Trabajo Fin de Máster

La divisibilidad de los números naturales

MÁSTER UNIVERSITARIO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS.

ESPECIALIDAD MATEMÁTICAS.

Luis de la Higuera Romero

Director: Luis Rico Romero

Índice:

1. INTRODUCCIÓN

El presente documento pertenece al módulo práctico del *Máster de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*. Con su elaboración, pretendo poner de manifiesto el progreso realizado y los logros alcanzados en las competencias establecidas por la ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre y que constituyen un requisito necesario para la obtención de dicho título.

Para poner de manifiesto, tanto la experiencia de las cuatro semanas de practicas externas en un centro docente (en este caso el Politécnico Hermenegildo Lanz), como lo aprendido en el resto de las asignaturas del programa de dicho Máster, he llevado a cabo la planificación de una Unidad Didáctica de acuerdo con el modelo de análisis didáctico con el que he trabajado. De este modo he tratado de mostrar el grado de satisfacción de los objetivos descritos más adelante, recogidos en el Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre.

Asociados a algunos de estos objetivos, hay una correspondencia con las partes en que se estructura el trabajo. Así, para los primeros tres objetivos de conocer los contenidos curriculares, planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y procesar y comunicar información transformándola en conocimiento, se proponen los análisis de contenido, el cognitivo y el de instrucción. O para satisfacer el de concretar el currículo y aplicar metodologías didácticas, la sección propiamente de la Unidad Didáctica, donde se describen cada una de las sesiones programadas.

El tema elegido para este trabajo es el de Divisibilidad para números naturales. Tras una primera parte de acercamiento al tema de forma colectiva, aquí presento mi propuesta individual, desde las conclusiones obtenidas entonces, junto con lo trabajado posteriormente con la supervisión y dirección de mi tutor Luis Rico Romero. Concretamente, se expondrá una propuesta didáctica sobre el foco del Teorema Fundamental de la Aritmética dando, por tanto, por sabidos, los contenidos de los temas anteriores de Divisibilidad. Se trata de una propuesta de dos semanas de clase para alumnos del primero curso de Educación Secundaria Obligatoria.

He de aclarar que, si bien el presente documento trata de ajustarse a un proyecto realista en cuanto a lo factible de su puesta en marcha, está realizado desde un punto de vista teórico, es decir; no ha pasado por tanto ninguna prueba viabilidad con el día a día de un centro escolar, a pesar de que he tratado de hacer frente a las peculiaridades observadas en el período de prácticas como docente.

1.2 CONDICIONES CURRÍCULARES:

Según la ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria, se han de desarrollar los siguientes contenidos sobre Divisibilidad de Números Naturales en el primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria:

- Divisibilidad de números naturales. Múltiplos y divisores de un número. Uso de los criterios de divisibilidad.
- Números primos. Números compuestos. Descomposición de números en factores primos.
- Múltiplos y divisores comunes a varios números.
- Máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.): procedimientos de cálculo.
- Aplicaciones de la divisibilidad y uso del m.c.d. y del m.c.m. en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas.

Los cuales serán evaluados siguiendo los criterios, también establecidos en esta orden:

1. “Utilizar números naturales y enteros, así como fraccionarios y decimales sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información. Se trata de evaluar la capacidad para:

(…) Aplicar la divisibilidad en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas. Transmitir informaciones utilizando los números de manera adecuada. (…)”

4. “Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números, (…) Este criterio pretende estimar la capacidad para:

Percibir en un conjunto numérico aquello que es común, la secuencia lógica con que se ha construido, un criterio que permita ordenar sus elementos (…)”

10. “(…) Formular verbalmente conjeturas propias y tomar decisiones teniendo en cuenta la información disponible”.

2. ANÁLISIS DE CONTENIDO

2.1 DESARROLLO HISTÓRICO

<u>INTRODUCCIÓN</u>

Al hablar de divisibilidad, así como de muchas otras ramas del Álgebra, es difícil establecer una fecha exacta o precisa de cuándo empezó el hombre a estudiarla. Entre otras cosas, debido a lo cotidiano de temas como la repartición en partes iguales o derivados de propiedades de múltiplos y divisores. Podríamos poner de ejemplo el hueso de Ishango; datado del 20.000 a.C y donde presuntamente pueden verse unas muescas relacionadas con algo más que una simple numeración. Y es que la curiosa disposición de estas rayas coincide por momentos con los números primos o con algunas relaciones de multiplicidad. Este hecho nos hace pensar en la preocupación de la humanidad, desde los tiempo más remotos, por dar respuesta a ciertos asuntos relacionados con la divisibilidad.

Sin embargo, no tenemos constancia de que hasta pasados muchos milenios, empezaran a organizarse de forma explícita, las bases de todos estos conceptos. Y en este proceso no podemos dejar de señalar las principales culturas donde se interesaron por estas cuestiones:

<u>LAS PRIMERAS CIVILIZACIONES</u>

En el Antiguo Egipto existía una preocupación constante por cuestiones de este tipo, como recoge el famoso Papiro de Rhind. Desde la aparición en el 2700 a.C. del sistema de numeración decimal, los progresos que se produjeron en la Geometría y en la Aritmética básica fueron más que notorios y sus aplicaciones y repercusión en todo tipo de cuestiones desde la escritura a la arquitectura, incalculables.

En el Valle del Indo, y también sobre esa época, el sistema decimal parece haber tenido un fuerte influjo en el desarrollo matemático de entonces estableciéndose como telón de fondo para los cimientos del álgebra.

Mención especial tiene el Imperio Mesopotámico donde, ya desde los antiguos sumerios, realizaron numerosos hallazgos cuyas repercusiones en Occidente, como tantas otras veces ocurriría después en la historia, tuvieron tanta importancia. No podemos dejar de señalar la aparición en este marco del sistema de numeración sexagesimal, que depende en gran medida de argumentos de divisibilidad. Del sistema decimal como consecuencia de los diez dedos de las manos se establecen generalizaciones que encuentran en el 60 un número con muchos divisores al que se puede acceder de muchas formas y, por tanto, repartir de maneras muy diversas. Aunque su puesto de honor en la historia estaba reservado a la medición del tiempo y la Geometría, en Oriente Medio se sigue utilizando este sistema de numeración para contar.

Con estos datos matemáticos primitivos, queremos fundamentalmente dar una idea de la necesidad que las antiguas civilizaciones van teniendo de nociones sobre divisibilidad, resto, multiplicidad… que, lejos de contar con el rigor científico de los últimos siglos, facilitan la resolución de cada vez más problemas de la vida cotidiana de la gente.

DE LA GRECIA DE PITÁGORAS A LA DE EUCLIDES; FORMALIZACIÓN

Pero tras toda esta maraña de ideas y buenas intenciones repartidas a lo largo y ancho del planeta, tuvo que llegar un período y un lugar donde muchos de esos saberes, y otros nuevos, iban a ser recogidos. En una época donde la filosofía y la democracia iban a marcar las pautas de su historia mientras que Filipo II y, sobre todo su hijo Alejandro Magno, se empeñaban por tener el mayor imperio jamás creado, y las ciudades se convertían en los centros del saber, de las ciencias y del arte, surgieron las figuras de los grandes matemáticos helenísticos como Euclides, Eratóstenes, Arquímedes o Apolonio. Mucho antes, Pitágoras, el primer matemático puro, había creado su importante escuela con numerosos discípulos, que durante varios siglos fueron desarrollando sus teorías: A parte de los numerosos descubrimientos que hizo en Geometría, (su famoso teorema, la teoría de los cinco sólidos perfectos, propiedades sobre figuras…), en el tema que nos ocupa ya Pitágoras mantenía bastante interés (hablaba de los números perfectos como aquellos que son iguales a las suma de sus divisores propios positivos (sin incluirse él mismo), los números amigos; aquellos pares de números si cada uno es igual a la suma de los divisores propios del otro (por ejemplo el 220 y el 284))… es decir, que ya había conciencia y preocupación acerca de la noción de divisibilidad e incluso manejaban conceptos de múltiplos y divisores antes de que Euclides, recogiera en sus Elementos la definición de número primo.

A Euclides (325 a.C. - 265 a.C.) se le conoce como el padre de la Geometría. No obstante, su importancia va mucho más allá de este campo en particular. Sabemos que vivió en Alejandría durante el reinado de Ptolomeo I y sistematizó en su libro Los Elementos todos sus saberes. En esta obra se presenta de manera formal, y a partir de cinco postulados un estudio sobre las propiedades geométricas del círculo, triángulo, esfera… En los libros VII, VIII y IX estudia la teoría de la divisibilidad que, además de la importancia de las nuevas aportaciones realizadas por él, tiene el valor añadido de suponer la primera recopilación de este campo, de manera ordenada y bastante precisa.

