



Universidad de Granada

CURSO 2013/2014

HASTA EL INFINITO Y MÁS ALLÁ

Concepciones manifestadas por el alumnado de bachillerato respecto al concepto de asíntota horizontal. Estudio exploratorio.

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática
Emilio Andrés García Gálvez
Granada,
Septiembre 2014



Universidad de Granada

CURSO 2013/2014

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela de los doctores D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo y Dña. Aurora Inés del Río Cabeza del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Emilio Andrés García Gálvez, dentro del Máster Universitario en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Emilio Andrés García Gálvez

Vº Bº de los tutores

Fdo.: D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Fdo.: Aurora Inés del Río Cabeza

El presente trabajo de investigación tutelado se ha realizado en el seno de la línea de investigación Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada, desarrollada por el grupo (FQM-193) del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía

A mi madre, por ser el alma de mi alma

A mi padre, por enseñarme que no hay nada imposible

**A mis padres, por ser el mejor equipo del mundo,
sois mis estrellas favoritas**

A mis hermanos, por ser brillantes referencias en mi vida

A mis sobrinos, por regalarme las más bonitas sonrisas

A mis amigos, por la alegría que me dais

**A Tí, por regalarme mis sueños de la forma más bella,
algo grande nos espera**

A la vida, por enamorarme de las Matemáticas

A Dios, por su fidelidad y enseñanzas

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a los directores de este trabajo: D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo y Dña. Aurora Inés del Río Cabeza, por su dedicación y enseñanzas.

Al centro IES Salvador Rueda y a los cuatro docentes que brindaron todas las facilidades para poder llevar a cabo este trabajo: D. Cesáreo Flórez, Dña. Ana Isabel Biedma, D. Eduardo Díaz-Miguel y Dña. Francisca Becerra.

A D. Eduardo Díaz-Miguel, por sus enseñanzas en el área a lo largo de todos los años que compartimos y por su inmensa colaboración en la realización de este trabajo.

Al Dr. Tomás Ortega y al Dr. Javier Claros y a la Dra. María Teresa Sánchez, por su exquisito trato y sus inmensas enseñanzas.

A Dña. Encarnación Castro, por facilitarme la realización del Máster, sin tu ayuda no hubiera podido realizarlo.

A todo el Departamento de Matemática, por la gran categoría humana y profesional que engloba.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE IMÁGENES Y GRÁFICOS

I. INTRODUCCIÓN Y OBJETO DE ESTUDIO.....	1
I.1. Descripción del objeto de estudio	3
I.2. Planteamiento del problema de investigación.....	5
I.2.1. Justificación	5
I.2.2. Objetivos de la investigación.....	7
II. MARCO TEÓRICO.....	8
II.1. Significado de un concepto matemático escolar.....	9
II.2. Las concepciones	11
II. 3. Objetos matemáticos vistos como objeto-proceso.....	12
II.4. Representaciones.....	13
II.5. Fenómenos y situaciones	17
II.6. Antecedentes	18
II.6.1. Concepciones de estudiantes acerca del límite finito en un punto	18
II.6.2. Concepciones acerca de la asíntota horizontal	20
III. MARCO METODOLÓGICO.....	22
III.1. Desarrollo de la investigación	23
III.2. Tipo de estudio	25
III.3. Sujetos, ciclo y nivel curricular	26
III.4. Revisión bibliográfica	27
III.5. Elaboración del instrumento de recogida de información	28
III.6. Procedimiento de aplicación del instrumento.....	29
III.7. Entrevistas con los docentes	30

IV. ANÁLISIS DE DATOS	33
IV.1. Tareas	35
1. <i>Explica con tus palabras lo que entiendes por asíntota horizontal</i>	<i>35</i>
2. <i>Dibuja aproximadamente una función que cuente con alguna asíntota horizontal, la cual se ajuste de la manera más precisa posible a lo que entiendes del concepto</i>	<i>42</i>
3. <i>Explica con tus palabras qué entiendes en la siguiente expresión: Una función $f(x)$ tiende a L ($L \in \mathbb{R}$) cuando x tiende a infinito</i>	<i>53</i>
4. <i>Para cada gráfica, valora la posibilidad de que exista asíntota horizontal y, en el caso de que creas que exista, el posible comportamiento de la función respecto de su hipotética asíntota horizontal.....</i>	<i>57</i>
V. CONCLUSIONES FINALES	62
V.1. Análisis descriptivo-interpretativo.....	63
V.1.1. Grupo de Ciencias e Ingeniería	63
V.1.2. Grupo de Ciencias de la Salud	64
V.1.3. Grupo de Ciencias Sociales.....	66
V.2. Análisis comparativo	67
V.3. Limitaciones de la investigación	68
V.4. Autoevaluación.....	68
V.4.1. Autoevaluación personal	68
V.4.2. Autoevaluación del instrumento.....	68
V.4.3. Consecución de los objetivos	69
V.5. Sugerencias para investigaciones futuras	69
REFERENCIAS	71
ANEXO.....	76

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1-Propuesta de trabajo</i>	<i>24</i>
<i>Tabla 2-Distribución de los sujetos de estudio según modalidad, grupo y sexo.....</i>	<i>26</i>
<i>Tabla 3-Resumen analítico de las tareas del cuestionario</i>	<i>28</i>
<i>Tabla 4-Resumen entrevistas docentes</i>	<i>32</i>
<i>Tabla 5-Definición de asíntota horizontal (%).....</i>	<i>38</i>
<i>Tabla 6-Comportamiento de la función respecto a su asíntota horizontal (%)</i>	<i>40</i>
<i>Tabla 7-Características de la función con asíntota horizontal (%)</i>	<i>46</i>
<i>Tabla 8-Características de la asíntota horizontal (%).....</i>	<i>48</i>
<i>Tabla 9-Comportamiento de la función respecto de la asíntota horizontal (%).....</i>	<i>49</i>
<i>Tabla 10-Tipo de función a la que se ajusta la representación (%)</i>	<i>50</i>
<i>Tabla 11-Relación de una expresión verbal con la asíntota horizontal (%).....</i>	<i>55</i>
<i>Tabla 12-Niveles de desempeño con la asíntota horizontal (%)</i>	<i>60</i>

ÍNDICE DE GRÁFICOS Y FIGURAS

<i>Fig.1 Asíntota de la hipérbola según Apolonio</i>	4
<i>Fig. 2 Cono de Apolonio</i>	4
<i>Fig.3 Triángulo semántico. Frege (1998)</i>	9
<i>Fig.4 Significado de un concepto matemático escolar</i>	9
<i>Gráfico 1-Definición de asíntota horizontal (%)</i>	39
<i>Gráfico 2-Definición de asíntota horizontal como objeto (%)</i>	40
<i>Gráfico 3-Análisis de la función representada con AH (%)</i>	50
<i>Gráfico 4-Tipo de función a la que se ajusta la representación (%)</i>	51
<i>Gráfico 5 –Relación, directa o indirecta de la expresión verbal con la asíntota horizontal(%)</i>	56
<i>Gráfico 6- Relación directa de una expresión verbal con la asíntota horizontal(%)</i>	56
<i>Gráfico 7-Niveles de desempeño con la asíntota horizontal(%)</i>	61

CAPÍTULO I.
INTRODUCCIÓN Y OBJETO DE ESTUDIO

El Trabajo Fin de Máster se presenta como una oportunidad de profundizar en el desarrollo de habilidades y competencias fundamentales relativas a la investigación; en especial, al Máster en el que nos ubicamos, el Máster en Didáctica de la Matemática.

Partimos de la Didáctica de la Matemática situándonos en los ámbitos del Pensamiento Matemático Avanzado y de la Didáctica del Análisis. Desde este punto de vista, presentamos un estudio acerca de la asíntota horizontal y del límite finito en el infinito, más concretamente de las concepciones de los estudiantes de segundo de Bachillerato en torno a dichos conceptos. Estos estudiantes han sido instruidos en el tópico desde los puntos de vista las tres modalidades existentes: Ciencias e Ingeniería, Ciencias de la Salud y Ciencias Sociales.

En estas líneas describimos de manera rigurosa y precisa cada uno de los pasos principales que dieron lugar a este proyecto. Es por ello que invitamos al lector a un apasionante viaje al infinito, al infinito y más allá, en el que podrán descubrir las concepciones puestas de manifiesto de estos estudiantes y un profundo análisis descriptivo-interpretativo de todo este recorrido, todo ello desde el enfoque del significado aportado por el triángulo semántico de Frege.

El trabajo consta de cinco capítulos. En el primer capítulo, definimos el objeto de estudio, en el que describiremos qué es lo que queremos estudiar y la importancia científica de tratar un tema como este. Además, a través de la fundamentación mostraremos la necesidad del trabajo, del cual nos marcaremos una serie de objetivos que nos ayuden a progresar. A continuación, en el capítulo dos, se presenta el marco teórico, que hace visible las investigaciones previas realizadas y, en especial, aquellas investigaciones de referencia sobre las que sustentaremos nuestro trabajo. Por otra parte, el capítulo tres describe la metodología, donde se tratarán los detalles relativos al procedimiento, toma de decisiones, selección, recogida y organización de los datos. Finalmente, en los dos últimos capítulos se muestran los datos recogidos y se procede a su análisis, terminando con las conclusiones finales.

I.1. Descripción del objeto de estudio

¿Por qué surgen las asíntotas? En este epígrafe situamos su aparición en el espacio y en el tiempo, tratando de situarnos en su propio origen y en los factores y motivaciones que demandaron la existencia del concepto, cuestiones que abordaremos con mayor detenimiento en Anexo I a través del infinito y los límites y la manera en la que quedaron conectados a las asíntotas.

La etimología de la palabra “asíntota” nos remite nuevamente a la antigua Grecia: ἀσύμπτωτος (asýmptōtos), cuyo significado es “aquello que no cae” (a = no; symptōtos = caer junto).

Se atribuye a Menecmo, en torno al 350 a. C., discípulo de Eudoxo y maestro de Aristóteles, el descubrimiento de “La triada de Menecmo”, que incluía las secciones cónicas elipse, parábola e hipérbola. La resolución del problema de la duplicación del cubo, problema iniciado por Hipócrates de Quíos hacia el 400 a. C., le mostró la existencia de una familia de curvas, las secciones cónicas, que se formaban siguiendo el mismo método, a partir de la sección por un plano perpendicular a la generatriz de conos rectos de tres tipos: rectángulos, que daría lugar a la parábola; acutángulos, que haría lo propio con la elipse; y obtusángulos, brindando propiedades esenciales para el conocimiento y construcción de la hipérbola. Es finalmente Apolonio de Pérgamo (s. III a.C.) quien describiría con gran precisión las cónicas en general y la hipérbola en particular en su obra “Las cónicas”.

Apolonio de Pérgamo (s. III a. C.), geómetra griego, fue quien logró un avance clave en el estudio de las cónicas al demostrar que no era necesario el uso de distintos tipos de conos para dar lugar a todas las curvas, indicando que la idea fundamental estaba en la inclinación del plano que seccionaba al cono. Asimismo consideró el cono de dos hojas, con el que se identifica las dos ramas de la hipérbola.

Su obra, “Las cónicas”, en torno al año 200 a.C., es considerada junto a “Los Elementos” de Euclides unas de las obra más relevantes de las matemáticas. Más concretamente, de los ocho libros que componían su obra maestra, es en el libro II donde trató fundamentalmente las propiedades de la asíntota de la hipérbola, siempre desde un punto de vista geométrico con tintes algebraicos cada vez mayores.

Caracterizó la asíntota de la hipérbola por la distancia PM en función de OP y el parámetro correspondiente (Fig. 1), además de ser las bisectrices de los ejes real e imaginario. Tal es su precisión y exactitud en su análisis y descripción de las cónicas que su trabajo ensombrece a los trabajos previos llegando a ser conocido como “El geómetra de la antigüedad”. El “Cono de Apolonio” (Fig.2), figura que reproduce su trabajo para obtener todas las cónicas, se ha erigido como uno de sus símbolos más emblemáticos, residiendo su éxito en el logro de realizar un estudio tan avanzado sin el uso de los métodos avanzados que posteriormente se desarrollarían.

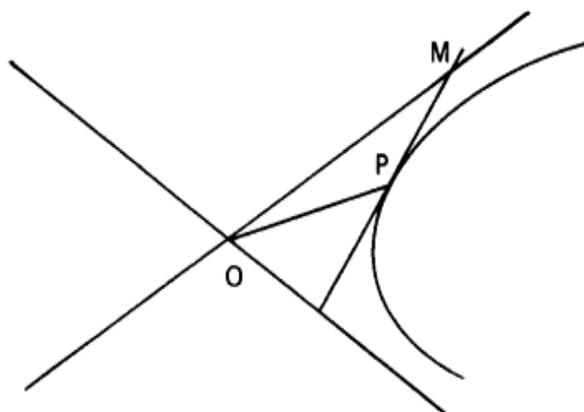


Fig.1 Asíntota de la hipérbola según Apolonio



Fig. 2 Cono de Apolonio

El valor del trabajo de Apolonio se puede apreciar especialmente con la definición de hipérbola que se maneja hoy día, encontrando importantes similitudes entre ambas:

“Lugar geométrico del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante y menor que la distancia entre los focos”.
(DRAE, 2001).

Así, las asíntotas de la hipérbola son aquellas rectas que se acercan cada vez más a la curva según nos vayamos alejando del centro, encaminándonos, en teoría, hacia el infinito. El desarrollo e irrupción del Cálculo y del Análisis (s. XVII-XVIII) hizo que evolucionasen métodos de trabajo en torno al rigor y la minuciosidad, además de la propia Revolución Científica iniciada en la Ilustración (s. XVII) debido entre otros factores a la consolidación de la Física como ciencia moderna y a la necesidad de reducir errores de procedimiento. De esta forma, retomando antiguos estudios, comenzó el cálculo de límites y el análisis de funciones y sus características, estando las asíntotas horizontales entre ellas.

I.2. Planteamiento del problema de investigación

I.2.1. Justificación

Dados los muy diversos aspectos sociales en los que están relacionadas las matemáticas, resulta claro que formen parte de la cultura que transmite el sistema educativo, siendo parte esencial de una formación básica que han de compartir todos sus miembros (Rico, 2012), contribuyendo al desarrollo de las principales dimensiones de la adquisición de las competencias básicas en general y de la competencia matemática en particular.

Los resultados de la prueba de matemáticas de los informes PISA (Programme for International Student Assessment) (PISA, 2004, 2014) publicados el pasado diciembre 2013 muestran que España presenta 484 puntos, aún por debajo de la media de UE (489) y de la OCDE (494). Desde el comienzo de las pruebas en el año 2000, no se ha producido una diferencia significativa del rendimiento del alumnado en la materia, teniendo 485 puntos en el año 2003, sólo un punto más que las más recientes. Por su parte, el informe PIACC (Programme for the International Assessment of Adult Competencies) (PIACC, 2013) muestra en sus últimos resultados que España obtiene sólo 246 puntos, 23 por debajo del promedio de la OCDE y 22 por debajo del promedio de la UE. En dicho informe encontramos que un 68,6% de los adultos españoles muestran competencias para realizar cálculos matemáticos sencillos, mientras que el 24.5% alcanza un nivel superior para interpretar una estadística, una gráfica o resolver un problema de varias etapas.

Entendemos nuestra aportación con este trabajo como un paso a favor del desarrollo óptimo del proceso de enseñanza-aprendizaje, arrojando luz con nuestro análisis sobre las concepciones del alumnado respecto a un contenido matemático determinado, las asíntotas horizontales; y un bloque de contenidos específico, el bloque de Análisis; pudiendo ser útil para la propia Didáctica de la Matemática, punto de donde partimos; así como para la comunidad de educadores matemáticos y la sociedad en general.

La legislación educativa nos brindará respaldo dentro del contexto educativo. Así, la principal legislación de referencia será la siguiente:

-  Ley 2/2006, de 3 de mayo, Orgánica de Educación, LOE.
-  Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

- ✂ Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.
- ✂ Orden de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía.

Más concretamente en los dos últimos documentos legislativos encontramos el bloque de Análisis dentro de las áreas de Matemáticas y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, bloque en el que se inserta el contenido de asíntota horizontal como límite finito en el infinito, en estrecha relación con la representación de funciones.

Los trabajos previos en Didáctica de la Matemática y, más concretamente, en Didáctica del Análisis formalizan una gran referencia para nuestra labor. Nuestras propias inquietudes e intereses y, especialmente, la profunda revisión bibliográfica realizada en las primeras etapas de la investigación fueron sentando las bases del marco teórico seleccionado en nuestro estudio, que empezó a construirse en torno al trabajo de Frege (1998) sobre el sentido y referencia de un término, y la posterior adaptación del triángulo semántico realizada por Rico (2007) para describir el significado de un concepto matemático escolar.

Nuestros principales autores de referencia para la elaboración de este trabajo han sido Fernández-Plaza (2010, 2011) con su estudio sobre las concepciones del alumnado en el límite finito; Kidron (2011), gracias a su trabajo sobre las concepciones del alumnado en relación a la asíntota horizontal; o Presmeg (2006) en relación a los sistemas de representación y la visualización. En un segundo plano, pero no menos importantes, destacamos los “fenómenos de ida-vuelta” en las tesis doctorales de Claros (2010) y Sánchez (2012) y las numerosas aportaciones realizadas por el Dr. Tomás Ortega en los sistemas de representación y la estructura conceptual, entre otros ámbitos. Todo este marco teórico será tratado de manera más exhaustiva en el próximo capítulo.

Además, tuvimos la fantástica oportunidad de someter nuestras ideas y el instrumento desarrollado a un juicio de expertos por parte del Dr. Javier Claros y la Dra. María Teresa Sánchez, por un lado; y del Dr. Tomás Ortega, por otro. Dado que estos investigadores son referencia obligada en la Didáctica del Análisis, la entrevista realizada resultó en todo momento uno de los principales baluartes del estudio.

1.2.2. Objetivos de la investigación

Como punto de partida existía por parte del autor un interés muy importante en trabajar sobre Didáctica del Análisis, al valorar un margen más amplio de aprendizaje para el investigador dentro de este campo. También se contaba con el propósito de tratar un tema sobre el que no se hubiera profundizado en demasía. Una vez que se seleccionaron para trabajar las asíntotas horizontales y teniendo las primeras reuniones con los directores del trabajo fueron surgiendo las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Utilizarán los sujetos de estudio los términos “aproximar, alcanzar, rebasar” (Fernández-Plaza, 2011) para describir los límites finitos en el infinito y las asíntotas horizontales?
- ¿Aparecerán los mismos obstáculos epistemológicos sobre el comportamiento de la función en relación a su asíntota horizontal que detecta Kidron (2011)?
- ¿Cómo expresan los sujetos de estudio sus concepciones acerca de la asíntota horizontal? ¿Qué sentidos brindan al concepto dependiendo de la modalidad que cursen, Ciencias e Ingeniería, Ciencias de la Salud o Ciencias Sociales? ¿Se podrá elaborar perfiles de respuesta para cada una de las modalidades?

