

NUMEROS RACIONALES:

FRACCIONES



Immaculada peralvarez beinudez



Universidad de Granada

Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria,
Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Especialidad de Matemáticas

CURSO 2011/2012

Este Trabajo Fin de Máster esta realizado por:

Inmaculada Perálvarez Bermúdez,

Bajo la supervisión de D. Luis Rico Romero.

ÍNDICE:

1. UBICACIÓN EN EL CURRÍCULUM	4
2. ANÁLISIS DE CONTENIDO	5
2.1. <i>DESARROLLO HISTÓRICO</i>	5
2.2. <i>ESTRUCTURA CONCEPTUAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES</i>	9
2.3. <i>SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE LOS N° RACIONALES</i>	12
2.4. <i>FENOMENOLOGÍA DE LOS NÚMEROS RACIONALES</i>	14
3. ANÁLISIS COGNITIVO	16
3.1. <i>EXPECTATIVAS DEL APRENDIZAJE</i>	16
3.2. <i>LIMITACIONES DEL APRENDIZAJE</i>	18
3.3. <i>OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE</i>	20
4. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN	20
4.1. <i>METODOLOGÍA</i>	20
4.2. <i>CLASIFICACIÓN DE LAS TAREAS</i>	23
4.3. <i>EL CONTENIDO MATEMÁTICO DE LAS TAREAS</i>	25
4.4. <i>NIVELES DE COMPLEJIDAD</i>	25
4.5. <i>MATERIALES Y RECURSOS</i>	26
5. DESARROLLO DE LA UD	30
<i>FASE INICIAL</i>	30
<i>FASE DE DESARROLLO Y BUSQUEDA</i>	33
<i>FASE DE SÍNTESIS, PRESENTACIÓN Y EVALUACIÓN</i>	43
6. EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	50
6.1. <i>INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</i>	50
6.2. <i>CRITERIOS DE CALIFICACIÓN</i>	51
7. <i>CONCLUSIÓN</i>	52
8. BIBLIOGRAFÍA	53

1. UBICACIÓN EN EL CURRÍCULUM

Nuestro tema, los Números Racionales están regularizados por:

- Las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria que se establecen en el RD 1631/2006, de 29 de diciembre.
- En la ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, donde se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria.

Los contenidos para el curso de 1º ESO se dividen en seis bloques: Contenidos Comunes, Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas y Estadística y probabilidad. Los Números Racionales se encuentran incluidos en el bloque de Números.

Sobre los elementos básicos que integran el currículo voy a tomar decisiones previas respecto:

1. *Objetivos y competencias básicas.* Metas de progresiva dificultad que se marca a los alumnos en función de su nivel de competencia y en función de los resultados del aprendizaje que se debe esperar de ellos.
2. *Contenidos.* Elementos conceptuales y culturales que se van a enseñar: conceptos, procedimientos y actitudes.
3. *Metodología.* Modelos de enseñanza, enfoques prácticos, actividades y tareas concretas que se van a realizar.
4. *Evaluación.* Proceso, criterios e instrumentos previstos para la valoración de los resultados obtenidos, en relación con la consecución de los objetivos y de la adquisición de las competencias básicas.

El estudio del currículo se puede abordar desde cuatro dimensiones (Cultural, Cognitiva, Formativa y Social) que a su vez se descomponen en cuatro niveles (Planificación para los profesores, Sistema educativo, Disciplinas académicas y teleológico) (*L. Rico*).

Por tanto, esta unidad didáctica se ubica en el nivel de planificación para los profesores, tomando decisiones sobre contenido (dimensión cultural), objetivos y competencias (dimensión cognitiva), metodología (dimensión formativa) y evaluación (dimensión social).

La estructura de esta unidad didáctica se basa en la teoría del análisis didáctico, que consta de:

- I. Análisis de contenido (Estructura conceptual, desarrollo histórico, sistemas de representación y fenomenología).
- II. Análisis cognitivo (Objetivos y competencias, errores y dificultades).
- III. Análisis de Instrucción (Diseño y secuenciación de tareas, materiales y recursos).
- IV. Análisis de la evaluación (Instrumentos y criterios de evaluación).

2. ANÁLISIS DE CONTENIDO

2.1. DESARROLLO HISTÓRICO

Los orígenes primitivos de las fracciones

El concepto de número natural es uno de los más antiguos de la matemática, y sus orígenes se pierden entre la bruma de la antigüedad prehistórica. El concepto de fracción, en cambio, se desarrolló relativamente tarde y, en general, no estuvo estrechamente relacionado con el sistema elaborado por el hombre para los enteros. Entre las tribus primitivas no parece haber existido necesidad de usar fracciones; para las necesidades cuantitativas usuales el hombre puede elegir, en la práctica, unidades lo suficientemente pequeñas como para evitar la necesidad de usar fracciones. Y, por lo tanto, no hubo tampoco un progreso ordenado y lineal de las fracciones binarias a las quinarias y finalmente a los decimales, sino que los decimales fueron esencialmente producto de la época moderna de la matemática y no del período antiguo.

Egipto

Al alcanzarse un nivel cultural más avanzado durante la Edad del Bronce, parece la necesidad de un concepto de fracción y de un sistema de notación capaz de representar las fracciones. En las inscripciones jeroglíficas egipcias encontramos, en efecto, una notación especial para las fracciones unitarias, es decir, para las fracciones que tienen como numerador la unidad. Lo que nosotros llamamos el inverso de un número natural se representaba colocando simplemente sobre la expresión que designaba a este número un signo oval alargado. En el sistema de notación hierático que aparece en los papiros, el óvalo alargado se reemplaza por un punto que viene colocado encima de la cifra que represente al número en cuestión (o sobre la cifra más a la derecha en el caso del inverso de un número con varios dígitos). Así, en el *Papiro de Ahmes*. Estas fracciones unitarias se utilizaban ya con gran virtuosismo en la época de Ahmes, pero las fracciones, en el sentido general con que las conocemos, fueron desconocidas para los egipcios. Decir que para la fracción $2/3$ tenían un símbolo hierático especial para representarla.

De manera más general, usaban a veces signos especiales para las fracciones del tipo $n/(n+1)$, complementarias a la unidad de las fracciones unitarias.

Hoy día consideramos $3/5$ como fracción propia irreducible, los egipcios la trataban como reducible a la suma de las tres fracciones unitarias $1/3$, $1/5$ y $1/15$.

Para facilitar la reducción de las fracciones propias "mixtas" a una suma de fracciones unitarias, el *Papiro Rhind* comienza con una tabla en la que se expresa $2/n$ como suma de fracciones unitarias para todos los valores impares de n desde 5 a 101.

La tabla de $2/n$ en el *Papiro de Ahmes* viene seguida por una breve tabla de $n/10$, para n de 1 a 9, en la que de nuevo estas fracciones se expresan en términos de las fracciones favoritas unitarias y de la fracción $2/3$; por ejemplo, la fracción $9/10$ aparece descompuesta en $1/30$, $1/5$ y $2/3$. Ahmes había comenzado su obra asegurando que en ella se contenía “el estudio completo y detallado de todas las cosas... y el conocimiento de todos los secretos”, y en consecuencia la parte principal del material, a continuación de las tablas de $2/n$ y de $n/10$, consiste en una colección de 84 problemas muy variados. Los seis primeros piden efectuar un reparto, donde los razonamientos se hacen con el tipo de fracciones ya explicadas.

Mesopotamia

La superioridad técnica de la aritmética y el álgebra babilónica sobre la egipcia se basa en que extendieron el principio posicional de numeración para la escritura de las fracciones y no sólo para los números enteros. Esto significa que los babilonios tenían a su disposición toda la capacidad y simplicidad de cálculo que nos permiten hoy a nosotros las fracciones decimales modernas.

En una tablilla de la *Colección de Yale* (la número 7289) que data de la época babilónica antigua y que incluye el cálculo de la raíz cuadrada de 2 con tres cifras decimales sexagesimales. El valor que aparece de raíz de 2 es (en notación decimal) aproximadamente $1'414222$, cuyo error es menor que $0'000008$.

Para los babilonios era relativamente fácil conseguir aproximaciones muy precisas en sus cálculos utilizando el sistema de notación fraccionaria sexagesimal, el mejor de que dispuso civilización alguna hasta la época del Renacimiento.

La *Tablilla de Plimpton 322* es un ejercicio de teoría de números, para resolver problemas de medir áreas de cuadrados o lados de triángulos rectángulos. Los babilonios no trabajaban con los inversos de números distintos de los divisores de 60, al no tener una expresión exacta en forma de fracciones sexagesimales.

Jonia y los Pitagóricos

En Grecia la palabra número se usaba sólo para los enteros positivos. A las fracciones no se las consideraba como entidades únicas, sino como una razón o relación entre dos números enteros. Más tarde Euclides (*Elementos* V. 3) lo expresa de la siguiente forma: “Una razón es una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo”. Este punto de vista se centra en la conexión entre pares de números, esto conlleva a poner el énfasis en los aspectos racionales o teóricos del concepto de número y no en el papel del número como herramienta para el cálculo o para la aproximación en la medida; la aritmética podría ser concebida ahora como una disciplina intelectual a la vez que una técnica, y la transición a tal punto de vista parece haber tenido lugar en la escuela pitagórica.

A Pitágoras se le atribuye el haberse dado cuenta que las longitudes de las cuerdas vibrantes se pueden expresar como razones de números enteros sencillos, tales como la de dos a tres (para la quinta) o como la de tres a cuatro (para la cuarta), entonces los tonos producidos serán armoniosos.

Euclides de Alejandría

Dentro de los trece libros que componen los *Elementos* de Euclides, podemos resaltar el quinto libro, donde habla de la teoría general de proporciones. Euclides, en un principio, sustituye la relación entre longitudes de la forma $x/a = b/c$ por la igualdad de áreas $xc = ab$.

La trigonometría y las técnicas de medición griegas

Los griegos usaban líneas trigonométricas, al principio tomaron la forma de cuerdas en un círculo, y Ptolomeo le asocio valores numéricos, aproximaciones, a dichas cuerdas. Se establecieron dos convenios: un sistema para subdividir la circunferencia de un círculo y un método para subdividir el diámetro del mismo círculo. La división de la circunferencia en 360 grados se utilizaba ya en Grecia desde la época de Hiparco. Ptolomeo subdividió sus grados en 60 “partes minute primae”, y cada una de ellas en 60 “partes minutae secundae” y es precisamente de estas expresiones latinas que utilizaron los traductores de las que se derivaron más tarde nuestros términos “minuto” y “segundo” también fue el sistema sexagesimal sin duda el que sugirió a Ptolomeo el hecho de dividir el diámetro de su círculo trigonométrico en 120 partes iguales, que se subdividen en 60 minutos de longitud que a su vez se dividen en 60 segundos de longitud, de nuevo iguales.

Para evitar el uso de fracciones, utilizaban la subdivisión de la unidad, como acabamos de ver, en la división de la circunferencia en grados, minutos y segundos.

Las fracciones sexagesimales se convirtieron en las herramientas estándar para la astronomía y la física. Todavía no se tiene un sistema de notación posicional coherente para los enteros y las fracciones

China e India

El sistema de numeración chino permaneció esencialmente decimal, con notaciones diferentes de las utilizadas en otros países. Los chinos conocían bien las operaciones con fracciones ordinarias, hasta el punto de que en este contexto hallaban el mínimo común denominador de varias fracciones.

Contribución árabe

La cultura musulmana contribuyó a principios del siglo XV, Con Al-Kashi, que fue protegido del príncipe Ulugh Beg, nieto del conquistador mongol Tamerlán. Al-Kashi escribió numerosas obras, tanto en árabe como en persa, sobre matemática y astronomía.

