ANEXOS

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO I. Asíntotas: motivaciones que formalizaron el concepto

- **La exploración de lo desconocido: el infinito**

El ser humano cuenta con un sentido de trascendencia que le ha permitido desarrollarse a lo largo de la historia en múltiples direcciones y dimensiones. Este sentido de trascendencia lo define Matosas (2007, marzo, 3) como:

> "La capacidad del ser humano para dar un significado a sus vidas que vaya más allá de los límites de uno mismo y, en esa línea, colabora con su realización personal y su felicidad".

Sin introducirnos en ningún momento en algún análisis de tipo filosófico-antropológico, hemos de valorar que la noción de infinito se encuentra más allá de los límites de uno mismo, límites explorados por ese sentido de trascendencia.

Por su evidente desconexión con los sentidos, el universo ha sido un interrogante para el ser humano desde sus orígenes. Posiblemente, la imposibilidad de cuantificarlo de alguna manera, otorgándole una medida determinada o alguna comparación razonable fue desarrollando la concepción de la existencia de algo más grande que aquello que puede ser pensado.

En el análisis de qué estaba hecho el universo encontramos una de las primeras referencias al infinito con Anaximandro (s. VII a.C.) el cual llama "Ápeiron" (*τὸ ἄπειρον)* al principio de todas las cosas (a=sin; peirar=límite, frontera), sin límite, sin fin, infinito. En esta tesitura de tintes filosóficos, e incluso teológicos, de querer describir y comprender lo inmensamente grande o lo inmensamente pequeño, comenzaron a reflexionar los antiguos griegos acerca de la noción de infinito.

Desde ese momento y en siglos posteriores, iba a resultar un análisis cargado de controversia al tratar de dar formato a una noción, el principio y el fin de todas las cosas, relacionada hasta el momento con figuras de la divinidad. Knorr (1982) hizo referencia a esta casi dicotomía filosofía-matemáticas con las siguientes líneas:

> "La interacción de filosofía y matemáticas en raras ocasiones se revela con tanta claridad como en el estudio de infinito entre los antiguos griegos. Los enigmas dialécticos de los Eleácticos del siglo V a. C., refinados por Platón y Aristóteles

> en el siglo IV, y cumplimentados con la invención de métodos precisos de límites, como los aplicados por Eudoxo en el siglo IV y Euclides y Arquímedes en el siglo III" (p.122).

Aristóteles distinguió dos tipos de infinito: como proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final, que sería el infinito potencial; y el infinito como totalidad completa, que sería el infinito actual (Claros, 2010). Sobre el infinito actual siempre hubo discusión respecto a su verdadera existencia.

El primer pensador moderno en enfrentarse al infinito fue Galileo Galilei. A través de un círculo, se dio cuenta que se trataba de una figura con un infinito número de lados infinitesimalmente pequeños. Sin embargo, entendió que había destapado una paradoja al realizar un círculo concéntrico de mayor radio y proyectar líneas desde el centro a cada uno de los infinitos vértices. Resultaba que para el círculo interior se disponía de infinitas líneas, las cuales no eran suficientes para cubrir todos los puntos de la circunferencia exterior, determinando finalmente que el infinito era algo que no podíamos comprender. El ejemplo lo apreciamos en la siguiente imagen, en la que parada dos diámetros cualesquiera el arco que abarca entre ambos en la circunferencia roja es menor que en la circunferencia azul.

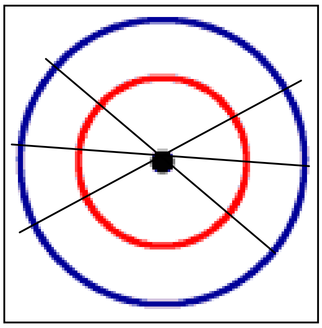


Fig.1 Paradoja de los círculos concéntricos de Galileo Galilei

Por su parte, Leibniz (s. XVII), como creador del cálculo infinitesimal optó por el infinito actual como característica principal de cuerpos y sustancias, haciendo entrar así al infinito definitivamente en la historia de las matemáticas. Si el infinito actual había tenido un carácter contradictorio, a partir de Bolzano (primera mitad S. XIX) se define como se concibe actualmente. Cantor, especialmente, y Dedekind consiguen comprender lo que Galileo no consiguió. Cantor (s. XIX) se cuestionaba si podía sumar "1+1", por qué no iba a poder sumar "∞+∞", siendo éste el punto de partida de su teoría. Hacia 1872 había captado y comprendido la naturaleza del infinito real, determinando que más allá del infinito había otro infinito más grande, y probablemente toda una jerarquía de distintos infinitos. El símbolo ∞ lo usó por primera vez John Wallis en 1655 en su obra "De sectionibus conicis" [Secciones de cónicas] con la idea de representar el hecho de que se podría atravesar la curva infinitas veces.

- **Viajando hacia el infinito: límites**

Entre los interrogantes que se planteaban los antiguos griegos estaba la reflexión de si se podría dividir de forma continua la materia en trozos más y más pequeños o si se alcanzaría una pieza tan diminuta que no pudiera dividirse más. Parece claro que este proceso acabaría en el "Ápeiron" que describió Anaximandro (s. VII a. C.). Sin embargo, en este apartado nos interesa el proceso realizado más que el resultado.

Este proceso de infinitas etapas cuyo resultado es el límite tal y como se conoce actualmente, se puede apreciar, aunque indirectamente, en la Grecia clásica de la mano de Arquímedes y Eudoxo de Cnido (s. V a.C.) con el método de exhauscióṅ, muy conectado al método de compresión y al de agotamiento. Son métodos iterativos en los que se crean sucesiones de áreas o volúmenes, según el caso, que se inscriben y/o se circunscriben en secciones cada vez más amplias de la figura principal haciendo que la diferencia entre ellas se cada vez más pequeña. Por ejemplo, Arquímedes halló a través de este método la superficie del círculo llegando a polígonos de noventa y seis lados.

Como se puede apreciar fácilmente, la idea de sucesión, así como la de su respectiva serie; están muy ligadas a la noción de infinito y a los límites. Considerando un número finito de términos, la sucesión, e incluso la serie que se formalizase, estructura un proceso finito que puede ser un buen punto de partida para un proceso infinito como el del cálculo de un límite actual.

Euler (s. XVIII) consideraba las cantidades infinitamente grandes como inversas de las infinitamente pequeñas, hecho que fue desechado cuando D'Alembert (s. XVIII) dio su definición de límite. A partir de ese momento lo infinitamente grande se expresará en términos de límites (Claros, 2010). En este doble estudio de expresar lo infinitamente grande o lo infinitamente pequeño; y, sobre todo, el proceso llevado a cabo para tratar de llegar a tales nociones fue formalizando la definición actual de límite.

Recogemos a continuación algunas definiciones de límite dadas por diversos autores:

> "Llamar a una cantidad el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella)" (D'Alembert, s. XVIII).

> "Si dado cualquier ε, existe n_0 tal que para $0 < n < n_0$ la diferencia $f(x_0+n) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de f(x) para $x=x_0$" (Weierstrass-Heine, s. XIX)

> "Sea f una función, a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, si cuando x se acerca al múmero a, sus imágenes se acercan a L más que cualquier otro número" (Blázquez y Ortega, 2002).

La concepción geométrica de la idea de límite barajada desde los antiguos griegos dio lugar hacia los siglos XVII-XVIII, a una más actual con el desarrollo del Análisis y el Cálculo iniciado principalmente por Newton y Leibniz, con la teoría de las fluxiones y con trabajos relacionados a la pendiente de la tangente a una curva, respectivamente.

Fue, sin duda, la irrupción de la Ilustración (s. XVII) el principal punto de inflexión para esta evolución. La necesidad de los ilustrados de situar a la razón como eje del pensamiento humano hizo que autores, como Leibniz, se preocuparan por el rigor y los aspectos formales de la matemática. Este cambio de mentalidad propició también el desarrollo de la Física como ciencia moderna a través de la Revolución Científica del siglo sentando las bases del desarrollo de una cultura científica con técnicas y métodos propios para comprender de manera más precisa el mundo que nos rodea.

Posiblemente, los primeros ejemplos, aunque de forma indirecta, de límites en el infinito los encontramos en el estudio del universo y en ejemplos más concretos, como el modelo geocéntrico de Ptolomeo (s. II), de los cuales podemos tomar las primeras referencias en la exploración del "infinito", entendiéndolo aquí como la frontera entre lo conocido y lo desconocido; o bien, lo que está más allá de lo que podemos percibir con los propios órganos de los sentidos.

ANEXO II. Estadísticas de los sujetos

Tabla 13- Leyenda de registros para estadísticas

<table>
<tr><th colspan="6">LEYENDA</th></tr>
<tr><td colspan="2">Grupo de Ciencias e Ingeniería</td><td>1CA</td><td colspan="2">Grupo de Ciencias de la Salud</td><td>1CB</td></tr>
<tr><td colspan="2">Grupo de Ciencias Sociales I</td><td>2SA</td><td colspan="2">Grupo de Ciencias Sociales II</td><td>2SB</td></tr>
<tr><th colspan="3">INTERÉS POR LA MATERIA</th><th colspan="3">NOTA HABITUAL</th></tr>
<tr><td>Muy grande</td><td>1</td><td rowspan="3">+</td><td rowspan="2">Sobresaliente</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="3">++</td></tr>
<tr><td>Grande</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Bastante</td><td>3</td><td>Notable</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Poco</td><td>4</td><td rowspan="3">-</td><td>Bien</td><td>3</td><td rowspan="2">+</td></tr>
<tr><td>Muy poco</td><td>5</td><td>Aprobado</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Nada</td><td>6</td><td>Suspenso</td><td>5</td><td>-</td></tr>
</table>

GRUPO DE CIENCIAS E INGENIERÍA (N=14) Profesor: Cesáreo Flórez

Tabla 14-Estadísticas grupo de Ciencias e Ingeniería

CÓDIGO	ALUMNO/A	EDAD	SEXO	INTERÉS	NOTA
1CA1	Rafael	17	♂	3	1
1CA2	-	18	♂	4	2
1CA3	Alonso	17	♂	2	2
1CA4	Smaug	17	♂	3	4
1CA5	-	17	♂	4	4
1CA6	-	17	♂	3	4
1CA7	Adrián	17	♂	3	2
1CA8	-	17	♂	3	4
1CA9	Javier	17	♂	3	4
1CA10	Álvaro	17	♂	3	2
1CA11	Santiago	17	♂	4	4
1CA12	Miguel	17	♂	2	2

1CA13	Álvaro	18	♂	1	2
1CA14	Luis	17	♂	3	1

GRUPO DE CIENCIAS DE LA SALUD (N=22). Profesora Anabel Biedma

Tabla 15-Estadísticas grupo de Ciencias de la Salud

CÓDIGO	ALUMNO/A	EDAD	SEXO	INTERÉS	NOTA
1CB1	Niurons	17	♀	3	4
1CB2	Laura	17	♀	4	3
1CB3	Diego	17	♂	2	2
1CB4	Sandra	17	♀	6	5
1CB5	Pelu	17	♀	3	5
1CB6	Alicia	17	♀	4	5
1CB7	-	17	♂	6	5
1CB8	Iván	17	♂	4	5
1CB9	Carmen	18	♀	3	5
1CB10	Alba	17	♀	4	5
1CB11	Marta	17	♀	3	3
1CB12	Claudia	17	♀	2	3
1CB13	Antonio	17	♂	3	5
1CB14	Julia	17	♀	4	5
1CB15	Isaac	19	♂	4	5
1CB16	Belinda	17	♀	3	3
1CB17	Carmen	17	♀	4	5
1CB18	Lidia	17	♀	3	1
1CB19	Belén	17	♀	5	5
1CB20	Federico	18	♂	2	2
1CB21	-	17	♀	4	-
1CB22	Alba	17	♀	4	5

PRIMER GRUPO DE CIENCIAS SOCIALES (N=12). Profesor: Eduardo Díaz.

Tabla 16-Estadísticas grupo de Ciencias Sociales A

CÓDIGO	ALUMNO/A	EDAD	SEXO	INTERÉS	NOTA
2SA1	El silfo	19	♂	4	4
2SA2	-	17	♀	3	2
2SA3	-	17	♀	3	2
2SA4	Marina	19	♀	-	-
2SA5	Toko	18	♂	4	2
2SA6	-	19	♂	3	4
2SA7	Abel	18	♂	4	4
2SA8	Alejandro	17	♂	2	2
2SA9	Ropetote	21	♂	5	4
2SA10	Alejandro	17	♂	4	4
2SA11	Paula	17	♀	2	2
2SA12	José Mari	17	♂	4	3

SEGUNDO GRUPO DE CIENCIAS SOCIALES (N=22). Profesora: Paqui Becerra.

Tabla 17-Estadísticas grupo Ciencias Sociales B

CÓDIGO	ALUMNO/A	EDAD	SEXO	INTERÉS	NOTA
2SB1	Rocío	18	♀	4	5
2SB2	David	-	♂	4	5
2SB3	Jenny	17	♀	3	1
2SB4	Laura	17	♀	3	2
2SB5	Elena	17	♀	5	5
2SB6	Estrella	17	♀	4	5
2SB7	Delia	17	♀	4	5
2SB8	Sara	18	♀	3	3
2SB9	Carolina	17	♀	3	2
2SB10	Sandra	17	♀	3	2

2SB11	Elena	17	♀	2	2
2SB12	Marina	17	♀	2	5
2SB13	Cristina	-	♀	3	5
2SB14	Francisco	18	♂	4	5
2SB15	Alejandro	18	♂	4	4
2SB16	Eden	18	♂	5	5
2SB17	Maximiliano	-	♂	4	4
2SB18	Andrea	18	♀	3	4
2SB19	Martina	18	♀	2	2
2SB20	José Antonio	17	♂	4	5
2SB21	Jaime	17	♂	5	5
2SB22	Pedro	18	♂	6	5

Tabla 18-Resumen estadísticas

TOTAL	**MODALIDAD BACHILLERATO**			**SEXO**		**INTERÉS POR LA MATERIA (%)**		**NOTA**	
70	Ciencias e Ingeniería	1CA	14	♂	14	+	78.57	++	57.1
								+	42.9
				♀	0	-	21.43	-	0
	Ciencias de la Salud	2CA	22	♂	6	+	45.5	++	14.3
								+	23.8
				♀	16	-	54.5	-	61.9
	Ciencias Sociales	2SA	12	♂	8	+	45.5	++	45.5
								+	54.5
				♀	4	-	54.5	-	0
		2SB	22	♂	12	+	45.5	++	27.27
								+	18.18
				♀	8	-	54.5	-	54.55

ANEXO III. Análisis documental

- **Legislación**

Procedemos a un breve análisis de los siguientes documentos legislativos en relación al bloque de Análisis y del concepto de asíntota horizontal:

- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

Real Decreto 1631/2006 de enseñanzas mínimas de Educación Secundaria Obligatoria

Dentro de la presentación del área, relacionado con límites, tendencias y asíntotas, destacamos:

> "En la sociedad actual las personas necesitan un mayor dominio de ideas y destrezas matemáticas […]. La toma de decisiones requiere comprender, modificar y producir mensajes de todo tipo, y en la información que se maneja cada vez aparecen con más frecuencia tablas, gráficos y fórmulas que demandan conocimientos para su correcta interpretación". (p.750).

