"Tierra de Incógnitas"

Un juego didáctico para afianzar los conocimientos sobre las ecuaciones de primer grado.

Trabajo Fin de Máster presentado por

DAVID SÁNCHEZ MEDINA

Universidad de Granada

Curso 2011-2012

Universidad de Granada

"Tierra de Incógnitas"

Un juego didáctico para afianzar los conocimientos sobre las ecuaciones de primer grado.

Memoria de TRABAJO FIN DE MÁSTER realizada bajo la dirección del Doctor Jose Luis Lupiáñez Gómez y la Dª Marta Molina González del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta David Sánchez Medida, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo.: David Sánchez Medina

VºBº del director	VºBº de la directora
Fdo: José Luis Lupiáñez Gómez	Fdo: Marta Molina González

Agradecimientos

En primer lugar quiero expresar mi agradecimiento a los directores de este trabajo, por el tiempo, dedicación y apoyo que han brindado a la realización de este.

De la misma manera, agradezco a mi tutor durante el periodo de prácticas de este Máster, por sus enseñanzas y consejos, y por permitirme poner en práctica en sus clases el material de este trabajo. Así como a sus 13 alumnos que probaron el material y han hecho posible este trabajo.

Y en especial, a esa persona que con su ayuda y consejos de fortaleza y entusiasmo en momentos de dificultad me ha animado a continuar con la realización de este trabajo y a diseñar el material.

Índice

Introducción

El documento que aquí se presenta es un Trabajo de Fin de Máster desarrollado durante el curso 2011-2012, para la obtención del título de Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, por el alumno David Sánchez Medina, bajo la dirección de los doctores D. José Luis Lupiañez y Dª. Marta Molina.

En este trabajo se presenta el diseño y la puesta en práctica de un nuevo material didáctico, un juego de mesa dirigido a alumnos de 2º de Educación Secundaria Obligatoria (o de un nivel superior). Este juego se basa en la utilización de diferentes sistemas de representación y sus relaciones, para afianzar los conocimientos adquiridos durante la explicación del tema de Ecuaciones en la materia de Matemáticas.

Este trabajo está organizado en seis capítulos:

En el primer capítulo, justificamos el interés del diseño de este material, resaltando la importancia que tienen los sistemas de representación en la asimilación de conceptos, y presentamos el objetivo principal que se pretende conseguir mediante la utilización del material, así como otros logros que el material podría ayuda a alcanzar.

El segundo capítulo recoge el análisis realizado sobre las ecuaciones de primer grado en el que se fundamenta este trabajo y el estudio de algunos materiales didácticos con los que se pueden trabajar las matemáticas en el aula.

En el tercer capítulo, mostramos el diseño del material, detallamos los componentes que lo forman, explicamos las reglas por las que se rige y describimos como ponerlo en práctica en un aula de Secundaria. Además realizamos un análisis exhaustivo de cada uno de los elementos matemáticos que lo forman.

En el cuarto capítulo, describimos la metodología empleada para valorar la utilidad del material. Mostramos el tipo de alumnado que probó el juego, su formación, capacidades e interés en lo que a la asignatura de Matemáticas se refiere. Asimismo detallamos los instrumentos de recogida de datos que se utilizaron.

En el quinto capítulo, comentamos los resultados obtenidos al analizar todos los datos que se obtuvieron a partir de la puesta en práctica del material en una clase de Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Por último, en el sexto capítulo, realizamos un balance del juego, señalando las conclusiones obtenidas antes de la puesta en práctica del juego y las alcanzadas tras ésta, así como posibles modificaciones y adiciones que se podrían realizar para mejorarlo tras haber observado su funcionamiento.

Al final de este documento se pueden encontrar varios anexos donde se recopilan los diferentes elementos del juego: tablero, tarjetas, pruebas y una versión reducida de las instrucciones.

1. Justificación

En este primer capítulo detallamos la motivación de la innovación educativa que se muestra en este trabajo, justificamos el interés que nos lleva a diseñar el material, fundamentando su pertinencia desde la investigación, y determinamos los objetivos que se persiguen con su diseño.

1.1. Motivación de la innovación

Este trabajo pretende ayudar a los alumnos a conseguir un aprendizaje más significativo del concepto de ecuación de primer grado, empleando diversos sistemas de representación, y no solo el sistema de representación simbólico, que suele ser el más utilizado. Todo esto introducido en un juego de mesa que pone a prueba sus conocimientos sobre las ecuaciones lineales, les muestra, recuerda, y permite trabajar las diferentes representaciones de éstas, y les permite divertirse a la vez que aprenden y practican casi sin que se den cuenta.

El paso del estudio de la aritmética al estudio del álgebra que supone empezar a trabajar con las ecuaciones lineales, los diferentes significados que puede tener el signo igual, y la introducción de las variables y su representación mediante letras, es uno de los tránsitos más difíciles dentro del desarrollo de los contenidos matemáticos. Se requiere un importante cambio en el pensamiento de los alumnos (es uno de los factores que permiten comprobar el paso del estadio de operaciones concretas al del pensamiento formal), lo cual les dificulta sobremanera entender el concepto de ecuación.

La utilización de diferentes sistemas de representación y el desarrollo de la habilidad para pasar de un sistema a otro (observando así su relación) permite comprender mejor el significado de una ecuación, al facilitar el proceso de aprendizaje. Esto es debido a que, aunque en esencia diferentes representaciones son el mismo concepto mostrado de diferente forma, cada una de ellas permite visualizar diferentes aspectos de un concepto, reforzando así la comprensión de éste.

El sistema de representación simbólico (el más utilizado) da una perspectiva formal del concepto de ecuación lineal y es el que permite realizar los cálculos que se requieran con mayor facilidad. El sistema de representación numérico permite iniciar a los alumnos en la búsqueda de la solución de una ecuación. El sistema de representación gráfico aporta una visión geométrica del concepto de ecuación de primer grado, haciendo así mucho más fácil su comprensión. El sistema de representación manipulativo permite ver y tocar un concepto abstracto para los alumnos como son las ecuaciones, reduciéndolas a algo tangible y concreto con lo que poder trabajar. Por último, el sistema de representación verbal conlleva el componente comunicador, este sistema es el que más problemas da a los estudiantes, pero por ello mismo es el que más muestra su comprensión sobre el tema.

Algunas de esas formas de representación ya forman parte de la enseñanza de las ecuaciones de primer grado, pero en la mayoría de los casos son explicadas únicamente como otra noción más y no como elementos de apoyo para la comprensión de las ecuaciones. Esto último es lo que persigue este proyecto, trabajar con los diferentes sistemas de representación de las ecuaciones lineales para que el alumno adquiera una completa comprensión acerca de éstas.

1.2. Investigaciones que avalan el material

En este apartado resaltamos algunas investigaciones relacionadas con los diferentes sistemas de representación de un concepto matemático y su importancia para comprender éste, las cuales respaldan el diseño del material y los comentarios realizados en el apartado anterior:

> Wollman (1983) analiza las dificultades que suelen encontrar los estudiantes en la traducción de enunciados algebraicos verbales a la representación simbólica de éstos. Hace hincapié en que esta problemática deriva de explicaciones que se concentran en aprender una habilidad mecánica, y no en la comprensión de los conceptos en sí mismos.
>
> Lesh, Post y Behr (1987) muestran como la traducción entre diferentes sistemas de representación son importantes en el contexto educativo, al poder ayudar a identificar posibles dificultades y oportunidades de aprendizaje en los alumnos.
>
> MacGregor y Stacey (1993) analizan la traducción de enunciados algebraicos verbales a su expresión simbólica. Explican la importancia de la interacción del lenguaje y el aprendizaje de las matemáticas.
>
> Duval (1996) constata la importancia de la utilización de diferentes sistemas de representación, al no ser los objetos matemáticos unos objetos reales que pueden ser manipulados. También destaca la importancia de no emplear únicamente diferentes sistemas de representación, sino también coordinarlos.
>
> García (2000) nos muestra como se suelen favorecer las representaciones simbólicas frente al resto, dificultando así el aprendizaje. Documenta los obstáculos que los estudiantes encuentran, y las estrategias que emplean al pasar de una representación a otra.
>
> Penalva y Torregosa (2001) analizan las características de los diferentes sistemas de representación que se emplean en matemáticas y cómo la utilización de éstos facilita la construcción del conocimiento matemático en el aula, siendo para esto necesaria la coordinación entre los diferentes sistemas.
>
> Domínguez (2006) analiza los orígenes de los errores cometidos por un grupo de estudiantes de secundaria utilizando para ello un puzle algebraico. Destaca el interés de que los estudiantes manipulen varias representaciones para llegar a la comprensión total de un objeto.

Destacamos también algunas investigaciones que respaldan la utilización de materiales lúdicos para el aprendizaje de las matemáticas:

> De Guzmán (1984) destaca que la realización de actividades lúdicas puede mejorar la visión de las matemáticas que tienen los estudiantes, convirtiéndola en una ciencia divertida.
>
> El Informe Cockcroft (1985) recomienda la utilización de puzles y juegos matemáticos para conseguir los objetivos del programa y desarrollar el pensamiento lógico.
>
> Corbalán (1994) destaca la importancia de la utilización de juegos educativos en el aula para la detección de errores. Y señala que la práctica sistemática de juegos matemáticos es

una excelente forma de autocorrección de errores, pues al cometer errores se pierde el juego.

Contreras (2004) indica las ventajas de la utilización de materiales estructurados para aprender conceptos matemáticos, en especial los juegos por su atractivo para los adolescentes, consiguiendo gracias al impulso por la diversión un mejor aprendizaje.

1.3. Las ecuaciones lineales y los sistemas de representación en el currículo

Los documentos curriculares vigentes para la educación secundaria en España y en Andalucía, muestran que el desarrollo de las destrezas algebraicas, como es el empleo de ecuaciones lineales, se realiza progresivamente desde el primer curso hasta el último, y se alcanzan manejando símbolos y expresiones, y poniendo especial atención en la lectura, simbolización y planteamientos realizados a partir de enunciados de problemas.

> *La construcción del conocimiento algebraico ha de partir de la representación y transformación de cantidades. El trabajo con patrones y relaciones, la simbolización y la traducción entre lenguajes son fundamentales en los primeros cursos* (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007, p. 27)

En el bloque de Álgebra de cada uno de los cuatro cursos de la ESO, nos encontramos el desarrollo de las ecuaciones de primer grado, comenzando en los primeros cursos por la introducción de éste concepto y el de solución de una ecuación, y la utilización de métodos numéricos de ensayo y error y métodos algebraicos para su resolución. En los últimos cursos se combina la utilización del método algebraico con otros métodos numéricos y gráficos, empleando también recursos tecnológicos, para estudiar situaciones provenientes de diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana.

También se destaca en el bloque de contenidos comunes que los estudiantes deben adquirir la capacidad de expresar verbalmente los procesos que realizan y la confianza en las propias capacidades para interpretar situaciones de soporte matemático, lo cual en nuestro caso refuerza la importancia de la utilización del sistema de representación verbal, y la traducción y combinación de éste con otros sistemas de representación.

Los criterios de evaluación propuestos en estos documentos ponen de manifiesto la importancia del aprendizaje de las ecuaciones lineales. Algunos de estos criterios pretenden comprobar si los alumnos son capaces de utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y la resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas. Buscan apreciar la capacidad para plantear ecuaciones de primer grado y para combinar la resolución algebraica con otros métodos numéricos y gráficos.

La Junta de Andalucía, hace especial hincapié en la utilización de diversos sistemas para un mejor aprendizaje de las matemáticas, otorgando gran importancia al lenguaje verbal, y ante todo a la utilización de medios tecnológicos y manipulativos. Los siguientes extractos de este documento curricular, lo ponen de manifiesto:

> *Los medios tecnológicos son hoy día herramientas esenciales y habituales en el proceso educativo, en general, y en la materia de matemáticas de manera específica. Deben aprovecharse para el desarrollo de los procesos de aprendizaje y para facilitar la*

comprensión de los conceptos, dando menos peso a los algoritmos rutinarios y poniendo énfasis en los significados y razonamientos (Junta de Andalucía, 2006, p 51).

La adecuada utilización progresiva de símbolos y expresiones contribuirá al desarrollo natural de las destrezas algebraicas, que se facilitará con la lectura e interpretación simbólica de las situaciones problemáticas que se planteen y, en sentido inverso, con la traducción al lenguaje verbal de expresiones y resultados algebraicos. De esta manera, las Matemáticas deberán concebirse, entre otras muchas cosas, como un vehículo de comunicación y expresión de ideas, que contribuirá a la comprensión de otras materias (Junta de Andalucía, 2006, p 53).

1.4. Objetivo de la innovación

El objetivo general del material es conseguir, mediante la utilización de los diferentes sistemas de representación, y la traducción entre ellos, a través de diversas tarjetas y pruebas, una mejor comprensión del significado de las ecuaciones lineales.

Pero a la vez que se trabaja este objetivo, el material también permite:

- Motivar a los alumnos. No solo en la clase de matemáticas en la que se utilice este recurso, sino durante todas las clases en las que se trabajan las ecuaciones lineales, al poder mostrar a los alumnos este juego al principio del tema y hacerles ver que una vez explicado el tema de Ecuaciones serán capaces de jugar a él. Esto puede animarles a prestar mayor atención a las explicaciones del tema y a no ver las clases de matemáticas como la explicación de simples y aburridos teoremas y la resolución de problemas imposibles que no sirven de nada, como en muchas ocasiones llegan a pensar, sino como algo divertido y ameno.

- Interactuar con otros alumnos en un ambiente matemático. Durante la partida, al ser un juego en equipo, todos los participantes se relacionan entre sí, tanto con los miembros de su propio equipo, al tener que llegar a un consenso sobre la respuesta que darán a las cuestiones que se les plantean, como con los miembros del equipo contrario, no solo en momentos puntuales en los que cada equipo tiene debe plantearle una ecuación al contrario, sino en todo momento, pues cada grupo debe estar atento de las respuestas que dan sus adversarios para asegurarse de si son correctas o no, y en caso de no serlas señalarlo para ganar un turno extra.

- Reforzar lo aprendido a lo largo del tema de Ecuaciones. Este juego es ideal para practicar con los contenidos de las ecuaciones lineales al final de dicho tema, y como repaso previo a la evaluación de éste.

- Tomar conciencia de la importancia de determinar correctamente la solución de una ecuación. Al ser gravemente penalizados si determinan incorrectamente una solución en este juego, los alumnos adquieren el hábito de comprobar la solución antes de catalogarla como tal, lo cual suelen olvidar en multitud de ocasiones.

- Observar diferentes formas de resolver una ecuación, pudiendo así cada alumno elegir el método de resolución que mejor se adapte a sus habilidades, o si en algún momento no puede utilizarlo, cuanto menos que éste le permita encontrar las soluciones con otro método, como el de resolución algebraica, con mayor fluidez.

2. Fundamentación

En este capítulo mostramos el estudio que hemos realizado sobre las ecuaciones de primer grado desde el punto de vista escolar, sobre el cual hemos basado el diseño del material.

Rico (1997) determinó que para mejorar el diseño de unidades didácticas, antes de comenzar la planificación de éstas, se debe reflexionar sobre el conocimiento didáctico de cada uno de los temas. Para tal reflexión propuso una serie de organizadores del currículo. Trabajos posteriores como los de Gómez (2007) y Lupiañez (2009) han ampliado y estructurado esa propuesta, dando lugar a la noción de análisis didáctico. El siguiente estudio se basa en esos trabajos para mostrar lo que los profesores esperan que sus estudiantes aprendan acerca del tema de Ecuaciones, que obstáculos se pueden encontrar y cómo se puede favorecer dicho aprendizaje.

2.1. Estudio de las ecuaciones de primer grado

Realizamos este estudio para un nivel de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria, el cuál es el nivel para el que ha sido pensado el material.

2.1.1. Análisis de Contenido

Analizamos primero el contenido matemático del tema de Ecuaciones de primer grado desde tres perspectivas: Estructura Conceptual, Sistemas de Representación y Fenomenología.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL

Podemos clasificar el conocimiento matemático en dos campos, el campo conceptual y el campo procedimental.

El campo conceptual hace referencia a los conceptos y objetos del tema, aquellos elementos que utilizamos para pensar en matemáticas. Dentro del campo conceptual nos encontramos con tres niveles: hechos, conceptos y estructuras.

Los hechos forman el nivel básico de complejidad conceptual, son unidades de información que sirven como registros del conocimiento. En este nivel se encuentran los términos, las notaciones, los convenios y los resultados. En nuestro tema encontramos:

Los términos de igualdad algebraica y ecuación, y dentro de este último los de incógnita, solución, miembro, monomio, coeficiente, término y grado, junto con los de equivalencia e identidad.

Las notaciones de las operaciones aritméticas (+,-,*,:), las de las incógnitas (x, y...), la del símbolo de igualdad (=) y el de equivalencia (~), y los paréntesis.

La adopción de algunos convenios como:

• La exclusión del símbolo del producto aritmético para evitar su confusión con la incógnita x.
• La lectura de la expresión ax como "a equis" y no como "a por x".
• La jerarquía de las operaciones. Primero se resuelven los paréntesis, después las divisiones y multiplicaciones y por último las sumas y restas.

Y los siguientes resultados:

• La regla de la suma, "al sumar o restar el mismo número en los dos miembros de una ecuación, la ecuación resultante es equivalente a la original".
• La regla del producto, "al multiplicar o dividir por el mismo número, éste distinto de cero, en los dos miembros de una ecuación, la ecuación resultante es equivalente a la original".
• Las fórmulas del cuadrado de una suma, de una diferencia y del producto de suma por diferencia.

Los conceptos se encuentran en un nivel medio de complejidad. Estos describen las relaciones en grupos de hechos, construyendo así la comprensión de los objetos del tema. Los conceptos admiten diversos sistemas de representación, lo cual ayuda a su comprensión. En el tema de Ecuaciones lineales se trabajan los siguientes:

Las nociones de expresión algebraica y de monomio, los conceptos de igualdad e identidad algebraica, las operaciones con expresiones algebraicas, y las nociones de ecuación (y su significado), solución de una ecuación y equivalencia entre ecuaciones.

En el nivel de complejidad superior dentro del campo conceptual están las estructuras, las cuales muestran las relaciones de las familias de conceptos. En el caso de las ecuaciones lineales se trabaja en la estructura del anillo conmutativo de los polinomios, con las operaciones de la suma y el producto.

El campo procedimental hace referencia a todos los procesos y modos de actuación y ejecución de tareas matemáticas. Dentro de éste también encontramos tres niveles: destrezas, razonamientos y estrategias.

Las destrezas suponen el dominio de los hechos y de los procedimientos básicos y usuales. A este nivel, en nuestro tema, se busca adquirir o afianzar:

• La escritura y lectura de expresiones algebraicas y ecuaciones.
• Las operaciones con monomios.
• La resolución de ecuaciones sencillas mediante tanteo.
• La obtención de ecuaciones equivalentes.
• La simplificación de expresiones algebraicas.
• La traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos.
• La representación gráfica de la ecuación.

Los razonamientos implican el procesamiento de las relaciones entre los conceptos. Los razonamientos empleados en las ecuaciones lineales son de tipo deductivo, figurativo y argumental:

• Deductivos: Emplear las propiedades de las operaciones con monomios. Resolver ecuaciones.
• Figurativo: Utilizar gráficos para resolver problemas.
• Argumental: Justificar las propiedades algebraicas de las ecuaciones.

Finalmente las estrategias recogen todos los procedimientos que permiten obtener conclusiones o responder cuestiones mediante el uso de los conceptos y sus relaciones. Las estrategias empleadas al trabajar las ecuaciones de primer grado son:

• Cálculo mental.
• Reconocimiento de identidades.

• Reducción de los miembros de una ecuación y trasposición de términos de un miembro a otro.
• Resolución de ecuaciones complejas (con denominadores y paréntesis).
• Resolución de problemas (modelización).

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

A lo largo de este trabajo ya se ha hecho mención, de forma general, a los diferentes sistemas que podemos emplear para representar un concepto. En este apartado abordaremos desde una perspectiva más específica los cinco sistemas que podemos emplear para representar las ecuaciones lineales. Todos ellos se trabajarán con el material que se presentará más adelante.

Sistema de Representación Simbólico

Este tipo de representación expresa una ecuación mediante una combinación de letras y números relacionados por una igualdad. Dependiendo de los valores que tomen los diferentes elementos de la ecuación (si algunos son 0, o si son mayores o menores que 1), y de lo desarrollada que este la ecuación, nos podemos encontrar con diferentes tipos de ecuaciones, pero la forma más común por la que se suele representar una ecuación lineal mediante este sistema es:

$$ax + b = c$$

Observamos así que una ecuación está formada por dos miembros, y estos por diferentes términos, y una incógnita. A un valor de x para el cual se cumple la igualdad, es a lo que se denota por solución de la ecuación.

Pero teniendo algunos conocimientos básicos sobre funciones vemos que la anterior forma de escribir una ecuación también puede ser representada como:

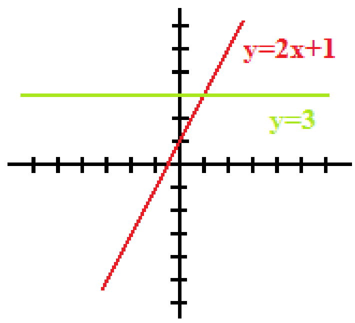
$$f(x) = ax + (b-c)$$

Es decir, como una función en la que x es la variable dependiente. Desde esta perspectiva, la solución de la ecuación viene dada por el valor de x tal que f(x)=0.

Sistema de Representación Gráfico

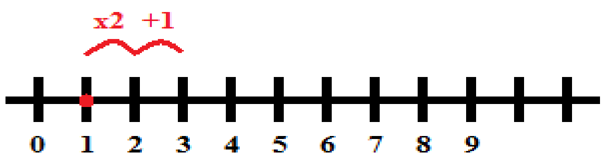
Podemos observar dos formas diferentes de representación gráfica de una ecuación, mediante el uso del plano cartesiano, y mediante el uso de la recta numérica.

La primera forma es la más usual, dibujar en un plano cartesiano las funciones que representan cada uno de los dos miembros de la ecuación. Esto nos permite, además de tener una percepción más visual de las ecuaciones, obtener de forma sencilla la solución de una ecuación como el cruce de las dos rectas dibujadas en el plano.

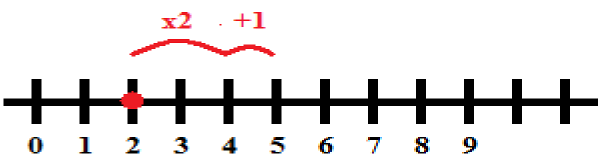


La representación de una ecuación mediante la recta numérica permite a los estudiantes resolver de forma más sencilla y clara una ecuación dada mediante una representación simbólica o verbal. Por ejemplo, para una ecuación del tipo ax + b = c, este método consiste en ir realizando las operaciones del primer miembro a cada uno de los números naturales de la recta real, y observar si tras realizarlas obtenemos el número que aparece en el segundo miembro, si lo obtenemos, hemos encontrado la solución, de no ser así realizamos de nuevo la operación con el siguiente número. No deja de ser un método inicial de tanteo, pero con él los alumnos visualizan mejor las operaciones realizadas y toman conciencia real de lo que están haciendo al resolver una ecuación y del significado de solución.

Por ejemplo, para resolver la ecuación 2x +1 =5, podríamos irnos a la recta real y comenzando con el número 1 realizar (y seguir en la recta) las operaciones que vemos en el primer miembro:



Como llegamos al número 3, que no es el número que encontramos en el segundo miembro, 1 no es solución de la ecuación. Se sigue entonces con el siguiente número natural, el 2:



Tras realizar todas las operaciones del primer miembro, se llega al número 5, que es el número que aparece en el segundo miembro de la igualdad, por tanto 2 es solución de la ecuación.

Sistema de representación verbal

Esta representación es la que más importancia tiene en la vida real, ya que es el lenguaje verbal la forma en la que se expresan las ecuaciones en la vida diaria. Dentro de este sistema de representación se encuentran tanto la forma de expresión hablada y oída de una ecuación, como la leída, pues a estos efectos son la misma. Cabe señalar que esta forma de representar ecuaciones no se emplea para su resolución. El siguiente sería un ejemplo de representación verbal:

"La suma de las edades de tres hermanas es 36 años. La mayor tiene 12 años más que la menor, y la del medio 7 años menos que la mayor. ¿Cuántos años tienen cada una?"

Sistema de representación numérico

Este sistema sirve para representar las ecuaciones mediante tablas de valores y mediante sistemas de aproximación como los métodos de Bolzano, Newton, Secante y Falsa Posición. Aunque en el nivel en el que nos encontramos los métodos señalados no son utilizados por su complejidad, por lo que nos centraremos en las tablas de valores.

Estas tablas de valores son tablas de dos filas relacionadas, una hace referencia a la incógnita de la ecuación, y la otra a la función asociada a la ecuación. En la tabla se muestra el valor que toma dicha función al escoger determinados valores para la incógnita. Por ejemplo, una tabla de valores que representa a la ecuación dada por la función f(x)= 2x-6, sería:

x	0	1	2
f(x)	-6	-4	-2

En este caso, la solución de la ecuación viene dada por el valor de x que acompaña en la tabla al valor 0 de f(x).

También existen otro tipo de tablas de valores, ésta con tres filas, una de las filas hace referencia a la incógnita de la ecuación, otra al primer miembro de la ecuación, y la última al segundo miembro de la ecuación. Por ejemplo una tabla de valores de este tipo que representa a la ecuación $2x + 2 = 3x - 2$, sería:

x	0	1	2
Primer miembro	2	4	6
Segundo miembro	-2	1	4

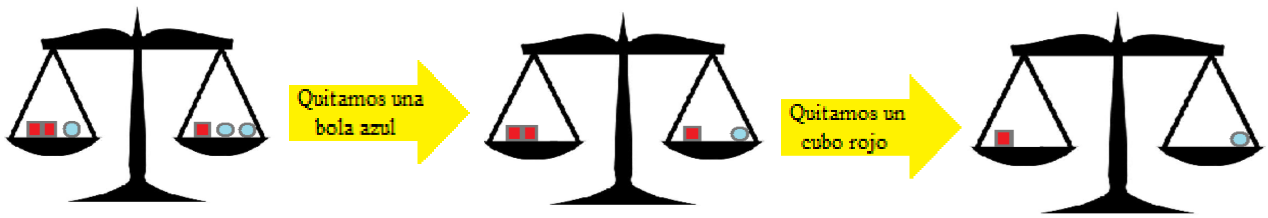
En este caso, la solución de la ecuación viene dada por el valor de x de la tabla que acompaña a un valor que se repite en las otras dos filas.

Sistema de representación manipulativo

Mediante este sistema se representa una ecuación por medio de objetos tangibles, en los cuales se puedan diferenciar los términos de cada uno de los miembros de la ecuación. El ábaco es una de las formas más antiguas de representar y trabajar ecuaciones mediante materiales manipulativos, pero al ser su explicación larga y compleja, y a penas utilizarse hoy en día, nos centraremos en uno de los más materiales más demandados, la balanza.

La balanza ayuda a introducir las reglas de la suma y el producto, y a comprender el concepto de equivalencia entre dos ecuaciones, mientras los estudiantes la investigan manipulando los pesos de cada uno de los platillos, guiados bajo la única regla de que ambos platillos deben estar siempre equilibrados. A continuación observamos el proceso de resolución de una ecuación mediante el uso de la balanza. La ecuación es: $2x + 1 = x + 2$.

Se busca ver a cuántas bolas azules equivale un cubo rojo:



Se llega así a que, un cubo rojo, pesa lo mismo que (equivale a) una bola azul.