En esta línea, los objetivos de nuestro estudio son los siguientes:

O1. Proseguir la propia formación como investigador asumiendo responsabilidades cada vez mayores en cada una de las etapas de la investigación.

O2. Desarrollar un instrumento para recoger las concepciones de los estudiantes acerca de la asíntota horizontal.

O3. Interpretar e interrelacionar las respuestas brindadas por los sujetos para describir con mayor precisión las concepciones adquiridas sobre la asíntota horizontal.

O4. Establecer perfiles de respuesta específicos sustentados en las concepciones de las diferentes modalidades de Bachillerato.

En las conclusiones finales procederemos a valorar la consecución de estos objetivos, así como dar respuesta a las preguntas de investigación que nos formulamos al inicio del estudio.

CAPÍTULO II.

MARCO TEÓRICO

En este capítulo abordaremos el marco teórico de la investigación, siendo el modelo de referencia sobre el que desarrollamos nuestro estudio y a la luz bajo la cual recogemos y analizamos la información pertinente en consonancia al tema de la investigación y a los objetivos de la misma.

Nos adentramos hacia una intensa exploración y análisis de una realidad educativa en el área de matemáticas, más concretamente en el ámbito de las concepciones del alumnado en relación al límite finito en el infinito y, más especialmente, al concepto de asíntota horizontal. Dado que se basa en los estudios acerca de la noción de límite, el presente trabajo pertenece a la línea de trabajo del Pensamiento Matemático Avanzado (Gutiérrez y Boero, 2006).

Ubicándonos en el Pensamiento Matemático Avanzado y, de manera más específica, en la Didáctica de la Matemática y la Didáctica del Análisis, hemos de contar con referencias obligadas en la materia como Cornu (1991), Tall (1992), Vinner (1994) o Blázquez y Ortega (2002), entre otros.

En referencia a la temática concreta, este trabajo se encuentra estrechamente relacionado con trabajos de Fernández-Plaza (2011) y, de manera más tenue, de Kidron (2011), Gray y Tall (1991), Presmeg (2006), Claros (2010) y Sánchez-Compañía (2012), de los cuales iremos destacando sus principales aportaciones en las siguientes líneas.

II.1. Significado de un concepto matemático escolar

Adoptamos la noción de significado de un concepto matemático que propone Frege (1998) a través del triángulo semántico: signo, sentido y referencia (Fig.3). Para su adaptación al contexto escolar, consideramos la adaptación de Rico (2006) proponiendo el significado de un concepto matemático escolar con la terna: estructura conceptual, sistema de representación, fenomenología (Fig.4).



Fig.3 Triángulo semántico. Frege (1998)

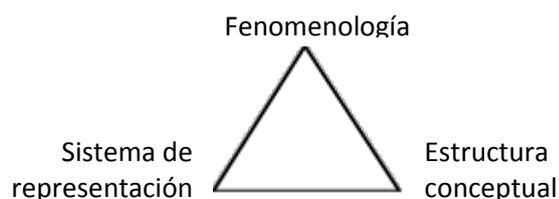


Fig.4 Significado de un concepto matemático escolar

Recogemos algunas definiciones de los vértices del triángulo semántico: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología.

- *Estructura conceptual*

“Es el entramado de contenidos y capacidades en el que interaccionan conceptos, propiedades y sus criterios de veracidad” (Rico, 2012, p.52).

“Es la estructura en la que se incluyen relaciones del concepto con otros conceptos, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como la estructura matemática que dicho concepto configura” (Gómez, 2007, p.27).

- *Sistema de representación*

“Es el conjunto de signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y lo relacionan con otros” (Rico, 2012, p.52).

Son el medio por el cual las personas comunican sus ideas matemáticas (Castro y Castro, 1997).

- *Fenomenología*

“Incluye aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que están en el origen del concepto y le dan sentido (Rico, 2012, p.53).

“Consiste en describir los fenómenos para los que un concepto es el medio de organización, así como la relación existente del concepto con esos fenómenos” (Puig, 1997, p.63).

II.2. Las concepciones

Hemos de diferenciar los términos “concepción” y “creencia”, muy dados a ser confundidos por cierta falta de consenso entre investigadores. Cubero (1996) define concepción como:

“Conjunto de conocimientos que dispone el niño que le sirve en todo momento para dar sentido al mundo en el que vive y para interpretar y predecir al experiencia” (p.11).

Consideramos entonces que la concepción aparece ligada al conocimiento, generalmente posterior a la instrucción. Por su parte, las creencias cuentan con un grado inferior de consenso (Da Ponte, 1999) y se presentan más ligadas a las intuiciones.

Relativo a las concepciones, Tall (1991) advierte sobre el énfasis puesto en la enseñanza de procedimientos en la educación secundaria, lo que puede dificultar el posterior desarrollo del bloque de análisis, estableciéndose en el alumnado una concepciones espontáneas (Cornu, 1991) que son las imágenes, intuiciones y experiencias que los alumnos poseen que pueden dar lugar a un sentido matemático fundamentado sobre concepciones erróneas, por ejemplo, aquella de “la función nunca puede cortar a la asíntota” o “se acerca infinitamente pero nunca llega a tocar”.

El carácter interdisciplinar de toda tarea matemática se hace patente apreciando nociones de psicología, sociología, pedagogía...que influyen directa o indirectamente en cómo perciban el alumnado los estímulos matemáticos del exterior; y, sobre todo, cómo los procese. Penalva (2001), citado por Claros (2010), insiste en el uso del tándem uso-comprensión para evitar la aparición de fenómenos como la compartimentación (Vinner, 1994) y desdoblamiento (Duval, 1983) que bien se pueden asociar con la debilidad del procepto, fundamentado por la interdependencia proceso-concepto. La compartimentación la define Vinner (1994) como la no relación de dos piezas de conocimiento que son conocidas por el sujeto, sería precisamente lo que Blázquez y Ortega (2001) señalan con la siguiente afirmación:

“El aprendizaje del concepto de límite choca con las dificultades del cambio de sistema de representación” (p. 231).

Por otro lado, Duval (1983) describe el fenómeno de desdoblamiento como la dificultad que supone separar distintos significados que están asociados a un mismo concepto. Para nuestro estudio, pondríamos el ejemplo de las dificultades que muestra el alumnado en el análisis de la asíntota horizontal en situaciones reales de la vida cotidiana, enfrentándose a otro tipo de cuestiones en el caso de precisar su análisis desde el punto de vista algebraico. Someramente, operar con el mismo concepto en situaciones tan distintas provoca una desconexión entre ambas actuaciones, debilitándose el propio concepto matemático en sí.

II. 3. Objetos matemáticos vistos como objeto-proceso

En el trabajo de Kidron (2011) sobre las concepciones de un grupo de alumnos en relación a la asíntota horizontal muestra una tendencia de los sujetos a identificar la noción de límite con un proceso frente a un resultado, haciendo especial hincapié en las importantes aspectos que se dejan en un segundo plano siguiendo estrictamente esta línea, los cuales acarrearán finalmente muy diversos obstáculos epistemológicos.

Sobre esta dicotomía proceso-concepto observamos el trabajo de Gray y Tall (1991) como un excelente soporte para ir perfilando de manera más precisa nuestras ideas. En su estudio, ambos autores tratan la dualidad proceso-concepto a través del paso del primero al segundo. Reflexionan acerca de la ambigüedad del lenguaje en la expresión matemática advirtiendo de la utilización de un mismo simbolismo para la representación de un concepto y un proceso, por ejemplo, con la suma de números naturales. Esta misma cuestión ocurre con el concepto de asíntota horizontal, ya que se representa de la misma manera un resultado a nivel numérico-algebraico y un proceso infinito como sería el análisis de un límite finito en el infinito. El continuo vaivén entre proceso y concepto les hace describir un nuevo término: el procepto, que lo describen como:

“We will refer to the combination of process and concept represented by the same symbol by the portmanteau name “procept”. A procept is first met as a process, then a symbolism is introduced for the product of that process, and this symbolism takes on the dual meaning of the process and the object created by the process” (Gray y Tall, 1991, p.120).

II.4. Representaciones

Los principales autores coinciden en brindar al sistema de representación un papel relevante en el dominio del concepto matemático. Por ejemplo, Castro y Castro (1997) destacan:

“Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades” (p. 103).

Por su parte, Blázquez y Ortega (2001) consideran clave el uso de cuatro sistemas de representación para la enseñanza del límite: algebraico, numérico, gráfico y verbal; mismos sistemas muy tenidos en cuenta en la elaboración de nuestro instrumento. Además, como así también se muestra en el estudio, somos conscientes de que cada sistema resulta ideal para según qué partes del concepto. Los autores citan a Romero (2000) para señalar que la comprensión se caracteriza a partir de una serie de actividades asociadas a los sistemas de representación, como:

- *Formación de representaciones identificables en un sistema dado.* Sería la creación de representaciones a partir de un sistema que facilite el manejo fluido y el desempeño óptimo en relación al concepto matemático.
- *Transformación dentro de un sistema de representación.* Por ejemplo, toda transformación realizada para realizar el cálculo de límites de manera algebraica aplicando la regla de L'Hôpital con el fin de averiguar o no la existencia de asíntota horizontal.
- *Traducción entre sistemas de representación.* Los autores la sitúan como una de las principales debilidades de los alumnos. Sería dominar los sistemas de representación de forma aislada e independiente, apareciendo las dificultades cuando tratásemos de emplear la información obtenida en un sistema para otro. Esto ocurriría al tratar de describir situaciones de la vida real, por ejemplo, en la que aparezca la asíntota horizontal a través de la definición formal de límite.

- *Cristalización.* Es la conexión fluida entre los sistemas de representación. Se entiende que a mayor desempeño en el concepto, mayor habrá sido la cristalización entre los principales sistemas de representación relevantes.
- *Modelización.* Supone utilizar estructuras creadas por el sujeto para dar respuesta a diferentes situaciones. Por ejemplo, responder algunas preguntas sobre alguna situación real de una asíntota horizontal descrita únicamente de manera verbal.

Hitt (2003) también resalta el valor de utilizar diferentes sistemas de representación y no restringirse únicamente al sistema de representación algebraico en la enseñanza del límite, sugiriendo el manejo del sistema de representación gráfico y tabular; y, en especial, del producto de la interacción continua entre ellos.

Aparte de su profundo trabajo con los sistemas de representación, Blázquez y Ortega (2002) proponen además una nueva definición del límite como aproximación óptima, basada en la definición formal de límite ϵ - δ , aunque mucho más accesible y operativa para la etapa de educación secundaria y bachillerato.

Son algunos de los propios sujetos en una de las tareas del cuestionario, tras ser preguntados en el cuestionario acerca de un modelo real en el que una muestra va reduciéndose a la mitad, quienes determinan su valor límite 0 en el ∞ , alegando que sería tan pequeña que sería su mejor aproximación. Lo llamativo de este detalle es que estos alumnos no han sido instruidos ni en esos términos ni en la definición formal de límite, por lo que podría ser un vínculo muy sólido entre la matemática escolar y el pensamiento matemático avanzado.

Este muy interesante hecho refuerza las ideas de Cornu (1991) de comenzar a trabajar la enseñanza del límite desde el conocimiento de las ideas previas, a las que asigna el nombre de concepciones espontáneas, coincidiendo en este aspecto con otros expertos del mundo de la pedagogía y la psicología.

El papel de la representación es de tal calibre que hemos de plantearnos qué procesos están implicados cuando se visualiza una información, sea cual sea el sistema de representación en el que aparezca. En este sentido, Bishop (1993), visto en Presmeg (2006), describe dos acciones principales en este proceso: la interpretación de la

figuración figural (IFI) y el procesamiento visual (VP). Lo que tratamos de averiguar en nuestro estudio es, cuando un sujeto se encuentra ante una representación gráfica de una función, qué información procesa un sujeto y cómo la interpreta: si analiza sólo $+\infty$, si analiza sólo $-\infty$, si analiza ambos extremos, si presta atención al resto del dominio, cómo reacciona ante situaciones no esperadas como la intersección de la asíntota horizontal por parte de la función, entre otras.

Apreciamos una conexión entre la descripción que realiza Bishop (1983) y el triángulo semántico de Frege (1998), en especial en el sentido que se le atribuye al concepto con el que se esté trabajando. De cierta manera sería analizar el tratamiento que un sujeto brinda a un concepto determinado en una dimensión de la referencia de la que dispone, concepto, y del sentido, objeto, que le brinda a través del sistema de signos que tenga a su disposición, el cual le facilite el máximo desempeño en las operaciones realizadas dentro del concepto de asíntota horizontal, ya centrándonos en nuestro caso. Lo que se pretendería sería la descripción, de la manera más precisa posible, del pensamiento que expresan los sujetos (Rico, 2012) a través de sus representaciones, tratando de confrontar las respuestas aportadas desde las distintas modalidades de Bachillerato.

Cuando una persona crea una disposición espacial, incluyendo una inscripción matemática, hay una imagen visual en la mente de la persona guiando esta creación. Por tanto, se entiende que la visualización incluye tanto procesos de construcción como de transformación de imágenes de manera visual y mental (Presmeg, 2006).

Por ejemplo, dentro del cuestionario desarrollado, en una de las tareas se les demanda que valoren la existencia de asíntota horizontal a partir de una serie de representaciones gráficas. El proceso de transformación de imágenes lo apreciamos en la necesidad por parte de los sujetos de prolongar mentalmente la curva más allá del dominio en el que aparece para comprender y describir el comportamiento de la misma durante el análisis que realiza en $+\infty$ y $-\infty$.

Podríamos entender este mismo ejemplo como un problema de generalización, ya que a través de una ley, van formalizándose los términos de una sucesión-función. Sin embargo, una investigación realizada por Presmeg (2006) mostró que, para un grupo de sujetos determinado, las principales dificultades que presentaban se encontraban relacionadas con problemas de generalización.

Por otro lado, detectamos el proceso de construcción en la segunda tarea, por ejemplo, cuando se les pide en el instrumento que expliquen qué entendían en la siguiente expresión: “Una función $f(x)$ tiende a L ($L \in R$) cuando x tiende a infinito”.

El proceso de construcción en este ejemplo lo encontramos en el momento en el que el sujeto recibe la información, de forma verbal, y reconstruye un ejemplo que cumpla tales condiciones. Entendemos que ese ejemplo aparecerá bien antes, bien después, de la determinación de la existencia o no de asíntota horizontal, es decir, el sujeto recordará un ejemplo que cumpla tales condiciones, estando, a su vez, este ejemplo ligado al concepto de asíntota horizontal para su conclusión definitiva; o bien, verificar la información también de forma verbal para que después aparezca un ejemplo que represente a tal información.

Es un hecho irrefutable la necesidad de desligar la noción de representación con la única representación gráfica, pues es sustancialmente más profunda y va mucho más allá. Respecto a qué abarca la representación, Kaput (1987) señala lo siguiente:

“The concept of representation involved the following components: a representational entity, the entity that it represents, particular aspects of the representational entity, the particular aspects of the entity it represents that form the representation; and finally, the correspondence between the two entities” (p. 23).

Analizamos todos estos elementos dentro de la perspectiva de la asíntota horizontal, nos centramos en una de las tareas del cuestionario desarrollado para el estudio en la que se propone a los sujetos un modelo real en el que aparece la asíntota horizontal. Del mismo modelo se le ofrece información de tipo verbal, gráfico, tabular y simbólico (Black, 2000) con la que podrían determinar la existencia de asíntota horizontal.

- *Entidad representada*: El concepto de asíntota horizontal.
- *La entidad que representa*: Sistema de representación simbólico (por ejemplo).
- *Aspectos particulares de la entidad representada*: cálculo de límites, límites finitos en el infinito, procesos infinitos...

- *Aspectos particulares de la entidad que representa la forma de la representación:* lenguaje algebraico para el cálculo de límites, capacidad de generalización a desempeñar para “simular” cómo evoluciona la función,...
- *Correspondencias entre la entidad representada y la entidad que representa:* en funciones racionales, el límite de la función será un número real siempre y cuando el grado del numerador no sea superior al del denominador,...

Presmesg (2006), describe cinco tipos de imágenes distintas según la manera en la que relacionen estos elementos: imágenes concretas, imágenes cinéticas, imágenes dinámicas, fórmulas e imágenes de patrones. Este amplio elenco de imágenes y su fuerte asociación con los modelos de concepción del límite que describe Sierpiska (1985) (potencialista, potencialista-actualista, frontera e infinitesimal), vuelve a arrojar evidencias sobre las potencialidades de la representación para el concepto de límite en general y de asíntota en particular.

II.5. Fenómenos y situaciones

Finalmente la fenomenología muestra el tipo de pensamiento que expresa una acción determinada. Claros (2010) y Sánchez-Compañá (2012) cuenta con trabajos de fuerte relevancia en este sentido. Ambos autores describen una serie de fenómenos producidos tanto en sucesiones como en función en relación al cálculo de límites, centrándose en el límite de una sucesión y el límite finito en un punto, respectivamente.

Uno de estos fenómenos que describen son los fenómenos de ida-vuelta para sucesiones; o bien, para límite finitos en un punto. Haciendo una pequeña adaptación de sus estudios en nuestro trabajo, lo que esperamos es tratar de crear un escenario en el que el sujeto valore desde qué momento podemos considerar de manera formal la existencia de asíntota horizontal, hecho que ya apreciamos desde la propia definición con fuertes conexiones con la definición rigurosa de límite, la conocida como ϵ - δ (Claros, 2010). Este fenómeno ida-vuelta consistiría en una retroalimentación continua entre los valores de la abcisa, para ϵ fijado, y los propios valores de las imágenes. En definitiva, todo trabajo relacionado con el pensamiento en matemáticas debe aglutinar un buen número de factores debido a su complejidad y a la infinidad de tareas para dar respuesta de forma más sustentada a las distintas demandas del entorno.

II.6. Antecedentes

II.6.1. Concepciones de estudiantes acerca del límite finito en un punto

Bajo esta perspectiva, Fernández-Plaza (2011), estudiando las concepciones de los estudiantes de bachillerato acerca del límite de una función en un punto, detectó una serie de términos que aparecían en las manifestaciones del alumnado dentro del límite finito de una función en un punto, como “aproximarse”, “tender”, “alcanzar”, “rebasar” y límite; tal y como ya habían apuntado anteriormente otros autores y autoras (Cornu, 1991; Monaghan, 1991; Cottrill, 1996; Blázquez, Gatica y Ortega, 2009). Puesto que son punto de partida de nuestro objeto de estudio, describimos y matizamos para nuestro caso, siempre que sea necesario, todos estos términos.

- *Aproximarse*

Del diccionario de uso del español de María Moliner (1998) recoge la conexión del término con “parecerse”, mientras que del Oxford (2011) destaca el término clave “acercarse”. Ambos dos se presentan muy en la línea del trabajo desarrollado por Blázquez, Gatica y Ortega (2009) en la que diferencian en esencia los términos “aproximar” y “tender”, mismo término que también abordaremos a continuación. Estos autores ponen el ejemplo de la sucesión 1.1, 1.11, 1.111, ... señalando que se aproxima a 100, pero no tiende a 100, aspecto que acentúa la relación existente entre “aproximación” y “acercamiento”.