> "El resto de contenidos se han distribuido en cinco bloques: Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas, y Estadística y probabilidad". (p. 750).

> "El estudio de las relaciones entre variables y su representación mediante tablas, gráficas y modelos matemáticos es de gran utilidad para describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos diversos de tipo económico, social o natural. Los contenidos de este bloque se mueven entre las distintas formas de representar una situación: verbal, numérica, geométrica o a través de una expresión literal y las distintas formas de traducir una expresión de uno a otro lenguaje. Asimismo, se pretende que los estudiantes sean capaces de distinguir las características de determinados tipos de funciones con objeto de modelizar situaciones reales". (p.751).

> "La materia de Matemáticas podrá configurarse en dos opciones, A y B, en el último curso. Las dos opciones remarcan contenidos parcialmente diferenciados según pongan más o menos énfasis en el carácter terminal o propedéutico, en el mayor o menos uso del simbolismo abstracto, en la mayor o menor exigencia de precisión o rigor matemático, etc. Las diferencias que aconsejan el establecimiento de las dos opciones se traducen no sólo en la selección de contenidos, sino también, y sobre todo, en la forma que habrán de ser tratados" (p.751).

En cuanto a los contenidos, centrándonos en cuarto curso, pues es el primero en el que se puede elegir itinerario enfocado a las ciencias o a las ciencias sociales, hemos de resaltar los siguientes:

Tabla 19-Contenidos matemáticas 4º de ESO

CONTENIDOS MATEMÁTICAS 4º DE ESO	
Opción A. Bloque 5. Funciones y gráficas (Ciencias Sociales)	*Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados
Opción B. Bloque 5. Funciones y gráficas (Ciencias)	*Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados *Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales. *Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales. Uso de las tecnologías de la información.

Real Decreto 1467/2007 de enseñanzas mínimas de Bachillerato

Matemáticas I y II

> "Los contenidos de Matemáticas, como materia de modalidad en el bachillerato de Ciencias y Tecnología, giran sobre dos ejes fundamentales: la geometría y el análisis" (p. 45448).
>
> "Con la introducción de la noción intuitiva de límite y geométrica de derivada, se establecen las bases del cálculo infinitesimal en Matemáticas I, que dotará de precisión el análisis del comportamiento de la función en las Matemáticas II. Asimismo, se pretende que los estudiantes apliquen estos conocimientos a la interpretación del fenómenos modelado" (p. 45448).

Tabla 20-Contenidos y criterios de evaluación Matemáticas I y II relacionados con el tema de trabajo

CONTENIDOS Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN. MATEMÁTICAS I y II		
1º de Bachillerato	CONTENIDOS. Bloque 3. Análisis	*Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas *Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad. *Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.
	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos. 5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente.

2º de Bachillerato	CONTENIDOS. Bloque 3. Análisis	*Concepto de límite de una función. Cálculo de límites.
	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	4. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas algebraicamente de forma explícita. 5. Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problema de optimización.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II

> "La fuerte abstracción simbólica, el rigor sintáctico y la exigencia probatoria que definen el saber matemático, deben tener en esta materia una relativa presencia" (p. 45474).

> "Las actividades que se planteen deben favorecer la posibilidad de aplicar las herramientas matemáticas al análisis de fenómenos de especial relevancia social, tales como la diversidad cultural, la salud, el consumo, la coeducación, la convivencia pacífica o el respeto al medio ambiente" (p. 45474).

> "Los contenidos del primer curso adquieren la doble función de fundamentar los principales conceptos del análisis funcional y ofrecer una base sólida a la economía y a la interpretación de fenómenos sociales en los que intervienen dos variables. En el segundo curso se establece de forma definitiva las aportaciones de la materia a este bachillerato, como la culminación en el calculo infinitesimal de las aportaciones del análisis funcional" (p.45474).

Tabla 21- Contenidos y criterios de evaluación de Matemática aplicadas a las Ciencias Sociales I y II relacionados con el tema de trabajo

CONTENIDOS Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN. MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES I y II		
1º de Bachillerato	CONTENIDOS. Bloque 2. Análisis	*Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o gráficas. Aspectos globales de una función. Utilización de las funciones como herramienta para la resolución de problemas y la interpretación de fenómenos sociales y económicos. *Tasa de variación. Tendencias
	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	4. Relacionar las gráficas de las familias de funciones con situaciones que se ajusten en ellas; reconocer en los fenómenos económicos y sociales las funciones más frecuentes e interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas. 5. Utilizar las tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica, propiciando la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos.
2º de Bachillerato	CONTENIDOS. Bloque 2. Análisis	*Aproximación al concepto del límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función. Concepto de continuidad. Interpretación de los diferentes tipos de discontinuidad y de las tendencias asintóticas en el tratamiento de la información.
	CRITERIOS DE EVALUACIÓN	3. Analizar e interpretar fenómenos habituales en las ciencias sociales susceptibles de ser descritos mediante una función, a partir del estudio cualitativo y cuantitativo de sus propiedades más características.

Valoración de los documentos

En primer lugar, la LOE y Orden de 5 de agosto no entraron dentro del análisis por ser, la primera, una ley general de educación, sin centrarse de manera específica en el área de matemáticas; y la segunda por desarrollar el Real Decreto 1467/2007, el cual si analizamos, sin tratar, por tanto, nada sustancialmente distinto.

Referente a los textos tratados, apreciamos que en la Educación Secundaria se prioriza introduce y trabaja estos contenidos en un plano descriptivo-interpretativo, frente a la siguiente etapa que le da un mayor valor operativo. De igual forma, se observa claramente cómo desde 4º de ESO, primer curso con distinción de modalidades, se hace más hincapié en el trabajo conceptual y el rigor para la opción destinada a la modalidad de Ciencias y al trabajo con fenómenos y modelos reales para la modalidad de Ciencias Sociales.

En Bachillerato empiezan a aparecer nuestros principales focos de contenidos, véase tendencias, límites o asíntotas, que van emergiendo dentro de las propiedades de la funciones y cobrando autonomía propia dentro de los contenidos. Como detalles interesantes apuntaríamos una aproximación al límite que aparece en 1º de Bachiller para Matemáticas I y en 2º de Bachiller para Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales o que el único momento en el que se hace alguna referencia a las asíntota en para 2º Bachiller de Ciencias Sociales, dentro de las tendencias y la interpretación de fenómenos reales en diversos campos del conocimiento.

Apreciamos importantes conexiones entre estas disposiciones legislativas y los significados puestos de manifiesto desde cada modalidad, aspecto que lo entendemos dentro de una secuencia formal lógica del establecimiento de las leyes educativas, que da lugar a la redacción de libros de textos y exámenes de selectividad, los cuales configuran de manera vertebradora las metodologías de los docentes de esta etapa.

En definitiva, este análisis apoya nuestras conclusiones: una mayor exploración del concepto en la modalidad de Ciencias desde la estructura conceptual, priorizando la fenomenología en las Ciencias Sociales. Además, la disposición de un mayor rango de sistemas de representación en Ciencias e Ingeniería y en Ciencias Sociales debido a otras materias relacionadas que se imparten, hace que alcancen mayor profundidad en el concepto.

- **Selectividad (2009-2013)**

Dado el papel que tiene el examen de selectividad en el curso de 2º de Bachiller, analizamos las orientaciones de este mismo año para el examen en relación al bloque de Análisis y a nuestros focos de contenidos.

Matemáticas II. Análisis:

*Saber aplicar los conceptos de límite de una función en un punto (tanto finito como infinito y de límites laterales para estudiar la continuidad de una función y la existencia de asíntotas verticales.

*Conocer las propiedades algebraicas del cálculo de límites, los tipos de indeterminación siguientes: infinito dividido por infinito, cero dividido por cero, cero por infinito, infinito menos infinito y técnicas para resolverlas.

*Saber representar de forma aproximada la gráfica de una función de la forma y= f(x) indicando: dominio, simetrías, periodicidad, cortes con los ejes, asíntotas, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, extremos locales, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

*Partiendo de la representación gráfica de una función o su erivada, ser capaz de obtener información de la propia función (límites, límites laterales, continuidad, asíntotas, derivabilidad, crecimiento y decrecimiento, etc.).

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. Análisis:

*Conocer el lenguaje básico asociado al concepto de función.

*A partir de la expresión analítica o gráfica de una función, que puede provenir de un contexto real, estudiar las propiedades globales y locales de la función identificando intervalos de monotonía, extremos relativos, curvatura, puntos de inflexión, asíntotas verticales y horizontales.

*Conocer las nociones de límite y continuidad e identificar, a partir de la expresión analítica o gráfica de una función, los puntos donde ésta es continua y los puntos donde no lo es, indicando en su caso el tipo de discontinuidad.

Tabla 22-Ejercicios de exámenes de selectividad relacionados con nuestro tema de trabajo

SELECTIVIDAD			
2009	Mat.	**J**	1. Sea f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $si\ x < 0$ $x^2 - 3x - 1$ $si\ \geq 0$ b) Determina sus asíntotas y sus extremos relativos(1.25 puntos)
		S	1. Se considera la función f: $[1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$ Determina la asíntota de la gráfica de f (2.5 puntos).
	Mat. CCSS	**J**	Sea la función fx)= $x^2 + x$ si x< 0 $\frac{x}{x+1}$ $si\ x \geq 0$ b) Determine la asíntota horizontal, si la tiene (0.5 puntos)
		S	
2011	Mat.	**J**	
		S	1. Sea f la función definida por $f(x) = \frac{3x^4+1}{x^3}$ para x$\neq$ 0 a) Estudia las asíntota de la gráfica de la función (1.25 puntos).
	Mat. CCSS	**J**	
		S	2. Halle el dominio, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la función: $f(x) = \frac{4x}{2x+1}$ (1.25 puntos) 2. Sea la función f(x)= $x^2 - 3x + 4$ $si\ x \leq 2$ $4 - \frac{a}{x}$ $si\ x > 2$ b) Para a=1, ¿existe alguna asíntota vertical de esa función? ¿Y horizontal? Razone las respuestas y calcule, en caso afirmativo, dichas asíntotas. (1 punto).
2012	Mat.	**J**	1. Sea la función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x \cdot (x - 2)$ a) Calcula las asíntotas de f (1 punto).

		S	1. Sea la función definida por $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ para x≠ 1 a) Estudia las asíntotas de la gráfica de f (1.25 puntos).
	Mat. CCSS	J	
	Mat. CCSS	S	2. En el mar hay una mancha producida por una erupción submarina. La superficie afectada, en km2, viene dada por la función $f(t) = \frac{11t+20}{t+2}$, siendo t el tiempo transcurrido desde que empezamos a observarla. c) ¿Tiene algún límite la extensión de la superficie de la mancha? (0.75 puntos)
2013	Mat.	J	
2013	Mat.	S	
2013	Mat. CCSS	J	
2013	Mat. CCSS	S	2. En una empresa de montajes el número de montajes diarios realizados por un trabajador depende de los días trabajados según la función $M(t) = \frac{11t+17}{2t+12}, t \geq 1$, donde t es el número de días trabajados. b) ¿Qué ocurriría con el número de montajes diarios si se trabajara indefinidamente? (0.75 puntos). c) El dueño de la empresa cree que el número de montajes diarios aumenta con los días de trabajo. Estudiando la función, justifique si es cierta dicha creencia. (0.75 puntos)

Valoración de los datos

Los exámenes de Selectividad revisados de estos cinco últimos años arrojan más evidencias sobre las mismas conclusiones a las que llegamos, observando diferencias importantes entre las demandas y el tipo de tareas para cada modalidad en cuanto a su fondo y a su forma.

Estas diferencias que señalamos siguen mostrando la modalidad de Ciencias más preocupada por la estructura conceptual, mientras que la modalidad de Sociales insiste especialmente en la fenomenología. Tal es así que la totalidad de ejercicios que aparecen de Ciencias se enfocan esencialmente a ese ámbito, teniendo para Ciencias Sociales que la mitad de los ejercicios que plantean se refieren a fenómenos reales.

Otro hecho que también refrenda nuestro estudio es la falta de registros de la modalidad de Ciencias Sociales frente a las otras, empleando exclusivamente ejemplos de funciones racionales a pesar de que se hubieran trabajado otros tipos de funciones con asíntotas horizontales, como las funciones exponenciales. Así, todos los ejercicios propuestos para esta modalidad utilizan funciones racionales simples, es decir, con polinomios tanto en el numerador y el denominador. En cambio, en la modalidad de Ciencias aparece mayor variedad de ejemplos con funciones exponenciales y funciones racionales en la que aparece alguna exponencial en su interior.

En referencia a las orientaciones del examen se aprecia con claridad como la modalidad de Ciencias está más enfocada a la aplicación de conceptos y al conocimiento de propiedades, teniendo la de Ciencias Sociales más interesada en el conocimiento de fenómenos relacionados y su interpretación. Hemos de decir que entendemos que las tareas que aparecen en las matemáticas de esta última modalidad hacen aflorar más sistemas de representación que en Ciencias, hecho que facilita de manera considerable un aprendizaje relevante del concepto.

En definitiva, el examen de Selectividad es producto, directo o indirecto, de la legislación educativa vigente y demás disposiciones burocráticas, por lo que resulta lógico que las conclusiones de ambos hayan sido muy parecidas. Sin embargo, valoramos la importancia de este análisis para visibilizar en la práctica lo dispuesto en la ley, siendo conscientes que es uno de los ejes fundamentales de la preparación de la materia en este curso.