Dentro de los materiales manipulativos cabe mencionar también las herramientas tecnológicas. En internet podemos encontrar múltiples software, que permiten tanto escribir las ecuaciones como resolverlas, normalmente de forma gráfica, como permiten los programas como CABRI o GEOGEBRA, aunque hay otros que permiten resolverlas mediante la utilización incluso de balanzas virtuales.

FENOMENOLOGÍA

El análisis fenomenológico muestra la relación entre los conceptos y procedimientos matemáticos con el mundo real (bajo una perspectiva pública, científica, personal o educativa), la relación con los contextos en los que tiene sentido utilizarlos y la relación con los fenómenos que organizan.

Primero vamos a hablar de los contextos matemáticos en los que se encuadran las ecuaciones lineales. Los contextos son conjuntos de fenómenos que comparten las mismas características estructurales, por lo que para encontrar los de este tema debemos detectar para que se usan los conceptos que lo forman.

Para encontrarlos debemos observar en qué consisten las ecuaciones de primer grado. Una ecuación primer grado es una igualdad entre combinaciones lineales de un elemento desconocido que sólo se verifica para un valor concreto de dicho elemento. Resolver una ecuación consiste en hallar el valor del elemento desconocido que hace cierta la igualdad. Por tanto, se puede señalar un contexto fundamental:

- Determinar un dato desconocido, conocida una relación entre combinaciones lineales de dicho dato.

Dentro de dicho contexto se organizan tres familias de fenómenos diferentes:

- Fenómenos relacionados con la vida cotidiana, como las compras con descuento.
- Fenómenos físicos, como los relacionados con la elasticidad de un muelle.
- Fenómenos geométricos, como hallar la longitud de uno de los lados de una figura geométrica, conocidos el perímetro de la figura y la longitud de los demás lados.

Todos estos fenómenos podemos encontrarlos en multitud de situaciones en la vida real, situaciones públicas, científicas, personales y educativas.

Las características estructurales que comparten los fenómenos que pertenecen a un contexto permiten relacionarlo con una subestructura de la estructura conceptual del tema. Las subestructuras son las partes de una estructura matemática que modelizan a familias de fenómenos expresando el sentido de estos. En nuestro tema, señalamos como subestructuras del contexto antes mencionado, que pueden modelizar a las tres familias de fenómenos anteriores, los tres tipos de ecuaciones que podemos encontrar dependiendo del número de soluciones que posea la ecuación, es decir, las subestructuras de las ecuaciones:

- Sin solución.
- Con infinitas soluciones.
- Con una única solución. Ésta a su vez está formada por tres subestructuras diferentes, encontradas según los valores que tomen los diferentes términos de la ecuación. Son las siguientes subestructuras:
    - $ax = c$ $(b = 0)$
    - $x + b = c$ $(a = 1)$
    - $ax + b = c$ (b distinto de 0 , a distinto de 1)

2.1.2. Análisis Cognitivo

Pasamos ahora a describir, analizar y organizar las expectativas que tienen los profesores en cuanto al aprendizaje de los estudiantes, y a observar los errores que pueden cometer en el tema de ecuaciones de primer grado.

Para ello, primero vamos a establecer cuatro focos de interés para el aprendizaje de las ecuaciones lineales:

- Manejo del lenguaje algebraico.
- Caracterización de ecuaciones de primer grado.
- Resolución de ecuaciones de primer grado.
- Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado.

Dentro de cada foco consideramos unos objetivos específicos a conseguir por los alumnos. A continuación los mostramos relacionándolos a la vez con las competencias PISA que ayudan a alcanzar. Para ello utilizaremos la siguiente notación:

PR = Pensar y Razonar, AJ = Argumentar y Justificar, C = Comunicar, M = Modelizar,
RP = Plantear y Resolver Problemas, R = Representar, LS = Utilizar Lenguaje Simbólico,
HT = Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas

Manejo del lenguaje algebraico	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1. Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.				x		x	x	
2. Operar con expresiones algebraicas.	x				x		x	
3. Identificar polinomios de primer grado.		x						

Caracterización de ecuaciones de primer grado	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
4. Distinguir los elementos de una ecuación de primer grado.		x					x	
5. Conocer la representación gráfica de una ecuación de primer grado.	x					x		
6. Reconocer diferentes tipos de ecuaciones de primer grado.	x	x					x	
7. Diferenciar entre ecuaciones e identidades.		x						
8. Leer y escribir ecuaciones de primer grado.			x				x	

Resolución de ecuaciones de primer grado	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
9. Encontrar las soluciones de una ecuación de primer grado.	x	x					x	
10. Aproximar una solución por tanteo, haciendo uso de herramientas manipulativas, y representaciones numéricas.	x	x				x		x
11. Construir ecuaciones equivalentes a una dada.	x	x					x	
12. Conocer los diferentes métodos de resolución.		x						
13. Comprobar la validez de una solución.		x					x	

Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
14. Modelizar enunciados de problemas.			x	x	x	x	x	
15. Idear un problema dada una ecuación.			x	x	x		x	
16. Interpretar y discriminar soluciones de un problema.	x	x						

Dentro de las limitaciones que pueden distorsionar o ralentizar el aprendizaje de los estudiantes, podemos observar una serie de errores que asociaos a los anteriores focos. A continuación presentamos estos errores relacionándolos con los focos y objetivos antes descritos a los que se asocian:

Foco: Manejo del lenguaje algebraico	Objetivos
1. Generalización incorrecta de las operaciones aritméticas. *Ejemplo:* $3x+1=4x$	1,2
2. Uso incorrecto de las propiedades numéricas. *Ejemplo:* $2(x-2)=2x-2$	2
3. Confundir la nueva notación del producto. *Ejemplo: De* $3x=36$, *deducir* $x=6$	2
4. Confundir el grado de un polinomio. *Ejemplo:* $xy+2x$	3

Foco: Caracterización de ecuaciones de primer grado	Objetivos
5. Confundir miembros con términos y viceversa.	4
6. Desconexión entre las representaciones gráficas y simbólicas de las ecuaciones de primer grado.	5
7. Confundir diferentes tipos de ecuaciones. *Ejemplo: 2x=6 con 2+x=6*	6,8
8. No reconocer los distintos tipos de igualdades algebraicas.	7

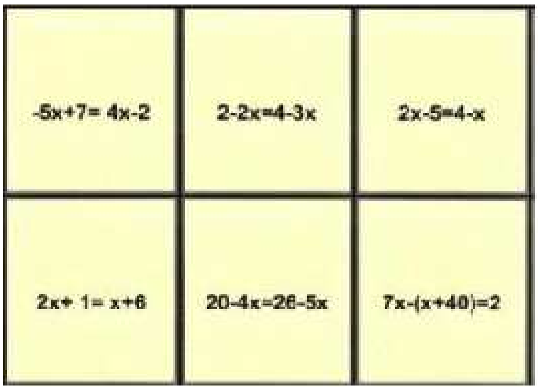
Foco: Resolución de ecuaciones de primer grado	Objetivos
9. Obtener soluciones erróneas mediante el uso de materiales.	9,10
10. Aplicación incorrecta de la regla de la suma. *Ejemplo: pasar de x+2=3x+5, a: x+3x=2+5*	11,12
11. Aplicación incorrecta de la regla del producto. *Ejemplo: pasar de -x+2=3, a: x-2=3*	11,12
12. Obtener igualdades a través de fracciones: *Ejemplo: dado: (x+1)/(x+2)=3/4, deducir que x+1=3 o x+2=4*	11

Foco: Resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado	Objetivos
13. Desconexión entre las representaciones verbales y simbólicas de las ecuaciones de primer grado.	14,15
14. Determinar soluciones carentes de sentido. *Ejemplo: La edad de una persona es -23 años.*	16

2.2 Juegos de mesa en el aula de matemáticas

Como ya se señaló anteriormente, la utilización de juegos permite desarrollar una comprensión entretenida de los contenidos matemáticos. Es por esto, y por su capacidad motivadora, que cada vez se emplean con mayor frecuencia juegos en la enseñanza de las matemáticas. En este apartado haremos mención a algunos de los juegos que podemos encontrar para trabajar el tema de las ecuaciones de primer grado.

Bingo de ecuaciones de primer grado



Este bingo especial puede emplearse tras introducir las ecuaciones de primer grado en 1º de ESO, o como motivación en cursos superiores.

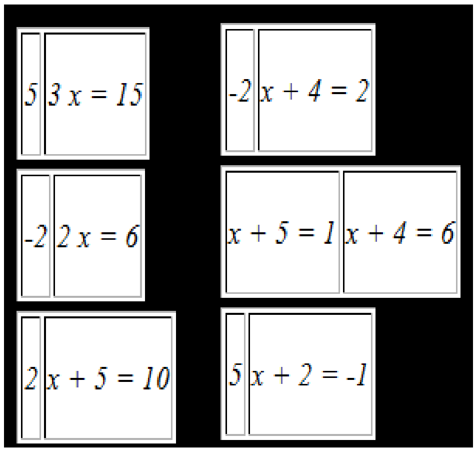
Emplea el mismo sistema que el juego de bingo típico, con la excepción de que en los cartones que se distribuyen entre los alumnos, no aparecen directamente los números que se pueden sacar del bombo, sino que los alumnos necesitan resolver las ecuaciones de sus cartones para saber si el número que ha salido es uno de los que se encuentra en su cartón y pueden tacharlo.

Chinchón algebraico

Este juego de cartas permite repasar los conceptos de solución y de ecuación de primer grado una vez que ya han sido trabajados.

Es un juego para cuatro jugadores, en el que se emplea una baraja especial cuyas cartas tienen escritas ecuaciones. Cada jugador recibe 4 cartas y el resto se dejan en un montón, los jugadores deben buscar conseguir un trío de ecuaciones con la misma solución y una carta cuya ecuación tenga una solución menor o igual a dos deshaciéndose de sus cartas, cogiendo nuevas cartas del montón central o de las desechadas por los otros jugadores.

Dominó algebraico



Este juego presenta una forma entretenida de practicar la resolución de ecuaciones, basándose en el sistema del dominó tradicional.

En este dominó, cada uno de los lados de una ficha muestra una ecuación o un valor numérico, y al igual que en el juego original se deben unir dos fichas cuyos lados muestren el mismo valor, en este caso uno de los lados debe ser la ecuación que tiene por solución el valor numérico mostrado en la otra ficha.

Lo tuyo y lo mío

Este juego contribuye a resolver la falta de comprensión de los enunciados verbales por parte de los estudiantes.

Si te diera 15, tendríamos lo mismo	No me quites 8, que entonces te quedas con 1 más que yo

Tres o cuatro jugadores, juegan por turnos. El primer jugador tira dos dados y el siguiente saca una tarjeta con un enunciado verbal de un montón de tarjetas semejantes. Con el número obtenido con los dados por el otro, "lo tuyo", el jugador que ha sacado la tarjeta calcula el número que corresponde a "lo mío", utilizando la frase de la tarjeta, y si realiza bien la operación puede colocar una de las diez fichas que posee en una casilla de un tablero numerado del 1 al 49, esta casilla debe tener el mismo número que la solución del enunciado. El primer jugador en colocar sus diez fichas en el tablero gana.

Estos juegos son solo algunos de los muchos que podemos encontrar pero, como la mayoría de juegos que trabajan con las ecuaciones de primer grado, se centran en la práctica de la resolución de ecuaciones, es decir, no tratan el primer problema que se encuentra al iniciar este tema, la comprensión del concepto de ecuación. Ésta es la primera y mayor diferencia entre los juegos creados hasta la fecha y el juego que presentamos a continuación, éste no solo trabaja la resolución de ecuaciones, sino que trabaja las ecuaciones lineales desde diferentes puntos de vista, permitiendo una mejor comprensión de las ecuaciones de primer grado.

3. Diseño de la Innovación

El material que aquí presentamos se trata de un juego de mesa, al que se le ha dado el nombre de *Tierra de Incógnitas*, en el que 2 grupos (de entre 2 y 4 personas) compiten por la victoria, valiéndose de las ecuaciones de primer grado y sus diferentes representaciones para alcanzarla.

3.1. Nivel del juego

El juego está dirigido a alumnos que ya han trabajado con anterioridad las ecuaciones lineales, pero que necesiten reforzar o mejorar su comprensión sobre este tipo de ecuaciones. Por tanto puede ser usado desde segundo de ESO, una vez que se han trabajado la mayoría de los aspectos de la ecuación lineal.

3.2. Introducción para los jugadores

En una tierra lejana se alza un castillo de proporciones descomunales, en cuyo interior se encuentran tesoros cuyo valor excede la imaginación de cualquier hombre. Tras unas duras semanas de larga caminata y preparación, dos grupos de avezados aventureros han llegado hasta él, pero aún deben superar un último obstáculo, el castillo está cerrado y no hay forma humana de entrar si no se poseen las llaves que abren sus enormes puertas. Más estos grandes aventureros no cejarán en su empeño, harán frente a los misterios y enigmas que rodean estas tierras para hacerse con esas llaves, y finalmente con todos los tesoros que el castillo guarda.

3.3. Resumen del juego

Dos grupos de alumnos compiten entre ellos para ser los primeros en entrar en el castillo central del tablero y resolver una prueba final, lo cual les permitirá alzarse como ganadores de la partida.

Comenzando desde el castillo central, ambos equipos deben mover la ficha que les representa a lo largo del tablero, haciendo uso para ello de unas tarjetas especiales que les indican cuanto pueden moverse, con el fin de encontrar dos llaves. Estas llaves las pueden obtener resolviendo pruebas que se encuentran dispersas por el tablero.

Una vez obtenidas las llaves, deben volver al castillo central, pudiendo ahora abrir sus puertas con las llaves encontradas, e intentar resolver una última prueba final para ganar la partida.

Nota: El número de llaves que se deben conseguir para abrir el castillo puede variar según el tiempo que se le quiera dedicar a esta actividad.

3.4. Componentes

• 4 piezas de tablero

• 2 fichas de equipo (1 ficha blanca con el fondo negro, 1 ficha negra con el fondo blanco)

• 72 tarjetas de movimiento

• Folios

• 2 lápices

• 1 balanza

• 15 pesas:

  - 8 pesas de 100 gr. marcadas con el número **1**
  - 2 pesas de 100 gr. marcadas con la letra **x**
  - 4 pesas de 200 gr. marcadas con la letra **x**
  - 1 pesa de 500 gr. marcada con la letra **x**

• 8 fichas de llave

• 8 hojas de pruebas

• 1 hoja de prueba final

• 1 tablero de bolas

• 30 bolas:

  - 15 de color negro
  - 15 de color blanco

3.5. Análisis de los componentes

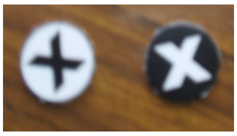
Piezas de tablero

Estas piezas se utilizan para construir el tablero de juego durante la preparación de la partida. Este tablero es el lugar por donde se moverá cada equipo en busca de las llaves del castillo.
En el Anexo 1 se pueden encontrar todas las piezas que forman el tablero, así como una imagen del tablero completo.

Tarjetas de Movimiento

Estas tarjetas contienen preguntas sobre ecuaciones de primer grado, al resolverlas los equipos pueden mover su ficha por el tablero tantas casillas como indique la propia tarjeta. Al comienzo de su turno cada equipo puede robar una de estas tarjetas e intentar resolver la pregunta que contiene. Se resuelvan o no con éxito, las tarjetas se descartan después de usarlas.
A partir de la página 22 se puede encontrar un análisis de cada tipo de tarjeta existente, y en el Anexo 2 se pueden encontrar las 72 tarjetas del juego.

Fichas de equipo



Estas fichas representan a los dos equipos en el tablero de juego. Al inicio de la partida cada equipo elige su ficha.

Fichas de llave

Estas fichas representan las llaves que los jugadores pueden encontrar desperdigadas a lo largo de estas tierras para poder abrir el castillo y enfrentarse a la prueba final.
Para ganar una de ellas se debe llegar a la casilla especial sobre la que se encuentra, robar una hoja de prueba del montón de pruebas y superar ésta con éxito.

Balanza

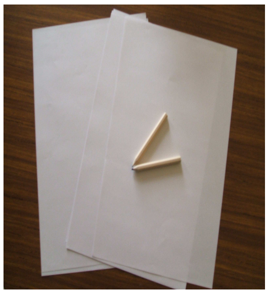
Esta balanza se utiliza para poder resolver las preguntas de algunas tarjetas de movimiento y algunas pruebas. Mientras no se está utilizando se coloca a un lado del tablero.

Pesas

Estas pesas se utilizan junto con la balanza para resolver algunas tarjetas de movimiento y algunas pruebas. En cada una de esas tarjetas se debe utilizar el tipo de pesas concreto que muestra su dibujo para poder resolverlas correctamente.

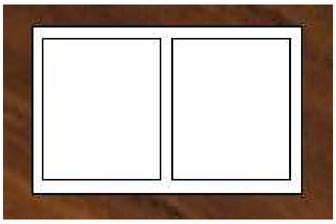
Folios y lápices

Los equipos pueden utilizarlos para resolver las ecuaciones que van apareciéndoles a lo largo de la partida, para apuntar los resultados de estas ecuaciones o para concebir sus propias ecuaciones a la espera de planteárselas al otro equipo durante un duelo.



Tablero de bolas

Este tablero se utiliza para poder resolver las preguntas de algunas tarjetas de movimiento y algunas pruebas. Está formado por dos cuadrados que representan los dos miembros de una ecuación.

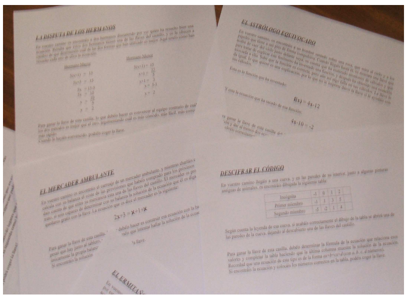


Bolas

Estas bolas se utilizan junto con el tablero de bolas para poder resolver las preguntas de algunas tarjetas de movimiento y algunas pruebas (se pueden utilizar simples bolas de papel).

Hojas de pruebas

Estas hojas contienen las pruebas que deben superar los equipos para ganar las llaves del castillo en las casillas especiales. Cada una de estas hojas están formadas por dos partes: la parte superior contiene un pequeño texto de ambientación, y la parte inferior muestra como ganar la



llave de la casilla.
Estas pruebas se presentan en una hoja de tamaño cuartilla.

Hoja de prueba final

Esta hoja contiene la prueba que deben superar los equipos tras conseguir dos llaves y volver al castillo. El primer equipo en resolver la prueba final gana la partida.
Esta hoja tiene el mismo formato que las hojas de pruebas.
A partir de la página 27 se puede encontrar un análisis de cada una de estas pruebas y en el Anexo 3 las propias pruebas.

3.6. Preparación de la partida

1. Colocación del tablero: Se colocan las cuatro piezas del tablero en el centro de la mesa, de forma que en el centro del cuadrado que forman las cuatro piezas juntas se pueda observar la imagen de un castillo.

2. Colocación de las llaves: Sobre cada casilla con un símbolo de interrogación se coloca una de las fichas de llave.

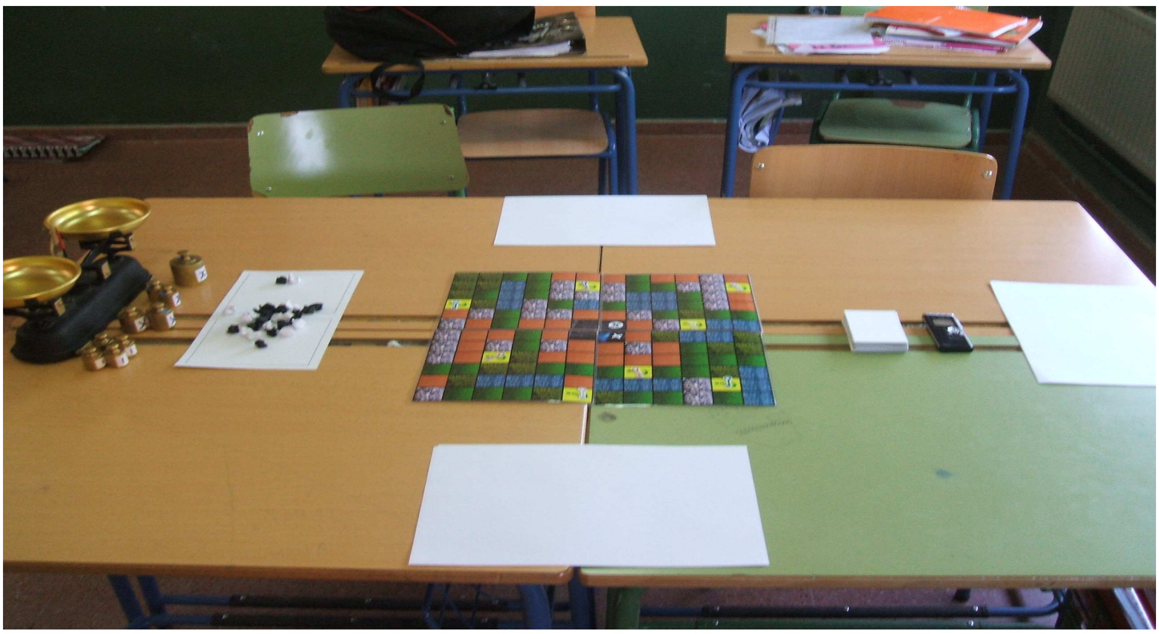
3. Preparación de las tarjetas: Se barajan todas las tarjetas de movimiento y se colocan en un único montón cerca del tablero, con el lado de las pisadas hacia arriba, de forma que los jugadores de ambos equipos puedan llegar hasta él.

4. Colocación del resto de componentes: Junto al tablero se colocan: la balanza, las pesas, el tablero de bolas y todas las bolas. Además se barajan todas las hojas de prueba y se colocan en un solo montón (colocadas boca abajo), y bajo este montón se coloca la hoja de la prueba final.

5. Reparto de folios: Cada equipo recibe folios para realizar los cálculos que necesite o para anotar las ecuaciones que va resolviendo.

6. Colocación de fichas: Cada grupo elige una de las dos fichas para representar a su equipo en el juego y la coloca en el centro del tablero, en alguna de las cuatro casillas que forman el castillo central. Ambos equipos pueden colocar su ficha en la misma casilla.

7. Elección del equipo inicial: El equipo en el que se encuentre el jugador más joven comienza la partida.



3.7. Secuencia de juego

Por turnos, cada uno de los dos equipos puede realizar las siguientes acciones en orden:

1. Robar una tarjeta de movimiento

Un miembro del equipo puede coger la tarjeta superior del montón de tarjetas de movimiento. En estas tarjetas se le pide al grupo que resuelvan alguna cuestión relacionada con las ecuaciones de primer grado. Si, tras deliberar, el equipo determina la solución correcta de la tarjeta, pueden mover su ficha por el tablero tantas casillas como le indique la propia tarjeta, normalmente un número de casillas igual al número que es solución de la ecuación de la tarjeta. Si el equipo determina una solución incorrecta no puede hacer nada más, su turno acaba y comienza el turno del equipo contrario. A la hora de moverse por el tablero, los equipos deben tener en cuenta ciertas restricciones dadas por los diferentes tipos de casillas:

Tipos de casillas

Praderas
Estas casillas no tienen ninguna regla especial.

Desiertos
Estas casillas no tienen ninguna regla especial.

Agua
No se puede pasar por encima de estas casillas. Se deben rodear para avanzar.

Bosques
Los equipos no pueden proponerse duelos en las casillas de Bosque.

Montañas
Para pasar por estas casillas se deben gastar dos puntos de movimiento. Si se comienza el turno en una de estas casillas solo es necesario gastar un punto.

Casillas Especiales
Si un equipo está en una de estas casillas, y en ella se encuentra también una llave, pueden obtener ésta intentando resolver una prueba.

Castillo
Las cuatro casillas centrales del tablero forman el castillo desde el que se inicia el juego. Si durante la partida algún equipo tiene su ficha en una de estas casillas y tiene las llaves necesarias, puede abrirlo y realizar la prueba final.

2. Proponer un duelo

Si las fichas de ambos equipos se encuentran en la misma casilla del tablero, el equipo que está jugando ese turno puede proponer un duelo al equipo contrario.

Si el equipo contrario acepta el duelo, cada uno de los grupos puede proponer al otro la resolución de una ecuación, pudiendo expresar ésta mediante cualquier tipo de representación, con la siguiente restricción: el equipo que ha propuesto el duelo elige el sistema de representación de ambas ecuaciones, que debe ser el mismo para los equipos. El equipo que antes encuentre la solución de la ecuación que se le ha propuesto, gana el duelo. El ganador del duelo puede realizar inmediatamente un turno extra, pudiendo así volver a robar una nueva tarjeta de movimiento.

En caso de que un equipo no acepte realizar un duelo propuesto, pierde un turno. De igual forma, si algún equipo determina una solución incorrecta, también pierde un turno (en el caso de que el otro equipo halle la solución correcta de su ecuación, aunque sea después de que el primer grupo diera su solución)

3. Realizar una prueba

i. Si la ficha del equipo se encuentra en una casilla especial (casillas con el símbolo de interrogación) que tenga una llave sobre ella, puede intentar conseguir esa llave realizando una prueba.

Para conseguir las llaves necesarias para entrar al castillo, los jugadores deben llegar hasta alguna casilla especial, que tenga una llave sobre ella. Una vez en ella pueden expresar su intención de conseguir la llave de la casilla. En tal caso, se le dará a ese equipo una ficha en la que se muestra el enunciado de un problema parecido al de las tarjetas, pero con un nivel de complejidad ligeramente superior.

Si el equipo resuelve correctamente dicho enunciado, podrá coger la llave que se encuentra en esa casilla y unirla a su colección de llaves. Si el equipo realiza la prueba de forma incorrecta, la llave de esa casilla se retira del tablero. La casilla permanece vacía hasta el final de la partida, y ninguno de los dos equipos puede intentar conseguir esa llave más adelante.

ii. Si la ficha del equipo se encuentra en alguna de las casillas del castillo, y el equipo posee todas las llaves necesarias para entrar, puede intentar realizar la prueba final (Ver *Prueba final* más adelante). En ésta, el equipo que se encuentra en el castillo recibe una ficha en la que se le pedirá que represente cierta ecuación de al menos cinco formas diferentes, y que obtenga la solución de ésta a partir de alguna de esas representaciones.

Si un equipo intenta la prueba final y muestra alguna representación incorrecta, o da una solución no válida de la ecuación, inmediatamente el otro equipo realiza la misma prueba final. El primer equipo en resolver con éxito la prueba final, gana el juego, finalizando así la partida. Si ambos equipos fallan al intentar la prueba final, el juego finaliza en empate.

3.8. El juego en el aula

Todo lo mostrado hasta ahora recoge las reglas del juego, y la utilidad del mismo desde una perspectiva escolar, pero no pretendemos que a la hora de jugarlo en clase se les den todas esas nociones a los estudiantes. A continuación señalamos como se les puede introducir y explicar el juego:

1. Motivar el juego con una historia como la descrita anteriormente en el apartado *Introducción para los jugadores* (esto es optativo, pero recomendable).

2. Explicar el objetivo del juego: Conseguir llaves para abrir el castillo, y superar en éste una prueba.

3. Explicar cómo se desarrolla un turno: se roba una tarjeta del montón para moverse por el tablero, se pueden plantear duelos a través de ecuaciones si ambos equipos se encuentran en la misma casilla, y pueden realizar pruebas en las casillas especiales con llaves. También es necesario explicar los tipos de casillas que pueden encontrarse en el tablero.

El profesor se encargará de la preparación de la partida, y la supervisión del juego. En caso de que nuestra aula cuente con un gran número de alumnos, se pueden formar más de dos grupos, y cada dos grupos pueden jugar una partida en mesas distintas con otros ejemplares del mismo juego. De encontrarnos con esta situación, será necesario asignar a algunos alumnos, a los que se les debe explicar con anterioridad el sistema de juego y su función en él, para que supervisen cada partida, mientras el profesor recorre la clase asegurándose del buen funcionamiento de todas las partidas y resolviendo las dudas que puedan surgir.