Como resultados destacados podemos mencionar, además de la primera definición de primo, la demostración sobre que el conjunto formado por estos es infinito. También definió el concepto de máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos números así como el de números perfectos en el libro IX: “Si colocamos los números que queramos comenzando desde una unidad en proporción doble de forma continuada, hasta que su suma se convierta en un primo, y si esa suma es multiplicada por el número final, el producto será perfecto”. Aquí, proporción doble quiere decir que cada número de la secuencia es dos veces el número precedente; por ejemplo:

7 = 1 + 2 + 4. Como 7 es primo, la suma total) x (el último) = 28, que es un número perfecto.

Volviendo al máximo común divisor, no podemos dejar de señalar el algoritmo, que lleva su nombre, para calcular dicho máximo común divisor d de dos números m y n. Mediante divisiones euclidianas sucesivas de forman que podamos escribirlo de la forma
$d = p \cdot m + q \cdot n$

De forma tradicional, y ya sin apoyarse en la Geometría, el Algoritmo de Euclides puede recogerse de la siguiente manera (donde en este caso se recogen nociones posteriores):
Al dividir a entre b (números enteros), se obtiene un cociente q y un residuo r. Es posible demostrar que el máximo común divisor de a y b es el mismo que el de b y r. Sea c el máximo común divisor de *a y b*. Como $a = bq+r$ y c divide a a y a b, divide también a r. Si existiera otro número mayor que c que dividiese a b y a q, también dividiría a a, por lo que c no sería el m.c.d de *a y b*, contradiciendo así la hipótesis. Éste es el fundamento principal del algoritmo. También es importante tener en cuenta que el máximo común divisor de cualquier número a y 0 es precisamente a. (Para fines prácticos la notación mcd (a,b) significa máximo común divisor de a y b).

Otro gran apartado cuya importancia es capital y cuyo enunciado puede parecer obvio es el Teorema Fundamental de la Aritmética, y que ya Euclides enunció y, prácticamente demostró (tuvo que ser Gauss quien lo hiciera de forma completa). En un primer paso Euclides demuestra que todo número admite una descomposición como producto de primos y en el segundo esboza que cualesquiera dos representaciones son iguales salvo reordenación. La dificultad aquí sobre cómo tratar al número 1 a nivel de primalidad supuso durante mucho tiempo serias controversias, y se solventó más adelante cuando se estableció como convención que el número 1 no era primo. El lema de Euclides, es otro resultado que no podemos dejar de señalar y que dice: Si p es un número primo y divide al producto de dos enteros positivos, entonces el número primo divide al menos a uno de los números.

Antes de dar un salto en el tiempo importante, destacaremos la figura de Eratóstenes, que aunque pasaría a la historia entre otras cosas como el primero en dar una medida más que aceptable de las dimensiones de la Tierra, en el tema de Divisibilidad siempre será recordado gracias a su conocida Criba con la que se obtienen de un modo rápido todos los números primos menores que uno dado. Si bien en vida su tabla abarcaba los cien primeros números naturales, la versión informática de este algoritmo se ha ido convirtiendo en los últimos años en un proceso estándar para caracterizar o comparar la eficacia de diferentes lenguajes de programación.

LA MATEMÁTICA EUROPEA Y LOS NÚMEROS PRIMOS

En los comienzos de la revolución científica, durante el siglo XVII, la principal preocupación giró en torno al descubrimiento de los números primos; en encontrar aquél más grande o descubrir un procedimiento para calcularlos. Hubo pocos avances en el estudio de los números primos hasta el siglo XVII. En 1640 Pierre de Fermat estableció (aunque sin demostración) el pequeño teorema de Fermat, posteriormente demostrado por Leibniz y Euler. Es posible que mucho antes se conociera un caso especial de dicho teorema en China. El teorema dice así:

Si p es un número primo, entonces, para cada número natural a, $a^p \equiv a \pmod{p}$
Esto quiere decir que, si se eleva un número a a la p-ésima potencia y al resultado se le resta a, lo que queda es divisible por p.

Fermat conjeturó que todos los números de la forma 2^{2n+1} eran primos (por lo que se los conoce como números de Fermat) y lo verificó para n = 1, 2, 3 y 4 (es decir, 2^{16+1}). Sin embargo, el siguiente número de Fermat 2^{32+1} es compuesto (uno de sus factores primos es 641), como demostró Euler. De hecho, hasta nuestros días no se conoce ningún número de Fermat que sea primo para n > 4.

El monje francés Marin Mersenne (1588- 1648) investigó aquellos números primos de la forma $2^p - 1$, donde p es primo. En su honor, se los conoce como números de Mersenne.
En el trabajo de Euler en teoría de números se encuentran muchos resultados que conciernen a los números primos. Demostró la divergencia de la serie

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$$

Y en 1747 demostró que todos los números perfectos pares son de la forma $2^{p-1}(2^p - 1)$, donde el segundo factor es un número primo de Mersenne. No obstante, se cree que no existen números perfectos impares, si bien todavía es una cuestión que no está del todo clara.

A comienzos del siglo XIX, Legendre y Gauss conjeturaron de forma independiente que, cuando n tiende a infinito, el número de primos menores o iguales que n tiende a infinito en la forma $\frac{n}{\ln(n)}$. Este teorema, llamado teorema de los números primos pudo ser demostrado gracias a la función zeta de Riemann. Hadamard y De la Vallée-Poussin, dieron forma a este esquema usando éste y otros conceptos y consiguieron demostrarlo ya en 1896.
Durante el siglo XIX se desarrollaron algoritmos para saber si un número es primo o no mediante la factorización del el número siguiente (p+1) o el anterior (p-1). En el primer caso, tenemos el test de Lucas-Lehmer, desarrollado a partir de 1856, y en el segundo, se encuentra el test de Pépin para los números de Fermat (1877). El caso general de test de primalidad cuando el número inmediatamente anterior se encuentra completamente factorizado se denomina test de Lucas.

Dejando a un lado estas incursiones por el misterioso mundo de los números primos, hemos de volver al siglo XVIII, cuando el matemático francés Étienne Bézout daría un resultado importantísimo, que podríamos incluir en un temario más avanzado a continuación del algoritmo de Euclides. Es la famosa identidad de Bézout:
El máximo común divisor de dos números puede ponerse como combinación lineal de ellos.
Como consecuencia de esta identidad, el máximo común divisor de dos enteros a y b es el máximo también en un sentido más fuerte: cualquier otro divisor común divide al máximo

común divisor porque este es combinación lineal de a y b.

A partir de esto y del mencionado lema de Euclides, podemos relacionar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de la siguiente manera:
Dados a y b enteros, d=mcd(a,b). Entonces mcm(a,b)=ab/d

También se deduce análogamente el caso del máximo común divisor, que el mínimo común múltiplo divide a cualquier múltiplo común.

2.1. ESTRUCTURA CONCEPTUAL

i) CAMPO CONCEPTUAL

TÉRMINOS Y NOTACIONES:

- Divisor y múltiplo *(d y m)*
- Doble, triple, cuádruple…*(2n, 3n, 4n …)*
- Medio, tercio, cuarto…*(½ n, 1/3 n, ¼ n …)*
- Número par y número impar.
- División exacta (Dividendo, divisor, cociente, resto) $\begin{array}{r|l} D & \underline{\;d\;\;} \\ r = 0 & \;C \end{array}$
- "m" divide a "n" *(m | n)* ó equivalentemente:
- "n" es divisible por "m"
- Máximo común divisor *(m.c.d.)*

- Mínimo común múltiplo *(m.c.m.)*

- Factorización.

- Factor

- Número primo *(p)*. Número compuesto

- Potencia: base y exponente *(q)* (cuadrado, cubo, a la cuarta…)

$$n = p_1^{q_1} \cdots p_a^{q_a}$$ p_i= primo a= número de divisores primos.

- Medida / reparto, reiteración / periodicidad.

CONVENIOS

Además de las notaciones anteriores, podemos destacar como convenios que:

- 1 no es primo.

- La manera de factorizar:

$$\begin{array}{r|l} a & p_1 \\ c_1 = a : p_1 & p_2 \\ c_2 = c_1 : p_2 & p_3 \\ \cdots & \\ p_n = c_{n-2} : p_{n-1} & p_n \\ 1 & \end{array}$$

Donde p_i = primo

- La factorización de un número se escribirá con los primos de menor a mayor.

- Buscar los divisores de un número entre los naturales menores que su raíz cuadrada.

RESULTADOS

- Criterios de divisibilidad (2, 3, 5 y 11)

- Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad.