ANEXO IV. Juicio de expertos

En el proceso de elaboración de nuestro instrumento, tuvimos la excelente oportunidad de someter nuestro trabajo a tres referencias dentro de la Didáctica del Análisis, el Dr. Francisco Javier Claros y la Dra. María Teresa Sánchez, por un lado; y el Dr. Tomás Ortega, por otro.

Mostramos a continuación un resumen de las entrevistas y su transcripción.

Francisco Javier Claros y María Teresa Sánchez

El encuentro con el Dr. Francisco Javier Claros y la Dra. María Teresa Sánchez se produjo en el seno del Seminario de Investigación de Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática, que tuvo lugar en la facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga los días 20 y 21 de febrero de 2014.

Ambos investigadores cuentan con trabajos muy potentes dentro de la Didáctica del Análisis con sendas tesis publicadas muy recientemente en 2010, Dr. Francisco Javier Claros con "Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza", y en 2012, Dra. María Teresa Sánchez Compaña con "Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza"; entre otros trabajos.

El encuentro fue muy enriquecedor tanto en el plano personal como profesional. Ciertamente, la realización de nueve versiones del cuestionario podría llevar al error de considerar innecesaria alguna modificación del instrumento; sin embargo, hemos de resaltar su importancia por dos motivos principales. En primer lugar, por lograr un mayor rigor en nuestro trabajo, sabiendo que nuestro instrumento ha de contar con mayor valor tras esta revisión de expertos; y, por otro lado, tratando de controlar hasta el mínimo detalle que, dada nuestra inexperiencia y su amplio bagaje, pueda conducirnos a la consecución de nuestros objetivos más ambiciosos.

La entrevista con nuestro primer juicio de expertos fue muy en esa línea. Tras un primer momento en el que les introduje en el tema y nuestras pretensiones, fueron revisando meticulosamente todas y cada una de las tareas propuestas y detalles que aparecían. Desde pequeños detalles, como concretar $+\infty/-\infty$ en lugar de únicamente ∞; hasta detalles más profundos, como la recomendación de no utilizar la función $f(x)=\ln x$ en una tarea en la que se solicitaba la valoración de si la función contaba o no con asíntota horizontal; realizaron muy diversas indicaciones. En esa misma tarea, una de las principales, fue la propuesta de una función que tuviera dos asíntotas horizontales, distintas, una por $+\infty$ y otra por $-\infty$; de la misma manera como posteriormente nos iba a indicar el Dr. Tomás Ortega en el siguiente juicio de expertos.

Ya en la siguiente tarea, en la que se les planteaba la gráfica de una función y otros sistemas de representación, se preguntaba cuál de los sistemas de representación, en ese momento, gráfico, tabular o función; les aportaba más información. Aquí realizaron el preciso apunte de añadir el sistema de representación verbal, a través del propio enunciado. Además nos advirtieron que "expresión simbólica" era más válida expresión, valga la redundancia, que "función", ya que ésta se presentaba realmente a través de los cuatro sistemas de representación. En esta misma tarea indicarían también la necesidad de compensar más el espacio brindado a cada uno de los sistemas de representación, puesto que se había destinado demasiado a la representación gráfica en comparación con la simbólica.

Finalmente señalaron que, bajo su punto de vista, el cuestionario era muy largo y que lo dividirían en dos partes: una parte con las tres primeras preguntas, a modo de cuestionario; y otra con las restantes, a modo de entrevista semiestructurada con las respuestas más interesantes de la primera parte. Se valoró especialmente esta propuesta pero, tras sendas reuniones con los directores del trabajo y el segundo juicio de expertos con el Dr. Tomás Ortega, finalmente, se desistió; aunque podría haber sido interesante haber tomado una pequeña muestra bajo estas directrices.

Tomás Ortega

El encuentro con el Dr. Tomás Ortega se produjo el día 25 de febrero de 2014 en el Seminario María Jesús Cañizares, lugar habitual de las sesiones del Master, aprovechando su visita para impartir unas sesiones de la asignatura "Didáctica del Análisis".

Hablar del Dr. Tomás Ortega es hablar de una figura de prestigio en el campo de la Didáctica del Análisis al contar con una larga trayectoria en este campo de investigación a través de la dirección de muy diversas tesis doctorales y la realización de numerosos trabajos de investigación, entre muchos otros reconocimientos.

En primer lugar, realizó la misma recomendación que en el primer juicio de expertos respecto a la función logarítmica y la confusión que podría provocar en los sujetos, dado su muy suave crecimiento. En esa misma pregunta, señala el acierto de incluir funciones que corten a la asíntota, en la línea del trabajo de Kidron (2011); destacando también la importancia de incluir algún ejemplo en el que las asíntotas horizontales fueran distintas por $+\infty$ y $-\infty$, hecho que también mencionaron en la primera entrevista.

Dentro de la siguiente pregunta, en la que se propone un modelo real donde aparece la asíntota horizontal, aconsejó que mencionáramos únicamente los sistemas de representación gráfico y simbólico, los cuales consideraba con un potencial mayor de información, con el objetivo de no amenazar la atención del sujeto. Respecto a la representación tabular que aparece en esa misma tarea, apreció cambios excesivamente profundos entre algunos valores apartados de la variable independiente, advirtiendo que podría poner en peligro la calidad de la información de la representación tabular en consonancia a la asíntota horizontal. Finalmente, en el último apartado de esa pregunta, sugirió no utilizar el verbo “reducir” si nos estábamos refiriéndonos a cuándo iba a desaparecer la muestra por completo, siendo más valioso “anular”.

Por último, nos recomendó que incluyéramos algún apartado de cálculo de límites en relación a la asíntota horizontal, insistiendo en la idea que, aunque no se le dé una importancia suprema, el aporte que realiza la expresión simbólica es mayúscula, en el sentido de que, a través de toda la recta real, supera las prestaciones del sistema de representación gráfico y simbólico, restringidos únicamente a un intervalo.

En general, ambos encuentros fueron muy gratificantes, el trato fue excepcional y el aprendizaje como persona y profesional fue mayúsculo. Aunque realizaron muy precisas indicaciones, quedamos muy satisfechos por que no propusieron cambios sustanciales, siendo una buena muestra de que, hasta el momento, el trabajo realizado iba por buen camino. Apenas se desistieron recomendaciones, sólo las que se desviaban de alguna forma con los objetivos de la investigación; o bien, aquellas que no eran apoyadas de igual manera en la otra entrevista.

- **Transcripción de la entrevista**

Entrevista a Francisco Javier Claros y a María Teresa Sánchez

Tabla 23-Resumen entrevista D. Javier Claros y Dña. Teresa Sánchez

LEYENDA	Fecha	21 de febrero de 2014
María Teresa Sánchez Compaña Francisco Javier Claros Mellado Investigador: Emilio Andrés García Gálvez Aclaraciones	**Lugar**	Seminario de Investigación de Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Málaga.
	Hora	11:15:00
	Duración	25'26"

T: Estos alumnos cuando tú les pasas este cuestionario, ¿ya han visto la noción de asíntota y límites finitos en el infinito?

E: Si. El bloque de Análisis ya lo tienen visto.

J: ¿Qué nivel es?

E: 2º de Bachiller.

J: ¿De Ciencias Sociales o de...?

E:Ciencias. Estamos tanteando la posibilidad de hacerlo tanto en Ciencias como en Sociales. Un poco también por contrastar las concepciones que se tendría en cada modalidad, sobre todo también por que estamos muy interesados en analizar las concepciones dentro de los fenómenos en los que podría aparecer.

T: [Leen la pregunta uno y dos]. Aquí intentas indagar sobre cómo define él lo que es una asíntota y que dé un ejemplo. Además, esboza, con la gráfica.

E: Exacto. Primero una explicación y después un dibujo.

T: [Leen la tercera]. Claro, aquí sin hablarle de asíntota para ver si relaciona la asíntota con lo que sería el límite. A lo mejor no te puede decir, “yo a la vista de esta gráfica, ésta es la asíntota”, independientemente que vea la tendencia o el límite que pueda ver ahí.

E: Exacto.

J: [Refiriéndose a pregunta tres] ¿Este infinito es más infinito es más infinito?

E: Sí. Hay pequeñas erratas. Incluso aquí [pregunta 4] donde pone asíntota, queremos decir asíntota horizontal, pues estamos centrados en eso.

T: Sí, por que te pueden decir que hay una vertical aquí y no es tu interés.

E: Exacto.

J: [Mirando la representación gráfica de f(x) =ln(x)] Esta parece que...mmm...se tumba. Si, parece que hay asíntota en tres...

E: Es la del neperiano.

J: Habría que mirar más detalladamente esta gráfica, puede inducir a error. Pero, está bien.

[Mirando y=2] Ésta la incluyes una asíntota como degenerada, ¿no?

E: Claro, es un poco para que digan “mmm, aquí me choca algo”. No se acerca infinitamente, pero formalmente el límite en infinito de esta función es un valor real. A ver cómo valoran eso. Realmente nos basamos mucho en el trabajo que realiza Kidron. Él va preguntado lo que va entendiendo y le plantea ejemplos que le contradice aquello que propone.

J: Faltaría un caso. El caso en el que tiene dos asíntotas horizontales.

E: Que sean distintas.

J:Que sean distintas. Ese caso no lo tenemos. Igual ese lo podríais poner.

E: Claro. Es interesante.

J. Por que muchos dicen “como tiene asíntota vertical no tiene asíntota horizontal”. Llegan a la universidad con ese razonamiento. Y eso no es verdad. Depende de los casos. Si tiene dos asíntotas horizontales, sí es verdad; pero si tiene una horizontal por un lado, solamente...que lo miraseis eso.

E: Claro.

T: Aquí también te pueden decir eso que la idea que ellos tienen es que la asíntota no se toca, que se acerca infinitamente. Esas son las concepciones que pretendes que afloren.

E: Exactamente. Nuestras principales referencias son los trabajos de Kidron y José Antonio. La idea es que ellos mismos se enfrenten a esa idea muy instaurada en el bachiller de “se acerca infinitamente pero nunca la toca”.

J: [Leen la cuatro]. Aquí en el c) le estás preguntando si alcanza el límite. Aquí te vas a encontrar incluso profesores que te digan que sí y otros que no.

T: Yo aquí en el apartado b) [¿Qué lenguaje (verbal, gráfico, tabular o simbólico) te aporta más información?]. Hablas de la gráfica de la fórmula o de la tabla, pero también está el verbal. Realmente estás hablando de los cuatro sistemas de representación. Aquí te faltaría el verbal. Black (2000) cuando habla de los sistemas de representación en los que se trabajan los límites, ella hablaba de esos sistemas de representación. Luego Javier lo retoma en su tesis y, obviamente, yo lo pongo en la mía.

El menos habitual es el verbal. Es verdad que prácticamente no se utiliza, nosotros en el análisis de libros de texto que tenemos se evidencia que el sistema de representación verbal es el que menos se utiliza. De hecho, date cuenta, como a tí se te ha pasado el observar que aquí también está la información. ¿Por qué? Porque tu sospechas que no se van a agarrar a esto, pero es otra representación de la misma situación. Ahí debería estar también la verbal. Si ninguno te dice la verbal, ya te está diciendo algo más del sistema de representación. Te faltaría incluir eso.

De hecho, la fórmula no la pondría tan aquí (tan apartada), me ha costado trabajo encontrarla.

J: Está muy escondida. Tendría que estar más aquí.

T: Date cuenta como tú en la presentación de la pregunta 5 les pones la tabla más pequeña que la gráfica y les pones la representación simbólica muy camuflada. Tú inconscientemente en la manera de presentárselo le estás dando más importancia a la gráfica. ¿Sabes qué te quiero decir?

E: Si, totalmente.

T: Influye mucho en cómo tu representas el sistema. Yo creo que esa pregunta número 5 deberías tener un poco de cuidado, yo pondría la gráfica un poco más pequeña, le daría más espacio a la simbólica y no olvidaría en el enunciado la verbal.

J: [Refiriéndose al apartado c) ¿Se podría considerar en algún momento exacto en el que la muestra quede completamente anulada con total seguridad] Lo de 30 años, es el período final, es que se supone que es el período final que se desintegra cada ocho días. Entonces, en este caso hay un período final, esto si que llega a tocarse, ¿no?

T: [Refiriéndose al apartado b)] Incluso aquí no pongas función por que función son todos. Expresión analítica de función o simbólica. Por que esto es función, esto es función y esto es función [Refiriéndose a todos los sistemas de representación propuestas]. Expresión simbólica, por ejemplo.

Date cuenta también si tú me comparas visualmente esto y esto [Sistema de representación gráfico y sistema de representación simbólico], aparte de que esto me aporta poco [expresión analítica] y esto me aporta más [expresión gráfica], supongamos en la concepción del alumno, que es lo que pretendes ver, cuál es la concepción o cuál es el sistema de representación que más aflora o despierta esas conexiones para ver la concepción que tienen, date cuenta el tamaño que le has dado a la gráfica, el tamaño que le has dado a la tabla y el tamaño que le has dado a la fórmula. A mí me ha costado trabajo encontrar la fórmula. .

J: Eso sí habría que ponerlo. [Volviendo al apartado c) de la misma pregunta]. Lo que yo veo una cosilla aquí, en el número de años. El número de años se supone que al final no hay ninguna partícula subatómica es cero, ¿no? Entonces la asíntota horizontal llegaría a tocar, ¿eso te pondría algún problema?

E: No, sería como en la paradoja de Xenón. Si cada vez se va reduciendo a la mitad, a cero, cero, formalmente no llega.

J. Sigo dándole vueltas. ¿Qué esperas que te pongan aquí? ¿Que se alcanza?

E: Es un poco, salvando las distancias, lo que planteáis vosotros con los fenómenos de ida y vuelta. La idea sería analizar cuándo "oficialmente" hay asíntota horizontal.

J. Vale. Ahora sí te entiendo. Entonces, fenomenal.

Las tareas, de todas formas, siempre son difíciles de encontrar. Cuando las presentes en algún sitio, siempre te dirán objeciones. Son situaciones que modelizan la vida real, siempre es complicado, pero...tienes que poner algún ejemplo. Me parece razonable.