En definitiva, entenderemos una referencia a “aproximarse”, aparte de cuando se mencione de manera directa, siempre que se pronuncien los sujetos en términos de “acercamiento”, sin mayor mención a un valor determinado, cuestión que nos conduciría a la tendencia.

- *Tender*

De manera general, se podría considerar la tendencia como un paso más allá de la aproximación, incluyéndose la dirección hacia el límite además de los diversos acercamientos. En el DRAE (2001) encontramos las dos siguientes acepciones para el término:

“Alargar algo aproximándolo hacia alguien o hacia otra cosa”.

“Mat. Dicho de una variable o de una función. Aproximarse progresivamente a un valor determinado, sin llegar nunca a alcanzarlo”.

Paradójicamente, entendemos más adecuada la acepción no específica para las matemáticas (Mat.), puesto que en la que dedica a esta disciplina científica incluye el matiz “sin llegar nunca a alcanzarlo”. Este detalle corrobora los resultados de Monaghan (1991), Cornu (1991) y Tall (1992); en los que señalan que una de las dificultades que presenta el concepto de límite tiene su origen en el lenguaje. Mismo lenguaje que no es coherente con la estructura conceptual del concepto de asíntota y la posibilidad real de que la asíntota horizontal pueda ser alcanzada por la función (Fernández-Plaza, 2011), incluso en un número ilimitado de ocasiones (Kidron, 2011).

- *Alcanzar*

El investigador describe la alcanzabilidad o no del límite si el valor límite es imagen del punto en el que se estudia el límite (Fernández-Plaza, 2011). Por su parte, Kidron (2011) analiza la alcanzabilidad de la propia asíntota horizontal.

Siguiendo estas directrices asociaremos la alcanzabilidad a cualquier tipo de intersección entre la función y la asíntota horizontal aunque no haya rebasabilidad, es decir, que la propia asíntota horizontal actúe de cota superior o inferior de la función.

Las propias características del término nos permiten identificarlo tanto en la representación gráfica como en la verbal, hecho que no ocurre con el término “aproximar”, muy difícilmente deducible en el sistema de representación gráfico.

- *Rebasar*

Según Fernández-Plaza (2011):

“Un límite es rebasable si nos podemos aproximar tanto como queramos con valores de la función mayores o menores que el límite, es decir, superando o disminuyendo la cota establecida por el límite, independientemente de si es alcanzable o no”. (p.18).

Resulta muy preciso el apunte que realiza Fernández-Plaza al disociar rebasabilidad y alcanzabilidad, entendiendo que el único hecho de ser rebasable no implique también ser alcanzable, como ocurre en la función $f(x) = \frac{1}{x}$, con asíntota horizontal en $y=0$.

En este sentido, diremos que una asíntota horizontal es no rebasable si además resulta ser cota superior o inferior de la función. Por ejemplo, la función $f(x) = e^{-x^2}$ (Campana de Gauss) cuenta con una asíntota horizontal en $y=0$ que es no rebasable, puesto que además es cota inferior de la función. Por tanto, la no rebasabilidad la vamos a relacionar con “delimitar”.

- *Límite*

Apreciamos un muy importante acercamiento del término “límite” con “tendencia”, estando además relacionado con la no rebasabilidad, diferenciándose unos y otros por sutiles matices de configurarse un término u otro como el núcleo de la descripción brindada por el sujeto.

El análisis conceptual del término en diversas fuentes nos hace reflexionar nuevamente acerca de las dificultades del término debido al papel del lenguaje, ya que la nota predominante es mostrar el límite como frontera irrebachable, como así indica Fernández-Plaza (2011).

II.6.2. Concepciones acerca de la asíntota horizontal

Kidron (2011) estudió las concepciones del alumnado en relación a la asíntota horizontal. Tal y como narra en su artículo, su trabajo comenzó casi de forma casual tras preguntar a sus alumnos de Cálculo si una función podría cortar a la asíntota horizontal. El 86% de un grupo de 50 sujetos respondió de forma negativa. Tras ese momento, les propuso la función $f(x) = 2 + \frac{\text{sen}x}{x}$, que interseca a su asíntota horizontal $y=1$ en infinitas ocasiones, para que analizaran la posible existencia de la asíntota horizontal.

Una vez determinado por la mayoría que se trataba de una asíntota horizontal, algunos sujetos seguían mostrando dificultades para apreciar este detalle justificando que se encontraba continuamente oscilando con valores superiores e inferiores a la hipotética asíntota horizontal sin dirigirse a un valor determinado en el ∞ .

Desarrolló una experiencia con una alumna en la que va preguntándole acerca de la asíntota horizontal y el posible comportamiento de la función respecto a ella. Plantea tres tareas con el propósito, en sus propias palabras, de “create conflicts” [Crear conflictos] (Kidron, 2011), proponiendo ejemplos contradigan lo dicho previamente por la alumna. Así, la primera función que propone, $f(x) = \frac{2-x^2}{1-x^2}$, nunca corta a la asíntota horizontal; mientras que la segunda, $f(x) = \frac{(x+3)^2}{x^2+6}$; y la tercera, $f(x) = 2 + \frac{\text{sen}x}{x}$, cortan a la asíntota horizontal en una y en infinitas ocasiones, respectivamente.

Va registrando todo el análisis que realiza el sujeto, tanto desde el punto de vista oral como escrito, produciendo todo este procedimiento reflexiones tan interesantes por parte de la alumna, como la siguiente:

“Why is it a problem if it intersects the asymptote?” (p.1269)

Desde ese preciso instante, posiblemente, entendimos en profundidad en título de su trabajo: “*Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote*”, a través del afán del autor de saber la manera en la que los estudiantes operaban con la noción de asíntota horizontal, haciendo especial hincapié en la tendencia por parte del alumnado a identificar la noción de límite con un proceso frente a un resultado, además de la idea de ir “acercándose a”, asociada a “se acerca infinitamente pero nunca llegar a tocar”, en lugar de un número al que se está aproximando (Kidron, 2011).

Bajo esta idea, desarrollamos una tarea dentro del cuestionario tratando de albergar toda la casuística posible en relación a la asíntota horizontal esperando que, directa o indirectamente los sujetos de estudio se enfrenten a obstáculos epistemológicos similares a los que aparecen en el estudio de la investigadora israelí.

CAPÍTULO III.

MARCO METODOLÓGICO

La metodología describe los pormenores de investigación tratando, en la medida de lo posible, de visibilizar aquellos detalles, por pequeños que sean, que tuvieron repercusión para la realización de nuestro estudio. Esta tarea amplia, profunda y, sobre todo, activa, muy posiblemente sea la que mayor permanencia tenga en el tiempo y en el espacio de todas las etapas de la investigación.

III.1. Desarrollo de la investigación

El presente trabajo dio sus primeros pasos en octubre del año pasado con una serie de reuniones con los directores del proyecto. Desde el primer momento, las intenciones fueron claras: trabajar sobre alguna cuestión sobre la que aún no se hubiera indagado demasiado.

Se propuso el tema de las asíntotas y se realizó una revisión bibliográfica sobre qué y cómo se había trabajado en torno a las mismas. Verdaderamente, al principio encontramos muy pocas referencias que se ocupasen exclusivamente de las asíntotas, si acaso el trabajo de Kidron (2011) era el único. Sin embargo, este mismo trabajo, titulado “Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote”, nos acentuaba la necesidad de comenzar a construir nuestro trabajo desde la noción de significado. A este detalle debíamos unir la necesidad de completar el estudio iniciado por Fernández-Plaza (2010, 2011) en el ámbito del límite de una función en un punto, por lo que paulatinamente iba tomando forma en torno a la asíntota horizontal y al límite finito en el infinito.

Se crearon hasta nueve versiones del cuestionario, las cuales se fueron modificando tras diversas reuniones junto a los directores del trabajo. Hay dos momentos claves de cara a la consolidación de la versión final. El primero de ellos fue la selección del centro, el IES Salvador Rueda en Málaga, y las grandes facilidades brindadas por el nexo principal del investigador con el centro, el profesor D. Eduardo Díaz-Miguel, del que todo momento se recibió un trato exquisito, al igual que del resto de compañeros y compañeras con los que se trabajó, D. Cesáreo Flores, Dña. Ana Isabel Biedma, Dña. Francisca Becerra. Este magnífico trato ayudó a que finalmente se decidiera crear una versión del cuestionario para la modalidad de Ciencias en sus dos itinerarios, Ciencias y Tecnología, y Ciencias de la Salud; y otra para la modalidad de Ciencias Sociales, con el afán de contrastar posibles concepciones entre el alumnado de ambas ramas del conocimiento.

Por otro lado, el cuestionario fue sometido al juicio de expertos por parte de referencias contrastadas en el campo de la Didáctica del Análisis como Dr. Tomás Ortega, de la Universidad de Valladolid; Dr. Francisco Javier Claros, de la Universidad Complutense de Madrid; y Dra. María Teresa Sánchez Campaña de la Universidad de Málaga. Los tres investigadores realizaron una crítica muy constructiva al cuestionario aportando ideas sólidas para perfilar el mismo al son del rigor científico. Finalmente se dio lugar a la implementación del cuestionario, al análisis de datos y a la propia elaboración del presente Trabajo Fin de Máster.

Tabla 1-Propuesta de trabajo

PROPUESTA DE TRABAJO				
	Primeras reuniones	-Conocimiento de las inquietudes del investigador -Acercamiento al estado de la cuestión por los directores del trabajo		
	Revisión bibliográfica inicial (MathEduc-Google Scholar)	-Búsqueda de trabajos relacionados realizados previamente -Análisis del origen y evolución del término		
Decisión de trabajar sobre la asíntota horizontal				
Revisión bibliográfica	Reuniones con los directores del trabajo	Estructura conceptual	-José Antonio Fernández-Plaza -Ivy Kidron	
		Selección del marco teórico	-Tomás Ortega -Norma Presmeg	
			Fenomenología	-Fco. Javier Claros
			Entrevistas con D. Eduardo Díaz-Miguel (desde enero)	Se decide crear una versión para Ciencias de la Salud y otra para Ciencias Sociales
		Elaboración del cuestionario	Juicio de expertos (I) 21/2	Dra. María Teresa Sánchez Dr. Fco. Javier Claros
			Juicio de expertos (II) 25/2	Dr. Tomás Ortega
			Versión IX definitiva del cuestionario	

Implementación del cuestionario	Grupo Ciencias y Tecnología	Docente del grupo	D. Cesáreo Flórez	14/3, 11:45
	Grupo Ciencias de la Salud		D. Ana Isabel Biedma	14/3, 8:15
	Grupo Ciencias Sociales A		D. Eduardo Díaz- Miguel	14/3, 12:45
	Grupo Ciencias Sociales B		Dña. Francisca Becerra	14/3, 13:15
Entrevistas con los profesores 27/3				
Análisis de los cuestionarios				
Redacción del TFM				

III.2. Tipo de estudio

La escasez de resultados previos relevantes observada en la revisión bibliográfica inicial iba configurando una investigación de alcance exploratorio. Según Hernández (2010), las principales claves de un estudio exploratorio son que investigan problemas poco estudiados, realizan indagaciones desde una perspectiva innovadora o ayudan a identificar conceptos promisorios, es decir, aquellos que cuentan con alta potencialidad para producir más y mejores resultados. En definitiva, preparan el terreno para nuevos estudios. Además, siguiendo al mismo autor, también hemos de considerarle un alcance descriptivo, en el sentido del propio análisis de las concepciones del alumnado respecto a la asíntota horizontal, qué saben y, en especial, de qué manera manejan aquello que saben; hecho que produce una consideración del fenómeno estudiado y de sus componentes.

Esta misma naturaleza del estudio arrojaba luz sobre la necesidad de utilizar la “Teoría Fundamentada” (Grounded Theory). Sin embargo, debíamos matizar alguna de sus principales características puesto que nos basamos en un marco teórico concreto, hecho que no acontece en la definición principal de la teoría:

“La Teoría Fundamentada propone construir teorías, conceptos, hipótesis y proposiciones partiendo directamente de los datos obtenidos en el campo de estudio, y no de supuestos a priori, de otras investigaciones o de marcos teóricos existentes” (Cuñat, 2007, p.1).

La teoría fue desarrollada a mediados de los 60 por Glaser y Strauss, basándose en generar o descubrir modelos explicativos sobre determinados fenómenos sociales cuyos postulados teóricos se encuentran apoyados en el análisis sistemático y posterior interpretación de los datos recogidos (Arraiz, 2014).

Finalmente, el principal método de investigación que emerge a lo largo de todo el estudio es una metodología de encuestas (Gambara, 2002) tanto por su carácter descriptivo como, principalmente, por la no existencia, luego ni control, de la variable dependiente e independiente. De manera más específica, determinamos que nos presentamos ante un diseño de investigación con encuestas de carácter transversal (León y Montero, 2003).

III.3. Sujetos, ciclo y nivel curricular

Nos situamos en el IES Salvador Rueda, en Málaga capital. Es un centro de grandes dimensiones que cuenta con más de 800 alumnos y alumnas atendiendo las etapas de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Formación Profesional. Se trata de un centro contrastado en la ciudad, aparte de por sus grandes dimensiones, por los grandes resultados que generalmente presenta su alumnado en las pruebas de acceso a la universidad y por el gran desarrollo de los proyectos educativos del centro, como el proyecto “Escuela: Espacio de Paz”. El nivel socioeconómico es medio-bajo dentro de un contexto muy heterogéneo con diversas nacionalidades y ocupaciones laborales.

Los cuestionarios se pasaron en el mes de marzo a cuatro grupos de 2º de Bachillerato, dos grupos de Ciencias, uno de Ciencias y Tecnología y otro de Ciencias de la Salud; y otros dos de Ciencias Sociales. Cada grupo contaba con un docente diferente. Finalmente se dispuso una muestra de 70 sujetos distribuidos de la siguiente forma:

Tabla 2-Distribución de los sujetos de estudio según modalidad, grupo y sexo

TOTAL	MODALIDAD	GRUPO	SEXO		
70	Ciencias	1CA	14	♂	14
			0	♀	0
		1CB	6	♂	6
			22	♀	16
	Ciencias Sociales	2SA	12	♂	8
			4	♀	4
		2SB	8	♂	8
			22	♀	14

La obtención de estas 70 unidades de análisis no se efectuó bajo normas probabilísticas de selección; por lo tanto, estamos ante un muestreo no probabilístico, en el que prevaleció únicamente criterios personales del investigador para dar lugar a una muestra intencional o de conveniencia.

En el momento de la aplicación del instrumento, todos los sujetos ya habían recibido formación del concepto de asíntota horizontal dentro del bloque de Análisis tanto para Matemáticas II como para Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales (RD 1467/2007).

III.4. Revisión bibliográfica

Resultaba claro que debíamos acometer una profunda revisión bibliográfica tanto para corroborar nuestra sospecha de las pocas referencias previas existentes como por descubrir qué se había trabajado en esta línea. Tratando de seguir un procedimiento ordenado, adecuado y, sobre todo, contrastado, empleamos el análisis cuantitativo y temático sobre el que han trabajado diversos autores como Bracho, Maz, Jiménez, Adamuz, Gutiérrez y Torralbo (2010), a partir de la tesis doctoral del primer investigador (Bracho, 2010).

De las 16 variables definidas en la Mathematics Education Subject Classification (MESC), seleccionamos aquellas variables más relacionadas con nuestro trabajo y con los objetivos de nuestra investigación:

C: Psicología de la Educación Matemática
D: Educación e Instrucción en Matemáticas
E: Fundamentos de las Matemáticas
I: Análisis
M: Modelos Matemáticos, Matemáticas Aplicadas.

Tras tantear diversas opciones, finalmente escogimos la base de datos MathEduc como principal opción, apoyándonos también en la revisión dentro de otras bases de datos como Google Scholar, eligiendo tanto una como otra por ser de igual manera ampliamente aceptadas por la Didáctica de la Matemática como utilizadas en las principales investigaciones de esta disciplina.

Los términos clave que usamos en este recorrido fueron: “Horizontal asymptote”, “Asymptote” y “Finite limits at infinite”; así como sus traducciones al castellano “Asíntota horizontal”, “Asíntota” y “Límites finitos en el infinito”. Aparte de encontrar

una serie de estudios de modelos reales relacionados con la asíntota horizontal, descubrimos el trabajo de Kidron (2011) que, hasta el momento, desconocíamos.

El trabajo de Kidron (2011) se ajustaba muy bien a nuestras pretensiones; tal es así que contaba con la siguiente clasificación: “I24, I25, C34, C35”; es decir, que estaba relacionado con las variables “C: Psicología de la Educación Matemática” e “I: Análisis”. A este gran descubrimiento le añadimos el trabajo de Presmeg (2006) sobre la visualización y los sistemas de representación, además de los trabajos de Fernández-Plaza (2010, 2011), Blázquez y Ortega (2001), Arce y Ortega (2014) para configurar el núcleo fundamental de nuestro marco teórico.

III.5. Elaboración del instrumento de recogida de información

Se elaboró un cuestionario de seis preguntas abiertas basadas principalmente en el marco teórico seleccionado y en el juicio de expertos. Puesto que la interpretación de las concepciones se realiza desde el marco de la noción de significado antes descrita, en el cuestionario aparecen cada uno de los vértices del triángulo semántico: estructura conceptual, sistema de representación y fenomenología. A continuación presentamos una tabla resumen de cada una de las tareas propuestas y los principales aspectos con los que se relaciona:

Tabla 3-Resumen analítico de las tareas del cuestionario

Nº	ENUNCIADO	Vértice del triángulo semántico con el que más se relaciona
1	Explica con tus palabras lo que entiendes por asíntota horizontal	Estructura conceptual
2	Dibuja aproximadamente una función que cuente con alguna asíntota horizontal, la cual se ajuste de la manera más precisa posible a lo que entiendes del concepto	Sistema de representación
3	Explica con tus palabras qué entiendes en la siguiente expresión: Una función $f(x)$ tiende a L ($L \in \mathbb{R}$) cuando x tiende a infinito	Estructura conceptual
4	Para cada gráfica, valora la posibilidad de que exista asíntota horizontal y, en el caso de que creas que exista, el posible comportamiento de la función respecto de su hipotética asíntota horizontal	Sistema de representación

*Se presentó un modelo en el que aparecía la asíntota horizontal utilizando los sistemas de representación verbal, simbólico, gráfico y tabular. Se crearon dos versiones, una por itinerario.		
5	a) ¿Aprecias la existencia de asíntota horizontal en alguna de sus representaciones?	Sistema de representación
	b) ¿Cómo se podría justificar tu respuesta utilizando el cálculo de límites?	Estructura conceptual
	c) ¿Qué lenguaje (verbal, gráfico, tabular o simbólico) te aporta más información de cara al posible cálculo de la asíntota horizontal?	Sistema de representación
	d) ¿Se podría considerar algún momento exacto en el que el medicamento haya desaparecido del torrente sanguíneo con total seguridad?	Fenomenología
6	Describe una situación propia de otra asignatura que requiera el uso de asíntotas horizontales para su interpretación. Recuerda todo lo que sabes de otras asignaturas como economía, física, química, historia, geografía...	Fenomenología

El instrumento desarrollado está compuesto por seis tareas en sus dos versiones, una para Ciencias y otra para Ciencias Sociales. La única diferencia entre ambas versiones la encontramos en la tarea número 5, proponiéndose modelos los más cercanos posible a sus modalidad, concretamente sobre el modelo de semidesintegración radioactiva, para Ciencias; y sobre la concentración de un medicamento en sangre, para Ciencias Sociales.