Al-Kashi es una figura muy importante en la difusión de las fracciones decimales. Al-Kashi fue el primero en utilizar las fracciones sexagesimales para sugerir que las fracciones decimales se prestan igualmente bien a la resolución de problemas cuyos cálculos exigen muchas cifras exactas. No obstante, para el cálculo sistemático de raíces continúa utilizando las fracciones sexagesimales.

Los numerales hindú-arábigos

Fibonacci escribió, en 1202, un famoso clásico llamado *Liber abaci* (es decir, “*Libro del ábaco*”); no trata del ábaco, sino que es un tratado muy completo sobre métodos y problemas algebraicos, en el que se usan los numerales hindú-arábigos. Este libro explica los procesos algorítmicos o aritméticos usuales, incluida la extracción de raíces y pone todo el énfasis en problemas de transacciones comerciales, utilizando para ello un complicado sistema de fracciones al calcular los cambios de moneda. Fibonacci utilizó tres tipos de fracciones, las comunes, las sexagesimales y las unitarias, pero nunca las decimales. De hecho, en el *Liber abaci* las que más se usan son las fracciones comunes y las unitarias.

Podemos apreciar como en la Edad Media no hay ningún avance importante en las fracciones, será en la siguiente época donde se vuelva a retomar el tema de la fracciones.

Del Renacimiento a la Edad Moderna

Viète no era lo que podríamos llamar un matemático profesional, en su juventud estudió derecho, que más tarde cultivó, llegando a ser miembro del Parlamento de Bretaña. A pesar de que Viète sólo dedicó a la matemática sus ratos de ocio, hizo importantes contribuciones a la aritmética, al álgebra, a la trigonometría y a la geometría. En aritmética tenemos que recordar su decidida defensa del uso de las fracciones decimales en vez de las sexagesimales. En 1585, Simon Stevin defendió el uso de la escala de base 10 para las fracciones lo mismo que para los enteros.

En la traducción al inglés de la *Descriptio* de Napier, el 1616, las fracciones decimales aparecen tal como las escribimos hoy, con un punto decimal para separar la parte entera de la fraccionaria. En su *Rhabdologia* de 1617, Napier propone un punto o una coma como signo de separación decimal. En la *Constructio* de Napier 1619 se consagró el uso del punto decimal en Inglaterra, pero en muchos otros países europeos se continúa utilizando hoy la coma decimal.

Stevin propuso la notación de los exponente fraccionarios, formuló claramente el convenio de que $\frac{1}{2}$ dentro de un círculo significaría una raíz cuadrada, y que $\frac{3}{2}$ en un círculo representaría la raíz cuadrada del cubo. Un poco más tarde, Girard, el editor de las obras de Stevin, adoptó está misma notación de los números dentro de círculos para las potencias, añadiendo también que esto podía utilizarse para representar las raíces, en vez de los símbolos $\sqrt{\quad}$.

2.2. ESTRUCTURA CONCEPTUAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

❖ CAMPO CONCEPTUAL

HECHOS

TÉRMINOS

- N° enteros
- Numerador
- Denominador
- Recta numérica
- M. c. m.

NOTACIONES

- a/b Fracción

CONVENIOS

- a/b con a, b números enteros y b distinto de cero

RESULTADOS

- $a > b$ entonces a/b es mayor que la unidad
- $a < b$ entonces a/b es menor que la unidad

CONCEPTOS

- Número racional
- Concepto de Fracción
- Equivalencia de fracciones
- Fracción irreducible
- Comparación de fracciones
- Fracción propia e impropia
- Orden de los números racionales
- Representación de los números racionales en la recta numérica
- Operaciones con fracciones

ESTRUCTURAS

- $(\mathbb{Q}, +)$ Grupo aditivos de los números racionales
- (\mathbb{Q}^*, \cdot) Grupo multiplicativo de los números racionales
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ Cuerpo ordenado de los números racionales

❖ *CAMPO PROCEDIMENTAL*

DESTREZAS

- Obtención de la fracción equivalente de una dada
- Obtención de la fracción irreducible de una dada
- Representación gráfica de números racionales en la recta numérica

RAZONAMIENTOS

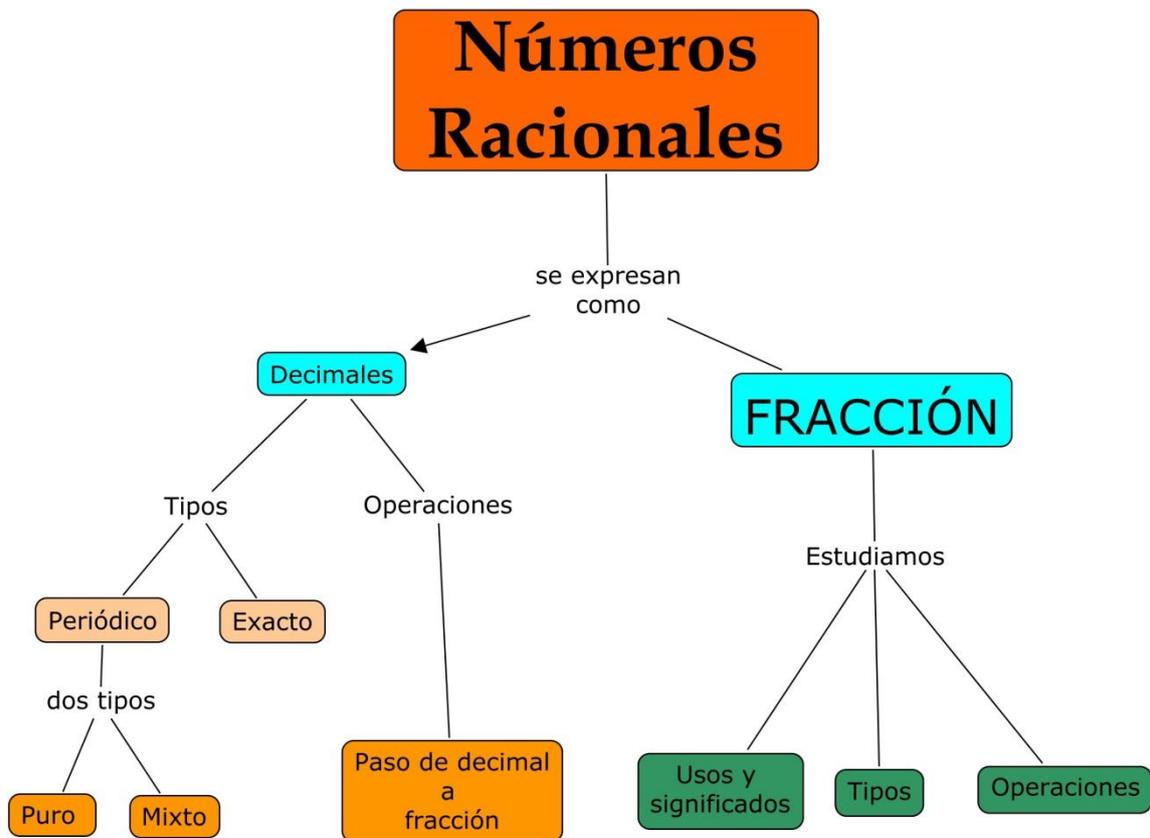
- Identificar números racionales
- Comparar números racionales
- Ordenar números racionales

ESTRATEGIAS

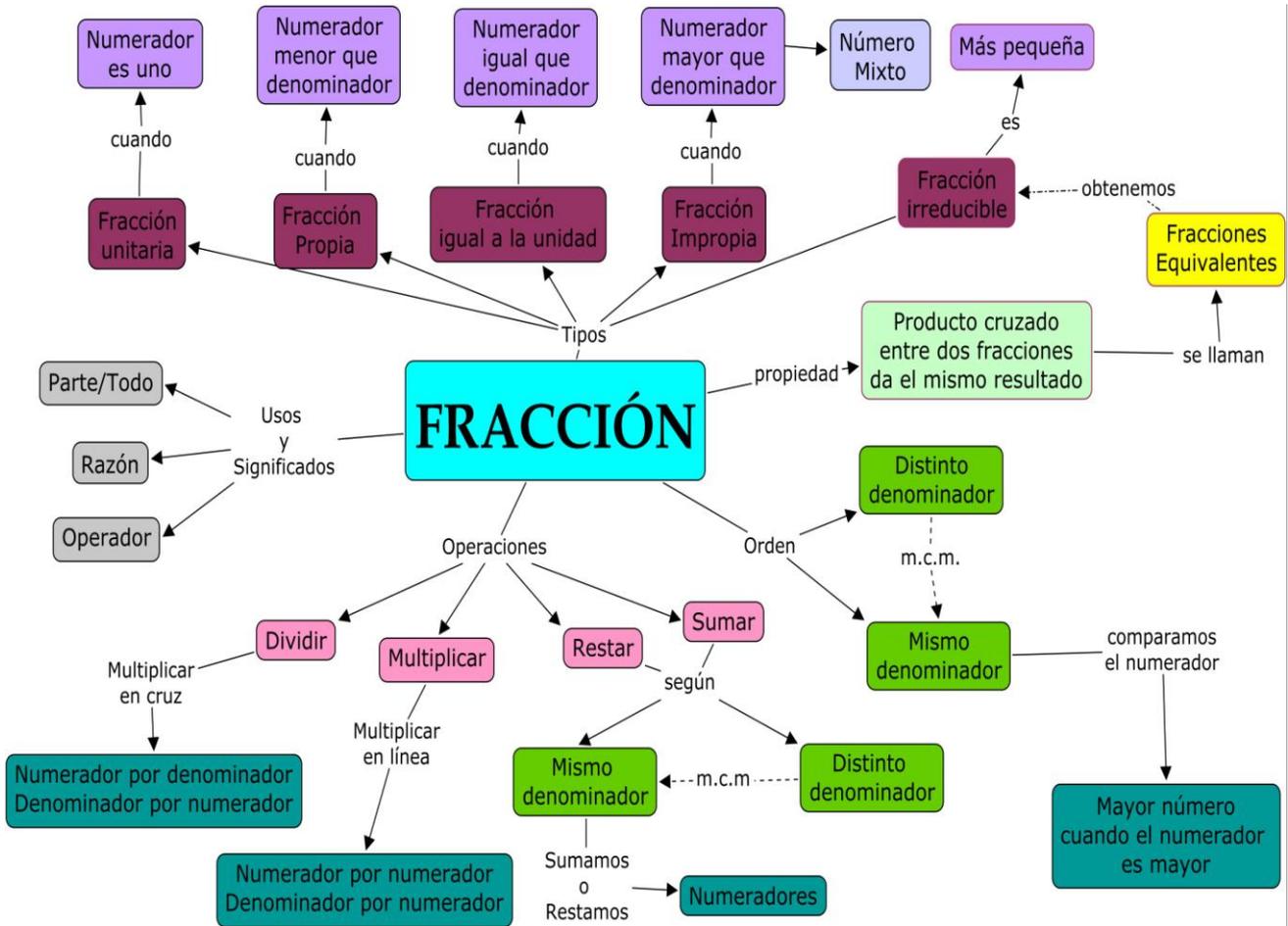
- Estimación del resultado de una operación con racionales.
- Reconocimiento y uso de las propiedades correspondientes a cada estructura numérica
- Plantear y resolver problemas con números racionales
- Resolver problemas de la vida cotidiana donde aparecen números racionales

Una vez descritos el campo conceptual y el procedimental, he realizado un primer esquema sobre los números racionales.

MAPA CONCEPTUAL



Los números racionales se expresan como decimal y como fracción. Como ya he dicho, en mi unidad didáctica, voy a construir los números racionales a partir de la fracción. Por lo que, a continuación, he diseñado un mapa conceptual centrado en la fracción.



2.3. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE LOS NÚMEROS RACIONALES

➤ Representación Verbal:

Los números racionales pueden expresarse verbalmente como: un medio, los dos tercios, un quinto, etc. Son formas usuales de la vida cotidiana, podemos ver diariamente expresiones como:

“Dame medio kilo de tomates.”