- Todo número es divisible entre sí mismo y entre la unidad.

- En una división exacta, *d* y *C* son divisores de *D*

- Los divisores de un número son las posibles combinaciones al multiplicar sus factores primos.

PROPIEDADES

- Si $a \mid b$ y $b \mid a \Rightarrow a = b$

- Si $a \mid b$ y $b \mid c \Rightarrow a \mid c$

- Si $a \mid b$ y $a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$

- Teorema Fundamental de la Aritmética.

ii) <u>CAMPO PROCEDIMENTAL</u>

DESTREZAS

- Manejar la tabla de adición y multiplicación del conjunto {par, impar }

- Adquirir hábitos de generalización a través de ejemplos y experiencias.

- Encontrar contraejemplo como elemento falseador de un enunciado.

- Realizar la reversibilidad múltiplo y divisor.

- Aplicar los criterios de divisibilidad del 2, 3, 5 y 11.

- Deducir los criterios de divisibilidad del 6 y el 10.

- Descomponer un número en factores primos

- Obtener todos los divisores de un número a partir de su descomposición factorial.

- Identificar a simple vista un cuadrado perfecto menor que 200.

- Obtención del m.c.d y del m.c.m.

- Resolución de problemas de reparto y periodicidad.

RAZONAMIENTOS

- Deductivo: propiedades de las operaciones

- Inductivo: regularidades numéricas

- Recta numérica. Propiedades y operaciones en la recta

- Figurativo: uso de tablas y representaciones gráficas.

- Por reducción al absurdo. Para probar la unicidad en el Teorema Fundamental de la Aritmética o que la serie de los números primos es ilimitada.

ESTRUCTURA

- ($\mathbb{N}$, +, *, $\trianglelefteq$) conjunto parcialmente ordenado.

ESTRATEGIAS

- Comenzar la factorización en orden de menor dificultad (2, 5, 3…)
- Estimación de los resultados de una operación.
- Reconocimiento de soluciones no válidas en un problema.
- Adquirir hábitos de generalización a través de ejemplos y experiencias.
- Operar mentalmente números pequeños con precisión y rapidez.
- Identificar de forma rápida los primos de dos cifras.
- Reconocimiento de patrones numéricos.

2.3 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Atendiendo al término representación como “el modo en que los sujetos expresan sus conocimientos con notaciones simbólicas o mediante algún tipo de gráfico” (Rico, 1997a, p.53), tenemos que poner de manifiesto la distinción entre un concepto en sí mismo y su representación. [….]
Cada sistema de representación pone de manifiesto y destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa; también permite entender y trabajar algunas de sus propiedades al mismo tiempo que oculta otras, por ello tendremos que analizarlas una a una.

i) SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

Fundamentalmente atenderemos a todas aquellas notaciones descritas en el segundo apartado, bajo las pautas del sistema decimal de numeración y, a partir de él, las relaciones numéricas y de factorización. A través de las relaciones aritméticas entre números, y de su estructura multiplicativa, podemos obtener nuevas formas de representación. El Teorema Fundamental de la Aritmética establece una única forma de expresión de cada número en función de sus factores y ciertas propiedades multiplicativas.

Este sistema de representación universal, nos permite ordenar y estructurar los conceptos con mayor facilidad y, en principio, y aunque todos estén en mayor o menor medida relacionados, se trata de aquél que puede funcionar con mayor independencia.

ii) SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN VERBAL

En este tipo de representación verbalizamos todos los conceptos dados.

- Criterios de divisibilidad:

Ej. "Un número es divisible entre dos si es par"

Ej. "Un número es divisible entre tres si la suma de sus cifras es múltiplo de tres."

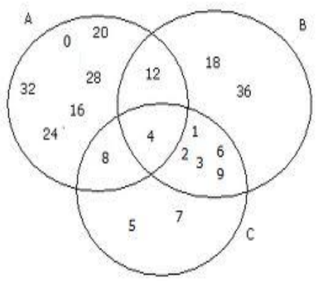
- Nociones de reparto y medida: "¿Cuántas veces cabe a en b?" , "¿Cuántas veces puedo repartir la cantidad a entre la cantidad b?"

iii) SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Mediante este sistema, y con ayuda de los dos anteriores, se pretende facilitar la comprensión y el cálculo de ciertas conceptos de forma visual. Podemos destacar:

- Recta numérica (sólo con los números naturales)

- Diagramas de Venn (Para calcular divisores comunes)



- Tabla 100: Me permite de forma intuitiva visualizar relaciones entre multiplos y divisores así como para calcular primos y compuestos y particularidades entre ellos.

iv) <u>MATERIAL MANIPULATIVO</u>

Podemos hacer uso de herramientas como:
- Regletas de Cuisenaire.

- Organigramas:
Nos permiten representar cualquier número a partir de su descomposición factorial. A partir de la representación por cuadrículas de dos o más números, puedo calcular su m.c.d. haciendo su intersección y su m.c.m. mediante su unión.
Ej. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$

2		
2	**3**	
2	**3**	**5**

- Laberinto de doble salida.
- Calculadora.
- Software.

2.4. FENOMENOLOGÍA

En un sentido general del término, consideraremos como fenomenología aquellos contextos, situaciones y problemas que pueden dar sentido al concepto matemático de la Divisibilidad. La ineludible relación de los conceptos y estructuras matemáticas con su aplicación a través de diversos contextos, nos permitirá estudiar aquellos fenómenos con los que vincular situaciones del mundo real con la estructura matemática en la que se ven implicadas.

Tomando como referencia el Estudio PISA, podemos establecer la relación de los cuatro contextos que en él se establecen con la Divisibilidad.

Contexto Personal.
Contexto Laboral / educativo.

Contexto Público
Contexto Científico

Tomando estos como escenario de la acción, la siguiente clasificación nos permitirá estructurar nuestra problemática de una manera más interesante, conceptualmente hablando. De esta manera, tendríamos una clara diferenciación entre lo que serían fenómenos de reparto o de medida y los de reiteración o periodicidad. Un tercer grupo en el que se estudiara la estructura multiplicativa del sistema numérico cerraría dicha clasificación.

a) <u>Fenomenología de medida o de reparto:</u>

No hay que perder de vista que el estudio de la Divisibilidad surgió en un principio como necesidad de repartir ciertas cantidades discretas en partes iguales. Es por ello que este primer caso de fenómenos requiere una mención especial. La formación de los calendarios en numerosas culturas, por ejemplo, ha tenido un gran interés a la hora de tratar de ajustar los ciclos lunares y de rotación de la Tierra a una repartición exacta de los días en distintos meses, o los distintos sistemas de numeración con bases fácilmente divisibles de forma exacta…

En el ámbito escolar, este tipo de problemas son también bastante recurrentes y constituyen, de hecho, el grueso de la problemática a estos niveles. Podríamos subdividirlos, además, según un criterio nuevo, que distinguiera el número de cantidades que quiero tratar de repartir.

Partiendo de una sola cantidad, tendríamos primero en las distintas formas de repartirla, a sus divisores. Dentro de este caso, podrían diferenciarse diversos fenómenos que corresponderían todos a esta misma estructura. Podríamos, por ejemplo, dada una cantidad (digamos de alumnos) analizar cómo repartirla formando grupos iguales (para realizar una actividad en igualdad de condiciones) y como situación, no sería la misma que estudiar por ejemplo de qué tamaño podrían ser las regletas de un mismo tipo que completaran cierta cantidad. Aunque en ambos casos se trate de buscar las posibles combinaciones de los divisores de un número, vemos una pequeña matización entre dividir y repartir.

Cuando tengamos varias cantidades y se trate de repartir, podremos pedirles que busquen divisores comunes, que nos indicarán la cantidad conjunta de objetos nuevos, por ejemplo:

- Si tenemos 18 niños y 24 niñas, cómo pueden formarse grupos iguales con el mismo número de cada sexo.

En este caso estaríamos hablando de nuevo de un contexto educativo, en que, una vez hallados los divisores comunes tendrían que dividir por ellos las dos cantidades de partida para saber cuantos alumnos habría por grupo de cada sexo.

De igual manera que hicimos en el primer caso, podremos distinguir entre medida y reparto y de igual forma podría hacerse de ahora en adelante. Un paso más allá consistiría en dadas esas dos o más cantidades, y una vez calculados los divisores comunes, seleccionar de entre estos el mayor, en lo que estaríamos en un reparto maximizando donde nuestros distintos algoritmos para hallar el máximo común divisor entrarían en juego. Este es quizá el tipo de problema más frecuente y, en este caso, pondremos como ejemplo un caso de medida en un contexto laboral:

- Un ebanista quiere cortar una plancha de madera de 256 cm de largo y 96 cm de ancho, en cuadrados lo más grandes posible. ¿Cuál debe ser la longitud de sus lados?

b) <u>Fenómenos de reiteración o de periodicidad</u>.

