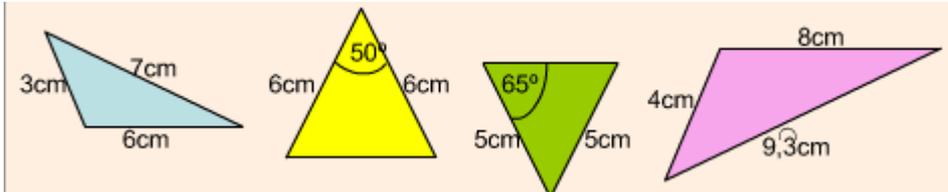
- Construir un ángulo fijo y como lados de este ángulo dos segmentos, uno de 4cm y otro 3cm. Después cerrar el triángulo con un segmento.
- A continuación construir otro ángulo igual al anterior, pero con los lados del ángulo proporcionales a los anteriores. Después, cerrar el triángulo.
- ¿Son los dos triángulos semejantes?

La duración de esta tarea es de 15 minutos. Se realizará por parejas, y al igual que en las actividades anteriores, después de la puesta en común de las respuestas, se dará el tercer criterio de semejanza (Dos triángulos son semejantes si tienen dos segmentos proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual).

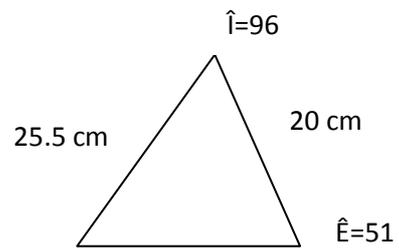
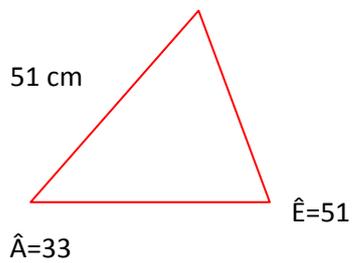
Tarea 4

Para asegurarse de que han comprendido los criterios de semejanza de triángulos y afianzarlos, entregaré una ficha como la siguiente a cada alumno.

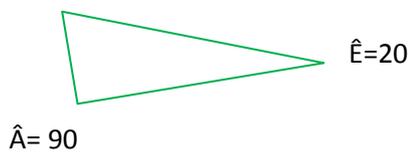
1) Dados los siguientes triángulos, identifica y justifica aquellos que sean semejantes.



2) ¿Son semejantes los siguientes triángulos?



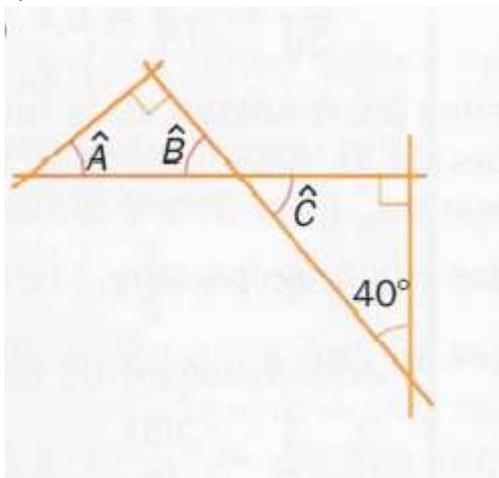
3) ¿Son semejantes los siguientes triángulos?



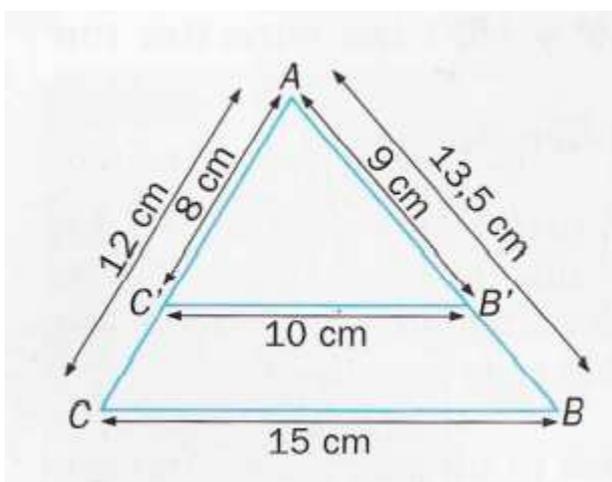
Como tareas para casa se propondrán las siguientes:

Estudiar razonadamente si los siguientes triángulos son semejantes.

1)



2)



5ª Sesión

Se dedicarán los primeros 5 minutos de la clase a la corrección de las actividades propuestas el día anterior.

Con esta sesión se pretenden obtener propiedades de la semejanza, la relación entre el perímetro y la superficie de figuras semejantes de forma intuitiva, ayudados por la cuadrícula en la que se encuentran dibujados los polígonos. Para el perímetro, se tomará como unidad el lado del cuadrado, y para el área se contará el número de cuadrados que encierra el polígono.

Objetivos de la sesión, que los alumnos:

- Identifiquen y describan elementos invariantes entre dos figuras semejantes.
- Calculen la razón de semejanza entre dos figuras.
- Establezcan la relación entre las razones de perímetro y superficie de figuras semejantes.