“Durante la comida me tome un quinto de cerveza.”

➤ Representación Simbólica:

Representamos “la división de a entre b ” como el número racional: “ a/b ” con “ a ” y “ b ” números enteros con “ b ” distinto de cero.

➤ Representación Numérica:

Notación usual de los números racionales como fracción: $2/3$.

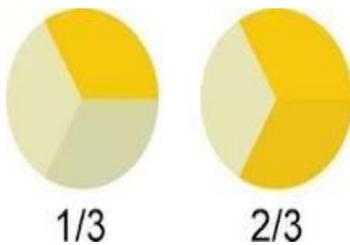
➤ Representación gráfica:

Dentro de este tipo de representación podemos distinguir dos casos: gráfico continuo y gráfico discreto.

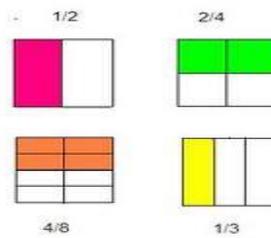
Gráfico continuo:

1. Modelos de áreas: Una figura, principalmente rectangular o circular se divide en partes iguales, sombreando la parte correspondiente a la fracción representada.

Como círculos



Como rectángulos



2. Modelos lineales: al igual que en el caso de los números naturales, podemos visualizar las fracciones a lo largo de una recta. Tomamos en ella una cierta longitud como unidad a repartir, y a partir de ella representamos la fracción.

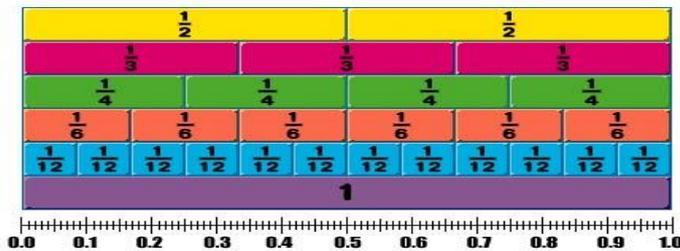
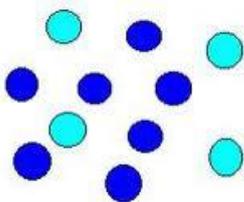


Gráfico discreto:

Este sistema de representación se da cuando el conjunto que se quiere dividir es discreto, es decir, tenemos un número de objetos con respecto al número total de objetos, que será nuestra unidad.



2.4. FENOMENOLOGÍA DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Considero que un listado de los fenómenos que subyacen a los números racionales, podría ser este.

I. *Uso de los racionales como Reparto*

Consiste en repartir la unidad en partes iguales y coger algunas partes, parte-todo

II. *Uso de los racionales como Medida (continuas y discretas), cuando se mide una parte en relación con un todo*

Lo utilizamos para medir partes de áreas, longitudes, etc.

III. *Uso de los racionales como Razón*

Ejemplos sobre este fenómeno los podemos ver en:

La música, refiriéndonos a las cuerdas vibrantes como razones de las longitudes de las cuerdas con la longitud del tono.

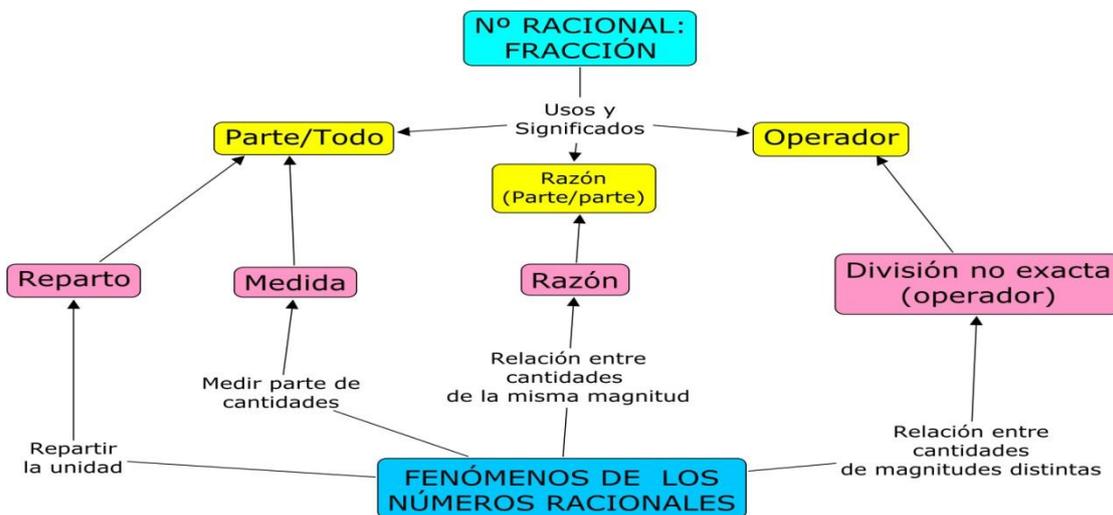
Otro ejemplo es la razón entre dos dimensiones de una figura plana (razón áurea en un rectángulo o en un triángulo, etc.)

Comparar y buscar la relación entre dos cantidades distintas de una misma magnitud, parte-parte.

IV. *Uso de los racionales como Divisiones indicadas entre dos enteros*

Los racionales como expresión de la forma $a:b$, siendo a y b enteros con b distinto de cero; representa la solución de la ecuación $b \cdot x = a$, es la relación entre cantidades de distintas magnitudes.

En el siguiente esquema, relaciono los fenómenos con los distintos significados de los números racionales.



A continuación, describo distintos ejemplos donde se reflejan los fenómenos que he descrito anteriormente. Además, vamos a catalogar cada uno de los ejemplos según cada una de las siguientes situaciones: personal, laboral, pública y científica.

EJEMPLO 1:

En una fiesta se reparte equitativamente un pastel entre **8** niños. Sara se lleva su parte a su casa y la comparte equitativamente con sus dos hermanos.

- a) ¿Qué fracción del pastel trajo Sara su casa?
- b) ¿Qué parte de ese pedazo de pastel se comerá?
- c) ¿Qué parte del pastel original se comerá?

Fenómeno: Uso de los racionales como reparto.

Situación: Personal.

EJEMPLO 2:

Tres cuartos de kilo de queso cuestan 8,70 €. ¿Cuánto cuesta un kilo?

Fenómeno: El uso de los racionales como operador.

Situación: Laboral

EJEMPLO 3:

Han ido a votar las 1200 personas de un pueblo, sobre la construcción de un nuevo colegio. Del grupo de personas, 800 han votado que están de acuerdo y 400 que no lo están.

¿Cuál es la relación de los que no están a favor sobre los que si están a favor?

Fenómeno: El uso de los racionales como razón.

Situación: Pública.

EJEMPLO 4:

En el laboratorio de Mario y Ana van a crear una vacuna contra la bacteria del tomate. Para ello, cultivan una parcela con tomates. Las **2/3** partes de la parcela se cultivan tomates; y de estas plantas de tomates, **1/5** se les aplicara la vacuna. ¿Qué fracción de la parcela se dedicará a cultivos de tomate vacunados?

Fenómeno: Uso de los racionales como medida.

Situación: Científica.

3. ANÁLISIS COGNITIVO

3.1. EXPECTATIVAS DEL APRENDIZAJE

A continuación he considerado tres focos en este tema; en cada uno describo los objetivos específicos que espero que el alumnado alcance al final de la Unidad Didáctica.

Foco 1: Usos y significados de los racionales, según la fenomenología presentada

1. Comprender los distintos usos y significados de los números racionales.
2. Reconocer fracciones en la vida cotidiana.
3. Utilizar materiales manipulativos para identificar los distintos significados de las fracciones.
4. Comprender los significados del numerador y el denominador, en los distintos usos.

Foco 2: Lectura y escritura de fracciones. Notación. Tipos de racionales

5. Leer y escribir racionales. Representar gráficamente una fracción sobre un segmento, sobre un polígono regular o sobre un círculo.
6. Diferenciar entre fracción propia e impropia.
7. Expresar una fracción impropia como n° mixto, y viceversa.
8. Calcular fracciones equivalentes y justificar su equivalencia.
9. Calcular la fracción irreducible equivalente a una fracción dada.
10. Representar racionales en la recta real.

Foco 3: Operaciones con racionales

11. Adición y sustracción de racionales.
12. Multiplicación y división de racionales.
13. Aplicar y comprender la jerarquía de las operaciones y el uso de paréntesis entre números racionales.
14. Comparar y ordenar números racionales.
15. Resolver problemas de la vida cotidiana con números racionales.

En la siguiente tabla vemos como contribuyen las competencias pisa en los distintos objetivos.

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Foco 1: Usos y significados, según mi fenomenología, de los racionales									
1.	Comprender los distintos usos y significados de los números racionales.	X	X	X					
2.	Reconocer fracciones en la vida cotidiana	X		X	X				
3.	Utilizar materiales manipulativos para identificar los distintos significados de las fracciones.			X	X		X		X
4.	Comprender los significados del numerador y el denominador, en los distintos usos.	X	X	X					
Foco 2: Lectura y escritura de fracciones. Notación. Tipos de racionales.									
5.	Leer y escribir racionales. Representar gráficamente una fracción sobre un segmento, sobre un polígono regular o sobre un círculo.		X	X			X		
6.	Diferenciar entre fracción propia e impropia.					X	X		
7.	Expresar una fracción impropia como nº mixto, y viceversa.		X			X	X	X	
8.	Calcular fracciones equivalentes y justificar su equivalencia.		X			X	X	X	
9.	Calcular la fracción irreducible equivalente a una fracción dada.	X	X	X	X				
10.	Representar racionales en la recta real					X	X	X	

Foco 3: Operaciones con racionales								
11.	Adición y sustracción de racionales.					X	X	
12.	Multiplicación y división de racionales.					X	X	
13.	Aplicar y comprender la jerarquía de las operaciones y el uso de paréntesis entre racionales.	X				X		X
14.	Comparar y ordenar números racionales.	X	X				X	X
15.	Resolver problemas de la vida cotidiana con racionales	X	X	X	X			

La notación usada para las distintas competencias pisa es:

PR= Pensar y Razonar; AJ= Argumentar y Justificar; C= Comunicar;
M= Modelizar; RP= Resolver problemas; R= Representar;
LS= Lenguaje Simbólico; HT= Herramientas Tecnológicas.

De más a menos, contribución de las competencias PISA en los objetivos:

R	AJ	PR	C	RP	LS	M	HT
9	8	7	7	7	5	4	2

3.2. LIMITACIONES DEL APRENDIZAJE

Para los alumnos el concepto de números racionales presenta gran dificultad, tanto por los distintos significados y usos, como por la forma de operar con ellos.

A priori, describo una lista sobre los errores y dificultades que espero que presenten los alumnos sobre este tema.

- E1. No distinguir los distintos significados de los números racionales.
- D1. No relacionar nuestro tema con las fracciones cotidianas.
- E2. No reconocer las distintas representaciones de los números racionales sobre un segmento, sobre un polígono regular o sobre un círculo.
- E3. No distinguir entre calcular fracciones equivalentes y la fracción irreducible.

- E4. No distinguir entre el algoritmo de la división de fracciones y calcular fracciones equivalentes.
- E5. Confundir los números mixtos con la multiplicación de un entero por un número racional.
- E6. No realizar el m.c.m. en las operaciones adecuadas con fracciones.
- D2. Confundir el orden de los números racionales por aplicación de un criterio parcial e inadecuado (p. ej.: ordenar según sus denominadores).
- D3. No saber representar los números racionales en la recta real.
- E7. No aplicar correctamente las jerarquías de las operaciones y el uso de paréntesis en los números racionales.