También se les puede dar una hoja-resumen del juego como la que aparece en el Anexo 4, para que puedan recordar las normas más importantes del juego, o en su defecto escribir en la pizarra los datos que se encuentran en ella.

Es conveniente que en la clase de Matemáticas anterior a la utilización de este juego se expliquen el contenido de las diferentes tarjetas que pueden aparecer en él, realizando un par de ejemplos de cada una, ya que esto le da mayor dinamismo al juego y a los alumnos mayor autonomía, pues de lo contrario cada vez que aparezca una carta nueva en cada partida habrá que explicarla y el juego se desarrollará con lentitud. El juego les permitirá asentar los conocimientos adquiridos en la clase anterior mientras se divierten.

3.9. Variantes del Juego

Si se quiere trabajar algún aspecto en concreto como por ejemplo la práctica de ecuaciones simbólicas, la introducción a las ecuaciones mediante materiales manipulativos, reseñar que cuando la incógnita toma el valor de la solución los dos miembros son iguales, o trabajar con funciones lineales, se pueden seleccionar las tarjetas de movimiento adecuadas para tal fin y utilizar únicamente esas durante la partida, dejando de lado el resto de tarjetas.

Dependiendo que tipo de aprendizaje se busque, también se pueden seleccionar las pruebas a realizar en las casillas especiales que mejor se adapten a lo trabajado con las tarjetas.

3.10. Análisis de las tarjetas y las pruebas

Este último apartado del capítulo tres está dedicado al análisis de las tarjetas y las pruebas que se pueden encontrar en el juego. Primero analizaremos los once diferentes tipos de tarjetas que se pueden encontrar, cómo son y qué objetivos se persiguen con cada una de ellas, además de mostrar con la mayoría de ellas diferentes formas de representar las ecuaciones. Después analizaremos las ocho pruebas que pueden realizarse para conseguir una de las llaves del castillo, y la prueba final, observando cómo son y qué objetivos se persiguen con cada una de ellas. Finalmente observaremos la relación que guarda la elección de cada uno de los tipos de tarjetas y pruebas con el análisis del tema de Ecuaciones realizado en el capítulo dos.

Tarjetas en las que se emplean representaciones simbólicas

1. Tarjetas con una ecuación simbólica (TS)

En estas tarjetas se pide al equipo que solucione una ecuación simple de primer grado, mostrada mediante el sistema de representación que están más acostumbrados a emplear, símbolos que denotan una igualdad entre variables y números. La mayoría de estas tarjetas son ecuaciones sencillas que cualquier alumno con las nociones básicas acerca de las ecuaciones debería ser capaz de resolver, dos de las ocho ecuaciones son un poco más complejas, al pedir que solucionen en una de ellas una ecuación con paréntesis y en otra una ecuación con denominadores, aunque el esfuerzo les merece la pena al ser la solución de la ecuación el número de casillas que se pueden mover, y tener la segunda tarjeta 7 como solución y la primera tener infinitas soluciones (es decir pueden elegir moverse cualquier número de casillas, pues ese número será solución de la ecuación)

Con estas tarjetas los alumnos pueden seguir practicando la resolución de ecuaciones que ya conocen. Con ellas podemos observar la habilidad con la que se desenvuelven a la hora de resolver ecuaciones, los pasos que realizan para resolverlas, y si realmente son capaces de resolver aquello que más se ha trabajado en clase. De igual manera podemos ver si son capaces de asegurar que la solución que han dado es la correcta, por ejemplo sustituyendo el valor obtenido por la incógnita en la ecuación, o más bien si han interiorizado como hacerlo.

2. Tarjetas con una función asociada a una ecuación (TF)

En estas tarjetas se pide al equipo que encuentre el valor de x que hace 0 la función que contiene la tarjeta, es decir, encontrar la solución de la ecuación asociada a esa función, y ese valor es el número de casillas que el equipo puede mover su ficha. Todas las funciones de estas tarjetas son del tipo $f(x)=ax+b$, con a y b números enteros entre -20 y 20, siendo por ejemplo una ecuación asociada a éstas la ecuación $-b=ax$. Aunque existe una tarjeta con una ligera variación en la que $b=0$ y $a>300$, que en principio puede sorprender a los equipos, pero que una vez se paren a pensar llegarán a observan que es aún más fácil de solucionar, aunque tristemente el número de casillas que pueden avanzar será cero, es decir, no se pueden mover.

Al no haber trabajado aún las funciones en profundidad se les dan las instrucciones necesarias para obtener la solución de la ecuación. No se pretende que con estas tarjetas entiendan mejor las funciones, pero sí que observen que una ecuación, aún cuando se escribe con notación simbólica, no es solo dos términos con x y números, sino que forma parte de algo más grande como son las funciones, a la vez que se comienza a crear un pequeño nexo de unión con el próximo tema de funciones y se introduce la notación "f(x)" para las funciones de una variable (pues hasta el momento a las funciones se les suele notar con la letra "y")

Tarjetas en las que se emplean representaciones gráficas

3. Tarjetas con una ecuación representada de forma gráfica (TG)

En estas tarjetas están representados los dos miembros de una ecuación cada uno como una recta, y se les pide hallar la solución formada por esos dos miembros. Ocho de las nueve tarjetas son simples rectas que se cortan en algún punto determinado, pudiendo ser la distancia entre los puntos en unas mayores que en otras, pero esto no entraña mayor dificultad, solo deben encontrar algún método para dar con la solución correcta, como utilizar un papel para ir señalando cada uno de los números del eje x hasta señalar también con el papel el punto de corte de las dos rectas. La novena tarjeta tiene representada dos rectas paralelas.

En estas tarjetas, al igual que en las de funciones, se les podría pedir lo mismo, que busquen la solución de la ecuación, pero diciéndoles directamente qué es lo que tienen que hacer para ello, es decir, que busquen el punto en el que se cortan las dos rectas, pero esto es algo que una vez explicado a los alumnos debe de resultarles mucho más sencillo, al poder visualizarlo fácilmente. Además con estas tarjetas se pretende que los alumnos recuerden, o aprendan, que cuando los dos miembros de una ecuación son iguales, el valor que toma en ese momento la incógnita es la solución de la ecuación (en el caso de la tarjeta con rectas paralelas ese valor no existe).

Debido a que, intencionalmente, la gráfica no posee una escala determinada, si los jugadores son hábiles pueden elegir la escala que quieran (por ejemplo podrían decidir que la primera raya del eje x indica el número 3, la segunda el 6, la tercera el 9, etc.), de forma que si lo argumenta de manera correcta pueden multiplicar enormemente el número de casillas que se les permite avanzar por el tablero.

<u>Tarjetas en las que se emplean representaciones verbales</u>

4. Tarjetas con enunciados verbales (TE)

Estas tarjetas contienen enunciados de problemas que se pueden modelizar mediante ecuaciones simples de primer grado del tipo $a\mathrm{x}+b=c\mathrm{x}+d$, con a, b, c y d números enteros. Con estas tarjetas se pretende que los alumnos practiquen y mejoren en la traducción de enunciados verbales al lenguaje algebraico, que a pesar de ser algo que se trabaja ampliamente en temas anteriores al tema de ecuaciones y en el propio tema, en la mayoría de los casos es una de las mayores dificultades que los alumnos suelen encontrar.

En muchos casos esto es debido a que simplemente no se creen capaces de resolverlos o simplemente les parecen algo muy difícil en comparación con las ecuaciones ya dadas de forma explícita, pues equiparan longitud del enunciado con dificultad de la tarea. Pero en el ambiente del juego los alumnos pueden relajarse más con este tipo de tareas, e incluso emplearse más a fondo al ver en juego directamente algo importante para ellos como es el poder moverse y conseguir así llaves para ganar. Además, al deber solucionarse las tarjetas en equipo, si uno de los miembros no comprende bien como realizar la traducción, los propios compañeros pueden (y deben) explicárselo, siendo en muchos casos mejor esta explicación que la que le podría dar un profesor, al recibir la información de alguien con un nivel de comprensión similar y que puede haber acabado de superar los mismos obstáculos.

<u>Tarjetas en las que se emplean representaciones manipulativas</u>

5. Tarjetas con una ecuación formada en una balanza (TB)

En estas tarjetas se puede encontrar un dibujo, que los jugadores deben realizar con la balanza y unas determinadas pesas que se encuentran junto al tablero, y se pide resolver mediante el uso de la balanza la ecuación dibujada en la tarjeta.

Con estas tarjetas se pretende que los alumnos recuerden e interioricen los procesos básicos empleados para la resolución de una ecuación, como son las reglas de la suma y de la multiplicación para la obtención de ecuaciones equivalentes, al tener que ir cogiendo de ambos miembros la misma cantidad de pesas (restando o dividiendo los términos de la ecuación). Además, poder observar en todo momento el equilibrio de la balanza, permite a los alumnos solucionar la ecuación de forma muy intuitiva, y pueden asegurarse a cada paso de que están realizando bien las operaciones necesarias para la resolución de la ecuación.

6. Tarjetas con una ecuación formada con bolas (TTB)

Estas tarjetas contienen el dibujo de dos cuadrados en cuyo interior se encuentran dos tipos diferentes de círculos (representando bolas), unos blancos y otros negros. Esos dos cuadrados representan los dos miembros de una ecuación, y se pide encontrar el número de bolas blancas a las que equivale una bola negra formando el dibujo con las bolas y el tablero de bolas que se encuentran junto al tablero de juego.

Al igual que con las tarjetas en las que se emplea la balanza, estas tarjetas permiten trabajar los procesos básicos de resolución de una ecuación de forma práctica, con el añadido de que en este caso son los alumnos los que tienen que ser conscientes de preservar un "equilibrio" entre los dos miembros. Además con estas tarjetas se pretende mostrar a los alumnos que una ecuación no es solo aquello en lo que se encuentran una "x" y deben despejarla para hallar su valor, sino que también es una forma de encontrar una relación entre dos elementos, y que estos no tienen porqué venir dados únicamente como números y variables, reforzando así el concepto de incógnita.

<u>Tarjetas en las que se emplean representaciones numéricas</u>

7. Tarjetas con tablas de valores de los miembros de una ecuación (TTM)

Estas tarjetas están formadas por unas tablas en las que se expresan diferentes valores que puede tomar la incógnita de una ecuación, y estos se relacionan con los resultados que se obtienen en cada uno de los miembros al sustituir en ellos la incógnita por ese valor. En ellas se pide encontrar en la tabla el valor que es solución de la ecuación.

Al igual que con las tarjetas con una ecuación representada de forma gráfica, con estas tarjetas se pretende que los alumnos recuerden, o aprendan, que cuando los dos miembros de una ecuación son iguales, el valor que toma en ese momento la incógnita es la solución de la ecuación. También se muestra que la variable de una ecuación puede tomar diferentes valores, pero que solo uno de ellos es la solución, solo uno de ellos hace que se dé la igualdad entre los dos miembros, observándose así la diferencia entre variable y solución de una ecuación, que en muchos casos se confunde.

En este caso se podría haber creado también alguna tarjeta en la que se representara una ecuación sin solución, pero no se realizó ya que esto podría llevar a confusión, pues que la solución de una ecuación no aparezca una de estas tablas no indica que la ecuación no tenga solución.

8. Tarjetas con tablas de valores de funciones asociadas a una ecuación (TTF)

En estas tarjetas se muestran tablas formadas de dos filas, una representa a la incógnita de una ecuación, y distintos valores que puede tomar, y la otra representa a los valores que toma la función asociada a esa ecuación en función de los valores de la incógnita. En ellas se pide que encuentren el valor que anula la función.

Al ser un ejercicio rutinario y sencillo el encontrar el valor de x que anula la función, la mitad de las tarjetas tienen en ambas filas de la tabla a cero como uno de sus valores, teniendo así que pararse a recordar (y con ello mejorar su comprensión) que es lo que realmente están buscando. Al igual que con las tarjetas en las que se muestra directamente la función asociada a una ecuación, no se pretende que entiendan completamente ni mucho mejor las funciones. En este caso se pretende que observen las relaciones entre la variable dependiente y la independiente, y como en el caso de ser una función asociada a una ecuación, la solución viene dada por el valor de la variable independiente que hace cero la dependiente.

Otros tipos de tarjetas

9. Tarjetas de invención de ecuaciones (TI)

En estas tarjetas se pide al equipo que invente una ecuación dada su solución (un valor entre uno y seis). Una vez inventan una ecuación correcta, pueden moverse tantas casillas como la solución de la ecuación inventada. La finalidad de estas tarjetas es permitir ver a los alumnos que ellos mismos son capaces de crear ecuaciones, y que éstas no son algo extraño y ajeno a ellos, que únicamente aparece en los libros de texto.

La diferencia entre las ecuaciones que se deben inventar en estas tarjetas y las de los duelos, es que deben realizar en éstas algún tipo de proceso para obtener la ecuación concreta que se les pide, y no pueden decir una cualquiera al azar. En estas tarjetas no se pide que la ecuación que inventen deba representarse de la forma clásica, por lo que de mostrarse mediante cualquier otro tipo de representación la tarjeta seguiría estando solucionada correctamente, incluso demostraría una buena comprensión de los diferentes tipos de representaciones de las ecuaciones.

10. Tarjetas de ecuaciones incompletas (T?)

En estas tarjetas se muestra una ecuación mediante su representación simbólica. A dicha ecuación le falta algún término o número, pero a cambio se conoce su solución. Empleando ésta se pide que hallen el número que falta en la ecuación, para formar la ecuación completa.

Con estas tarjetas se pretende que los alumnos asimilen completamente la forma de asegurar que el valor obtenido al resolver una ecuación, de la forma clásica, es correcto (ésta se basa en intercambiar en la ecuación original la variable por el valor obtenido), con la ligera dificultad añadida de tener dos incógnitas en una única ecuación, y tener que sustituir una de ellas por el valor de la solución de la ecuación, creando así una nueva ecuación con solo una incógnita que además es distinta a la incógnita de la ecuación de partida.

11. Tarjeta ¡Moveos todo lo que queráis!

Una tarjeta, de entre las setenta y dos que hay en todo el juego, permite al equipo que la robe moverse tantas casillas como desee. Éste es simplemente un pequeño añadido de suerte al juego, pues el equipo que robe la tarjeta tendrá, sin haber realizado ningún esfuerzo, la posibilidad de llevar a cabo cualquier acción que desee, como llegar mucho más rápido a una casilla en la que realizar una prueba o alcanzar al equipo contrario para plantearle un duelo.

Por último, es importante señalar que entre las setenta y dos tarjetas se encuentran seis ecuaciones (cada una de ellas con una de las siguientes soluciones: 1, 2, 3, 4, 5, o 6) que se repiten cinco veces, pero mostradas mediante representaciones diferentes. De esta forma los alumnos pueden observar la misma ecuación desde diferentes puntos de vista, y si se dan cuenta de que son la misma, pueden emplear dicho conocimiento para dar la solución que ya obtuvieron al buscarla con la anterior representación, evitándose así cálculos innecesarios y relacionando las diferentes representaciones de una ecuación. El resto de ecuaciones de las tarjetas no se repiten, son todas diferentes.

Pruebas

• *La disputa de los hermanos* (Prueba de representación mediante una ecuación simbólica)

En esta prueba se pide que validen dos métodos para resolver una ecuación de primer grado con paréntesis, uno es el enseñado en clase y el otro es completamente nuevo. Lo interesante de esta prueba es observar si aceptan el segundo método como correcto, y ver los argumentos que dan para defender su decisión.

• *El mercader ambulante* (Prueba de representación mediante una balanza)

En esta prueba se pide resolver una ecuación expresada mediante una representación simbólica, haciendo uso de la balanza, para lo cual tienen que realizar la traducción entre los sistemas simbólico y manipulativo. El interés de esta prueba reside en que la ecuación planteada no tiene solución, de lo que deben darse cuenta al observar que tras colocar las pesas sobre la balanza no hay equilibrio, o cuanto menos decir que la ecuación no se puede resolver. Un pequeño añadido es que sí existe una forma de crear la ecuación en la balanza dándose en principio el equilibrio, colocando el tipo de pesas exacto que se escribe en la prueba. Haciendo esto también acabarán observando que llegado un momento la balanza se desequilibra, aun habiendo quitado "lo mismo" de ambos platillos/miembros, teniendo así que llegar a la misma conclusión que antes.

• *El ermitaño solitario* (Prueba de representación mediante el tablero de bolas)

En esta prueba se pide resolver una ecuación expresada mediante una representación simbólica, haciendo uso del tablero de bolas, para lo cual tienen que realizar la traducción entre los sistemas simbólico y manipulativo. Y tras esto, también deben inventar una ecuación con la misma solución usando el tablero de bolas. Lo interesante de esta prueba es ver cómo se enfrentan a los dos pequeños desafíos que entraña. Tras realizar ciertos pasos en la resolución de la ecuación, quedarán cinco de las bolas que representen a la incógnita en un lado, y diez del otro tipo de bolas en el otro (es decir, la ecuación $5x=10$), y para continuar con la resolución deben determinar alguna nueva forma de trabajar con el tablero de bolas, pues quitar un mismo número de bolas de ambos miembros no funcionará. Además el segundo apartado permite ver si les es más fácil inventar una ecuación con este material que directamente como lo harían con las tarjetas de invención de ecuaciones, y también observar que tipo de argumentos dan para su creación.

• *El astrólogo confundido* (Prueba de representación mediante una función asociada a una ecuación)

En esta prueba se debe relacionar una función con la ecuación a la que está asociada. En principio esta prueba no debería costar mucho esfuerzo si las funciones se tuvieran trabajadas, pero al ser para un nivel de segundo de Enseñanza Secundaria Obligatoria, puede que ésta sea la prueba que más les cueste, al no haberse trabajado aún suficientemente las funciones. Aun así, con esta prueba podemos ver como relacionan las funciones y las ecuaciones, si son capaces de ver que lo que la función y la ecuación deben tener en común es la solución de la ecuación y de $f(x)=0$, y tras realizar esto podemos observar si son capaces de dar alguna ecuación que realmente este asociada a la función de la prueba.

• *Descifrar el código* (Prueba de representación mediante una tabla de valores de miembros)

En esta prueba se pide encontrar la ecuación simbólica de la que proviene una taba de valores de los miembros de dicha ecuación, relacionando así la representación numérica con la simbólica. Lo interesante de esta prueba es observar de qué forma obtienen la "fórmula" de la ecuación, como qué números usan de la tabla o como se enfrentan a la situación de encontrarse en cada miembro con dos incógnitas y dos ecuaciones (al no haber trabajado todavía el tema de Sistemas de Ecuaciones), y una vez obtenida la "fórmula" ver como encuentran la solución, si lo hacen por tanteo, resolviendo la ecuación en su forma simbólica, o siguiendo una progresión en la tabla.

• *La tabla maldita* (Prueba de representación mediante una tabla de valores de una función)

En esta prueba se pide encontrar la función que se representa en la tabla de valores de la ficha, relacionando así una representación numérica de una ecuación con otra simbólica. En esta prueba se trabaja de manera muy similar a la anterior, y se pueden observar argumentos parecidos, pero posee la dificultad añadida de contener una función, que como ya hemos comentado en varias ocasiones, puede complicar las cosas al equipo que realice la prueba. Aun así es una buena forma de continuar creando un nexo de unión entre las ecuaciones y las funciones.

• *Las coordenadas de la llave* (Prueba de representación mediante una gráfica)

En esta prueba se pide obtener la representación clásica de una ecuación a partir de su representación gráfica. De forma similar a las pruebas anteriores, en esta prueba se debe construir la "fórmula" de la ecuación a partir de los datos que se muestran en la ficha, pero teniendo en este caso que extraerse de éstos los puntos necesarios para crear cada uno de los miembros, y no venir dados directamente. Con esta prueba podemos observar como relacionan una ecuación simbólica con su representación gráfica, si ponen pegas y determinan que no es lo mismo, o si entienden que son dos formas distintas de mostrar lo mismo. Además podemos ver como construyen las rectas y donde buscan la solución, y si resuelven la ecuación en forma simbólica o se vuelven a la gráfica a buscarla.

• *La llave aventurera* (Prueba de representación mediante un enunciado)

En esta prueba se debe resolver el enunciado de un problema, relacionando así la representación verbal de una ecuación con una representación simbólica de la misma. Además de ser una prueba diferente al resto, al no obtener directamente la llave, esta prueba permite ver como se enfrentan a un enunciado cuando tienen que buscar datos en un lugar distinto del propio enunciado (en este caso deben contar las casillas del tablero que hay de cada tipo), y observar también el proceso de recogida de datos que realizan.

• *La prueba final* (Prueba para ganar el juego)

En esta última prueba, los miembros del equipo que la realizan deben inventar el enunciado de un problema que se pueda resolver mediante una ecuación de primer grado, tras ello escribir la ecuación resultante de cinco formas diferentes, y por último resolver la ecuación mediante alguna de estas formas. Lo más importante de esta prueba es que los alumnos observen de forma directa la relación entre diferentes representaciones de una misma ecuación al tener que formarlas ellos mismos. Con esta prueba se pueden observar las dificultades que tienen para crear el enunciado del problema, las representaciones que deciden elegir y las razones por las que las eligen, y mediante cuál de ellas deciden resolver la ecuación.

Como llevamos señalando desde el principio de este trabajo, tanto las pruebas del juego como la mayoría de las tarjetas del mismo, han sido diseñadas teniendo en cuenta el estudio realizado sobre el tema de Ecuaciones mostrado en el capítulo dos, ante todo a partir del estudio de los diferentes sistemas de representación de las ecuaciones de primer grado.

Además, para el diseño de las tarjetas con enunciados verbales y la ambientación de cada una de las pruebas se tuvo muy en cuenta el análisis fenomenológico realizado.

Si observamos las tarjetas con enunciados verbales vemos que todas ellas responde a alguna de las tres familias de fenómenos diferentes encontrados, a los fenómenos relacionados con la vida cotidiana (por ejemplo el enunciado del tendero y el precio de los bocadillos), a los fenómenos físicos (como el de la distancia entre dos ciudades) o a los fenómenos geométricos (como el de la base de un rectángulo).

Mientras que en las pruebas podemos observar las cuatro diferentes situaciones en las que se pueden encontrar dichos fenómenos, situaciones públicas (en *El mercader ambulante*), científicas (en *El astrólogo equivocado*), personales (en *La disputa de los hermanos*) y educativas (en *Descifrar el código*).

Aunque en general todas las tarjetas y pruebas han sido diseñadas para comprender mejor el contexto fundamental del tema señalado en éste análisis.

A continuación mostramos unas tablas en las que se pueden observar los objetivos y errores, estudiados en el análisis que mencionábamos, que ayudan a conseguir y a arreglar (respectivamente), cada uno de los diferentes tipos de tarjetas. Para hacer referencia a los tipos de tarjetas se emplea la intuitiva notación introducida anteriormente.

La razón por la que no mostramos en las tablas las relaciones de cada tipo de prueba, es que cada una de éstas permite alcanzar los mismos objetivos y ayuda a solventar los mismos errores que las tarjetas que trabajan la misma representación que ellas.

Objetivos	TS	TF	TG	TE	TB	TTB	TTM	TTF	TI	T?
O1. Representar un número cuyo valor es desconocido...	X	X			X	X				
O2. Operar con expresiones algebraicas.		X								
O3. Identificar polinomios de primer grado.										
O4. Distinguir los elementos de una ecuación de primer grado.	X	X	X	X	X	X	X	X		
O5. Conocer la representación gráfica de una ecuación.			X							
O6. Reconocer diferentes tipos de ecuaciones de primer grado.	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
O7. Diferenciar entre ecuaciones e identidades.										
O8. Leer y escribir ecuaciones de primer grado.	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
O9. Encontrar las soluciones de una ecuación de primer grado.	X	X	X		X	X	X	X		
O10. Aproximar una solución por tanteo...					X	X	X	X		
O11. Construir ecuaciones equivalentes a una dada.	X	X	X		X	X				X
O12. Conocer los diferentes métodos de resolución.	X	X	X		X	X	X	X		
O13. Comprobar la validez de una solución.	X	X	X		X	X	X	X	X	X

Objetivos	TS	TF	TG	TE	TB	TTB	TTM	TTF	TI	T?
O14. Modelizar enunciados de problemas.				X						
O15. Idear un problema dada una ecuación.										
O16. Interpretar y discriminar soluciones de un problema.				X						

Cabe señalar que el objetivo 3 no se trabaja en el juego al tratarse éste enteramente de ecuaciones de primer grado, y no observarse ninguna ecuación, y por tanto ningún polinomio, de grado mayor que uno

Respecto al objetivo 7 podríamos dar un razonamiento similar al del objetivo 3, aunque sí que podemos encontrar en el juego una identidad entre las 72 tarjetas, pero no se pretende que con esa única tarjeta se comprendan las diferencias entre ecuaciones e identidades.

En cuanto al objetivo 15, éste no se trabaja directamente, pero la prueba final permite aplicar conocimientos y estrategias similares que las buscadas con este objetivo, al pedir idear un problema sin siquiera dar una ecuación determinada, pero que después deben ser capaces de modelizar.

Errores	TS	TF	TG	TE	TB	TTB	TTM	TTF	TI	T?
E1. Generalización incorrecta de las operaciones aritméticas.	X	X			X	X				X
E2. Uso incorrecto de las propiedades numéricas.	X	X								X
E3. Confundir la nueva notación del producto.	X	X								X
E4. Confundir el grado de un polinomio.										
E5. Confundir miembros con términos y viceversa.	X		X		X	X	X		X	
E6. Desconexión entre las represent. gráficas y simbólicas.		X								
E7. Confundir diferentes tipos de ecuaciones.	X				X	X			X	
E8. No reconocer los distintos tipos de igualdades algebraicas.										
E9. Obtener soluciones erróneas mediante el uso de materiales.					X	X				
E10. Aplicación incorrecta de la regla de la suma.	X				X	X				
E11. Aplicación incorrecta de la regla del producto.	X				X	X				X
E12. Obtener igualdades a través de fracciones:										
E13. Desconexión entre las represent. verbales y simbólicas.				X						
E14. Determinar soluciones carentes de sentido.			X	X		X	X			

Los errores 3 y 8 son los asociados a los objetivos 3 y 7 anteriormente comentados, razón por la cual no se trabajan mediante ninguna tarjeta ni prueba

Al trabajarse casi en la totalidad de las tarjetas las ecuaciones simples, y buscarse la comprensión del concepto de ecuación, a penas se trabaja con ecuaciones más complicadas como son las ecuaciones con denominadores (solo una tarjeta plantea una ecuación de este tipo) que son el tipo de ecuaciones que mejor permitirían subsanar el error número 12.

Por último, cabe señalar que a pesar de que el error 14 hace referencia a soluciones incorrectas obtenidas en enunciados de problemas, las tarjetas de representaciones numéricas y gráficas permitirían encontrar rápidamente tales valores.

4. Estudio del material

Este capítulo está dedicado a presentar a los alumnos que probaron el material y a describir la recogida de datos realizada a partir de la puesta en práctica del juego para evaluar y mostrar la utilidad de éste.

4.1. Población del estudio

La población que ha probado este material está formada por estudiantes que cursaron el tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria en el curso académico 2011-2012.

Estos estudiantes pertenecen al Instituto de Enseñanza Secundaria Fray Luis de Granada, instituto en el que realicé el periodo de prácticas de este máster como profesor de matemáticas. Este instituto está situado en la zona centro de la ciudad de Granada, aunque un gran número del alumnado vive en pueblos del cinturón. Las familias de los estudiantes de este centro son de clase media alta y tienen grandes expectativas en lo que se refiere a la continuidad de sus hijos en estudios post-obligatorios y universitarios.