Tarea 1

Por parejas se entregará la siguiente ficha a los alumnos:

Dadas las siguientes figuras:

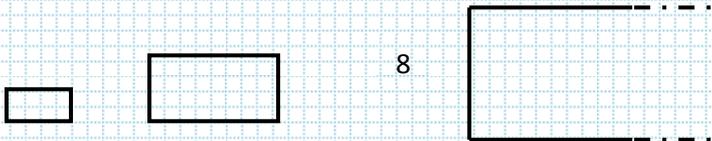


Fig 1 Fig 2 Fig 3

a) ¿Son semejantes las figuras 1 y 2? ¿Por qué?

b) Cierra el tercer rectángulo para que sea semejante a los anteriores.

c) Calcula la razón de semejanza.

d) Si tenemos otra figura 4 en la que la base mide 2, ¿cuánto tendría que medir la altura para que fuese semejante a las anteriores?

e) Completa la siguiente tabla:

Figura	Perímetro	Área
1		
2		
3		
4		

f) ¿Hay alguna relación entre el perímetro de los rectángulos? ¿A qué crees que se debe?

g) ¿Existe alguna relación entre las áreas de los rectángulos?

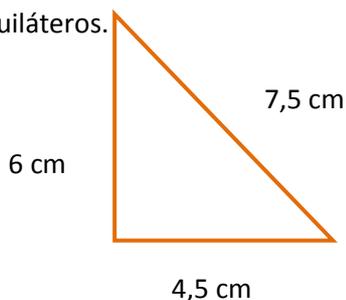
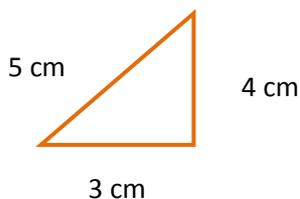
La duración de esta actividad será de 20 minutos. Con ella se pretende obtener la relación de perímetro y superficie de figuras semejantes. Una vez realizada la tarea, en la corrección se llegará a establecer esta relación.

Tarea 2

Con esta tarea se pretende repasar y afianzar la relación existente entre las razones de perímetro y superficie de figuras semejantes.

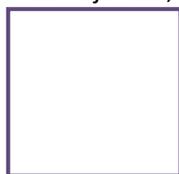
La tarea se realizará de forma individual.

1. Dados los siguientes triángulos equiláteros.

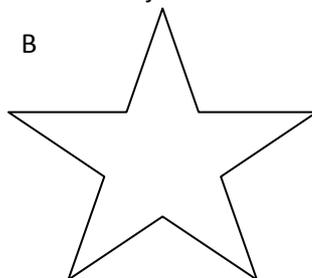


- ¿Son semejantes?
- Si son semejantes, ¿cuál es su razón de semejanza?; si no lo son, construye uno semejante al primero.
- Calcula el perímetro de la segunda figura, en el caso de que sean semejantes, ¿de cuántas formas se puede hacer?

2. Los siguientes cuadrados son semejantes, el segundo es el triple del primero.



- ¿Cuál es su razón de semejanza?
 - Si el área del primero es 4 cm^2 , ¿cuál es el área del cuadrado grande?
3. Las siguientes figuras son semejantes, su razón de semejanza es 2.



- Si el perímetro de la figura A es 6 cm, ¿cuál es el perímetro de la figura B?
- Si el área de la figura A es 3 cm^2 , ¿cuál es el área de la figura B?

La duración de esta actividad será de 35 minutos. Una vez que los alumnos hayan terminado los ejercicios se hará una puesta en común de las soluciones.

6ª Sesión: Repaso

En esta sesión se pretende hacer un repaso- síntesis de todo lo visto en las sesiones anteriores.

Tarea 1

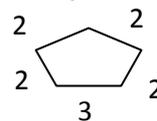
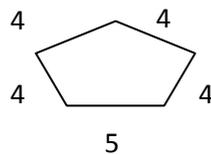
- a. Dada la siguiente fotografía, añadimos 2.5 cm a cada lado para construirle un marco. ¿Son semejantes el marco y la fotografía? ¿Por qué?



- b. Las siguientes imágenes están hechas con triángulos equiláteros, ¿son semejantes?



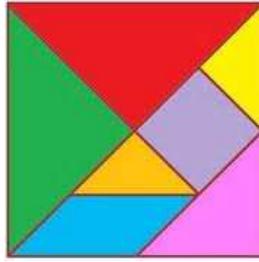
- c. ¿Son semejantes las siguientes figuras? ¿Por qué?



- d. ¿Un cuadrado de lado 5 cm es semejante a un rombo de lado 5cm?
- e. En un triángulo isósceles, el ángulo desigual mide 52° . ¿Es semejante a otro triángulo en el que los ángulos iguales miden 64° ?
- f. Las dimensiones de un rectángulo al que se le ha aplicado una semejanza de razón 2.5 tiene los lados de dimensiones 5 y 7 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo original?
- g. Construir un cuadrado semejante a uno de lado 2cm, cuya razón de semejanza sea $2/3$.

Tarea 2

Trabajo con Tangram



Se agrupa a los alumnos en grupos de 3 y se entrega un tangram a cada grupo.