En la siguiente tabla relaciono los distintos errores y dificultades que he encontrado en el tema con los objetivos antes descritos.

Errores y dificultades		Objetivos Asociados
E1.	No distinguir los distintos significados de los números racionales.	1, 4, 6
D1.	No relacionar nuestro tema con las fracciones cotidianas.	2, 16
E2.	No reconocer las distintas representaciones de los números racionales sobre un segmento, sobre un polígono regular o sobre un círculo.	3, 5
E3.	No distinguir entre calcular fracciones equivalentes y la fracción irreducible.	8, 9
E4.	No distinguir entre el algoritmo de la división de fracciones y calcular fracciones equivalentes.	8,12
E5.	Confundir los números mixtos con la multiplicación de un entero por un número racional.	7
E6.	No realizar el m.c.m. en las operaciones adecuadas con fracciones.	11, 12
D2.	Confundir el orden de los números racionales.	14, 15
D3.	No saber representar los números racionales en la recta real.	10
E7.	No aplicar correctamente las jerarquías de las operaciones y el uso de paréntesis en los números racionales.	13

3.3. OPORTUNIDADES DEL APRENDIZAJE

Presento una serie de tareas para corregir posibles errores y dificultades en el aprendizaje de las fracciones.

TAREA 1:

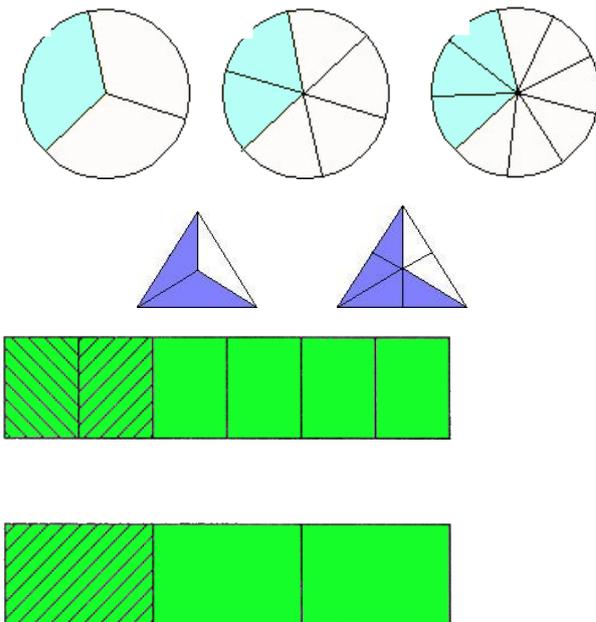
Escribir frases de la vida cotidiana donde se utilicen las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$.

Los errores y dificultades que se pueden corregir con esta tarea son:

- E8. No distinguir los distintos significados de los números racionales.
- D1. No relacionar nuestro tema con las fracciones cotidianas.
- E9. No reconocer las distintas representaciones de los números racionales sobre un segmento, sobre un polígono regular o sobre un círculo.

TAREA 2:

Que parte de fracción representa la parte sombreada, di cuales son equivalentes y cuáles son las fracciones irreducibles.

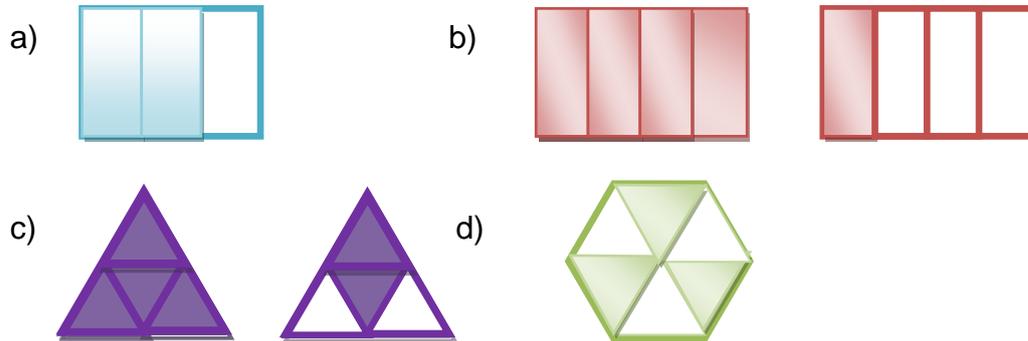


Los errores que se pueden corregir con esta tarea son:

- E10. No distinguir entre calcular fracciones equivalentes y la fracción irreducible.
- E2. No reconocer las distintas representaciones de los números racionales sobre un segmento, sobre un polígono regular o sobre un círculo.

TAREA 3:

Representa la zona coloreada en forma de fracción:



Fíjate en las fracciones impropias que han salido, ¿se te ocurre otra forma de representar las fracciones?

El error que se puede corregir con esta tarea es:

E11. Confundir los números mixtos con la multiplicación de un entero por un número racional.

TAREA 4: *Buscando la escoba.*

Calcula y simplifica el resultado de estas diez operaciones. Encuentra con tus soluciones el camino que debe de seguir la bruja para llegar hasta su escoba:

a) $\frac{4}{3} + 1 - \frac{2}{3} =$

f) $5 : \frac{3}{4} - \frac{10}{6} =$

b) $2 \cdot \frac{4}{3} - \frac{4}{6} + 1 =$

g) $\frac{6}{7} : \frac{3}{5} - \frac{3}{7} =$

c) $\frac{5}{6} + \frac{4}{3} - \frac{1}{6} =$

h) $(4 - \frac{1}{3}) : \frac{11}{2} =$

d) $-\frac{5}{3} + \frac{15}{9} : \frac{1}{3} =$

i) $\frac{-4}{3} \cdot \frac{5}{2} + 3 =$

e) $(\frac{4}{7} : \frac{2}{7}) \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{3} =$

j) $\frac{2}{3} + \frac{14}{21} =$

4. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

4.1. METODOLOGÍA

Describo la metodología que voy a seguir en el desarrollo de la unidad didáctica.

Se pretende construir los números racionales, iniciando a los alumnos/as en el concepto de fracción, conociendo sus usos y significados.

Basándonos en los conocimientos previos que tiene el alumno/a del tema, se seguirá una construcción progresiva en el aprendizaje de los nuevos conceptos.

La metodología que se seguirá será dinámica, intercalando las exposiciones teóricas con numerosos ejemplos, practicando actividades y ejercicios que permitirán que los alumnos/as afiancen los nuevos conceptos y técnicas matemáticas.

Se atenderá a la diversidad de la clase. Para ello se entregarán ejercicios y actividades de refuerzo o ampliación.

Como pretendemos que el alumno/a tenga una actitud abierta y crítica respecto la vida, intentaremos motivar a los alumnos/as para que participen activamente en las clases, tanto en las explicaciones como en la realización de ejercicios.

Finalmente, se potenciarán todas las actividades que sirvan para conectar la materia con otras asignaturas que curse el alumno/a, y con su vida cotidiana.

4.2. CLASIFICACIÓN DE LAS TAREAS

Atendiendo al papel que juegan en el proceso de enseñanza-aprendizaje las tareas escolares pueden clasificarse en siete tipos. Voy a relacionar algunas de las tareas de mis sesiones con esta clasificación.

- **TAREAS PARA AYUDAR A LA MOTIVACIÓN Y DE RELACIÓN CON LA REALIDAD.**

Cuatro amigos, Eva, Paola, Jesús y David, han comprado tres pasteles alargados de distinto sabor con el dinero que tenían. El problema está en cómo repartirlos partes iguales para los cuatro.

Entre ellos mantienen esta conversación:

- Muy fácil –dice Jesús-, cogemos uno, le vamos dando un bocado cada uno hasta que se acabe, después otro y después otro.
- ¡Qué te has creído! –salta Paola- cada bocado tuyo vale por tres míos, como si no te conociéramos.
- Partimos dos por la mitad –afirma David- y el otro lo partimos en cuatro partes iguales.

- Yo quiero un trozo de cada pastel –replica Jesús.
- ¡Jo!, pues no vamos a tener que dar cortes para darle el caprichito al comilón de Jesús – protesta David.
- Venga hacerlo ya como sea, que tenemos hambre –replican Eva y Paola.

Esta es la foto del pastel de chocolate, hay otro pastel de fresa y otro de vainilla.



¿Cómo harías tú el reparto para que todos comieran lo mismo de los distintos pasteles?

- **TAREAS QUE TIENEN COMO FIN AYUDAR A CONOCER LOS APRENDIZAJES PREVIOS REALIZADOS POR EL ALUMNO.**

Pintamos un círculo, un cuadrado, un triángulo, un hexágono y un segmento en la pizarra. En cada uno de ellos sale un alumno/a a colorear la mitad. Realizamos la siguiente pregunta: *¿Son todas las mitades iguales?*

- **TAREAS EXPLORATORIAS FOMENTADORAS DE LA INTERROGACIÓN Y DEL CUESTIONAMIENTO.**

Tarea donde los chicos/as juegan al dominó de fracciones.

- **TAREAS DE ELABORACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADOS.**

Responde justificadamente a los siguientes apartados.

- a) Escribe tres fracciones menores que la unidad.
- b) Escribe tres fracciones mayores que la unidad.
- c) Escribe tres fracciones iguales a la unidad.

- **TAREAS DE DESCONTEXTUALIZACIÓN Y DE APLICACIÓN.**

Tarea de la sesión 9, se utiliza como tarea el tangram para repasar los conceptos de fracciones.

▪ TAREAS DE EJERCITACIÓN.

. Calcula y simplifica:

a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} - \left(3 - \frac{4}{5} \right)$

b) $\frac{5}{6} \cdot \left[\frac{3}{10} - \left(3 - \frac{4}{5} \right) \right]$

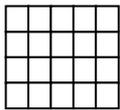
c) $\frac{5}{6} : \frac{3}{10} - \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{2} \right)$

d) $\frac{5}{6} : \frac{10}{3} - \frac{5}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{6}{5} \right)$

▪ TAREAS DE SÍNTESIS.

Realiza los siguientes apartados:

- a) Representa en distintos polígonos $\frac{1}{4}$.
 b) Representa en figuras de la forma



$\frac{4}{20}, \frac{12}{20}, \frac{9}{20}$.

- c) Pinta la mitad de esa figura: ¿qué fracción representa? Calcula su fracción irreducible.
 d) Suma $\frac{3}{20} + \frac{1}{2}$. Representa esta suma con polígonos.

4.3. EL CONTENIDO MATEMÁTICO DE LAS TAREAS

Para ajustarse a la orientación principal del currículo escolar, PISA considera las siguientes ideas principales como contenidos matemáticas, consideradas categorías fenomenológicas:

1. Cantidad
2. Espacio y forma
3. Cambio y relaciones
4. Incertidumbre

Las tareas que vamos a desarrollar en las sesiones van a estar relacionadas, sobre todo, con la idea de cantidad.

4.4. NIVELES DE COMPLEJIDAD

Cada una de las competencias establecidas por el proyecto PISA admite diferentes niveles de profundidad. Los expertos consideran tres niveles de complejidad en los problemas matemáticos y en las competencias demandadas por los mismos:

1. *Reproducción*: Se pretende que el alumno/a demuestre que domina el conocimiento aprendido sobre un tema. Las tareas les resultan familiares a los alumnos/as y se resuelven aplicando algoritmos. Los procesos que incluimos son los de recordar, reproducir.
2. *Conexión*: Se pretende que el alumno/a demuestre el dominio de establecer relaciones entre los distintos campos matemáticos, las tareas no son rutinarias. Los procesos son de aplicar, analizar y valorar.
3. *Reflexión*: Son situaciones poco estructuradas las que se les plantea a los alumnos/as que requiere que comprenda, reflexiones y use su creatividad para reconocer las matemáticas que intervienen. Los procesos de sintetizar, crear y juzgar.

