



Universidad de Granada

Curso 2010/2011

FIGURAS SEMEJANTES Y APLICACIONES DE LA SEMEJANZA. PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA

Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria
Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de
Idiomas

Especialidad: Matemáticas

Raquel García Blanco





Universidad de Granada

FIGURAS SEMEJANTES Y APLICACIONES DE SEMEJANZA. PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA

Memoria de TRABAJO FIN DE MÁSTER realizada bajo la tutela del Doctor Jose Luis Lupiáñez Gómez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Raquel García Blanco, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo.: Raquel García Blanco

VºBº del Tutor

Fdo.: Jose Luis Lupiáñez Gómez

Índice

1. Introducción	4
2. Fundamentación del estudio: Planificación de una unidad didáctica	5
3. Análisis didáctico del tema: “Semejanza”	7
<i>3.1 Análisis del contenido</i>	7
3.1.1 Historia de la semejanza: ¿Cómo surgió?	7
3.1.2 Estructura conceptual: ¿Qué es?	9
3.1.3 Sistemas de representación: ¿Cómo puede reconocerse?	12
3.1.4 Fenomenología: ¿Para qué sirve?	14
<i>3.2 Análisis cognitivo</i>	16
3.2.1 Expectativas de aprendizaje	16
3.2.2 Errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de enseñanza-aprendizaje	21
<i>3.3 Análisis de instrucción</i>	22
3.3.1 Complejidad de las tareas	22
3.3.2 Materiales y recursos	23
3.3.3 Ejemplificación del análisis de una tarea	24
4. Propuesta de unidad didáctica	26
<i>4.1 Objetivos de etapa</i>	26
<i>4.2 Contenidos y objetivos específicos de la unidad didáctica</i>	27
<i>4.3 Metodología</i>	29
<i>4.4 Secuenciación y organización de las tareas de la unidad didáctica. Gestión del aula</i>	29
<i>4.5 Descripción de las sesiones de la unidad didáctica</i>	30
<i>4.6 Evaluación de aprendizaje de la unidad didáctica</i>	46
<i>4.7 Atención a la diversidad</i>	48
5. Un estudio exploratorio sobre la noción de semejanza en estudiantes de 4º E.S.O.	50
<i>5.1 Contexto y finalidad</i>	50
<i>5.2 Instrumento y realización de la prueba</i>	50
<i>5.3 Resultados</i>	51
<i>5.4 Conclusiones</i>	53
6. Conclusiones	55
7. Bibliografía	56
8. Anexos	57

1. INTRODUCCIÓN

Para la realización de este trabajo fin de máster podíamos elegir entre dos posibilidades teniendo en cuenta nuestra especialidad: una unidad didáctica o un trabajo sobre innovación educativa o materiales didácticos. Realizar un trabajo sobre innovación hubiera sido quizás más interesante que realizar una unidad didáctica, para ello hubiera sido necesario detectar una carencia e inventar algún instrumento llamativo y útil para el alumnado. Teniendo en cuenta que en mi futura labor docente es imprescindible la planificación y la elaboración de unidades didácticas en todos los temas y cursos, la elección de la unidad se basó en el interés por aprender correctamente a realizarlas.

En este trabajo proponemos una unidad didáctica, recordemos que esto es una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos (Rico y Segovia, 2001), destinada al alumnado que está en el cuarto curso de la etapa obligatoria de la enseñanza secundaria. Por tanto, estamos en el último curso de dicha etapa por lo que debemos sentar las bases de la matemática tanto para aquellos alumnos que abandonaran el sistema educativo al acabar el curso como para aquellos que comenzaran el primer año de Bachillerato continuando así su etapa educativa.

La unidad didáctica que presentamos tratará el siguiente tema: “Figuras semejantes y aplicaciones de la semejanza”. Elegimos este título porque representa claramente la finalidad de la unidad y porque de todos los aspectos que abarca el tema de la semejanza pensamos que su aplicación es el más importante, si bien para abreviar en el resto del documento nos referiremos a él como “semejanza”. La hemos estructurado en tres apartados, el primero contempla la aportación de la revisión curricular y la justificación del estudio. En el segundo apartado, llevamos a cabo un análisis didáctico del tema centrándonos en varios aspectos como: sistemas de representación, fenomenología, expectativas de aprendizaje, competencias o los errores y dificultades involucrados en el tema. La tercera parte, contiene la planificación de la enseñanza, es decir, objetivos de etapa y específicos, contenidos, sesiones y temporalización. Además estudiaremos la metodología y los criterios e instrumentos de evaluación.

Los aspectos de la enseñanza deben ir bien dirigidos tanto a cubrir necesidades académicas para cursos posteriores como necesidades propias para la resolución de problemas de la vida cotidiana. En este ámbito, se debe tener siempre presente en el aula la importancia de las Matemáticas como elemento de la cultura. El proceso educativo que proponemos en la presente unidad estará caracterizado por la búsqueda de la motivación y el interés del alumnado, por lo que será fundamental destacar la importancia de la semejanza en la vida cotidiana.

Una vez descrita la unidad didáctica, describiremos en el siguiente punto del documento los resultados obtenidos en un estudio empírico sobre el conocimiento de la noción de semejanza realizado por parte de alumnos de un instituto de Educación Secundaria. A continuación, se realiza una breve conclusión y al finalizar el documento encontramos la bibliografía consultada y los anexos.

2. FUNDAMENTACIÓN DEL ESTUDIO: PLANIFICACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En el currículo español, aparecen cuatro componentes básicas sobre las que se pueden tomar decisiones para la programación o planificación de la enseñanza:

1. *Objetivos y competencias básicas.* Metas de progresiva dificultad que se marca a los alumnos en función de su nivel de competencia y en función de los resultados del aprendizaje que se debe esperar de ellos.
2. *Contenidos.* Elementos conceptuales y culturales que se van a enseñar: conceptos, procedimientos y actitudes.
3. *Metodología.* Modelos de enseñanza, enfoques prácticos, actividades y tareas concretas que se van a realizar.
4. *Evaluación.* Proceso, criterios e instrumentos previstos para la valoración de los resultados obtenidos, en relación con la consecución de los objetivos y de la adquisición de las competencias básicas.

A pesar de que existen estas orientaciones para planificar las clases en los documentos oficiales, son bastantes generales y hacen que normalmente los docentes se apoyen en los contenidos. Para intentar solucionar esto, la investigación en la Educación Matemática pone de manifiesto que para planificar una unidad didáctica es fundamental revisar la ubicación y tratamiento de cada uno de los tópicos que se consideran en el Currículo del Ministerio y en el de la correspondiente Comunidad Autónoma en la que nos encontramos trabajando (Rico,1997). Con esta investigación surgió la definición de organizadores del currículo: “son conocimientos que permiten articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas”.

Podemos incluir los diferentes organizadores en la teoría del Análisis Didáctico, que es un procedimiento para el diseño, desarrollo y evaluación de un tema de las matemáticas escolares. Se fundamenta en la noción de currículo y se estructura en torno a organizadores descritos anteriormente. Apoyándose en los trabajos de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009), este se estructura en cuatro fases: análisis de contenido (estructura conceptual, evolución histórica, sistemas de representación y fenomenología), análisis cognitivo (objetivos, competencias, errores y dificultades), análisis de instrucción (diseño y secuenciación de tareas, materiales y recursos) y análisis de actuación. En los siguientes puntos del trabajo vamos a llevar a cabo el análisis didáctico de nuestro tema para explorar y organizar toda la complejidad del tema de semejanza.

Respecto a la ubicación y tratamiento en el diseño curricular del Ministerio y la Comunidad Autónoma Andaluza: los contenidos que corresponden a nuestro tema semejanza, quedan reflejados en el currículo concretamente en la orden ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria obligatoria. (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007). Podemos obtenerlos en el área de Matemáticas, dentro de los contenidos del cuarto curso (opción A) en el bloque de Geometría, dicho tema aparece tratado conjuntamente con otros contenidos. Literalmente se hace referencia de la siguiente forma: “*Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Razones trigonométricas de un ángulo agudo, relaciones entre ellas. Resolución de triángulos rectángulos y su aplicación en problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana.*

Uso de programas de geometría dinámica para facilitar la comprensión de contenidos geométricos. Utilización de los conocimientos geométricos en la resolución de problemas del

mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc. Estimación de la medida de magnitudes y expresión del resultado con las unidades y la precisión adecuadas.”

En esta orden se pueden observar algunas orientaciones metodológicas y de evaluación. Entre ellas consideramos interesantes para la planificación de la unidad didáctica las siguientes:

- *En la enseñanza de las matemáticas debemos disponer de diferentes herramientas que nos ayuden a motivar a los jóvenes a utilizarlas, dentro y fuera del aula, para encontrar soluciones a determinadas cuestiones relacionadas con su vida cotidiana o con su aplicación en otras áreas.*
- *Las opciones metodológicas que se tomen van a ser fundamentales, incluso más que la propia introducción de unos u otros contenidos.*
- *Más allá de la propuesta de organización de contenidos, debe tenerse en cuenta el sentido básicamente experimental que debe darse a la enseñanza de las matemáticas.*
- *La utilización racional de las herramientas tecnológicas. El uso adecuado de calculadoras y software específico en el aprendizaje de los contenidos matemáticos mejora el desarrollo cognitivo en aspectos como el sentido numérico, la visualización o la relación entre diferentes contenidos.*
- *Para evaluar el rendimiento de los estudiantes se deben tener en cuenta varias dimensiones: los conceptos matemáticos en juego, los procesos que se deben activar para afrontar con éxito la situación planteada y los contextos en los que se plantean las actividades.*

Respecto a los contenidos encontramos las siguientes indicaciones:

- *La relevancia de los contextos. En la medida de que los contenidos curriculares se trabajen en contextos significativos, como pueden ser su aplicación a situaciones sociales relevantes, culturalmente significativas o de aplicación en otras disciplinas o en las mismas matemáticas.*
- *La diversidad en las formas de trabajo. Al planificar la actividad en el aula habrá que tener en cuenta las características de cada grupo y adoptar las medidas oportunas para atender a los distintos ritmos de aprendizaje.*
- *La resolución de problemas como eje vertebrador del proceso de aprendizaje.*
- *El uso de diferentes materiales didácticos.*
- *El cuidado en la comunicación de los procesos y de los resultados.*
- *La utilización racional de las herramientas tecnológicas.*
- *La valoración de actitudes relacionadas con las matemáticas.*

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL TEMA: SEMEJANZA

Para elaborar este apartado y poder así organizar la información más relevante del tema de semejanza, lo vamos a estudiar desde los tres primeros análisis.

3.1 Análisis del contenido

El análisis de contenido nos ofrece una descripción estructurada de los diferentes significados de los conceptos y procedimientos de un tema desde la perspectiva de su estructura conceptual, sus sistemas de representación, su análisis fenomenológico y su evolución histórica.