La primera parte consistirá en el estudio y la familiarización con las piezas. El guión a seguir será el siguiente:

- Buscar piezas semejantes.
- Estudiar la relación de área de las piezas semejantes (comprobando cuantas veces cabe una en otra).
- Construir figuras semejantes con las piezas y obtener su relación de área.
- Aproximar la razón de semejanza a partir de la relación existente entre las áreas.

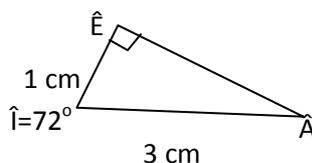
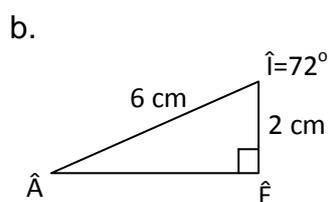
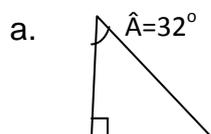
Atención a la diversidad

Según recoge la ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria, en el artículo 8 encontramos que en la etapa de secundaria se pondrá especial énfasis en la atención a la diversidad del alumnado, en la atención individualizada orientada a lograr el máximo desarrollo de cada alumno y alumna, y en la respuesta a las dificultades de aprendizaje ya identificadas o en aquellas que surjan a lo largo de la etapa.

Para atender a los alumnos con dificultades de aprendizaje y a aquellos que quieran profundizar un poco más, se propone un listado de tareas de refuerzo y otro de tareas de ampliación. Estas tareas se repartirán en función de las necesidades de cada alumno.

Tareas de refuerzo

1. Razona si son semejantes las siguientes figuras:

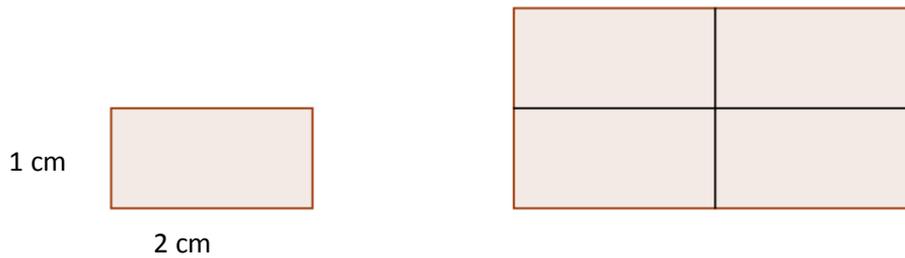


c. Dos triángulos, los lados del primero miden 3, 6 y 7 cm y los lados del segundo miden 9, 36 y 48 cm.

2. En un triángulo, sus lados miden 10, 12 y 14 cm.

- ¿Cuáles serían las medidas de otro triángulo semejante a él?
- ¿Cuál es su razón de semejanza?

3. Las siguientes figuras son semejantes:

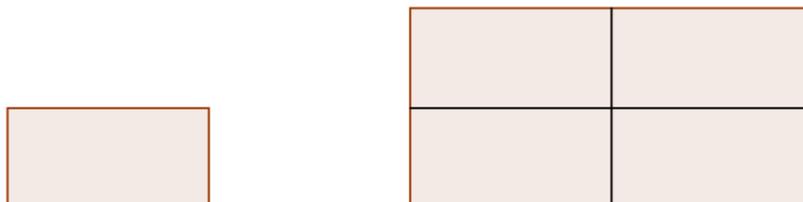


- ¿Cuál es su razón de semejanza?
- ¿Cuál es la relación entre sus perímetros?
- ¿Y entre sus áreas?

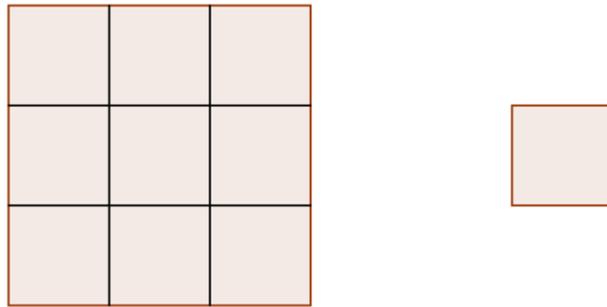
Tareas de ampliación

- Los lados de un triángulo miden 10, 12 y 14 cm. Si se construye un triángulo semejante a él cuya razón de semejanza es $\frac{7}{2}$, ¿cuál es el perímetro del segundo triángulo? ¿Se puede calcular de más de una forma?
- Construye un rectángulo semejante a uno cuyos lados miden 3 y 5 cm.
 - Calcula la medida de sus diagonales.
 - ¿Existe alguna relación entre las diagonales? En caso afirmativo, explícala.
 - Construye un rectángulo inicial al primero cuyo perímetro sea 6,4 dm.
- Las siguientes figuras son semejantes.