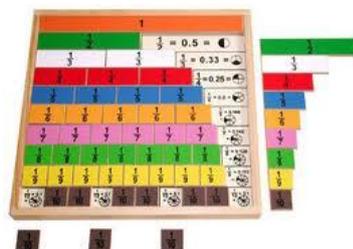
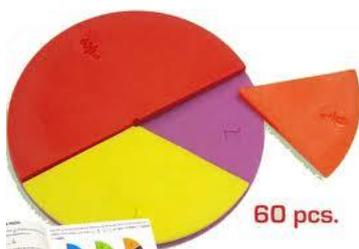
Por lo general, las tareas que se proponen en este tema pertenecen a los dos niveles de complejidad primeros. Esto se debe a que pretendemos que los alumnos/as adquieran los procesos de recordar, reproducir, aplicar y analizar.

Además las tareas propuestas van referidas a contextos que les resultan familiares, recordamos que uno de nuestros objetivos es que relacionen los números racionales con la vida real.

4.5. MATERIALES Y RECURSOS

Materiales manipulativos:

Podemos encontrar el pastel de fracciones, el círculo de fracciones, el diagrama de Freudenthal, escala de fracciones...



Juegos:

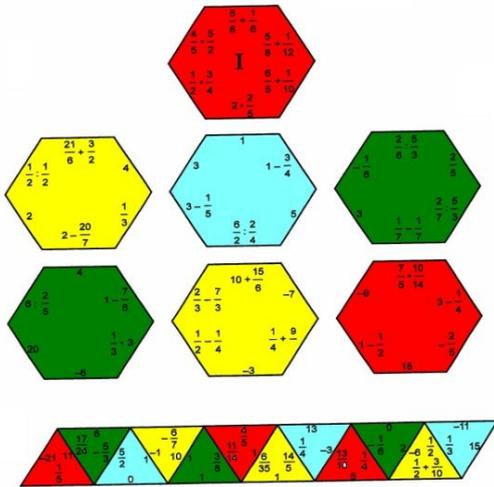
Entre los distintos juegos que existen con fracciones se pueden destacar:

1. Domino de fracciones, tiene fracciones equivalentes, se juega igual que el domino de toda la vida. En una de las sesiones lo utilizaremos, en la sesión explico las reglas del juego.

2. El uso de hojas de papel de acetato en los que aparecen diversos cuadrados o rectángulos divididos en partes iguales, los cuales permiten operar con fracciones.

3. Puzzle de fracciones: Con este puzzle, se pretende que los alumnos/as, realicen unas operaciones sencillas con fracciones y posteriormente, juntando las operaciones con sus resultados, obtengan una bonita estrella.

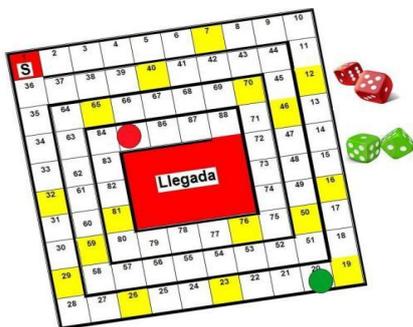
Nivel: 1º-2º de la ESO



4. Juego de la OCA: se pretende afianzar el concepto de fracción como operador que actúa sobre una cantidad. Nivel: 1º-2º-3º de ESO

Material necesario:

Un tablero parecido al tablero de la OCA; 4 dados: dos rojos y dos verdes; una ficha por jugador.



Reglas del juego:

- Máximo cuatro jugadores.

- El primer jugador tira los cuatro dados. Con los dados rojos forma una fracción menor que 1, siendo el resultado de un dado el numerador y el del otro el denominador. Multiplica los resultados de los dos dados verdes obteniendo así un número: el jugador avanza el resultado obtenido multiplicando la fracción de los dados rojos por el número de los dados verdes.

Por ejemplo si el jugador ha obtenido: Dado rojo 1: un 4 Dado rojo 2: un 2
 Dado verde 1: un 6 Dado verde 2: un 4

$$\frac{2}{4} \text{ de } 24 = 12$$

Por lo tanto el jugador debe recorrer 12 casillas.

- Si el resultado final no es entero, el jugador pierde el turno.
- Si el jugador cae sobre una casilla amarilla, vuelve a jugar.
- El segundo jugador hace lo mismo.

GANA EL QUE LLEGA ANTES A LAS CASILLAS ROJAS DE LLEGADA. (NO ES NECESARIO LLEGAR DE FORMA EXACTA A LA LLEGADA)

Nuevas tecnologías:

Otro recurso que podemos utilizar en la enseñanza de las Matemáticas, más concretamente en las fracciones son las nuevas tecnologías, permiten que los estudiantes visualicen todas las formas de representación de manera rápida y fácil gracias al uso de programas informáticos, calculadoras, applets, etc. Como ejemplos, se encuentran:

<http://www.amolasmates.es/primeroysegundo/mat1eso3.html>

En este programa podemos hacer distintas operaciones con fracciones, ver sus representaciones, Todo lo referente a fracciones.



<http://www.aplicaciones.info/decimales/frax2.htm>

En esta página nos muestra exámenes con número racionales que podemos resolver y comprobar los resultados.

Examen de fracciones nº 2
Correspondiente a los temas: Resta de fracciones, multiplicación y división.

1, 2 y 3. Realiza estas restas:

$5/6 - 1/4 =$	$20/24 - 6/24 = 14/24 = 7/12$	$6/24 - 3/24 = 3/24 = 1/8$	$15/24 - 3/24 = 12/24 = 1/2$
$5/9 - 1/6 =$	$5/15 - 1/15 = 4/15$	$30/54 - 9/54 = 21/54 = 7/18$	$5/54 - 1/54 = 4/54 = 2/27$
$4/5 - 2/7 =$	$28/35 - 10/35 = 18/35$	$4/12 - 2/12 = 2/12 = 1/6$	$4/35 - 2/35 = 2/35$

4, 5 y 6. Realiza estas restas, haciéndolo antes en el papel y comprueba después:

$3 \text{ y } 5/6 - 2 \text{ y } 2/6 =$	$9/6 = 3/2$	$4/6 = 2/3$	$8/6 = 4/3$
$3 \text{ y } 3/7 - 2 \text{ y } 1/7 =$	$2/7$	$6/7$	$9/7$
$4 \text{ y } 2/3 - 2 \text{ y } 1/2 =$	$6/5$	$13/6$	$2/6$

7, 8, 9 y 10. Resuelve estos problemas:

Un trabajador gana diariamente $36 \text{ y } 3/7$ euros y gasta $22 \text{ y } 2/7$ euros ¿Cuánto ahorra diariamente?

De un conjunto de cromos, Isabel regala primero $2/5$ y después $1/4$. ¿Qué fracción de cromos le queda?

Me toca en herencia $2/5$ de una finca y compro $1/4$ de ella. ¿De qué fracción soy dueño?

María tiene $4 \text{ y } 2/5$ euros y José $7 \text{ y } 3/5$ euros. ¿Cuánto tienen entre los dos?

<http://www.thatquiz.org/es-6/matematicas/identificar/fracciones/>

Este programa permite a los estudiantes realizar diversas operaciones con fracciones (identificación, operaciones aritméticas, comparaciones, medias, simplificaciones, etc.)

Fracciones

Acertado 0
Equivocado 0
Reloj 0:00

matemáticas
Reiniciar

Fracción = / OK

<http://palmera.pntic.mec.es/~jcuadr2/fraccion/>

En esta página nos muestra una explicación teórica, así como ejercicios para que podamos realizarlos.

5. DESARROLLO DE LA UD:

Números Racionales: FRACCIONES

FASE INICIAL

SESIÓN 1.

Los objetivos a desarrollar en esta sesión:

- ✚ Comprender los distintos usos y significados de los números racionales.
- ✚ Reconocer fracciones en la vida cotidiana.
- ✚ Comprender los significados del numerador y el denominador, en los distintos usos.
- ✚ Leer y escribir racionales. Representar gráficamente una fracción sobre un segmento, sobre un polígono regular o sobre un círculo.

Para empezar, intentaremos averiguar que conocimientos previos tienen los alumnos/as sobre nuestro tema. Para ello vamos a sentar a los alumnos en grupos, y les entregamos el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 1: (20 minutos)

Cuatro amigos, Eva, Paola, Jesús y David, han comprado tres pasteles alargados de distinto sabor con el dinero que tenían. El problema está en cómo repartirlos partes iguales para los cuatro.

Entre ellos mantienen esta conversación:

- Muy fácil –dice Jesús-, cogemos uno, le vamos dando un bocado cada uno hasta que se acabe, después otro y después otro.
- ¡Qué te has creído! –salta Paola- cada bocado tuyo vale por tres míos, como si no te conociéramos.
- Partimos dos por la mitad –afirma David- y el otro lo partimos en cuatro partes iguales.
- Yo quiero un trozo de cada pastel –replica Jesús.
- ¡Jo!, pues no vamos a tener que dar cortes para darle el caprichito al comilón de Jesús – protesta David.
- Venga hacerlo ya como sea, que tenemos hambre –replican Eva y Paola.

Esta es la foto del pastel de chocolate, hay otro pastel de fresa y otro de vainilla.



¿Cómo harías tú el reparto para que todos comieran lo mismo de los distintos pasteles?

Observamos como los distintos grupos lo resuelven. Después, pedimos que expliquen cómo lo han resuelto. Con el debate vamos fijándonos en los conocimientos previos que tiene cada alumno/a del tema.

Ahora introducimos el concepto de fracción como parte/todo. Ponemos varios ejemplos con círculos donde pintamos algunos partes, los chicos/as nos van diciendo la fracción que corresponde. Con esto repasamos el concepto más básico de fracción, visto por los alumnos/as en cursos anteriores.

Ampliamos este concepto en figuras distintas de círculos, vamos a utilizar distintos polígonos y segmentos, para representar las fracciones.

EJERCICIO PIZARRA 1.

Pintamos un círculo, un cuadrado, un triángulo, un hexágono y un segmento en la pizarra. En cada uno de ellos sale un alumno/a a colorear la mitad. Realizamos la siguiente pregunta: *¿Son todas las mitades iguales?*

Con este ejercicio, pretendemos crear debate con los alumnos/as, esperamos que digan distintas respuestas, algunas de ellas incorrectas por no tener el concepto claro de que la medida de una parte se hace siempre en relación con el todo del que procede. Nosotros les llevaremos hacia la respuesta correcta, con más ejemplos si fuera necesario, para que lleguen a entender este concepto.

EJERCICIO 2.

Ahora pedimos que realicen en el cuaderno lo mismo con la fracción $1/3$.

Proponemos los siguientes ejercicios para casa.

EJERCICIOS 3.

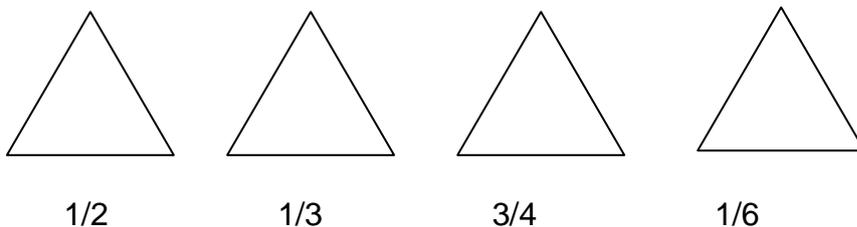
¿Qué fracción se ha representado en cada una de estas figuras?



Este ejercicio vamos a pedir que lo hagan individualmente y varios alumnos van a salir a la pizarra para comprobar si sus respuestas son correctas.

EJERCICIO 4.

Colorea en cada triángulo la fracción que se indica:



EJERCICIO 5.

Escribir frases de la vida cotidiana donde se utilicen las fracciones $1/2$, $1/4$ y $1/3$.

FASE DE DESARROLLO Y BUSQUEDA

SESIÓN 2.