3.1.1 Historia de la semejanza: ¿Cómo surgió?

Las afirmaciones que se hagan acerca de los orígenes de la matemática, ya sea de la aritmética o de la geometría, serán necesariamente conjeturales. Con seguridad se puede afirmar que el desarrollo de la geometría puede haberse visto estimulado tanto por las necesidades prácticas de la construcción y de la agrimensura como por un sentimiento estético de diseño y orden. No hay documentos que nos permitan seguir la pista de la evolución de una idea a un teorema conocido, pero a veces el presunto origen de un concepto puede no ser más que la reaparición de una idea mucho más antigua que había permanecido en estado latente, este es el caso de la mayoría de los conceptos de nuestro tema. Fueron muchos los científicos y matemáticos importantes los que utilizaron intuitivamente el concepto de semejanza para resolver algunos problemas. Conforme fue pasando el tiempo, surgió la necesidad de estudiar este fenómeno más a fondo ya que seguía apareciendo en muchas facetas de la vida. A continuación, haremos un recorrido por la historia de las matemáticas basándonos en el trabajo realizado por Boyer (2001):

- Hay división de opiniones acerca de si los babilonios estaban familiarizados o no con el concepto de semejanza de figuras, aunque es muy probable que si lo estuviesen. La semejanza entre todas las circunferencias parece haber sido dada por descontado en Mesopotamia, como lo fue también en Egipto, y los muchos problemas sobre medidas de triángulos que aparecen en las tablillas cuneiformes parecen sugerir un cierto concepto de semejanza. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que está dibujado un triángulo rectángulo con los valores de sus lados subdividido en cuatro triángulos rectángulos menores cuyas áreas también se mencionan. A partir de estos valores el escriba calcula la longitud del lado mayor del triángulo principal utilizando aparentemente un tipo de <<fórmula de semejanza>> que viene a ser equivalente a nuestro teorema que dice que las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de lados correspondientes.
- Durante la época de la escuela pitagórica (siglo VI a.C.) fue Pitágoras quién mediante un experimento descubrió relaciones numéricas en la música. Tensó una cuerda musical que producía un sonido que tomó como fundamental: el tono, hizo señales en la cuerda que la dividían en doce partes iguales. Pisó la cuerda en 6 y entonces observó que se producía un sonido, pisó luego en 9 y resultaba otro y al pisar el 8 se obtenía otro diferente. Por ello, las fracciones $1/2$, $3/4$, $2/3$ correspondían a la octava, la cuarta y la quinta, es decir, Pitágoras estableció una relación entre la música, la proporcionalidad geométrica y la proporcionalidad numérica.
Fue Platón un tiempo más tarde quien consiguió calcular las proporciones que producían los sonidos naturales. Si describimos estos sonidos por los símbolos Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do (sonidos del sistema occidental actual) las proporciones que los describen son respectivamente 1 , $9/8$, $81/64$, $4/3$, $3/2$, $27/16$, $243/128$ y 2 .

- Alrededor del año 585 a.C., nació un matemático imprescindible en nuestro tema: Thales. Se le atribuyen varios teoremas importantes aunque no hay ningún documento antiguo que pueda aportarse como prueba evidente de estos descubrimientos pero según la tradición Thales demostró algunos de estos, destaco los siguientes por la relevancia en nuestro tema: “Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son respectivamente iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes” y “Si dos rectas secantes son cortadas por una serie de rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra recta”. Además, hay algunas otras referencias a Thales dispersas por las antiguas fuentes, pero la mayor parte de ellas describen actividades de carácter práctico: Diógenes Laercio, seguido por Plinio y Plutarco contaron que Thales midió las alturas de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura y también que calculó la distancia de un barco a la playa por medio de la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes.
- Algunos años después, comenzó la famosa época heroica de la matemática. Destacamos a Anaxágoras que murió en el 428 a.C., después de la muerte de Pericles. Se dice que éste murió de peste, por ello, los habitantes de la ciudad consultaron al Oráculo de Apolo para averiguar cómo acabar con la epidemia. Así surgió el llamado problema de la duplicación del cubo o problema de Delos: dada la arista de un cubo construir únicamente con regla y compás la arista de otro cubo que tenga volumen doble que el primero. Numerosos matemáticos intentaron resolver el problema pero sólo proporcionaron soluciones aproximadas aunque fue Arquitas, matemático griego, quién encontró una solución tridimensional del problema sin usar coordenadas. Además de esta solución, en la época platónica, Menecmo dio con las cónicas como resultado de una afortunada búsqueda de curvas que tuvieran las propiedades requeridas para resolver el problema del cubo. En 1837 se demostró que el problema no tiene solución.
- Euclides y sus matemáticas están claramente relacionados con nuestro tema porque lo estudió en profundidad y escribió muchas proposiciones interesantes. En el libro II de los *Elementos* encontramos algunas de ellas, por ejemplo, la proposición 11 donde aparece una figura usada actualmente en muchos libros modernos de geometría para ilustrar una propiedad iterativa que tiene la sección áurea. Los griegos tendían a evitar las proporciones y Euclides también sustituyéndolas mediante una relación entre longitudes que tendría que ser de la forma $x/a=b/c$ por $x\ c=ab$. A pesar de ello, vuelven a aparecer en el libro V de los *Elementos*, e incluso aparece la definición de razón aunque es inútil porque es bastante vaga. Una vez desarrollada la teoría de proporciones en el libro V, Euclides la utiliza en el libro VI para demostrar teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan al estudiar triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes.
- La proporción áurea ha sido famosa a lo largo de la historia por sus propiedades estéticas y se dice que la arquitectura de la antigua Grecia está fuertemente influenciada por su uso. Fue Euclides quién comenzó a hablar en los términos que siguen: la línea AB está dividida en razón de medios y extremos por C si $AB: AC = AC: CB$. A esta relación la llamamos proporción o razón áurea. Hasta el 150 a.C., la proporción áurea era considerada únicamente como una propiedad geométrica y no se habían interesado por asociarle un número a esa relación. Siglos después, Pacioli escribió *Divina proporcione* y afirma que la proporción áurea no es racional. Una nota de principios del siglo XVI dice que la relación entre términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci tiende al número áureo, aunque el primer cálculo de la relación áurea en forma decimal fue realizada en 1597 por Michael Maestlin.

3.1.2 Estructura conceptual: ¿Qué es la semejanza?

Tras haber realizado la revisión histórica anterior, vamos a aproximarnos al concepto de semejanza en sí mediante la estructura conceptual del tema, expondremos un resumen de los conceptos y procedimientos relacionados:

Conocimiento conceptual

Hechos

Términos

- Magnitud, medida, cantidad, longitud
- Cociente
- Proporcionalidad numérica
- Vértice, ángulo, segmento, lado
- Lados y ángulos homólogos
- Polígono
- Perímetro, área, volumen
- Recta, paralelismo

Notación

- Unidades (u), Sistema métrico decimal de numeración
- a/b ó $a:b$
- $a/b = c/d$ ó $a:b = c:d$
- $A, B, C, \dots, \hat{A}, \dots, AB, BC, \dots$ a, b, c, \dots
- $ABC, ABCD, \dots$
- P, A, V
- $r, s, ||$
- $1:100$
- $ABC \sim DEF$
- k

Convenios

- Los lados se denotan por: a, b, c, \dots
- Los vértices se denotan por: A, B, C, \dots
- Los ángulos se denotan por: \hat{A}, \hat{E}, \dots
- Los segmentos se denotan por: AB, AC, \dots
- Los polígonos se denotan por: $ABC, ABCD, \dots$
- En una razón el numerador se llama antecedente y el denominador consecuente
- En una proporción hay cuatro términos $a:b = c:d$, a y d se llaman extremos mientras que b y c son medios
- El perímetro se denota por P , el área por A y el volumen por V
- a/b se lee como a es a b
- El símbolo \sim denota la semejanza de figuras
- La razón de semejanza recibe el nombre de escala en planos, mapas y maquetas
- $1:100$ se lee uno cien
- Para una escala $1:100$ la razón de semejanza es $1/100$

Resultados

- Los ángulos de un polígono convexo de n lados suman $180(n-2)^\circ$
- Si la razón de semejanza entre figuras, k , es mayor que 1 , la figura se amplía. Si es menor que 1 , se reduce
- Los ángulos homólogos son iguales
- Las semejanzas llevan puntos alineados en puntos alineados, segmentos en segmentos y conservan ángulos
- El ángulo con el que corta una recta a dos paralelas es el mismo

- La razón de la semejanza producto es igual al producto de las razones de las semejanzas

Conceptos

- Razón, semejanza, escala (gráfica y numérica)
- Cuarto, tercero y media proporcionalidad
- Figuras y polígonos semejantes
- Triángulos en posición de Thales
- Criterios de semejanza entre triángulos
- Homotecia

Estructura conceptual

- Teorema de Thales
- Teorema del cateto
- Teorema de la altura
- Teorema de Pitágoras
- Las semejanzas son un grupo equiforme
- Las magnitudes escalares constituyen un semigrupo conmutativo con elemento neutro totalmente ordenado

Conocimiento procedimental

Destrezas

- Obtener relaciones de igualdad y desigualdad de segmentos
- Medidas de longitudes, amplitudes y superficies
- Operar con medidas de segmentos
- Operar con medidas de ángulos
- Construir ángulos
- Identificar lados proporcionales en polígonos
- Construcción de segmentos proporcionales
- Reconocer series de números proporcionales
- Pasar de una proporcionalidad de magnitudes a una proporcionalidad numérica

Razonamientos

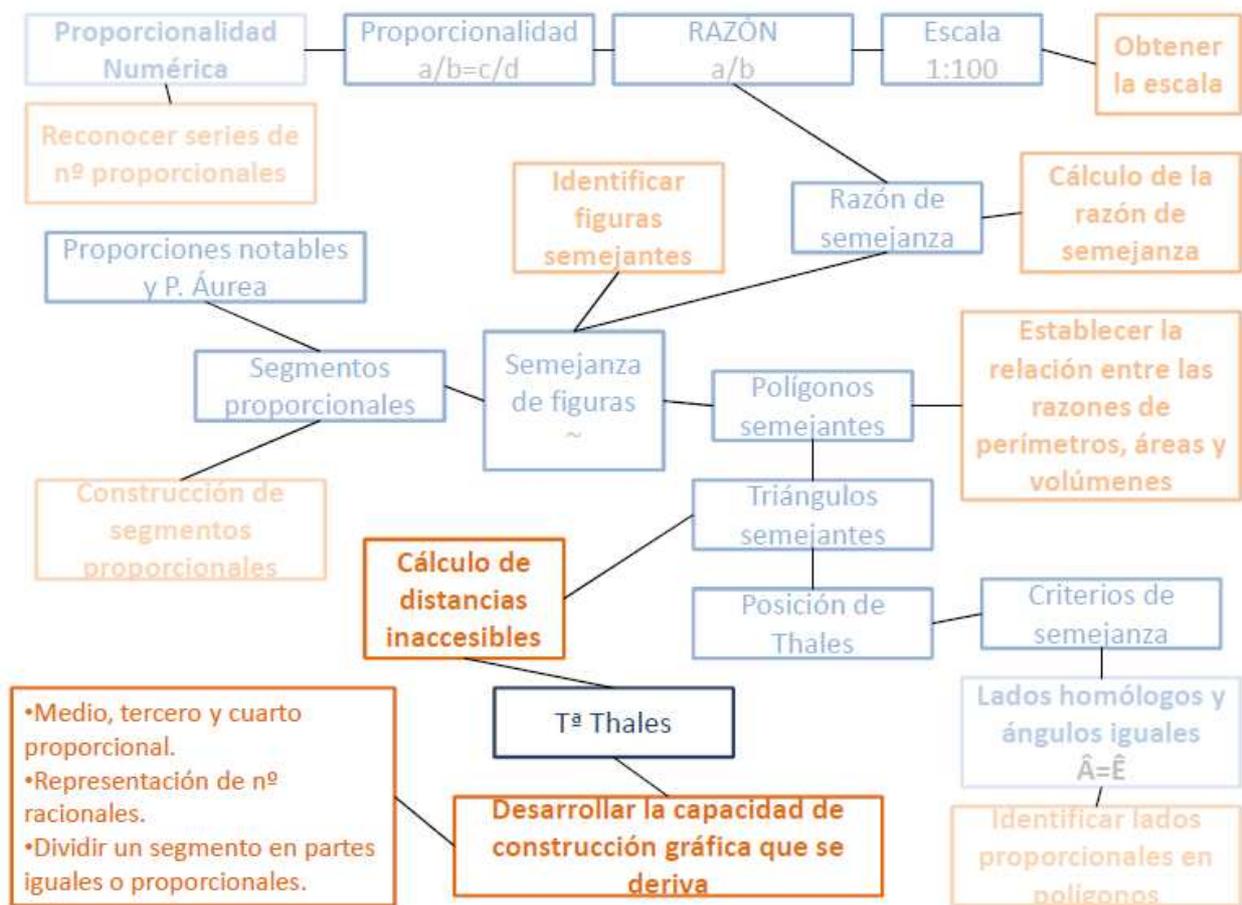
- *Deductivo*
 - Identificar polígonos semejantes
 - Aplicar los criterios de semejanza
 - Cálculo de la media, tercero y cuarto proporcional
 - Cálculo de la relación entre áreas y perímetros de polígonos semejantes y entre volúmenes de cuerpos semejantes
 - Comprobar que en un triángulo rectángulo, la altura trazada sobre la hipotenusa es media proporcional entre las dos partes en que divide a ésta
- *Inductivo*
 - Establecer la relación entre las razones de perímetro, área y volumen de polígonos semejantes
 - Establecer la relación entre las alturas de polígonos semejantes (triángulo, paralelogramo, trapecio)
- *Figurativo*
 - Representación a escala de un objeto de la realidad
 - Dibujar un polígono semejante a otro dada la razón
- Cálculo de la razón de semejanza entre figuras o polígonos semejantes
- Resolución de problemas de triángulos semejantes