El IES Fray Luis de Granada es un centro bilingüe Español-Inglés desde el año 2006 y centro TIC desde 2005, siendo en la actualidad un centro Escuela TIC 2.0 y bilingüe línea dos. A nivel de 3º de ESO existen dos líneas bilingües y dos no bilingües.

Concretamente los alumnos con los que se probó el material pertenecen a uno de los dos grupos no bilingües, estando éste formado por 26 alumnos, y subdividiéndose a su vez en algunas materias, como matemáticas, en otros dos subgrupos de 13 alumnos cada uno, intentándose conseguir así una enseñanza más individualizada al tratarse de un grupo con un bajo nivel académico. Todos los alumnos con los que se probó el material pertenecen únicamente a uno de estos dos subgrupos, siendo así trece el número total de sujetos con los que se analizó el material, 5 alumnos y 8 alumnas.

Durante mi periodo de prácticas, mi tutor adjunto en el centro puso a mi disposición a estos alumnos por considerar que poseían el nivel más adecuado para probar este material de entre los diferentes grupos a los que él impartía docencia en este curso académico.

Esto es debido a que los alumnos de Bachillerato a los que impartía docencia poseían un nivel muy superior, y los datos que se podrían obtener al probar con ellos el material no aportarían información sobre su utilidad para alumnos de 2º de ESO. Y a pesar de tener también un grupo de segundo curso, estos alumnos eran de un grupo de Refuerzo de Matemáticas y no poseían ni el nivel ni los conocimientos mínimos necesarios, su nivel podría equipararse al de alumnos de 6º de Primaria.

Es por todo esto, junto con el bajo nivel de los alumnos del subgrupo de 3º de ESO (que es equiparable al que tienen los alumnos de 2º de ESO de nivel bajo-medio), por lo que se escogió a estos alumnos para probar el material. A continuación observaremos a que nos estamos refiriendo al decir que estos alumnos poseen un bajo nivel:

Respecto a la situación académica de estos 13 estudiantes, dos de ellos se encuentran actualmente repitiendo 3º de ESO, y otros dos más deberían haber repetido el segundo curso, pero por motivos que no tienen aquí relevancia se les promocionó, llevando esto consigo una gran serie de dificultades para ellos, y haciéndoles casi imposible pasar de curso de nuevo.

Excluyendo a aquellos alumnos que no pueden repetir curso (al haberlo repetido ya) y junto con estos dos alumnos que deberían haber repetido, el pronóstico del equipo educativo sobre este grupo, tras la revisión de la segunda evaluación, es que más del 60% de estos alumnos no podrán promocionar de curso.

Centrándonos en la asignatura de Matemáticas, casi el 50% de este alumnado obtuvo una nota de suspenso en la segunda evaluación, y tras realizar su recuperación, solo una alumna consiguió el aprobado.

La mayoría de los alumnos no poseen ni las habilidades ni las capacidades que se pueden esperar de un alumno de Matemáticas promedio de tercer curso.

El interés mostrado por los alumnos en la asignatura de Matemáticas es bastante bajo, equivalente a su nivel de comprensión. La mayoría de los alumnos suelen asistir diariamente a clase, aunque dos de ellos (de entre los que poseen menor nivel) suelen faltar con gran asiduidad, haciendo que les sea aún más complicado seguir la asignatura. Solo uno de los alumnos tiene el nivel de comprensión ideal para un curso de tercero de ESO. A todo esto hay que añadir que el esfuerzo que realizan en la asignatura fuera del aula es casi nulo gran parte de las veces.

A continuación se muestra una tabla en la que se puede observar la valoración realizada de la situación particular de cada uno de los alumnos que probaron el material, en los siguientes campos: Estudio y trabajo fuera del horario escolar, Comprensión de las explicaciones, Asistencia a clase, Comportamiento en clase e Interés por la asignatura. Para proteger la identidad de estos estudiantes, a cada uno de ellos se le ha asignado una letra que lo representará en esta tabla y en los comentarios posteriores.

La siguiente tabla valora cada campo entre 0 y 5, indicando el 0 según corresponda: muy malo o muy bajo y 5 muy bueno o muy alto.

ALUMNOS	Estudio	Comprensión	Asistencia	Comportamiento	Interés
A	2	3	5	4	4
B	2	2	5	3	2
C	0	0	1	2	0
D	3	3	4	5	3
E	2	1	3	5	2
F	3	4	4	5	3
G	1	2	1	2	0
H	3	5	4	3	4
I	4	4	4	5	4
J	3	3	4	4	3
K	4	4	4	4	4
L	2	3	4	4	2
M	2	3	4	4	2

Al darse estas condiciones y otras similares con el otro subgrupo (siendo en principio ambos un único grupo) y en el resto de asignaturas durante el primer curso académico de Enseñanza Secundaria Obligatoria, el equipo directivo del centro decidió separar al grupo en algunas asignaturas, a partir del siguiente curso, para poder mejorar su nivel.

Vemos así como este grupo no alcanza el nivel que debería tener un grupo promedio de 3º de ESO, pero también que las medidas tomadas han hecho que tengan un nivel similar al de un grupo de 2º de ESO, convirtiéndolos en válidos candidatos para poner a prueba el material con ellos.

4. 2. Conocimientos previos de la población

Antes de la puesta en práctica del material y la posterior recogida de datos, los alumnos habían trabajado durante el curso 2011/2012 varios temas de expresiones algebraicas y un tema sobre ecuaciones (de primer y segundo grado) y sistemas de ecuaciones.

Vamos a hacer aquí un pequeño resumen del trabajo realizado en el tema de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, para comprender mejor los conocimientos de los que podían disponer los sujetos antes de probar el material.

Al comienzo del tema se les pidió a los alumnos que dieran una definición de ecuación, siendo las definiciones obtenidas ligeras variaciones de: "Una expresión algebraica con números y letras". En clase se repasaron los conceptos básicos de este tema: ecuación, soluciones de una ecuación, identidad, y ecuación equivalente, dándose las siguientes definiciones sobre los conceptos principales:

Una ecuación es una igualdad entre números y variables, llamadas incógnitas, relacionados por operaciones aritméticas.

Las soluciones de una ecuación son los valores que pueden tomar las incógnitas de forma que al sustituirlos en la ecuación hacen que la igualdad sea cierta.

Después se les recordaron las reglas de la suma y el producto, aunque estos alumnos no resuelven las ecuaciones aplicando estas reglas, pues en años anteriores se les había explicado cómo resolver las ecuaciones "pasando los términos de un lado a otro", y "cambiando el signo al término" cuando realizan esa acción.

Se trabajaron ecuaciones de primer grado simples, con paréntesis, y con denominadores, explicándoles dos métodos diferentes de resolución para estas últimas.

En uno de los métodos se comienza poniendo denominador común en toda la ecuación, y se prosigue eliminando los denominadores de ambos miembros para conseguir así una ecuación simple, en el otro método primero se multiplica toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores y después se dividen las fracciones resultantes, consiguiendo así una ecuación simple.

El segundo de estos métodos era completamente nuevo para ellos, y era el primero con el que habían trabajado en cursos anteriores. Una vez explicados ambos métodos cada alumno pudo elegir el que más le convenía, y aunque el primer método continuó siendo el más utilizado al ser el que ya se habían aprendido, al menos un tercio de los estudiantes emplearon este nuevo método.

En cuanto a ecuaciones de segundo grado se explicaron cómo solucionar las distintas ecuaciones incompletas y completas, así como dos métodos para obtener ecuaciones a partir de sus soluciones.

Se trabajaron los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, y se explicó cómo resolverlos mediante los ya estudiados métodos de sustitución y de reducción, y un método nuevo para ellos, el método gráfico, en el que podían comenzar a observar la construcción de tablas de valores para la representación de rectas en el plano, junto con la obtención de la solución de un sistema mediante un gráfico.

Por último también se resolvieron algunos enunciados de problemas, haciendo uso de sistemas, algunos de estos enunciados también podían ser resueltos fácilmente con ecuaciones simples, pero los alumnos siempre optaban por resolverlos creando un sistema de ecuaciones.

4.3. Diseño de la recogida de datos

Para poder obtener resultados que determinaran el correcto funcionamiento del material, se llevaron a cabo tres procesos diferentes para la recogida de datos, pudiendo así valorarse con ellos:

- El funcionamiento del material desde la perspectiva de juego y de material educativo.
- La aceptación del juego entre los alumnos.
- Los conocimientos adquiridos por los alumnos.
- Cómo se enfrentan los alumnos a las diferentes situaciones que se pueden encontrar en el juego y ante todo a las diferentes formas de representar las ecuaciones.
- Los problemas que pueden surgir durante el juego.
- Los errores que pueden cometer, debido tanto a malinterpretaciones de enunciados como a falta de conocimientos.
- La utilidad del trabajo en equipo.
- Las estrategias que emplean tanto en el propio juego como en la resolución de ecuaciones.

El primero de estos procesos fue la propia **puesta en práctica del juego**, con tres grupos diferentes de alumnos del grupo de tercero de ESO que se presentó anteriormente.

Al poder encontrarse dentro del propio grupo diferentes niveles entre los alumnos se realizó primero una partida, bajo mi supervisión, únicamente con tres de los alumnos más desaventajados, en la que cada uno de los sujetos representaba a un equipo diferente, pudiéndose observar mejor de esta forma los problemas que pueden surgirles a los alumnos, los conocimientos básicos de los que disponían y como se enfrentan con ellos a las diferentes preguntas del juego sin más ayuda que la de su cerebro.

Días después se realizaron otras dos partidas al mismo tiempo, para lo cual se realizaron dos réplicas idénticas del material. Estas partidas se organizaron de forma que por un lado se enfrentaran dos equipos con los sujetos más aventajados (bajo mi supervisión), y por otro se enfrentaran dos equipos con sujetos de menor nivel, con una menor supervisión por mi parte pero poseyendo cada uno de estos dos equipos a uno de los sujetos que participaron en la primera partida.

Con el primer grupo podríamos observar como alumnos con mayor interés en las matemáticas y mayor nivel se enfrentan a los retos que el juego les propone, las interacciones de grupo y un interés real por ganar el juego.

Al darles mayor autonomía al segundo grupo, conseguiríamos observar (además de lo observado en el resto de partidas) como transcurriría una partida en un aula corriente con 30 alumnos en la que a la vez de esa partida se están realizando otras cinco, además podemos observar también como los sujetos que ya habían visto el material explican cada uno de los elementos del juego y de las diferentes tarjetas y pruebas al resto de miembros de su equipo.

Los diálogos que mantuvieron los miembros de los equipos fueron grabados durante cada una de las partidas para poder estudiar después con mayor detenimiento todo lo ocurrido en ellas.

El segundo instrumento para la recogida de datos consistió en la **desarrollo de un cuestionario** que los alumnos tuvieron que rellenar tras probar el material, con el cual se perseguía obtener información sobre la valoración que dan del juego, los conocimientos que adquieren y las estrategias que emplean.

Las preguntas del cuestionario que se les pasó a cada uno de los sujetos al acabar las partidas fueron las siguientes (el formato exacto del cuestionario se puede encontrar en el Anexo 5):

1 - ¿Qué te ha gustado más del juego? ¿Qué te ha gustado menos?

Con esta pregunta inicial pretendemos observar los puntos fuertes y débiles del material desde la perspectiva de juego que tendrán los alumnos sobre él, pudiendo así mejorar los puntos débiles para una edición posterior.

2 - ¿Qué añadirías o quitarías del juego?

Esta segunda pregunta, completamente relacionada con la primera, nos puede mostrar no solo las debilidades del material, sino también de qué forma paliarían los propios alumnos esas debilidades, pudiendo así mejorar el juego con las propias ideas de los alumnos, que son al fin y al cabo los que utilizarán el material y más cómodos deben sentirse con el juego.

3 - ¿Qué tarjeta o prueba te ha resultado más difícil? ¿Por qué?

Con esta tercera pregunta podemos observar no solo la respuesta directa, lo más complicado del juego, sino también qué forma de representar las ecuaciones les produce una mayor dificultad.

4 - ¿Te ha gustado que haya casillas de diferentes tipos? ¿Cuál te ha gustado más? ¿Por qué?
Si pudieras inventarte una casilla nueva, ¿qué tendría de especial esa casilla?

Esta cuarta pregunta nos da información sobre el tipo de estrategias no matemáticas que los alumnos emplean en el juego, ¿prefieren moverse solo por las casillas de bosque evitando los duelos? ¿prefieren moverse por más casillas de praderas que por un número menor de casillas de montaña pero que les costaría más movimiento? Además nos aporta nuevas casillas que se podrían introducir en el juego, de nuevo respondiendo a las inclinaciones de los alumnos.

5 - ¿Qué habéis aprendido con este juego?

Esta quinta pregunta nos permite determinar todos los conocimientos que los estudiantes consideran haber adquirido con este juego, pudiendo así observar si con éste realmente aprenden algo o para ellos no es más que otra actividad cualquiera que se debe realizar en clase y que no les aporta nada.

6 - Después de esta partida, ¿qué dirías que es una ecuación?

Con esta sexta pregunta podemos observar la consecución de uno de los objetivos fundamentales del juego, éste es la adquisición, por parte de los alumnos, de una mejor perspectiva o un mayor conocimiento sobre el concepto de ecuación.

7 - ¿Alguna vez te salió alguna ecuación repetida en las tarjetas?

La séptima pregunta se centra en la traducción de ecuaciones entre los diferentes sistemas de representación. Al existir tarjetas con la misma ecuación pero representada ésta de distinta forma, podemos observar si los alumnos advierten la relación entre las diferentes representaciones.

8 - ¿Cuántas formas de mostrar una ecuación has visto en el juego? ¿Cuáles son?

Esta octava pregunta nos permite observar si los alumnos son conscientes de que en la mayoría de las tarjetas se presentan siempre ecuaciones (aunque se mostraran de diferentes formas), permitiéndonos asegurar que han observado diferentes perspectivas de una ecuación, y las han interiorizado como tales y no como algo distinto de una ecuación.

9 - ¿Existen formas para dibujar una ecuación distintas de las que habéis utilizado en el juego? Si sabes alguna, descríbela.

La novena pregunta pretende hacer que los alumnos reflexionen e intenten encontrar otras formas de representar las ecuaciones.

10 - ¿Con qué forma te es más fácil encontrar la solución de una ecuación? ¿Por qué?

Además de la respuesta directa, con esta décima pregunta podemos observar si al plantear a los alumnos diferentes formas de resolver una ecuación encuentran una forma que se adapte mejor a sus habilidades, pudiendo así mejorar su comprensión de los procesos de resolución de una ecuación. Con esta pregunta también podemos observar si el método algebraico es el mejor para introducirles a los alumnos el tema de Ecuaciones, o si por el contrario es mejor emplear otra representación.

11 - ¿Habrías resuelto alguna tarjeta o prueba de forma diferente a como lo ha hecho el otro equipo? ¿Cómo lo habrías hecho?

La última pregunta nos permite observar el tipo de estrategias que emplean los alumnos a la hora de resolver ecuaciones, y cuáles de ellas les resultan más cómodas o directamente mejores.

El último proceso para la recogida de datos se trata de una **pequeña entrevista sobre el material con mi tutor** de prácticas, profesor de Matemáticas de este grupo de alumnos durante los últimos dos años, y que estuvo presente como observador en las partidas. A través de esta pequeña entrevista podemos ver el material desde la perspectiva de un docente que lleva más de quince años en la enseñanza y que con el tiempo ha podido ir observando, probando y empleando diferentes métodos para explicar la asignatura de Matemáticas (más concretamente, las ecuaciones en este caso), hasta llegar a tener una visión de lo que puede ser más adecuado para el aprendizaje de los alumnos y lo que no es de utilidad para esto.

5. Resultados

En este capítulo se presenta el análisis de los datos recogidos estructurado en tres partes. En primer lugar, analizamos las tres partidas que se llevaron a cabo con cada uno de los diferentes grupos, y presentamos una pequeña síntesis de las grabaciones de audio recogidas durante estas partidas. En segundo lugar, analizamos los cuestionarios que rellenaron los participantes tras acabar cada una de las partidas. Y en tercer lugar, recogemos las opiniones de un docente con años de experiencia que observó cada una de las partidas. Por último se realiza una discusión de los datos obtenidos en los tres apartados anteriores.

5.1. Análisis de las partidas

En este apartado realizamos un análisis de cada una de las tres partidas que se llevaron a cabo, dividiendo este análisis en tres partes, una por cada partida. En primer lugar analizaremos la primera partida que se realizó, en la cual nos encontramos con tres equipos diferentes formados por tan solo un miembro cada uno. Después analizaremos la partida de dos equipos formados por los sujetos más sobresalientes de todo el grupo. Y por último analizaremos la partida que se realizó con una supervisión mínima, pero en la cual algunos de los participantes ya conocían en profundidad el funcionamiento del juego.

5.1.1 Primera partida. Tres jugadores

En esta partida participaron los alumnos A, B y C. Estos tres alumnos se encuentran entre los más desaventajados de todo el grupo, aunque dentro de esa clasificación cada uno posee un nivel diferente, el alumno A posee un nivel bajo-medio pero intenta esforzarse mucho más que los otros dos alumnos, lo que hace que casi esté a un nivel medio dentro del grupo de clase, el alumno B posee un nivel bajo y no confía mucho en sus propias capacidades, a pesar de que en las ocasiones en las que se esfuerza es capaz de realizar las tareas sin demasiadas dificultades, por último el alumno C tiene el menor nivel de todo el grupo de clase, falta en multitud de ocasiones a las clases y no atiende a las explicaciones, durante todo el tiempo en el que se trabajó el tema de Ecuaciones en la clase de Matemáticas no intentó resolver más de un par de ecuaciones.

Al ser tres equipos/jugadores y el juego estar diseñado para un número menor se creó una ficha extra para representar al tercer jugador en el tablero, una ficha blanca y cuadrada con una "X" azul.

Debido a que el número de equipos era mayor de lo pensado en principio para el juego, el nivel de los jugadores bajo, no poseían compañeros de equipo y las reglas del juego se explicaron con sumo detenimiento, esta partida duró dos horas.

A continuación se detalla cómo se les introdujo el juego, y como se enfrentaron a las diferentes tarjetas, duelos y pruebas que aparecieron en esta partida.

Antes de comenzar la partida se realizó la introducción al juego que se puede encontrar en el capítulo tres, Diseño de la innovación, tras la cual se explicó la mecánica del juego de forma resumida.

Se explicó cómo ganar, que acciones pueden realizar cada uno en su turno, el tipo de casillas que se podían encontrar en el tablero, y la importancia de dar soluciones correctas. Y durante toda la partida tuvieron escritas las mismas indicaciones en la pizarra, para poder revisarlas si fuera necesario.

Después se realizó una partida de prueba para que pudieran observar varios turno de juego, para lo cual los profesores presentes hicieron el papel de jugadores, comenzando por mostrarles como robar una tarjeta de movimiento y resolver la cuestión que en ella se proponía, después se empleó parte del movimiento que la tarjeta permitía realizar en llegar hasta la casilla del otro jugador, al cual se le propuso un duelo, y tras ganarlo se mostró como podían robar otra tarjeta de movimiento para moverse más.

Todo esto hizo que no tuvieran ninguna dificultad en comprender el mecanismo del juego y sus reglas básicas.

El juego se sucedió de la siguiente manera:

Comenzó el primer turno el alumno A, al ser el más joven de los tres, y tras él continuó el alumno B y por último el alumno C, siguiendo el sentido de las agujas del reloj.

Se observaron un total de 19 tarjetas (2 en la prueba y 17 más en la partida) y se realizaron 4 pruebas, 2 el alumno A, 2 el alumno B, y 0 el alumno C al obtener pocos puntos de movimiento y perseguir una misma llave que el alumno B y llegar éste primero a la casilla de la llave.

No se realizó ningún duelo, debido a que, desde la propia explicación de los duelos, los tres jugadores decidieron de forma unánime no cruzarse en el camino de los demás, al parecer les asustaba un poco perder la oportunidad de moverse y la recompensa por ganar el duelo no parecía motivarles lo suficiente, el alumno A comentó que de ser la recompensa quitarle una llave a otro jugador intentaría realizar un duelo sin dudarlo, pero que si no obtenía una llave no le merecía la pena intentarlo.

Por último el alumno B llegó al castillo con las dos llaves antes que el alumno A, y realizó con éxito la prueba final.

En esta partida aparecieron todos los tipos de tarjetas al menos una vez, veamos como hicieron frente a cada una de ellas:

- *Tarjetas con una ecuación simbólica*

Aparecieron tres de estas tarjetas, una en la partida de prueba, otra al alumno A y otra al alumno B. En la primera ocasión los alumnos A y B dictaron correctamente los pasos a realizar para resolver la ecuación. En la segunda el alumno A determinó la solución en dos pasos (saltándose otros), de lo cual el alumno B se quejó al no poder seguir su razonamiento hasta conseguir la solución y no poder ver así si lo había hecho bien o mal (no se planteó resolverla él), tras esto el alumno A le explico de forma correcta todos los pasos, incluyendo los que había omitido sobre el papel. Para la última tarjeta el alumno B realizó los pasos con mucho cuidado y se aseguró varias veces de que había obtenido la solución correcta, colocando el valor obtenido en lugar de "x" en la ecuación, ya que no quería perder el turno al estar junto al castillo y tener las dos llaves.

- *Tarjetas con tablas de valores de los miembros de una ecuación*

Aparecieron dos tarjetas de este tipo, ambas al alumno B. En la primera ocasión se tuvo que explicar con mayor detalle la tarjeta, ya que en un principio el alumno pensó que cada una de las columnas pertenecía a una ecuación diferente, y que cada valor de la incógnita era la solución de cada una de esas ecuaciones, sin pararse a observar que los dos miembros asociados a esas incógnitas fueran iguales o no, conocimiento que mostró conocer al preguntarle que ocurre en cada uno de los miembros de una ecuación si en lugar de "x" escribes el número que es solución de esa ecuación. Tras explicarle la forma de la que estaba realizada la tabla, no encontró mayor problema. Cuando cogió de nuevo una tarjeta de este tipo, determinó al instante la solución.

- *Tarjetas con una ecuación formada en una balanza*

Aparecieron dos tarjetas de este tipo, una en la partida de prueba y otra al alumno C.

Al aparecer una de estas tarjetas en la partida de prueba se les preguntó a los jugadores si sabrían resolver la ecuación una vez preparada la balanza, pero a pesar de haberse comentado durante la explicación del tema que una ecuación es como una balanza en equilibrio y comentar los propios alumnos A y B que ya conocían ese hecho, ninguno fue capaz de decir cómo realizarlo, tal vez porque en cursos previos se habría comentado también en clase pero no se habría explicado detalladamente. Una vez observan la primera eliminación de dos pesas de la balanza, una de cada lado, son capaces de decir ellos mismos que es lo que se debe hacer a continuación.

Sorprendentemente (debido a su aparente falta de conocimientos e interés) y cuando el alumno C coge una tarjeta de este tipo, la resuelve directamente, sin necesidad de más explicaciones, y al reducir la ecuación con la balanza hasta la ecuación 2x=2 acaba de resolver la ecuación señalando que "si de un lado quito la mitad, del otro también".

- *Tarjetas con una ecuación formada con bolas*

Solo aparece una tarjeta de este tipo en toda la partida, y al igual que la otra tarjeta con una representación manipulativa le aparece al alumno C. Bastó decir únicamente que "es como la balanza", para que resolviera la ecuación sin complicaciones a la vez que daba explicaciones correctas de cada paso que realizaba.

- *Tarjetas con enunciados verbales*

Las ecuaciones que se pueden obtener a partir de enunciados verbales son las que más problemas entrañan para este grupo (para los 13 en general), al tener serias dificultades en la traducción al lenguaje algebraico.

Aparecieron dos tarjetas de este tipo, ambas al alumno A.

La primera de las tarjetas, en la cual se pide encontrar la longitud de la base de un triángulo relacionándola con la altura, le parece demasiado difícil, por lo que decide pasar de turno, aunque en un principio intenta la traducción denotando por "x" la longitud de la base y por "y" la longitud del triángulo. Después se interesa por cómo se debería resolver.

La otra tarjeta es un problema de edades, en la que se relaciona la edad de un hijo con la de su padre. De nuevo intenta resolverlo denotando una de las edades como "x" y la otra como "y" (haber trabajado sistemas de ecuaciones hace que intenten resolver incluso los problemas más sencillos mediante el uso de dos variables). Esta vez se intenta que piense un poco más sobre la relación entre las edades, y finalmente se da cuenta de ésta y observa que no es necesario emplear más de una variable, solucionando al final la tarjeta con éxito.

- *Tarjetas con una ecuación representada de forma gráfica*

Tres son las tarjetas que aparecen de este tipo, encontrándolas todas el alumno A. Al haber estudiado en clase el método gráfico para la resolución de sistemas de ecuaciones no duda en decir que la solución es el corte (a pesar de no ser la asociación más correcta). Se les explica que en este caso solo tenemos una ecuación con una incógnita, y que cada recta es uno de los "lados" de la ecuación, con lo que entienden que deben descubrir el valor de la "x" viendo como se "chocan", lo cual hace ayudándose de otra tarjeta para encontrar el punto de corte y señalar al eje X. De igual forma soluciona la siguiente tarjeta que encuentra de este tipo, y en la tercera le aparecen dos rectas paralelas con lo que determina rápidamente que la ecuación no tiene solución.

No queda claro si el alumno A finalmente entiende la tarjeta al explicársele que tiene una única ecuación con una única variable "x", si encuentra la solución al observar donde los dos "miembros" son iguales, o si simplemente realiza una ligera variación del método gráfico para resolver sistemas.

- *Tarjetas con una función asociada a una ecuación*

Aparecen dos tarjetas de este tipo durante la partida, la primera al alumno B y la segunda al alumno C.

En un principio el alumno B piensa que lo que se hace 0 es "x", no la función, y por tanto la solución es cero. Después escribe la función cambiando la incógnita por 0, pero no llega a ningún resultado. Una vez se le escribe como función=ax+b en lugar de f(x)=ax+b y se le hace leer de nuevo el enunciado ya observa que lo que debe realizar es resolver la ecuación 0=ax+b.

Cuando el alumno C coge una carta de este tipo recuerda lo visto anteriormente y resuelve directamente (con algunas pequeñas dificultades) la ecuación 0=ax+b.

El alumno A entiende la tarjeta antes de que sea explicada, incluso aporta una forma alternativa de resolverla (una vez la resuelve el alumno C), ir probando por tanteo, dando números a la "x", de forma que la solución es la "x" que hace que esa expresión algebraica quede como 0.

- *Tarjetas con tablas de valores de funciones asociadas a una ecuación*

Aparece una tarjeta de este tipo. La coge el alumno C. Al encontrarse perdido se le explica cómo está formada la tabla, y que hay que buscar cuándo la función es cero. Tras esto determina la solución a la primera.

- *Tarjetas de invención de ecuaciones*

Aparecen dos tarjetas de este tipo, encontradas por los alumnos B y C.

Al principio al alumno B esta tarjeta le parece muy complicada y comienza a intentar crear una ecuación compleja, y después a escribir ecuaciones al azar con la esperanza de que alguna de ellas tenga como a dos como solución (dos es el valor que se indica en la tarjeta), hasta casi darse por vencido. Una vez se le dice que no tiene porque ser una ecuación complicada comienza a pensar de nuevo y determina la ecuación 3x=6, argumentando que tenía que buscar algo que dividido por 3 diera como resultado 2.

El alumno C debe inventar una ecuación cuya solución sea tres, y escribe como respuesta la "ecuación" 3x-0=3, confundiendo las ecuaciones con la operación básica de multiplicación "3 por 1 (por 1 porque cuando no hay nada se pone 1) es 3, menos 0 da 3". Tras perder el turno el alumno B le da un ejemplo sencillo, $2x=6$, argumentando de forma similar a la vez anterior.