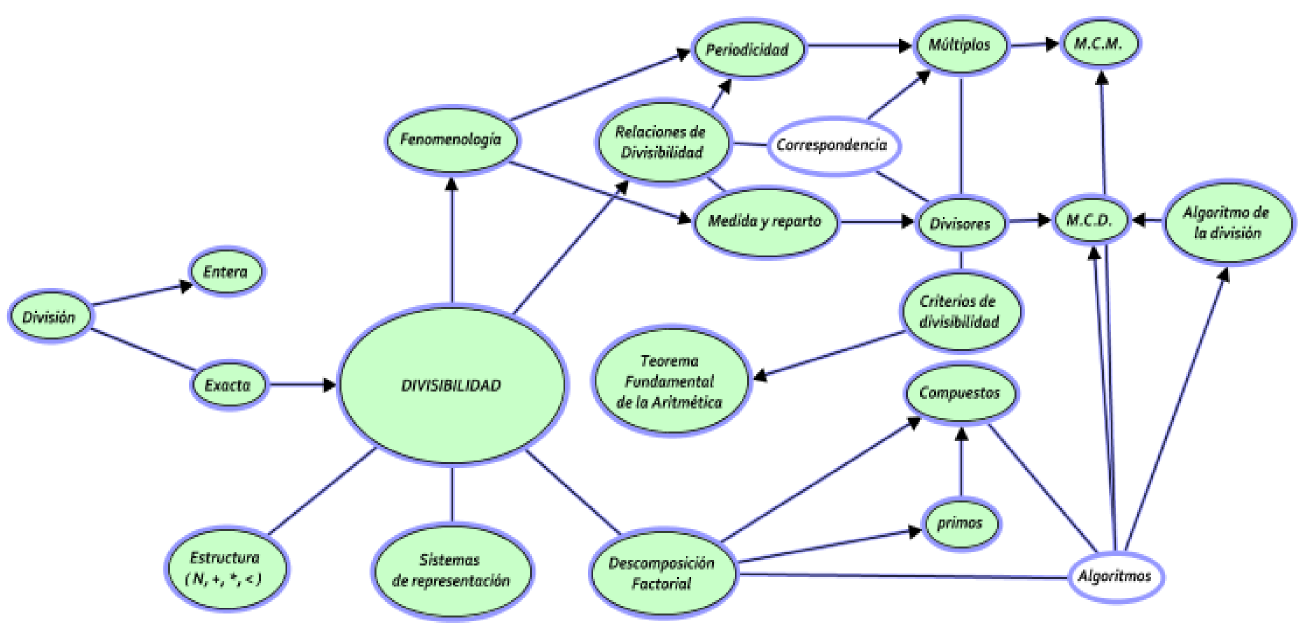
Aquí podríamos seguir una analogía a lo descrito anteriormente. Haciendo uso de la correspondencia múltiplo - divisor, y de un abuso de lenguaje, hablaríamos de multiplicidad como reflejo de la divisibilidad anterior, y construiríamos, a partir de los múltiplos ahora, nuestra estructura fenomenológica. Sin embargo, y debido a que el número de múltiplos no es finito como pasa con los divisores, la casuística queda bastante más limitada.

Partiendo de una sola cantidad, podremos pedir tan solo un número limitado de múltiplos con lo que estaríamos condicionando el problema bajo ciertas restricciones que se escapan de lo propiamente concerniente a la Divisibilidad. En el momento en que añadimos una o más cantidades, estaríamos hablando de una repartición minimizando, es decir; cuando coinciden ciertos ciclos en su periodicidad, o lo que es lo mismo, en los múltiplos del mínimo común múltiplo de esas cantidades. Calcularlo, será la base de todos estos fenómenos. Como contexto científico podríamos destacar el siguiente:

- Un planeta tarda 42 años en dar una vuelta al sol y otro 56. Si ahora mismo están alineados con el Sol, ¿cuándo volverán a hacerlo?

MAPA CONCEPTUAL

Podemos sintetizar la estructura del tema en el siguiente mapa conceptual:



3. ANÁLISIS COGNITIVO

En esta segunda parte del análisis didáctico, se presentarán aquellos objetivos que debe alcanzar el alumno, de acuerdo con lo establecido en el currículum matemático sobre Divisibilidad, descrito en la introducción del presente trabajo. Estos objetivos (recordamos que nos centraremos en la parte de la Divisibilidad correspondiente al Teorema fundamental de la Aritmética y lo que de él se deriva) pretenden, a su vez desarrollar, en la mayor medida posible, las ocho competencias básicas establecidas por la Unión Europea:

1. Competencia en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática.
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia social y ciudadana.
6. Competencia cultural y artística.
7. Competencia para aprender a aprender.
8. Autonomía e iniciativa personal.

Si bien estas competencias no se evalúan directamente, deben estar siempre presentes y entrelazadas con otros elementos curriculares de manera que los criterios de evaluación nos permitan, al valorar la adquisición o no de un objetivo, hacerlo también con las competencias básicas.

Estos objetivos o expectativas hacen referencia a los contenidos ya redactados en la parte anterior, tanto conceptos, procedimientos como actitudes. Todo esto lo enmarcaremos como expectativas de aprendizaje. Por otro lado, y más relacionado con las habilidades procedimentales, se analizará la competencia o alfabetización matemática según el estudio PISA/OCDE y su interrelación con los objetivos descritos. Las ocho competencias a las que nos referimos son:

1. Pensar y razonar. (P)
2. Argumentar. (A)
3. Comunicar. (C)
4. Modelizar. (M)
5. Plantear y resolver problemas. (PRP)
6. Representar. (R)
7. Utilizar el lenguaje simbólico formal y técnico y las operaciones.(LS)
8. Manejo de herramientas tecnológicas (HT)

Una vez relacionado todo esto, es importante tratar de anticiparse a los errores y dificultades que, en cada uno de los objetivos, pueda tener el alumno para corregirlas desde el principio. Por tanto, se irá planteando cada objetivo con los errores (E) y dificultades (D) que pueda crear cada uno.

3.1. OBJETIVOS, ERRORES Y DIFICULTADES.

Los objetivos fundamentales, siguiendo el orden estructural del tema y la complejidad de los mismos, serían los siguientes:

Nota Previa: *Con el fin de establecer un convenio para limitar el tamaño de los números con los que han de trabajar los alumnos, lo haremos en un máximo de tres cifras, excluyendo algunos casos particulares de interés como por ejemplo las potencia de diez.*

1.- **Reconocer y definir números primos y compuestos**.

Esto se hará de dos maneras:

a) Sin necesidad de operar (para los números de dos cifras).

b) Aplicando los criterios de Divisibilidad.

(D.1.a) → Saber hasta dónde se deben buscar divisores primos. (Si $p_i^2 > D$ y p_{i-1} no divide a D $\forall p_{i-1} < p_i$ primo $\Rightarrow p_i$ no divide a D)
* De ahí la importancia de seguir un orden ascendente al buscar los divisores.

(D.1.b) → Identificar como compuestos aquellos números producto de dos primos mayores que 11.
* Ej. 23·29 = 667.
* Según nuestras limitaciones, el caso más difícil, 997 habría que dividirlo entre 7, 13,17,19,23,29 y 31 además de comprobar los criterios conocidos (pues $37^2 > 997$). Aún así, y salvo casos especiales, centraremos nuestra atención en aquellos números con no más de un factor primo mayor que 11.

(E.1.a) → Si p no divide a D entonces p·q puede ser que sí lo divida.

2.- **Aplicar los criterios de Divisibilidad entre 2, 3, 5 y 11.**

(D.2.a) Distinguir la doble acepción del término divisor.

(D.2.b) Deducir los criterios del 6, del 10 y del 15.

(E.2.a) Confundir la notación $a|b$ *"a* divide a *b*" con *a/b "a entre b"*

3.- **Hallar la expresión factorial de un número.**

(D.3.a) → Establecer un orden de comprobación de menor a mayor dificultad.

(D.3.b) → Reconocer cuadrados perfectos (Ej. 49, 121, 169...)

4.- **Obtener todos los divisores de un número a partir de su expresión factorial.**

(D.4.a) → Aplicar las siguientes propiedades:

i) Si p | D y q | D $\Rightarrow$ p·q | D

ii) Si p^n | D $\Rightarrow$ p^{n-i} | D $\forall$ i, n $\in \mathbb{N}$; $0 \leq i \leq n$

(D.4.b) → Obtener mediante productos de potencias de sus factores primos todos los divisores de un número factorizado. Pueden ocurrir dos cosas:

i) Si no hay factores primos con exponentes mayores que uno.