(1)

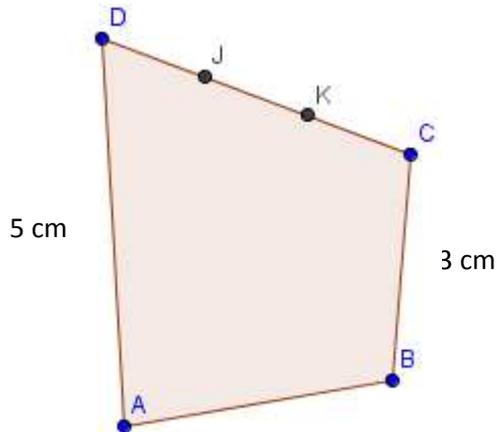


(2)



- ¿Cuál es su razón de semejanza?
- ¿Cuál es la relación entre sus perímetros?
- ¿Y entre sus áreas?

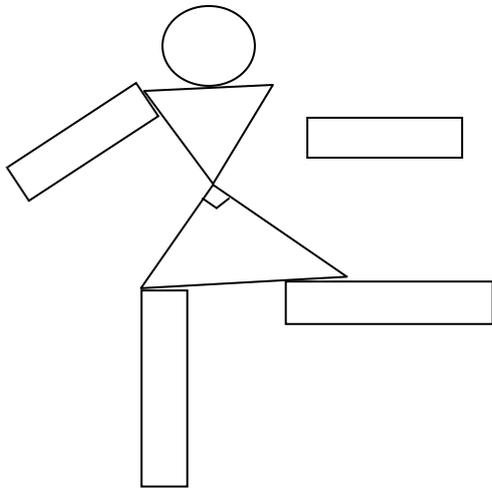
4. En el siguiente polígono, el lado DC ha sido dividido en tres partes iguales.



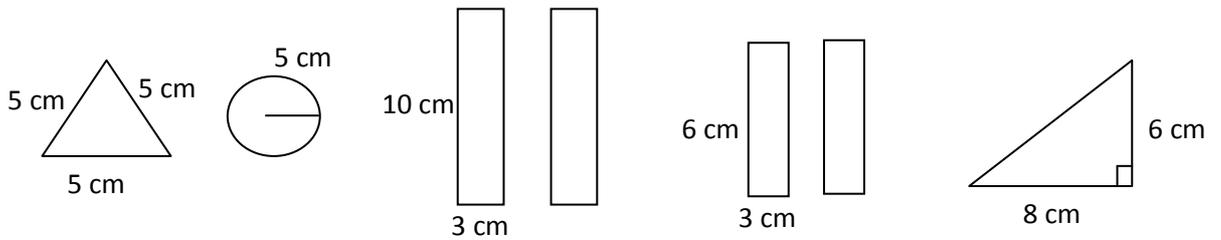
- Construye un polígono semejante a él en el que uno de sus lados sea el segmento DK.
- ¿Cuál es su razón de semejanza?

5. Un juego está formado por seis cubos que pueden ser introducidos unos dentro de otros. Todos los lados de los cubos son proporcionales entre sí. La razón entre el lado del cubo mayor y su siguiente es de 0.8. Calcula la longitud del lado del cubo más pequeño si el lado del cubo más grande mide 80 cm.

6. Una empresa ha diseñado un juguete para niños que permite armar figuras como la siguiente:



Para su construcción se utilizan las siguientes piezas:



La empresa decide agrandar las piezas de forma que lo que mida 5 cm pase a medir 8. Diseñar todas las piezas ajustándose a ese criterio.

Evaluación

La evaluación es una parte fundamental en el proceso de aprendizaje-enseñanza. A través de ella se extrae información, permite conocer qué han comprendido los alumnos y la eficacia de la enseñanza puesta en práctica. Por tanto la evaluación evalúa tanto a los alumnos como a los profesores. Además, según los resultados obtenidos, se toman decisiones sobre el proceso de enseñanza o posibles cambios.

Los instrumentos utilizados en la evaluación de esta unidad serán:

- Participación en clase. Anotaciones diarias sobre la actitud que muestra el alumno hacia la asignatura, su comportamiento en clase y con sus compañeros.
- Revisión del cuaderno de clase. Anotar si los alumnos realizan las tareas de clase y las de casa y si están completas o corregidas.
- Prueba escrita individual que se realizará al final de la unidad.

La ponderación de los instrumentos será la siguiente:

- Participación. (10 %)
- Cuaderno de clase. (10 %)
- Prueba escrita. (80 %)

En el [Anexo IV](#) de este documento se encuentra un modelo de prueba escrita para esta unidad.

Se ha elegido este modelo de examen con la intención de cubrir todos los contenidos y los objetivos fijados. Además, después de la realización del examen, se comprobará si los alumnos han superado los errores detectados anteriormente.

En el examen se proponen tareas de todos los niveles de complejidad. Aparecen ejercicios de reproducción, similares a los de las actividades ya realizadas con la intención de que sean superados por todos los alumnos. En cambio, los ejercicios en los que aparece la relación de perímetro y área de figuras semejantes y el que hay que justificar la veracidad o falsedad de unos enunciados, tiene un nivel de complejidad de reflexión.

CONCLUSIONES

La elaboración de una unidad didáctica es un proceso largo y laborioso. Para una correcta elaboración son necesarios una serie de análisis previos (análisis de contenido, cognitivo o de instrucción). Gracias a estos análisis se consigue un estudio del tema en profundidad.