Después se les pregunta por qué ven más fácil el tipo de ecuaciones como $2x=6$ que $x-3=0$, a lo cual se obtiene como respuesta que sí que es más fácil, pero no se habían parado a pensar en ellas.

• *Tarjetas de ecuaciones incompletas*

La única tarjeta de este tipo la cogió el alumno B. Se le pide completar una ecuación para que la solución sea 4, es decir, $x=4$, pero primero plantea la ecuación escribiendo ?=4, tras esto se le pide que vuelva a leer la tarjeta y determina: "ah, vale, x es igual a cuatro y hay que buscar la interrogación como si fuera la x, ¿no?". Después resuelve la tarjeta sin problemas.

Pasamos ahora a observar como resolvieron cada una de las pruebas que aparecieron:

• *La disputa de los hermanos* (Prueba simbólica, resuelta por el alumno A)

Tras leer el enunciado y pensarlo un poco, determina que el hermano mayor (el cuál resuelva la ecuación realizando primero la multiplicación número por paréntesis) resuelve mejor la ecuación, ya que tanto él como el resto de jugadores no ven como correcto pasar un número dividiendo al otro miembro si está multiplicando a un paréntesis.

"Si multiplicas el número por el paréntesis ya puedes despejar la x a un lado y los números normales a otro. La del hermano menor no tiene sentido, no se puede estar multiplicando un paréntesis y pasarse dividiendo."

Parece que lo único que para ellos está bien es lo que se les ha explicado en clase, no se paran a pensar otras posibles formas de resolverlo.

• *El mercader ambulante* (Prueba con la balanza, resuelta por el alumno B)

El alumno B expresa la ecuación en la balanza sin problemas de traducción, pero aún cuando en la ecuación la incógnita "x" se expresa de dos formas diferentes, lo que equivale a colocar dos tipos diferentes de pesas, coloca el mismo tipo de pesa para ambos tipos de "x", con lo que la balanza no queda equilibrada.

Esto no le lleva a observar directamente que la ecuación no tiene solución, sino a darse cuenta de que la ecuación está expresada con diferentes tipos de "x", lo que le hace colocar diferentes tipos de pesas, teniéndose así el equilibrio, y resolviendo la ecuación sin problemas hasta llegar a $2x+2=2x$, con lo que elimina de la balanza todas las pesas con x, lo cual de nuevo le lleva al desequilibrio. Con la balanza no observa cual es el problema, pero una vez traduce lo que queda en la balanza al lenguaje algebraico observa que: "queda dos igual a cero, esto está mal, la ecuación no tiene solución".

• *La llave aventurera* (Prueba de enunciado verbal, resuelta por el alumno A)

Rápidamente entiende que debe resolver un enunciado que se puede representar con una ecuación, y comienza la traducción: "Le faltan x, y el triple de las que le faltan son 3x", hasta aquí todo correcto, pero comienza a llamar "y" al número de praderas, aunque una vez que observa que también tendría que denotar de otra forma a los bosques, se da cuenta de que tiene que contar las casillas de cada tipo que hay en el tablero.

Lo mejor para esta prueba es que el equipo se asegure del número de casillas y las cuenten por separado, pero aunque en este caso está solo no se equivoca al contarlas. Cuenta todo lo que le dicen y como le dicen que una cosa es igual a otra plantea bien la ecuación, y la resuelve después de forma correcta. Este problema parece resultarle mucho más sencillo que los de las tarjetas, al ser "el triple de una cosa" la asociación más compleja que tiene que realizar.

• *El ermitaño solitario* (Prueba con el tablero de bolas, resuelta por el alumno B)

El alumno escoge las bolas negras para denotar a la incógnita (sin recordar cuales representaban a la incógnita en las tarjetas), y traduce la ecuación al sistema manipulativo sin complicaciones.

Sabe que tiene que quedar en un lado una única bola negra, para lo cual va quitando el mismo número de bolas de ambos cuadrados hasta quedarle 5 bolas negras en uno y 10 bolas blancas en otro, y a partir de aquí calcula mentalmente la ecuación $5x=10$, pero al pedirle que la resuelva únicamente con las bolas explica que: "como en el lado derecho hay el doble que en el izquierdo, por cada bola negra que quite, quito dos blancas", y va eliminando bolas del tablero hasta llegar a la solución que había determinado anteriormente.

Para el segundo apartado de la prueba, crear otra ecuación que tenga también solución 2, piensa en crear la ecuación $x-2=0$ (seguramente por el comentario realizado en las tarjetas de invención de ecuaciones), pero descarta esa opción al no poder poner bolas negativas (el alumno A aporta la posibilidad de crear bolas de otros colores que indiquen números negativos, aunque se pasa por alto). Después forma en el tablero la ecuación $3x=6$, y al preguntársele como se le ha ocurrido responde que "al quitar bolas para resolver la ecuación $5x=10$, hubo un momento en el que quedaba esa, entonces $3x=6$ y la del papel son equivalentes, y tienen la misma solución".

• *La Prueba final* (Prueba realizada por el alumno B)

Se abruma un poco ante tanta letra, y al pensar que lo que debe realizar son cinco problemas diferentes, pero se le hace volver a leer únicamente el apartado "Esto es lo que debéis hacer", y tras leerlo comienza a resolverla. Tras cinco minutos y varios intentos frustrados de obtener un enunciado, escribe el siguiente:

"El número de las coronas de las riquezas de un castillo más tres, equivale al doble de las coronas más uno. ¿Cuántas coronas son?"

El enunciado se acepta como válido, tras lo cual realiza la traducción al lenguaje algebraico y resuelve la ecuación resultante. Tras esto, representa esa ecuación con la balanza y con el tablero de bolas, y por último crea una tabla de miembros formada por tres columnas, con las incógnitas 0, 1 y 2. No se le ocurre ninguna otra forma de escribir una ecuación, pero el alumno A le dice que el propio enunciado es una forma de escribir la ecuación, con lo que finalmente el alumno B se alza como ganador de la partida.

5.1.2. Segunda partida. Alumnos de mayor nivel

En esta partida participaron los alumnos H, I y J formando el equipo representado por la ficha de la X blanca (a partir de ahora equipo 1), y los alumnos K, L y M formando el equipo representado por la ficha de la X negra (a partir de ahora equipo 2). Para facilitar la referencia a los alumnos y al equipo al que pertenecen, a partir de este punto junto a la letra que le representa se escribirá también el número del equipo al que pertenece.

A pesar de que el alumno H1 posee un nivel mucho mayor que el de el resto de alumnos los equipos se equilibraban al poseer juntos los alumnos K2 y L2 un nivel similar y ser los alumnos I1 y J1 bastante despreocupados, aunque de mayor de nivel que otros.

El juego se introdujo de la misma manera que en la primera partida, con las siguientes excepciones: No se realizó ninguna partida de prueba, ni se les escribió ningún resumen de las reglas en la pizarra ni en formato de papel. Durante la partida los alumnos mostraron que realmente esto hubiera sido innecesario, al acordarse del funcionamiento del juego a la perfección y, en los pocos casos en los que algún alumno no recordaba algo, los miembros restantes de su equipo eran capaces de explicárselo.

El juego se sucedió de la siguiente manera:

Comenzó el primer turno el equipo 2, al tener entre sus filas al miembro más joven. Se observaron un total de nueve tarjetas y se realizaron tres pruebas, dos el equipo 2 y una el equipo 1, siendo de esta forma el equipo 2 el único que pudo acceder a la prueba final, la cual superaron obteniendo así la victoria.

En esta ocasión tampoco se realizó ningún duelo, debido a que existía cierta rivalidad entre los miembros de un equipo y los del otro, y ambos equipos pensaban que, de comenzar alguno a realizar duelos, la rivalidad por ver quién es más hábil resolviendo ecuaciones haría que el juego se paralizase, realizando así duelos únicamente, y ambos tenían interés en jugar la partida hasta el final.

Una vez comienza la partida, cada uno de los jugadores parece tener su propio rol claramente interiorizado, sin necesidad de hablar de ello para ponerse de acuerdo. El alumno H1 realiza la mayor parte de los procesos por su equipo, mientras que I1 y J1 se aseguran de los resultados y además I1 se asegura de controlar el comportamiento e impulsividad de H1, pues cree saberlo todo y en más de una ocasión "pincha" al otro equipo y se las da de listo con el suyo propio. En el equipo 2, M2 se encarga de solucionar las ecuaciones escritas en forma simbólica, y K2 Y L2 de realizar las traducciones necesarias hasta ese sistema, los tres miembros de este equipo se aseguran siempre de las soluciones que dan.

Ambos equipos deciden en grupo detenidamente por donde realizar su movimiento, evitando siempre que pueden las montañas para poder avanzar más deprisa, y observando que camino es más corto para llegar a su objetivo (llave o castillo), contando el número de casillas que tendrían que pasar rodeando montañas y agua, a diferencia de los jugadores de la primera partida, cuyos movimientos únicamente se basan en qué objetivo estaba más cerca en línea recta, siéndoles irrelevantes en ese momento los tipos de casillas que hubiera en ese camino.

Debido a la habilidad de los alumnos y a la obtención de resultados altos por parte del equipo 2, la partida pudo realizarse sin problemas en una hora.

En esta partida no aparecieron tarjetas de ecuaciones incompletas, ni de tablas de funciones. A continuación vamos a observar cómo se enfrentaron al resto de tarjetas que si aparecieron:

- *Tarjetas con enunciados verbales*

Este es el único tipo de tarjeta que apareció dos veces (una al equipo 2 y después otra al equipo 1), cada uno de los demás tipos solo apareció una vez.

El enunciado que tiene que resolver el equipo 2 trata sobre la construcción de una muralla, en el que se pregunta cuantas piedras ha puesto hoy el constructor, relacionándolas con las piedras que podría poner mañana, esto induce al equipo a pensar en que se tienen dos incógnitas, x = número de piedras colocadas hoy, y = número de piedras que se colocarán mañana, de esta forma escriben dos ecuaciones $3x+2=y$, y $8+2x=y$, al observar esto se dan cuenta de que no es necesario crear un sistema de ecuaciones, si no que pueden escribir el enunciado entero como la ecuación $3x+2=8+2x$. Una vez encontrada la ecuación, la resuelven correctamente. Durante todo el proceso de resolución de la tarjeta se van asegurando en equipo de cada paso.

El enunciado que resolvió el equipo 1 trata sobre el peso de un saco de sal, el cual se relaciona con kilos de azúcar. Al igual que el otro equipo en su momento, creen tener dos incógnitas, kilos de sal, y kilos de azúcar. Salvo por ese detalle plantean "bien" la ecuación, esta debía ser $4x+2=2x+10$, y ellos escriben $4x+2y=2x+10y$, solucionando esta ecuación de forma que llegan a obtener $x=5y$, y "como y es un kilo, x son cinco kilos", una vez se aseguran del resultado y vuelven a leer el enunciado, I1 se da cuenta de que no es necesario utilizar dos variables, por lo que plantean de nuevo la ecuación, esta vez de forma completamente correcta.

- *Tarjeta con tabla de valores de los miembros de una ecuación* (Equipo 1)

Esta tarjeta tuvo que ser explicada al no comprender los alumnos como estaba formada. Se les explicó a partir de la creación de una tabla para la ecuación $5x+2=3x+2$.

En un principio intentaron comenzar a buscar la ecuación a la que pertenecía dicha tabla, pero se les insistió en que debían obtener la solución mirando únicamente la tabla. Se les preguntó qué ocurría cuando comprobaban en clase que un valor era realmente solución de una ecuación, a lo que H1 respondió que: "Había en los dos lados el mismo número", lo cual llevó a I1 a encontrar el valor correcto en la tabla.

- *Tarjeta con una función asociada a una ecuación* (Equipo 2)

En un principio K1 intenta sustituir "x" por cero en la función $f(x)=3x-6$, obteniendo que la solución es -6 ($f(x)$ lo toma como $f\cdot(0)$, y "f por cero, es cero"), pero esto no acaba de convencer a ninguno de los miembros del equipo, por lo que vuelven a leer la tarjeta y observan, sin ninguna indicación, que lo que deben solucionar es: $0=3x-6$.

- *Tarjeta con una ecuación formada en una balanza* (Equipo 1)

I1 y J1 colocan correctamente las pesas necesarias en la balanza, y H1 parece saber resolver ecuaciones así planteadas: "esto es muy fácil, los platillos son los miembros de la ecuación, y tenemos que despejar x, así que vamos quitando cosas", y eso es precisamente lo que hace, quitar cosas, sin tener en cuenta el equilibrio de la balanza. Una vez se les comenta la relación entre una ecuación y una balanza equilibrada, resuelven perfectamente la ecuación.

- *Tarjeta con una ecuación formada con bolas* (Equipo 2)

Colocan las bolas en el tablero con completa autonomía, y observan que se trata de algo similar a la balanza, con lo que van quitando de ambos cuadrados lo mismo, hasta llegar a tener en un cuadrado dos bolas negras y en otro seis bolas blancas, lo cual L2 resuelve diciendo que "cada miembro se divide entre dos".

• *Tarjeta con una ecuación simbólica* (Equipo 2)

No hay ningún tipo de dificultad, M2 la resuelve, y K2 y L2 se aseguran de la solución.

• *Tarjeta con una ecuación representada de forma gráfica* (Equipo 1)

H1 comenta que: "Es fácil, es donde se cruzan, la solución es x=4", pero su equipo le pregunta que se hace entonces con la "y", pues en el método gráfico que se les ha explicado en clase se obtienen dos soluciones. Al no tener ninguno respuesta para esto, se les explica que cada una de las rectas es uno de los miembros de una ecuación, escribiendo una ecuación de forma algebraica, y después sus miembros como rectas. Al observar que al escribir las rectas solo aparece "x", ven que lo que único que importa es "x", como decía en un principio H1.

• *Tarjeta de invención de ecuaciones* (Equipo 2)

Deben inventar una ecuación que tenga a 6 por solución, lo que lleva a L2 a escribir 2x=6, confundiendo la solución con el segundo miembro, a raíz del pensamiento aritmético del símbolo igual. Sus compañeros le corrigen y buscan una ecuación parecida a ésta, que realmente tenga a seis por solución, determinando finalmente la ecuación $x/2 = 3$.

Pasamos ahora a observar como resolvieron cada una de las pruebas que aparecieron:

• *La disputa de los hermanos* (Prueba simbólica, resuelta por el equipo 2)

Todos los miembros del equipo observan que las dos formas de resolver la ecuación son correctas, de la resuelta por el hermano menor dicen que es mejor por realizarse en menos pasos, pero sin embargo la forma que emplea el hermano mayor es la que les han enseñado siempre, y por tanto la primera manera de la que se les ocurriría resolverlo, quedando ambos grupos de acuerdo en que la mejor es la del hermano mayor al ser la enseñada en clase.

• *Descifrar el código* (Prueba de tabla de miembros, resuelta por el equipo 2)

Como este tipo de tabla ya fue explicada anteriormente, comprenden las instrucciones de la prueba sin necesidad de ser explicadas, y comienzan a formar un sistema de ecuaciones para obtener los números del primer miembro, escribiendo en el lugar indicado los elementos de la tabla. Después resuelven ese sistema mediante el método de sustitución, y de igual forma obtienen los valores de los números del segundo miembro.

Para hallar la solución de la ecuación la resuelven directamente mediante su representación simbólica, sin intentar encontrarla por tanteo creando más columnas extras en la tabla.

• *El ermitaño solitario* (Prueba con el tablero de bolas, resuelta por el equipo 1)

No encuentran dificultades para crear en el tablero de bolas la ecuación que se les da en la ficha. Escogen las bolas negras para representar la incógnita y las bolas blancas para representar los números, y resuelven la ecuación sin planteárseles ningún problema.

A la hora de resolver el segundo apartado, H1 piensa en una ecuación sencilla que tenga a dos como solución e intenta ver si se puede formar con las bolas que tienen. La ecuación que forma es la siguiente: 2x=4.

• *La Prueba final* (Prueba realizada por el equipo 2)

Al principio piensan que lo que se les pide en la prueba es crear un problema y resolverlo de cinco formas diferentes, de igual manera que en la prueba de *La disputa de los hermanos* cada hermano resolvía la ecuación de una forma distinta, y no mostrar la ecuación de cinco formas diferentes. Una vez se les saca de su error crean el siguiente enunciado:

"En un castillo hay dos cofres, en un cofre hay el doble de monedas que en el otro, y el número de monedas total es 6, ¿cuántas monedas hay en cada cofre?"

Escriben la ecuación de forma simbólica, y también mediante el tablero de bolas, la balanza y una tabla de miembros, y señalan que el enunciado también es otra forma de escribir la ecuación. El sistema que utilizan para resolverla es el sistema de representación simbólico, presentándoseles de nuevo problemas al emplear una incógnita para las monedas de cada cofre, hasta que K2 saca de su error al resto del equipo y lo traduce correctamente.

1.3 Tercera partida. Jugadores experimentados

En esta partida participaron los alumnos A, D y E formando el equipo representado por la ficha de la X blanca (a partir de ahora equipo 1), y los alumnos B, F y G formando el equipo representado por la ficha de la X negra (a partir de ahora equipo 2). De nuevo, para facilitar la referencia a los alumnos y al equipo al que pertenecen, a partir de este punto se escribirá junto a la letra que le representa también el número del equipo al que pertenece.

Dentro de cada equipo los alumnos D1 Y F2 eran los que poseían un nivel mayor, que podría clasificarse como medio-bajo, D1 posee una mejor comprensión matemática, pero F2 cursaba la asignatura por segunda vez, con lo que sus niveles se asemejaban. Y los alumnos E1 Y G2 son, tras el alumno C (que no volvió a jugar una segunda partida al estar ausente el segundo día), los alumnos de menor nivel del grupo de clase, siendo G2 un alumno problemático al que no le gusta la idea de ir al instituto y E1 un alumno que tiene serias dificultades con la materia. Estos últimos apenas mostraban interés.

Esta partida se realizó al mismo tiempo que la denominada como segunda partida, dándoles mayor autonomía, al tener cada equipo un miembro que ya había jugado anteriormente al juego (alumnos A1 y B2), pudiendo así encargarse ellos dos de controlar la partida, y explicar los tipos de tarjetas y pruebas, a la vez que participaban en su resolución.

Al encontrarse en la misma aula, la explicación para los jugadores de esta partida fue exactamente igual que para los jugadores de la segunda partida.

El juego se sucedió de la siguiente manera:

Comenzó el primer turno el equipo 1, al tener entre sus filas al miembro más joven. Se observaron un total de seis tarjetas y se realizaron tres pruebas, una el equipo 1 y dos el equipo 2.

A pesar de conseguir las dos llaves necesarias para avanzar hacia el castillo, el equipo 2 no pudo realizar la prueba final, pues como medida desesperada y valiéndose de su enemistad con el alumno G2, el alumno A1 realizó un duelo contra el equipo contrario, a lo cual el equipo 2 respondió, enzarzándose así hasta el final de la partida en varios duelos.

En este caso nos centraremos en las explicaciones que dieron los alumnos que ya habían probado el juego, a los demás jugadores para resolver las diferentes tarjetas:

- *Tarjeta con una función asociada a una ecuación* (Equipo 1)

Explicación de A1: "El profesor dice que esto de aquí quiere decir función (señalando a f(x), entonces lo que hay que hacer es resolver la ecuación que sale cuando esto (señalando a 5x-15) es 0, entonces ponemos 0=5x-15"

- *Tarjeta con tabla de valor de una función asociada a una ecuación* (Equipo 2)

Explicación de B2: "Lo que hay que buscar es lo que está encima del cero"

A pesar de que lo que B2 dice no es muy explicativo, F2 entiende lo que hay que hacer "Si esto a dicho A1 que es la función, y tiene que ser cero, la x es el cuadradito de encima".

- *Tarjetas con una ecuación formada con bolas* (Equipo 1)

La explica el alumno B2: "Es como ir simplificando poco a poco, lo que haces en un lado lo haces en el otro. Y lo que hay que hacer es dejar sola una bola negra en un cuadrado, como si fuera una x".

- *Tarjeta con tabla de valores de los miembros de una ecuación* (Equipo 2)

Explicación de B2: "Hay que mirar donde los dos miembros son iguales, igual que cuando te aseguras de la solución, que te tiene que quedar lo mismo en los dos lados de la ecuación."

- *Tarjetas con una ecuación formada en una balanza* (Equipo 1)

Explicación de A1: "Hay que ir cogiendo pesas hasta que en un plato solo quede una pesa con x, pero dejando siempre esto (la balanza) equilibrado. Si no hay equilibrio es que algo has hecho mal"

- *Tarjetas con una ecuación simbólica* (Equipo 2)

Para esta última tarjeta no fue necesaria dar ninguna explicación, el alumno F2 la resolvió rápidamente.

Pasamos ahora a observar cómo se resolvieron cada una de las tres pruebas que aparecieron:

- *La tabla maldita* (Prueba de tabla de función, resuelta por el equipo 1)

La resuelve únicamente el alumno A1 sin ayuda del resto de su equipo. Al entender cómo funcionan este tipo de tablas no necesita explicaciones y se pone a resolverla. Tras hacerlo le pido que me explique como lo ha hecho.

"A ver, pues donde pone f en la fórmula ponemos este número (señalando al primer valor de f que aparece en la tabla), y donde pone x ponemos el de arriba, y como salen dos incógnitas tenemos que hacer un sistema así que ponemos otra ecuación con estos números (señalando la segunda columna)."

• *El ermitaño solitario* (Prueba con el tablero de bolas, resuelta por el equipo 2)

G2 quiere resolver la ecuación directamente, sin utilizar el tablero de bolas, pero al haber resuelto esta misma prueba en la partida anterior, el alumno B2 les explica a sus compañeros como resolverla: "Por ejemplo, las negras son las x, y los números las blancas, y hay que ir quitando lo mismo de ambos lados, así, ¿veis?"

Para el segundo apartado el alumno G2 indica que se puede hacer la ecuación que piden poniendo el doble de bolas de las que pusieron al principio, pero esto no es válido, y el alumno F2 crea con en el tablero con las bolas la ecuación: $4x=2x+2$.

• *El astrólogo equivocado* (Prueba de función asociada a una ecuación, resuelta por el equipo 2)

Escriben directamente $0=4x-12$, pero les cuesta dar una razón de porque la ecuación $4x-10=2$ no puede obtenerse de esa función. Yo les explico que no pueden obtenerla pongan los números que pongan en un miembro o en otro, pero siguen sin comprenderlo. Finalmente F2 determina que no se puede obtener simplemente porque no son ecuaciones equivalentes tras calcular la solución de cada ecuación.

Para el segundo apartado obtiene dos ecuaciones equivalentes, la primera dividiendo por dos la ecuación inicial, y la segunda multiplicando ésta por cuatro.

En cuanto a los duelos, se realizaron tres, y en la siguiente tabla se encuentra un resumen de las ecuaciones propuestas:

Equipo que inició el duelo	Ecuación propuesta al equipo 1	Ecuación propuesta al equipo 2	Equipo ganador
Equipo 1	$13x+9=8+5x-2$	$10x-8=5x+6$	Equipo 2
Equipo 2	$5x-12=2x+6$	$3+2x=6-5x$	Equipo 1
Equipo 1	$10x-8=7+3x$	$8x-9=4-6x$	Equipo 1

Las mayoría de las ecuaciones se dijeron al azar, aunque tras las primeras se les pidió que plantearan ecuaciones más sencillas, y que ellos supieran resolver de ante mano. La mayoría de las ecuaciones fueron propuestas por los alumnos A1 y G2.

5.2. Análisis de los cuestionarios

En este apartado observaremos las respuestas que dieron los alumnos a las preguntas del cuestionario que se les entregó tras cada una de las partidas, analizando las respuestas pregunta a pregunta.

1. A la pregunta sobre qué les gustó más del juego la mayoría de los alumnos dieron diferentes tipos de respuestas, los tipos de preguntas, los materiales, la forma de conseguir puntos de movimiento, etc., aunque son varios los que coinciden en señalar que lo que más les gustó fue poder trabajar en equipo, lo cual no sorprende, debido a la necesidad que tienen los jóvenes de esa edad a realizar actividades en grupo, el apego que se tienen los unos a los otros, y las mínimas oportunidades que se les suele brindar en la mayoría de las ocasiones durante las clases de Matemáticas para trabajar en equipo.

Dejando de lado las respuestas en las que escriben que fue perder la partida, o simplemente nada, lo que menos les gustó, las respuestas más repetidas que encontramos nos hablan sobre las tarjetas con enunciados de problemas, al ser lo que más les cuesta y más difícil les parece.

2. Sobre que añadirían al juego, aunque se obtienen diferentes tipos de respuestas la mayoría tratan sobre añadir elementos que alarguen la duración del juego, o que les permitan tener una mayor participación en la partida (algunos se quejan de no poder hacer nada mientras el otro equipo resuelve pruebas o tarjetas, aunque en realidad en ese momento su cometido es también resolver lo mismo que el equipo contrario para asegurarse de que la respuesta que dan es correcta), hablan sobre que se tengan que conseguir más llaves para abrir el castillo, que en los duelos se puedan apostar llaves (lo cual al parecer les motivaría mucho más a realizarlos que un único turno extra) o directamente que algunas pruebas sean duelos, en los que se entregue una ecuación y cada equipo elija a un miembro para resolverla y gane la llave quien antes solucione la ecuación.

Más de la mitad de los encuestados no cambiarían nada del juego, les gusta tal y como es, pero el resto quitaría la prueba final, no porque les parezca una prueba incoherente o imposible, sino más complicada que el resto de pruebas (lo cual es lógico al ser la prueba que te da acceso a ganar la partida), aunque si comentan que no la eliminarían simplemente y con llegar al castillo se ganaría, están de acuerdo en realizar una prueba final, pero la cambiarían por una más fácil.

3. De nuevo, en respuesta a la pregunta de qué tarjeta o prueba les resultaba más difícil, los alumnos coinciden en lo ya mencionado, por una parte la prueba final, al ser más larga y complicada que el resto (lo que más parece entrañar para ellos dificultad es crear un enunciado de la nada), y por otra las tarjetas con enunciados de problemas, al ser para lo que menos capacitados se encuentran.

4. El 100% de los alumnos asegura que les gustó encontrar diferentes tipos de casillas en el tablero, pues esto hace más entretenido el juego, pero a la hora de hablar sobre los tipos de casillas nos encontramos gustos de todos los tipos, a unos les gustan los bosques porque con ellos conseguían evitar completamente que el otro equipo les propusiera un duelo, las montañas por que hacen el juego más complejo al querer evitarlas en la mayoría de las ocasiones y tener que elegir que caminos mejores se pueden seguir que atravesar una montaña, las casillas de agua porque sirven de barrera entre los equipos, obviamente las casillas especiales al ser donde pueden encontrar las llaves, y sorprendentemente un alumno también menciona las praderas y desiertos pues le permitían moverse sin impedimentos. Tras las respuestas a las preguntas anteriores era de esperar que ninguno mencionara las casillas del castillo.

Es interesante observar la inventiva que tienen estos alumnos a la hora de crear tipos de casillas, mucho mayor que la observada para crear ecuaciones. Hablan sobre casillas que te quiten el resto del movimiento que te quede, otras que te obliguen a retroceder dos casillas, algunas en las que las ecuaciones tengan que haya que resolver sean más complicadas, e incluso algunos crean un tipo de casilla que encajaría con la imagen del tablero, casillas de arenas movedizas (que te hacen perder tres turnos) y casillas de fuego (si no resuelves la tarjeta que robes en un tiempo cronometrado, pierdes el turno).

5. Las respuestas más repetidas sobre lo que han aprendido en el juego señalan el resolver ecuaciones de maneras diferentes (uno de los principales objetivos del juego parece cumplirse).