- Obtener la escala
- Cálculo de distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando el concepto de escala

Estrategias

- Dividir un segmento en partes iguales y/o en partes proporcionales
- Construcción de polígonos semejantes
- Desarrollar la capacidad de construcción gráfica que se deriva del teorema de Thales:
 - Cálculo de distancias y alturas inaccesibles usando el teorema de Thales
 - Cálculo de la longitud de un segmento en triángulos en posición de Thales
 - Cálculo gráfico de medio, tercero y cuarto proporcional
 - Representación en la recta real de números racionales

A continuación, vamos a presentar un mapa conceptual que relaciona la mayor parte de estas nociones:



Leyenda:

- Notación
- Términos
- Conceptos
- Estructura
- Destrezas
- Razonamientos
- Estrategias

3.1.3 Sistemas de representación: ¿cómo puede reconocerse?

En esta sección vamos a describir los distintos sistemas de representación mediante los cuales se hace presente la semejanza y todos los conceptos relacionados con ella. Para cada una de las representaciones destacaré sus características, sus usos y su finalidad. Estos tipos de representaciones son los siguientes: simbólica, verbal, tabular, gráfica -numérica y tecnológica (TIC). Después veremos que los sistemas presentados no son independientes, es más, todos ellos están relacionados.

Simbólica

Este sistema de representación se basa en la identificación de segmentos o figuras semejantes mediante símbolos. Su uso y finalidad es básico porque es la forma en la que cualquier alumno será capaz de distinguir figuras semejantes. Algunos ejemplos son: para indicar que dos pares de lados homólogos son semejantes usaremos $a/b = c/d$ siendo a, b, c, d los lados o usaremos el símbolo \sim para indicar que dos figuras o polígonos son semejantes.

Además podemos distinguir dos categorías:

- Algebraico: Traducción del problema geométrico a una ecuación
 $a^2 - ax - x^2 = 0$
- Numérico: 1:100, K= 1,6, $2/4 = 6/12$

Verbal

Este sistema está relacionado con el sistema anterior. Es prácticamente igual pero la comunicación es oral, luego sus características son similares. Consideramos los siguientes ejemplos:

- “Figuras semejantes”
- “a es a b como c es a d”
- “a sobre b”
- “Uno cien”

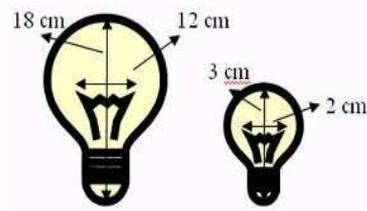
Tabular

Otra forma de representar las relaciones existentes entre figuras semejantes es usando una tabla, la ventaja que tiene este sistema frente a los anteriores es que se puede recopilar mucha información conjuntamente. Por ejemplo, en la tabla siguiente, podemos comprobar al mirar los valores de los lados si estos tres polígonos son semejantes:

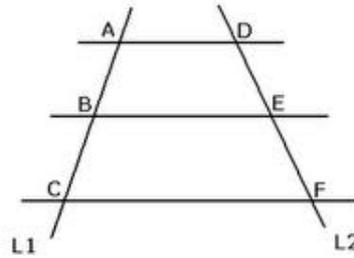
Lados polígono 1	Lados polígono 2	Lados polígono 3
2 cm	4 cm	6 cm
1.3 cm	2.6 cm	3.9 cm
0.5 cm	1.5 cm	4.5 cm

Gráfica- Numérica

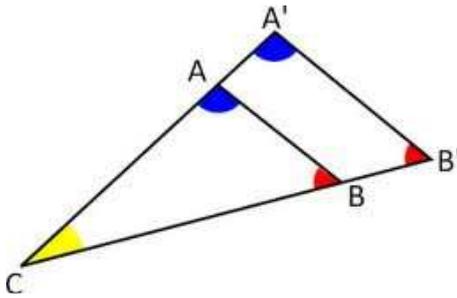
Esta representación es esencial en nuestro tema porque éste está centrado en la proporción geométrica, esto significa que generalmente vamos a trabajar con representaciones gráficas o geométricas. Por tanto, su uso y finalidad es clave para que los alumnos comprueben visualmente cuando dos figuras son semejantes o las propiedades que tienen, lo vemos en los siguientes ejemplos:



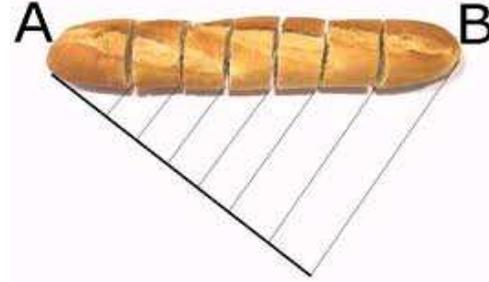
En esta figura podemos ver dos objetos semejantes



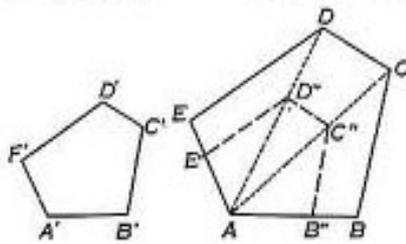
Representación geométrica del Teorema de Tales



Triángulos en posición de Tales



División de un segmento en partes iguales



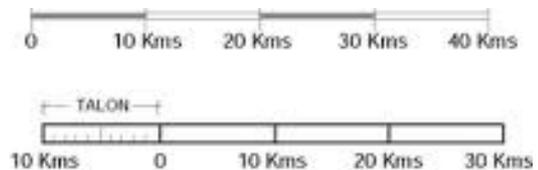
Construcción de polígonos semejantes



Representación del plano de una casa



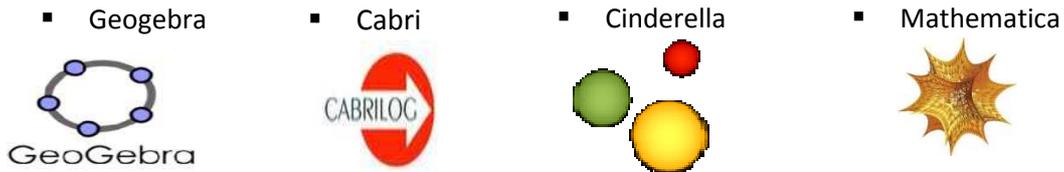
Representación de la maqueta de un edificio



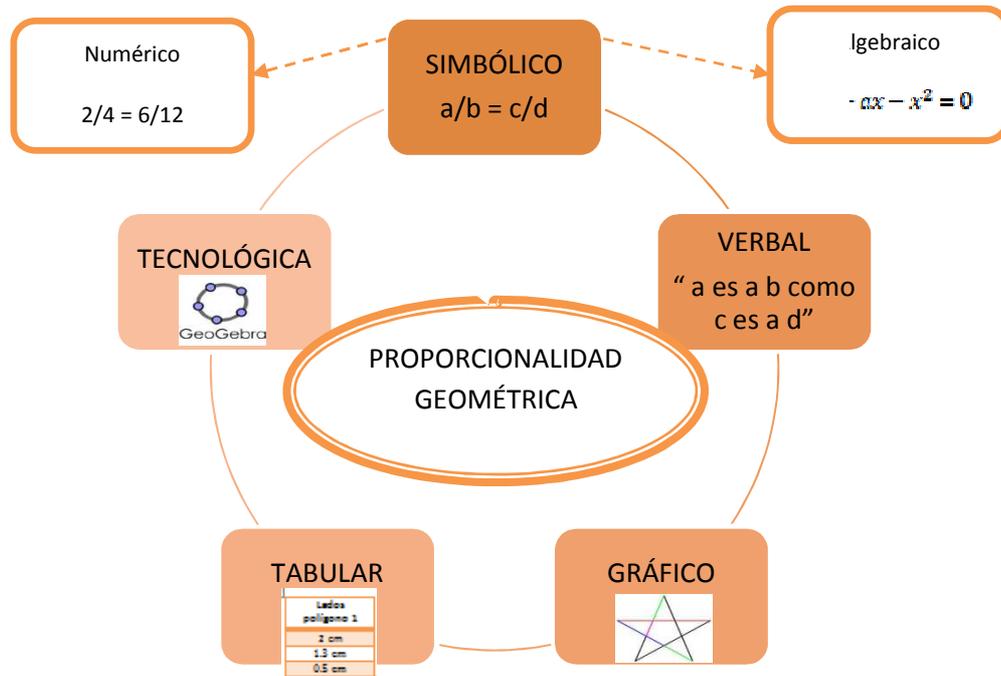
Representación de una escala

Tecnológica (TIC)

Surgen dudas alrededor de este sistema de representación, la propuesta es usarlo para poder ver propiedades y cualidades de figuras semejantes que no podamos representar mediante el sistema anterior. Además, su uso hará que podamos manejar otro tipo de materiales como el ordenador y los nuevos programas informáticos. Entre ellos destacan:



Como ya hemos mencionado anteriormente, los sistemas de representación se relacionan entre sí, vamos a verlo usando un ejemplo:



En este caso, los sistemas de representación simbólico y verbal son los que más se relacionan, transmiten lo mismo, el primero lo hace por escrito y el segundo oralmente. Respecto al sistema gráfico, podemos ver la proporcionalidad geométrica que existe en dos segmentos dibujando uno encima de otro. Otra forma de ver esto es usando una tabla en la que aparezcan los valores de los segmentos. Además, podemos comprobarlo usando algún software, como Geogebra, donde podemos usar un recurso llamado tabulador para ir aumentando un segmento de forma proporcionalidad.

3.1.4 Fenomenología: ¿Pará que sirve?

Vamos a estudiar los fenómenos, contextos y situaciones que tienen relación con los conceptos implicados en el tema que venimos estudiando:

Análisis de los contextos

Utilizando la semejanza podemos resolver algunas cuestiones como las siguientes:

- Cálculo de longitudes inaccesibles (profundidad, altura y distancia)
- ¿Cómo ve una lente?
- Tratamiento de imágenes
- ¿Cómo se representa la realidad?
- Identificación de patrones numéricos

Podemos responder a ellas utilizando conceptos de nuestro tema como: semejanza de triángulos, teorema de Thales, homotecia, escala y el número áureo.