T: Yo le estoy dando vueltas al 4, a las gráficas que has puesto. Si podrías poner alguna o quitar otra. Por que esas están puestas por algo, ¿no? Eso tú lo tienes que tener controlado.

E: Si, si.

T: ¿Las has sacado de libro de texto o las has creado tú?

E: No, Kidron trabaja con una muy parecida a ésta [Gráfica 3].

T. Pero son tuyas me refiero. Si estas gráficas las has hecho tú.

E: No, no, son mías. Es con la idea de Kidron, una que corte una vez, otra que corte más de una vez, lo que podrían entender en Bachiller. Intentar que ellos mismos se contradigan.

T: No las tienes numeradas. Te lo digo por la grabadora por que a mí me pasó con mi entrevista. ¿Le ponemos nombre?

E: Claro, claro.

T: Te aconsejo que se los pongas. Por que si decides entrevistas de algún alumno en concreto cuando empieces a hablar con él..."ésta"...y luego cuando estés en la transcripción te preguntarás ésta cuál es.

Yo, ahora mismo, me estoy refiriendo a la que hemos numerado en este instante como número 3 [Gráfica eliminada en versión definitiva, contaba con Asíntota vertical]. Yo evitaría poner dos asíntotas verticales también. Si esa complicación se la puedes quitar y buscar una que pretenda lo mismo sin esa complicación...

J: A poco que se te escape cualquier cosa, lo ves a ver que te estropea el cuestionario.

T: ¿Has hecho piloto?

E: No, aún es la primera versión. Estamos tanteando pasarlo a los compañeros del Máster. Valoramos también la posibilidad de realizar algún tipo de entrevista, pero será según las respuestas que nos vayamos encontrando. A ver cómo se suceden los acontecimientos.

T: Mi impresión es que es un poco largo.

J: A mí me gusta Teresa. Esto te va a llevar como media hora o más.

T: A mí me gusta mucho la pregunta 5. Y habrá algunos que cuando lleguen aquí estén cansados.

J: Y ésta [pregunta 6], por ejemplo, es parecida a la pregunta 5. Tú quieres aquí que lo inventen.

E: El verbo seguramente se cambiará, sería mejor "asocia", "recuerda".

T: Es muy interesante. Pueden aflorar concepciones que aquí [pregunta 5] no afloran.

Yo veo más interesante que estén éstas a que estén éstas de aquí. Yo éstas 3 [las tres primeras] las quitaría.

E: ¿Sí?

J: Yo veo dos cuestionarios. Las tres primeras y las tres últimas.

T: Si tú lo quieres pasar todo, yo lo haría en dos partes.

J: Creo que eso es lo mejor. Déjalo como está.

T: Yo haría en un primer día: uno, dos y tres. Si tu ves que te redactan, que te escriben, qué ejemplo te ponen...A lo mejor no es necesario que le pases la segunda parte a todos, si la muestra primera era de veinte, pues la muestra segunda que sean diez de esos veinte, o decides hacer entrevista con esos diez. Una entrevista semiestructurada en la que para ver cómo afloran esas concepciones de la asíntota empleas esas tareas. Te sientas a su lado, le dices que le vas a dejar diez minutos, veinte, que reflexione y en media hora te sientas a su lado y que te cuenta. Yo creo que puede ser más rico. Yo lo veo muy largo.

J: Creo que quieres abarcar mucho. Está muy bien, por que está muy bien, pero lo veo como Teresa, yo incluiría incluso la 4 en la primera parte y después las situaciones. Que te van a dar muchas respuestas, pero después de la primera parte. Pensadlo.

T: Bueno, puedes pasarlo. Si tienes la oportunidad en el centro... Coge una muestra pequeña, no gastes la muestra entera. 4-5 alumnos. Si ves que llegan al final bien, pues adelante.

Yo jugaría con eso. Una parte hacerlo en modo cuestionario y otra en entrevista, sería mucho más rico.

J: Yo pensaría unas categorías de posibles respuestas.

T: Las que le salgan aquí [primera parte] son las que quieren ver aquí [segunda parte]. Además, tu a ese alumno con el que te sientes a hablar, antes le has pasado ésto [primera parte].

J. Yo supongo que tendrás unas primeras ideas.

E: Si.

T: Claro, por eso están estas gráficas y no otras.

J: A mí me parece muy bien, muy interesante. Quizás lo que te podemos decir es dividirlo en dos partes para que ellos estén a pleno rendimiento en las dos.

Se ve que está muy trabajado. Tienen muchos apartados medidos al límite. Sólo modifica algunas cosillas que te hemos dicho, pero está muy bien. Después nos mandas lo que te ha salido para que estemos al día.

E: Por supuesto.

T: Yo haría uno piloto, dos o tres personas. Para que vean un poco cómo van si se cansan.

E: Nos hemos centrado mucho en que no parezca un examen. La redacción de las preguntas es clave.

J: Pregunta la edad también, por si después también la utilizas como datos para diferenciar por que te puedes encontrar que alguno haya repetido. Haces muy bien con lo del sexo, pero la edad también.

Esto lo puedes hacer también en 1º de Bachillerato perfectamente, para ver si hay diferencias entre un curso y otro. Igual esto te lleva a hacer una tesis. Pues está muy bien.

Entrevista a Tomás Ortega

Tabla 24-Resumen entrevista D. Tomás Ortega

LEYENDA	Fecha	25 de febrero de 2014
Tomás Ortega del Rincón	Lugar	Seminario María Jesús Cañizares, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada
Investigador: Emilio Andrés García Gálvez	Hora	15:30:00
Aclaraciones	Duración	19'26"

T: La primera me parece bien porque ciertamente la cuestión es que aquí preguntas por la asíntota, que es una recta; sin embargo, puede ser que se vayan hacia lo que es la rama asintótica. De alguna manera pueden confundir asíntota, recta, con rama asintótica, función, pero me parece bien esto de que se explique con las propias palabras lo que se entiende por la asíntota.

[Lee la segunda tarea] Bien, me parece bien, porque está en consonancia con lo anterior, claro esta segunda cuestión puede arrojar luz sobre la primera, si lo que se ha dicho lo entiende o no lo entiende. Por que si lo dice bien aquí, pero luego no es capaz de buscar un ejemplo, prácticamente sabrían muy poco.

[Lee la tercera tarea] Está claro, L es un número real.

E: Exacto

T: Aquí abandonas la recta y te fijas en la función. Me parece bien.

[Lee la cuarta tarea] Vale, aquí interpreto que ésta se construye con la función logarítmica.

E: Sí, la primera es el neperiano de x.

T: No es la más apropiada. Se puede entender aquí tal y como está...como el crecimiento logarítmico es escaso respecto al crecimiento de la abcisa...hay que tener en cuenta que transforma el número de dígitos en valores. Si quieres en la decimal [logaritmo en base 10] que es más claro, logaritmo entre 0 y 1, que es un dígito, 0'...; entre 10 y 100, que son dos dígitos, 1'..; entre 100 y 1000, que son tres dígitos, dos y pico...Quiere decir que esto en seguida se torna como poco creciente. Yo habría puesto algo más de tipo parabólico para que sea más clara la gráfica.

E: Claro, la idea era colocar una que no tuviera asíntota. Respecto a esa, habíamos estado hablando que podría inducir a error. La cambiaremos.

T: [Mirando gráficas en la que la función corta a la asíntota]. Esto me parece bien. Muchas veces yo creo que es un error que los chicos no se dan cuenta o que interpretan que la asíntota no puede cortar a la función o la función a la asíntota. En este tipo de funciones ya se ve cómo la gráfica de la función pues atraviesa a la recta, que en este caso es la y=2. Me parece bien, quizás podríamos poner una asíntota por arriba y otro caso en el que la asíntota esté por debajo. Algunas veces, por ejemplo, puede ser que hacia +∞ esté por arriba y hacia -∞ esté por debajo.

E: Claro, que tenga asíntotas distintas.

T: Eso es. Hay puede ser que corte en un punto nada más o incluso que no corte, si se quiere definir para que no corte a la asíntota, pero sí que se vea por arriba y que se vea por abajo. Luego otro caso distinto es cuando realmente corta a la asíntota. Son como tres casos, no sé si lo habéis pensado o no, pero que ciertamente podría ser: la asíntota se mantiene superior, la asíntota se mantiene inferior; o bien, que la corte.

E: Sí, lo valoramos en los siguientes ejemplos.

T: Está bien. ¿Y esto? [Preguntando por y=2]

E: Es una función constante. La representación es muy mejorable.

T: Me parece bien. Incluso podría ser una función definida a intervalos. Como hay funciones para todos los gustos que se puedan construir. Bueno, está bien, pero se podrían poner más variaciones si queréis, pero en general, bien. Ésta si que la modificaría [Refiriéndose a la f(x) = ln (x)].

[Leyendo la pregunta 5] Aquí queda eso, una tabla numérica.

E: Sí, damos la representación gráfica, la tabular y la simbólica.

T: ¿Queréis trabajar representación tabular también? ¿Por qué?

E: Si. El objetivo de estas preguntas es que ellos mismos digan qué tipo de representación les aporta más información y que lo justifiquen.

T: Vale. Yo pondría sus dos representaciones, para que no vayan a otra cosa, o si quieres la representación gráfica y tabular. Aquí [Representación tabular]...esto es más intuitivo, aquí tienen que pensar que... [Analizando la tabla de valores] ...éste es un número pequeñísimo y que después no hay más valores, pero hay que entender que más o menos continuaría de esta manera, saliendo valores cada vez más pequeños.

[Continúa analizando la tabla de valores]. No lo veo claro...en ambos casos se ve la finitud. ¿Verdad? Pero hay una diferencia tan grande entre 100 y 1000 [valores de abcisa]...veo problemática, no digo que sea mala pregunta, pero lo veo problemática porque puede llegar hasta aquí y no decir nada. Empieza con unos saltos, digamos, uniformes; pero después al tener unos saltos tan grandes, se podría quedar como colgado.

E: Si, que crea confusión.

T: Exacto. Aquí a lo mejor se podría quitar el 10, incluso el 30, el 50...Parece que se ha hecho un comportamiento diferente de la variable independiente. Lo veo un poco más difícil de pronunciarse por estos saltos. Fíjate, entre 100 y 1000 se pasa de una diezmilésima a 10-36, es una diferencia muy importante, podría incluso parecer que se llegaría al cero, si llegamos al cero, no habría asíntota. ¿Lo entiendes?

E: Si, totalmente de acuerdo.

T: [Leyendo la pregunta 5c: ¿Qué sistema de representación te aporta más información...] Fórmula no tienes, ¿verdad?

E: Sí, está aquí. Está demasiado pequeña.

T: Bueno, bien. Sí, es una función logística. [Leyendo 5d: ¿Se podría considerar algún momento exacto en el que la muestra quede completamente anulada con total seguridad?]. Bueno, ¿reducida a qué?

E: Está mal expresado, sería “anulada”.

T: [Volviendo a leer el anterior apartado] No sé yo esto...porque ciertamente...vamos a ver, en realidad, esto es muy claro [Representación gráfica] entra por los ojos; esto es un poco más oscuro [Representación tabular] y esto [Representación simbólica] puede ser más oscuro, pero también puede ser más claro.

¿En qué estoy pensando? Pues en si estos chicos saben o no calcular límites.

E: De entrada, sí.

T: Si pueden calcular límites pueden aplicar lo de la pregunta anterior, que calculen el límite. Aquí tanto gráficamente como numéricamente sólo pueden representar un rango en cualquiera de los dos casos; sin embargo, simbólicamente, o algebraicamente, tú dices que $t \in R$ y entonces está representada la variación en toda la recta real. Realmente la información que da esto [Representación simbólica] es mayor porque puedes reproducir esto y esto [Refiriéndose a los otros dos sistemas de representación] sin ninguna dificultad en cualquier intervalo y, además, obtener el valor del límite.

Así dicho, parece que el límite no interesa o no quieras preguntar sobre él. A lo mejor falta una pregunta específica en relación al límite.

[Leyendo pregunta 6] Me parece bien, hay muchos ejemplos asintóticos, incluso en Educación Física, el rendimiento de un deportista en función de las horas de entrenamiento, los primeros días de entrenamiento el atleta progresa y progresa mucho. Después, conforme van pasando los días va progresando los días y hay un límite que no supera.

Me parece bien. Esto de alguna manera establece una conexión matemática con otras áreas científicas y está muy bien porque de esa manera no se ven las matemáticas como algo aislado que no tiene nada que ver con la ciencia, cuando realmente expresa las situaciones científicas. Me parece bien y que justifiquen la respuesta.

A lo mejor falta algo sobre crecimientos o decrecimientos si tienen que ser bruscos o suaves. En realidad, si es una asíntota como es cuando tiende a ∞, si va decreciendo o que pase por abajo o por arriba pues las variaciones tienen que ser cada vez más suaves.

¿Te das cuenta? ¿A lo mejor alguna pregunta en torno a cómo tiene que crecer o decrecer la función? ¿Lo escribo aquí?

E: Bueno, está grabado, pero como quiera.

T: Yo preguntaría también algo sobre el límite, pues el límite es el que te va a permitir definir la asíntota. Lo demás, me parece bien.

ANEXO V. Presentación del cuestionario

Presentamos en este apartado el instrumento desarrollado para nuestro estudio. Se realizaron nueve versiones y se sometió al juicio de tres expertos.