III.6. Procedimiento de aplicación del instrumento

El cuestionario se implementó el 14 de marzo de 2014. El procedimiento para cada uno de los cursos fue muy parecido, siendo la principal diferencia entre ellos la especial insistencia en los últimos grupos en aquellas cuestiones que, presuntamente, estaban teniendo mayores problemas, a raíz de la breve revisión de las respuestas de los primeros sujetos. Las principales dificultades que detectamos fueron en la tercera pregunta con el símbolo de “perteneciente a” (\in) y en la sexta pregunta al limitarse únicamente, por lo general, a señalar la asignatura en la que creían que aparecía la asíntota horizontal, en lugar de incluir algún ejemplo elaborado, como así se le indicó en las instrucciones previas a la realización del cuestionario.

Como así pronosticamos en reuniones previas, la mayoría de los sujetos realizaron el cuestionario en 30 minutos, disponiendo de más tiempo en los casos que fue preciso. El trato por parte de los docentes fue excelente, dejando total libertad al investigador para

realizar todas las funciones relativas a la realización del cuestionario, dando instrucciones previas y aclarando dudas que fueran surgiendo en su transcurso.

Una vez repartido el cuestionario se procedió a la lectura de las instrucciones previas y de cada una de las preguntas, insistiendo en la necesidad de que justificaran al máximo sus razonamientos y aclarando aquellos puntos que no quedaron suficientemente claros. Además, se hizo especial énfasis en que no se trataba de un examen y que contaba con un carácter anónimo y confidencial, nunca sabiendo sus docentes las respuestas exactas que escribieran cada uno de ellos de forma individual.

III.7. Entrevistas con los docentes

Dos semanas después de pasar los cuestionarios, tuvo lugar las entrevistas con los docentes. En ellas, estuvimos dialogando sobre la organización y disposición de las clases. Como era de esperar, la realización de la Selectividad en el próximo mes de junio priorizaba buena parte de su programación didáctica.

Se prepararon entrevistas semiestructuradas de carácter individual durando todas entre diez y quince minutos. Los principales temas que se trataron fueron los siguientes:

- Temporalización de la clase
- Recursos utilizados
- Trabajo realizado con la asíntota horizontal e impresiones al respecto.

La temporalización general de una sesión era bastante similar en todos, dejando una primera parte para corregir la tarea del día anterior, una pequeña parte de explicación y el tiempo restante para realizar ejercicios sobre lo tratado. Si incluyéramos la corrección de ejercicios en la parte práctica, tendríamos que, de una sesión de sesenta minutos, dedican entre quince y veinte minutos a explicación y lo restante para ejercicios.

En el momento de la entrevista, el alumnado ya había sido instruido en las asíntotas horizontales, insistiendo los docentes que, en relación a este contenido, 2º de Bachillerato servía para repasar lo explicado en el curso anterior. Por otro lado, en los grupos de Ciencias se habían trabajado en el primer trimestre, mientras que en los de Ciencias Sociales se había hecho lo propio en el segundo trimestre. Esta decisión se justifica muy posiblemente por ser el bloque de Análisis el que cuente con mayor valoración en el examen de Selectividad de la modalidad de Ciencias, mientras que para

las Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales es el bloque de Estadística y Probabilidad el que acapara mayor atención curricular por el mismo motivo.

A pesar de que el departamento contara con libro de texto para segundo de Bachiller, de la editorial SM, los docentes apenas lo utilizaban debido a que, según sus palabras, era excesivamente técnico, hecho que hacía no ajustarse a las demandas que tenían en un curso con todas estas circunstancias dirigidas fundamentalmente a la realización de las Pruebas de Acceso a la Universidad. Así, el uso que hacían del mismo se limitaba poco más que a fotocopiar los ejercicios finales de los temas para trabajarlos en el grupo, no teniendo el alumnado la “obligación” de comprárselo. Dejando a un lado el libro de texto, el principal recurso que utilizaban eran apuntes propios, fotocopias y recursos web con problemas de Selectividad, a los que brindaban una importancia mayúscula.

Respecto a la valoración del aprendizaje, todos coinciden en que el alumnado no muestra un interés excesivamente grande por el concepto, siendo las principales dificultades que muestran la confusión entre asíntota horizontal y asíntota vertical, los límites en $\pm\infty$ para funciones no polinómicas o una profunda desconexión del contenido respecto a situaciones reales de la vida cotidiana.

En los conocimientos previos relativos a la asíntota horizontal encontramos un mayor elenco de respuestas, que van desde reconocer que apenas recuerdan lo trabajado el año pasado, a tener ideas generales muy fundamentadas en el sistema de representación gráfico, o contar con unos conocimientos previos aptos para su curso.

Otorgamos a estas entrevistas un papel relevante, pues nos ayudan a contextualizar el estudio y los datos recabados de manera óptima. Es por ello que serán tenidos en cuenta tanto en el análisis de datos como en el apartado final de conclusiones, contrastando las respuestas y datos obtenidos con las puntualizaciones de los docentes.

Mostramos a continuación un cuadro-resumen de las entrevistas con cada profesor:

Tabla 4-Resumen entrevistas docentes

Fecha	27 de marzo de 2014				
Lugar	IES Salvador Rueda, Málaga				
Duración aproximada	10-15 minutos				
Docente	Curso /Código	Alumnado asistente	Principales recursos	Trabajo realizado con AH	Principales dificultades en el contenido
D. Cesáreo Flórez	2º Ciencias e Ingeniería/ 1CA	16	Apuntes propios Libro de texto Problemas de Selectividad	1º Trimestre. Clases de repaso	Diferenciación de límites por $+\infty$ y $-\infty$. Exponenciales
Dña. Ana Isabel Biedma	2º Ciencias de la Salud/ 1CB	26	Apuntes propios Libro de texto Problemas de Selectividad Recursos web	1º Trimestre	Confusión ecuación AH-AV
D. Eduardo Díaz-Miguel	2º Ciencias Sociales/ 2SA	10	Apuntes propios Libros de texto	2º Trimestre. 4 sesiones. Clases de repaso.	Tendencias en situaciones reales
Dña. Francisca Becerra	2º Ciencias Sociales/ 2SB	21	Fotocopias Libro de texto Problemas de Selectividad Apuntes propios	2º Trimestre. Clases de repaso.	Límites por $+\infty$ y $-\infty$

CAPÍTULO IV.

ANÁLISIS DE DATOS

Este capítulo cobra forma a través de la descripción e interpretación de los datos. Nuestro marco teórico nos dará el foco principal bajo el cual haremos una lectura precisa y fundamentada de las respuestas de los sujetos, brindando a esta actuación los mimbres necesarios para adquirir relevancia científica.

Tras implementar el cuestionario, se codificaron los grupos y los sujetos para facilitar la recogida de información, resultando de la siguiente forma:

Grupo de Ciencias e Ingeniería: 1CA

Grupo de Ciencias de la Salud: 1CB

Grupo de Ciencias Sociales 1: 2SA

Grupo de Ciencias Sociales 2: 2SB

Así, el primer sujeto del grupo de Ciencias de la Salud contaba con el código “1CB1” o el sexto del primer grupo de Ciencias Sociales, “2SA6”.

En un primer momento, los dos grupos de Ciencias Sociales se trataron por separado; sin embargo, tras las primeras lecturas de los datos, entendimos que la manera más acertada de enfocarlos era contrastando la información entre las tres modalidades: Ciencias e Ingeniería, Ciencias de la Salud y Ciencias Sociales, dando este hecho mayor énfasis a nuestra adhesión a la Teoría Fundamentada, la cual opera de cierta manera en función de los datos recogidos (Arraiz, 2014). Tampoco establecimos ningún sistema de categorías previo, sino que se procedió a configurarlo de manera simultánea a las primeras lecturas de los datos y a la apreciación de conexiones entre las respuestas de los distintos sujetos de estudio.

Contábamos con que aparecieran los términos que detectó Fernández-Plaza (2011) en su trabajo, así como que surgieran obstáculos epistemológicos y propias contradicciones entre las diversas concepciones que manifestaban los sujetos (Kidron, 2011).

A pesar de que el cuestionario consta de seis tareas, valoramos que el análisis de toda la información superaba sobradamente las demandas del Trabajo Fin de Máster, tomando finalmente la decisión de analizar las cuatro primeras tareas. Sin embargo, en Anexo VI se podrá realizar la lectura de un análisis descriptivo para las dos últimas tareas.

IV.1. Tareas

Procedemos al análisis de las cuatro primeras tareas del cuestionario. El análisis de cada cuestión vendrá introducido por una justificación del sistema de categorías empleado, para pasar a la presentación del propio sistema de categorías, principales resultados y, finalmente, valoración.

1. Explica con tus palabras lo que entiendes por asíntota horizontal

Desde un primer momento se detectaron dos partes en cada respuesta, una refiriéndose a la definición de asíntota horizontal y otra al comportamiento de la función respecto de su asíntota horizontal. Además, en el primer caso, llegamos a apreciar dos tipos de respuestas muy diferenciadas: por un lado, qué es una asíntota; y, por otro, la forma de calcularla.

A través de las reuniones de trabajo, se fue configurando la idea de que la dualidad objeto-proceso (Gray y Tall, 1991) podía ser adecuada para categorizar las respuestas. Así surgieron las dos categorías principales “1. Definición de asíntota horizontal” y “2. Comportamiento de la función respecto de la asíntota horizontal”. Estas y todas las categorías establecidas en las restantes tareas se describirán a continuación, incluyendo ejemplos y tipos de respuestas incluidas en cada subcategoría. Por ejemplo, siempre que mencionen el término “acercarse” sin especificar un valor concreto, lo incluiremos dentro de “aproximar”, haciendo lo propio con “tender” si se señalase un valor al que se acerca.

Se procedió al registro de cada respuesta y a la determinación de las palabras claves que inducían a pensar en una u otra categoría, o en las dos. Bien es cierto que en un primer momento se establecieron demasiadas categorías que dificultaban de manera innecesaria los pasos posteriores. Por ejemplo, en la subcategoría “1.2.2. Línea” se llegaron a delimitar los tipos: “Línea”, “Horizontal”, “Paralela al eje X”, “Imaginaria”, “Discontinua” y “Recta”. Después de que produjeran los problemas ya mencionados, se entendió necesario compactar al máximo estas categorías, resultando finalmente para este caso los tres tipos de línea actualmente delimitados “Paralela OX”, “Discontinua”, “No especifica”.

Por otro lado, en la categoría “2. Comportamiento de la función respecto de la asíntota horizontal”, se incluyeron los términos descritos por Fernández-Plaza (2011), los cuales se apreciaban con gran claridad en nuestros datos.

Así, para cada una de las respuestas a esta primera tarea el procedimiento de análisis se llevó a cabo a través de las siguientes fases:

- Lectura de la respuesta
- Determinación de la información perteneciente a la categoría “Definición” y, por otra parte, a la de “Comportamiento”.
- Dentro de la categoría de “Definición”, análisis de la información seleccionada y decisión de su inclusión en la subcategoría “Proceso” o “Concepto”.
- Registro de respuestas
- Revisión de resultados
- Elaboración de tablas y gráficos, valoración de los resultados

Por ejemplo, la respuesta del estudiante 1CB17:

“Es la **línea₁** recta en el eje x, en la cual **no existe función, pero si existe por arriba o abajo₂**” (1CB17)

Corresponde a:

1. Definición de asíntota horizontal/1.2. Objeto/1.2.2. Línea/No específica.
2. Comportamiento de la función respecto a su AH/ 2.4. Alcanzable/2.4.1. En cualquier punto del dominio.

El estudiante 2SB8 señala para la misma pregunta:

“**Línea horizontal₁** dada en un **punto de y el cual no está definido por la función₂**. Esta asíntota **se calcula realizando el $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ cuando $x \rightarrow \infty_3$** ” (2SB8).

Corresponde a:

1. Definición de asíntota horizontal/1.2. Objeto/1.2.2. Línea/Paralela OX
2. Comportamiento de la función respecto de su asíntota horizontal/ 2.4. Alcanzar/2.4.1. En cualquier punto del dominio.
3. Definición de asíntota horizontal. / 1.1. Proceso. / 1.1.1.Cálculo

▪ Sistema de categorías

El sistema de categorías establecido para el análisis de la primera tarea fue el siguiente, describimos algunas de las categorías que podrían inducir a error.

1. Definición de Asíntota Horizontal

1.1. Proceso

1.1.1. Cálculo-**Hace alusión a cómo se calcula algebraicamente.**

1.1.2. Representación gráfica-**Indica aspectos específicos de la representación, muy estrechamente relacionado también con el lenguaje tabular.**

1.1.3. Ejemplo específico

1.2. Objeto

1.2.1. Punto

*Valor de ordenada

*Límite

1.2.2. Línea

*Paralela OX

*Discontinua

*No especifica

1.2.3. Función-recta

1.2.4. Confusión con AV-**Describe la asíntota vertical.**

1.3. Otras respuestas

1.3.1. No aplica-**No realiza ningún a actividad o lo que realiza no tiene relación con lo que se le pide.**

1.3.2. Incoherente-**Inconsistente.**

2. Comportamiento de la función respecto de su asíntota horizontal

2.1. Limitar-**Delimitar.**

2.2. Tender-**Acercarse a un valor determinado.**

2.3. Aproximar-**Acercarse.**

2.4. Alcanzar -**Cortar.**

2.4.1. En cualquier punto del dominio

2.4.2. Sólo por los extremos ($\pm\infty$)

2.5. Rebasar-**Atravesar.**

2.6. Otras respuestas

2.6.1. No aplica

2.6.2. Incoherente

▪ Resultados

Resaltaremos de la primera tarea la definición que le atribuyen los sujetos a la asíntota horizontal. Dentro de la misma mostramos un gráfico comparativo entre las tres modalidades acerca del porcentaje de respuestas que le brindan al concepto un mayor carácter de objeto o de proceso (Gray y Tall, 1991). Además, se muestra un gráfico comparativo sobre la definición del término como objeto.

Por otro lado, en la segunda categoría contamos con una tabla resumen de los datos recogidos. Nótese que todos los datos, tanto en estas tareas como en las restantes, quedan finalmente registrados en forma de porcentaje.

La primera tabla nos muestra los porcentajes de respuesta de los sujetos a la primera tarea, dentro de la categoría “definición de asíntota horizontal”. Se puede apreciar cómo los grupos de Ciencias Sociales muestran un mayor porcentaje en el que brindan al concepto un carácter de objeto frente a uno de proceso, más concretamente un 56,25% y un 60,71% frente a un 46,15%. El grupo de Ciencias e Ingeniería destaca con un 70,59% en este mismo ámbito.

Tabla 5-Definición de asíntota horizontal (%)

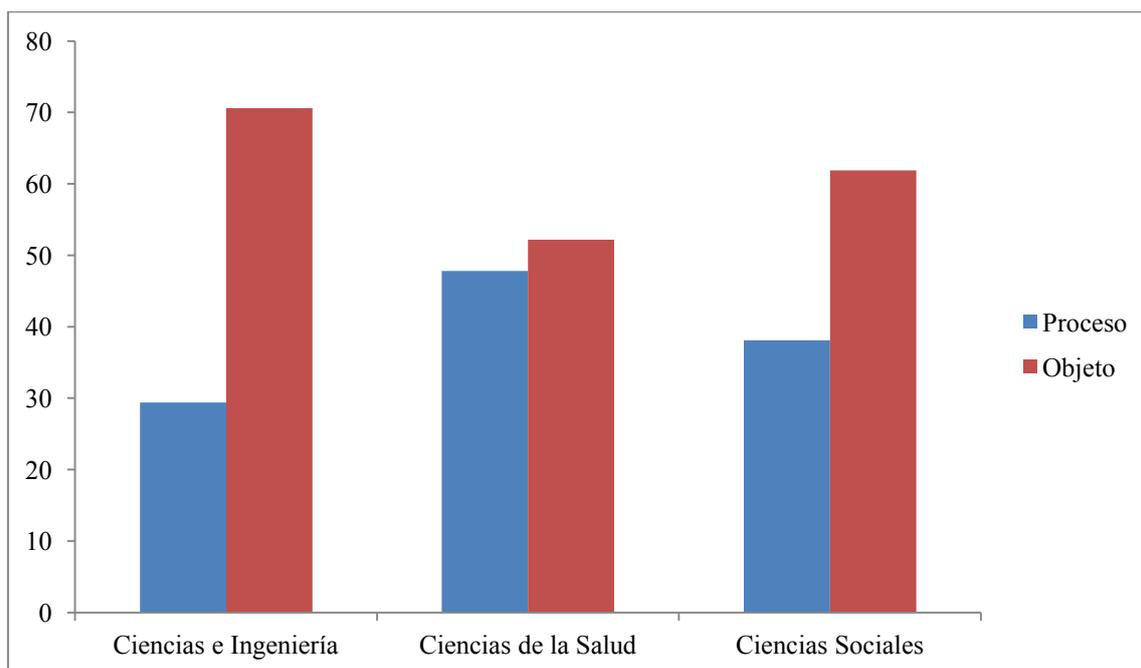
CATEGORÍAS		MODALIDAD/GRUPOS								
		Ciencias e Ingeniería		Ciencias de la Salud		Ciencias Sociales				
		1CA	1CB	2SA	2SB					
1. Definición de AH	1.1. Proceso	1.1.1. Cálculo	5,88	26,92	0	28,57				
		1.1.2. Representación gráfica	17,65	15,38	25	7,14				
			29,41	42,31	37,5	35,71				
		1.1.3. Ejemplo concreto	5,88	0	12,5	0				
	1.2. Objeto	1.2.1. Valor de ordenada	23,53	3,85	18,75	0				
		Punto	29,41	7,69	18,75	3,57				
		Límite	5,88	3,85	0	3,57				
		1.2.2. Paralela OX	5,88	7,69	46,15	12,5	56,25	10,71		
		Línea	17,65	7,69	15,38	0	25	8,45	35,71	60,71
		No específica	5,88	0	12,5	3,57				
1.2.3. Función-Recta	23,53	19,23	12,5	17,86						
1.2.4. Confusión con AV	0	3,85	0	3,57						

1.3. Otras respuestas	1.3.1. No aplica		3,85	0	0	
		0	11,54	6,25	3,57	
	1.3.2. Incoherente		7,69	6,25	3,57	

Una vez que se contraste con el resto de la información, este primer gráfico supone una gran referencia para comenzar a establecer los perfiles de respuesta por modalidad, uno de nuestros objetivos de investigación.