Análisis de los fenómenos

Algunos de los fenómenos donde adquieren significado los conceptos de este tema pueden ser:

- Medida de la profundidad de un pozo
- Determinación de la altura de un edificio por el Método de Euclides o usando escuadra y cartabón
- Medición de altura sobre terreno horizontal. Método de Geberto de Aurillac
- Método griego para calcular la distancia de un barco a un puerto
- Medición del radio y la sombra de la Tierra
- El ojo humano
- Cámara de fotos , proyectores y fotocopiadoras
- Topografía: representación en mapas, planos y maquetas
- Sistema Solar
- En el universo:
 - Dinámica de los agujeros negros y galaxias
- En la naturaleza:
 - Cristales en minerales
 - Caracolas
 - Espirales de un girasol
 - Proporciones morfológicas de una abeja
- En la búsqueda de la belleza:
 - Pirámide de Keops
 - Rostro de la Gioconda

Análisis de las situaciones

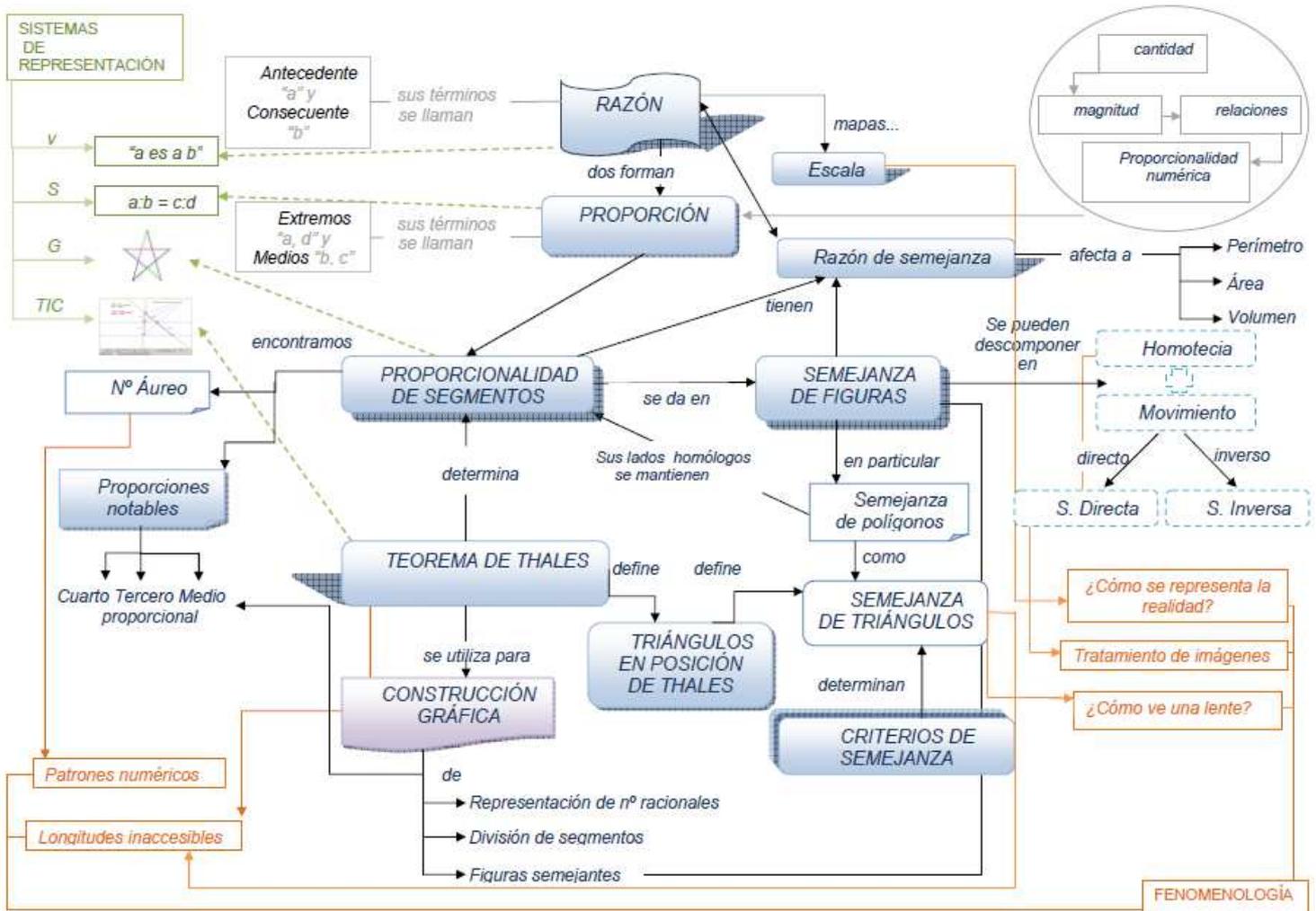
Usaremos las mismas situaciones que propone el Informe PISA (OCDE, 2005): personales, educativas o laborales, públicas o sociales y científicas.

- Personal: relacionada con las actividades diarias de los alumnos.
 - Uso de los proyectores y fotocopiadoras
 - Funcionamiento de cámaras de fotos
- Laboral: las encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo.
 - Método griego para calcular la distancia de un barco a un puerto
 - Medición de altura sobre terreno horizontal o de la profundidad de un pozo
- Pública o social: se refieren a la comunidad local u otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos de su entorno.
 - Pirámide de Keops
 - Rostro de la Gioconda
- Científica: son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático.
 - Sistema Solar
 - Medición del radio de la Tierra

En el siguiente ejemplo unificamos los análisis anteriores:

Contexto	Fenómeno	Situación	Conceptos a los que hace referencia
¿Cómo ve una lente?	Funcionamiento del ojo humano	Personal o científica	Semejanza de triángulos

Para finalizar la sección del análisis de contenido, mostraremos otro mapa conceptual, en el que podemos ver las relaciones que existen entre la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología.



3.2 Análisis cognitivo

En este apartado pretendemos dar respuestas a preguntas como: ¿qué espero que aprendan los escolares? ¿Cómo puedo facilitarles el aprendizaje? ¿Qué errores cometerán? ¿Qué puede ralentizar el proceso de aprendizaje?

3.2.1 Expectativas de aprendizaje

Antes de especificar los objetivos de aprendizaje, vamos a establecer los diferentes focos de aprendizaje sobre los cuales se organizarán y que surgen de la estructura conceptual detallada en el punto anterior:

- I. Proporcionalidad de segmentos
- II. Semejanza de figuras
- III. Teorema de Thales

A continuación describiremos los objetivos asociados a los diferentes focos:

I. Proporcionalidad de segmentos

1. Reconocer series de segmentos proporcionales
2. Calcular la razón de dos segmentos
3. Calcular numéricamente medio, tercero y cuarto proporcional
4. Construir segmentos proporcionales dada la razón

II. Semejanza de figuras

5. Identificar y describir invariantes entre dos figuras semejantes
6. Identificar figuras o polígonos semejantes y deducir su razón de semejanza
7. Construir (con regla y compás, Geogebra,...) un polígono (o figura) semejante a otro, dada la razón
8. Reconocer triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza. Cálculo de distancias inaccesibles
9. Establecer la relación entre las razones de perímetro, superficie y volumen de figuras semejantes
10. Calcular distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando la escala

III. Teorema de Thales

11. Identificar y construir triángulos semejantes utilizando el teorema de Thales
12. Construir gráficamente: medio, tercero y cuarto proporcional
13. Dividir un segmento en partes iguales y/o proporcionales
14. Representar números racionales en la recta real (con regla y compás)
15. Calcular distancias inaccesibles en situaciones reales

Seguidamente mostramos unas tablas donde aparecen los objetivos anteriores agrupados según los distintos focos para hacer un estudio detallado de las competencias de PISA a las que contribuye cada uno. Recordemos que:

PR= Pensar y Razonar, AJ= Argumentar y Justificar, C= Comunicar, M= Modelizar, RP= Resolver Problemas, R= Representar, LS= Lenguaje Simbólico, HT=Herramientas tecnológicas.

Proporcionalidad de segmentos		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Reconocer series de segmentos proporcionales	*	*	*		*			
2	Calcular la razón de dos segmentos					*		*	
3	Calcular numéricamente medio, tercero y cuarto proporcional	*						*	
4	Construir segmentos proporcionales dada la razón	*		*			*		

Semejanza de figuras		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
5	Identificar y describir invariantes entre dos figuras semejantes	*		*					
6	Identificar figuras o polígonos semejantes y deducir su razón de semejanza					*		*	
7	Construir (con regla y compás, Geogebra, ...) un polígono (o figura) semejante a otro, dada la razón	*		*			*		*
8	Reconocer triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza. Cálculo de distancias inaccesibles	*	*			*			
9	Establecer la relación entre las razones de perímetro, superficie y volumen de figuras semejantes	*	*		*	*		*	
10	Calcular distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando la escala	*		*		*			

Teorema de Thales		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
11	Identificar y construir triángulos semejantes utilizando el teorema de Thales	*	*			*			
12	Construir gráficamente: medio, tercero y cuarto proporcional	*					*		*
13	Dividir un segmento en partes iguales y/o proporcionales	*				*			*
14	Representar números racionales en la recta real (con regla y compás)						*		*
15	Calcular distancias inaccesibles en situaciones reales	*			*	*			

Como resumen de las tablas anteriores, la siguiente tabla muestra el balance total de la contribución al desarrollo de las competencias PISA:

RECUENTO		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS	3	1	2		2	1	2	
2	FIGURAS SEMEJANTES	5	2	3	1	4	1	2	1
3	TEOREMA DE THALES	4	1		1	3	2		3
TOTAL		12	4	5	2	9	4	4	4

Observando la tabla anterior, podemos concluir que las competencias a las que más se contribuye son *Pensar y Razonar*, *Comunicar* y *Resolver Problemas* mientras que al resto se contribuye en menor medida. Cabe destacar que la competencia *Modelizar* sólo la desarrollamos en dos objetivos dentro de dos focos distintos. Sin embargo, en el desarrollo de las sesiones de clase que expondremos más adelante intentaremos de la mejor forma posible desarrollar todas las competencias. Para concluir esta sección, justificaremos brevemente las competencias PISA que se pretenden cubrir con cada uno de los objetivos:

1. Reconocer series de segmentos proporcionales
 - PR: Deben elegir razonadamente cuando dos o más segmentos son proporcionales, para ello, deben conocer varios conceptos.
 - AJ: Tienen que argumentar porque algunos segmentos son o no proporcionales.
 - C: Deben expresar ideas matemáticas con claridad.
 - RP: Deben resolver problemas donde tienen que reconocer segmentos proporcionales.
2. Calcular la razón de dos segmentos
 - RP: Deben plantear y resolver problemas.
 - LS: Usan expresiones algebraicas con variables y resuelven ecuaciones.
3. Calcular numéricamente medio, tercero y cuarto proporcional
 - PR: Deben entender que significan y la diferencia entre medio, tercero y cuarto proporcional.
 - LS: Usan expresiones algebraicas y resuelven ecuaciones.
4. Construir segmentos proporcionales dada la razón
 - PR: Deben relacionar correctamente ambos segmentos mediante la razón.
 - C: Tienen que expresar como han realizado la construcción.
 - R: Usan uno de los sistemas de representación al dibujar.
5. Identificar y describir invariantes entre dos figuras semejantes
 - PR: Relacionan propiedades de diferentes figuras para poder extraer alguna relación entre ellas.
 - C: Describen invariantes.
6. Identificar figuras o polígonos semejantes y deducir su razón de semejanza
 - RP: Deben resolver y plantear problemas usando dicho cálculo.
 - LS: Usan expresiones algebraicas con variables y resuelven ecuaciones.
7. Construir (con regla y compás, Geogebra, ...) un polígono (o figura) semejante a otro, dada la razón

- PR: Para realizar algún procedimiento de construcción deben conocer muchas propiedades geométricas.
 - C: Explican cómo han realizado el proceso.
 - R: Usan el sistema de representación gráfico o tecnológico.
 - HT: Utilizan herramientas tecnológicas.
8. Reconocer triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza. Cálculo de distancias inaccesibles
- PR: Deben tener en cuenta los criterios y compararlos con los triángulos en cada problema.
 - AJ: Justifican por qué son o no semejantes.
 - RP: Aplican estos criterios para resolver problemas de alturas inaccesibles.
9. Establecer la relación entre las razones de perímetro, superficie y volumen de figuras semejantes
- PR: Tienen que seleccionar los elementos relevantes e intentar establecer relaciones.
 - AJ: Elaboran una lista de argumentos para llegar a la relación.
 - RP: Basándose en estas relaciones pueden plantear y resolver problemas.
 - M: Expresan matemáticamente un problema y usan procesos matemáticos para resolverlo.
 - LS: Usan ecuaciones algebraicas para averiguar la relación existente.
10. Calcular distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando la escala
- PR: Deben entender correctamente el significado de escala.
 - C: Expresan ideas matemáticas que relacionen mapas, planos, etc. con la realidad.
 - RP: Usan el concepto de escala para plantear y resolver problemas.
11. Identificar y construir triángulos semejantes utilizando el teorema de Thales
- PR: Comprenden el significado del teorema.
 - AJ: Argumentan si los triángulos son o no semejantes.
 - RP: Pueden resolver problemas utilizando este teorema.
12. Construir gráficamente: medio, tercero y cuarto proporcional
- PR: Deben entender que significan y la diferencia entre medio, tercero y cuarto proporcional.
 - R: Diferentes formas de representación.
 - HT: Hacen uso de software informáticos.
13. Dividir un segmento en partes iguales y/o proporcionales
- PR: Tienen que relacionar diferentes conceptos para poder realizar la división del segmento.
 - RP: Resuelven y analizan problemas.
 - HT: Pueden alcanzar el objetivo usando programas informáticos.
14. Representar números racionales en la recta real (con regla y compás)
- R: Es una forma diferente de representar un número.
 - HT: Usan programas o software informáticos.
15. Calcular distancias inaccesibles en situaciones reales
- PR: Relacionan los datos del problema con lo que saben para realizar el cálculo.
 - M: Deben identificar el problema y utilizar las matemáticas para resolverlo.
 - RP: Tienen que plantear y resolver el problema.