Para empezar la clase, corregimos los ejercicios 3 y 4.

Resolvemos dudas de la clase anterior o alguna sobre el tema que planteen los chicos.

Después, corregimos el ejercicio 5. Vamos apuntando las distintas oraciones que los chicos/as han traído en la pizarra, pedimos que nos expliquen el significado de las fracciones en los distintos contextos donde aparecen.

Duración de la corrección de ejercicios 15 minutos.

Los objetivos a desarrollar en esta sesión:

- ✚ Comprender los distintos usos y significados de los números racionales.
- ✚ Reconocer fracciones en la vida cotidiana.
- ✚ Comprender los significados del numerador y el denominador, en los distintos usos.
- ✚ Leer y escribir racionales. Representar gráficamente una fracción sobre un segmento.

- ✚ Representar racionales en la recta real.

- ✚ Diferenciar entre fracción propia e impropia.

Empezamos proponiendo el siguiente ejercicio:

EJERCICIO PIZARRA 2.

Un ciclista tiene que recorrer 42 kilómetros que separan dos pueblos. Si ha recorrido $\frac{3}{7}$ de la distancia, ¿cuántos kilómetros le faltan todavía?

Explicamos este ejercicio, representado en un segmento los 42 km y después señalamos lo que significan los $\frac{3}{7}$.

Seguimos haciendo los siguientes ejercicios para que los alumnos afiancen el uso de fracción como medida.

EJERCICIO PIZARRA 3.

Una huerta tiene una extensión de 8 000 metros cuadrados, de los que $\frac{3}{5}$ están sembrados de maíz, y el resto, de alfalfa. ¿Cuántos metros cuadrados se han dedicado a cada cultivo?

EJERCICIO PIZARRA 4.

Tenía 200 palomas y he vendido los $\frac{4}{5}$ de las palomas. ¿Cuántas he vendido?
¿Cuántas me quedan?

La realización de estos ejercicios junto a la explicación 15 minutos.

Con los siguientes ejercicios cambiamos un poco los datos, para ver como los niños lo resuelven. Les damos unos minutos para que lo piensen y después lo resolvemos.

EJERCICIO PIZARRA 5.

En una clase hay 10 chicas y 14 chicos. ¿Qué fracción de la clase representan las chicas? ¿Y los chicos?

EJERCICIO PIZARRA 6.

Un tonel de vino está lleno hasta los $\frac{7}{11}$ de su capacidad. Se necesitan todavía 1.804 litros para llenarlo completamente. ¿Cuál es la capacidad del tonel?

Este ejercicio nos ayuda a explicar cómo reconstruir el todo a partir de las partes del todo.

Continuamos, explicando cómo se representa los números racionales en la recta real, utilizamos las fracciones. Además explicamos los conceptos de fracción propia e impropia. Realizamos varios ejemplos en la pizarra.

Para el siguiente ejercicio dejamos unos minutos para que lo piensen y lo corregimos en clase.

EJERCICIO PIZARRA 7.

Di cuales de las siguientes fracciones son propias e impropias. Justifica cuales son mayores o menores que la unidad. ¿Alguna es fracción unitaria? ¿Por qué?

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{8}{7}$ e) $\frac{10}{11}$ f) $\frac{11}{10}$

Los siguientes ejercicios los proponemos para casa.

EJERCICIO 6.

Calcula:

- | | |
|--|--|
| a) Los $\frac{4}{7}$ de 63 litros. | b) Los $\frac{15}{100}$ de 3000 euros. |
| c) Los $\frac{3}{8}$ de 72 kilogramos. | d) Los $\frac{3}{5}$ de 100 euros. |

EJERCICIO 7.

De una cesta de manzanas se pudren $\frac{2}{3}$. Comemos las $\frac{4}{5}$ del resto y las 25 restantes las utilizamos para hacer mermelada. ¿Cuántas manzanas había en la cesta?

EJERCICIO 8.

Señala, en las fracciones siguientes, aquellas que son mayores, iguales o menores que la unidad:

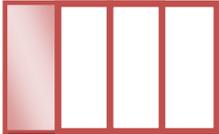
$$\frac{4}{5}, \frac{7}{7}, \frac{6}{4}, \frac{3}{9}, \frac{11}{11}, \frac{1}{3}, \frac{5}{2}$$

EJERCICIO 9.

- a) Escribe tres fracciones menores que la unidad.
- b) Escribe tres fracciones mayores que la unidad.
- c) Escribe tres fracciones iguales a la unidad.

EJERCICIO 10.

Representa la zona coloreada en forma de fracción:

a)  b)  

c)   d) 

Fijate en las fracciones impropias que han salido, ¿se te ocurre otra forma de representar las fracciones?

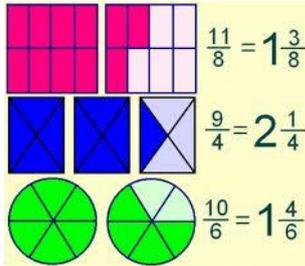
SESIÓN 3.

Empezamos corrigiendo los ejercicios propuestos para casa.

Los objetivos a desarrollar en esta sesión:

-  Expresar una fracción impropia como n° mixto, y viceversa.
-  Calcular fracciones equivalentes y justificar su equivalencia.
-  Calcular la fracción irreducible equivalente a una fracción dada.

Después escuchamos las respuestas de los alumnos/as a la pregunta del ejercicio 10, con ello introducimos el concepto de números mixtos, es decir, como expresar una fracción impropia en un número mixto y viceversa. Además de ver sus distintas representaciones con ejemplos.

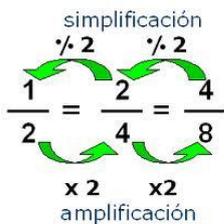


La duración que estimo para la explicación y los ejercicios son 30 minutos.

Lo siguiente que vamos a enseñar a los alumnos/as es la fracción equivalente, utilizando la amplificación y simplificación de las fracciones. Además, de cómo llegar a la fracción irreducible. Hacemos varios ejemplos como el que sigue.

EJERCICIO PIZARRA 8.

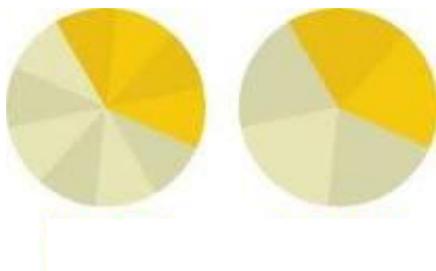
Escribe fracciones equivalentes a $\frac{2}{4}$, por simplificación y por amplificación. ¿Cuál es la fracción irreducible?



Después, pondremos ejemplos gráficos, donde fracciones equivalente representa el mismo trozo de la unidad que tengamos. Volveremos a repasar el concepto de fracción irreducible.

EJERCICIO PIZARRA 9.

¿Qué fracción representa la parte coloreada de cada círculo? ¿Son equivalentes?



Los siguientes ejercicios son para hacer en casa.

EJERCICIO 11.

Tenemos una bolsa de 30 bolas, de las cuales 12 son rojas, 8 son azules y 10 verdes.

- a) ¿Qué fracción hay de bolas rojas?
- b) ¿Qué fracción representa las bolas no azules?
- c) Si saco dos bolas verdes, ¿Qué fracción representan esas dos bolas del total de verdes?

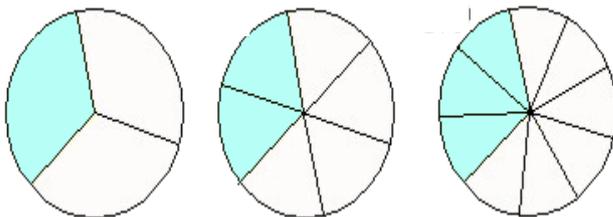
EJERCICIO 12:

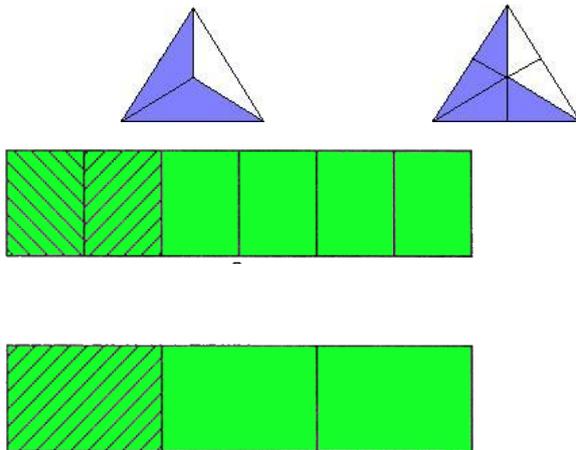
¿Qué tipo de fracción son las siguientes? Representálas en un polígono o segmento. Expresa como número mixto las que puedas.

FRACCIÓN	TIPO	REPRESENTACIÓN (polígono o segmento)	Número Mixto
$2/7$			
$5/2$			
$7/4$			
$5/6$			
$1/9$			
$6/3$			

EJERCICIO 13.

Que parte de fracción representa la parte sombreada, di cuales son equivalentes y cuáles son las fracciones irreducibles.





EJERCICIO 14.

Halle una fracción equivalente a $\frac{18}{66}$ tal que:

- El numerador sea 9.
- El denominador sea 3 veces el denominador original.
- El numerador valga la tercera parte del numerador original

SESIÓN 4.

Corregimos los ejercicios del día anterior.

Los objetivos a desarrollar en esta sesión:

-  Adición y sustracción de racionales.
-  Aplicar y comprender la jerarquía de las operaciones y el uso de paréntesis entre números racionales.
-  Comparar y ordenar números racionales.

Recordamos el algoritmo del m.c.m., para ello ponemos varios ejemplos que realizamos preguntando a los chicos/as. Después, explicamos el orden de las fracciones, realizamos más ejemplos con este nuevo concepto.

A continuación introducimos el algoritmo de la suma y la resta de fracciones. Ponemos varios ejemplos de cómo se realiza la suma y la resta. Después, enseñamos la suma y resta con la representación gráfica de fracciones.



Representa $1/2$



Representa $1/4$



Calcula la suma de $1/2 + 3/4$

Pondremos varios ejemplos más, para que quede lo más claro posible el algoritmo de la suma y resta para fracciones. Los siguientes ejercicios son para la casa.

EJERCICIO 15.

Reduce a común denominador:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

b) $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}$

c) $1, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{12}$

d) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{1}{6}$

EJERCICIO 16.

Reduce a común denominador y después ordena de menor a mayor. Representalos en la recta numérica.

e) $1, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{7}{10}$

f) $\frac{2}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$

g) $\frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{11}{10}$

h) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{7}{6}$

EJERCICIO 17.

Realiza las siguientes operaciones con fracciones:

a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3}$

b) $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}$

c) $\frac{5}{2} - \frac{1}{3}$

d) $\frac{6}{5} + \frac{2}{7}$

No olvidemos lo que hemos aprendido, representa estas operaciones con polígonos.

EJERCICIO 18.

Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{5}{2}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{5}{2}$

c) $5 - \frac{1}{5} + \frac{3}{5}$

d) $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{7}{6}$

e) $3 + \frac{1}{7} - \frac{2}{4}$

EJERCICIO 19:

Resuelve las siguientes operaciones, simplifica el resultado:

a) $2 - \left(1 + \frac{2}{3}\right) =$

b) $1 - \left(\frac{3}{10} + \frac{5}{6}\right) =$

c) $\left(2 - \frac{3}{4}\right) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) =$

d) $\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) =$

e) $\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{5}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{2} =$

f) $\left(4 - \frac{5}{8}\right) - \left(5 - \frac{3}{4}\right) + \left(3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\right) =$

SESIÓN 5.

Empezamos corrigiendo los ejercicios de la sesión anterior. Van a salir varios alumnos/as a la pizarra.