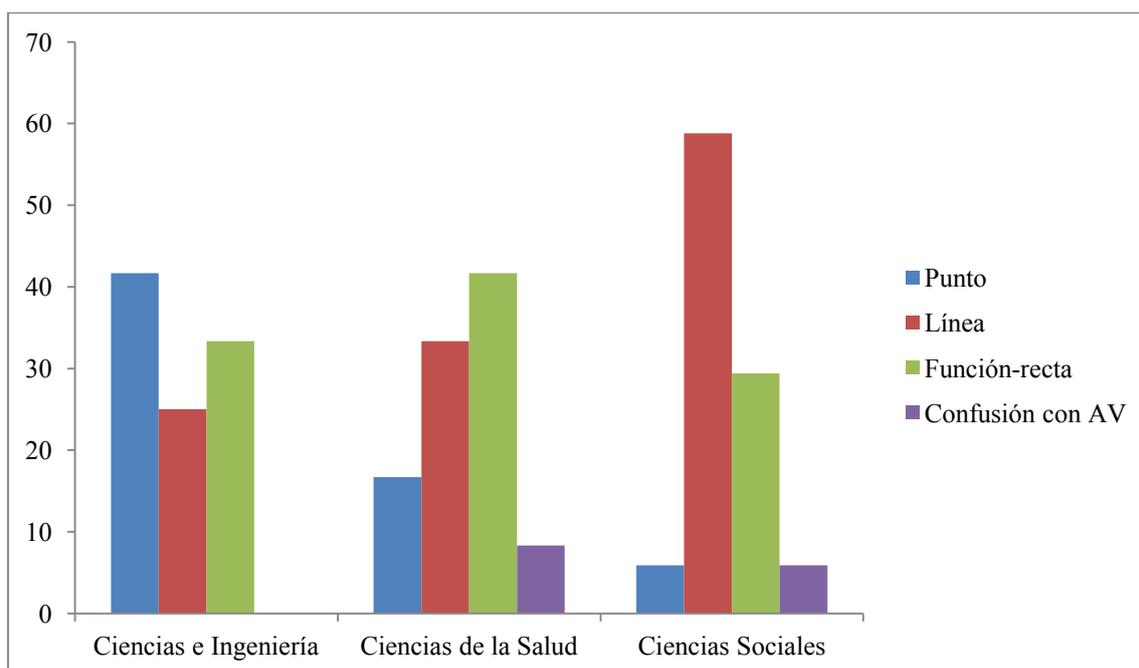
En esta descripción ya podemos destacar un uso más frecuente del concepto como objeto por parte del grupo de Ciencias e Ingeniería, quedando por detrás, en ese orden, el mismo uso que le da el grupo de Ciencias Sociales y el de Ciencias de la Salud. Destaquemos igualmente que los dos grupos de Ciencias Sociales quedaron incluidos en el mismo grupo con la idea de facilitar el análisis comparativo entre modalidades, cumpliendo así de la mejor manera con la consecución de uno de nuestros objetivos.

Gráfico 1-Definición de asíntota horizontal (%)



En el siguiente gráfico presentamos una comparativa entre el uso del concepto como objeto (Gray y Tall, 1991). Podemos observar una importante heterogeneidad entre los principales resultados, encontrando para Ciencias e Ingeniería el punto como resultado más frecuente con un 29,41%; para Ciencias de la Salud, la categoría de función-recta con un 19,23%, y un valor de línea en Ciencias Sociales con aproximadamente un 60%.

Gráfico 2-Definición de asíntota horizontal como objeto (%)



La otra categoría que describimos dentro de esta primera tarea trataba sobre el comportamiento de la función respecto a su asíntota horizontal. Cabría destacar que la respuesta más frecuente que aportaron los sujetos constaba de dos partes: una primera, que hablaba sobre la definición de asíntota horizontal; y otra parte dedicada al comportamiento de la función respecto de la misma.

Podemos esta división con el siguiente ejemplo:

“Una asíntota es una línea horizontal, en este caso, que se sitúa en el eje de coordenadas y que no puede ser atravesada por la función, la función se acerca pero no llega a tocarla” · (2SA4).

En esta categoría aparecen los mismos términos que Fernández-Plaza (2011) delimitó en su estudio, como tender, aproximar o rebasar.

Tabla 6-Comportamiento de la función respecto a su asíntota horizontal (%)

CATEGORÍAS	MODALIDAD/GRUPOS			
	Ciencias e Ingeniería	Ciencias de la Salud	Ciencias Sociales	
	1CA	1CB	2SA	2SB
2.1. Limitar	22,22	10,53	22,22	32

2. Comportamiento de la función respecto de su AH	2.2. Tender	22,22	21,05	33,33	0
	2.3. Aproximar	11,11	15,79	11,11	28
2.4. Alcanzar	2.4.1. En cualquier punto del dominio	22,22	10,53	0	12
	2.4.2. Sólo por los extremos ($\pm\infty$)	11,11	0	22,22	12
2.5. Rebasar		5,56	15,79	11,11	8
2.6. Otras respuestas	2.6.1. No aplica	0	5,26	0	0
	2.6.2. Incoherente	5,56	21,05	26,32	8

▪ Valoración

Al ser la primera tarea que comenzamos a analizar, fue muy posiblemente también la que más costó dada nuestra inexperiencia, hecho que fue ayudado por un porcentaje importante de respuestas muy simples en las que se lograba categorizar la respuesta con mucha dificultad.

Respecto a las respuestas de los sujetos, encontramos para el primer ítem “1. Definición de asíntota horizontal” semejanzas entre los grupos de Ingeniería y de Sociales, en los que el alumnado prioriza la descripción conceptual sobre la descripción procedimental, es decir, qué es frente a cómo se calcula. En el grupo de Salud apreciamos cierta igualdad entre ambos tipos de concepciones.

Los datos del grupo de Ingeniería, que también recibía las asignaturas de Física, Electrotecnia y Dibujo Técnico, muestran que un 70,59% de las respuestas se refieren a la noción de asíntota como objeto, frente al 29,41% que se le atribuye un carácter de objeto. Podríamos pensar que este mismo hecho es uno de los principales factores de estos resultados, puesto que el mayor uso de sistemas de representación debería consolidar los fundamentos del concepto dentro del sujeto.

Por otra parte, los datos de Ciencias Sociales, incluyendo ambos grupos de la modalidad en el análisis, puede que queden reforzados por especial trabajo que se realiza dentro de

la modalidad con los fenómenos y situaciones reales de la vida cotidiana propias de la Economía, la Geografía o Historia. Este hecho hace que el trabajo con el concepto no sea únicamente la obtención de un número, sino una descripción cualitativa de qué ocurre con tal número. Todo esto hace que le otorguen un carácter de proceso un 29,41% de las veces y otro de concepto un 70,59%.

El grupo de Ciencias de la Salud presenta unos resultados muy parejos entre ambas subcategorías (42,31% frente a 46,15%).

Para la segunda categoría “2. Comportamiento de la función respecto de la asíntota”, observamos que ambos grupos de Ciencias cuentan con una mayor dispersión en sus respuestas, es decir, que disponen de mayores recursos para tratar la cuestión, contando con un número de respuestas similares para las subcategorías establecidas: limitar, tender, aproximar,... La respuesta más representada es “Limitar-Tender-Alcanzar” para el grupo de Ingeniería (77.78%); sin embargo, el grupo de Ciencias de la Salud insiste más en la no rebasabilidad del límite frente a la de limitar-delimitar, mostrando seguramente una concepción más arraigada de la habitual concepción de la etapa “se acerca pero nunca toca”. Finalmente los datos de Sociales indican también una terna formada por “limitar-aproximar-alcanzar” en un 78.79% que puede mostrar cierta confusión entre los términos tendencia y aproximación, 9.09%-24.24%, respectivamente.

2. Dibuja aproximadamente una función que cuente con alguna asíntota horizontal, la cual se ajuste de la manera más precisa posible a lo que entiendes del concepto.

El tratamiento de la segunda tarea fue muy profundo al querer dar respuesta a todas las impresiones que iban suscitando las distintas lecturas que se iban realizando y las conexiones detectadas entre los datos recabados. En esa dinámica, se describieron cuatro categorías principales: “1. Características de la función”, “2. Características de la AH”, “3. Comportamiento de la función respecto a la AH” y “4. Tipo de función a la que se ajusta la representación”. Es claro que resultan categorías muy interrelacionadas, tanto que podríamos considerar que las tres primeras están incluidas en la última; no obstante, la consideración final de estas cuatro principales categorías se llevó a cabo al entender que cada una de ellas contaba con propios matices que no deberíamos pasar por alto.

La primera categoría, “1. Características de la función”, respondería a la pregunta de cómo sería una función que contase con asíntota horizontal, esperando encontrar alguna representación más habitual para cada una de las modalidades y apreciando la cantidad y calidad de ejemplos que se utilizan.

Por otra parte, con “2. Características de la AH” tratamos de realizar la misma descripción que en el ítem anterior; pero, en este caso, para la asíntota horizontal. En este punto esperamos que el resultado habitual sea una asíntota horizontal en $+\infty$ con expresión analítica $y=a$, $a>0$. Lo que buscamos en estos dos primeros ítems es tratar de analizar lo que expresa o entiende el sujeto cuando se habla de la asíntota horizontal, habiendo cuidado mucho incluso la propia redacción de la tarea para su logro: “...que se ajuste de la manera más precisa posible lo que entiendes del concepto”.

La tercera categoría “3. Comportamiento de la función respecto a la AH” conecta las dos anteriores, buscando apreciar cómo se relaciona la función con su asíntota horizontal no sólo en los extremos $\pm\infty$, sino en todo el dominio. Esta tercera categoría tiene una importancia especial dado que podemos detectar los mismos términos de Fernández-Plaza (2011), destacando que por su carácter gráfico, sólo se determinaron las subcategorías “tendencia”, “alcanzar” y “rebasar”, puesto que gráficamente resulta casi imposible mostrar la diferencia entre “tender” y “aproximar”, por ejemplo.

Como ya dijimos, la última categoría podría representar a las primeras, pero destacamos su importancia en la medida de la indagación acerca de los ejemplos más habituales dentro de cada grupo y la variedad con los que cuentan.

Al determinarse las categorías desde un primer momento, el proceso de análisis de esta tarea fue muy fluido, yendo sujeto a sujeto y escribiendo a continuación el código de categoría que respondía a la información brindada. Lo vemos con el siguiente ejemplo:

1CA1: 1.1.1., 1.2.2., 1.3.3., 1.4.3., 1.5.2., 1.5.3.

2.1.1., 2.2.2.

3.1.1., 3.2.1., 3.3.2.

4.1.2.

Siguiendo el sistema de categorías establecido, esta secuencia de códigos significa que el sujeto 1 del grupo de Ciencias 1 (Ingeniería) ha utilizado una función cuyo dominio es \mathbb{R} , con recorrido $(a, +\infty)$, sin simetría, con cambios en la monotonía. Además tiene la AH en $y=0$ por $+\infty$, se aprecia tendencia, la función alcanza a la asíntota en un solo punto y es no rebasable. Ajustándose finalmente la función a una racional sin AV.

▪ **Sistema de categorías**

1. Características de la función

1.1. Dominio

1.1.1. \mathbb{R}

1.1.2. Aparece AV: $x=b$. $\mathbb{R} - \{b\}$

1.1.3. $(0, +\infty)$

1.1.4. $(-\infty, 0)$

1.1.5. Otros intervalos

1.2. Recorrido (AH: $y=a$)

1.2.1. $\mathbb{R} - \{a\}$

1.2.2. $(a, +\infty)$

1.2.3. $(-\infty, a)$

1.2.4. Otros intervalos

1.3. Simetría

1.3.1. Par

1.3.2. Impar

1.3.3. Sin simetría

1.4. Monotonía

1.4.1. Creciente-**Estrictamente creciente**

1.4.2. Decreciente-**Estrictamente decreciente**

1.4.3. Presenta cambios en la monotonía

1.5. Extremos relativos

1.5.1. Aparecen máx/mín relativos

1.5.2. Aparecen máx/mín absolutos

1.5.3. La AH es cota superior/inferior de la función-**LA AH es no rebasable.**

1.5.4. Sin extremos relativos

1.6. Otras respuestas

1.6.1. No aplica

1.6.2. Incoherente

2. Características de la AH

2.1. Relativas al eje X

2.1.1. AH por $+\infty$

2.1.2. AH por $-\infty$

2.1.3. AH por $\pm\infty$

2.2. Relativas al eje Y (AH: $y=a$)

2.2.1. $a>0$

2.2.2. $a=0$

2.2.3. $a<0$

2.3. Otras respuestas

2.3.1. No aplica

2.3.2. Incoherente

3. Comportamiento de la función respecto de la AH

3.1. Tendencia

3.1.1. Se aprecia tendencia

3.1.2. No se aprecia tendencia-**No aparece un comportamiento asintótico de la función.**

3.2. Alcanzable

3.2.1. En un sólo punto

3.2.2. En más de un punto

3.2.3. No alcanzable

3.3. Rebasable

3.3.1. Rebasable

3.3.2. No rebasable

3.4. Otras respuestas

3.4.1. No aplica

3.4.2. Incoherente

4. Tipo de función a la que se ajusta

4.1. Racional

4.1.1. Con AV

4.1.2. Sin AV

4.2. Exponencial

4.3. Otras respuestas

4.3.1. No aplica

4.3.2. Incoherente

4.3.3. Otras.

▪ Resultados

La tabla 7 nos describe las características de la función que representan los sujetos en esta tarea. En ella se delimitaron también las subcategorías “1.1. Dominio”, “1.2. Recorrido”, “1.3. Simetría”, “1.4. Monotonía”, “1.5. Extremos relativos”, “1.6. Otras respuestas”.

Casi con total seguridad es la categoría que responde a perfiles concretos de manera más precisa, en especial para el grupo de Ciencias Sociales, llegando el caso de encontrar el mismo código de categorías para varios sujetos del grupo.

Tabla 7- Características de la función con asíntota horizontal (%)

CATEGORÍAS	MODALIDAD/GRUPOS					
	Ciencias e Ingeniería	Ciencias de la Salud	Ciencias Sociales			
	1CA	1CB	2SA	2SB		
1. Características de la función	1.1.1. \mathbb{R}	57,14	36,36	8,33	22,73	
	1.1.2. $\mathbb{R} - \{b\}$. AV: $x=b$	28,57	9,09	0	50	
	1.1. Dominio	1.1.3. $(0, +\infty)$	14,29	18,18	33,33	4,55
		1.1.4. $(-\infty, 0)$	0	4,55	8,33	0
		1.1.5. Otros intervalos	0	0	16,67	4,55
	1.2. Recorrido	1.2.1. $\mathbb{R} - \{a\}$	21,43	9,09	0	45,45
		1.2.2. $(a, +\infty)$	42,86	36,36	8,33	9,09
		*AH $y=a$	1.2.3. $(-\infty, a)$	7,14	9,09	50

	1.2.4. Otros intervalos	28,57	13,64	8,33	4,55
	1.3.1. Par	7,14	9,09	0	0
1.3. Simetría	1.3.2. Impar	28,57	18,18	0	45,45
	1.3.3. Sin simetría	64,29	40,91	66,67	36,36
	1.4.1. Estrictamente creciente	28,57	31,82	41,67	38,1
	1.4.2. Estrictamente decreciente	42,86	22,73	25	38,1
1.4. Monotonía	1.4.3. Presenta cambios en la monotonía	28,57	13,64	0	4,76
	1.5.1. Aparecen máx/mín relativos	0	0	0	0
	1.5.2. Aparecen máx/mín absolutos	17,39	6,06	0	0
1.5. Extremos relativos	1.5.3. AH es cota superior/inferior de la función	39,13	33,33	40	25,93
	1.5.4. Sin extremos relativos	43,48	39,39	40	59,26
1.6. Otras respuestas	1.6.1. No aplica	0	$\frac{4,55}{27,27}$	$\frac{0}{33,33}$	$\frac{0}{18,18}$
	1.6.2. Incoherente		31,82	33,33	18,18

En este caso nos centramos en describir las asíntotas horizontales que expresan. Las dos modalidades de Ciencias coinciden en la representación de la asíntota horizontal en $+\infty$ con $y=a$, siendo $a>0$. En cambio, la representación más habitual de los sujetos del grupo de Ciencias Sociales es con la asíntota en $\pm\infty$, teniendo un patrón de respuestas muy asociado a un modelo de función racional con asíntotas horizontal y vertical con ecuaciones distintas a la de los ejes.

Tabla 8- Características de la asíntota horizontal (%)

CATEGORÍAS		MODALIDAD/GRUPOS					
		Ciencias e Ingeniería	Ciencias de la Salud	Ciencias Sociales			
		1CA	1CB	2SA	2SB		
2.1. Relativas al eje OX	2.1.1. AH en $+\infty$	57,14	52,63	66,67	33,33		
	2.1.2. AH en $-\infty$	7,14	15,79	8,33	5,56		
	2.1.3. AH en $\pm\infty$	35,71	26,32	0	61,11		
2. Características de la AH	2.2.1. b>0	40	69,57	50	86,36		
	2.2. Relativas al eje OY. AH: y=b	2.2.2. b=0	53,33	21,74	25	4,55	
		2.2.3. b<0	6,67	4,35	0	9,09	
		2.3.1. No aplica		5,26	0		
	2.3. Otras respuestas	2.3.2. Incoherente	0	0	5,26	25	25

La siguiente categoría nos vuelve a mostrar algunos términos del trabajo de Fernández-Plaza(2011), con la dificultad añadida de la representación gráfica, en la cual no podemos distinguir con claridad la diferencia de términos como tender o aproximar, por ejemplo. Así, nos centramos únicamente en “tendencia”, “alcanzabilidad” y “rebasabilidad”.

Respecto a la tendencia, salvo casos aislados, encontramos una coherente representación en la mayoría de los sujetos, especialmente en el grupo de Ciencias e Ingeniería, con el 100%. Para el resto de términos elegidos, hay una pareja de respuestas muy definidas: una asíntota horizontal no alcanzable y no rebasable, llegando a superar el 70% en el grupo de Ingeniería; aunque en el segundo grupo de Sociales representan con mayor asiduidad la rebasabilidad a raíz del muy habitual uso del modelo de función racional.