3.2.2 Errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de enseñanza-aprendizaje

Al igual que las expectativas de aprendizaje, las limitaciones, los errores y dificultades, son imprescindibles en cualquier proceso de aprendizaje. En nuestro tema, las dificultades se encuentran en los diferentes focos citados aunque como veremos a continuación el mayor número de errores se centra en el segundo foco. Quizás sea porque es la parte central del tema, ya que el primer foco recoge los contenidos necesarios para alcanzar los objetivos de éste y el tercer foco abarca conceptos y estrategias que amplían los del segundo foco.

En la siguiente tabla mostramos los errores y dificultades que pensamos que pueden surgir en el desarrollo de la unidad didáctica, señalando su relación con los objetivos anteriores y con los focos fundamentales del tema:

	Errores	Objetivos	Focos
1	No verificar la solución apoyándose en la razón de semejanza	4, 7, 10	1
2	Utilizar un procedimiento aditivo para hallar segmentos proporcionales	1, 2	1
3	Interpretar la razón como parte de la unidad u operador fraccionario	4, 7	1 y 2
4	Dificultades propias del lenguaje (doble, mitad,...)	4, 7	1 y 2
5	Confundir figuras parecidas con semejantes	1,5	2
6	Mezclar los criterios de semejanza	8	2
7	Dificultad con la notación de escala	10	2
8	Vincular la escala a una única unidad de medida	10	2
9	Generalizar la razón de semejanza en superficies y volúmenes	9, 10	2
10	Identificar erróneamente polígonos semejantes (comprobando sólo algunos lados)	1, 5	2 y 3
11	Establecer de manera errónea la proporción que determina el teorema de Thales o la semejanza de figuras	15	2 y 3
12	No seleccionar correctamente los datos para resolver un problema o utilizar datos innecesarios	10, 15	2y 3
13	Aplicar el teorema de Thales cuando no se cumplen las hipótesis (por ejemplo, paralelismo)	11, 15	3
14	Dificultad para representar una situación gráficamente para resolverla mediante semejanza	15	3

Presentamos a continuación, algunas tareas que pensamos pueden contribuir a evitar la aparición de los errores anteriores o en su defecto a eliminarlos:

Tarea 1

Marta es coleccionista de maquetas y quiere comprar una nueva maqueta del famoso barco Titanic. La ofertan a escala 1:180 y 1:300.

- ¿Cuál te comprarías tú para apreciar mejor los detalles? Justifica tu respuesta.
- Al final Marta compró la maqueta de 1:300. Sabiendo que el largo de un camarote mide 7 cm, el ancho 2 cm y el alto 2,5 cm y que el barco tiene 120 camarotes, ¿cuál es el volumen del camarote en realidad?

La tarea se centra básicamente en cubrir el objetivo 10, es decir, *Calcular distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando la escala*. Por los conceptos que están involucrados en este objetivo, nos encontramos dentro del segundo foco y las competencias que intentaremos alcanzar son *Pensar y Razonar y Comunicar*. Los errores que podemos detectar son:

7. Dificultad con la notación de escala
8. Vincular la escala a una única unidad de medida
9. Generalizar la razón de semejanza en superficies y volúmenes
12. No seleccionar correctamente los datos para resolver un problema o utilizar datos innecesarios

Tarea 2

Para medir la altura de su casa, Antonio, de 165 cm de altura y 55 kg, se situó a 1,5 m de la verja de su jardín, que se encuentra a 25,5 m de su casa. Sabiendo que la verja mide 3,5 m de altura, calcula la altura de la casa.

Esta tarea pretende cubrir los objetivos 11 y 15, es decir, *Identificar y construir triángulos semejantes utilizando el teorema de Thales y Calcular distancias inaccesibles en situaciones reales*. Al involucrar el teorema de Thales nos encontramos dentro del tercer foco y las competencias que perseguimos alcanzar son *Pensar y Razonar y Resolver Problemas*. Los errores que podríamos detectar son:

11. Establecer de manera errónea la proporción que determina el teorema de Thales o la semejanza de figuras
12. No seleccionar correctamente los datos para resolver un problema o utilizar datos innecesarios
14. Dificultad para representar una situación gráficamente para resolverla mediante semejanza

3.3 Análisis de instrucción

El análisis de instrucción, como parte del análisis didáctico, se sitúa en torno a diferentes componentes que son importantes en el proceso de planificación y que giran en torno a las tareas matemáticas escolares. Entre las que propone Lupiáñez (2009), en este trabajo nos centraremos en dos: la complejidad de las tareas y los materiales y recursos que pueden emplearse en ellas.

3.3.1. Complejidad de las tareas

En el marco de PISA, las tareas se distinguen de acuerdo a las demandas cognitivas que le exigen a los alumnos que tienen que resolverlas, dando lugar a tres tipos de tareas de acuerdo a la complejidad de esas demandas: reproducción, conexión y reflexión (OCDE, 2005). Veamos algunos ejemplos:

Reproducción

Se quiere dibujar un polígono semejante a otro cuyo perímetro mide 100 cm. ¿Cuánto medirá el perímetro del primer polígono si dos lados homólogos miden respectivamente 25 y 40 cm?

Para realizar las tareas con nivel de complejidad de reproducción en este tema, el alumnado, bien con su conocimiento previo, o bien mediante aplicación directa de un concepto o procedimiento debe poder obtener el resultado. Si tenemos en cuenta las competencias PISA, por ejemplo, la competencia de *Comunicar*, el alumno debería ser capaz de expresarse usando correctamente la terminología del tema: lados homólogos, razón de semejanza, etc.

Conexión

En el plano de una vivienda, a escala 1:350, las medidas del jardín son 36 mm y 29 mm. ¿Cuál es la superficie real del jardín?

Para conexión, el criterio es que el alumnado tiene que decidir ante una variedad de técnicas como resolver el problema y además saber encontrar el camino hacia lo que se le pide enlazando ideas y conceptos del tema ya aprendidos. Desde el punto de vista de la competencia de *Argumentar y Justificar*, tiene que conocer y encadenar argumentos matemáticos de diferentes tipos para poder expresarse correctamente de forma oral o escrita.

Reflexión

Un constructor quiere hallar la altura de un edificio poniendo una estaca sobre una mesa de madera. Él se encuentra a 24 m del edificio, la estaca mide 0,52 m y la mesa tiene 1 m de altura y 0,8 m de ancho.

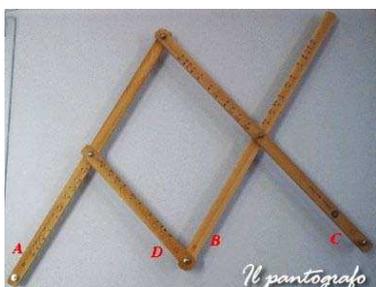
Para el último nivel de complejidad, se requiere que el alumno analice la situación planteada y sepa qué conceptos y procedimientos del tema debe usar para resolver el problema. Además, la resolución será compleja, utilizando en algunas ocasiones conceptos que no son propios del tema de semejanza. Analizándolo desde la competencia de *Resolver Problemas*, no sólo deben establecer relaciones entre distintas áreas matemáticas y formas de representación sino también conlleva reflexionar sobre las estrategias y las soluciones.

3.3.2. Materiales y recursos

Los materiales y recursos didácticos que podríamos utilizar en el tema de semejanza son:

Pantógrafo

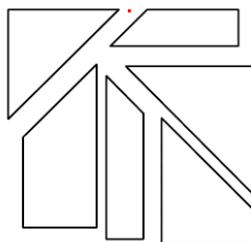
Un pantógrafo es un mecanismo articulado basado en las propiedades de los paralelogramos (Grupo Beta, 1990). Dispone de unas varillas conectadas de tal manera que se pueden mover respecto de un punto fijo (pivote). En nuestro tema, podríamos usar un pantógrafo de dibujo cuyo principio es usar una imagen guía para ampliarla. Una vez dibujadas las figuras semejantes, podemos usarlo para que comprueben la relación que existe entre algunas de sus propiedades.



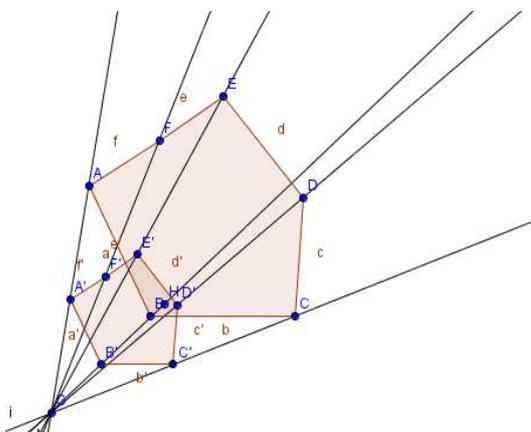
Puzle

Este puzle fue creado para poder superar el error que comenten algunos niños cuando usan procedimientos multiplicativos en vez de procedimientos aditivos. Si deben construir un

puzle igual pero el doble de grande y cometen el error, no podrán montarlo. En el tema de semejanza, este error aparece con frecuencia así que podríamos usarlo al principio del tema para explicarle la diferencia entre un procedimiento u otro o al acabar el tema para comprobar que han superado el error.



Geogebra (o cualquier otro software informático)



Ya comentamos la importancia de estos programas cuando vimos los diferentes sistemas de representación, en este caso, podemos usarlo para realizar construcciones de polígonos semejantes utilizando diferentes procedimientos que manualmente serían tediosos. Además, en Geogebra, podemos comprobar propiedades de figuras semejantes cuando movemos algunos de los puntos de uno de los polígonos.

También se usarán recursos convencionales como pizarra, libro de texto, fichas, apuntes propios y relaciones de ejercicios.

3.3.3. Ejemplificación del análisis de una tarea

Aunque en los puntos anteriores nos hemos centrado en la complejidad y los materiales, siempre que analizamos tareas, no sólo tenemos que tener en cuenta la actividad matemática que queremos que los alumnos realicen tenemos que analizar otros factores. Veamos estos factores en un ejemplo:

Tarea: *El estanque*

Un estanque tiene 2,25 m de ancho. Situándonos a 150 cm del borde, desde una altura de 1,74 m, observamos que la visual une el borde del estanque con la línea del fondo. ¿Qué profundidad tiene el estanque?

Metas:

Se pretende contribuir al objetivo siguiente:

8. Reconocer triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza. Cálculo de distancias inaccesibles

El problema está pensado para que el alumno sea capaz de dibujar la situación, identificando los triángulos semejantes y resuelva el problema mediante la proporción que se establece entre los lados de los triángulos semejantes.

Recursos:

Lápiz, papel y regla.