*Ej. 30 = 2·3·5

En este caso se harán combinaciones aumentando progresivamente el número de primos empleados. Como consecuencia, puede ocurrir:

(E.4.a) → No identificar al 1 como divisor (ya que éste es el único que no aparece como combinación de sus factores primos)

(E.4.b) → No calcular todas las combinaciones.

ii) Si hay factores primos con exponentes mayores que uno.

*Ej. 36 = $2^2 \cdot 3^2$ (*limitaremos los casos a exponentes no mayores de 3 y a no más de tres factores primos*)

En este caso se propondrá el sistema conocido de tablas de multiplicación.

·	p^0	p^1 ……..	p^{n-1}	p^n
q^0				
q^1				
.			.	
.				
.				
q^{m-1}				
q^m				

Donde se obtienen de los productos los posibles divisores del número. En este caso el error más frecuente suele ser también el (E.4.b).

(D.4.b) → Usar la fórmula *∏(*e_i *+ 1) = Número total de divisores de n,* como comprobación dado $n = \prod p_i^{e_i}$ su descomposición en factores primos.
*Ej Una vez que tengo 54 = $3^3 \cdot 2$ como $e_1 = 3$ y $e_2 = 1$ el número de divisores ha de ser (3+1)·(1+1) = 8.

Nota: *Los siguientes objetivos formarían parte del segundo foco de la unidad didáctica*:

5.- **Calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos o más números** (a partir de su descomposición factorial).

(E.5.a) → Al calcular el m.c.d. o m.c.m. de los factores comunes tomar NO SOLO aquellos que tengan el mínimo o máximo exponente respectivamente.

(D.5.a) → Comprender que el mínimo común divisor de dos números es siempre 1
Y el máximo común múltiplo es infinito (o algo incalculable).

6.- **Enunciar, reconocer y resolver problemas de m.c.d. y m.c.m.**

(D.6.a) → Problemas derivados de saber traducir que $a = b \cdot c$ es equivalente a $a:c = b$ y a $a:b = c$ (o lo que es lo mismo si *a* es múltiplo de *b y c*, estos son divisores de *a)*

(D.6.b) → Entender la aparente contradicción mínimo-múltiplo y máximo-divisor.

(D.6.c) → Identificar los enunciados de problemas cíclicos y de periodicidad con los múltiplos y los de reparto y medida con los divisores.

(D.6.d) → Sacar las siguientes conclusiones en este tipo de problemas:
* De acuerdo con la fenomenología descrita, y tomando primero los problemas de reparto (o de medida si tomamos la unidad como indivisible), tenemos como

opciones:

A) Dados dos naturales *a y b* buscar un mismo patrón (el más grande), que los divida. → El m.c.d. aquí es dicho tamaño y, como dificultad añadida, estará el obtener el número de partes resultantes de cada uno *a / m.c.d. y b / m.c.d.*

B) Dados dos naturales *a y b* buscar un número que los divida en el mismo número de partes (el más grande). → El m.c.d. aquí es el número de partes iguales en que puedo repartir o medir (tomando unidad de referencia) y, como dificultad añadida, estará el obtener el tamaño de cada una de las partes *a / m.c.d. y b / m.c.d.*

En cuanto a los de reiteración, nos limitaremos al siguiente caso:

A') Dados dos naturales *a y b* buscar un número al que dividan los dos (el más pequeño) en el mismo número de partes. → El m.c.m. aquí es el primer número donde coinciden y, como dificultad añadida, estará el obtener el tamaño de cada una de las reiteraciones o ciclos *m.c.m. / a y m.c.m. / b.*

(D.6.e) →Comprender que el número de múltiplos comunes es infinito.

7. Dados dos números, justificar sus divisores comunes dada la recta real.

(D.7.a) →Ajustar el espacio disponible a las necesidades, optimizando su visualización.

(E.7.a) →No mantener las proporciones a consecuencia de una mala estimación en lo anterior.

8. Calcular el máximo común divisor de dos números mediante el Algoritmo de la División.

(D.8.a**)** →Interiorizar la sistematización del proceso.

(D.8.b) →Reconocer las ventajas de este método alternativo frente al anterior.

Todo así, podríamos relacionar nuestros objetivos con las competencias PISA en una tabla como la siguiente:

Objetivos	PR	A	C	M	RP	R	LS	HT
Reconocer y definir números primos y compuestos	x	x	x					
Aplicar los criterios de Divisibilidad entre 2, 3, 5 y 11.			x	x			x	
Descomponer la expresión factorial de un número.	x					x	x	
Obtener todos los divisores de un número a partir de su expresión factorial.				x		x		
Calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos o más números						x		x
Enunciar, reconocer y resolver problemas de m.c.d. y m.c.m.	x	x	x		x		x	
Dados dos números, justificar sus divisores comunes utilizando la recta real.						x	x	x
Calcular el m.c.d. de dos números mediante el Algoritmo de la División				x		x	x	

4. SISTEMA DE EVALUACIÓN:

Una de las principales características de una unidad didáctica es su posibilidad de readaptarse y mejorarse año tras año, para ello es necesario realizar una evaluación que ponga en contraste los objetivos planteados, tanto para el alumno como para el propio sistema, y los resultados obtenidos. De esta manera se pretende analizar si ha habido problemas de planteamiento, puesta en práctica de actividades, falta de motivación… para tratar de anticiparse a los errores y dificultades que probablemente puedan tener al año siguiente los nuevos estudiantes.

Pero antes de estar en disposición de sacar conclusiones, se ha someter a un análisis crítico primero, a los propios alumnos. Para lo cuál, nos valdremos de los criterios establecidos en el currículum de secundaria para las matemáticas, en la Orden 220 de julio de 2007 recogida en el BOE. De los diez criterios propuestos para el primer curso, a continuación se destacan, y se adaptan, aquellos que nos van a poder ser de utilidad para esta unidad:

1.- Utilizar números naturales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información.

2.- Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.

3.- Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números.

4.- Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia.

5.- Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error y comprobar la solución obtenida.

Estos criterios de evaluación son, además, el elemento que permitirá asociar objetivos y contenidos, de manera que se aprecie con mayor claridad la contribución de la materia al logro de las competencias. Así pues, se proponen ahora una serie de tareas, en las que se ponen de manifiesto estas relaciones.

5. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN:

Con el fin de alcanzar los objetivos planteados, superar los errores que pudieran producirse y minimizar las dificultades que encontrara el alumno, se establecerán ciertos tipos de tareas. Hemos, pues, de tener muy claro, cuál es la función de cada una de ellas dentro de la secuencia didáctica. Se propondrán tareas que contemplen distintos valores de variables según las dimensiones consideradas, tales como el contenido matemático, el contexto como elemento motivador y el nivel de complejidad que se pretenden activar para las competencias.

Al tener distintos criterios de clasificación de tareas, la siguiente propuesta se organiza desde un punto de vista doble; el de su funcionalidad y el de los objetivos programados. Entendiendo que para cada sección del tema debiera ser conveniente disponer de alguna tarea de cada tipo, según las necesidades del momento, he aquí una selección de tareas, según el papel que desempeñan:

NOTA: Con esta selección se pretende abarcar las distintas variantes de cada variable de tarea.

1.- <u>TAREAS DE MOTIVACIÓN.</u>

Descripción: El principal objetivo del profesor, junto al de diagnosticar a sus alumnos, es el de despertar el interés y la curiosidad de estos sobre los nuevos contenidos. Para ello, las tareas de mayor utilidad son las que relacionan dichos contenidos con la realidad. Antes de introducir un nuevo concepto, es interesante que el alumno pueda anticiparse a su definición por sí mismo.

Ejemplo: *Escribe todos los divisores y además cinco múltiplos de tu número de lista. A continuación, apunta los nombres de los compañeros a los que pertenecen esos números. Quien más nombres consiga, gana.*
Debatir finalmente si todos tienen las mismas oportunidades de ganar.

Elementos de la tarea:

Contenido	Contexto	Complejidad
De cantidad	Personal y educativo	Reproducción

Condiciones de la tarea: Es una tarea grupal, en la que interviene toda la clase conjuntamente. Relaciona conceptos ya conocidos con la introducción de otros nuevos por medio del juego. Fomenta la participación y la interacción entre compañeros.
Se realizará de forma oral, aunque requiere una parte escrita.