Tabla 9-Comportamiento de la función respecto de la asíntota horizontal (%)

CATEGORÍAS	MODALIDAD/GRUPO						
		Ciencias e Ingeniería	Ciencias de la Salud	Ciencias Sociales			
		1CA	1CB	2SA	2SB		
3. Comportamiento de la función respecto de la AH	3.1. Tendencia	3.1.1. Se aprecia tendencia	100	68,18	66,67	81,82	
		3.1.2. No se aprecia tendencia	0	9,09	0	4,55	
	3.2. Alcanzable	3.2.1. En un sólo punto	14,29	0	0	0	
		3.2.2. En más de un punto	0	0	0	0	
		3.2.3. No alcanzable	85,71	77,27	66,67	86,36	
	3.3. Rebasable	3.3.1. Rebasable	28,57	18,18	0	50	
		3.3.2. No rebasable	71,43	59,09	66,67	36,36	
	3.4. Otras respuestas	3.4.1. No aplica	0	4,55	0	0	
		3.4.2. Incoherente		18,18	22,73	33,33	13,64

La última categoría puede considerarse una compilación de las tres primeras, estableciéndola de todos modos con el fin de visibilizar los principales ejemplos de funciones que emplean. J

La función racional es una de los resultados principales, teniendo por ejemplo que los sujetos del grupo de Sociales siempre que representan una función racional la dotan también de asíntota vertical, lo que refuerza los detalles que veníamos apuntando. Por otra parte los grupos de Ingeniería y Ciencias de la Salud también emplean funciones racionales en un porcentaje importante, 71,43% para los primeros y 45,45 para los segundos, pero detectamos que en, aproximadamente, la mitad de sus ejemplos no aparece asíntota vertical, ajustándose su representación a funciones racionales más complejas.

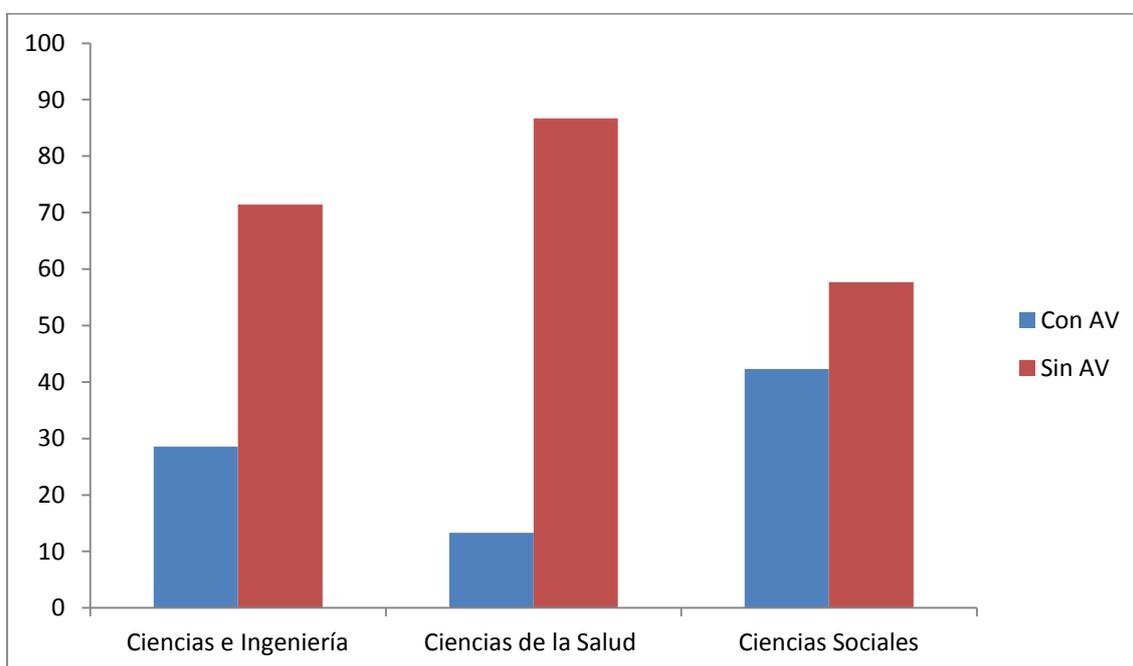
De igual forma, nos encontramos ante el caso de las funciones exponenciales, impartidas en las tres modalidades, pero no siendo ejemplificadas en la modalidad de Sociales, que se restringe casi en exclusividad a las funciones racionales más básicas.

Tabla 10-Tipo de función a la que se ajusta la representación

CATEGORÍAS	MODALIDAD/GRUPO						
	Ciencias e Ingeniería		Ciencias de la Salud		Ciencias Sociales		
	1CA	1CB	2SA	2SB			
4.1. Racional	4.1.1. Con AV	42,86	71,43	22,73	45,45	50	59,09
	4.1.2. Sin AV	28,57		22,73		0	0
4.2. Exponencial		28,57		9,09		0	0
	4.3.1. No aplica			4,55		0	0
4.3. Otras respuestas	4.3.2. Incoherente	0		18,18	45,45	33,33	50
	4.3.3. Otras			22,73		16,67	22,73
						18,18	40,91

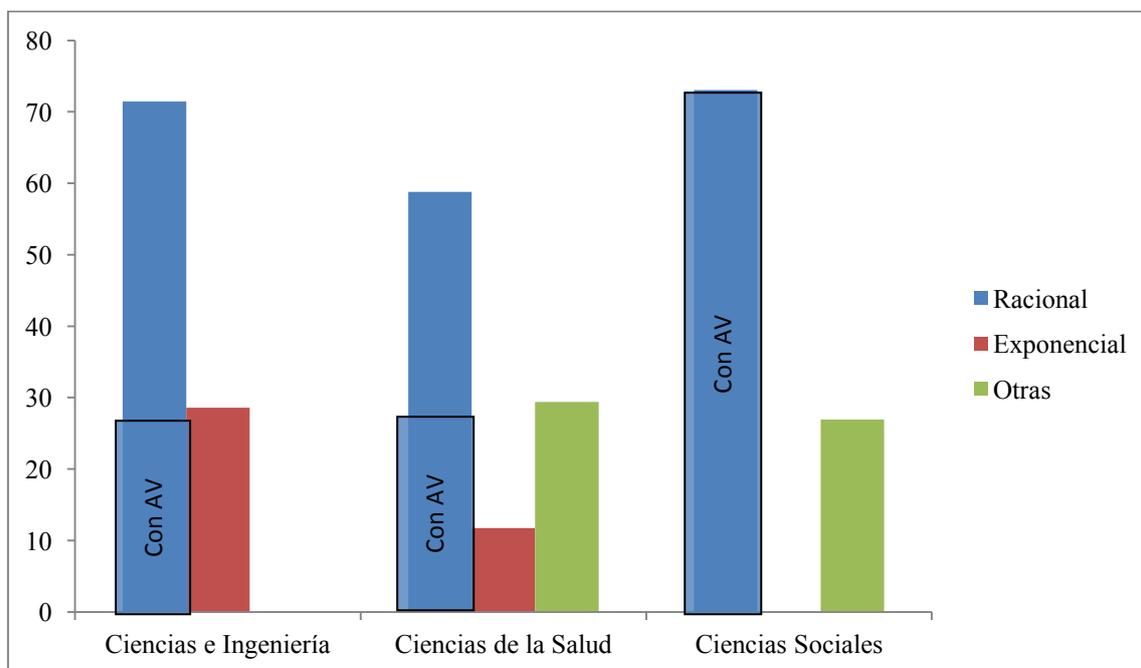
Con este gráfico buscamos indagar acerca de la posible incidencia de ejemplos modelo para los sujetos, tipo $f(x) = \frac{1}{x}$, que además de tener asíntota horizontal tiene asíntota vertical. El trabajo exclusivo con estos ejemplos puede dar lugar a errores como confundir ambos tipos de asíntota, como así nos advirtió uno de los docentes.

Gráfico 3-Análisis de la función representada con AH (%)



Este gráfico muestra con claridad el tipo de ejemplos que se manejan eficazmente en cada modalidad. En Ingeniería es donde vemos un mayor porcentaje de funciones exponenciales, casi un 30%, funciones que no aparecen en ningún en sus representaciones.

Gráfico 4-Tipo de función a la que se ajusta la representación (%)



▪ **Valoración de las respuestas**

Ambos grupos de Ciencias muestran una función con dominio en todo \mathbb{R} , representando un 57.14% y un 53.33% , respectivamente . Por su parte, la respuesta más habitual del grupo de Sociales es la “1.2.1. $\mathbb{R} - \{b\}$ ”, con un 42,31%, siendo $x=b$ asíntota vertical de la función, aspecto muy conectado al modelo de función hipérbola, representación habitual en esta etapa.

Para el recorrido y la simetría de la función la dinámica es semejante pues ambos grupos de Ciencias cuentan para el recorrido con un 42,86% y un 53,33% para la subcategoría “ $(a, +\infty)$ ”, mientras que el grupo de Sociales responde $\mathbb{R} - \{a\}$, siendo $y=a$ asíntota horizontal de la función, en un 55.56% de las veces, Sobre la simetría encontramos un 60% de respuestas para cada grupo de Ciencias que representan funciones sin simetría, teniendo para el grupo de Sociales un 55.56% con simetría impar, propia de las funciones hipérbola, hecho que parece verificar nuestra hipótesis anterior.

En monotonía y extremos relativos apreciamos los mismos detalles, aunque en los grupos de Ciencias están las preguntas más repartidas. Para el grupo de Sociales, tenemos un 47.06% para una función estrictamente creciente y ese mismo porcentaje para otra estrictamente decreciente, representaciones habituales para funciones hipérbola del modo $f(x)=\frac{-1}{x}$ ó $f(x)=\frac{1}{x}$, respectivamente.

En la segunda categoría principal, características de la asíntota horizontal, ambos grupos de Ciencias representan una asíntota horizontal por $+\infty$ en un 60 y un 57,14% de las veces. El grupo de Sociales hay mayor dispersión en sus respuestas, siendo las más detectadas tanto la asíntota horizontal por $+\infty$, 51,85%, como por $\pm\infty$, 40,74%, este último muy conectado al modelo de función hipérbola. Respecto al eje OY, encontramos que el grupo de Sociales sitúa la asíntota horizontal en la parte positiva del eje OY en un 80,65%; al igual que el grupo de Ciencias de la Salud, que hace lo propio en un 76,19%. En este caso, es el grupo de Ingeniería el que presenta mayor diferencia ya que sitúa la asíntota en $y=0$ en un 53.33% y en la parte positiva del eje en un 40%.

Nuestra tercera categoría, el comportamiento de la función respecto de la asíntota horizontal, señala una representación óptima de la tendencia por parte de todos los sujetos en un 94,83%, hecho que llama la atención al no ser refrendado por los resultados de otras tareas. La principal justificación que podríamos resaltar es, tal y como apuntaron Blázquez y Ortega (2001), al visibilizar dificultades en el cambio de sistema de representación para el aprendizaje del concepto de límite.

En la alcanzabilidad también hay casi unanimidad en la no alcanzabilidad en ningún punto del dominio, respuesta que encontramos en un 96,55% de los datos totales, resultados bastantes esperados dadas reglas mnemotécnicas muy arraigadas en la etapa tales como “se acerca infinitamente pero nunca llegar a tocar”.

La rebasabilidad nos muestra resultados semejantes, aunque con porcentajes más débiles, concretamente un 67,24% de los datos totales. Centrándonos únicamente en los datos del grupo de Sociales tenemos que el 68,75% de los sujetos representan muestran rebasabilidad en su representación, característica propia de las funciones hipérbola.

Finalmente, la función a la que mayoritariamente se ajustan las representaciones que realizan es la función racional, con un 55,71% de los datos totales, pero debemos mencionar matices importantes. El primero de ellos es el tipo de ejemplos que utilizan,

ya que en los grupos de Ciencias aparecen funciones de tipo exponencial, un 28,57% en el grupo de Ingeniería y un 9,09% en el de Ciencias de la Salud; misma representación que no aparece ninguna vez en el grupo de Sociales.

Para los ejemplos registrados como “funciones racionales”, delimitamos dos subcategorías “con asíntota vertical” y “sin asíntota vertical”, resultando que el 100% de las funciones racionales que emplean los sujetos de Sociales tiene asíntota vertical frente al 60% y 40% que tienen en los grupos de Ingeniería y Salud. Este hecho nos termina de mostrar un perfil muy claro de respuesta para el grupo de Sociales, habiendo mayor dispersión para los otros grupos.

3. Explica con tus palabras qué entiendes en la siguiente expresión:

- **Una función $f(x)$ tiende a L ($L \in \mathbb{R}$) cuando x tiende a infinito**

Por la propia naturaleza de la pregunta, el análisis de la tercera tarea no fue tan profundo como en las anteriores. Además, sospechamos que la redacción de la pregunta “Una función $f(x)$ tiende L ($L \in \mathbb{R}$) cuando x tiende a infinito” pudo confundir a los sujetos al no venir expresada como habitualmente la tratan, más similar a “Un función cuando x tiende a infinito tiende a L ($L \in \mathbb{R}$)”, ocurriendo un 15.71% de los datos totales:

“Pues que la función tiende a ∞ en el punto L ” (2SA6)

Las categorías descritas eran muy claras desde un primer momento, si bien dentro de la subcategoría “Sí relaciona con la asíntota horizontal” entendimos oportuno subdividirla en dos nuevas, “De manera directa”, en la que incluimos aquellas respuestas que mencionan formalmente a la asíntota horizontal; y, por otro lado, “De manera indirecta”, en la que incluimos las respuestas en las que, a pesar de no referirse formalmente a la asíntota horizontal, sospechamos que es el sentido que quiere expresar al emplear términos tales como “aproximar” o “alcanzar” (Fernández-Plaza, 2011).

Por ejemplo, una respuesta de relación directa con la asíntota horizontal sería:

“Cuando dicha función se aproxima a infinito ese valor se va acercando más y más a L pero sin llegar a alcanzarlo, es decir, tiene una asíntota horizontal en $y=L$ ” (1CA14).

Por otra parte, mostramos a continuación un caso de relación indirecta con la asíntota:

“La función se va acercando a L mediante el valor vaya aumentando, pero no llega al valor L por poco que parezca que le quede” (2SA8).

En la subcategoría descrita como relación indirecta con la asíntota horizontal, salen a la palestra nuevamente los términos “aproximar” y “alcanzar” (Fernández-Plaza, 2011) lo que acentúa su figura como uno de los ejes principales de nuestro marco teórico. Dentro de la no relación con el término, aparte de los triviales “No aplica”, que no realiza ningún tipo de actividad e “Incoherente”, sin tener fundamento alguno lo que escribió; determinamos dos nuevas subcategorías: en primer lugar, “Reescribe la expresión”, aunque pueda parecer extraña, aparece un 22,95% de los datos totales, limitándose únicamente los sujetos a escribir de nuevo la información que aparecía en la tarea; y, por otro lado, “Intercambia los papeles de ∞ y L”, que tratamos anteriormente, pudiendo ser fruto también de confusiones entre la asíntota horizontal y vertical

El procedimiento de análisis fue idéntico, aunque más simple por existir menos categorías, al de la tarea anterior. Veamos el siguiente ejemplo:

2SB4: 2.1.

Este código nos indica que el cuarto alumno del segundo grupo de Sociales ha reescrito la expresión.

- **Sistema de categorías**

1. Relaciona con la AH

- 1.1. De manera directa-**Hace referencia directa a la AH**

- 1.2. De manera indirecta: términos clave-**No hace referencia directa a la AH, pero interpretamos su relación a raíz del uso de los términos clave aproximar o alcanzar.**

- 1.2.1. Aproximar

- 1.2.2. Alcanzar

2. No relaciona con la AH

- 2.1. Reescribe la expresión-**Escribe lo mismo, pero en otro orden**

- 2.2. Intercambia los papeles de infinito y L.-**Confunde L e infinito intercambiando sus papeles.**

2.3. Otras respuestas

2.3.1. No aplica

2.3.2. Incoherente

▪ Resultados

La siguiente tabla nos muestra que el caso más habitual dentro de esta respuesta es la no relación con las asíntota horizontal, fruto de dificultades que pueden presentar en la traducción entre sistemas de representación (Blázquez y Ortega, 2001). Además, el hecho de que en ocasiones escriban su propia definición de asíntota horizontal y que no la mencionen, a lo que hemos llamado relación indirecta, puede ser también un indicio de debilidades al respecto.

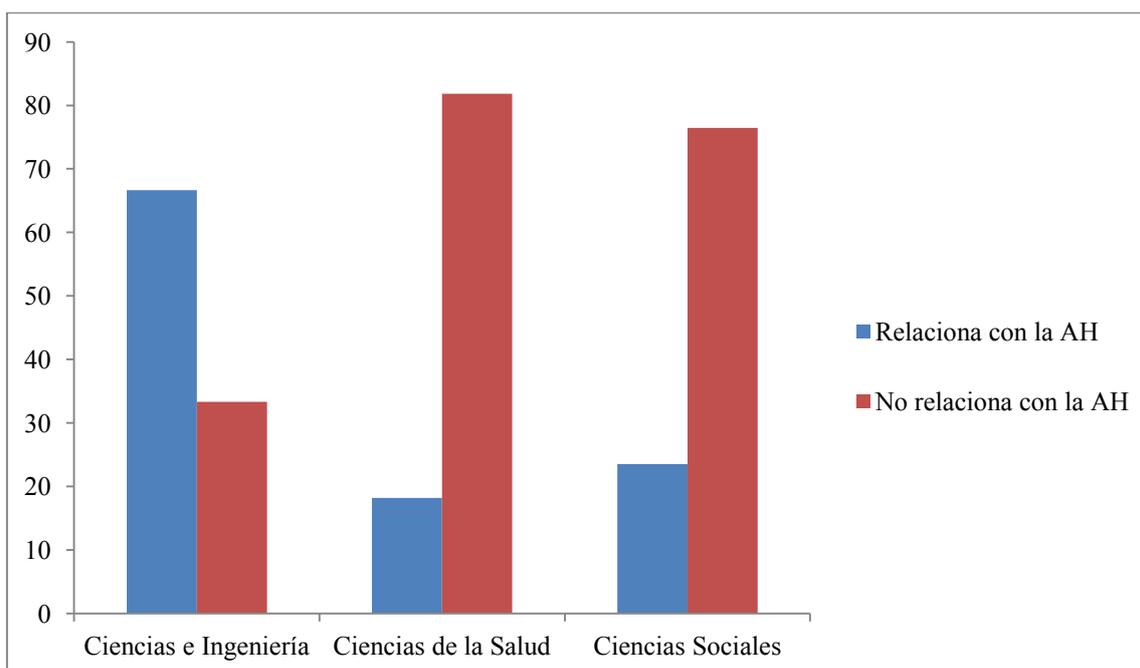
El grupo de Ingeniería es el que más veces relaciona la expresión con la asíntota horizontal en un 66,67%; a continuación, se encuentra el grupo de Sociales con un 25% de las veces y, por último, el grupo de Ciencias de la Salud, con un 18,18%.