Existen dos versiones finales del cuestionario, una para la modalidad de Ciencias y otra para la modalidad de Ciencias Sociales

MÁSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

UNIVERSIDAD DE GRANADA

-CUESTIONARIO DE MATEMÁTICAS-

Emilio Andrés García Gálvez

Estimado alumno o alumna:

Solicitamos tu participación para un estudio que estamos desarrollando para la Universidad de Granada. Tu máxima colaboración da sentido a nuestro estudio, por lo que te rogamos que hagas el cuestionario de la mejor manera posible siendo muy consciente de los siguientes aspectos:

- **El cuestionario es totalmente anónimo y confidencial, así que responde con total libertad dentro de tu criterio.**
- **No es un examen; por lo tanto, en ningún momento tus respuestas van a recibir una calificación, no es nuestra tarea.**
- **Justifica al máximo todo lo que escribas, por favor, para que podamos comprender mejor qué pretendes expresar en cada momento.**

Muchas gracias

-DATOS-

Nombre:

Edad:

Sexo: ♂ ♀

Curso:

Modalidad: ☐ Bachillerato de Ciencias y Tecnología
☐ Bachillerato de Ciencias de la Salud

Interés por la materia: : ☐ Muy grande ☐ Grande ☐ Bastante
☐ Poco ☐ Muy poco ☐ Nada

Calificación que normalmente obtienes en la materia:

☐Sobresaliente (9-10) ☐ Notable (7-9)
☐Bien (6-7) ☐ Aprobado (5-6) ☐ Suspenso(0-5)

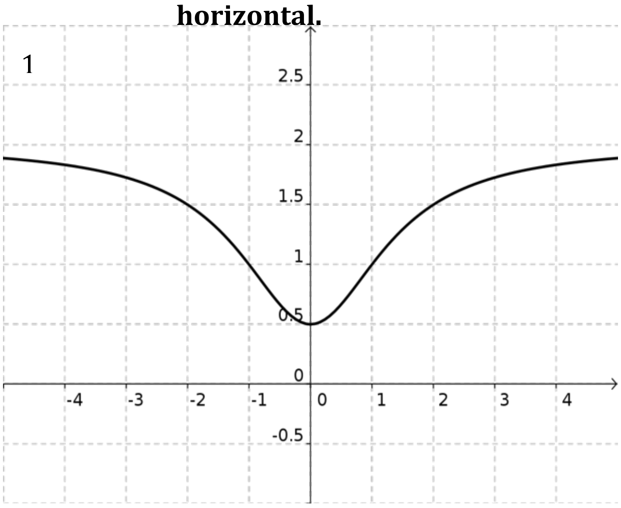
1. **Explica con tus palabras lo que entiendes por asíntota horizontal.**

2. **Dibuja aproximadamente una función que cuente con alguna asíntota horizontal, la cual se ajuste de la manera más precisa posible a lo que entiendes del concepto.**

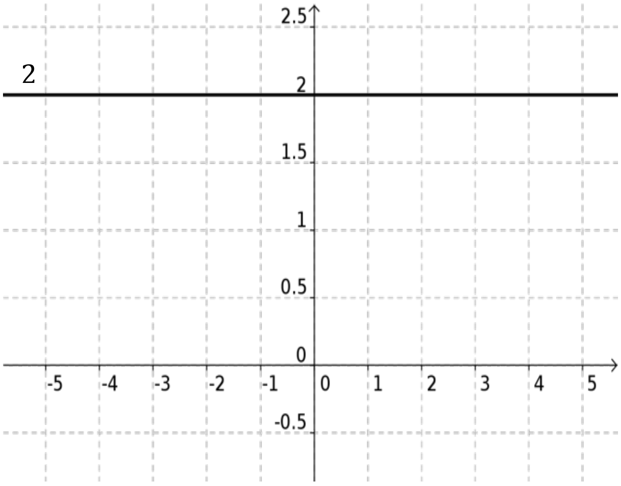
3. **Explica con tus palabras qué entiendes en la siguiente expresión:**
   - Una función f(x) tiende a L ($L \in \mathbb{R}$) cuando x tiende a infinito.

4. **Para cada gráfica, valora la posibilidad de que exista asíntota horizontal y, en el caso de que creas que exista, el posible comportamiento de la función respecto de su hipotética asíntota horizontal.**

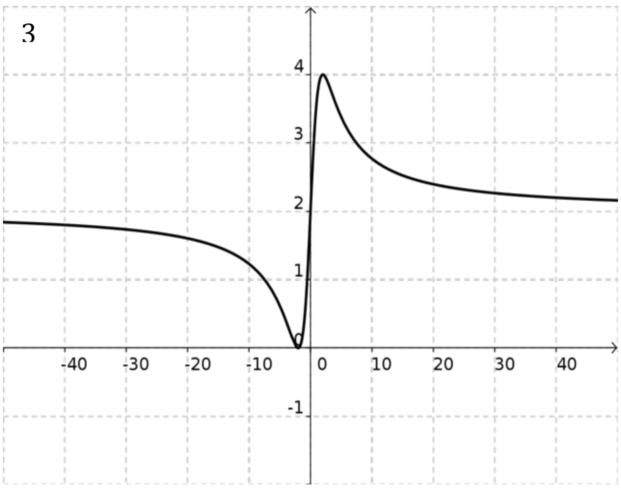
1



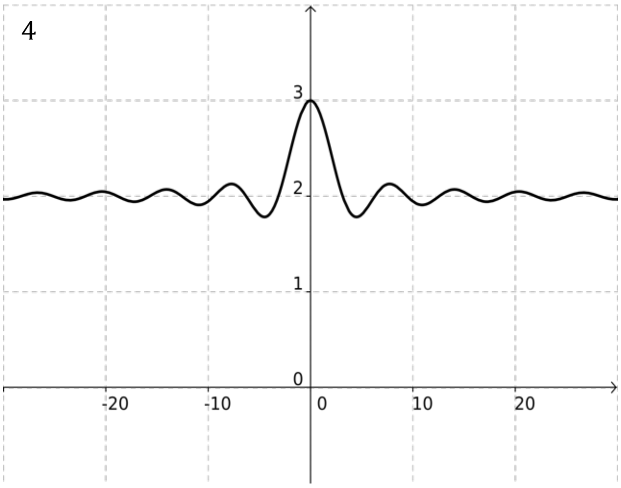
2



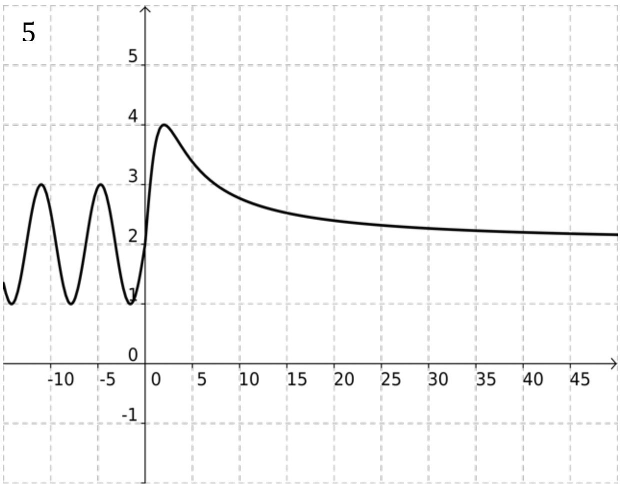
3



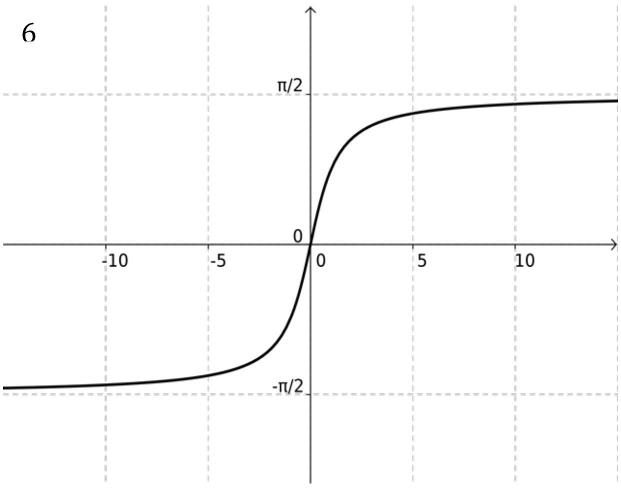
4


3
2
1
0
-20
-10
0
10
20

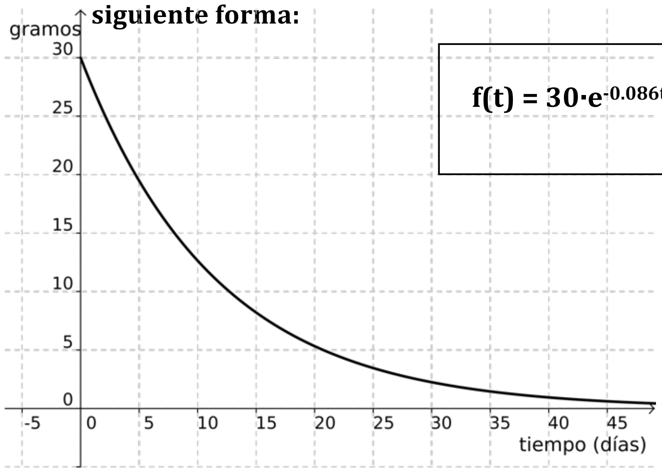
5


5
4
3
2
1
0
-1
-10
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45

6


π/2
0
-π/2
-10
-5
0
5
10

5. **La función de desintegración de un núcleo radioactivo depende de la cantidad inicial y de los años que tarde en desintegrarse el elemento. Concretamente, para 30 gramos de Yodo131, cuyo período de desintegración es 8 días, la función de desintegración, expresada en distintos lenguajes (verbal, simbólico, gráfico, tabular), cuenta con la siguiente forma:**



$$f(t) = 30 \cdot e^{-0.086t}$$

t (días)	**f(t)**
0	30
10	12.69
20	5.37
30	2.27
40	0.96
50	0.41
100	0.0055
200	$1.02 \cdot 10^{-6}$
400	$3.45 \cdot 10^{-14}$
…	…

a) ¿Aprecias la existencia de asíntota horizontal en alguna de sus representaciones? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cómo se podría justificar tu respuesta utilizando el cálculo de límites?

c) ¿Qué lenguaje (verbal, gráfico, tabular o simbólico) te aporta más información, de cara al posible cálculo de la asíntota horizontal?

d) ¿Se podría considerar algún momento exacto en el que la muestra quede completamente anulada con total seguridad?

6. Describe una situación propia de otra asignatura que requiera del uso de asíntotas horizontales para su interpretación. Recuerda todo lo que sabes de otras asignaturas como economía, física, química, historia, geografía, ...

MÁSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

UNIVERSIDAD DE GRANADA

-CUESTIONARIO DE MATEMÁTICAS-

Emilio Andrés García Gálvez

Estimado alumno o alumna:

Solicitamos tu participación para un estudio que estamos desarrollando para la Universidad de Granada. Tu máxima colaboración da sentido a nuestro estudio, por lo que te rogamos que hagas el cuestionario de la mejor manera posible siendo muy consciente de los siguientes aspectos:

- **El cuestionario es totalmente anónimo y confidencial, así que responde con total libertad dentro de tu criterio.**
- **No es un examen; por lo tanto, en ningún momento tus respuestas van a recibir una calificación, no es nuestra tarea.**
- **Justifica al máximo todo lo que escribas, por favor, para que podamos comprender mejor qué pretendes expresar en cada momento.**

Muchas gracias

-DATOS-

Nombre:

Edad:

Sexo: ♂ ♀

Curso:

Modalidad: ☐ Bachillerato de Humanidades
☐ Bachillerato de Ciencias Sociales

Interés por la materia: : ☐ Muy grande ☐ Grande ☐ Bastante
☐ Poco ☐ Muy poco ☐ Nada

Calificación que normalmente obtienes en la materia:

☐Sobresaliente (9-10) ☐ Notable (7-9)
☐Bien (6-7) ☐ Aprobado (5-6) ☐ Suspenso(0-5)

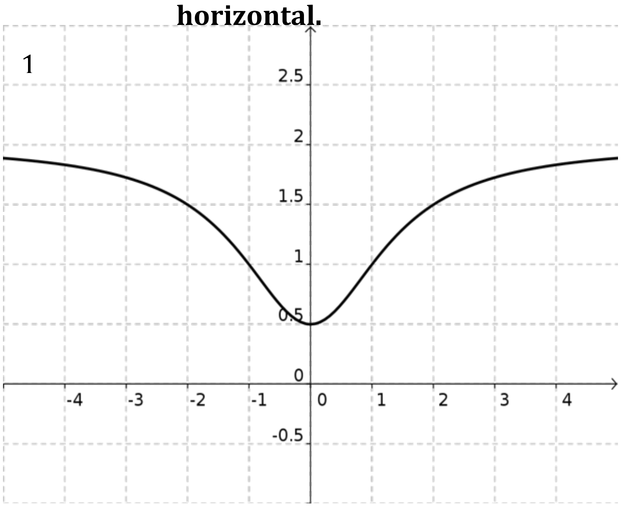
1. **Explica con tus palabras lo que entiendes por asíntota horizontal.**

2. **Dibuja aproximadamente una función que cuente con alguna asíntota horizontal, la cual se ajuste de la manera más precisa posible a lo que entiendes del concepto.**

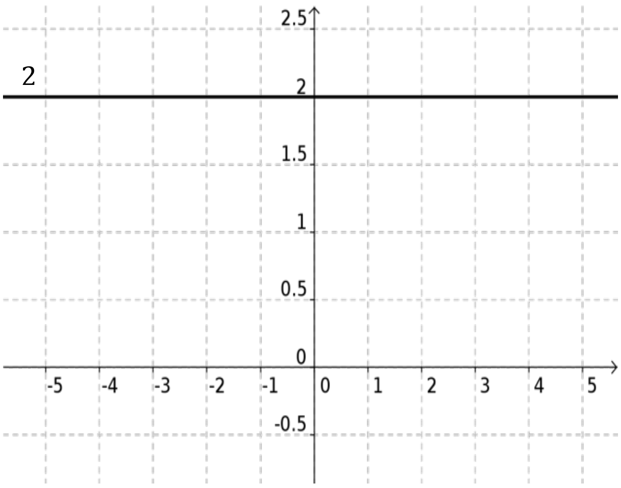
3. **Explica con tus palabras qué entiendes en la siguiente expresión:**
   - Una función f(x) tiende a L ($L \in \mathbb{R}$) cuando x tiende a infinito.