Competencias:

Matemáticas	Básicas
Argumentar (2) y comunicar (3)	Lingüística (1), social (5) e iniciativa personal (8)

Objetivos relacionados: Primer acercamiento al objetivo 1.- *Reconocer números primos y compuestos y encontrar su definición*, aunque sólo sea de modo informal.

Errores y dificultades que pretende solventar: Al no haber entrado aún en la temática propia de la unidad que desarrollamos, se tratará de minimizar las carencias con las que lleguen los alumnos en su aprendizaje.

Criterios de evaluación que involucra:
1.- Utilizar números naturales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información.
3.- Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números.

2- <u>TAREAS PARA CONOCER LOS APRENDIZAJES PREVIO:</u>

Descripción: Para servir al profesor como diagnóstico de la situación de partida (que en nuestro caso haría referencia al manejo de divisores y múltiplos), al comienzo de la unidad se proponen tareas que permitan encadenar la nueva información con lo que ya se conoce. Puede alternarse con la anterior o de manera que satisfagan ambos propósitos como en el caso de la tarea anterior.

Ejemplo: *Escribe la palabra múltiplo, divisor o nada (si no hay relación de divisibilidad) en cada caso según convenga:*
a) 12 es ………………… de 3
b) 14 es ………………… de 5
c) 6 es …………………. de 42
- Calcula los divisores de 20, 27 y 45 y los tres primeros múltiplos de 4, 7 y 18.

Elementos de la tarea:

Contenido	Contexto	Complejidad
De cantidad	Educativo	Reproducción

Condiciones de la tarea: Ésta, a diferencia de la anterior, es una tarea exclusiva de diagnóstico, tanto para el profesor como para el propio alumno. Por tanto, se debe realizar de forma individual y en un espacio de tiempo no muy largo. Se hará por escrito y servirá como referencia del progreso obtenido.

Competencias:

Matemáticas	Básicas
Pensar y razonar (1)	Matemática (2)

Objetivos relacionados: Recordar los contenidos dados en Primaria. Por tanto no se reflejan objetivos propios de la unidad. Lo mismo ocurre con los errores y las dificultades.

3.- <u>TAREAS DE ELABORACIÓN Y CONSTRUCCIÓN</u>.

Descripción: La intención de estas tareas es que el alumno tome conciencia de lo aprendido y sea capaz de explorar nuevos significados, de forma constructiva, aplicando los nuevos contenidos.

Ejemplo: *Dada la Criba de Eratóstenes:*
a) Rodea de azul los múltiplos de 2, de rojo los múltiplos de 3 y de verde los de 5.
b) ¿Qué números están rodeados de los tres colores? ¿qué relación existe entre estos números?
c) A partir de la tabla, ¿Podrías decir cuál es el mínimo común múltiplo de 3 y de 5?

Elementos de la tarea:

Contenido	Contexto	Complejidad
De cantidad	Educativo	Reproducción y conexión

Condiciones de la tarea: Es una tarea que puede plantearse por parejas o grupos muy reducidos para asegurar la participación de todos (se trata de un ejercicio constructivo), pero al mismo tiempo fomenta el debate y favorece el aprendizaje. Relaciona conceptos ya conocidos con la introducción de otros nuevos de manera visual.
Se realizará de forma escrita, aunque requiere una parte oral con el compañero.

Competencias:

Matemáticas	Básicas
Argumentar (2) y representar (5)	Matemática (2) y de aprender a aprender (7)

Objetivos relacionados: Primer acercamiento al objetivo 1.- *Calcular múltiplos comunes y, además, el mínimo común múltiplo de dos cantidades,* aunque sólo sea de modo informal, ayudado por la tabla-100.

Errores y dificultades que pretende solventar: Además de los relacionados con las características propias de los múltiplos y divisores (que servirá como repaso), se destacan:
(D.6.b.**)** *Entender la aparente contradicción mínimo-múltiplo y máximo-divisor.*
(D.6.e.**)** *Comprender que el número de múltiplos comunes es infinito.*

Criterios de evaluación que involucra:
1.- Utilizar números naturales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información.
3.- Identificar y describir regularidades, pautas y relaciones en conjuntos de números.
4.- Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia.

4.- <u>TAREAS EXPLORATORIAS</u>.

Descripción: El objetivo de este tipo de tareas es que el alumno adquiera nuevos conocimientos a través de la investigación y el descubrimiento. Se propondrán al final de la sesión o como tarea para la casa.

Ejemplo: *¿Cuántas comprobaciones como mínimo serán necesarias para afirmar que el 113 es primo? Justifica tu respuesta.*

Elementos de la tarea:

Contenido	Contexto	Complejidad
De cantidad	Educativo	Conexión

Condiciones de la tarea: Este tipo de actividad se podrá proponer tanto individual como por grupos. Se pretende que el alumno indague en aspectos algo más complejos por lo que se tendrá en cuenta es que el alumno le dedique esfuerzo y sea capaz de justificar sus conclusiones más allá de haber encontrado la solución correcta.

Competencias:

Matemáticas	Básicas
Argumentar (2), comunicar (3) y modelizar (4)	Matemática (2) y aprender a aprender (7)

Objetivos relacionados: Está relacionado con la *identificación de números primos para números de dos cifras y en los criterios de divisibilidad.*

Errores y dificultades que pretende solventar:
(D.1.a) → Saber hasta dónde se deben buscar divisores primos. (Si $p_i^2 > D$ *y* p_{i-1} *no divide a* D $\forall p_{i-1} < p_i$ *primo* $\Rightarrow p_i$ *no divide a D)*
(E.1.a) → Si p no divide a D entonces p·q puede ser que sí lo divida.

Criterios de evaluación que involucra:
2.- Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.
5.- Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error y comprobar la solución obtenida.

5.- <u>TAREAS DE APLICACIÓN Y DESCONTEXTUALIZACIÓN</u>.

Descripción: A través de este tipo de tareas, el profesor evalúa la capacidad procedimental del alumno para llevar la teoría estudiada a situaciones de la vida real.

Ejemplo: *Un comerciante desea poner en cajas 12.028 manzanas y 12.772 naranjas, de modo que cada caja contenga el mismo número de manzanas o naranjas y, además, el mayor número posible.*
a) Hallar el número de cajas necesarias.
b) Hallar el número de naranjas el número de manzanas de cada caja.

Elementos de la tarea:

Contenido	Contexto	Complejidad
De cantidad	Laboral	Reproducción y conexión

Condiciones de la tarea: Es una tarea individual, de respuesta cerrada, que podría considerarse como contexto de orden uno. Se presentará con instrucciones escritas para realizar de forma individual pudiendo ser un ejercicio tipo de examen interesante. Al tratarse de números relativamente grandes se les dejará usar la calculadora.

Competencias:

Matemáticas	Básicas
Pensar y razonar (1) Plantear y resolver problemas (5) Manejo de herramientas tecnológicas (8)	Matemática (2) Tratamiento de la información (4)

Objetivos relacionados:
6.- Enunciar, resolver y reconocer problemas de m.c.d. y m.c.m.

Errores y dificultades que pretende solventar:
(E.5.a). Al calcular el m.c.d. de los factores comunes tomar NO SOLO aquellos que tengan el mínimo exponente.
(D.6.c). Identificar los problemas de reparto y medida con los divisores.
(D.6.d). Sacar conclusiones correctas en los problemas:

Dados dos naturales a y b buscar un mismo patrón (el más grande), que los divida. → *El m.c.d. aquí es dicho tamaño y, como dificultad añadida, estará el obtener el número de partes resultantes de cada uno a / m.c.d. y b / m.c.d.*

Criterios de evaluación que involucra:
1.- Utilizar números naturales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información.
2.- Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.

6.- <u>TAREAS DE SÍNTESIS.</u>

Descripción: Con estas tareas, y que formarían parte de las tareas de cierre, se motiva la obtención de conclusiones a través de una recapitulación de lo aprendido. Así, servirán también como valoración de lo trabajado por parte del alumno.

Ejemplo: *Un restaurante debe preparar la sala para la cena de gala de los 122 participantes a un congreso. El restaurador tiene a su disposición 12 mesas de 8 personas y 12 mesas de 6 personas. Los organizadores del congreso han pedido prepararlas de manera que en las mesas utilizadas no queden puestos vacíos. ¿Cuántas mesas de cada tipo pueden ser preparadas para satisfacer la petición de los organizadores? Indica las soluciones y explica cómo las has hallado.*

Elementos de la tarea:

Contenido	Contexto	Complejidad
De cantidad, de incertidumbre y de cambio y relaciones	Público y laboral	Reflexión

Condiciones de la tarea: Es una tarea individual, de respuesta abierta y difícil (es por tanto una investigación), que podría considerarse como contexto de orden dos. Se pretende que el alumno modelizar el problema organizando los datos en una tabla, y discrimen aquellas soluciones que no sean válidas.