Agrupamiento:

- Los alumnos trabajan por parejas.
- El grupo clase con el profesor.

Respecto al agrupamiento, debido al grado de dificultad es mejor que trabajen por parejas, así podrán dar diferentes soluciones y argumentar entre ellos.

Interacción:

- Entre el profesor y el gran grupo.
- Entre la pareja para debatir la solución.
- Entre el profesor y cada una de las parejas.

Contribución a limitaciones:

6. Mezclar los criterios de semejanza.
11. Establecer de manera errónea la proporción de los lados en figuras semejantes.
14. Dificultad para representar una situación gráficamente para resolverla mediante semejanza

En este problema, se pretende detectar los errores anteriores aunque en algunos casos puede que se superen.

Complejidad:

- Pensar y razonar: Reflexión.
- Comunicar: Conexión.
- Resolver problemas: Conexión

Respecto a la competencia *Pensar y Razonar* requiere que el alumno no ejercite un procedimiento aprendido, se pide que transforme una situación en un problema matemático cuestionándose y empleando conceptos matemáticos, por eso, el grado de complejidad es reflexión. En el caso de la competencia *Comunicar*, su grado es conexión por la relación que debe establecerse entre las parejas para llegar a la solución. En la última competencia, *Resolver Problemas*, también pretendemos alcanzar el grado de conexión porque para resolver el problema no hay que seguir un procedimiento rutinario, previamente hay que hacer un dibujo que no es obvio.

Finalidad:

- Descontextualización y de aplicación.
- Ejercitación.

Es una tarea de aplicación a problemas de la vida cotidiana y además tienen que ejercitar un procedimiento conocido una vez que lleguen al planteamiento del problema.

Fase:

Desarrollo

4. PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA

La siguiente unidad didáctica está dirigida a alumnos/as de 4º de E.S.O. de la opción A. Nuestro objetivo principal es transmitir al alumnado la importancia de nuestro tema, semejanza, en situaciones de la vida cotidiana. Para ello, vamos a utilizar el análisis didáctico anterior, la descripción de los objetivos y contenidos, etc. Además desarrollaremos algunas sesiones de clase para describir la secuenciación de tareas y la gestión del aula, explicaremos la evaluación que llevaremos a cabo y como atenderemos a la diversidad.

4.1 Objetivos de etapa

Según la citada orden ECI/2220/2007, la enseñanza de las Matemáticas en esta etapa tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.
4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.
5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.
7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
10. Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.

11. Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica.

En el artículo 4, encontramos los objetivos de la Educación Secundaria obligatoria que harán que los alumnos y alumnas desarrollen algunas capacidades, entre ellos destaco las siguientes:

- a. Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.
- b. Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.
- c. Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres.
- d. Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.
- e. Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

4.2. Contenidos y objetivos específicos de la unidad didáctica

Para nuestra unidad, centramos las prioridades de aprendizaje en los objetivos que expondremos a continuación. De los tres focos que describimos en el punto anterior, excepto los dos últimos objetivos que pertenecen al tercer foco (teorema de Thales), el resto los podemos incluir en el segundo foco (semejanza de figuras).

1. Calcular la razón de dos segmentos
2. Identificar y describir invariantes entre dos figuras semejantes
3. Identificar polígonos semejantes y deducir su razón de semejanza
4. Construir (con regla y compás, Geogebra,...) un polígono (o figura) semejante a otro, dada la razón
5. Reconocer triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza
6. Establecer la relación entre las razones de perímetro, superficie y volumen de figuras semejantes
7. Relacionar áreas y perímetros de polígonos semejantes
8. Relacionar volúmenes de cuerpos semejantes
9. Calcular distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando la escala
10. Identificar y construir triángulos semejantes utilizando el teorema de Thales
11. Calcular distancias inaccesibles en situaciones reales usando el teorema de Thales

En relación con los objetivos anteriores y con la lista expuesta en el punto anterior, detallamos los contenidos a los que les damos especial importancia en esta unidad didáctica:

De entre los *términos* que aparecen en el tema:

- Magnitud, medida, longitud
- Proporcionalidad numérica
- Lados y ángulos homólogos

Ahora describo los *conceptos*:

- Razón, semejanza, escala (gráfica y numérica)
- Figuras y polígonos semejantes
- Triángulos en posición de Thales
- Criterios de semejanza entre triángulos

Las *actitudes* que deberían desarrollar a lo largo de la unidad didáctica son:

- Curiosidad e interés por investigar relaciones geométricas.
- Reconocimiento de la presencia y uso de la semejanza en la vida real.
- Sensibilidad y gusto por la realización sistemática y presentación cuidadosa y ordenada de trabajos geométricos.

Las *destrezas* que pretendemos desarrollar son:

- Identificar lados proporcionales en polígonos
- Construcción de segmentos proporcionales

Respecto a los *razonamientos* que se pueden considerar:

- *Deductivo*
 - Identificar polígonos semejantes
 - Aplicar los criterios de semejanza
 - Cálculo de la relación entre áreas y perímetros de polígonos semejantes y entre volúmenes de cuerpos semejantes
- *Inductivo*
 - Establecer la relación entre las razones de perímetro, área y volumen de polígonos en relación de semejanza
- *Figurativo*
 - Representación a escala de un objeto de la realidad
 - Dibujar un polígono semejante a otro dada la razón
- Cálculo de la razón de semejanza entre figuras o polígonos semejantes
- Resolución de problemas de triángulos semejantes
- Obtener la escala
- Cálculo de distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando el concepto de escala

Por último, las *estrategias* son:

- Construcción de polígonos semejantes
- Desarrollar la capacidad de construcción gráfica que se deriva del teorema de Thales:
 - Cálculo de distancias y alturas inaccesibles usando el teorema de Thales
 - Cálculo de la longitud de un segmento en triángulos en posición de Thales

En relación con las competencias básicas, en nuestra unidad trabajaremos las siguientes:

Razonamiento matemático:

- Aplicar destrezas y desarrollar actitudes para razonar matemáticamente.
- Comprender una argumentación matemática.
- Expresarse y comunicarse a través del lenguaje matemático.

Conocimiento e interacción con el mundo físico y natural:

- Discriminar formas, relaciones y estructuras geométricas.

- Identificar modelos y usarlos para extraer conclusiones.

Digital y tratamiento de la información:

- Manejar herramientas tecnológicas para resolver problemas.

Aprender de forma autónoma a lo largo de la vida:

- Ser capaz de comunicar de manera eficaz los resultados del propio trabajo.

4.3. Metodología

Como ya hemos mencionado en la introducción de este punto, centraremos toda nuestra atención en la importancia que tiene la semejanza en los fenómenos cotidianos. Para ello intentaremos llevar los conceptos al alumnado de forma que podamos relacionarlos con aspectos de la vida cotidiana y así podamos mantener su motivación. En vez de realizar una sola sesión de motivación, hemos decidido ir motivando, recordando, afianzando y ampliando cada concepto a lo largo de la unidad. Cada sesión la vamos a terminar afianzando lo aprendido y en algunas ocasiones adelantando lo que veremos en la siguiente, de forma que el alumnado venga motivado y habiendo recordado algo, por lo que les será más fácil seguir la clase y participar en ella.

La metodología que se seguirá será activa, con exposiciones teóricas y realización de numerosas actividades y ejercicios que permitirán que los alumnos/as de una forma progresiva afiancen los conceptos, procedimientos y técnicas matemáticas. Por ejemplo, intentaremos que en cada sesión participen los alumnos realizando actividades en la pizarra e incluso explicando conceptos a partir de éstas. Pretendemos en principio que en estas intervenciones el profesor intervenga lo mínimo, intentando que los alumnos/as se corrijan entre ellos. Realizaremos también una serie de actividades que elaborarán en grupo y entregarán al profesor/a para su posterior corrección y evaluación. Como actividades extra, propondremos dos trabajos de investigación, con el objetivo de que comiencen a familiarizarse con la biblioteca y los buscadores de internet, así como con la contrastación de la información obtenida. Por otra parte, tendremos en cuenta la diversidad de la clase, para atenderlos se entregarán ejercicios y actividades de refuerzo o ampliación. También se motivará la participación en clase ya que se pretende que los escolares tengan una actitud abierta y crítica. De manera general, el esquema metodológico de las sesiones será el siguiente:

- Realización de un resumen inicial (oral o en la pizarra) donde intervengan los alumnos para recordar lo que se explicó en la sesión anterior.
- Realización en la pizarra de alguna tarea propuesta y aclaración de dudas del día anterior.
- Explicación de los conceptos matemáticos con la presentación de un problema que ejemplifique los contenidos a tratar en la sesión.
- Realización de tareas en clase.
- Propuesta de tareas para la siguiente sesión.
- En algunas sesiones, uso del ordenador para la representación gráfica de las propiedades de las figuras semejantes o para su construcción.

4.4. Secuenciación y organización de las tareas de la unidad didáctica. Gestión del aula

Vamos a describir la organización de las tareas de la unidad didáctica. Las tareas se realizarán en ocho sesiones de clase que en orden de ejecución serían:

1. Introducción al concepto de figuras semejantes. Cálculo de la razón de semejanza
2. Construcción de figuras semejantes
3. Criterios de semejanza de triángulos
4. Relación entre perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes
5. Teorema de Thales
6. Escala
7. Aplicación al cálculo de distancias inaccesibles
8. Sesión de evaluación

En el siguiente punto, se describirá el uso de un cuestionario que podemos incluir dentro de las actividades iniciales, ya que nos servirá para revisar los conocimientos previos sobre semejanza que deberían tener los alumnos. Se utilizarán tareas de construcción de significados, como por ejemplo, tareas donde tengan que dibujar figuras semejantes o donde tengan que calcular la razón de semejanza. Respecto a las tareas de ejercitación, encontraremos las tareas que implican el uso de los criterios de semejanza o del teorema de Thales. Entre las tareas de síntesis destaco por ejemplo, una tarea donde haya que calcular la razón de semejanza entre dos polígonos para después calcular algunos segmentos desconocidos o utilizar esta razón para resolver algún problema.

Por último, es necesario que realicen actividades o problemas donde vean la importancia de la semejanza para resolver problemas de la vida cotidiana.

Ejemplo:

Tarea: *La casa y el perro*

Observa las siguientes figuras:

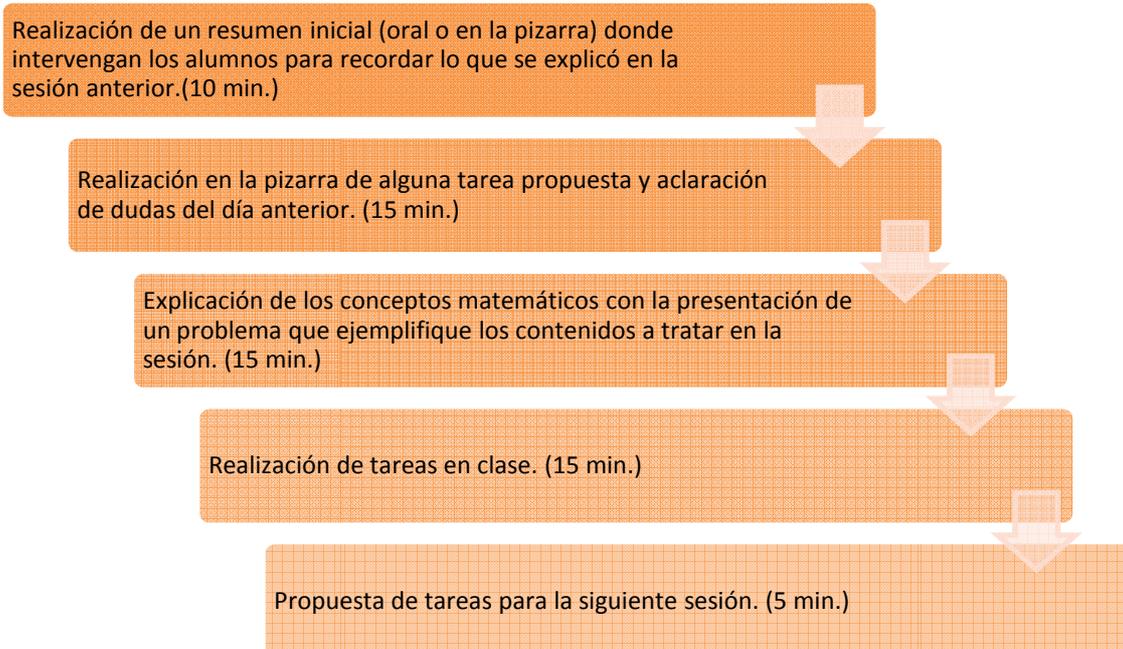


1. Utilizando papel cuadriculado amplía estas figuras al doble.
2. Explicad un procedimiento que os permita reducirlas a la mitad y a la tercera parte.
3. Compara el área de las figuras obtenidas en los apartados anteriores. ¿Qué relación existe entre ellas?