4. **Para cada gráfica, valora la posibilidad de que exista asíntota horizontal y, en el caso de que creas que exista, el posible comportamiento de la función respecto de su hipotética asíntota horizontal.**

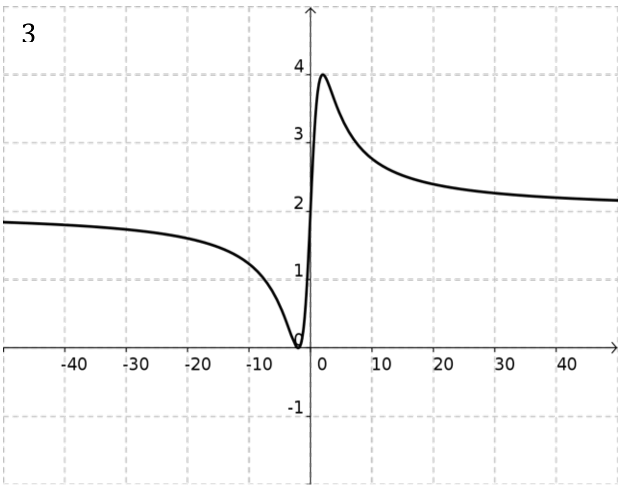
1



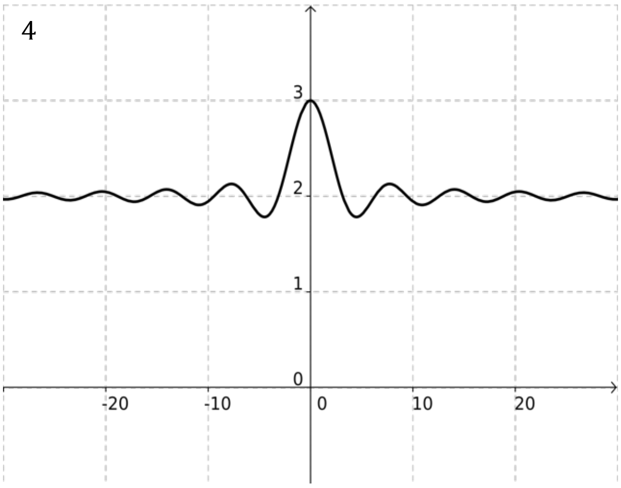
2



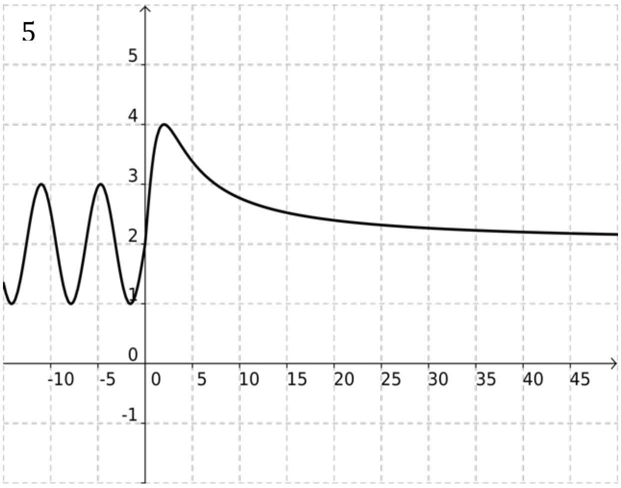
3



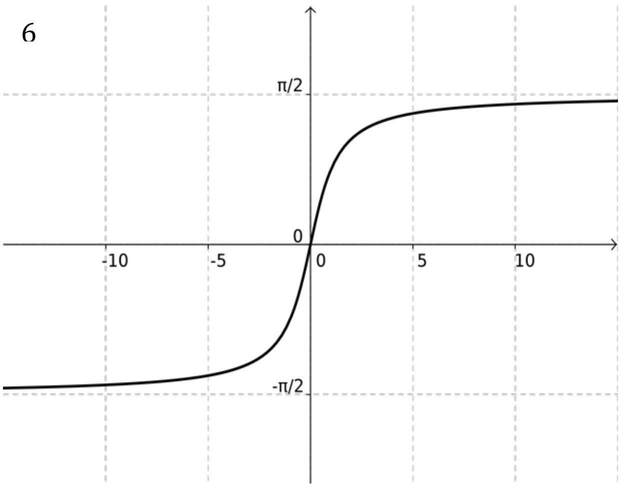
4


3
2
1
0
-20
-10
0
10
20

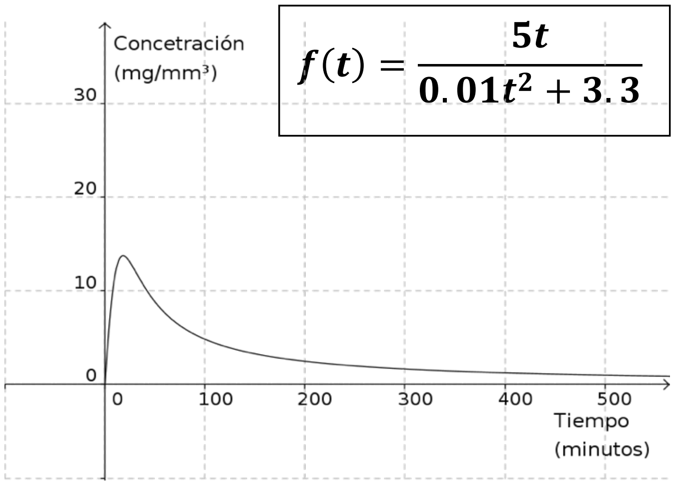
5


5
4
3
2
1
0
-1
-10
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45

6


π/2
0
-π/2
-10
-5
0
5
10

5. **La siguiente función representa la concentración de un medicamento, medida en microgramos por milímetro cúbico, en el torrente sanguíneo de una persona en función del tiempo transcurrido, medido en minutos. Su expresión en distintos lenguajes (verbal, simbólico, gráfico, tabular), cuenta con la siguiente forma:**



$$\boldsymbol{f(t) = \frac{5t}{0.01t^2 + 3.3}}$$

t (min)	f(t)
0	0
50	9.9880
100	4.9985
200	2.4998
300	1.6666
400	1.2450
500	0.9999
...	...

a) ¿Aprecias la existencia de asíntota horizontal en alguna de sus representaciones? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cómo se podría justificar tu respuesta utilizando el cálculo de límites?

c) ¿Qué lenguaje (verbal, gráfico, tabular o simbólico) te aporta más información, de cara al posible cálculo de la asíntota horizontal?

d) ¿Se podría considerar algún momento exacto en el que el medicamento haya desaparecido del torrente sanguíneo con total seguridad?

6. Describe una situación propia de otra asignatura que requiera del uso de asíntotas horizontales para su interpretación. Recuerda todo lo que sabes de otras asignaturas como economía, física, química, historia, geografía, ...

ANEXO VI. Análisis del cuestionario

- **Análisis de las tareas**

1. Explica con tus palabras lo que entiendes por asíntota horizontal

Dadas nuestras inquietudes, una pregunta de estas características se presumía imprescindible. Sin embargo, su redacción ocupó más trabajo del esperado, al igual como ocurriría con otras tareas. Resultaba que, en las primeras versiones, dada nuestra inexperiencia, la redacción de la pregunta trasladaba al lector en demasía a un escenario de examen, hecho que tratábamos de evitar en todo momento.

De la misma manera, contábamos con que apareciera una terminología similar a la del trabajo de Fernández-Plaza (2011): alcanzar, rebasar, limitar, entre otros. Además, una vez iniciado el análisis, nos encontramos con dos casos especiales. En primer lugar, nos percatamos que las definiciones que presentaban los sujetos tenían dos partes principales, una para definir qué es la asíntota y otra para señalar el comportamiento de la función respecto a ella. Veamos el siguiente ejemplo:

"Valor de y al que la función se acerca sin llegar a alcanzar" (1CA4)

Según lo enunciado, se aprecia cómo "Valor de y" se refiere a una definición de asíntota; y, por otro lado, "al que la función se acerca sin llegar a alcanzar", notamos que está dirigido a hacer hincapié sobre el comportamiento de la función respecto de la asíntota horizontal. Por otro lado, dentro de la primera parte descrita como "Definición de asíntota", observamos dos principales categorías en las respuestas, unas que se dirigían directamente al concepto y otras más enfocadas hacia el procedimiento, cuestión que resaltaba la necesidad de incluir en el marco teórico el trabajo de Gray y Tall (1991) sobre la doble dimensión concepto-proceso.

2. Dibuja aproximadamente una función que cuente con alguna asíntota horizontal, la cual se ajuste de la manera más precisa posible a lo que entiendes del concepto.

El principal objetivo de esta tarea fue principalmente introducir el estudio dentro del campo del sistema de representación. Asimismo cabría destacar la errónea tendencia a relacionar la representación únicamente con el sistema de representación gráfica, obviando otros muchos sistemas de representación como el simbólico, a través de la expresión algebraica de una función, por ejemplo; el tabular, como en la obtención de diversos valores para una ley determinada; o el sistema de representación verbal, perfectamente ejemplificado en estas líneas. En el mismo sentido interrelacionamos esta tarea con la cuestión anterior, clarificando en un sentido u otro posibles respuestas que hubieran quedado un tanto ambiguas.

De manera más específica, esperábamos que nos brindase esta tarea un posible abanico de las imágenes gráficas que aparecen en el alumnado conectadas al concepto de asíntota horizontal; así como la posibilidad de establecer un tipo más concreto de respuestas según curso y modalidad.

Una de las mejores noticias que tuvimos fue la posibilidad que apareció de analizar estos resultados también a la luz del trabajo de Fernández-Plaza (2011), aunque sólo pudimos contemplar los aspectos relacionados con "tendencia", "alcanzable" y "rebasable"; resultando imposible incluir otros como "aproximar". Previamente no esperábamos de ninguna manera el desarrollo de un sistema de categorías tan amplio para esta pregunta; sin embargo, conforme iban apareciendo las categorías principales, cobraba un poco más de fuerza aquellos aspectos que aún no se habían incluido.

3. Explica con tus palabras qué entiendes en la siguiente expresión:
Una función f(x) tiende a L (L ∈ ℝ) cuando x tiende a infinito.

La tercera tarea se articuló en torno a las afirmaciones de Claros (2010):

> "Los libros de texto insisten poco en el cambio de un sistema de representación a otro, produciéndose explicaciones aisladas del concepto de límite" (p.94).

Además de la de Blázquez y Ortega (2001, recogido en Claros, 2010):

> "La utilización de distintos sistemas de representación a la hora de trabajar el concepto de límite choca con las dificultades del cambio de sistema de representación, que puede ser, en parte, un obstáculo didáctico, puesto que en la enseñanza tradicional se ha abusado del registro algebraico y, además de descuidar el resto de representaciones, no se ha incidido en los cambios entre ellos" (p. 108).

Entendiendo la necesidad de la aparición de, al menos, un nuevo sistema de representación, el principal propósito de esta pregunta era el análisis de la actuación de los sujetos a la hora de manipular e interrelacionar sistemas de representación entre sí. Hemos de insistir, de igual manera, que en ningún momento ponemos en duda la comprensión por parte del alumnado de los focos de contenido porque, aparte de no ser nuestra competencia, dirigimos el trabajo única y exclusivamente al establecimiento de perfiles de respuesta, si lo hubiera, en base al marco teórico seleccionado.

Respecto al análisis de las respuestas, de manera general suponíamos encontrarnos dos grandes categorías: que relacionase con la asíntota horizontal y que no relacionase con la asíntota horizontal; como así pudimos refrendar posteriormente. Gracias a la aparición de términos como "aproximar" o "alcanzar" (Fernández-Plaza, 2011), aunque sin mencionar expresamente a la asíntota horizontal propiamente dicha, dentro de la relación con la asíntota horizontal diferenciamos una relación directa y una relación indirecta, como vemos en el siguiente ejemplo:

"Significa que cuando tenemos valores muy grandes, la gráfica va a aproximarse infinitamente a un número del eje de ordenadas (L)" (1CB18)

Muy diversas cuestiones deberíamos señalar en este apartado. En primer lugar, la prudencia a la hora del análisis y generalización de resultados. La actuación ante una respuesta como la anterior demandaba por nuestra parte un mayor nivel, aún más si cupiese, de rigor. La decisión respecto a la categorización final se fundamentó en representaciones adicionales que pudieran aparecer, como alguna representación gráfica; o en el contraste con el análisis de las dos primeras tareas. Así, debemos insistir que la recepción de una respuesta de semejantes no era condición necesaria y suficiente para incluirla en la subcategoría "Relación con la asíntota horizontal, de manera indirecta".

Además, resultó pertinente el establecimiento de la categoría 2.2. "Intercambia los papeles de ∞ y L", ante el importante volumen de respuestas que iban apareciendo. Su disposición despertaba la reflexión del porqué de su aparición. Teniendo en cuenta su redacción: *"Una función f(x) tiende a L (L ∈ R) cuando x tiende a infinito"*, estimamos que la anterior presencia de la tendencia de la variable dependiente respecto a la de la variable independiente, siendo infrecuente en estos contextos, ha podido ser un foco de conflicto, a lo que también deberíamos unir una notoria falta de rigor, e incluso motivación, aspectos que abordaremos en el siguiente subepígrafe; a la hora de realizar el cuestionario por parte de los sujetos.

4. Para cada gráfica, valora la posibilidad de que exista asíntota horizontal y, en el caso de que creas que exista, el posible comportamiento de la función respecto de su hipotética asíntota horizontal.