Competencias:

Matemáticas	Básicas
Modelizar (4) Plantear y resolver problemas (5) Representar (6)	Matemática (2) Tratamiento de la información (4) Competencia para aprender a aprender (7) Autonomía e iniciativa personal (8)

Objetivos relacionados:
6.- Enunciar, resolver y reconocer problemas de m.c.d. y m.c.m.

Errores y dificultades que pretende solventar:
(D.6.a) → Problemas derivados de saber traducir que a = b·c es equivalente a a:c =b y a a:b = c (o lo que es lo mismo si a es múltiplo de b y c, estos son divisores de a)

Criterios de evaluación que involucra:
4.- Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia.
5.- Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error y comprobar la solución obtenida.

6. DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En la siguiente programación, se estructurará la materia anteriormente explicada, en las ocho sesiones de las que vamos a disponer. Es conveniente no perder la perspectiva de que se trata éste del primer tema con contenidos nuevos que se da en matemáticas de secundaria. Se secuenciarán las sesiones de clase en tres fases o etapas:

- SECUENCIA DE TAREAS DE LA U.D.

A) Etapa inicial (1 sesión): En la que se repasa la otra parte del tema sobre divisores y múltiplos.
B) Etapa de desarrollo (6 sesiones): Donde se expone el tema en cuestión.
C) Etapa de evaluación (1 sesión): Donde específicamente se examina al alumnado.

6.1. ETAPA INICIAL

En esta única sesión distribuimos el tiempo de la siguiente forma:

SESIÓN 1:

30 minutos de repaso de lo visto en los primeros temas dedicados a múltiplos y divisores y que no pertenecen a esta unidad didáctica. Para ello se pueden establecer tareas cuyo prototipo pudiera ser el siguiente:

- TAREA 1: Escribir todos los divisores y además cinco múltiplos de tu número de lista. A continuación, apunta los nombres de los compañeros a los que pertenecen esos números. Quien más nombres consiga, gana. Debatir finalmente si todos tienen las mismas oportunidades de ganar.

- **Observaciones:** El objetivo de esta tarea es doble; por un lado se quiere conocer hasta qué punto tienen asimilados los conceptos básicos del tema, para saber desde dónde partir y, por otro lado, es una manera de que interaccionen unos con otros y recuerden o se aprendan los nombres de los demás compañeros, dado que a priori estamos empezando el curso.

En los segundos 30 minutos, se motivará la temática de esta unidad didáctica. Hemos de buscar tareas que animen a la participación y capten la atención. Un posible ejemplo, al hilo del anterior, sería el siguiente.

- TAREA 2: En la siguiente criba de Eratóstenes tacha los números que tienen algún divisor distinto de él mismo y de la unidad. ¿Qué tienen en común los números que quedan sin tachar? ¿Por qué ninguno de estos números es par?

- **Observaciones**: El objetivo de esta tarea es presentar el concepto de número primo de forma intuitiva así como de algunos criterios de divisibilidad. Es una tarea poco rígida; dependiendo del grado de comprensión de los alumnos se pueden hacer preguntas más o menos complicadas, o incluso reducir a 50 los números a analizar. La actividad se realizará conjuntamente y preguntando de forma oral de manera que todos participen.

6.2. ETAPA DE DESARROLLO

Estas seis sesiones se diseñan con una estructura y organización bastante similares que podemos resumir de la siguiente forma:

10 minutos: Repaso de lo visto hasta entonces, corrección de ejercicios, resolución de dudas…
20-30 minutos: Explicación de nuevos conceptos. Esta explicación se llevará acabo mediante una interacción constante con los alumnos. Según los contenidos que se expliquen, será conveniente, como veremos, utilizar unas estrategias u otras de manera que al estudiante se le exija siempre atención y participación.

30- 20 minutos: Realización de las tareas que a continuación proponemos.
- Se reservan 5 minutos para proponer y comentar tareas para realizar en casa.

Nota: Se reserva la segunda media hora del tercer día para realizar una breve prueba de sus progresos.

***JUSTIFICACIÓN DEL ORDEN*:**

Tras un primero momento obligado de retomar la explicación del día anterior y solucionar aquello que no se entienda, a través de los ejercicios que tenían para casa, se explica el tema en unos 20 minutos (el tiempo máximo que, por lo general, los alumnos pueden prestar la atención de forma seguida), para después realizar tareas. En algún caso pueden realizarse dos bloques, en lugar de uno, de explicación- tarea de menor duración.

Todo esto puede verse modificado por causas de fuerza mayor, o readaptarse a circunstancias tales como falta de comprensión de los alumnos, actividades extraescolares que modifiquen el horario… También es conveniente analizar a la hora del día que estamos para repartir los niveles de exigencia según su capacidad de atención.

En función de dichas circunstancias, repartiremos para cada sesión las estrategias de enseñanza reservadas en los 20-30 minutos de explicación de nuevos conceptos. Por ejemplo:

- Se organizarán pequeños grupos para que cada día uno exponga un mural con alguna curiosidad que haya encontrado sobre el tema que se explicó el día anterior.

- La sesión destinada al cálculo total de divisores de un número, se realizará desde la pizarra digital, si procede, o con un programa de ordenador alternativo que verifique la fórmula que calculaba dicho número.

- En ocasiones y a la hora de realizar el primer ejemplo sobre un nuevo concepto, se pedirá un voluntario para que, con ayuda del profesor, resuelva el ejercicio de manera que sólo pueda ser evaluado positivamente.

- Cada alumno deberá llevar una ficha que el profesor firmará el primer día y donde irán apuntando todas las definiciones que vayan surgiendo y que tendrán que saber decir en cualquier momento que se les pregunte.

- Se tratará de avanzar siempre a través de las respuestas que dé el alumno y, cuando personalicemos la pregunta, adaptaremos su dificultad en función las posibilidades que vayamos observando con el fin de que exista una contestación medianamente satisfactoria.

SESIÓN 2:

Esta sesión se dedica a la adquisición de los conceptos de número primo y número compuesto. Se hará de forma intuitiva para que el alumno entienda la necesidad de usar ciertos criterios que nos permitan acelerar el proceso.
Para ello se proponen las siguientes tareas:

- TAREA 3: Distinguir de entre la siguiente lista los números primos de los compuestos: 13, 22, 37, 41, 45, 57, 77. Justifica tu respuesta.

- TAREA 4: ¿Cuántas comprobaciones como mínimo serán necesarias para afirmar que el 113 es primo? Justifica tu respuesta.

- **Objetivos**: 1.- Entender que si *a* no divide a D, tampoco lo hace cualquier múltiplo suyo.
  2.- Establecer un límite en la búsqueda de divisores. (D?)

- TAREA 5: Escribe un número primo y uno compuesto comprendido entre el 200 y el 250.

- **Objetivos**: 1.- Comprender que se pueden generar los compuestos pero no los primos.

2.- Pequeña reseña histórica sobre el interés por buscar nuevos números primos

SESIÓN 3:

En esta sesión se harán dos bloques de teoría- práctica. Tras la motivación del día anterior, primero se explican los criterios de Divisibilidad del 2, 3, 5 y 11 y se deducen algunos como el del 6 o el del 10. Tras ir haciendo en la pizarra un ejemplo de cada uno, se puede hacer una tarea generalizadora como la siguiente:

- TAREA 6: Busca de entre los siguiente números los múltiplos de 2, de 3, de 5, y de 11:

  a)63
  b)77
  c)85
  d)143
  e)150
  f)165

  Sin necesidad de hacer operaciones, ¿hay algún múltiplo de 15? Justifica tu respuesta.

  Observaciones: De forma individual, se deja un tiempo para resolverlos y se piden voluntarios para resolverlos en la pizarra. Al resolver este tipo de ejercicios, es muy importante ser cuidadoso con el orden y seguir siempre los mismos pasos.

- **Objetivos**: Recalcar que si *a* y *b* dividen a D también lo hace su producto.

  En la segunda mitad de la clase, realizaremos la descomposición como producto de primos pues ya disponemos de todo lo necesario. Para reforzar lo aprendido valga la siguiente tarea:

- TAREA 7: Descompón como producto de primos los siguientes números:

  a) 32
  b) 180
  c) 225
  d) 392
  e) 468
  f) 1260

  Señala los números que son múltiplos de 12.

- **Observaciones**: También por escrito, se trata de una tarea plenamente de ejercitación, que también nos servirá de nexo para la siguiente sesión.