El análisis de contenido da una visión histórica del tema y del proceso de evolución que han sufrido los conceptos con el paso del tiempo, muestra la relación que existe entre los distintos conceptos y sus representaciones, y dónde se utilizan y para qué. Con el análisis cognitivo se marcan las expectativas del profesor y los objetivos que se pretende que alcancen los alumnos.

Los análisis realizados permiten decidir el enfoque del tema, adecuándolo a los alumnos a los que va dirigida la unidad y seleccionando las tareas adecuadas.

Las prácticas me han permitido observar que hay algunos conceptos para los que es necesario un mayor tiempo de asimilación. Este es uno de los motivos por los que a la hora de la puesta en práctica de la unidad, quizás sea necesario, en lugar de las sesiones programadas, alguna más. Otro motivo, puede ser que alguna de las actividades previstas, presente mayor dificultad para los alumnos y se necesite más tiempo para su desarrollo. Otro de los aspectos observados es que a los alumnos, sobre todo del primer ciclo de ESO, les cuesta trabajo mantener la atención en clase. Por estos motivos, he intentado distribuir las tareas para que sea posible su realización, dentro de la sesión prevista, intercalando actividades con debates o explicaciones para mantener la atención de los alumnos.

Me hubiese gustado poner en práctica alguna de las sesiones de esta unidad, para comprobar si esta propuesta se puede llevar a la práctica, o si por el contrario son necesarias algunas modificaciones relacionadas con los aspectos anteriores.

Con su puesta en práctica se puede observar si verdaderamente el ritmo de trabajo permite a los alumnos mantener la atención y la motivación, de no ser así, una vez observado se puede modificar, pero esto solo es posible con la ayuda de la experiencia.

Para enfrentarse a la docencia es necesaria una preparación en todos los sentidos, preparación científica, pero sobre todo didáctica y psicológica. Creo que la formación que propone el máster es muy importante, ya que supone una primera toma de contacto con los alumnos. Esta formación es necesaria, porque se atraviesa por un periodo de incertidumbre, de indecisión y sensación de incapacidad ante las nuevas responsabilidades, que es necesario superar. Es un momento de transición entre los conocimientos, habilidades aprendidas en la parte teórica y su puesta en acción, y creo que esto solo es posible

enfrentándose a ello. Por otro lado, creo que la formación no acaba aquí, sino que todo docente necesita una formación permanente porque la sociedad va cambiando con el paso del tiempo, y los docentes necesitan adaptarse a las nuevas situaciones, evolucionar, y no quedarse estancados. También es importante que estén atentos a los estudios que se llevan a cabo, las innovaciones, que permitirán su actualización.

Definimos la formación del profesorado como la preparación para elaborar crítica, reflexiva, y eficazmente un estilo de enseñanza, que promueva un aprendizaje significativo en los alumnos a la vez que logre un pensamiento-acción innovador, trabajando en equipo para desarrollar un Proyecto Educativo común (Medina, 1989). La elaboración de esta unidad didáctica ha sido una oportunidad para llevar a cabo un balance sobre lo realizado en el Máster, por lo que encaja en esta concepción de la formación del profesorado.

BIBLIOGRAFÍA

- MEC (2007). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria.
- Grupo Beta (1990), *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza*. Editorial Síntesis. Madrid.
- Escudero P., I. (2006). Algunos organizadores para analizar la semejanza como objeto de enseñanza aprendizaje. *Épsilon*, número 64. pp 21-37.
- Escudero P., I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las ciencias*. Vol. 23, nº 3 pp 379-392.
- Gonzáles U., P.M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso e instrumento para enriquecer culturalmente la enseñanza. *Suma*, número 45, pp 17-28.
- Corbalán, F. (2010). *La proporción áurea*. Editorial RBA.
- Cólera, J., Gaztelu, I.(2007). *Matemáticas 2º ESO*. Ed. Anaya.
- Cólera, J., Gaztelu, I, Olivera, M.J.(2007). *Matemáticas 3º ESO*. Ed. Anaya. Madrid.
- Vizmanos, J.R., Anzola, M., Alcaide, F., Peralta, J. (2007). *Matemáticas 3º ESO*. Ed. SM. Madrid.
- Vinogradov, I.M.(1993). *Enciclopedia de las Matemáticas*. Tomo 9-2, p. 53. Moscú-Madrid: Mir.Rubiños.
- Martínez et al., (1984). *Matemáticas-1*(Escuelas Universitarias de profesorado de EGB). SM Ediciones. p. 364.
- Pérez O.,P. (2009) Proporciones notables. *Revista Digital: Innovación y experiencia educativa*, número 14. Descargable en http://www.csicsif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_14/PATRICIA_PEREZ_1.pdf

ANEXO I: Estructura conceptual

HECHOS

Los hechos quedan divididos en las siguientes partes:

Términos:

- Magnitud, medida, cantidad, longitud.
- Proporcionalidad numérica.
- Cociente.
- Vértice, ángulo, lado, segmento.
- Lados y ángulos homólogos.
- Polígono.
- Perímetro, área.