El sistema de representación también cobraba en esta pregunta una importancia especial; no obstante, la referencia principal para su elaboración fue el trabajo de Kidron (2011), en el que a través de diversas entrevistas propone a los sujetos diversos ejemplos que van contradiciendo a sus afirmaciones anteriores relativas a la asíntota horizontal y al comportamiento de la función respecto a ella. Aunque finalmente no se pudieron hacer entrevistas en torno a esta pregunta, se propusieron seis gráficas en las que se trató de recoger toda la casuística, o la más grande posible al menos, de la asíntota horizontal desde el punto de vista de su representación gráfica. En la línea de Kidron (2011), la idea era que los distintos ejemplos hicieran entran en conflicto a los sujetos con sus propias ideas. Las gráficas seleccionadas fueron las siguientes:

Tabla 25-Expresión analítica de las gráficas de la tarea 4

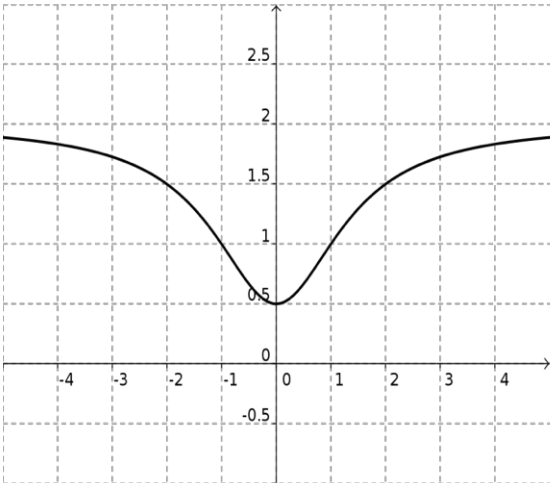
1	f(x)= $\frac{1+2x^2}{2+x^2}$	**4**	f(x)= 2 + $\frac{\text{sen}(x)}{x}$
2	f(x)= 2	**5**	f(x)= $\begin{cases} 2+\text{sen}(x) & \text{si } x<0 \\ \frac{(2x+4)^2}{2x^2+8} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$
3	f(x)= $\frac{(2x+4)^2}{2x^2+8}$	**6**	f(x) = arc tg(x)

Justificación de la existencia de cada gráfica

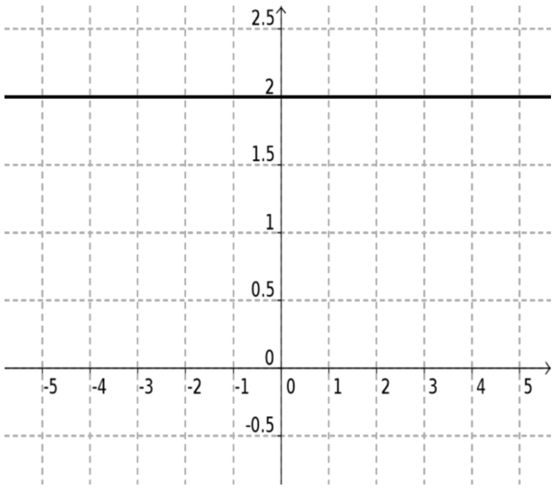
1: f(x)= $\frac{1+2x^2}{2+x^2}$

Como se puede apreciar en la representación gráfica, este primer ejemplo cuenta con asíntota horizontal en y=2 por $\pm\infty$, no entendiendo que tiene dos asíntotas horizontales, sino una asíntota horizontal tanto por $\pm\infty$.

La inclusión de esta representación gráfica entre los distintos ejemplos se la debemos a nuestro primer juicio de expertos por parte de Dr. Javier Claros y Dra. María Teresa Sánchez. En la entrevista realizada, presentamos una versión previa del cuestionario en la que aparecía la gráfica $f(x)=\frac{1-2x^2}{1-x^2}$, que además contaba con dos asíntotas verticales, hecho que fue desaconsejado en nuestro juicio de expertos para tratar de controlar al máximo posibles confusiones entre ambos tipos de asíntotas.



2: f(x)= 2



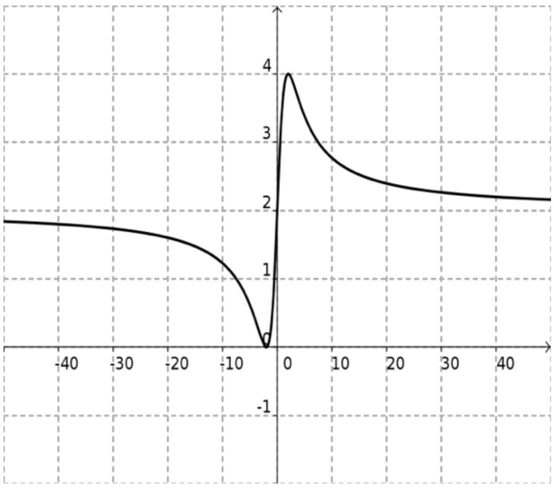
Para este segundo ejemplo, consideramos necesario incluir alguna representación que no contara con asíntota horizontal. En primer lugar, propusimos la función f(x)= ln(x); sin embargo, en ambos juicios de expertos nos alertaron que dicho ejemplo podría llevar a equívoco de forma innecesaria, dado el muy suave crecimiento de la función logaritmo neperiano. Además, siguiendo la línea de Kidron (2010), establecimos finalmente este caso esperando que se contradijeran entre lo que apreciaban en la imagen, una función cuyo límite en ±∞ es un valor real, y una de las definiciones más habituales de la asíntota horizontal en la etapa de Bachillerato:

> "Si alguno de los límites en el infinito de f es L, la recta y=L se llama asíntota horizontal de la función f" (Matematicas I. Guadiel. Sevilla).

3: f(x)= $\frac{(2x+4)^2}{2x^2+8}$

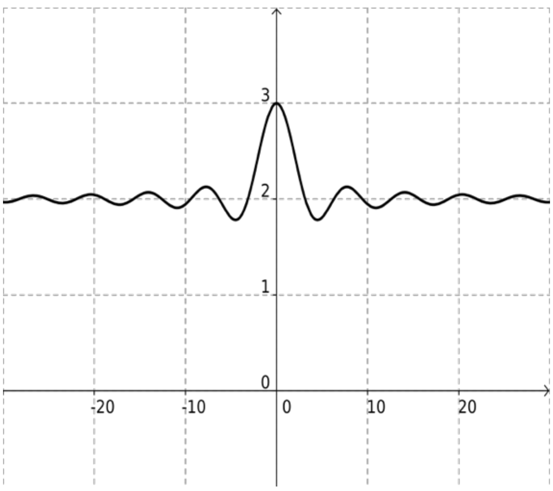
La presente gráfica está basada en el trabajo de Kidron (2011), aunque no es exactamente la misma pues la que él utilizó tenía su asíntota horizontal en y=1.

Como se puede observar, cuenta con una asíntota horizontal en y=2 por ±∞**.** El posible foco de conflicto se encuentra en el punto (0,2), en el que la gráfica de la función interseca a la de la asíntota horizontal, hecho que no concordaría con concepciones de este tipo de asíntota, del estilo a "La función nunca corta a la asíntota", muy arraigadas en la etapa de Bachillerato, como pudimos corroborar en diversas respuestas aportadas por los sujetos:



"Parece que si en el 1, pero no porque la gráfica pasa por ese punto, entonces no puede ser una A.H." (Respuesta de 1CB4 a esa tarea).

4: f(x)= 2 + $\frac{\text{sen}(x)}{x}$

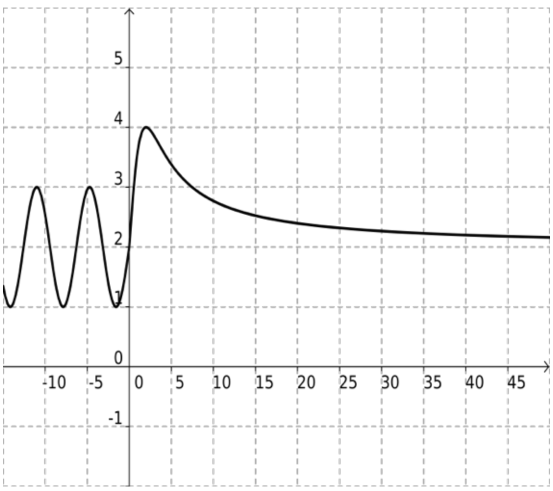


Seguimos junto al mismo investigador con la propuesta de la siguiente gráfica, idéntica a la que aparece en su trabajo. En ella se trata de poner al sujeto en un nuevo conflicto en el que, una vez superado el anterior en el que la función cortaba a la asíntota horizontal en una sola ocasión, debe analizar su existencia cuando la corte infinitas veces de la manera que aparece en el ejemplo.

Resulta importante recalcar que no se espera en ningún momento alguna respuesta afirmativa, con criterio, en este ejemplo, siendo conscientes de las demandas que se realiza al alumnado desde las distintas legislaciones de la etapa, proyectadas en los libros de textos, la Selectividad y las programaciones didácticas de los docentes. Sin embargo, valoramos la importancia de su consideración con el ánimo de configurar un instrumento más amplio que pueda albergar al concepto en la mayor envergadura posible.

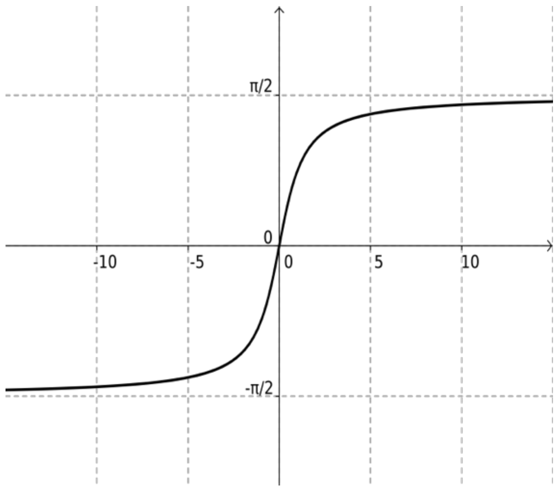
5: $$f(x)=\begin{cases} 2+\text{sen}(x) & \text{si } x<0 \\ \dfrac{(2x+4)^2}{2x^2+8} & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$$

Ciertamente estábamos muy interesados en seleccionar un ejemplo como el que se puede apreciar en la imagen inferior. En él, se observa la existencia de asíntota horizontal únicamente por $+\infty$**.** Es más, al ser una función a trozos, la función elegida para $f_1(x)= 2+\text{sen}(x)$, llega incluso a cortar a la presunta asíntota, aunque ésta se encontrase solamente por un extremo, en infinitas ocasiones.



De esta manera, se hacía necesario un ejemplo de estas características por dos motivos principales. Por un lado, para tratar de analizar la manera en la que los sujetos analizan, o no, de manera aislada el comportamiento de la función por $+\infty$ y **-**∞; y, por otro, un ejemplo que contradiga de manera contundente aquella concepción en la que la función no puede cortar a la asíntota horizontal.

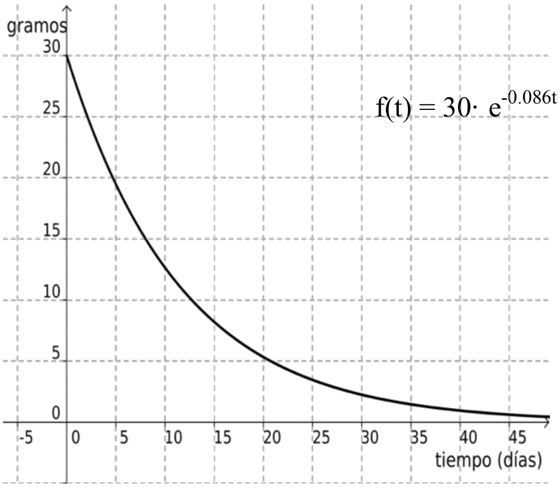
6: f(x) = arc tg(x)



Este último ejemplo también se seleccionó a partir de nuestro juicio de expertos, coincidiendo ambos en la necesidad de plantear una función que contase con dos asíntotas horizontales distintas, una por +∞ **y** otra por **-**∞.

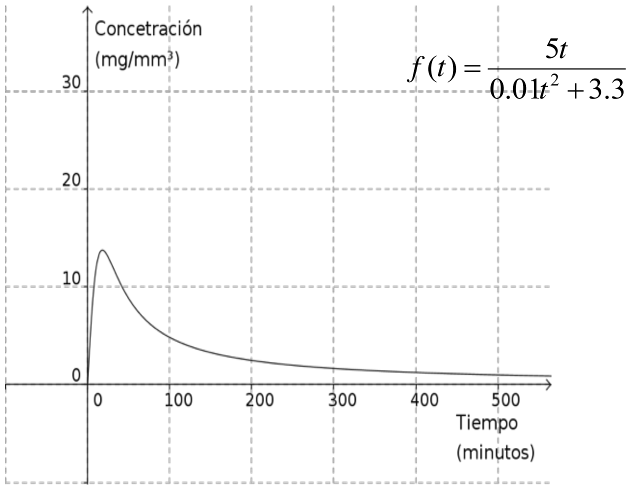
Con esta función, aparte de manejar un nuevo ejemplo dentro de la posible casuística función-asíntota horizontal, se pretendía investigar acerca de la capacidad de análisis de los individuos respecto al comportamiento por +∞ y **-**∞; esperando una descripción de la asíntota horizontal más específica que no era imprescindible en ejemplos anteriores, aunque implícitamente sí que era una cuestión necesaria.

5. (VERSIÓN CIENCIAS) La función de desintegración de un núcleo radioactivo depende de la cantidad inicial y de los años que tarde en desintegrarse el elemento. Concretamente, para 30 gramos de Yodo131, cuyo período de semidesintegración es 8 días, la función de desintegración, expresada en distintos lenguajes (verbal, simbólico, gráfico, tabular) cuenta con la siguiente forma:



t(días)	f(t)
0	30
10	12.69
20	5.37
30	2.27
40	0.96
50	0.41
100	0.0055
200	$1.02\cdot 10^{-6}$
400	$3.45\cdot 10^{-14}$
…	…

5. (VERSIÓN SOCIALES) La siguiente función representa la concentración de un medicamento, medida e microgramos por milímetro cúbico, en el torrente sanguíneo de una persona en función del tiempo transcurrido, medido en minutos. Su expresión en distintos lenguajes (verbal, simbólico, gráfico, tabular), cuenta con la siguiente forma:



t(min)	f(t)
0	0
50	9.9880
100	4.9985
200	2.4998
300	1.6666
400	1.2450
500	0.9999
…	…

a) ***¿Aprecias la existencia de asíntota horizontal en alguna de sus representaciones? Justifica tu respuesta.***
b) ***¿Cómo se podría justificar tu respuesta utilizando el cálculo de límites?***
c) ***¿Qué lenguaje (verbal, gráfico, tabular o simbólico) te aporta más información de cara al posible cálculo de la asíntota horizontal?***
d) ***(VERSIÓN CIENCIAS) ¿Se podría considerar algún momento en el que la muestra quede completamente anulada con total seguridad?***
d) ***(VERSIÓN SOCIALES)¿Se podría considerar algún momento en el que el medicamento haya desaparecido del torrente sanguíneo con total seguridad?***

La fenomenología, casi inédita hasta ahora, empezaba a cobrar fuerza desde la quinta tarea. En esta quinta tarea encontramos el único elemento diferenciador entre las dos versiones del cuestionario que desarrollamos, proponiendo un modelo real lo más ajustado posible a la respectiva modalidad en el que se encontraran, bien Ciencias, bien Ciencias Sociales. En el primer caso utilizamos un ejemplo propio de la Física con la función de desintegración, mientras que para Ciencias Sociales empleamos un modelo de mayor cotidianeidad como es la absorción de un medicamento en sangre.