- Objetivos: Con la segunda parte del ejercicio se pretende reforzar la reversibilidad múltiplo-divisor así como motivar la sesión 4.

<u>SESIÓN 4</u>:

En la primera parte se les enseña a calcular todos los divisores de un número a partir de su descomposición factorial. Para ello nos valdremos de la representación en trama cuadricular para establecer un algoritmo que me permita cubrir todas las combinaciones con más facilidad. Valga pues la siguiente tarea:

- TAREA 8: Calcula a partir de la descomposición factorial, y con la ayuda del sistema de cuadrículas, todos los divisores de:

  a) 36
  b) 72

c) 124
d) 150

NOTA: En esta primera parte, se ha dado más relevancia a las tareas de ejercitación pues el principal objetivo en estas primeras sesiones es que el alumno adquiera ciertas destrezas de cálculo. Además, por otro lado, se presta más esta primera parte a ejercicios de este tipo. Sin embargo, y una vez que se tienen las herramientas básicas podemos realizar tareas como las que podemos poner en la prueba que íbamos a realizar en la segunda mitad de esta sesión, principalmente informativa (de hecho no es conveniente calificarla de examen). Por ejemplo:

- TAREA 9: Dados los siguientes números primos:

a) 167
b) 223
c) 317
d) 503

¿Puedes convertirlos en múltiplos de 11 modificando solamente la cifra de las decenas? ¿Y en múltiplos 5?

SESIÓN 5:

La segunda mitad de estas seis sesiones, coincide con el estudio de un nuevo foco:
En esta clase se pretende estudiar el m.c.d. y el m.c.m. En un primer momento, nos limitaremos a su cálculo, para lo cual, y de forma constructiva, podemos emplear la siguiente tarea:

- TAREA 10:

Calcula el máximo común divisor de 90 y 84 de dos formas distintas:

PRIMERA: a) Calcula todos los divisores de 90 y de 84.
b) Señala aquellos divisores que sean comunes.
c) Indica el mayor de todos ellos.

SEGUNDA: Mediante la descomposición factorial.

- **Objetivos**: Entender de dónde viene la fórmula que utilizamos.

- **Observaciones**: De forma análoga puede hacerse con los múltiplos pidiéndoles que calculen los 5 primeros si el m.c.m. está entre ellos.

SESIÓN 6:

Esta sesión se dedicará a la resolución de problemas en los que haya que usar el m.c.d. y el m.c.m. Sea, por ejemplo:

- TAREA 11: Dos cometas se aproximan al Sol, uno cada 25 años y otro cada 60. Habiéndose aproximado juntos en 2005, ¿cuándo volverán a hacerlo?.

- TAREA 12: Tenemos 180 botellas de vino, 250 de zumo y 324 de agua y queremos formar el mayor número de lotes iguales, ¿cuántos podremos hacer sin que sobre ninguna botella? ¿Cuántas botellas de cada tipo tendrá cada lote?

- **Observaciones**: Este tipo de tareas sirven para poner en práctica los conceptos de la sesión anterior.

SESIÓN 7:

En esta última sesión antes del examen, se reservarán 30 minutos para caso de retraso acumulado donde, si no, se pueden dedicar al cálculo del m.c.d. mediante el Algoritmo de Euclides (ya que es esta una manera más interesante para un futuro)

En la otra media hora se pueden hacer ejercicios de repaso y resolver dudas.

6.3. ETAPA DE EVALUACIÓN

SESIÓN 8:

De sólo una sesión, esta etapa nos sirve para comprobar el grado de adquisición de lo enseñado por parte del alumno. El modelo de examen escrito, pensado para completar en una hora, constará de varias tareas, de diferente grado de dificultad, que prácticamente abarquen toda la temática dada. Y puede tener la siguiente estructura.

EXAMEN FINAL TIPO:

(Todas las preguntas tienen la misma puntuación)

Ejercicio 1: Uno del tipo de la tarea 3, 4 ó 5.

Ejercicio 2: Uno con varios apartados que mezcle preguntas de la tarea 6 hasta la 9.

Ejercicio 3: Un problema como la tarea 11 ó 12.

Ejercicio 4: Un cine tiene un número de asientos comprendidos entre 200 y 250. Sabemos que el número de entradas vendidas para completar un aforo es múltiplo de 4, de 6 y de 10. ¿Cuántos asientos tiene el cine?

Ejercicio 5: Un restaurante debe preparar la sala para la cena de gala de los 122 participantes a un congreso. El restaurador tiene a su disposición 12 mesas de 8 personas y 12 mesas de 6 personas. Los organizadores del congreso han pedido prepararlas de manera que en las mesas utilizadas no queden puestos vacíos. ¿Cuántas mesas de cada tipo pueden ser preparadas para satisfacer la petición de los organizadores? Indica las soluciones y explica cómo las has hallado.

La puntuación final de la unidad se repartirá de la siguiente forma:
60% de la nota del examen final.
20% de la nota de la prueba intermedia.
10% tareas echas en casa.
10% participación en clase.

Es conveniente que los alumnos dispongan de esta información desde el principio para que se conciencien de lo importante que es la participación y el trabajo diario.

7. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD.

Los estudios de diagnóstico tienen como finalidad obtener información sobre el grado de conocimiento de los alumnos como grupo e individualmente. Gracias a esto último, el docente debe ser capaz de localizar los puntos fuertes y débiles de cada uno para actuar en consecuencia. Pero no son sólo las carencias académicas las que debe ser capaz de detectar un tutor, ya que medidas de carácter general como las tutorías y la orientación personal forman parte de la función del docente.

No en vano, en el Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, se asienta sobre cuatro principios capitales, siendo uno de ellos:

"La Educación secundaria obligatoria se organiza de acuerdo con los principios de educación común y de atención a la diversidad del alumnado."

Además, sobre el artículo 12, Atención a la Diversidad, destacamos:

"Las administraciones educativas, con el fin de facilitar la accesibilidad al currículo al alumnado con necesidades educativas especiales que las precisen, realizarán adaptaciones buscando el máximo desarrollo posible de las competencias básicas; la evaluación y la promoción tomarán como referente los criterios de evaluación fijados en dichas adaptaciones."

Así pues, se han de buscar las soluciones que más convengan a cada estudiante como las adaptaciones curriculares en los casos que recoge el artículo 73 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación o, a través de refuerzos educativos y clases de apoyo, para situaciones que requieran una solución menos drástica. En cualquier caso, las técnicas de enseñanza para atender a la diversidad, como aprendimos en las asignaturas de *Atención a la Diversidad y Multiculturalidad* y en la de *Atención a los alumnos con necesidades especiales* impartidas dentro de este Máster, son ilimitadas y han de orientarse a sacar el mayor rendimiento de cada alumno, académica y socialmente hablando.

Y en este punto, hemos de considerar el otro extremo que en ocasiones pasa desapercibido; los alumnos con altas capacidades intelectuales, y que en ocasiones pueden estar tan cerca del fracaso escolar como los anteriores si no enfocamos su aprendizaje de forma correcta, tienen también cabida en el artículo 12:

"La escolarización del alumnado con altas capacidades intelectuales, identificado como tal por el personal con la debida cualificación y en los términos que determinen las administraciones educativas, se flexibilizará, en los términos que determina la normativa vigente, de forma que pueda anticiparse su incorporación a la etapa o reducirse la duración de la misma, cuando se prevea que es lo más adecuado para el desarrollo de su equilibrio personal y su socialización."

Pero como no todos los casos entre los dos extremos que se han contemplado son el mismo, la importancia de adaptar el tipo de actividades a los alumnos y el régimen de estudio es capital. Estrategias tan sencillas como la formación de grupos de trabajo en los que se mezcle el nivel cognitivo de los alumnos, pueden ser muy positivas para todos siempre que se complementen con actividades individuales más de acorde a sus exigencias, para mantener la motivación lo más alta posible, de ahí la importancia de clasificar las tareas, también, por su nivel de exigencia y el tipo de complejidad.

8. REFERENCIAS

- Ministerio de Educación y Ciencia. REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

- Ministerio de Educación y Ciencia. ORDEN ECI/2220/2007, de 21 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria.

- Eca Universitaria de Granada. *Divisibilidad,* Editorial Síntesis.

- Rey Pastor, J.; Babini, J. *Historia de la matemática*.

-Collete, J.P. *Historia de las matemáticas*.

- Stewart, I. *De aquí al infinito*.

- Gracián, E. *Los números primos: un largo camino al infinito*

- *Matemáticas 1º E.S.O.*, Editorial Grazalema Santillana, 2010. Proyecto: Los caminos del saber.

- http://es.scribd.com/doc/75791476/22/ATENCION-A-LA-DIVERSIDAD