También encontramos varias respuestas sobre aprender a trabajar en equipo, que nos hablan de que así se trabaja mucho mejor pues se pueden ayudar los unos a los otros cuando alguien no sabe algo, y un par de alumnos señalan haber entendido mejor como resolver problemas.

6. Hablamos ahora sobre uno de los objetivos centrales para el cual se creó el juego, mejorar la perspectiva, conocimientos y comprensión de los alumnos acerca de qué es una ecuación. El 50% de los alumnos dan una respuesta mejor estructurada que la obtenida al comienzo del tema de ecuaciones, ligeras variaciones de "Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, formadas por números e incógnitas". Una respuesta que podríamos considerar como correcta, pero que no acaba de mostrar que se llega a entender la complejidad y utilidad real de una ecuación. Sin embargo, el otro 50% nos ofrece unas definiciones tal vez no tan bien expresadas, pero que se acercan más al concepto de ecuación que nosotros defendíamos, y que muestra una mayor comprensión de éste:

"Es una cosa que te permite conocer un número que no sabes"
"Es una expresión que relaciona un número que no conoces con otros que si conoces"
"Es una expresión algebraica que te da la relación entre dos objetos"
"Es una expresión con la que se pueden resolver problemas"
"Es un expresión con la que puedes hallar la solución de un problema despejándola"

En las tres primeras definiciones se puede observar el reflejo de la utilización de los materiales manipulativos durante el juego, ante todo la balanza en los dos primeros casos y el tablero de bolas en el tercero. Mientras que las dos últimas definiciones están además claramente influidas por la resolución de enunciados mediante ecuaciones.

7. En ninguna de las tres partidas aparecieron dos tarjetas que tuvieran la misma ecuación en ellas, aunque es muy posible que aun habiendo aparecido, la mayoría de los alumnos, por no decir todos, hubieran pasado por alto ese detalle, al estar completamente concentrados en obtener puntos para moverse. Y no decimos todos pues un estudiante menciona que no le apareció ninguna ecuación repetida, pero si una semejante a otra, con lo que sí estuvo atento a las similitudes entre las ecuaciones de las tarjetas que aparecían.

8. El 80% de los alumnos cuenta hasta seis formas de mostrar una ecuación, mencionándose siempre la normal (simbólica), con bolas, con una balanza, en una gráfica, en una tabla y en problemas (también mencionado como: con letras). Ninguno de los encuestados hace mención a las funciones, bien porque no les prestaron atención a la relación que se mencionaba en las tarjetas, o bien porque a pesar de observarla no les pareció una forma de mostrar una ecuación, sino simplemente un tipo de función. El resto de los alumnos malinterpretaron la pregunta, y señalaron las diferentes formas de resolver una ecuación simbólica que habían visto en el juego, ante todo basándose en la prueba *La disputa de los hermanos.*

9. Ningún alumno fue capaz de aportar una nueva forma de dibujar las ecuaciones. Un 20% de los encuestados determinan que no existe ninguna otra forma, un 40% simplemente señalan que no conocen ninguna otra, por lo que no saben si existen o no, otro 20% afirma que deben existir, pero que no conocen ninguna otra. El resto mencionan la existencia de otros tipos de ecuaciones, que no de formas de dibujarlas, hablan de ecuaciones de grado mayor que uno.

10. Respecto a con qué forma les resulta más fácil resolver una ecuación, la mitad de los alumnos señalan la forma de representación simbólica, denominada por ellos como la forma "de despejar", argumentando que es la forma más normal y habitual, y ante todo que es la primera que se les enseñó. De los alumnos restantes, el 80% señalan las formas de representación manipulativas. Un 30% de estos alumnos se inclinan por el uso del tablero de bolas, otro 30% por el uso de la balanza, y los restantes señalan ambas formas. Según ellos, resolver las ecuaciones de forma práctica o como un juego les permite encontrar con mayor facilidad la solución de la ecuación. Los demás alumnos se inclinan por las tablas de valores, al tener tan solo que observar un par de datos

para encontrar la solución, sin necesidad de realizar ningún tedioso proceso.

11. Por último, la mitad de los encuestados señalan que habrían resuelto las tarjetas y pruebas de igual forma que lo hicieron sus oponentes, pero el resto habrían resuelto las ecuaciones de forma un poco distinta, encontrando más rápidamente la solución de la ecuación. Nos hablan de probar números hasta obtener la solución (tanteo), en el caso de tarjetas de funciones probando números que hicieran que el resultado de las operaciones se acercara cada vez más a 0, y de igual forma en el caso de las tarjetas de ecuaciones clásicas, de forma que ambos miembros se fueran acercando cada vez más. Otros directamente habrían resuelto las ecuaciones mentalmente, sin necesidad de realizar los cálculos sobre el papel.

5.3. Opiniones de un docente experimentado

En este tercer apartado del quinto capítulo, analizaremos los datos obtenidos en la tercera parte de la recogida de datos, en la que se realizó una entrevista al profesor de Matemáticas del grupo con el que se probó el juego, y que estuvo presente como observador durante todas las partidas.

En esta parte observaremos los puntos fuertes y débiles del material desde el punto de vista de un profesor con amplios conocimientos de la materia, de igual forma que su opinión sobre el uso de juegos en el aula de Matemáticas y de la utilización de diferentes tipos de representaciones para explicar un mismo concepto.

A continuación se muestra un pequeño resumen de dicha entrevista, a la vez que se analizan los comentarios realizados.

La entrevista comenzó con su apreciación acerca de realizar un juego tras acabar el tema, lo cual le parecía muy interesante, ya que muchos alumnos muestran así más interés en los ejercicios, mucho más que cuando tienen que hacer un ejercicio que se les propone del libro (lo cual observó ampliamente también con este juego). Piensa que en gran parte esto es debido a la competición que hay entre ambos equipos.

El juego también le pareció una buena forma de trabajar diferentes aspectos de las ecuaciones lineales, una buena forma de incentivar a los alumnos que no suelen trabajar en clase, y que incluso, al ver éstos como otros resuelven las preguntas del juego, podrían aprender de una mejor forma.

Entre los beneficios que podría tener el juego para los alumnos, destacó la mejora de la comprensión de la resolución de ecuaciones, la ayuda que podía suponer para aprender a plantear mejor los problemas, y el trabajo en equipo.

Sobre esto último señaló que lo mejor sería que los equipos fueran de dos miembros cada uno, debido a que con un número superior la participación de cada miembro disminuye e incluso en algunos casos desaparece.

En cuanto al momento en el que llevar el juego al aula, le pareció que jugarlo antes de realizar el examen del tema sería lo más adecuado, pues de realizarlo después no se podría observar realmente la ayuda que el juego aporta, pues ya habrían estudiado para el examen. Comentó que lo mejor sería el día anterior al examen, pues podría ser una buena forma de repasar en lugar de hacer ejercicios en clase.

Como parte negativa del juego únicamente señaló la aparición de algunas preguntas que los alumnos no habían trabajado en clase, pues en un aula con únicamente dos grupos, es decir, 8 alumnos (que es el máximo número de jugadores que hubo a la vez), se pueden resolver las dudas y explicar lo necesario en el momento, pero en un aula de 30 alumnos (al menos 6 grupos) es necesario que los jugadores tengan mayor autonomía, necesitando la supervisión del profesor en unos pocos momentos puntuales.

A la hora de llevar el juego a un aula cualquiera, y al igual que en la tercera partida, los alumnos habrán recibido todas las explicaciones necesarias antes de comenzar a jugar, por lo que el profesor no se enfrentará a tal problema.

Indicó una manera para dotar de completa autonomía a cada grupo, la creación de una hoja de resultados y la numeración de las tarjetas de movimiento. De esta forma, cuando fuera necesario determinar si una solución es correcta o no, los jugadores únicamente tendrían que mirar el número de la tarjeta y buscarlo en la lista de resultados, aunque esto haría que el factor comprobación por parte del equipo contrario disminuyera hasta casi reducirse por completo.

A pesar de ser una buena idea, la hoja de resultados no debería estar siempre a disposición de los equipos, sino que lo mejor sería que ese alumno supervisor que comentábamos en el apartado de *El juego en el aula*, del capítulo tres, fuera el encargado de buscar las soluciones en la lista en el único caso de que los diferentes equipos no se pusieran de acuerdo a la hora de verificar la solución.

En cuanto al sistema de juego, no creyó que fuera complicado ni supusiera ningún problema para los alumnos una vez comenzaron a jugar, pero si señaló que siempre sería oportuno realizar una pequeña partida de muestra, en la que los alumnos observaran un par de turnos en los que se hace uso de las reglas que se les han explicado, antes de que ellos las pusieran en práctica.

Si el aula dispusiera de un proyector se podría realizar una pequeña presentación mostrando esto, pues es complicado tener a 30 alumnos atentos alrededor de una misma mesa, ni sería viable realizar una partida de muestra en cada una de las mesas de juego.

Acerca de que prueba o tarjeta creía que podría entrañar mayor dificultad para los alumnos mencionó la tarjeta de la representación gráfica, pues para él era imposible que los alumnos la resolvieran sin una explicación previa, aunque también señaló que una vez explicada no deberían tener ningún problema.

La tarjeta que más le gustó fue la del tablero de bolas, debido a que la forma de resolverla podía ser muy intuitiva para los alumnos y mientras realizaban los pasos en el tablero interiorizaban la forma de resolverla algebraicamente.

Por último se le preguntó su opinión acerca de la utilización de diferentes tipos de representaciones para explicar el mismo concepto, a lo cual respondió que le parecía muy adecuado mostrar un mismo concepto desde diferentes perspectivas para que los alumnos se desarrollen mejor en las matemáticas, pues les permite ver todas las relaciones que existen.

A pesar de ello, también señaló la imposibilidad de mostrar, en cada uno de los diferentes temas, cada concepto mediante diferentes representaciones, debido a la falta de tiempo que siempre aqueja a los profesores de Matemáticas, al ser el temario a explicar muy extenso, y tener por ello que centrarse en lo más importante. Aún así le pareció correcto emplear juegos de este tipo, ante todo para afianzar conocimientos, pues es una forma con la que el tiempo que se puede dedicar a repasar el tema, se emplea en repasarlo y además en mejorar los conocimientos adquiridos.

5.4. Discusión de resultados

En este último apartado del capítulo realizamos un resumen de los resultados obtenidos a partir de los análisis anteriores sobre los datos recogidos mediante cada uno de los diferentes procesos.

Comenzamos señalando el buen funcionamiento del juego en clase, el cual solo se vio ralentizado al no haberse explicado con anterioridad a su puesta en práctica cada uno de los diferentes tipos de representaciones y tarjetas que se pueden encontrar en él. Pero esta lentitud, como se observó con la tercera partida en la que algunos alumnos ya conocían las tarjetas, se verá ampliamente reducida una vez se lleve a cabo el juego en un aula en la que se hayan dedicado unos minutos a explicar cada tipo de tarjeta.

Comprobamos que la mecánica del juego, lo que se debe hacer para ganar y las acciones que se pueden realizar en cada uno de los turnos, se entiende en seguida, y de haber algún jugador que no recuerde alguna norma concreta, siempre existe algún miembro en su equipo capaz de resolver sus dudas, haciéndose de esta manera innecesario entregar una hoja resumen del juego a cada equipo.

A pesar de que algunos alumnos, como unos pocos de los participantes de la segunda partida, son capaces de comprender lo que se pide en cada tarjeta sin necesidad de que se les tenga que aclarar, las explicaciones previas al juego de las tarjetas se hacen completamente necesarias para dotar a cada una de las partidas de un mayor dinamismo, y no tengan que ser detenidas hasta que el profesor pueda llegar hasta su mesa y atender sus dudas.

El conocimiento que poseen los alumnos con los que se ha probado el juego sobre los sistemas de ecuaciones puede parecer en principio una ventaja que no poseen los alumnos de nivel de segundo de Enseñanza Secundaria Obligatoria, pero a partir de lo visto durante las partidas realizadas podemos señalar que en la mayoría de las ocasiones no es una ventaja, sino un inconveniente, ya que por ejemplo todos ellos intentan enfrentar sencillos enunciados, que pueden ser resueltos mediante el uso de una única variable, utilizando dos variables diferentes, complicándose así su resolución.

Durante la realización de cada una de las partidas, los participantes se mostraron muy motivados al tener que enfrentarse a sus compañeros de clase y poder demostrar que eran mejores que los miembros del equipo contrario resolviendo ecuaciones, lo que hizo que mostraran mayor interés en el juego y estuvieran más atentos a las aclaraciones de cada una de las tarjetas, pudiendo así comprender mejor las explicaciones dadas.

También se vieron motivados no solo por competir contra otros compañeros, sino por participar como parte de un equipo en el juego, al poder así dar una mayor cantidad de respuestas correctas que si jugaran solos, y pudiendo preguntar las dudas que les surgían y obtener respuestas más cercanas a su nivel de comprensión.

A partir del análisis de las partidas y los cuestionarios, podemos ver también la valía del juego como material educativo, al observar que son capaces de reconocer diferentes formas de representar las ecuaciones y de utilizarlas para resolver ecuaciones de distintas maneras. Vemos también como encontrar diferentes formas de resolver una ecuación les hace pensar en nuevas estrategias para esto mismo, y como mejoran sus razonamientos y su comprensión de los enunciados al trabajar en equipo.

Aunque cabe destacar que ningún alumno observó las funciones asociadas a una ecuación como otra forma más de representar una ecuación, esto puede ser debido a las reducidas explicaciones que se dieron de éstas, o a no haber trabajado aún con gran intensidad las funciones.

Podemos ver como las representaciones más útiles para los estudiantes a la hora de encontrar la solución de una ecuación son las representaciones manipulativas y la representación simbólica clásica, a pesar de que las representaciones numéricas y gráficas que se pueden encontrar en el juego muestran directamente la solución.

Al ser la primera forma de la que se les muestra las ecuaciones y la que más se trabaja, pocos alumnos tienen dificultades a la hora de resolver una ecuación mostrada en forma simbólica, aunque, como es el caso del alumno C, los alumnos que encuentran dificultades se motivan con los materiales manipulativos y son capaces de resolver ecuaciones con ellos perfectamente.

Ejemplificándolo con la prueba de *La disputa de los hermanos,* destaca el hecho de que los alumnos toman siempre como cierta o mejor la primera explicación que reciben sobre un contenido (como es en este caso la resolución de ecuaciones con paréntesis) y tras observar una nueva y distinta forma de trabajar el mismo contenido, continúan aferrándose a la primera que se les explicó, a veces hasta catalogando a la nueva forma como incorrecta, cuando es tan válida, y desde ciertos puntos de vista mejor, que la explicada en principio.

Las tarjetas que supusieron mayor dificultad fueron, como se esperaba, las tarjetas con enunciados de problemas, pero aún con ello, trabajarlas en grupo y en un entorno de entretenimiento permitió que los alumnos aprendieran a realizar mejor los problemas.

La reacción a las tarjetas en las que se pide inventar una ecuación dada su solución sorprende, ya que primero se ven incapaz de crear una ellos mismos, y al intentarlo siempre dicen primero una ecuación al azar y ven si su solución coincide con el número escrito en la tarjeta, tras lo cual intentan inventar una ecuación con muchos términos o números muy altos, hasta que se les pide una ecuación que sea sencilla (parecen siempre pensar en lo más complicado, y no pararse a pensar en que lo que se les está preguntando puede ser algo simple). Y aún así, dentro de las ecuaciones sencillas, parece que les resulta más fácil pensar en ecuaciones del tipo $a\mathrm{x}=b$, cuando en principio cabría pensar que son aún más sencillas de construir las ecuaciones del tipo $\mathrm{x}-c=0$, con c la solución de la ecuación.

De entre las pruebas que se podían realizar en las casillas especiales, solo una de ellas les causó problemas, siendo las restantes pruebas accesibles para todos los equipos, aunque algunas un poco largas de realizar.

La única prueba que supuso un problema para uno de los equipos fue la prueba de *El astrólogo equivocado,* prueba en la que se trabaja con una función asociada a una ecuación, poniéndose de nuevo de manifiesto que este tipo de representación merece una explicación más detallada que la que se ofreció durante las partidas.

En cuanto a la prueba final, todos los equipos que consiguieron llegar hasta ella fueron capaces de resolverla, pero costándoles mucho esfuerzo y trabajo, ante todo les costó inventar de la nada un enunciado que pudiera resolverse mediante una ecuación. Una vez formaban dicho enunciado no encontraron muchas dificultades a la hora de representar de diferentes formas la ecuación que modelizaba ese enunciado.

Finalmente, dejando a un lado los problemas ocurridos debido a la incomprensión momentánea de ciertas tarjetas, entre los problemas que pueden surgir durante el juego nos encontramos con duelos que pueden ser en unos casos interminables y en otros inexistentes, y posibles discusiones a la hora de determinar si el valor que se da como solución es correcto.

Tanto los alumnos como el profesor nos ofrecen posibles soluciones a algunos de estos problemas:

Para evitar largas discusiones acerca de si una solución es válida o no, se pueden numerar las tarjetas, y crear una lista en la que se encuentren los resultados de cada una de las tarjetas junto a su número. Durante el juego, el supervisor de la partida puede consultar esta hoja para cerrar este tipo de debates.

Para que la opción de plantear un duelo les parezca más apetecible, la recompensa por ganar el duelo puede ser mayor, como por ejemplo conseguir una de las llaves del equipo contrario. Esto daría una nueva perspectiva al juego, pues los equipos se perseguirían más y pensarían en estrategias de movimiento más interesantes incluso que las ya empleadas. También aportaría mayor dinamismo a la partida, pudiéndose completar más rápidamente, incluso permitiendo realizar en una hora de clase partidas en las que el número de llaves necesarias para abrir el castillo fuera tres en lugar de dos, haciéndose necesario de esta forma la resolución de un número mayor de tarjetas de movimiento y con ella la práctica realizada.

En el caso de los duelos interminables, como los ocurridos en la tercera partida, que solo acaban tras sonar la campana que señala el final de la clase, simplemente sería necesario determinar un número máximo de duelos que se pueden realizar seguidos, lo mejor sería dos, para que cada equipo tenga la posibilidad plantear alguno antes de que se separen.

6. Conclusiones

Este último capítulo está dedicado a recoger las conclusiones obtenidas a cerca del proceso de diseño y puesta en práctica del juego previamente presentado.

Consideramos que, casi desde el inicio de la escolaridad, los estudiantes comienzan a mostrar diferentes procesos de aprendizaje. Unos pocos estudiantes captan rápidamente los conceptos y avanzan sin ningún tipo de problemas, algunos tienen un ritmo más lento, debido a ciertas dificultades para comprender determinados aspectos del aprendizaje matemático (dificultades de razonamiento o con el significado de los conceptos), y otros poseen, además de unas dificultades más serias que las de estos últimos, una actitud negativa hacia las matemáticas.

Un elemento siempre presente en la enseñanza de las matemáticas, es que la mayoría de los conceptos en ellas son complejos para los estudiantes, tengan mayores o menores capacidades de comprensión. Si esto no se tiene en cuenta a la hora de explicar la materia de Matemáticas se pueden crear muchas dificultades. Para ayudar a que no estas se formen, es importante que los profesores muestren tantas características como puedan de cada idea o concepto que los estudiantes deban comprender.

Como vimos en el primer capítulo, las diferentes representaciones que se pueden mostrar de un mismo concepto ofrecen diferentes aspectos del mismo, y por eso los estudiantes necesitan una variedad de representaciones que refuercen su comprensión sobre un tópico en particular.

La comprensión de un concepto por parte de un estudiante se pone de manifiesto en su capacidad de reconocerlo en diferentes sistemas de representación, manipularlo dentro de un sistema de representación dado y traducirlo de un sistema a otro.

En el caso de las ecuaciones de primer grado, el paso del estudio de la aritmética al estudio del álgebra conlleva una gran complejidad, debido a su elevado grado de conceptualización. Es decir, para la explicación de las ecuaciones lineales las dificultades se incrementan y la necesidad de mostrarlas mediante diferentes sistemas de representación aumenta.

Todo esto llevó a crear el juego que se ha presentado en este trabajo, con el cual se persigue facilitar la comprensión de las ecuaciones lineales, al mostrarse y trabajarse las diferentes perspectivas de éstas, mediante un material ameno y divertido para los escolares.

Consecución de objetivos

Una vez analizados los datos obtenidos a partir de la observación de varias partidas, los cuestionarios entregados, y los comentarios de un observador experimentado en la docencia, podemos concluir que los recursos didácticos y la utilización de diferentes representaciones facilitan la comprensión de las ecuaciones de primer grado, y en particular que el juego *Tierra de Incógnitas* consigue alcanzar los objetivos para los que se propuso.

Ante todo, podemos observar que los alumnos muestran haber reconocido y aprendido las diferentes representaciones de las ecuaciones de primer grado, saben emplearlas para resolver una ecuación de este tipo, y realizan correctamente la traducción entre diferentes sistemas de representación. Además aportan unas definiciones del concepto de ecuación que muestran la buena comprensión de éstas y de su utilidad.

Observamos como los estudiantes muestran un mayor interés y motivación hacia las ecuaciones, al poder realizar en el juego las diferentes actividades de aprendizaje de formas nuevas y diferentes a las realizadas durante las clases ordinarias, y al poder participar, o más bien competir, con sus compañeros de clase, lo que les hace estar más atentos al juego y a las explicaciones. Incluso los estudiantes que poseían un menor nivel, o un gran desinterés por las matemáticas en general, se vieron estimulados por el material, pudiendo así mejorar los pocos conocimientos que poseían.

El componente del juego como refuerzo para el tema también es destacable, pues permitió recordar los conocimientos adquiridos durante éste y observar los elementos más importantes del tema y que más se deben tener en cuenta a la hora de trabajar con las ecuaciones, como los diferentes elementos que las forman, los pasos para resolver una ecuación en forma algebraica y las diferencias entre variable y solución de una ecuación.

El proceso que solían realizar en clase de mantenerse a la espera tras resolver una ecuación, hasta que el profesor dictara la solución o se resolviera en la pizarra, sin intentar comprobar la solución por sus propios medios, se vio completamente demolido con la realización de las partidas, pues al contrario que en la mayoría de las actividades propuestas en clase, los alumnos siempre comprobaron sus resultados antes de determinar la solución de una tarjeta, y la concentración de cualquiera de los equipos contrarios en ese momento se veía incrementada para asegurarse de que daban la solución correcta. Así fue como la práctica de comprobar la solución de una ecuación se introdujo para los estudiantes en el propio proceso de resolver la ecuación.

Encontrarse con diferentes formas resolver una ecuación, tanto mediante nuevas formas de representación, como con la representación simbólica que siempre se suele utilizar pero con diferentes métodos, permitió a los alumnos comprender mejor el proceso de resolución que normalmente llevaban a cabo, y aprender nuevas estrategias para resolver diferentes tipos de ecuaciones.

Con la realización de las partidas también se consiguió reducir cierto grado de desprecio y de pavor que los alumnos poseían sobre la asignatura de Matemáticas, al poder observar que aprender matemáticas no se reducía a tediosas y repetitivas clase. También influyó en esto encontrar diferentes maneras de resolver las ecuaciones, lo cual les permitiría emplear la que mejor se adaptaba a sus habilidades, pudiendo ser capaces así de resolver las mismas actividades que el resto de compañeros sin quedarse atrás.

Los datos recogidos durante las partidas también pueden ser de utilidad para explicar las diferentes formas de representar las ecuaciones el día anterior a la utilización del juego en clase, ya que en las partidas se pueden observar las dificultades que encontraron los alumnos y como se resolvieron. Además, en la tercera partida comentada, se muestran las explicaciones que dieron los propios alumnos acerca de la resolución de cada una de las tarjetas, pudiendo observar con ellas la forma más sencilla de hacer que las entiendan.

Tras observar la reacción a cada una de las diferentes representaciones de una ecuación por parte de los alumnos, cabe destacar el tablero de bolas, el cual permitió resolver ecuaciones a alumnos que se creían incapaces, o que en ningún momento habían mostrado poseer la capacidad necesaria para resolverlas.

Es por esto que señalamos la gran utilidad del tablero de bolas para iniciar el aprendizaje de las ecuaciones en un primer nivel de la E.S.O., y para la correcta comprensión de las reglas de equivalencia de las ecuaciones (regla de la suma y regla del producto), al poderse seguir con él a la perfección cada uno de los pasos realizados por el profesor al resolver una ecuación, además de ser un material muy intuitivo una vez se ve su funcionamiento. La utilidad del tablero de bolas destaca ante la de la balanza al ser complicado contar con treinta balanzas en una misma aula, mientras que cada alumno puede crear su propio tablero de bolas. La construcción de éstos sería una buena forma de comenzar el tema y que motivaría a los alumnos para las explicaciones posteriores.

Posibles mejoras del material

Tras realizar tres partidas con este juego, y observar los comentarios de los alumnos que probaron el juego y su profesor, podemos encontrar algunas partes del material que necesitarían pulirse o simplemente algunos elementos que sería adecuado introducir para una próxima edición del juego.

Como ya se comentó, sería necesario ofrecer una recompensa mayor al equipo que ganara un duelo, para que éstos se realizaran con mayor frecuencia, aunque en tal caso también reducirse a dos el número de duelos seguidos permitidos. La idea de obtener una llave del equipo contrario haría que una vez ambos equipos poseyeran una llave se enfrentaran en un único duelo, por esto se ha pensado en el diseño de un pequeño mazo formado por 28 tarjetas de "recompensas de duelos", del cual el equipo vencedor podrían robar una tarjeta y obtener los beneficios de ésta, contándose entre los posibles beneficios de éstas unos mucho mejores que el actual, que alentaran a los equipos, y otros peores para que realizar dos simples duelos no acaben con la partida.
Los textos de las tarjetas serían los siguientes:

• No ganáis nada (4 tarjetas)
• Ganáis un punto de movimiento extra para vuestro próximo turno. (6 tarjetas)
• Ganáis un turno extra. (5 tarjetas)
• Guardad esta recompensa hasta que falléis al resolver una tarjeta de movimiento, en ese momento podéis deshaceros de esta recompensa para volver a intentar la tarjeta de movimiento. (6 tarjetas)
• Si el equipo contrario tiene alguna llave debe daros una de ellas. (3 tarjetas)
• Ganáis una llave. (3 tarjetas)
• El número de llaves que tenéis se multiplica por dos. (1 tarjeta)

También sería interesante añadir otra de las propuestas realizadas, una hoja de referencia en la que se puedan encontrar fácilmente las soluciones de cada tarjeta y prueba.

A pesar de que una vez se explican no tienen dificultades, debería variarse el diseño de las tarjetas de tablas de valores, señalándose cada columna de un color diferente, para que fuera más sencillo entender que cada columna se obtiene en función del valor que se le da a la variable.

Tras observar las complicaciones de los estudiantes a la hora de trabajar con enunciados de problemas, llegamos a la conclusión de que éstas deberían poder reforzarse también con el juego, para ello se ha pensado en el diseño de un nuevo tipo de tarjeta de movimiento, la tarjeta de enunciados inversa. Una tarjeta de este tipo contendría una ecuación representada de la forma habitual, y pediría la construcción de un enunciado que se pueda modelizar mediante esa ecuación. Permitiendo así con esa tarjeta mejorar la relación entre ambas representaciones mediante la traducción desde el sistema de representación simbólico al sistema de representación verbal.

Bibliografía

Boletín Oficial del Estado (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. (Vol. BOE Nº 5, pp. 677-773). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007). Orden de 10-8-2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. (Vol. BOJA Nº 171, pp. 23-65). Sevilla: Junta de Andalucía.

Castro, E. y Castro, E. (1997). *Representaciones y Modelización.* En Rico, L. (Coord.), La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria (pp. 95-124). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona – Horsori.

Cedillo, T. (1991). *De la Aritmética al Álgebra: Un panorama de la investigación realizada y algunas perspectivas.* Universidad Pedagógica Nacional. México.

Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Contreras, M. (2004). I*deas y actividades para enseñar álgebra.* Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato.* Madrid: Editorial Síntesis.

De Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza.* En Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas “Isaac Newton” (Ed.), Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) (pp. 49-85). Tenerife: Editor.

Domínguez, E., Hernández, J., Muñoz, M., Palarea, M. M., Ruano, R. y Socas, M. (2006). *Investigación e innovación matemática. Un ejemplo: puzle algebraico.* Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación. Monografía IV, 59-77.

Duval, R. (1996). *Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?* Recherche en Didactique des Mathématiques, 16(3), 349-382.

Filloy, E. and Rojano, T. (1985). *Obstructions to the acquisition of elemental algebraic concepts of teaching strategies.* En Streefland (Ed.), Proceedings of the Ninth Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 154-158). Utrecht, Holanda.

García, D. (2000). *Conversión entre representaciones gráficas y algebraicas del concepto de recta*. En F. Hitt y A. Hernández (Eds.), Experimentaciones en Educación Matemática en los niveles Medio Superior y universitario (pp. 55-57).

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Universidad de Granada.

Hernández, J.; Muñoz, Mª; Palarea, Mª M.; Ruano, R; Socas, M. M. (2008). *Materiales manipulativos para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en la Educación Obligatoria.* Universidad de La Laguna. Tenerife.

Kieran, C. (1988). *Two different approaches among algebra learners*. En A.F. Coxford (Ed.), The ideas of algebra, K-12 (Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 91-96). Reston, VA: NCTM.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987). *Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving.* En C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Universidad de Granada.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1993). *Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations*. Journal for Research in Mathematics Education, 24(3), 217-232.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.

Penalva, M.C.; Torregrosa, G.(2001). *Representación y aprendizaje de las Matemáticas.* En Scripta in memoriam. Homenaje al profesor Jesús Rafael de Vera Ferre (pp. 650–658). Alicante, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Alicante.

Rico, L. (1977a). *Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria.* En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 15-59). Barcelona: Horsori.

Rico, L. (1997b). *Los organizadores del currículo de matemáticas.* En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 39-60). Barcelona: Horsori.

Rittle-Johnson, B. & Star, J. (2007). *Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge?* An experimental study on learning to solve equations. Journal of Educational Psychology, 99(3), 561-574.

Wollman, W. (1983). *Determining the sources of error in a translation from sentence to equation.* Journal for Research in Mathematics Education, 14, 169-181.

Anexos del Trabajo Fin de Máster

"Tierra de Incógnitas"

Un juego didáctico para afianzar los conocimientos sobre las ecuaciones de primer grado.

Trabajo Fin de Máster presentado por

DAVID SÁNCHEZ MEDINA

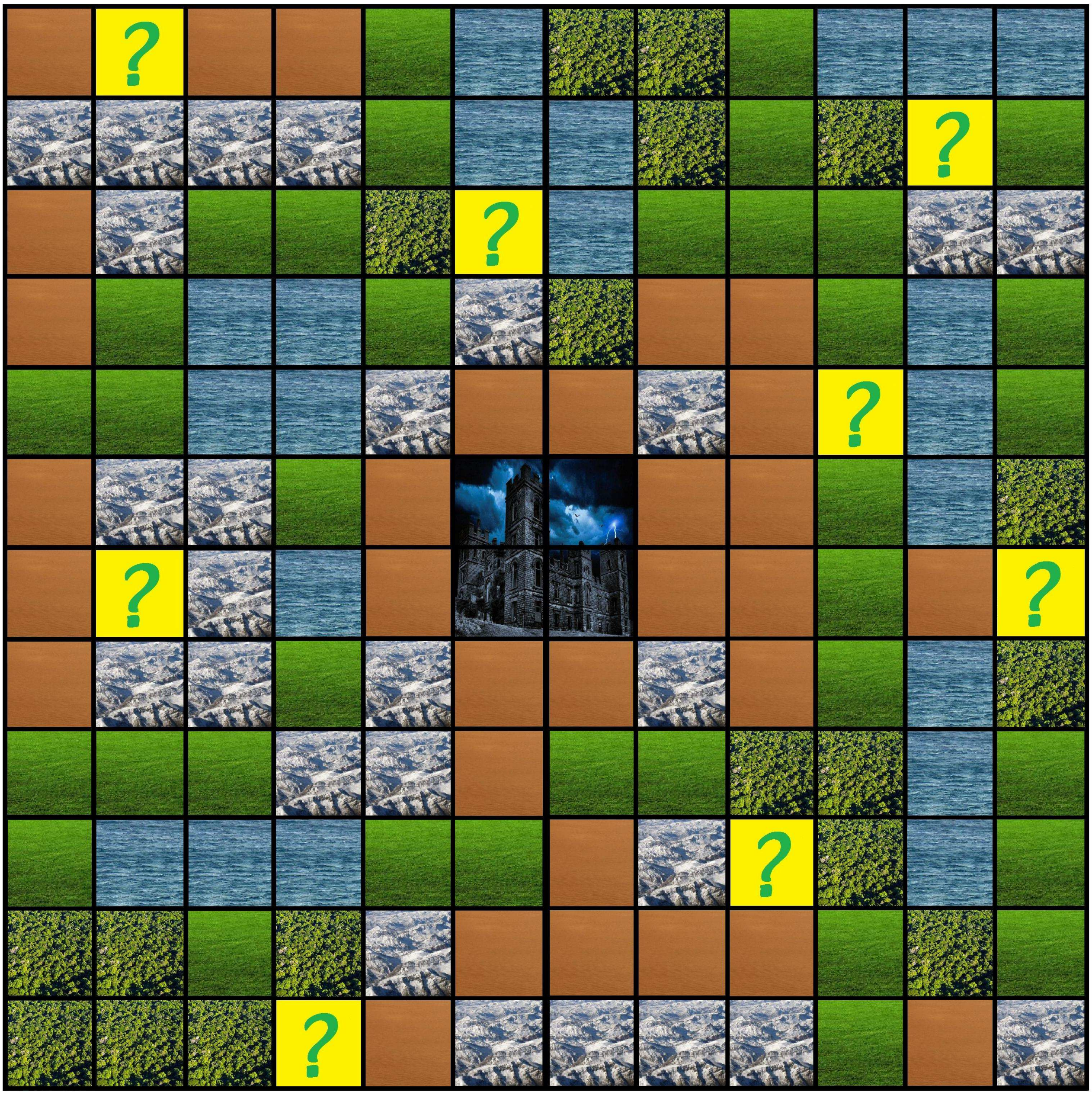
Universidad de Granada

Curso 2011-2012

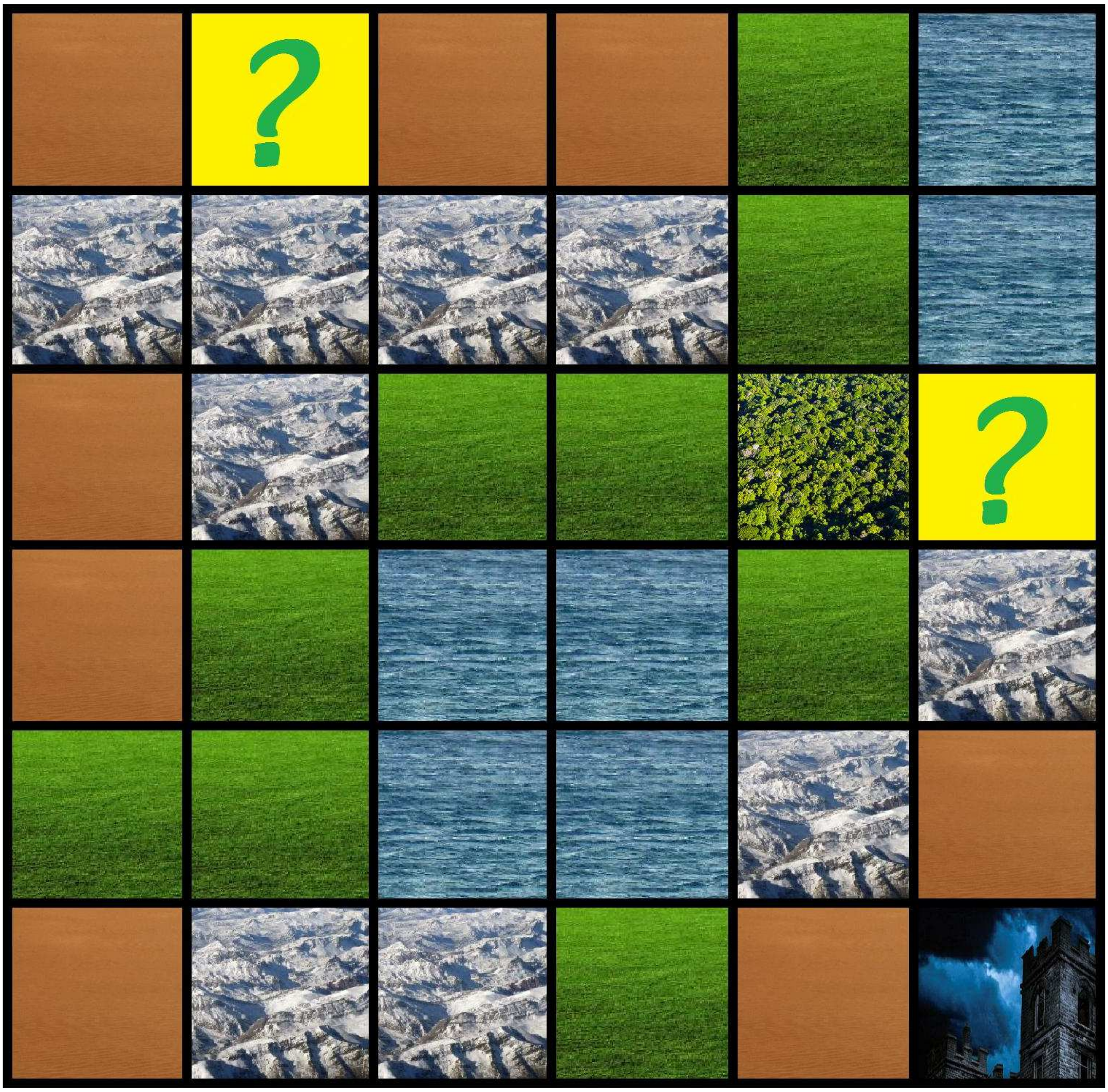
Índice

Anexo 1: Tablero de Juego

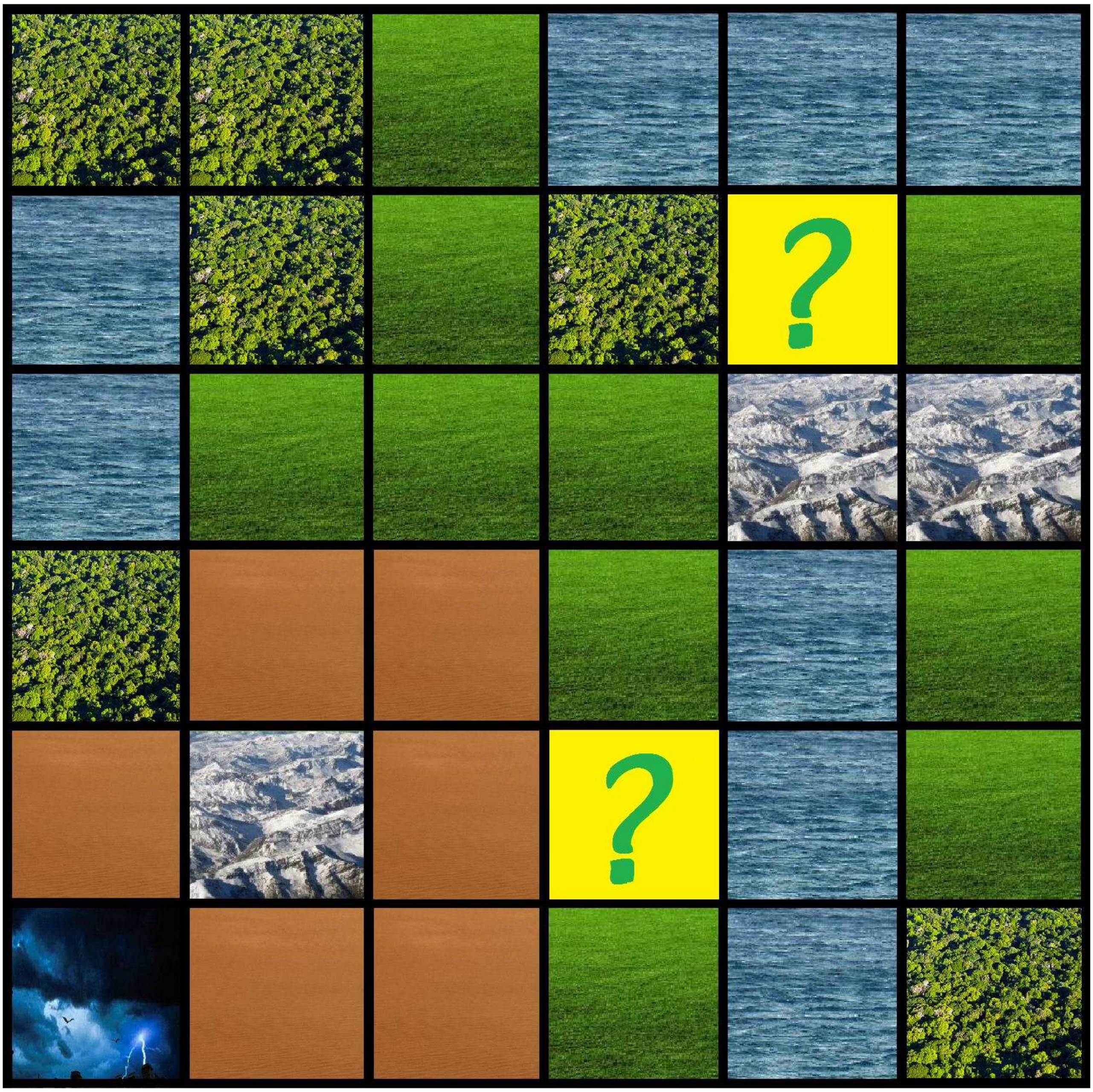
En este primer anexo presentamos una imagen del tablero del juego *Tierra de Incógnitas*. Tras la cual se pueden observar cada una de las cuatro partes que lo forman.



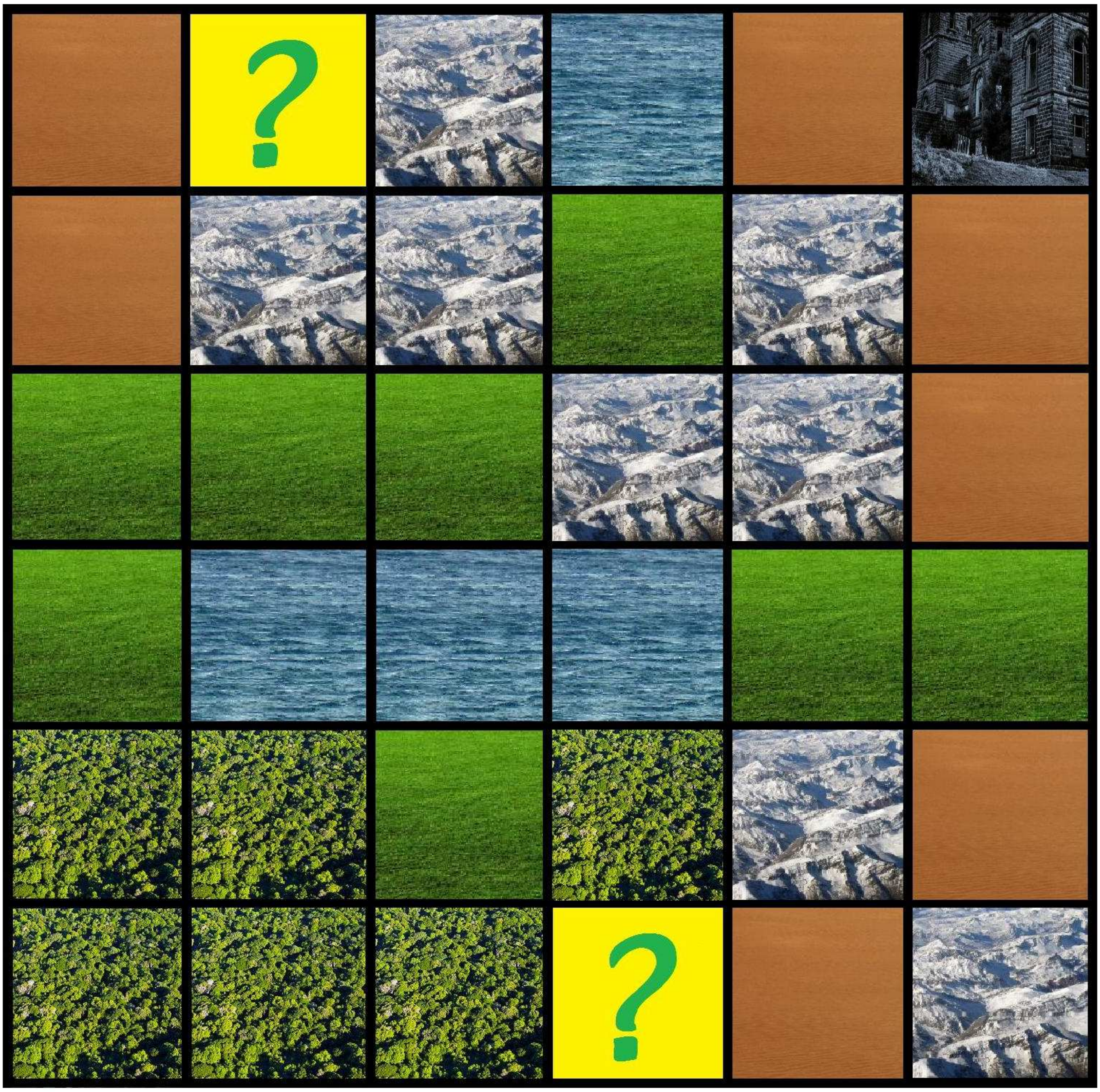
• **Pieza superior izquierda del tablero**



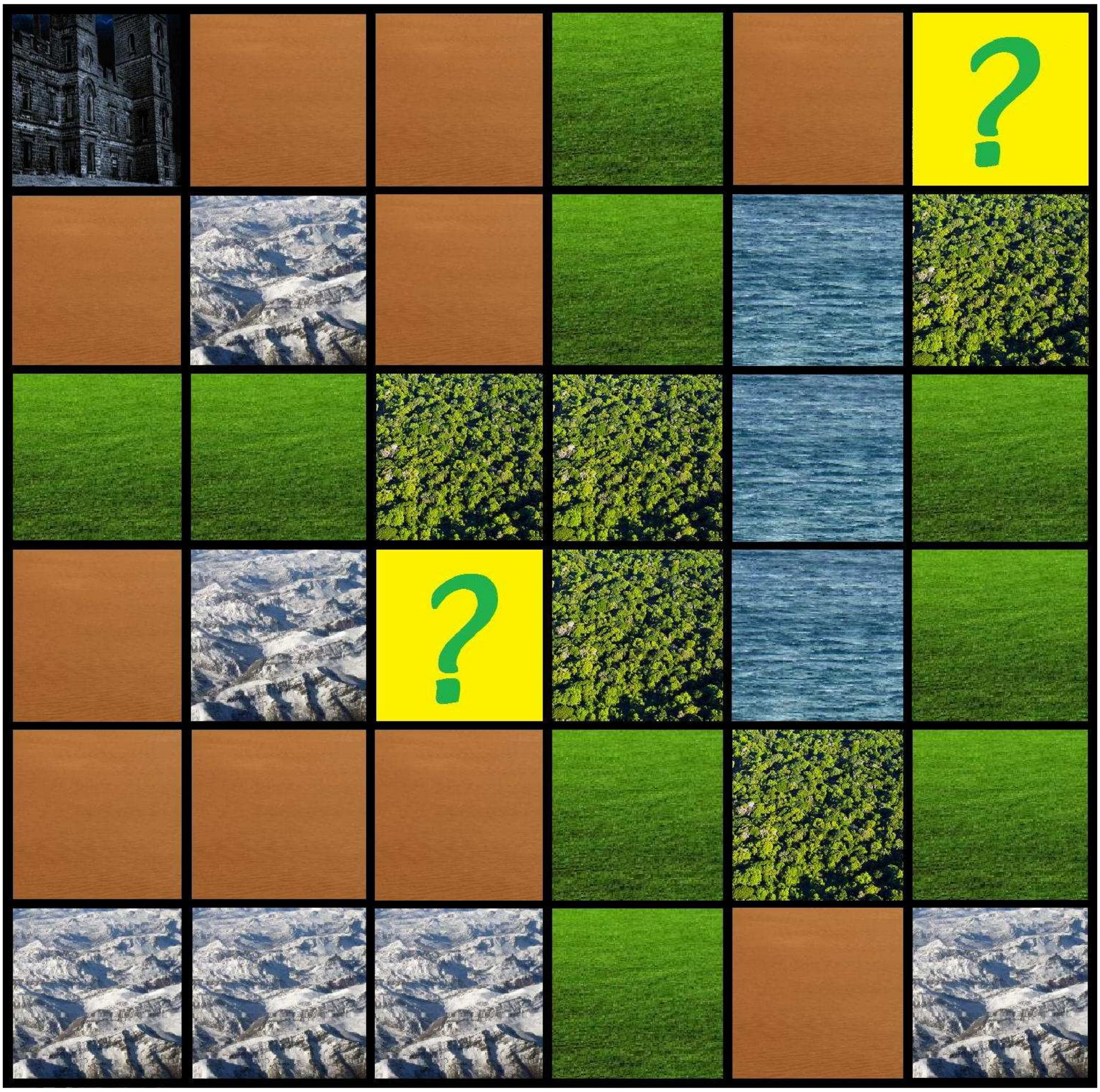
• **Pieza superior derecha del tablero**



• **Pieza inferior izquierda del tablero**



• **Pieza inferior derecha del tablero**



Anexo 2: Tarjetas de movimiento

En este anexo adjuntamos un informe que recoge la cantidad de tarjetas de movimiento de cada tipo que se pueden encontrar en el juego *Tierra de Incógnitas*.

Después se muestran las 72 tarjetas de movimiento que se pueden encontrar en el juego.

Relación de tarjetas

Número de tarjetas según su resultado:

Resultado de la tarjeta	1	2	3	4	5	6	7	0	Infinito	Sin solución	Movimiento ilimitado
Número de tarjetas con ese resultado	10	12	12	13	10	9	1	2	1	1	1

Número de tarjetas según su tipo:

Tipo de tarjeta	Cantidad de tarjetas de ese tipo
Con una ecuación simbólica	8
Con una función asociada a una ecuación	7
Con una ecuación representada de forma gráfica	9
Con un enunciado verbal	9
Con una ecuación formada en una balanza	7
Con una ecuación formada con bolas	7
Con tablas de valores de los miembros de una ecuación	6
Con tablas de valores de funciones asociadas a una ecuación	6
De invención de ecuaciones	6
De ecuaciones incompletas	6
De movimiento ilimitado	1

Soluciones que se pueden obtener en las tarjetas según su tipo:

Tipo de tarjeta	Soluciones de esas tarjetas
Con una ecuación simbólica	1, 2, 4, 4, 5, 6, 7, infinitas
Con una función asociada a una ecuación	1, 2, 3, 4, 5, 5, 0
Con una ecuación representada de forma gráfica	1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, sin solución
Con un enunciado verbal	1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6
Con una ecuación formada en una balanza	1, 1, 1, 2, 2, 2, 5
Con una ecuación formada con bolas	3, 3, 4, 4, 5, 6, 0
Con tablas de valores de los miembros de una ecuación	2,3,3,4,6,6
Con tablas de valores de funciones asociadas a una ecuación	1,2,3,4,4,5
De invención de ecuaciones	1, 2, 3, 4, 5, 6
De ecuaciones incompletas	1, 2, 3, 4, 5, 6
De movimiento ilimitado	Se puede elegir el número

Aquí tenéis escrita una función asociada a una ecuación. El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de x que hace 0 esta función.

$$f(x) = 2x-2$$

Aquí tenéis escrita una función asociada a una ecuación. El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de x que hace 0 esta función.

$$f(x) = x-5$$

Aquí tenéis escrita una función asociada a una ecuación. El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de x que hace 0 esta función.

$$f(x) = 3x-6$$

Aquí tenéis escrita una función asociada a una ecuación. El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de x que hace 0 esta función.

$$f(x) = 321x$$

Aquí tenéis escrita una función asociada a una ecuación. El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de x que hace 0 esta función.

$$f(x) = 2x-10$$

Aquí tenéis escrita una función asociada a una ecuación. El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de x que hace 0 esta función.

$$f(x) = 5x-15$$

Aquí tenéis escrita una función asociada a una ecuación. El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de x que hace 0 esta función.

$$f(x) = 4x-16$$

Aquí tenéis una ecuación, el número de casillas que os podéis mover coincide con su solución.

$$2(x+2)-2=2x+2$$

Aquí tenéis una ecuación, el número de casillas que os podéis mover coincide con su solución.

$$\frac{4x}{3}-\frac{3x}{4}=\frac{49}{12}$$

Aquí tenéis una ecuación, el número de casillas que os podéis mover coincide con su solución.

$$2x+1=x+3$$

Aquí tenéis una ecuación, el número de casillas que os podéis mover coincide con su solución.

$$3x-10=10-x$$

Aquí tenéis una ecuación, el número de casillas que os podéis mover coincide con su solución.

$$4x+2=2x+10$$

Aquí tenéis una ecuación, el número de casillas que os podéis mover coincide con su solución.

$$5x-12=2x+6$$

Aquí tenéis una ecuación, el número de casillas que os podéis mover coincide con su solución.

$$2x+3=4x+1$$

Aquí tenéis una ecuación, el número de casillas que os podéis mover coincide con su solución.

$$-x-2=x-10$$

Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una función asociada a una ecuación. El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que anula la función.

x	-1	0	1	2
f(x)	-4	-2	0	2

Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una función asociada a una ecuación. El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que anula la función.

x	0	2	4	6
f(x)	-8	-4	0	4

Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una función asociada a una ecuación. El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que anula la función.

x	0	3	5	7
f(x)	-5	-2	0	2

Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una función asociada a una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que anula la función.

x	1	2	3	4
f(x)	-8	-4	0	4

Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una función asociada a una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que anula la función.

x	2	3	4	5
f(x)	0	2	4	6

Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una función asociada a una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que anula la función.

x	0	4	8	12
f(x)	-8	0	24	40

Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que señala la solución de esa ecuación.

Incógnita	0	1	2	3
Primer miembro	1	3	5	7
Segundo miembro	3	4	5	6

Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que señala la solución de esa ecuación.

Incógnita	0	1	2	3
Primer miembro	1	5	9	13
Segundo miembro	10	11	12	13

Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que señala la solución de esa ecuación.

Incógnita	0	2	4	6
Primer miembro	2	8	14	20
Segundo miembro	8	12	16	20

Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que señala la solución de esa ecuación.

Incógnita	0	1	2	3
Primer miembro	-4	-2	0	2
Segundo miembro	-1	0	1	2

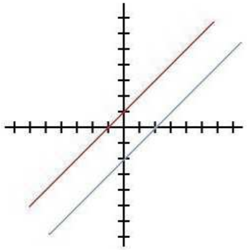
Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que señala la solución de esa ecuación.

Incógnita	3	4	5	6
Primer miembro	8	14	17	20
Segundo miembro	9	14	19	24

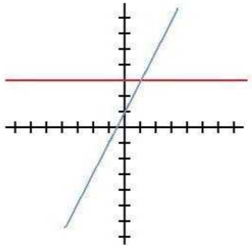
Aquí tenéis una tabla con algunos valores de una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de la tabla que señala la solución de esa ecuación.