Podríamos incluir esta tarea en la segunda sesión y podría servir para afianzar los conceptos de razón y de figuras semejantes y también para que dibujen figuras semejantes.

4.5 Descripción de las sesiones de la unidad didáctica

Ya vimos en la sección de metodología como iban a llevarse a cabo las sesiones de clase, ahora desarrollaremos ocho sesiones, aunque antes vamos a describir la distribución general temporal de cada sesión teniendo en cuenta que dicha distribución será flexible según las necesidades del alumnado en cada momento. En las sesiones donde tengamos planeado el uso de los ordenadores, se modificará la distribución.



Sesión 1: INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE FIGURAS SEMEJANTES. CÁLCULO DE LA RAZÓN DE SEMEJANZA

Comenzaremos esta primera sesión, intentando recordar a los alumnos el concepto de semejanza de figuras. Usamos una ficha con diferentes figuras (ver anexo I) y realizaremos preguntas para que entre todos podamos llegar a la definición de figuras y polígonos semejantes. También explicaremos el concepto de razón y la importancia de su valor numérico.

Seguiremos realizando en clase algunas tareas a modo de ejemplos, para que luego ellos realicen otras en clase y algunos puedan salir a la pizarra para resolverlas. Antes de acabar la clase, le entregaremos una relación de ejercicios (ver anexo II) y les mandaremos algunos como tareas para casa. A continuación vamos a ver los contenidos que pretendemos trabajar y algunos ejemplos de tareas:

Contenidos y objetivos de la sesión:

Términos: Magnitud, medida, longitud, proporcionalidad numérica y lados y ángulos homólogos.

Conceptos: Semejanza, figuras y polígonos semejantes y razón.

Destrezas: Identificar lados proporcionales en polígonos.

Razonamientos:

- Identificar polígonos semejantes (deductivo).
- Cálculo de la razón de semejanza entre figuras o polígonos semejantes.

Objetivos a desarrollar:

1. Calcular la razón de dos segmentos.
2. Identificar y describir invariantes entre dos figuras semejantes.
3. Identificar polígonos semejantes y deducir su razón de semejanza.

Sistemas de representación utilizados: Verbal, simbólico y gráfico-numérico.

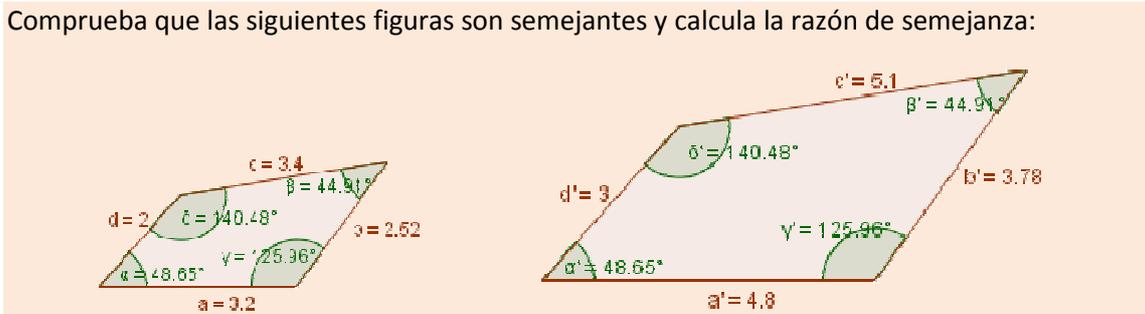
Intenciones y justificación de la planificación de la sesión:

Esta sesión es de iniciación y/o repaso de contenidos del 2º curso de la E.S.O., se destinará a recordar o enseñar a los alumnos los conceptos básicos para abordar las siguientes sesiones.

Secuencia de tareas:

Tarea 1: Cuadriláteros (Tarea inicial, Duración aproximada: 10 min.)

Comprueba que las siguientes figuras son semejantes y calcula la razón de semejanza:



Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

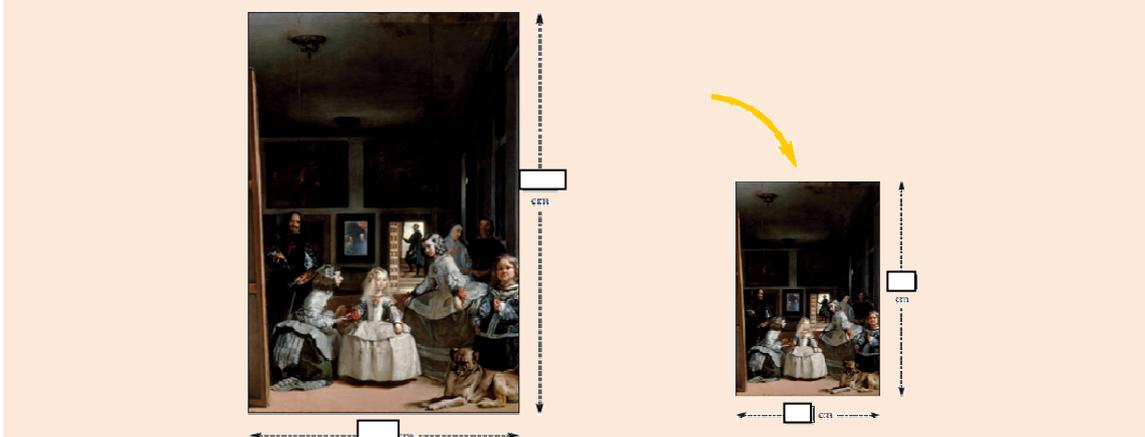
Gestión del aula: El trabajo, al ser la primera actividad, lo realizará el profesor en la pizarra aunque se intentará que los alumnos colaboren para que pongan en práctica los conceptos que acaban de aprender.

Esta tarea, la realizaremos como ejemplo después de explicar los conceptos previstos en la sección: en ella debemos comprobar que los ángulos homólogos son iguales y que los lados homólogos son proporcionales, así intentaremos que manejen y relacionen los conceptos básicos del tema. Además, pretendemos desarrollar su capacidad de expresar ideas matemáticas ante sus compañeros. Algunos errores que podemos encontrar son: la confusión de lados homólogos y la falta de verificación de las condiciones que deben darse para que dos figuras sean semejantes.

Tarea 2: Las Meninas (Tarea de clase, Duración aproximada: 10 min.)

Queremos hacer una fotocopia reducida de esta lámina, para que tenga el tamaño que se indica.

a) Mide y completa.



b) Calcula el porcentaje que habría que introducir en la fotocopidora para hacer la reducción.
c) ¿Cuál sería la razón de semejanza entre las dos figuras?

Material o recurso necesario: Regla, lápiz y papel.

Gestión del aula: El trabajo lo realizará cada alumno de forma individual, pasado un tiempo, alguno de ellos saldrá a la pizarra y expondrá la solución. El profesor intentará, en la medida de lo posible, no ayudar a los alumnos para que ellos trabajen solos.

Con la tarea anterior pretendemos que utilicen instrumentos de medida para establecer la relación entre dos figuras semejantes y que calculen la razón partiendo del concepto de porcentaje, es decir, usamos la proporcionalidad numérica. Hay que destacar que aparecen dos elementos transversales: el uso de un instrumento cotidiano como la fotocopidora y la aparición de un cuadro famoso.

Tarea 3: Rectángulos (Tarea para casa)

Dibuja un rectángulo de 3 cm de largo y 5 cm de ancho y otro que mida 1 cm más de largo y 1 cm más de ancho. ¿Son semejantes?

Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

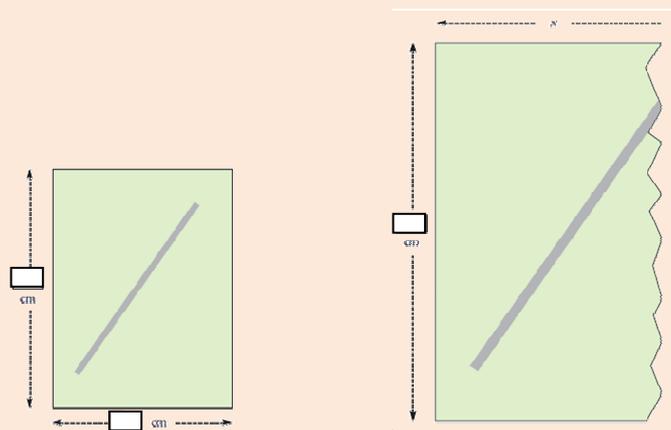
Gestión del aula: El trabajo lo realizará cada alumno en casa y se entregará o corregirá en la siguiente sesión.

Esta tarea tiene importancia, no por la dificultad o el procedimiento a seguir, sino porque nos permitirá comprobar si los alumnos comenten el error de usar un procedimiento aditivo en lugar de un procedimiento multiplicativo.

Tarea 4: Fotocopidora (Tarea para casa)

Queremos ampliar esta lámina al tamaño que se indica.

a) Mide y completa las dimensiones en las casillas vacías.



b) Calcula: la razón de semejanza, el valor de x y el valor del listón en la nueva lámina.

Material o recurso necesario: Regla, lápiz y papel.

Gestión del aula: El trabajo lo realizará cada alumno en casa y se entregará o corregirá en la siguiente sesión.

Con esta tarea queremos comprobar que los alumnos han adquirido los procedimientos básicos para realizar algunos problemas de nuestro tema. Los errores que

pueden cometer es que no calculen correctamente la razón porque se equivoquen al medir y ya obtengan unos valores de x e y erróneos.

Podemos situar las tareas anteriores dentro de dos contextos según el Informe PISA: laboral y público.

Sesión 2: CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS SEMEJANTES

En esta sesión suponemos que los alumnos ya saben los conceptos básicos del tema, por ello, nuestro objetivo principal es que sean capaces de construir o establecer relaciones entre figuras semejantes gráficamente.

Corregiremos algunas tareas que se mandaron para casa en la sesión anterior e intentaremos resolver las dudas que hayan podido surgir. Durante los primeros veinte minutos, realizaremos algunas tareas para ejemplificar como podemos dibujar figuras semejantes utilizando papel milimetrado. En la siguiente media hora, aprovechando que en clase tenemos un ordenador para cada dos alumnos, utilizaremos el programa Geogebra para explicar algunos métodos para construir polígonos semejantes. Antes de finalizar la clase, mandaremos varias tareas para la sesión siguiente.

Contenidos y objetivos de la sesión:

Destreza: Construcción de segmentos proporcionales.

Razonamiento: Dibujar un polígono semejante a otro dada la razón.

Estrategia: Construcción de polígonos semejantes.

Objetivo a desarrollar:

4. Construir (con regla y compás, Geogebra,...) un polígono (o figura) semejante a otro, dada la razón.

Sistemas de representación utilizados: Verbal, gráfico-numérico, tabular y tecnológico.

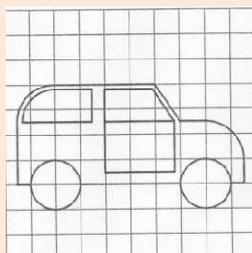
Intenciones y justificación de la planificación de la sesión:

Esta sesión, es continuación de la anterior, en la anterior se vieron los conceptos básicos identificando figuras semejantes y en esta pretendemos que usen lo aprendido para que dibujen figuras, es decir, en esta sesión serán ellos los protagonistas utilizando materiales como la regla o el ordenador.