Notación:

- Sistema métrico decimal de numeración, unidades (u).
- a/b ó $a:b$.
- $a/b = c/d$ ó $a:b = c:d$
- $A, B, C, \dots \hat{A}, \dots a, b, c, \dots, AB \dots$
- $ABC, ABCD, \dots$
- $P, A.$
- $ABC \sim DEF$
- k

Convenios:

- Los lados se denotan por: $a, b, c \dots$
- Los vértices se denotan por: A, B, C, \dots
- Los ángulo se denotan por: $\hat{A}, \hat{E} \dots$
- Los segmentos se denotan por: $AB, AC \dots$
- Los polígonos se denotan $ABC, ABCD \dots$
- En una razón el numerador se llama antecedente y el denominador consecuente.
- En una proporción hay cuatro términos $a:b = c:d$, a y d se llaman extremos y los otros medios.
- El perímetro se denota por P y el área por $A.$
- a/b se lee como a es a $b.$
- El símbolo \sim denota la semejanza de figuras.

Resultados:

- Los ángulos de un polígono convexo de n lados suman $180(n-2)^\circ$.
- Si la razón de semejanza entre figuras, k , es mayor que 1, la figura se amplía. Si es menor que 1, se reduce.
- En las figuras semejantes los segmentos homólogos son proporcionales.
- En las figuras semejantes los ángulos homólogos son iguales.
- Las semejanzas llevan puntos alineados en puntos alineados.
- Las semejanzas llevan segmentos en segmentos.
- Las semejanzas conservan los ángulos.
- El ángulo con el que corta una recta a dos paralelas es el mismo.

DESTREZAS

- Medir longitudes, amplitudes y superficies.
- Operar con medidas de ángulos.
- Construir ángulos.
- Identificar lados proporcionales en polígonos.
- Construir segmentos proporcionales.

CONCEPTOS

- Razón y semejanza.
- Figuras y polígonos semejantes.
- Figuras y polígonos congruentes.
- Criterios de semejanza de triángulos.
- Homotecia.

RAZONAMIENTOS

- Deductivo:
 - Identificar polígonos semejantes.
 - Aplicar los criterios de semejanza.
- Inductivo: establecer la relación entre las razones de perímetro y área de polígonos en relación de semejanza.
- Figurativo: dibujar un polígono semejante a otro dada la razón.
- Cálculo de la razón de semejanza entre figuras.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL

- Las semejanzas constituyen un grupo equiforme.

ESTRATEGIAS

- Construcción de polígonos semejantes.

ANEXO II: Competencias PISA

A continuación se detallan las ocho competencias PISA junto con sus descriptores:

Pensar y razonar (PR)

- Son actividades fundamentales de la matemática.
- Están relacionadas con plantear y dar respuesta a cuestiones propias de la matemática, y conocer el tipo de respuestas que ofrecen las matemáticas.
- Tiene que ver también con:
 - Conocer, comprender y ejemplificar conceptos.
 - Identificar relaciones entre diferentes conceptos.
 - Desarrollar y aplicar procedimientos.

Argumentar y justificar (AJ)

- El modo en el que un sujeto justifica sus afirmaciones es una rica fuente de información acerca de su conocimiento y de cómo lo emplea.
- Esta competencia tiene que ver con que el escolar:
 - Elabore argumentos que justifiquen sus afirmaciones o respuestas.
 - Identifique y valore los argumentos de otros.
 - Distinga distintos tipos de razonamiento matemático.

Comunicar (C)

- La comunicación es un elemento central en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Aparece cuando el profesor expone o propone tareas, cuando los escolares comentan o discuten sobre esas tareas o cuando producen una respuesta al profesor.
- Esta competencia tiene que ver con que los escolares:
 - Expresen de manera oral o escrita acerca de las matemáticas.
 - Comprendan e interpreten los enunciados orales o escritos de otras personas.

Modelizar (M)

- Las tareas de modelización se centran en la relación entre nociones matemáticas y problemas en diferentes contextos.
- Es una actividad compleja por el gran número de conexiones y relaciones que requiere establecer.
- Esta competencia tiene que ver con que los escolares:
 - Estructuren y analicen la situación o problema inicial.

- Expresen esa situación en términos matemáticos para resolver ese problema matemático.
- Construyan o usen modelos matemáticos para resolver ese problema matemático.
- Interpretar los resultados obtenidos en términos de la situación o problema inicial.
- Analicen y critiquen ese modelo y sus resultados.

Plantear y resolver problemas (RP)

- Esta competencia tiene que ver con:
 - Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos.
 - Resolver distintos tipos de problemas mediante una diversidad de vías.

Representar (R)

- Esta competencia tiene que ver con que los escolares:
 - Decodifique, interpreten y distingan diferentes formas de representar conceptos y procedimientos matemáticos, así como las relaciones entre ellas.
 - Escojan y relacionen diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.

Utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico, y operaciones (LS)

- Esta competencia tiene que ver con que los escolares sean capaces de:
 - Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y su relación con el lenguaje natural.
 - Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.
 - Manejar enunciados y expresiones con símbolos y fórmulas.
 - Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

Emplear soportes y herramientas tecnológicas (HT)

- Tener conocimientos sobre diferentes soportes y herramientas.
- Ser capaz de utilizar herramientas de las tecnologías de la información que puedan ayudar en la actividad matemática.
- Conocer las limitaciones de las herramientas y de las tecnologías de la información.