Tabla 11-Relación de una expresión verbal con la asíntota horizontal (%)

CATEGORÍAS	MODALIDAD/GRUPO					
	Ciencias e Ingeniería	Ciencias de la Salud	Ciencias Sociales			
	1CA	1CB	2SA	2SB		
1. Relaciona con la AH	1.1. De manera directa	13,33	4,55	8,33	4,55	
	1.2. De manera indirecta: términos clave	1.2.1 Aproximar	33,33	9,09	0	18,18
		1.2.2. Alcanzar	20	4,55	8,33	4,55
			53,33	66,67	18,18	16,67
2. No relaciona con la AH	2.1. Reescribe la expresión	6,67	36,36	16,67	13,64	
	2.2. Intercambia los papeles de ∞ y L	13,33	13,64	25	13,64	
	2.3. Otras respuestas	2.3.1 No aplica	13,33	4,55	16,67	18,18
		2.3.2. Incoherente	0	27,27	25	27,27
			13,33	31,82	41,67	45,45
			81,82	83,33	72,73	

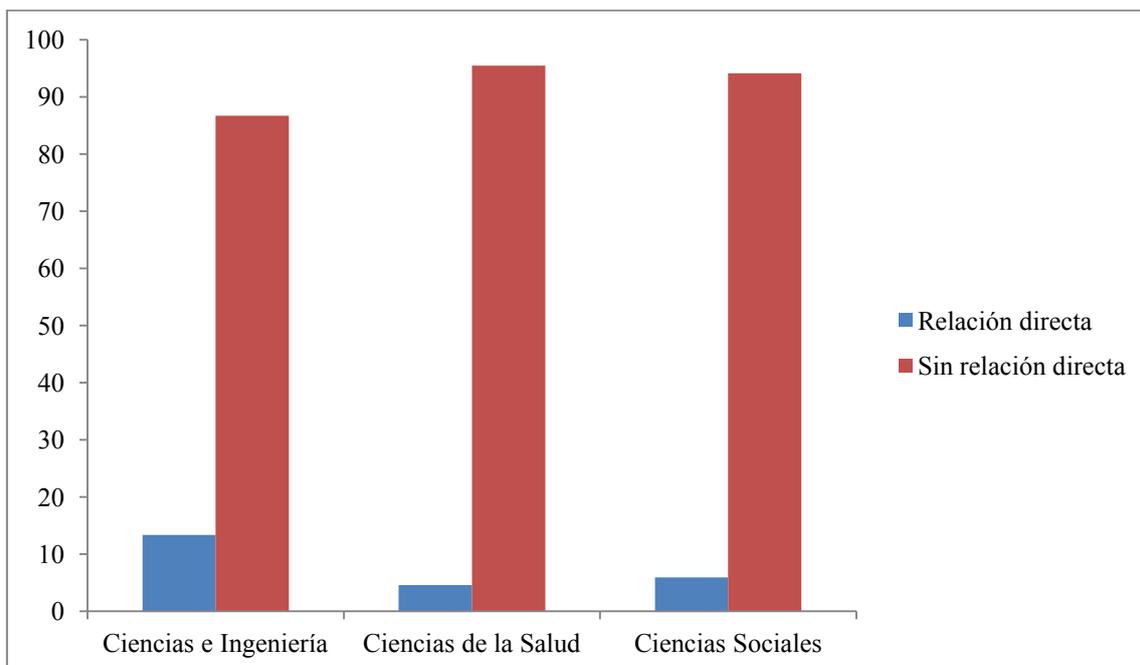
Podríamos interpretar que el porcentaje del grupo de Sociales sea más alto que el de Ciencias de la Salud debido a su mayor insistencia en la fenomenología e interpretación de modelos reales en los que aparecen la asíntota, en los que la traducción entre sistemas es una actividad más habitual.

Gráfico 5 –Relación, directa o indirecta de la expresión verbal con la asíntota horizontal



La relación directa de la expresión con la asíntota sigue la misma dinámica de los gráficos anteriores, teniendo que el grupo de Ingeniería es el que más veces hace mención formalmente a la asíntota horizontal con un 13,3% de las veces, mientras que el grupo de Ciencias de la Salud es el que menos veces lo asocia con un 4,55%.

Gráfico 6- Relación directa de una expresión verbal con la asíntota horizontal



▪ Valoración

Encontramos un 69,01% de los datos totales en los que no se relaciona la información con la asíntota horizontal. Centrándonos en cada grupo, tenemos que el grupo de Ingeniería cuenta con el mayor porcentaje de relación con la asíntota, un 69,01%, frente al 27,27% del grupo de Sociales y el 18,18% del grupo de Salud.

Este alto porcentaje que presenta el grupo de Ingeniería, 69,01%, podemos conectarlo con el 70,59% de respuestas en la que definieron la asíntota horizontal como con un concepto, siendo ambos casi iguales.

También debemos valorar las dificultades que tuvieron con el símbolo “perteneiente a” (\in), aunque se explicó su significado siempre que lo preguntaron.

4. Para cada gráfica, valora la posibilidad de que exista asíntota horizontal y, en el caso de que creas que exista, el posible comportamiento de la función respecto de su hipotética asíntota horizontal.

La propia selección y secuenciación de las gráficas de esta tarea nos proporcionó unas categorías de análisis, categorías que se perfilaban con las explicaciones que brindaban los sujetos en sus respuestas. Es por ello que no debemos entender estas categorías como rígidas, de la forma que si responde de forma óptima una serie de cuestiones ya presenta un nivel desempeño determinado, nada más lejos de la realidad. De igual manera teníamos especial interés en diseñar unas categorías de análisis propias que pudieran describir de manera precisa los significados que manejan estos alumnos de la asíntota horizontal.

Ya que la elaboración de la tarea estuvo basada en el trabajo de Kidron (2011), contábamos con sus mismas pretensiones en su realización, “create conflicts” (Kidron, 2011), tratando de que se contradigan sus concepciones a través de la aportación de distintos ejemplos que incluyen matices no valorados anteriormente. Es claro que contábamos con la dificultad añadida de que el único recurso que teníamos era el cuestionario escrito, por lo que en esa tarea insistimos especialmente que trataran de explicar todos sus razonamientos. Mostramos el siguiente ejemplo:

(Para la gráfica 3) “La función tiene $y=2$ como asíntota por la derecha y la izquierda pese a tener tal valor en $x=0$ ” (1CA4)

Hemos de mencionar que el descrito como “Nivel 1”, que incluye la determinación de la asíntota horizontal en la gráfica 4 (infinitos puntos de corte), no se corresponde a los contenidos tratados y trabajados de este curso, pero es contemplado con la única intención de describir estos niveles de desempeño de la forma más plena posible.

A partir de aquí, el proceso de análisis se formalizó registrando las respuestas de cada sujeto, valorando especialmente todos los comentarios y aclaraciones que añadían. La observación de patrones de respuestas muy semejantes invitaba al establecimiento de una sistema de categorías como el que presentamos. Generalmente se veía muy claro la categoría que le correspondía; sin embargo, en aquellos casos en los que había ciertas dudas, se contrastaba la información con las respuestas aportadas en otras tareas.

- **Presentación de categorías**

Nivel 1

- ✓ Reconoce AH cuando la función corta en más de una ocasión a la AH.-**Reconoce AH en la gráfica 4.**
- ✓ Maneja con fluidez los principales sistemas de representación en la enseñanza del límite (algebraico, numérico, gráfico, verbal).

Nivel 2

- ✓ Reconoce AH cuando la función corta una sola vez a la AH.-**Reconoce AH en la gráfica 3.**
- ✓ No reconoce AH cuando la función corta en más de una ocasión a la AH.

Nivel 3

- ✓ Analiza, diferencia y especifica los extremos ($\pm\infty$) en la descripción.-**Reconoce AH por $+\infty$ en la gráfica 5 y lo especifica.**
- ✓ No reconoce AH cuando la función la corta alguna vez.

Nivel 4

- ✓ Analiza de manera aislada $+\infty$ y $-\infty$.-**Reconoce en las gráficas 5 y 6 distintos comportamientos por $+\infty$ y $-\infty$, pero no llega a diferenciarlos.**
- ✓ No especifica ni diferencia extremos en la descripción

Nivel 5

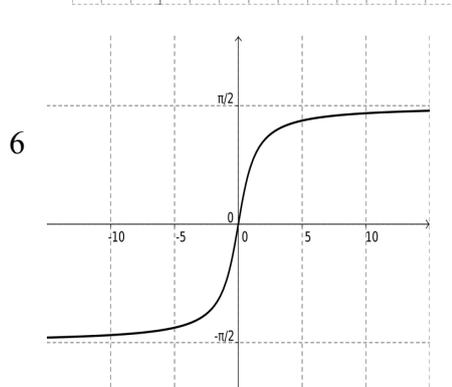
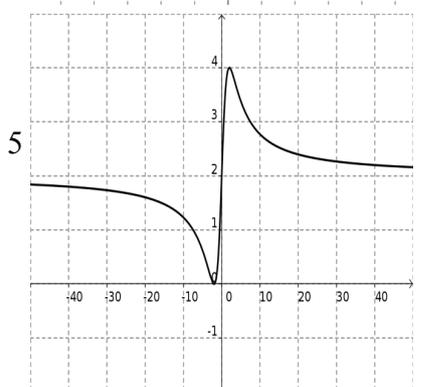
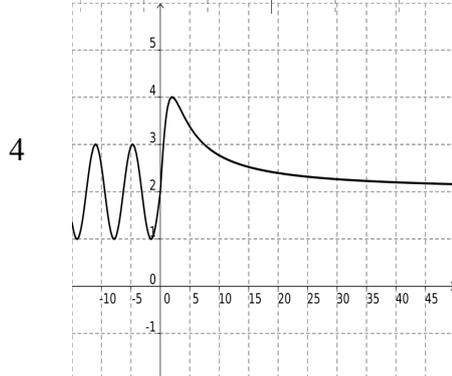
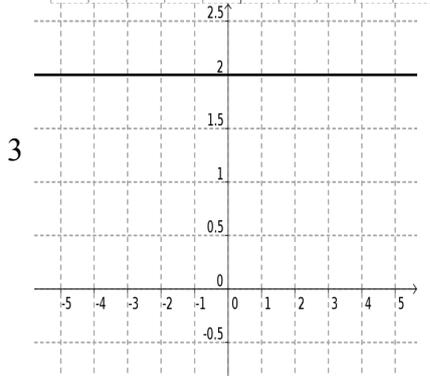
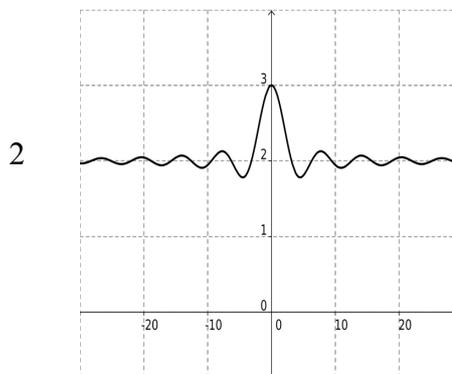
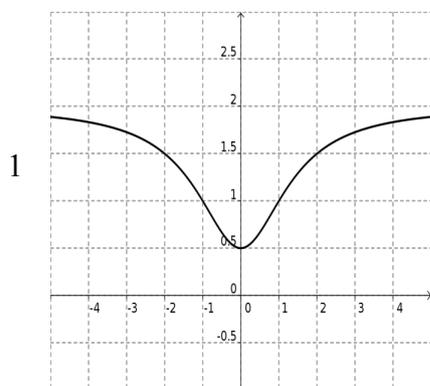
- ✓ Maneja más de un sistema de representación.

- ✓ No analiza de manera aislada los extremos en la descripción ($\pm\infty$).-No reconoce AH en la gráfica 5.
- ✓ No visualiza la gráfica más allá de la representación que aparece.-Otorga a los extremos del dominio que se representa las características de $+\infty$ y $-\infty$

Nivel 6

- ✓ Manejo de un único sistema de representación.
- ✓ Confunde el concepto.
- ✓ Asigna propiedades de la componente vertical a la componente horizontal.

Con el fin de facilitar la lectura, el lector podrá revisar nuevamente todas estas gráficas a continuación.



▪ **Resultados**

Tabla 12-Niveles de desempeño con la asíntota horizontal

CATEGORÍAS		MODALIDAD/GRUPOS			
NIVEL	DESCRIPCIÓN	Ciencias e Ingeniería	Ciencias de la Salud	Ciencias Sociales	
		1CA	1CB	2SA	2SB
NIVELES DE DESEMPEÑO CON LA ASÍNTOTA HORIZONTAL	I -Reconoce AH cuando la función la corta en más de una ocasión. -Maneja con fluidez los principales sistemas de representación en la enseñanza del límite (algebraico, numérico, gráfico, verbal)	0	0	0	0
	II -Reconoce AH cuando la función la corta una sola vez. -No reconoce AH cuando la función la corta en más de una ocasión	35,71	14,29	16,67	14,29
	III -Analiza, diferencia y especifica los extremos ($\pm\infty$) en la descripción -No reconoce AH cuando la función la corta alguna vez.	0	14,29	25	9,52
	IV -Analiza de manera aislada $\pm\infty$ -No especifica ni diferencia los extremos ($\pm\infty$) en la descripción	14,29	4,76	0	47,62
	V -Maneja más de un sistema de representación -No analiza de manera aislada los extremos ($\pm\infty$) en la descripción. -No visualiza la gráfica más allá de la representación que aparece	42,86	42,86	16,67	4,76
	VI -Maneja un único sistema de representación -Confunde el concepto	7,14	23,81	41,67	23,81

▪ **Valoración**

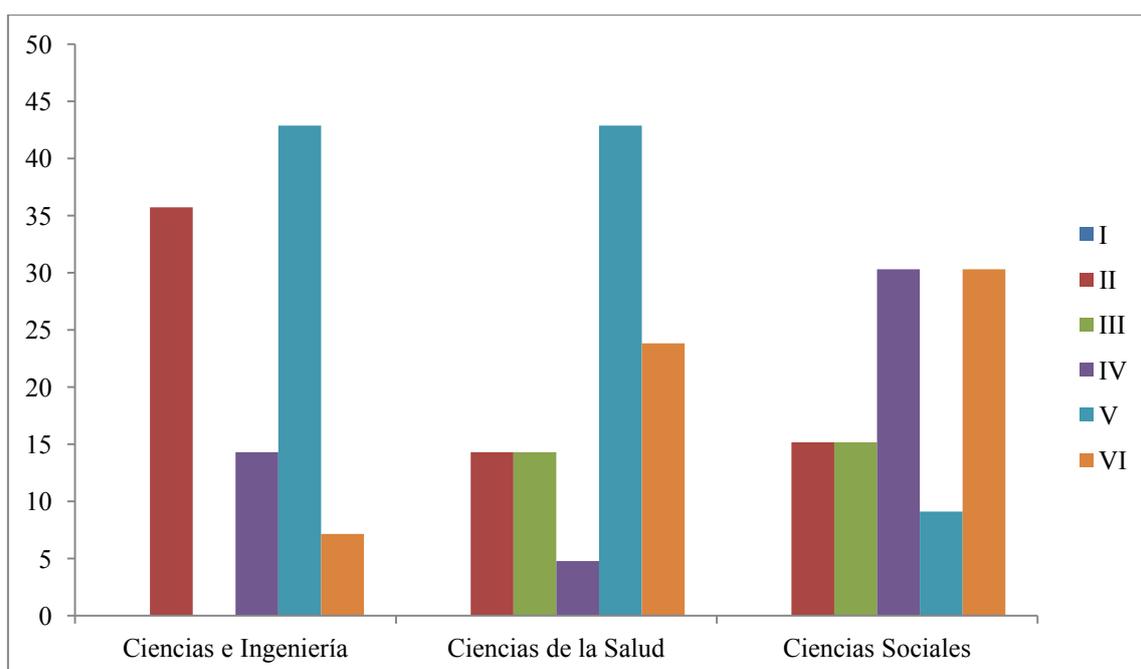
Como ya se apuntó el primer nivel no es propio del segundo curso de Bachillerato, teniéndose en cuenta únicamente por realizar una descripción lo más detallada posible del objeto. También se valoró con la intención de apreciar las reacciones de los sujetos ante la posibilidad de que una función tan lejana al modelo general que manejan de función con asíntota horizontal, pudiera tenerla.

El grupo de Ingeniería es el que presenta un porcentaje más alto en los primeros niveles, un 35,71% en el nivel 2, frente al 14,29% y al 15,15% de los grupos de Ciencias de la Salud y Ciencias Sociales. Como hemos estado barajando a lo largo de estas líneas, pensamos que la principal justificación de estos resultados es la mayor profundización de este grupo en cuestiones técnicas, lo que le dota a sus integrantes de mayores referencias a la hora de expresar o tratar algún tipo de información sobre este concepto.

No obstante, el grupo de Ingeniería cuenta con menor dispersión de resultados que los otros dos, es decir, que los niveles altos se concentran en las mismas categorías. Tal es así que si incluimos los tres primeros niveles, el grupo de Ingeniería sigue contando con un 35,71%, el grupo de Ciencias de la Salud ya contaría con un 28,57% y el de Sociales con un 30,3%, igualándose de manera significativa los datos de los tres grupos.

Atendiendo a los propios descriptores de cada nivel, el no reconocimiento de la asíntota horizontal cuando la función la corta en una ocasión se encuentra en la frontera entre el nivel 2 y 3, es decir, los sujetos de los niveles 1 y 2 son capaces de reconocer una asíntota cuando la función la corta en una ocasión. Respecto a los datos totales, sólo el 19,12% pertenece a estos niveles, lo que quiere decir que el 80,88% tienen, generalmente, excesivamente arraigada la concepción de “se acerca infinitamente pero no la corta” o la de “la función nunca corta a la asíntota”.

Gráfico 7-Niveles de desempeño con la asíntota horizontal



V. CONCLUSIONES FINALES

Finalizamos este estudio con las conclusiones en la que haremos una valoración general de los resultados obtenidos relacionándolos con los objetivos de la investigación. Asimismo incluimos un apartado de valoración personal donde reflexionaremos sobre nuestra actuación antes, durante u después de la investigación.

V.1. Análisis descriptivo-interpretativo

V.1.1. Grupo de Ciencias e Ingeniería

Podríamos decir que los significados puestos de manifiesto por los estudiantes de Ciencias e Ingeniería cuentan con una riqueza especial que les proporciona una mayor amplitud y profundización en el concepto, así como matices propios en los sentidos que ponen de manifiesto de la asíntota horizontal.

Estos matices propios los vemos, por ejemplo, en diferentes resultados sobre la concepción de “la función nunca corta a la asíntota”, teniendo más del 35% de sus respuestas detectando esta asíntota aún cuando la función la corte en alguna ocasión. Otro de los aspectos esenciales donde apreciamos estos detalles fue en la definición que realizaron de asíntota horizontal, presentando un 71% de respuestas que la describían desde el concepto y no desde el procedimiento llevada a cabo para calcularla. Hemos de ser conscientes de que estos sujetos reciben una instrucción similar a los otros grupos y que realizan tareas más o menos similares, no tratando ni mucho menos, por ejemplo, la definición formal del límite; sin embargo, el hecho de sus resultados tengan, casi, personalidad propia nos hace reflexionar sobre ello.