Salvo esa pequeña diferencia, el lector podrá comprobar que los distintos apartados que se incluyen son idénticos para ambas modalidades. Con el primer y tercer apartado tratamos que valoren y confronten la información que reciben de cada uno de los sistemas de representación, intentando que analicen las causas, internas o externas, por las que reciben más o menos, mejor o peor, información de cada uno de estos sistemas. Por su parte, el segundo apartado, el cual solicita que se justifique la respuesta del apartado anterior utilizando el cálculo de límites, fue propuesta del Dr. Tomás Ortega, siendo una brillante aportación al brindarnos una nueva tarea para analizar cómo se maneja el alumnado entre sistemas de representación, además de fundamentar un poco más a la propia estructura conceptual.

Finalmente, en el último apartado hacemos alusión al trabajo de Dr. Javier Claros y Dra. María Teresa Sánchez y a su planteamiento de los fenómenos de ida-vuelta, aunque obviamente a una escala muchísimo más reducida y adaptada a nuestro contexto de límites finitos en el infinito.

6. Describe una situación propia de otra asignatura que requiérale uso de asíntotas horizontales para su interpretación. Recuerda todo lo que sabes de otras asignaturas como economía, física, química, historia, geografía,…

No cabe duda que las matemáticas cobran su mayor esplendor por su repercusión en la vida cotidiana. Aunque pasan desapercibidas en la mayoría de las ocasiones; o bien, no se valoran de la manera adecuada, son continuos los fenómenos que ocurren día tras día que no tendrían sentido sin la existencia de esta parte crucial de nuestro patrimonio cultural (Rico, 2012, p.48). Personalmente, comencé a ser consciente de estos detalles cuando cursaba 2º de Bachillerato, precisamente con el ejemplo de la desintegración radioactiva en clase de Física. Personalmente me costaba apreciar la existencia de unos ejemplos reales en matemáticas a los que estábamos totalmente desacostumbrados.

Todo esto posee una gran envergadura desde el momento en el que el alumnado desarrolla sus principales capacidades en un escenario diferente al de su propia vida, al de su propio día a día. Sería algo parecido a separar drásticamente un aprendizaje académico y un aprendizaje puramente cotidiano, dejando además sin establecer sólidos puntos de encuentro entre ambos en el que el alumno o alumna encuentre mayores y mejores respuestas a sus propias singularidades. Bajo nuestro punto de vista, ya es un craso error sólo insinuar una separación entre el aprendizaje escolar y el cotidiano, ya que tal como dice Esteve (2010, p. 16):

> "Educar consiste en enseñar a otros a vivir"

Así pues, la educación matemática no puede obviar tan brillante afirmación, debiendo comprender y disponer los medios para que la fenomenología sea una baza importante para que el alumnado adquiera las competencias específicas del área de una manera considerablemente más significativa.

Estas ideas son la principal justificación del planteamiento de una cuestión como esta última. Ciertamente, apreciamos también una incidencia importante de los sistemas de representación, especialmente con la traducción entre sistemas, dado que, suponiendo algún sujeto que ejemplifique de manera coherente algún ejemplo, debería manejarse de manera fluida entre diversos sistemas de representación.

- **Análisis de datos: tareas 5 y 6.**

5. (VERSIÓN CIENCIAS) La función de desintegración de un núcleo radioactivo depende de la cantidad inicial y de los años que tarde en desintegrarse el elemento. Concretamente, para 30 gramos de Yodo131, cuyo período de semidesintegración es 8 días, la función de desintegración, expresada en distintos lenguajes (verbal, simbólico, gráfico, tabular) cuenta con la siguiente forma:

5. (VERSIÓN SOCIALES) La siguiente función representa la concentración de un medicamento, medida e microgramos por milímetro cúbico, en el torrente sanguíneo de una persona en función del tiempo transcurrido, medido en minutos. Su expresión en distintos lenguajes (verbal, simbólico, gráfico, tabular), cuenta con la siguiente forma:

a) ¿Aprecias la existencia de asíntota horizontal en alguna de sus representaciones? Justifica tu respuesta.

Tabla 2-Tarea 5a.

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="3">CATEGORÍAS</th><th colspan="8">MODALIDAD/GRUPOS</th></tr>
<tr><th colspan="2">Ciencias e Ingeniería</th><th colspan="2">Ciencias de la Salud</th><th colspan="4">Ciencias Sociales</th></tr>
<tr><th colspan="2">1CA</th><th colspan="2">1CB</th><th colspan="2">2SA</th><th colspan="2">2SB</th></tr>
<tr><td rowspan="7">¿Aprecias la existencia de AH en alguna de las representaciones?</td><td rowspan="4">1.1. Sí</td><td>1.1.1. Lenguaje verbal</td><td>0</td><td rowspan="4">95.23</td><td>0</td><td rowspan="4">73.08</td><td>0</td><td rowspan="4">61.54</td><td>0</td><td rowspan="4">70.83</td></tr>
<tr><td>1.1.2. Lenguaje gráfico</td><td>57.14</td><td>57.69</td><td>46.15</td><td>58.33</td></tr>
<tr><td>1.1.3. Lenguaje tabular</td><td>28.57</td><td>11.54</td><td>15.38</td><td>8.33</td></tr>
<tr><td>1.1.4. Lenguaje simbólico</td><td>9.52</td><td>3.85</td><td>0</td><td>4.17</td></tr>
<tr><td rowspan="3">1.2. No</td><td>1.2.1. No aplica</td><td>0</td><td rowspan="3">4.76</td><td>7.69</td><td rowspan="3">26.92</td><td>0</td><td rowspan="3">38.46</td><td>0</td><td rowspan="3">29.17</td></tr>
<tr><td>1.2.2. Incoherente</td><td>0</td><td>7.69</td><td>30.77</td><td>20.83</td></tr>
<tr><td>1.2.3. Otras respuestas</td><td>4.76</td><td>11.54</td><td>7.69</td><td>8.33</td></tr>
</table>

b) ¿Cómo se podría justificar tu respuesta utilizando el cálculo de límites?

Tabla 26-Tarea 5b.

CATEGORÍAS			MODALIDAD/GRUPOS							
			Ciencias e Ingeniería		Ciencias de la Salud		Ciencias Sociales			
			1CA		1CB		2SA		2SB	
Justificación usando cálculo de límites (%)	1.1. Justifica con cálculos	1.1.1. De forma adecuada	16.67	16.67	5	10	12.5	12.5	30	35
		1.1.2. De forma inadecuada	0		5		0		5	
	1.2. No justifica	1.2.1. Se limita al lenguaje verbal-simbólico	41.67	83.34	40	90	12.5	87.5	15	65
		1.2.2. No aplica	0		15		62.5		30	
		1.2.3. Incoherente	41.67		35		12.5		20	

c) ¿Qué lenguaje (verbal, gráfico, tabular o simbólico) te aporta más información de cara al posible cálculo de la asíntota horizontal?

Tabla 27-Tarea 5c.

CATEGORÍAS		MODALIDAD/GRUPOS			
		Ciencias e Ingeniería	Ciencias de la Salud	Ciencias Sociales	
		1CA	1CB	2SA	2SB
Sistema de representación (%)	1.1. Lenguaje verbal	0	4.17	7.14	0
	1.2. Lenguaje gráfico	60	75	71.43	43.75
	1.3. Lenguaje tabular	25	12.5	21.43	34.38
	1.4. Lenguaje simbólico	15	8.33	0	21.88

d) (VERSIÓN CIENCIAS) ¿Se podría considerar algún momento en el que la muestra quede completamente anulada con total seguridad?
d) (VERSIÓN SOCIALES) ¿Se podría considerar algún momento en el que el medicamento haya desaparecido del torrente sanguíneo con total seguridad?

Tabla 28-Tarea 5.d

	CATEGORÍAS		MODALIDAD/GRUPOS							
			Ciencias e Ingeniería		Ciencias de la Salud		Ciencias Sociales			
			1CA		1CB		2SA		2SB	
Valoración de la desaparición total de la muestra	1.1. Sí	1.1.1. Justifica	0		5.26	5.26	22.22	22.22	10	10
		1.1.2. No justifica			0		0		0	
	1.2. No	1.2.1. Justifica	38.46	92.31	42.11	89.48	66.67	77.78	70	90
		1.2.2. No justifica	53.85		47.37		11.11		20	
	1.3. Otras respuestas	1.3.1. No aplica	0	7.69	5.26	5.26	0		0	
		1.3.2. Incoherente	7.69		0					

6. Describe una situación propia de otra asignatura que requiera el uso de asíntotas horizontales para su interpretación. Recuerda todo lo que sabes de otras asignaturas como economía, física, química, historia, geografía,…

Tabla 29-Tarea 6

	CATEGORÍAS		MODALIDAD/GRUPOS							
			Ciencias e Ingeniería		Ciencias de la Salud		Ciencias Sociales			
			1CA		1CB		2SA		2SB	
Descripción de fenómenos con AH de otras materias	1.1. Describe-Justifica		28.57		40.91		8.33		31.82	
	1.2. No describe	1.2.1. Ejemplifica asignaturas sin describir	14.29	71.43	50	59.09	41.67	91.67	27.27	68.18
		1.2.2. No aplica	28.57		9.09		50		31.82	
		1.2.3. Respuesta negativa	28.57		0		0		9.09	

- **Respuestas a destacar**

Dado el importante volumen de información con el que contábamos y la imposibilidad de analizarlo completamente de manera rigurosa, resaltamos en este punto algunas de las respuestas aportadas por los sujetos. Puesto que fueron las preguntas que no se sometieron a un profundo análisis, haremos especial hincapié con las respuestas de las tareas 5 y 6.

1. Explica con tus palabras lo que entiendes por asíntota horizontal

> "Cuando la función en ese número tiende a infinito y no toca a la asíntota. Algunas veces la puede cruzar". (2SB4).

3. Explica con tus palabras qué entiendes en la siguiente expresión:
Una función f(x) tiende a L (L ∈ ℝ) cuando x tiende a infinito.

> "Cuanto mayor es x, más se acerca el valor de la función a L sin llegar a alcanzarlo". (Relación indirecta con la AH). (1CA4).
>
> "Es una función con asíntota en y=L cuando x tiende a infinito" (Relación directa con la AH). (1CA13)

4. Para cada gráfica, valora la posibilidad de que exista asíntota horizontal y, en el caso de que creas que exista, el posible comportamiento de la función respecto de su hipotética asíntota horizontal.

> "Sí. Tiene AH en y= 0,5". (Gráfica 1; la confunde la AH con los extremos relativos). (1CA2).
>
> "y=2. Por tanto, cuando x tiende a infinito, y=2, AH." (Gráfica 2). (1CB20).
>
> "No hay una asíntota horizontal en 2, ya que existe un punto en 2 en el (0,2). (Gráfica 3). (1CA11).
>
> "No tiene asíntota horizontal la gráfica presenta ondulaciones cambios en los valores de x e y, irán siendo menores pero seguirán habiendo". (Gráfica 4). (1CB13).
>
> "Existe una AH en y=2 desde (0, +∞) (Gráfica 5) (1CA9).

"No existe porque no puede haber dos asíntotas en el eje y". (Gráfica 6). (2SA2).

5. (VERSIÓN CIENCIAS) La función de desintegración de un núcleo radioactivo depende de la cantidad inicial y de los años que tarde en desintegrarse el elemento. Concretamente, para 30 gramos de Yodo131, cuyo período de semidesintegración es 8 días, la función de desintegración, expresada en distintos lenguajes (verbal, simbólico, gráfico, tabular) cuenta con la siguiente forma:

5. (VERSIÓN SOCIALES) La siguiente función representa la concentración de un medicamento, medida e microgramos por milímetro cúbico, en el torrente sanguíneo de una persona en función del tiempo transcurrido, medido en minutos. Su expresión en distintos lenguajes (verbal, simbólico, gráfico, tabular), cuenta con la siguiente forma:

a) ¿Aprecias la existencia de asíntota horizontal en alguna de sus representaciones? Justifica tu respuesta.

"Sí, en y=0 debido a que con el paso del tiempo se irá desintegrando hasta que el núcleo radioactivo sea casi nulo" (1CB1).

"No tiene AH ya que nunca podría tocar la función a dicha asíntota, lo cual ocurre en el (0,0).

d) (VERSIÓN CIENCIAS) ¿Se podría considerar algún momento en el que la muestra quede completamente anulada con total seguridad?
d) (VERSIÓN SOCIALES)¿Se podría considerar algún momento en el que el medicamento haya desaparecido del torrente sanguíneo con total seguridad?

"No. Pero en algún momento será tan pequeña que será despreciable". (1CA4).

"No, nunca quedaría completamente anulada, aunque llegará a valores que prácticamente serán 0". (1CB20).

"No, nunca llega a desaparecer totalmente, siempre quedará un resto por muy pequeño que sea, como por ejemplo 0,00001". (2SA2).

"Aunque haya una AH y no llegue nunca al punto (-∞, 0) pienso que aunque matemáticamente esté bien, el cuerpo se deshará del medicamento" (2SA7).

“No, porque siempre tenderá a infinito, nunca llegará ni a 0 ni a cualquier otro número”. (2SA11).

“Al tener una AH en x=0 se observa que no llega nunca a 0 aunque tenga una gran aproximación a ese valor” (2SB10).

6. Describe una situación propia de otra asignatura que requiérale uso de asíntotas horizontales para su interpretación. Recuerda todo lo que sabes de otras asignaturas como economía, física, química, historia, geografía,…

“Veo un ejemplo claro en la actividad enzimática (biología), ya que cuando una enzima se satura, existe una velocidad determinada para cada enzima que no supera” (1CB18).

“En biología, en las enzimas y en los factores que aumentan o disminuyen la productividad fotosintética en la fotosíntesis”. (1CB21).

“En geografía, con el tema de la población, nos hemos encontrado casos de ciudades donde la natalidad es muy baja y a lo largo del tiempo es casi nula, pero nunca llega a ser cero. Ahí nos podremos encontrar una asíntota horizontal. (2SB3).

“En economía se suelen utilizar las asíntotas horizontales por ejemplo para calcular el punto muerto donde los beneficios y las pérdidas deben ser 0”. (2SB5).

“En economía, con los balances, puntos muertos, se realiza el estudio del patrimonio neto, pasivo, activo. En geografía con los estudios de la población en el país y el cálculo del caudal de un río”. (2SB6).