ANEXO III: Análisis de las tareas

SESIÓN 1 TAREA 1	Dibujar en el cuaderno el contorno de la pizarra. Explicar por qué ese dibujo representa la pizarra.
Objetivos	Introducir el concepto de figuras semejantes
Recursos	Papel y lápiz
Agrupamientos	Individual
Interacción	Los alumnos realizan la actividad individualmente. Puesta en común
Contribución a limitaciones	5. Falta de visión a la hora de representar
Competencias y Complejidad	R: reproducción AJ: reproducción C:reproducción
Finalidad	Conocer los aprendizajes previos Motivación
Fase	Inicial
SESIÓN 1 TAREA 2	Ficha de trabajo
Objetivos	Introducción al concepto de figuras semejantes
Recursos	Lápiz y ficha de trabajo
Agrupamientos	En parejas
Interacción	Entre las parejas En gran grupo para su corrección
Contribución a limitaciones	1. Confundir figuras parecidas con figuras semejantes o congruentes
Competencias y Complejidad	C:reproducción AJ:reproducción
Finalidad	Motivación y aprendizajes previos
Fase	Inicial
SESIÓN 1 TAREA 3	Ficha de trabajo
Objetivos	1.Reconocer series de segmentos proporcionales 2.Calcular la razón de semejanza de dos segmentos 3.Identificar y describir elementos invariantes entre dos figuras semejantes
Recursos	Ficha de trabajo, transportador de ángulos.
Agrupamientos	En parejas
Interacción	Entre las parejas y en gran grupo
Contribución a limitaciones	1.Confundir figuras parecidas con figuras semejantes o congruentes.
Competencias y Complejidad	AJ: conexión C: reproducción
Finalidad	Exploración y cuestionamiento
Fase	Inicial

SESIÓN 2 TAREA 1	<p>Estudiar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas dando argumentando de forma justificada tu respuesta.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Todos los rectángulos son semejantes entre sí. • Todos los cuadrados son semejantes entre sí. • Dos rombos iguales son semejantes. • Un triángulo isósceles es semejante a un triángulo rectángulo.
Objetivos	4. Identificar y describir elementos invariantes entre dos figuras.
Recursos	Lápiz y papel
Agrupamientos	Gran grupo
Interacción	Entre el grupo con la ayuda del profesor
Contribución a limitaciones	6. Identificar erróneamente polígonos semejantes.
Competencias y Complejidad	AJ: reflexión C: conexión
Finalidad	Ejercitación
Fase	Desarrollo

SESIÓN 2 TAREA 2	<u>Tarea DIN</u>
Objetivos	<p>1. Reconocer series de segmentos proporcionales.</p> <p>4. Identificar y describir elementos invariantes entre dos figuras.</p> <p>5. Calcular la razón de semejanza entre dos figuras.</p> <p>8. Establecer la relación entre las razones de perímetro superficie de figuras semejantes.</p>
Recursos	DIN A3, A4, A5, lápiz y papel
Agrupamientos	En parejas
Interacción	Entre las parejas y en gran grupo
Contribución a limitaciones	6. Identifica erróneamente polígonos semejantes. 8. Generalizar la razón de semejanza en superficies.
Competencias y Complejidad	PR: reflexión AJ: reflexión C: conexión
Finalidad	Elaboración y construcción de significados
Fase	Desarrollo

SESIÓN 3 TAREA 1	<u>Instrucciones dadas para la construcción de figuras semejantes</u>
Objetivos	4. Identificar y describir elementos invariantes entre dos figuras semejantes 6. Dibujar un polígono semejante a otro.
Recursos	Geogebra
Agrupamientos	Individual
Interacción	El profesor con todo el grupo
Contribución a limitaciones	5. Falta de visión espacial a la hora de representar
Competencias y Complejidad	AJ: reproducción R: reproducción HT: conexión
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

SESIÓN 3 TAREA 2	<u>Número de oro</u>
Objetivos	1. Reconocer series de segmentos proporcionales 2. Calcular la razón de semejanza entre dos segmentos
Recursos	Geogebra
Agrupamientos	Individual
Interacción	El profesor con todo el grupo
Contribución a limitaciones	
Competencias y Complejidad	PR: reproducción
Finalidad	Exploración
Fase	Desarrollo

SESIÓN 4 TAREA 1	<u>Primer criterio de semejanza</u>
Objetivos	4. Identificar y describir elementos invariantes entre dos figuras semejantes 5. Calcular la razón de semejanza entre dos figuras
Recursos	Geogebra
Agrupamientos	En parejas
Interacción	Entre las parejas y en gran grupo
Contribución a limitaciones	
Competencias y Complejidad	PR: conexión HT: conexión C: reproducción
Finalidad	Exploración y cuestionamiento
Fase	Desarrollo