Los objetivos a desarrollar en esta sesión:

- ✚ Multiplicación y división de racionales.
- ✚ Aplicar y comprender la jerarquía de las operaciones y el uso de paréntesis entre números racionales.

En esta sesión vamos a explicar el algoritmo de la multiplicación y de la división. Para ello, ponemos varios ejemplos en la pizarra para explicarlo. Con esto queda terminada la parte teórica del tema.

Ahora pedimos que hagan el siguiente ejercicio en unos minutos, para corregirlo en clase.

EJERCICIO PIZARRA 10.

Realiza las siguientes operaciones:

$$a) \frac{2}{3} \times \frac{4}{2}$$

$$c) \frac{4}{8} : \frac{3}{5}$$

$$b) \frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$$

$$d) \frac{1}{3} : \frac{4}{2}$$

Proponemos los siguientes ejercicios para casa:

EJERCICIO 20.

Resolver y simplificar.

$$a) \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} =$$

$$b) \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} =$$

$$c) \frac{13}{5} : \frac{5}{10} =$$

$$d) \frac{2}{9} \cdot 3 \cdot \frac{5}{4} =$$

$$e) \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} : \frac{2}{3} =$$

$$f) \left(\frac{2}{12} \cdot \frac{6}{4} \right) : \left(\frac{3}{4} : \frac{3}{2} \right) =$$

EJERCICIO 21. *Buscando la escoba.*

Calcula y simplifica el resultado de estas diez operaciones. Encuentra con tus soluciones el camino que debe de seguir la bruja para llegar hasta su escoba:

a) $\frac{4}{3} + 1 - \frac{2}{3} =$

f) $5 : \frac{3}{4} - \frac{10}{6} =$

b) $2 \cdot \frac{4}{3} - \frac{4}{6} + 1 =$

g) $\frac{6}{7} : \frac{3}{5} - \frac{3}{7} =$

c) $\frac{5}{6} + \frac{4}{3} - \frac{1}{6} =$

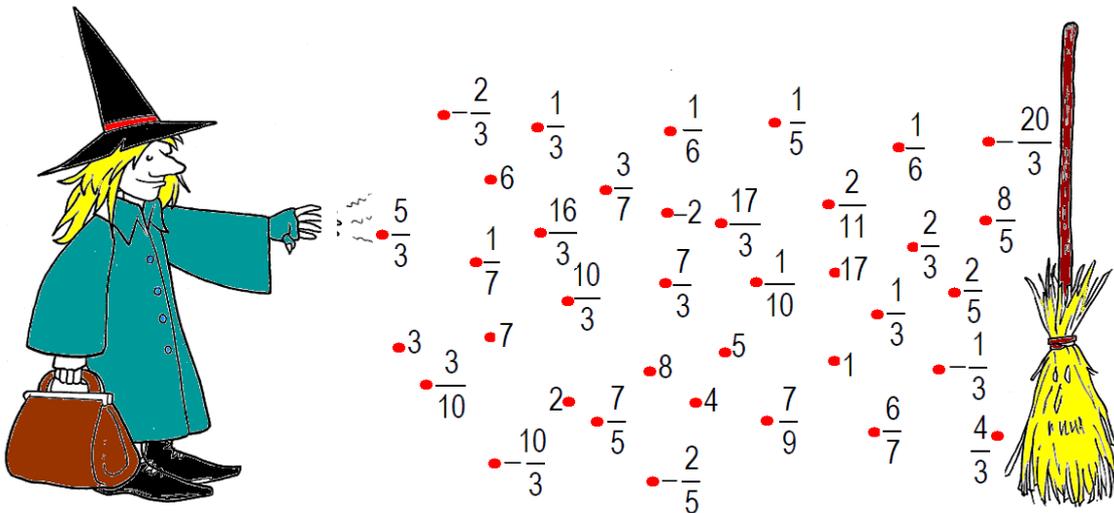
h) $(4 - \frac{1}{3}) : \frac{11}{2} =$

d) $-\frac{5}{3} + \frac{15}{9} : \frac{1}{3} =$

i) $\frac{-4}{3} \cdot \frac{5}{2} + 3 =$

e) $(\frac{4}{7} : \frac{2}{7}) \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{3} =$

j) $\frac{2}{3} + \frac{14}{21} =$



FASE DE SÍNTESIS, PRESENTACIÓN Y EVALUACIÓN

SESIÓN 6.

La primera parte de la sesión la dedicamos a corregir ejercicios.

Los objetivos a repasar en esta sesión:

- ✚ Calcular fracciones equivalentes y justificar su equivalencia.
- ✚ Utilizar materiales manipulativos para identificar los distintos significados de las fracciones.

Después vamos a realizar un juego con los chicos/as:

DOMINÓ DE FRACCIONES

Vamos a sentar a los chicos/as en grupos de 4 y les repartimos a cada grupo un dominó. De cada grupo los dos con menos puntos se enfrentaran a dos con menos puntos de otro grupo, los otros dos chicos/as con los otros dos. Así, llegamos a una lista con las puntuaciones que consigan los chicos/as, desde menos puntos a más puntos. Queremos que los chicos/os no pierdan el interés en el tema. A continuación describo en qué consiste el juego.

Vamos a jugar al dominó de fracciones equivalentes.

Antes de empezar a jugar escribe algunas fracciones equivalentes a cada una de las fracciones que encontrarás en el juego:

Fracción	Fracciones equivalentes
$1/7$	
$1/6$	
$1/5$	
$1/4$	
$1/3$	
$1/2$	
1	

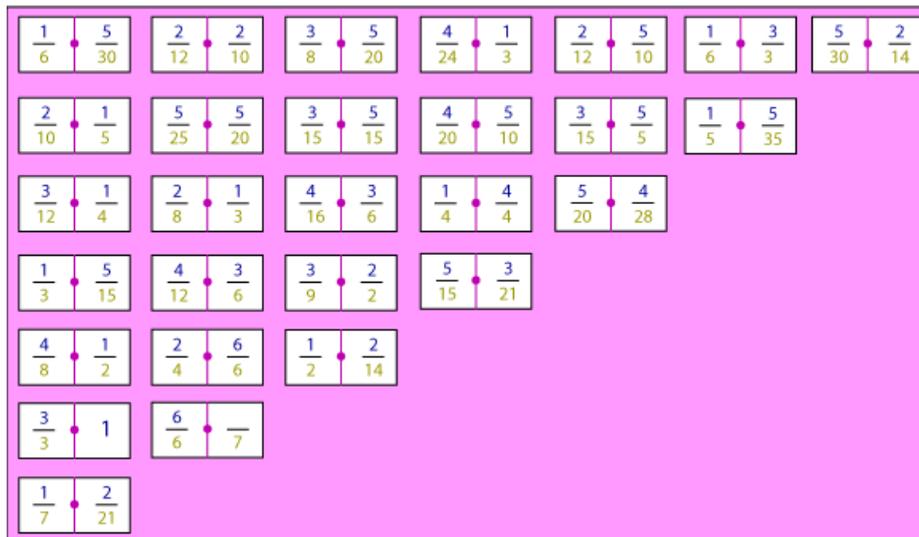
Reglas de juego

- El dominó tiene 28 fichas y se juega con 4 jugadores.
- Se colocan las fichas boca abajo y se revuelven. Cada jugador toma 7 fichas al azar.
- El jugador con que inicia la partida es el que tenga la ficha:

$\frac{3}{3}$	1
---------------	---

- El jugador que esté a la derecha pone una ficha con un 1 o equivalente.

- El siguiente jugador a la derecha puede escoger, para poner, uno de los dos extremos de la hilera. Siempre tendrá que poner una ficha que coincida con el número de alguno de los extremos.
- Cada jugador pondrá una sola ficha en su turno y si no tiene ninguna que pueda poner tendrá que pasar.
- Gana el primer jugador que coloque todas sus fichas.
- Si esto no sucede porque ya ningún jugador puede poner fichas, se dice que el juego está cerrado.
- En un juego cerrado, cada jugador deberá sumar todos los números de sus fichas.
- Ganará el que menos puntos tenga.



Para este juego utilizaremos 30 minutos.

En la siguiente media hora vamos a interactuar en el ordenador, a los chicos/as se les dará la siguiente dirección donde encontrarán ejercicios sobre el tema. Se pondrán los alumnos en grupos cada uno con su ordenador para que puedan ayudarse unos a otros. Iré revisando como van realizando la actividad.

Una de las direcciones que les doy es:

<http://www.amolasmates.es/primer0%20eso/mat1eso3.html>

Pretendemos que los chicos/as repasen todo lo dado en la unidad, así queden afianzados los conceptos. No vamos a introducir nuevos conceptos.

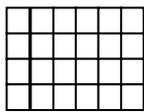
SESIÓN 7.

Corregiremos los ejercicios de la sesión 5 y resolveremos las dudas que se planteen del tema.

En esta sesión, vamos a repasar todo el tema con distintas tareas. Primero se les propone a los alumnos/as una serie de ejercicios, los sentaremos en grupo. Pasados unos minutos para que los chicos/as los puedan resolver, se corregirán en la pizarra.

EJERCICIOS: REPASO DE FRACCIONES

1. Dibuja en tu cuaderno tres rectángulos como el de la figura y coloréalos de modo que representen las siguientes fracciones:



- a) $3/12$ b) $5/6$ c) $7/24$

Después compara las fracciones, ordenándolas de menor a mayor.

2. Sustituye los espacios de las frases por fracciones:

- a) De cada 12 niños, 7 son morenos; por tanto, son morenos los _____ de los niños.
 b) De 15 partes iguales que tenía de pastel, Pablo se comió 2, es decir, se comió los _____ del pastel.
 c) En una clase hay 12 niños y 14 niñas; por consiguiente, los _____ de la clase son niños, y los _____ son niñas.
 d) La quinta parte de 9 es _____.
 e) Al dividir 23 entre 5, obtenemos _____.

3. Representa sobre la recta graduada los siguientes números racionales:

- a) $5/3$ b) $2/3$ c) $4/7$ d) $7/4$

4. Escribe los términos que faltan en las siguientes igualdades de fracciones y señala, en cada caso, la fracción irreducible.

- a) $\frac{12}{10} = \frac{\quad}{5} = \frac{24}{\quad}$ b) $\frac{11}{2} = \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{6} = \frac{88}{\quad}$.

5. Ordena de menor a mayor los números racionales representado por las siguientes fracciones, reduciéndolas a común denominador siempre que sea necesario.

a) $\frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{10}{7}, \frac{9}{7}$

b) $\frac{7}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{2}, \frac{7}{9}$

c) $\frac{7}{6}, \frac{16}{20}$

d) $\frac{4}{21}, \frac{9}{35}, \frac{3}{14}$

6. Calcula mentalmente:

a) $\frac{4}{5}$ de 15

b) Dos tercios de 9

7. Calcula y simplifica:

d) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{10} - \left(3 - \frac{4}{5}\right)$

e) $\frac{5}{6} \cdot \left[\frac{3}{10} - \left(3 - \frac{4}{5}\right)\right]$

f) $\frac{5}{6} : \frac{3}{10} - \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{2}\right)$

g) $\frac{5}{6} : \frac{10}{3} - \frac{5}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{6}{5}\right)$

8. El denominador de una fracción es 2 veces el numerador. Redúcela a su fracción irreducible.

9. Encuentra una fracción irreducible que represente el mismo número racional que la fracción $\frac{12}{40}$.

10. El martes pasado acudieron a clase $\frac{4}{5}$ de los 25 alumnos de un curso. ¿Cuántas faltaron a clase?

11. Juan reparte entre sus cuatro compañeros 48 rotuladores para colorear un mural de ciencias de la naturaleza. Su amigo Jesús recibe la tercera parte; Carlos, la sexta parte; Pedro, la octava parte, y Maite, 2 rotuladores menos que Jesús.