Para cada tarea, las principales respuestas aportadas por este grupo han sido las siguientes. En la primera tarea, como ya apuntamos, un 71% describen la asíntota horizontal como objeto (Gray y Tall, 1991). Dentro de este porcentaje, presentan un 23,53% lo describen como recta y un 29,41% como punto, concretamente como valor de ordenada. Este último detalle nos muestra un obstáculo epistemológico fruto del lenguaje al definir tanto la asíntota horizontal de una función y el valor de ordenada de un punto de la misma manera. Añadiendo además la concepción de “Se acerca infinitamente pero nunca llega a tocar”, da la impresión que a través de ese acercamiento infinito se le dota, directa o indirectamente, de estructura de punto.

La función más habitual que representan tiene dominio \mathbb{R} , un recorrido $(a, +\infty)$, sin simetrías y sin extremos relativos, actuando además la asíntota horizontal de cota

superior o inferior de la función. Estos resultados los encontramos en torno al 50% de las ocasiones. Las representaciones habituales son de tipo exponencial (28,57%) y racional, pero generalmente representando sólo la rama de la parte positiva del eje X, que lo observamos en un 60% aproximadamente.

Respecto a la asíntota horizontal, se aprecia perfectamente tendencia en la totalidad de los casos, 100%, señalando además la no alcanzabilidad y la no rebasabilidad de la asíntota, con un 85,71% y un 71,43%. Muestran además una asíntota horizontal por $+\infty$, 57,14%; o por $\pm\infty$, en un 35,71%, bajo un modelo de función gaussiana.

Para la tercera tarea, un 66,67% relacionan la expresión con la asíntota horizontal, observando en un 20% de estos datos una relación directa y forma con la misma. Finalmente, en la última tarea apreciamos menor dispersión que en los otros grupos, pero resultados más óptimos, es decir, es más homogeneidad: se comprende el concepto y se opera de manera más fluida o no se comprende plenamente.

V.1.2. Grupo de Ciencias de la Salud

El grupo de Ciencias de la Salud guarda importantes semejanzas con el grupo de Ingeniería aunque muestran un manejo de significados menos profundo, incluso menos que el grupo de Sociales, en el que es habitual más representaciones fruto de otras materias y, sobre todo, con la naturaleza especial del análisis de fenómenos cotidianos como el rendimiento económico de una empresa u otros.

De hecho, una de las principales señas de identidad de los datos recabados para este grupo es la dispersión y la homogeneidad, es decir, aparecen casi la totalidad de las respuestas que se dan, como el ejemplo de la función exponencial (9,09%), aunque los porcentajes están más equilibrados.

Podríamos apuntar que en el tipo de estudios a los que, en teoría, se encaminan estos estudiantes, la naturaleza de los contenidos matemáticos tiene un mayor sentido de “herramienta”. Es por ello que la mayor incidencia de actividad procesual que se aprecia hace que los significados que manejan estos estudiantes sean igualmente amplios pero menos profundos, mostrando mayores dificultades en la traducción entre sistemas de representación, como así podemos apreciar en la tercera tarea en la que un 81,82% de los sujetos no relacionan la expresión con la asíntota horizontal.

Todos estos detalles se aprecian desde la primera tarea en la definen casi de igual manera la asíntota horizontal como proceso y como objeto, 42,31% frente a un 46,15%, respectivamente. De la totalidad de sus resultados, vemos que poco más de uno de cada cuatro, 26,92%, brinda un sentido de cálculo a la asíntota, como vemos en el ejemplo:

“Se dibuja en una gráfica en el eje de la y de la forma discontinua, para calcularlo se hace con $\lim_{x \rightarrow \pm\infty}$ y no puede salir ∞ porque sino no existe” (1CB9)

De su definición como objeto, encontramos que un 33,33% la definen como recta.

Para la representación que realizan en la segunda tarea, el ejemplo más habitual que muestran también es una función con dominio \mathbb{R} , recorrido $(a, +\infty)$, sin simetrías y sin extremos relativos, aunque ya el porcentaje de aparición se reduce al 40%.

La asíntota que representan es por $+\infty$ con una expresión analítica $y=a$, $a>0$, en un 55,56% y en un 76,19% de las respuestas, respectivamente. El comportamiento de la función con la asíntota que expresan es el de una asíntota no alcanzable y no rebasable en un 65%. Resultando la función racional el principal tipo de función al que se ajustan sus respuestas, un 45,45%; repartiéndose de manera perfecta los casos de función racional con asíntota vertical, tipo $f(x) = \frac{1}{x}$, y los que no cuentan con asíntota vertical dentro de funciones racionales más complejas.

Las dificultades en la traducción entre sistemas también la podemos comprobar en la tercera tarea, encontrando un 49% de los sujetos que reescriben la expresión o que intercambian los papeles de ∞ y L, Para la última tarea observamos que la mayoría de los sujetos se concentran en el nivel V (42,86%), debido a las gráficas 3, en la que la función corta una vez a la asíntota; y a la 5, donde sólo hay asíntota horizontal en $+\infty$ y aparece además una función tipo seno en la parte izquierda de la gráfica. Estos datos sólo no hacen más que remarcar lo analizado anteriormente. Una mayor actividad provoca un aprendizaje muy algorítmico, llegando al caso de que lo que conocen los sujetos no son los conceptos, sino los ejemplos. Mismos ejemplos que dominan a la perfección y que, en el caso de hacerlos trabajar fuera de los mismos, presentan importantes dificultades.

V.1.3. Grupo de Ciencias Sociales

A diferencia del anterior grupo, destacaríamos que el grupo de Ciencias Sociales muestra el manejo de unos significados menos amplios pero más profundos, es decir, cuentan con menos tipos de respuestas, pero son más plenas. Llegamos a esta conclusión por resultados tales como, por ejemplo, la no aparición de funciones exponenciales en los ejemplos que aportan (0%) o la relación de la expresión de la tercera tarea con la asíntota horizontal, 23,53%, superior de la que muestran el grupo de Ciencias de la Salud, 18,18%.

En la primera tarea vemos que un 37,21% define la asíntota horizontal como proceso frente a un 60,47% que lo hace como objeto. Dentro de los primeros casos aparecen ejemplos que se refieren a un ejemplo concreto, como el que vemos a continuación. Respecto a la definición como objeto, encontramos que un 53,85% de tales respuestas la definen como “línea”, siendo ambas situaciones posibles señales de la existencia de menos recursos para su definición por parte de los sujetos.

“Por ejemplo si hay una AH en el punto $y=4$, la función se acercará cada vez más a ese punto pero sin alcanzarlo (3.9, 3.99, 3.999,...)” (2SA7)

La representación habitual que utilizan es la función hipérbola: dominio $\mathbb{R} - \{b\}$, siendo $x=b$ la asíntota vertical; recorrido $\mathbb{R} - \{a\}$, siendo $y=a$ la asíntota horizontal, con simetría impar, con monotonía creciente-decreciente y sin extremos, coincidiendo estas respuestas casi de manera idéntica en torno a un 42%. De la misma forma coinciden con las características de la asíntota horizontal, la cual representan por $\pm\infty$, un 40,74% y sólo por $+\infty$ un 51,85%, fruto de la representación de una rama de la hipérbola.

Los siguientes resultados siguen el patrón tan marcado de los datos anteriores, destacando la aparición de la rebasabilidad que aparece en un 40,74%, frente a los 28,57% y a los 23,53% de los otros grupos. Teniendo también el detalle que siempre que emplean un modelo de función racional, lo hacen disponer también de asíntota vertical, dando aún más fuerza si cabe a las ideas sobre las que reflexionamos.

V.2. Análisis comparativo

La comparación necesaria de los datos estudiados muestra un perfil bastante marcado para cada una de las modalidades, muy en consonancia a las demandas realizadas por las asignaturas que reciban y a los intereses que, en teoría, podrían tener los sujetos.

Los sujetos del grupo de Ingeniería recibían también clases de Física, de la que se examinaban en Selectividad; y de Electrotecnia, como optativa, tratando en ambas asignaturas situaciones relacionadas con la asíntota horizontal. Esta mayor exploración del significado del concepto en dirección a la fenomenología y al trabajo con una variedad mayor de representaciones sobre el tema hace sin duda que los significados puestos de manifiestos cuenten con mayor riqueza y profundidad conceptual.

Por su parte, al grupo de Ciencias de la Salud muestra un sentido del concepto con una carga más procesual, aunque disponiendo de un mayor número de ejemplos que el grupo de Sociales. Seguramente el grupo de Ciencias Sociales haya aportado los resultados más inesperados, contando en un primer momento que el grupo de Salud muestre un tipo de significado más preciso sobre el término.

La principal causa de esta situación puede ser el análisis de casos reales que aparecen en otras asignaturas como Geografía o Economía. No es una cuestión de que el trabajo con más ejemplos haga comprender más y mejor, lo que tratamos de explicar es que el trabajo con más ejemplos, y más aún con ejemplos reales, hace que el desempeño en el concepto sea, generalmente, más preciso, aunque no necesariamente más amplio al trabajarse casi siempre los mismos ejemplos tanto en todos en los que aparecen. Sería conocer menos ejemplos, pero conocerlos mejor. Sin embargo, resultó extraño que en este grupo de Sociales no apareciese ningún ejemplo tipo exponencial ya que nos consta que se imparte igualmente en estas matemáticas; así como el hecho de que muchas funciones que se trabajen en economía, como la función logística, sean de este tipo.

En definitiva, sin contar aspectos motivacionales y falta de rigor por parte de los sujetos y una valoración del instrumento que abordaremos a continuación, los significados puestos de manifiestos muestran que no se aprende lo que se enseña sino que se aprende de la manera que se enseña y que las demandas internas o externas de cara a resultados específicos en el área hace determinar sentidos muy particulares del mismo concepto, incluso dentro de la misma modalidad de enseñanza.

V.3. Limitaciones de la investigación

Las principales limitaciones de la investigación ha sido una escasa profundización en buena parte de las respuestas de los sujetos. No cabe duda que este hecho ha dificultado sustancialmente el análisis realizado, debiendo recurrir a las respuestas aportadas en otras tareas para tratar de obtener una interpretación más precisa de los datos.

Aunque también deba mencionarse en el apartado de autoevaluación, hemos de considerar que la pretensión de abordar un estudio tan profundo del concepto, tratando y explorando casi de igual forma los tres vértices del triángulo semántico: estructura conceptual, sistema de representación, fenomenología (Rico, 2007) ha sido un hándicap a la hora de abordar un volumen muy importante de información, debiendo dejar fuera del análisis tanto por este detalle como por la falta de riqueza de las respuestas a las dos últimas tareas. Asimismo, ante tal volumen de información el instrumento desarrollado fue largo posiblemente, lo que mermaría las condiciones de los sujetos.

V.4. Autoevaluación

V.4.1. Autoevaluación personal

Personalmente sólo puedo mostrar felicidad por el trabajo realizado antes, durante y después del mismo. Indudablemente, nuestra inexperiencia nos ha hecho cometer errores importantes, aunque bien solventados con la ayuda de los directores del proyecto. Llegar hasta aquí ha resultado un camino largo y complejo, pero es el camino que se eligió en su momento, camino imposible de atravesar sin las facilidades prestadas por los directores del trabajo y por los profesores del IES Salvador Rueda.

El aprendizaje como investigador es inmenso, dado que nos encontramos al inicio de este apasionante recorrido, pero destacaría especialmente el aprendizaje personal y profesional realizado. No es que sepa más matemáticas gracias al trabajo, es que las sé de mejor manera y eso resulta brillante.

V.4.2. Autoevaluación del instrumento

El cuestionario realizado fue muy completo y trabajado meticulosamente para que fuera capaz de hacer aflorar los significados propios de estos sujetos en relación al concepto. Entendemos que las tareas recogían de manera muy precisa el concepto de asíntota en su triple dimensión: signo, sentido y referencia (Frege, 1998). Sin embargo, dado el

interés y calidad de las respuestas obtenidas, podemos decir que resultó largo, perdiendo seguramente calidad de las respuestas a favor de la cantidad. Gran lección aprendida.

De igual manera pensamos que el instrumento está muy capacitado para describir las concepciones de estos sujetos, no esperando respuestas de mucha mayor calidad en el caso de que se hubiese apostado por una versión más reducida. Eso sí, hemos de dejar claro que los resultados no son generalizables, al ser un estudio puramente exploratorio.

V.4.3. Consecución de los objetivos

Sólo podemos entrar al análisis de la consecución de los objetivos de enseñanza, ya que los objetivos de aprendizaje no quedan sujetos a nuestro control a corto plazo. Mostramos a continuación los objetivos marcados y la valoración (1-5) de su logro.

- Proseguir la propia formación como investigador asumiendo responsabilidades cada vez mayores en cada una de las etapas de la investigación. **5**
- Interpretar e interrelacionar las respuestas brindadas por los sujetos para describir con la mayor precisión la noción de significado adquirido sobre la asíntota horizontal. **4**
- Diseñar e implementar un instrumento que atienda con la mayor profundidad posible al significado de la asíntota horizontal como contenido matemático escolar. **5**

V.5. Sugerencias para investigaciones futuras

La fase prospectiva propia de la investigación invita a que sólo sea un paso de un interesante camino muy poco explorado y que cuenta con una potencialidad excelsa. Personalmente sería muy interesante realizar un estudio similar al de Kidron (2011), sobre el que nos basamos para la cuarta tarea, pero sin utilizar las entrevistas que llevó a cabo en su estudio. Conseguir, como hace la investigadora, llegar al punto en el que el sujeto se da cuenta de alguna deficiencia en su concepción sobre un concepto, teniendo que reconstruir su conocimiento, debe ser sencillamente apasionante.

También podría ser interesante realizar estudios que contrasten las concepciones sobre los tres tipos de asíntotas; las concepciones en Secundaria y en Bachiller, o incluso en la universidad; o un estudio histórico más profundo de la evolución del término asíntota a lo largo de la historia.

REFERENCIAS

- Arce, M. y Ortega, T. (2014). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73.
- Arraiz, G. (2014). Teoría fundamentada en los datos: un ejemplo de investigación cualitativa virtualizada en el área de matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 41, 19-29.
- Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales*. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Ruptura en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula*, 10, 119-135.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 331-354). México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana en Matemática Educativa (RELIME)*, 4 (3), 219-236.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición del límite funcional. *Uno, Revista de didáctica de las matemáticas*. Vol. 30, pp. 67-82.
- Blázquez, S., Gática, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 12 (1), 145-168.
- Bishop, A. (1983). Space and geometry. En R. Lesh y M. Landau. (Eds.). *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 175-203). New York, US: Academic Press.
- Bracho, R. (2010). *Visibilidad local de la investigación en educación matemática en España: Análisis cuantitativo y conceptual de revistas científicas (1999-2008)*. Tesis doctoral. Córdoba: Universidad de Córdoba.

- Bracho, R., Maz, A., Jiménez, J., Adamuz, N., Gutiérrez, P. y Torralbo, M. (2010). La investigación en Educación Matemática en la revista Epsilon. Análisis cuantitativo y temático (2000-2009). *Epsilon*, 27(2), 75, pp. 9-25.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico, L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- Claros, F. J. (2010). *Límite finito de sucesiones. Fenómenos que organiza*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Schwingerdorf, K., Thomas, K., Nichols, D. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behaviour*, 15, 167-192.
- Cuñat, R. (2007). Aplicación de la Teoría Fundamentada al Estudio del Proceso de Creación de Empresas. *XX Congreso Anual de AEDEM, Vol.2, 2007*.
- Da Ponte, J.P. (1999). Las creencias y concepciones de maestros como un tema fundamental en formación de maestros. En K. Krainer y F. Goffree (Eds.). *On research in teacher education* (pp 43-50). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
- Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics* 14, 358-414.
- Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Proceedings PME XXIII, México, Vol. I*, 3-25.
- Fernández-Plaza, J.A. (2010). *Unidad Didáctica: Límite y Continuidad de Funciones*. Memoria final del Máster universitario de profesorado de educación secundaria obligatoria, bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas (especialidad de matemáticas). Granada: Universidad de Granada.

- Fernández-Plaza, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de Límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio*. Memoria final del Máster en Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada.
- Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia. En Mosterín, J. (Ed.). *Escritos Filosóficos*. Barcelona: Crítica.
- Gambara, H. (2002). *Métodos de investigación en psicología y educación. Cuadernos de prácticas (3ª edición)*. Madrid: McGraw-Hill.
- Gray, E. y Tall, D. (1991). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. *Proceeding of PME XIII*, Vol. II 72-79.
- Gray, E. y Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility. A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), 115-141.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Gutiérrez, A., Boero, P. (Eds.) (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy, F. Hitt, C. Imaz, F. Rivera y S. Ursini (Eds.), *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual* (pp. 91-111). México D. F.: Editorial Fondo Educativo Interamericano.
- Kaput, J.J. (1987). Representations systems and mathematics. En C. Javier (Ed.). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(6), 1261-1279.

- Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.
- Knorr, W. R. (1982). Infinity and continuity: The interaction of mathematics and philosophy in antiquity. En Kretzmann, N. (Ed.) *Infinity and continuity in ancient and medieval thought* (pp. 112-145). Ithaca, N.Y.: Cornell University Press.
- León, O. y Montero, I. (1997). *Diseño de investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill.
- Matosas, R. (2007, marzo, 3). El sentido de trascendencia y el desarrollo humano integral. Puede consultarse en:
http://www.matosas.com/competir_con_la_mente/2007/03/el_sentido_de_t_2.html. Consultado [6-6-2014]
- Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.
- Penalva, M. (2001). Implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos: *Reunión científica de Pensamiento Numérico y Algebraico* (SEIEM): Universidad de Valladolid.
- PIACC (2013). *PIACC 2012. Programa para la evaluación internacional de las Competencias de los Adultos. Informe nacional*. Ministerio de Educación, cultura y deporte.
- PISA (2004). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. OCDE y Santillana.
- PISA (2014). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español. Resultados y Contexto*. Ministerio de Educación, cultura y deporte.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 210-237). UK: Sense Publishers.
- Puig, L. (1997). Análisis Fenomenológico. En Rico, L. (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

- Real Academia Española (2001). Diccionario de la Lengua Española. (22ª Ed.). Madrid.
Disponible en: <http://www.rae.es/recursos/diccionarios/drae>. Consultado [22-06-2014].
- Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En Contreras, L. C., Carrillo, N., Climent, N. y Sierra, M. (Eds.) *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 219-231). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Rico, L. (2007). *Sistema de Significados de un Concepto en las Matemáticas Escolares*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Avances de Investigación en Educación Matemática, AIEM 1*, pp. 39-63.
- Sánchez Compañá, M. T. (2012). *Límite de una función en un punto: Fenómenos que organiza*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, M.P. (2010). *Metodología de investigación (5ª edición)*. México: McGraw-Hill.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.18*, 371-397.
- Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2002). Una visión integradora acerca del concepto de límite. *UNO Revista de Didáctica de la Matemática*, 29, pp. 77-94.
- Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 7(4), 765-790.
- Vinner, S. (1994). Students' misconceptions and inconsistencies of thought. *Proceedings of the International Congress on Mathematical Education*. 109-113.