SESIÓN 4 TAREA 2	<u>Segundo criterio de semejanza</u>
Objetivos	3.Construir segmentos proporcionales 4.Identificar y describir elementos invariantes entre dos figuras
Recursos	Geogebra
Agrupamientos	En parejas
Interacción	Entre las parejas y en gran grupo
Contribución a limitaciones	
Competencias y Complejidad	PR: conexión C: reproducción HT: conexión
Finalidad	Exploración y cuestionamiento
Fase	Desarrollo

SESIÓN 4 TAREA 3	<u>Tercer criterio de semejanza</u>
Objetivos	3.Construir segmentos proporcionales 4.Identificar y describir elementos invariantes entre dos figuras
Recursos	Geogebra
Agrupamientos	En parejas
Interacción	Entre las parejas y en gran grupo
Contribución a limitaciones	
Competencias y Complejidad	PR: conexión C:reproducción HT: conexión
Finalidad	Exploración y cuestionamiento
Fase	Desarrollo

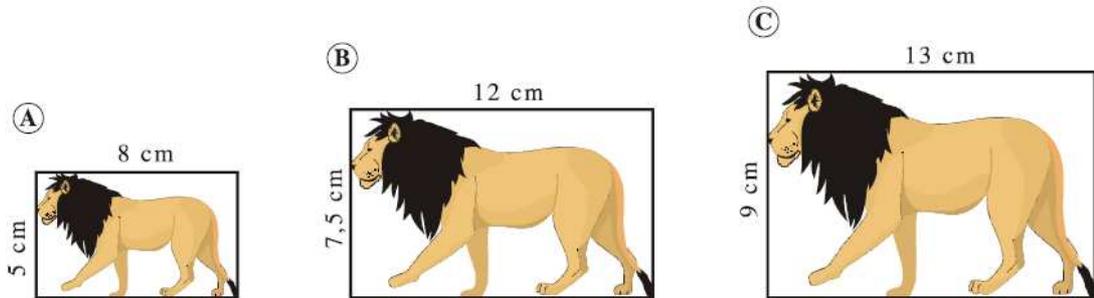
SESIÓN 4 TAREA 4	<u>Ficha criterios de semejanza</u>
Objetivos	7.Identificar triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza
Recursos	Ficha de trabajo
Agrupamientos	Individual
Interacción	Profesor con el gran grupo
Contribución a limitaciones	7.Mezclar los criterios de semejanza
Competencias y Complejidad	PR: conexión AJ: reproducción C: reproducción
Finalidad	Ejercitación
Fase	Desarrollo

SESIÓN 5 TAREA 1	<u>Ficha de trabajo</u>
Objetivos	4. Identificar y describir elementos invariantes entre dos figuras semejantes. 5. Calcular la razón de semejanza entre dos figuras. 8. Establecer la relación entre las razones de perímetro y superficie de figuras semejantes.
Recursos	Ficha de trabajo
Agrupamientos	En parejas
Interacción	Entre las parejas y en gran grupo con el profesor
Contribución a limitaciones	6. Identificar erróneamente polígonos semejantes. 8. Generalizar la razón de semejanza en superficies.
Competencias y Complejidad	PR: reflexión AJ: reproducción C: conexión
Finalidad	Elaboración y construcción de significados
Fase	Desarrollo

SESIÓN 5 TAREA 2	<u>Ficha de trabajo</u>
Objetivos	4. Identificar y describir elementos invariantes entre dos figuras semejantes. 5. Calcular la razón de semejanza entre dos figuras. 8. Establecer la relación entre las razones de perímetro y superficie de figuras semejantes.
Recursos	Ficha de trabajo
Agrupamientos	Individual
Interacción	En gran grupo
Contribución a limitaciones	3. Dificultades propias del lenguaje. 8. Generalizar la razón de semejanza en superficies.
Competencias y Complejidad	PR: conexión AJ: reproducción C: reproducción
Finalidad	Ejercitación
Fase	Desarrollo

ANEXO IV: Modelo de examen

1. Observa estas fotografías, di si son semejantes entre sí y por qué.



2. Un cuadrado tiene de lado 5 cm, construye otro cuadrado semejante a él, de forma que la razón de semejanza sea 0.6
3. Los lados de un triángulo mide 6, 8 y 12 cm. Se construye otro semejante cuyas dimensiones son 9, 12 y 18 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza?
4. En un triángulo rectángulo las medidas de los lados son 3, 4 y 5 cm. ¿Qué perímetro tendrá un triángulo semejante al anterior con razón de semejanza 3?
5. Dos cuadrados son semejantes, uno es el doble del otro, si el área del pequeño es 1cm^2 , ¿cuál es el área del cuadrado grande?
6. Responde verdadero (V) o falso (F) de manera justificada a los siguientes enunciados:
- Un triángulo con un ángulo de 30° y otro de 40° es semejante a otro triángulo con un ángulo de 30° y otro de 110° .
 - Dos polígonos regulares con el mismo número de lados son semejantes.
 - Un triángulo con ángulos de 80° y 90° es semejante a otro con ángulos de 100° y 70° .
 - Un cuadrilátero cuyos lados miden 3, 4, 5 y 6 cm es semejante a otro cuyos lados miden 6, 8, 10 y 12.