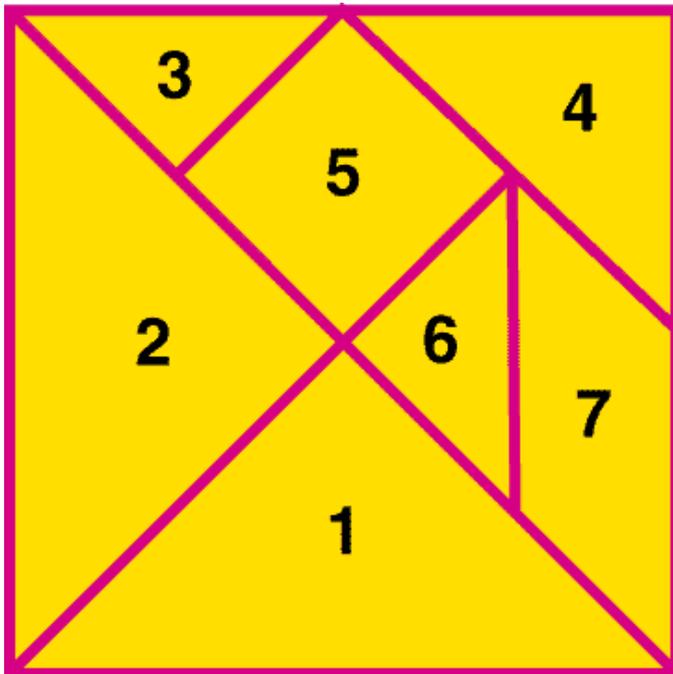
a) ¿Cuántos rotuladores le tocan a cada amigo?

b) ¿Se queda Juan con alguno?

SESIÓN 9.

Realizaremos la corrección de los ejercicios que queden del día anterior, resolveremos dudas sobre las fracciones.

En esta sesión vamos a repasar fracciones, hacemos grupos de 3 en 3 alumnos y les repartimos el siguiente juego: Tangram. Consiste en un cuadrado formado por siete piezas, tal como señala la figura. Fue inventado por los chinos y le llama el **Juego de la Sabiduría**.



Las siete piezas son: 2 triángulos pequeños iguales (3, 6), 1 triángulo mediano (4), 2 triángulos grandes iguales (1,2), 1 cuadrado (5) y 1 rombo (7).

Si no tienes un tangram dibuja éste. Juega con las piezas y observa sus equivalencias.

Por ejemplo, puedes unir los dos triángulos pequeños (3 y 6) y formar el triángulo mediano (4).

❖ Si la unidad es el cuadrado total:

¿Qué fracción de cuadrado es un triángulo pequeño?

¿Qué fracción de cuadrado es el cuadrado pequeño?

¿Qué fracción de cuadrado es el triángulo mediano?

¿Qué fracción de cuadrado es el romboide?

¿Qué fracción de cuadrado es un triángulo grande?

❖ Si la unidad es un triángulo grande:

¿Qué fracción de triángulo es un triángulo pequeño?

¿Qué fracción de triángulo es el cuadrado pequeño?

¿Qué fracción de triángulo es el triángulo mediano?

¿Qué fracción de triángulo es el romboide?

¿Qué fracción de triángulo es el otro triángulo grande?

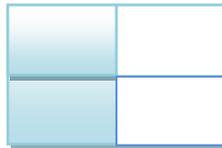
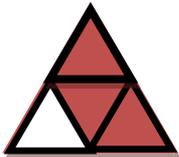
SESIÓN 10.

En esta última sesión se realizará una prueba escrita en la que se procurará recoger todos los puntos que se han ido explicando a lo largo del tema.

EXAMEN

Ejercicio 1:

¿Qué fracción representa la parte coloreada en las siguientes figuras:

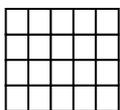


Ahora representa las fracciones que te han salido en la recta numérica.

Ejercicio 2:

a) Representa en distintos polígonos $1/4$.

b) Representa en figuras de la forma



$$\frac{4}{20}, \frac{12}{20}, \frac{9}{20}.$$

c) Pinta la mitad de esa figura: ¿qué fracción representa? Calcula su fracción irreducible.

d) Suma $\frac{3}{20} + \frac{1}{2}$. Representa esta suma con polígonos.

Ejercicio 3:

a) Escribe una fracción propia.

b) Escribe una fracción impropia.

c) ¿Cuál de ellas se puede pasar a número mixto? ¿Por qué?

Ejercicio 4:

Yolanda se ha comido $\frac{2}{5}$ de una lata de aceitunas que contenía 35 unidades. ¿Cuántas quedan?

Ejercicio 5:

Juan se gasta en fotocopias $\frac{1}{5}$ del dinero con el que se salió de casa esta mañana. Después emplea en almorzar $\frac{1}{8}$ de lo que le queda. Si regresa a casa con 14 €, ¿cuánto dinero tenía al salir?

Ejercicio 6:

Compara los siguientes números racionales y ordénalos de menor a mayor:

$$\frac{4}{7}, \frac{5}{21}, \frac{6}{35}, \frac{9}{14}$$

Ejercicio 7:

Agrupar, de entre las siguientes fracciones, las que sean equivalentes:

$$\frac{7}{3}, \frac{4}{7}, \frac{28}{12}, \frac{20}{35}, \frac{2}{9}, \frac{22}{99}$$

Ejercicio 8:

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{4} + 4 \cdot \left(5 - \frac{1}{2}\right)$$

$$21 - \frac{2}{7} \cdot 21 - \frac{3}{4} + 4 \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{3}{8} + \frac{2}{5}\right) + 4 \cdot \left(5 - \frac{1}{2}\right)$$

Ejercicio 9:

La edad de Pedro es $\frac{3}{10}$ de la de su padre. Si Pedro tiene 12 años, ¿qué edad tiene su padre?

Ejercicio 10:

Si en una piscina de 10000 litros se han llenado los $\frac{7}{10}$, ¿qué cantidad de agua falta para llenarla?

El examen tiene un nivel de dificultad medio, por lo que, hace posible que lo puedan aprobar todos los alumnos/as si han estudiado un poco y se han interesado por el tema. Además, permite que aquellos estudiantes que hayan entendido bien el tema, demuestren sus conocimientos y obtengan una buena calificación.

6. EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Adquirir conocimientos matemáticas supone dominar todo el proceso seguido en las tareas hasta obtener los resultados. No nos basta con llegar a resultados finales concretos sin construir una estrategia para ello.

Las Matemáticas tienen un valor formativo que trasciende su propio ámbito: fomentan en el alumnado la creatividad, los hábitos de indagación, la visión amplia de la realidad o la capacidad de enfrentarse a situaciones desconocidas e imprevistas.

La evaluación es parte integrante y fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje. Requiere obtener información de manera sistemática, que permita al profesor/a emitir un juicio valorativo sobre el ritmo del proceso de aprendizaje, en aspectos parciales y globales del mismo. Evaluar no es tarea fácil, sobre todo en lo relativo a aprendizajes a largo plazo.

La evaluación debe extenderse no sólo a la adquisición de rutinas y hechos aislados, sino que debe recoger otros contenidos, como los actitudinales y los procedimientos de tipo general. Esto último modifica la elección de técnicas e instrumentos aconsejables para la evaluación.

Para describir el sistema de evaluación que se va a emplear en la presente propuesta de unidad didáctica, en primer lugar se enuncian los criterios de evaluación seleccionados, a continuación se detallan los instrumentos de evaluación que emplearemos y, finalmente, se describen los criterios de calificación de algunos de esos instrumentos.

Terminada la unidad didáctica, será muy interesante obtener información sobre el grado de cumplimiento de las destrezas, razonamientos y estrategias que se numeraron en apartados anteriores de este estudio.

Así como el alcance de los objetivos por parte del alumnado, que nos dan una idea más detallada de lo que se esperaba conseguir con el tema y que, en última instancia, colaboran en el desarrollo de las competencias PISA, tal y como se indicaba en las tablas correspondientes.

6.1. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

La variedad de aspectos a evaluar y su diferente nivel de complejidad, hace que no pretenda evaluar todo a través de un mismo tipo de prueba. Por tanto, se emplearán diversos instrumentos de recogida de información para evaluar a los alumnos/as, como son los siguientes:

1. Durante todo el desarrollo de la unidad didáctica, se llevará a cabo una evaluación continua en la que se valorará la participación en el aula y la realización de las tareas propuestas para resolver en casa, así como la actitud y el comportamiento en clase.

2. Se tendrá en cuenta la corrección de los trabajos de los alumnos, individuales o colectivos.

3. Se valorarán los ejercicios de repaso de fracciones, que no contarán como puntuación para la nota final, sino que nos servirán para detectar posibles errores de concepto, así como carencias en los procedimientos.

Si al realizar estos ejercicios, la mayoría de los alumnos/as los realizan sin esfuerzo, se seguirá trabajando como se venía haciendo desde el principio.

Si por el contrario el resultado fuese desfavorable, se intentará, por una parte, incidir de nuevo en los contenidos, y por otra, se dedicará la mitad de una sesión a resolver las dudas que los alumnos planteen, y la otra mitad a que resuelvan ejercicios en grupo para que puedan ayudarse entre ellos.

4. Cuando se haya desarrollado la unidad didáctica completa, los alumnos fijarán una fecha para la realización de un examen sobre la misma. Además, existirá la posibilidad de hacer recuperaciones. El aprobado del tema supondrá que el alumno ha alcanzado los objetivos fijados.

6.2. CRITERIOS DE CALIFICACIÓN

La nota final del tema se confeccionará con los siguientes criterios:

1. Examen: 60%
2. Trabajo diario, participación y actitud: 20%
3. Trabajo escrito: 20%

A la hora de calificar, se tendrán en cuenta:

En relación con los conceptos:

1. Comprensión, reconocimiento y utilización del lenguaje matemático.
2. Asimilación y aplicación a la práctica de los contenidos trabajados.
3. Comprensión y explicación de los problemas planteados.

En relación con los procedimientos:

4. Expresión oral correcta y adecuada.
5. Uso correcto de la simbología matemática y conocimiento de las propiedades a la hora de operar y simplificar las expresiones matemáticas.
6. Utilización adecuada de los diversos sistemas de representación. Relacionar correctamente expresiones analíticas y gráficas.
7. Planteamiento y resolución de problemas.
8. Autonomía en el aprendizaje.
9. Presentación a tiempo de trabajos y cuaderno. En los trabajos se tendrán en cuenta la originalidad y el nivel de profundidad alcanzado al realizarlo.

En relación con las actitudes:

10. Aportaciones e iniciativas en el aula.
11. Orden y limpieza en la presentación de trabajos.
12. Interés y curiosidad por la matemática.

7. CONCLUSIÓN

Como conclusión, después de realizar el máster y más concretamente este trabajo, creo en la importancia de realizar un estudio previo por parte del profesor sobre cada tema de las Matemáticas. Para tener unos objetivos concretos, prever posibles errores y dificultades de los alumnos/as y seleccionar tareas adecuadas que sirvan para un buen aprendizaje. Además, utilizar distintos materiales y recursos para la enseñanza, ayuda a motivar y estimular a los alumnos/as.

Para concluir esta trabajo, espero no olvidar estas citas:

“Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo.”

(Benjamin Franklin. Estadista y científico)

“El maestro que intenta enseñar sin inspirar en el alumno el deseo de aprender está tratando de forjar un hierro frío.”

(Horace Mann. Educador)

8. BIBLIOGRAFÍA

Ministerio de Educación y Ciencia (2006). RD 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE-A2007-238.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. *BOE*, 174, 31680-31828.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Salvador Llinares Ciscar y M^a Victoria Sánchez García. *Matemáticas: Cultura y aprendizaje. Capítulo 4: Fracciones*. Editorial Síntesis.