Incógnita	0	2	4	6
Primer miembro	12	8	4	0
Segundo miembro	6	4	2	0

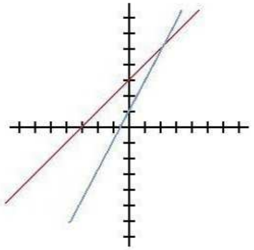
Aquí tenéis los dos miembros de una ecuación dibujados en una gráfica.
El número de casillas que os podéis mover coincide con la solución de esa ecuación.



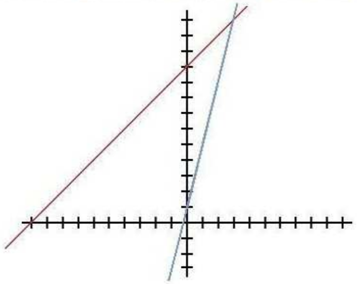
Aquí tenéis los dos miembros de una ecuación dibujados en una gráfica.
El número de casillas que os podéis mover coincide con la solución de esa ecuación.



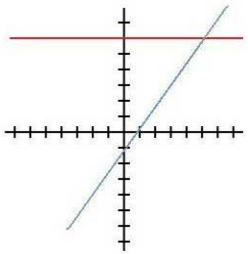
Aquí tenéis los dos miembros de una ecuación dibujados en una gráfica.
El número de casillas que os podéis mover coincide con la solución de esa ecuación.



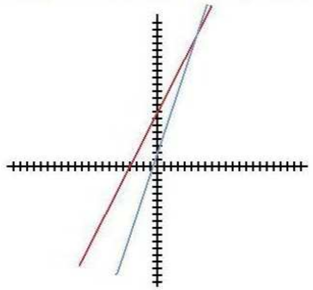
Aquí tenéis los dos miembros de una ecuación dibujados en una gráfica.
El número de casillas que os podéis mover coincide con la solución de esa ecuación.



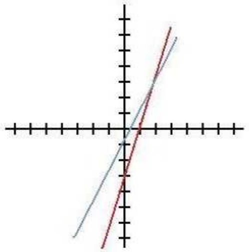
Aquí tenéis los dos miembros de una ecuación dibujados en una gráfica.
El número de casillas que os podéis mover coincide con la solución de esa ecuación.



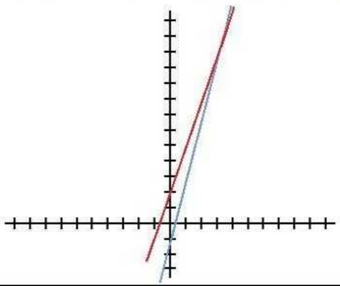
Aquí tenéis los dos miembros de una ecuación dibujados en una gráfica.
El número de casillas que os podéis mover coincide con la solución de esa ecuación.



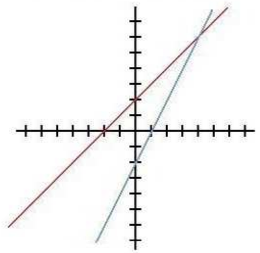
Aquí tenéis los dos miembros de una ecuación dibujados en una gráfica.
El número de casillas que os podéis mover coincide con la solución de esa ecuación.



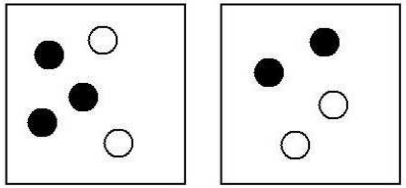
Aquí tenéis los dos miembros de una ecuación dibujados en una gráfica.
El número de casillas que os podéis mover coincide con la solución de esa ecuación.



Aquí tenéis los dos miembros de una ecuación dibujados en una gráfica.
El número de casillas que os podéis mover coincide con la solución de esa ecuación.

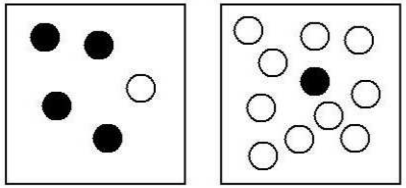


Estos dos cuadrados representan los dos miembros de una ecuación.



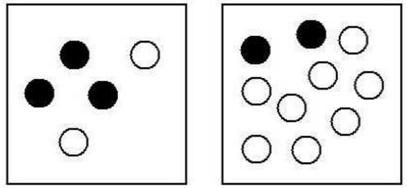
Haced este dibujo con las bolas que se encuentran junto al tablero.
El número de casillas que os podéis mover coincide con
el número de bolas blancas a las que equivale una bola negra.

Estos dos cuadrados representan los dos miembros de una ecuación.



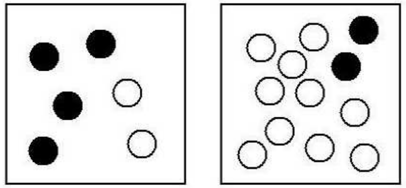
Haced este dibujo con las bolas que se encuentran junto al tablero.
El número de casillas que os podéis mover coincide con
el número de bolas blancas a las que equivale una bola negra.

Estos dos cuadrados representan los dos miembros de una ecuación.



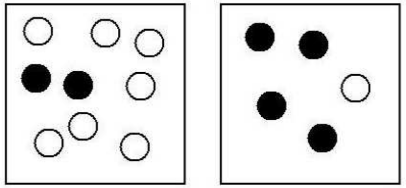
Haced este dibujo con las bolas que se encuentran junto al tablero.
El número de casillas que os podéis mover coincide con
el número de bolas blancas a las que equivale una bola negra.

Estos dos cuadrados representan los dos miembros de una ecuación.



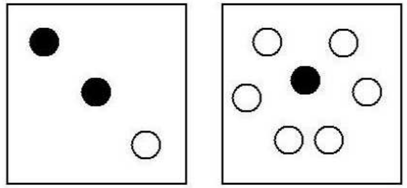
Haced este dibujo con las bolas que se encuentran junto al tablero.
El número de casillas que os podéis mover coincide con
el número de bolas blancas a las que equivale una bola negra.

Estos dos cuadrados representan los dos miembros de una ecuación.



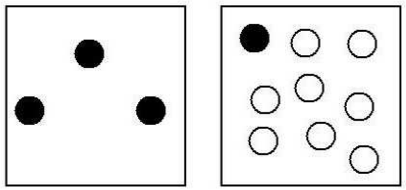
Haced este dibujo con las bolas que se encuentran junto al tablero.
El número de casillas que os podéis mover coincide con
el número de bolas blancas a las que equivale una bola negra.

Estos dos cuadrados representan los dos miembros de una ecuación.



Haced este dibujo con las bolas que se encuentran junto al tablero.
El número de casillas que os podéis mover coincide con
el número de bolas blancas a las que equivale una bola negra.

Estos dos cuadrados representan los dos miembros de una ecuación.



Haced este dibujo con las bolas que se encuentran junto al tablero.
El número de casillas que os podéis mover coincide con
el número de bolas blancas a las que equivale una bola negra.

**Debéis inventar una ecuación,
para que dos sea su solución.**

**Si lo conseguís, el número de casillas que
os podréis mover también será dos.**

Pero si mal lo hacéis, el turno perderéis.

**Debéis inventar una ecuación,
para que tres sea su solución.**

**Si lo conseguís, el número de casillas que
os podréis mover también será tres.**

Pero si mal lo hacéis, el turno perderéis.

Debéis inventar una ecuación, para que cuatro sea su solución.

Si lo conseguís, el número de casillas que os podréis mover también será cuatro.

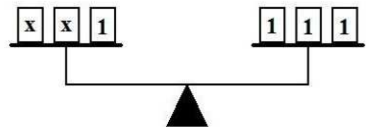
Pero si mal lo hacéis, el turno perderéis.

Debéis inventar una ecuación, para que cinco sea su solución.

Si lo conseguís, el número de casillas que os podréis mover también será cinco.

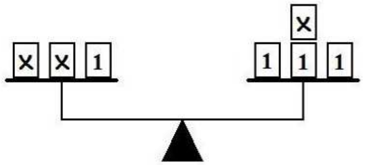
Pero si mal lo hacéis, el turno perderéis.

Con la balanza que tenéis junto al tablero podéis formar la ecuación que aquí esta dibujada.



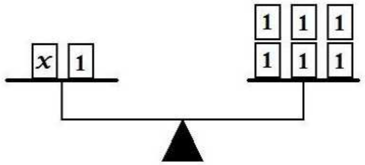
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de una pesa en la que ponga x.

Con la balanza que tenéis junto al tablero podéis formar la ecuación que aquí esta dibujada.



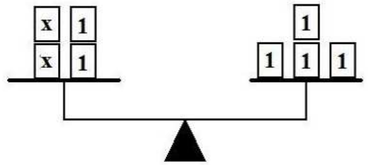
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de una pesa en la que ponga x.

Con la balanza que tenéis junto al tablero podéis formar la ecuación que aquí esta dibujada.



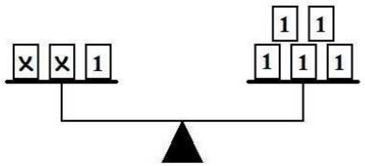
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de una pesa en la que ponga x.

Con la balanza que tenéis junto al tablero podéis formar la ecuación que aquí esta dibujada.



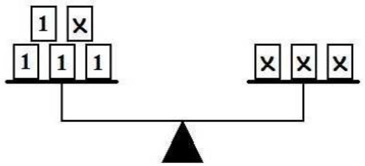
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de una pesa en la que ponga x.

Con la balanza que tenéis junto al tablero podéis formar la ecuación que aquí esta dibujada.



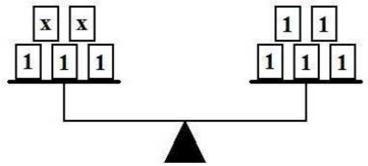
El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de una pesa en la que ponga x.

Con la balanza que tenéis junto al tablero podéis formar la ecuación que aquí esta dibujada.



El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de una pesa en la que ponga x.

Con la balanza que tenéis junto al tablero podéis formar la ecuación que aquí esta dibujada.



El número de casillas que os podéis mover coincide con el valor de una pesa en la que ponga x.

Debéis inventar una ecuación, para que uno sea su solución.

Si lo conseguís, el número de casillas que os podréis mover, también será uno.

Pero si mal lo hacéis, el turno perderéis.

Debéis inventar una ecuación, para que seis sea su solución.

Si lo conseguís, el número de casillas que os podréis mover, también será seis.

Pero si mal lo hacéis, el turno perderéis.

Completad la siguiente ecuación para que x=1 sea su solución:

$$2x-?=1$$

Si la completáis, el número de casillas que os podréis mover también será uno.

Completad la siguiente ecuación para que x=2 sea su solución:

$$4x+?=11$$

Si la completáis, el número de casillas que os podréis mover también será dos.

Completad la siguiente ecuación para que x=3 sea su solución:

$$3x-?=9$$

Si la completáis, el número de casillas que os podréis mover también será tres.

Completad la siguiente ecuación para que x=4 sea su solución:

$$?\cdot x-2=10$$

Si la completáis, el número de casillas que os podréis mover también será cuatro.

Completad la siguiente ecuación para que x=5 sea su solución:

$$3x-?=4+x$$

Si la completáis, el número de casillas que os podréis mover también será cinco.

Completad la siguiente ecuación para que x=6 sea su solución:

$$2x-3=?+x$$

Si la completáis, el número de casillas que os podréis mover también será seis.

¡MOVEOS TODO LO QUE QUERÁIS!

Aquí tenéis un enunciado que se puede escribir como una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el número que es solución de este enunciado.

Un hombre está construyendo una muralla, si mañana colocara el triple de piedras que ha colocado hoy y dos más, colocaría también ocho piedras más del doble de piedras que ha colocado hoy. ¿Cuántas piedras ha colocado hoy?

Aquí tenéis un enunciado que se puede escribir como una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el número que es solución de este enunciado.

En una granja hay tres gallinas, un pollito y algún gallo. Junto con el pollito, el doble de los gallos que hay sumarían tantos animales como gallinas. ¿Cuántos gallos hay?

Aquí tenéis un enunciado que se puede escribir como una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el número que es solución de este enunciado.

La edad de un padre es el quíntuple que la de su hijo. Si entre los dos tienen 36 años, ¿cuántos años tiene el hijo?

Aquí tenéis un enunciado que se puede escribir como una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el número que es solución de este enunciado.

La base de un rectángulo es el doble de larga que su altura. Si el perímetro del rectángulo mide 24 cm, ¿cuánto mide su base?

Aquí tenéis un enunciado que se puede escribir como una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el número que es solución de este enunciado.

Un carruaje sale de una ciudad con una velocidad de 18 km/h y tarda en llegar a la siguiente ciudad 6 horas, ¿cuánta distancia hay entre las 2 ciudades?

Aquí tenéis un enunciado que se puede escribir como una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el número que es solución de este enunciado.

Varios ratones blancos son perseguidos por 6 gatos negros, y tras estos gatos corre un solitario ratón gris. Si se juntaran todos los ratones habría el mismo número de ratones que de gatos. ¿Cuántos ratones blancos hay?

Aquí tenéis un enunciado que se puede escribir como una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el número que es solución de este enunciado.

En una tienda el peso de cuatro sacos de sal y dos kilos de azúcar es el mismo que el de dos sacos de sal y diez kilos de azúcar. ¿Cuánto pesa un saco de sal en esa tienda?

Aquí tenéis un enunciado que se puede escribir como una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el número que es solución de este enunciado.

En una tienda que vende bocadillos y botellas de agua hay un nuevo tendero. Éste sabe que las botellas valen 1€, pero no sabe el precio de los bocadillos, solo le han dicho que dos bocadillos y una botella valen lo mismo que un bocadillo y tres botellas. ¿Cuánto debería cobrar el tendero por un bocadillo?

Aquí tenéis un enunciado que se puede escribir como una ecuación.
El número de casillas que os podéis mover coincide con el número que es solución de este enunciado.

Hay una leyenda que dice que si lanzas un número determinado de monedas a una fuente y después lanzas diez más se te cumplirá un deseo, y pasará lo mismo si lanzas el cuádruple de ese número mágico de monedas y después una moneda más. ¿Cuál es ese número mágico de monedas que hay que lanzar para obtener un deseo?

ANEXO 3: Pruebas

En este anexo se adjuntan los textos de cada una de las ocho fichas de prueba que se pueden encontrar en el juego *Tierra de Incógnitas*, al igual que el texto de la ficha de prueba final del mismo.

LA DISPUTA DE LOS HERMANOS

En vuestro camino os encontráis a dos hermanos discutiendo por ver quién ha resuelto bien una ecuación. Resulta que estos dos hermanos tienen una de las llaves del castillo, y os la ofrecen a cambio de que determinéis cuál de las dos formas que han utilizado es mejor. Aquí tenéis cómo han resuelto cada uno de ellos la ecuación:

Hermano Mayor	Hermano Menor
$5(x+1) = 15$	$5(x+1) = 15$
$5x+5 = 15$	$x+1 = \frac{15}{5}$
$5x = 15-5$	$x+1 = 3$
$5x = 10$	$x = 3-1$
$x = \frac{10}{5}$	$x = 2$
$x = 2$	

Para ganar la llave de esta casilla, lo que debéis hacer es convencer al equipo contrario de cuál de los dos métodos es mejor que el otro, argumentando cuál es más cómodo, más fácil, más correcto o más rápido.

Cuando le hayáis convencido, podréis coger la llave.

EL MERCADER AMBULANTE

En vuestro camino os encontráis el carruaje de un mercader ambulante, y mientras charláis con él y calcula con su balanza el coste de las provisiones que habéis comprado para los próximos días, os dais cuenta de que entre su mercancía esta una de las llaves del castillo. El mercader os propone un trato, si sois capaces de determinar con su balanza la solución de la ecuación que él os diga, podréis quedaros gratis con la llave. La ecuación que os dice el mercader es la siguiente:

$$2\mathbf{x}+3 = \mathbf{x}+1+\mathbf{x}$$

Para ganar la llave de esta casilla, lo que debéis hacer es construir esa ecuación con la balanza y las pesas que hay junto al tablero, y después tenéis que intentar hallar la solución de la ecuación usando únicamente la propia balanza.
Si encontráis la solución correcta, podéis coger la llave.

EL ERMITAÑO SOLITARIO

En vuestro camino os encontráis con un hombre de avanzada edad que un día decidió viajar solo por estas tierras, pero al veros se pone muy contento y os invita a que con él juguéis a un juego. Si aceptáis jugar un rato con él, os entregará una de las llaves del castillo. Su juego consiste en lo siguiente: él os dirá una ecuación, y con unas canicas tendréis que construirla y resolverla. Después, con las canicas que os sobren, tendréis que construir para él otra ecuación con la misma solución. Comienza el juego, y os dice esta ecuación:

$$8\mathbf{x}+2 = 12+3\mathbf{x}$$

Para ganar la llave de esta casilla, lo que debéis hacer es construir esa ecuación con las bolas que se encuentran junto al tablero y resolverla. Cuando encontréis la solución de esa ecuación debéis crear con las bolas que habéis ido quitando otra ecuación que tenga la misma solución.
Si resolvéis la ecuación y construís correctamente otra con la misma solución, podéis coger la llave.

EL ASTRÓLOGO EQUIVOCADO

En vuestro camino, os encontráis a un hombre sentado sobre una roca, que mira al cielo y a los papeles que tiene a sus pies de forma compulsiva. Cuando llegáis hasta él, os muestra una llave que acaba de caer del cielo justo delante suya, os cuenta que ha realizado montones de cálculos y que para tratar de explicar éste fenómeno ha inventado una función, y después ha obtenido una ecuación asociada a ella. Sabe que la función es correcta, pero aún así algo falla en sus cálculos. La llave le da igual, lo que quiere es una explicación, por lo que no le importa daros la llave si le ayudáis con sus cálculos.

Esta es la función que ha inventado:

$$\mathbf{f(x)} = 4\mathbf{x}\mathbf{-}12$$

Y esta la ecuación que ha sacado de esa función:

$$4\mathbf{x}\mathbf{-}10 = -2$$

Para ganar la llave de esta casilla debéis decir porque esa ecuación no puede obtenerse de esa función y dar al menos dos ecuaciones que sí puedan deducirse de esa función.
Si resolvéis correctamente todos los pasos, podéis coger la llave.

DESCIFRAR EL CÓDIGO

En vuestro camino llegáis a una cueva, y en las paredes de su interior, junto a algunas pinturas antiguas de animales, os encontráis dibujada la siguiente tabla:

Incógnita	-1	0	1	2	
Primer miembro	-1	1	3	5	
Segundo miembro	-5	-2	1	4	

Según cuenta la leyenda de esa cueva, si acabáis correctamente el dibujo de la tabla se abrirá una de las paredes de la cueva, dejando al descubierto una de las llaves del castillo.

Para ganar la llave de esta casilla, debéis determinar la fórmula de la ecuación que relaciona esos valores y completar la tabla haciendo que la última columna muestre la solución de la ecuación. Recordad que una ecuación de este tipo es de la forma $ax+b=cx+d$ (con a, b, c, d números).
Si encontráis la ecuación y colocáis los números correctos en la tabla, podéis coger la llave.

LA TABLA MALDITA

En vuestro camino llegáis a las ruinas de una antigua ciudad que entre sus muros custodiaba una de las llaves del castillo. Pero en la ciudad ya no queda nada en pie y lo único que encontráis de una pieza es una pequeña tabla de piedra, que no está completa:

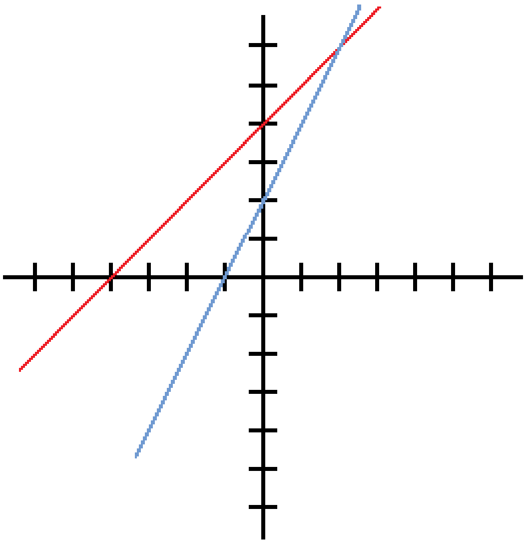
x	3	-1	2	-4	
f(x)	1	-8	-1	-13	

En vuestras manos esta completar esta tabla, pero nadie sabe lo que ocurrirá después, ¿os pasará lo mismo que a la ciudad y seréis aniquilados? ¿o sucederá un milagro y la llave llegará a vuestro lado?

Para ganar la llave de esta casilla, debéis determinar la fórmula de la función que relaciona esos valores, y completar la tabla haciendo que la última columna muestre la solución de una ecuación asociada a ésta función. Recordad que una función de este tipo es de la forma $f(x)=ax+b$ (con a, b números).
Si encontráis la función y colocáis los números correctos en la tabla, podéis coger la llave.

LAS COORDENADAS DE LA LLAVE

En vuestro camino os encontráis un mapa que indica dónde encontrar una de las llaves del castillo, aunque no es un mapa corriente... solo sabéis que en él podéis ver una ecuación y que, si encontráis su solución, encontraréis la llave.
El mapa es el siguiente:



Para ganar la llave de esta casilla debéis encontrar la fórmula de esta ecuación y la solución de la ecuación. La ecuación de esta gráfica es del tipo $ax+b = cx+d$, siendo $y_1=ax+b$, $y_2=cx+d$ las rectas que aparecen en el dibujo.
Si encontráis la fórmula y la solución, podéis coger la llave.

LA LLAVE AVENTURERA

En vuestro camino os encontráis una llave del castillo tirada junto a unas piedras, rápidamente la intentáis coger, pero resulta que no es una llave cualquiera, es una llave especial, es una llave aventurera, y que además sabe hablar y caminar, y os cuenta que todas estas tierras quiere visitar. No pondrá pegas en acompañar a quien se lo pida una vez acabado su viaje, pero aún no es el momento y sin decir mucho más se pone a caminar hacia el oeste buscando el mar. Al final, tras unos pasos dar, se da la vuelta y os deja una pista para que algún día la podáis encontrar:

"El triple de los lugares que me faltan por visitar más el número de praderas que en esta tierra os podéis encontrar es el mismo que el número de bosques y lugares con agua que podéis contar."

Para ganar la llave de esta casilla tenéis que calcular el número de lugares que a la llave le faltan por visitar. Después mover la llave tantas casillas hacia la izquierda como lugares le falten por visitar. La llave se quedará en ese lugar.
¡El primer equipo en llegar a esa casilla podrá coger la llave!

LA PRUEBA FINAL

Finalmente habéis llegado al castillo, habéis abierto sus grandes puertas y en él os habéis metido.
Penumbra, oscuridad y nada más...
Tras caminar un rato a ciegas veis una luz que despacio se os acerca.
Es uno de los siervos del castillo, y no parece sorprendido, en realidad parece aliviado de que, por fin, alguien haya llegado.
Os cuenta la historia del gran señor que un día gobernó estas tierras, os habla de su poder y su gran riqueza.
Triste os cuenta que este gran señor murió y que en sus últimas horas decidió dar su riqueza a aquellos que realmente se la merecieran, a aquellos que fueran honestos, aguerridos e inteligentes.
Estas fueron sus últimas palabras:

"Solo aquellos que conozcan todas las formas de las ecuaciones recibirán mis muchos dones"

Esto es lo que debéis hacer:
Debéis inventar un problema que haga referencia a un gran castillo y sus tesoros, y que pueda resolverse utilizando una ecuación.
Después debéis mostrar de 5 formas diferentes la ecuación de ese problema, y solucionarlo mediante alguna de esas formas.

Anexo 4: Hoja de Referencia

En este anexo se adjunta una hoja de referencia en la que se resumen las reglas más importantes del juego *Tierra de Incógnitas*, y que puede ser repartida entre los jugadores mientras juegan para que no olviden ningún detalle de la mecánica del juego.

Tierra de Incógnitas

<u>*Cómo ganar la partida*</u>
Por turnos podéis mover vuestra ficha por el tablero.
Debéis conseguir 2 llaves resolviendo pruebas en las casillas especiales.
Cuando tengáis las llaves debéis volver al castillo para hacer una última prueba.
¡El primero en resolver la prueba del castillo gana la partida!

<u>*Turnos de juego*</u>
Por turnos, cada equipo puede realizar las 3 siguientes acciones en el orden que aquí aparecen:

1. *Robar una tarjeta del montón para moverse por el tablero.* En la tarjeta hay una pregunta, si la resolvéis correctamente podéis mover vuestra ficha tantas casillas como indique la tarjeta, si dais un resultado erróneo acaba vuestro turno sin poder moveros ni hacer ninguna otra acción. No es obligatorio moverse el número máximo de casillas que indique la tarjeta, podéis moveros menos.

2. *Proponer un duelo.* Si estáis en la misma casilla que el otro equipo podéis decirle una ecuación y ellos a vosotros otra. El primer equipo que resuelva la ecuación que le han propuesto puede jugar un turno extra de inmediato.

3. *Hacer una prueba.* Si estáis en una casilla especial, podéis robar al azar una prueba del montón de pruebas e intentar resolverla. Si tenéis dos llaves y os encontráis sobre una de las casillas del castillo, podéis realizar la prueba final. En las casillas especiales la recompensa por resolver correctamente la prueba será la llave que haya sobre la casilla, y en el castillo ganar la partida.

Cuando el equipo que está jugando su turno acabe, comienza el turno del equipo contrario.

Importante: ¡Si dais una solución incorrecta perderéis el turno!

<u>*Casillas*</u>

Praderas
Estas casillas no tienen ninguna regla especial.

Desiertos
Estas casillas no tienen ninguna regla especial.

Agua
No se puede pasar por encima de estas casillas. Debéis rodearlas para avanzar.

Bosques
No se pueden proponer duelos en estas casillas.

Montañas
Para pasar por estas casillas se deben gastar dos puntos de movimiento. Si se comienza el turno en una de estas casillas solo es necesario gastar un punto.

Casillas Especiales
En ellas se pueden realizar pruebas para conseguir llaves.

Castillo
Si tenéis 2 llaves, y al moveros llegáis a alguna de las cuatro casillas que lo forman, podéis entrar en el castillo para realizar la prueba final e intentar ganar el juego.

Anexo 5: Cuestionario

En este último anexo se adjunta una copia del cuestionario que se les entregó a cada uno de los alumnos que participaron en alguna de las tres partidas llevadas a cabo para comprobar la valía y el funcionamiento del juego *Tierra de Incógnitas*.

<u>Cuestionario sobre el juego Tierra de Incógnitas</u>

Nombre:

1 - ¿Qué te ha gustado más del juego? ¿Qué te ha gustado menos?

2 - ¿Qué añadirías o quitarías del juego?

3 - ¿Qué tarjeta o prueba te ha resultado más difícil? ¿Por qué?

4 - ¿Te ha gustado que haya casillas de diferentes tipos? ¿Cuál te ha gustado más? ¿Por qué?
Si pudieras inventarte una casilla nueva, ¿qué tendría de especial esa casilla?

5 - ¿Qué has aprendido con este juego?

6 - Después de esta partida, ¿qué dirías que es una ecuación?

7 - ¿Alguna vez te salió alguna ecuación repetida en las tarjetas? ¿Cuál era?

8 - ¿Cuántas formas de mostrar una ecuación has visto en el juego? ¿Cuáles son?

9 - ¿Existen formas para mostrar una ecuación distintas de las que habéis utilizado en el juego? Si sabes alguna, descríbela.

10 - ¿Con qué forma te es más fácil encontrar la solución de una ecuación? ¿Por qué?

11 - ¿Habrías resuelto alguna tarjeta o prueba de forma diferente a como lo ha hecho el otro equipo? ¿Cómo lo habrías hecho?