Secuencia de tareas:

Tarea 1: El coche (Tarea inicial, Duración aproximada: 10 min.)

Toma una hoja de papel cuadriculado y dibuja sobre ella una ampliación del dibujo de abajo al doble de tamaño y una reducción a la tercera parte.



Material o recurso necesario: Regla, lápiz y papel.

Gestión del aula: El trabajo será individual aunque podrán consultar las dudas con su compañero más cercano. Pasados unos minutos, el profesor o algún alumno lo resolverá en la pizarra.

Hemos elegido esta sencilla tarea, para que comprueben lo fácil que es dibujar figuras semejantes con la ayuda de papel milimetrado. Además, comenzaremos explicando el caso en que la ampliación es al doble porque es un término más familiar para ellos. En esta tarea se pueden cometer algunos errores según el procedimiento que los alumnos sigan para su resolución, por ejemplo, que amplíen o reduzcan sólo usando una dimensión y no las dos.

Tarea 2: Figuras con Geogebra (Tarea de clase, Duración aproximada: 35 min.)

1. Dibuja un polígono con Geogebra y dibuja su semejante usando la opción homotecia. Previamente, define un deslizador que usaremos como razón.
2. Construye la siguiente tabla:

Lado 1	Lado 2	Área
Lado 1'	Lado 2'		Área'
Lado 1/ Lado 1'	Lado 2/ Lado 2'		Área/ Área'

3. Mueve la razón en el deslizador y cualquier punto del polígono inicial y observa lo que ocurre en los valores de la tabla y en el otro polígono.
4. Mide y observa la relación entre los ángulos de los distintos polígonos que se forman.

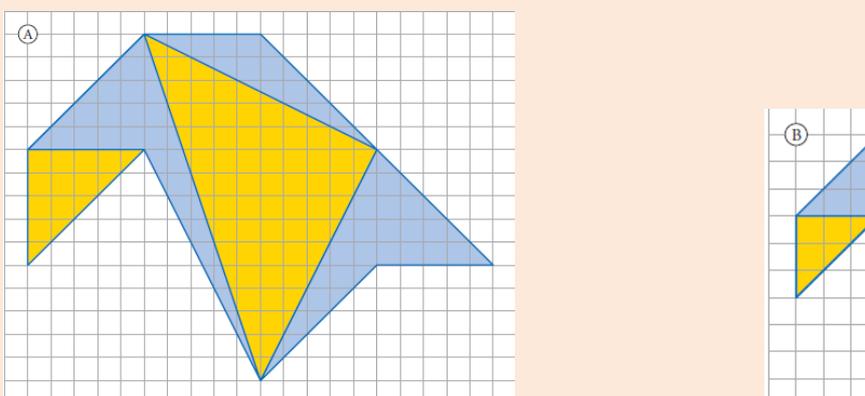
Material o recurso necesario: Ordenador.

Gestión del aula: Las tareas serán llevadas a cabo por parejas bajo la supervisión del profesor y después de la explicación del procedimiento.

La importancia de esta tarea radica en que los alumnos sean capaces de familiarizarse con las nuevas tecnologías. En este caso, podremos ver propiedades de figuras semejantes que sólo pueden verse utilizando este programa. Otro aspecto interesante, es la colaboración que debe existir entre ambos compañeros para realizar el ejercicio. Como posibles errores pueden surgir problemas relacionados con el uso del programa.

Tarea 3: Figura reducida (Tarea para casa)

Completa la figura y escribe la razón de semejanza que transforma A en B.



Material o recurso necesario: Regla, lápiz y papel.

Gestión del aula: El trabajo lo realizará cada alumno en casa y se entregará o corregirá en la siguiente sesión.

En esta tarea, pretendemos que comparen la proporcionalidad de segmentos para que averigüen cuánto vale la razón de semejanza, es una tarea inusual en la que dadas las figuras sobre la cuadrícula deben ser capaces de dibujar y de calcular la razón. La dificultad de reducir la figura radica en las líneas oblicuas que no coinciden con los cuadrados de la cuadrícula.

Sesión 3: CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Esta tercera sesión parte de la explicación teórica de los criterios de semejanza de triángulos. Recordemos que habíamos comenzado definiendo la semejanza de figuras, después la semejanza de polígonos y ahora concretamos definiendo la semejanza de triángulos. Después de la exposición teórica y del resumen de la sesión anterior, comenzaremos realizando algunas tareas para que los alumnos aprendan a aplicar los criterios a triángulos para resolver problemas de aplicación a la vida cotidiana.

Contenidos y objetivos de la sesión:

Concepto: Criterios de semejanza entre triángulos.

Razonamiento: Aplicar los criterios de semejanza (deductivo).

Objetivo a desarrollar:

5. Reconocer triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza.

Sistemas de representación utilizados: Verbal, simbólico y gráfico-numérico.

Intenciones y justificación de la planificación de la sesión:

Esta sesión es quizás una de las más teóricas de nuestro tema, a pesar de ello, vamos a intentar mediante la realización de problemas que comprueben la aplicación de la semejanza en la vida cotidiana. La relación con la sesión anterior es obvia porque estamos analizando un caso concreto donde nuestros polígonos son triángulos. Respecto a la siguiente sesión, veremos la relación existente entre la semejanza y el perímetro, área y volumen por lo que tanto en esa como en otras es posible que tengamos que usar algún criterio para resolver problemas.

Secuencia de tareas:

Tarea 1: ¿Son semejantes los triángulos? (Tarea inicial, Duración aproximada: 10 min.)

En cada uno de los siguientes apartados se dan las medidas de los tres lados o de dos ángulos de dos triángulos, T y T' . Comprueba si son semejantes:

- T : 3 cm, 4 cm y 5 cm y T' : 9 cm, 12 cm y 15 cm.
- T : 3 cm, 5 cm y 6 cm y T' : 1'5 cm, 2'5 cm y 4 cm.
- T : 30°, 80° y T' : 70°, 30°.
- T : 90°, 20° y T' : 70°, 50°.

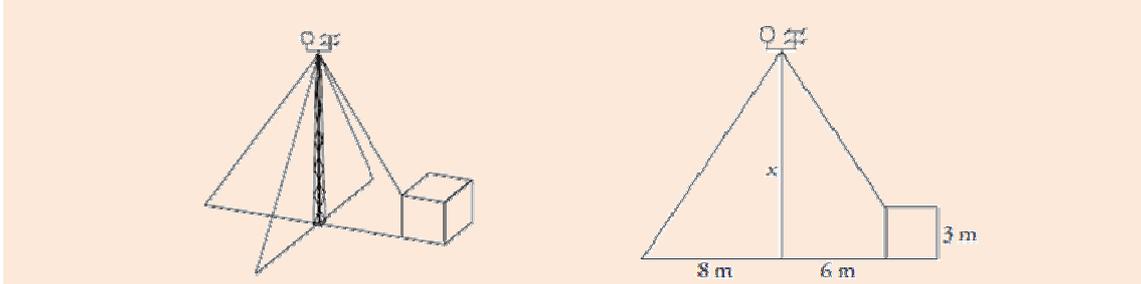
Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: Los dos primeros apartados serán realizados a modo de ejemplo por el profesor en la pizarra, el resto del ejercicio será realizado por cada uno de los alumnos en clase.

Al ser la primera tarea, pretendemos que simplemente apliquen los criterios teniendo en cuenta los lados y ángulos homólogos de los triángulos. El error que puede darse es que confundan o mezclen criterios.

Tarea 2: Antena (Tarea de clase, Duración aproximada: 10 min.)

Una antena de comunicaciones se sostiene mediante cuatro cables que tienen la misma inclinación. Tres de los cables están amarrados al suelo, y el cuarto, al techo de una caseta como indica la figura. Con los datos de la ilustración, calcula la altura de la antena.



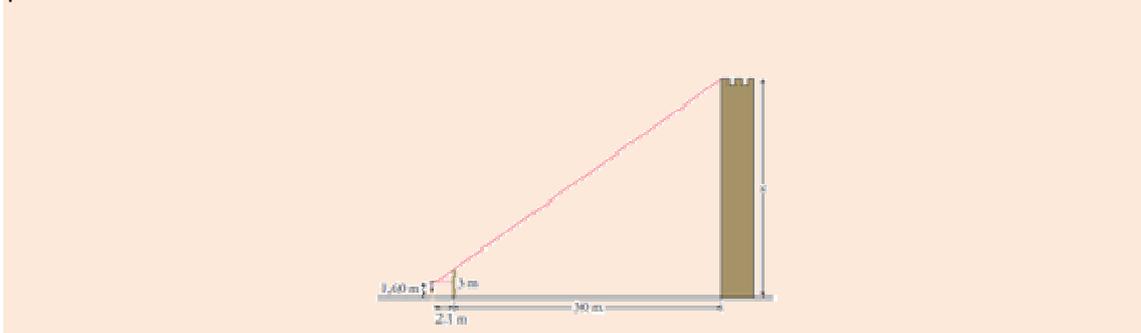
Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: La actividad será realizada por parejas con el fin de que entre ellos sean capaces de resolver dudas mediante la comunicación. Un tiempo después, la corregiremos en la pizarra.

El objetivo de esta tarea es que comprueben la utilidad de la semejanza en situaciones que ocurren a diario. Respecto a la resolución, hay que destacar que el primer paso es comprobar que triángulos son semejantes y el segundo es aplicar la proporcionalidad de los lados homólogos para calcular la distancia que queremos. Este puede ser un error, es decir, que calculen la distancia pedida sin antes comprobar que los triángulos son semejantes. Otro error puede ser que no sean capaces de averiguar que triángulos son semejantes.

Tarea 3: La torre (Tarea de clase, Duración aproximada: 10 min.)

Para calcular la altura de una torre, María clava en el suelo un listón de tres metros de altura y, después, retrocede hasta que coinciden en la visual los extremos del listón y de la torre. A continuación, toma las medidas que ves en la ilustración. Con esos datos, resuelve el problema.



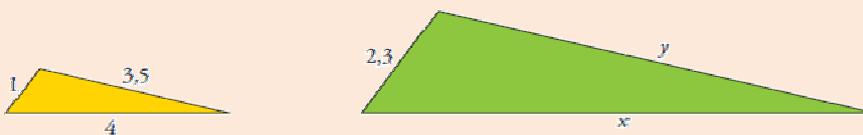
Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: La actividad será realizada por parejas con el fin de que entre ellos sean capaces de resolver dudas mediante la comunicación. Un tiempo después, la corregiremos en la pizarra.

El interés y los errores de esta tarea son similares a los de la anterior.

Tarea 4: Valor de los lados (Tarea para casa)

Observa las figuras y calcula x e y .



Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: El trabajo lo realizará cada alumno en casa y se entregará o corregirá en la siguiente sesión.

Esta tarea es sencilla y su finalidad es que los alumnos afiancen los criterios de semejanza estudiados en clase. Los alumnos deben tener en cuenta que previo al cálculo de los valores desconocidos, deben demostrar si los triángulos son semejantes y porqué.

Podemos situar las tareas anteriores dentro de dos contextos según el Informe PISA: laboral y personal.

Sesión 4: RELACIÓN ENTRE PERÍMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES DE FIGURAS SEMEJANTES

Para comenzar esta sesión haremos un repaso para recordar a los alumnos las fórmulas de las áreas y los volúmenes de los principales polígonos y cuerpos de revolución. Una vez visto esto, recordado lo visto en la sesión anterior y resueltas las posibles dudas, estableceremos la relación que existe entre estos y la semejanza ayudándonos de tareas para que entre todos lleguemos a ella. Luego, realizaremos tareas y mandaremos otras para que las realicen en casa.

Contenidos y objetivos de la sesión:

Razonamientos:

- Cálculo de la relación entre áreas y perímetros de polígonos semejantes y entre volúmenes de cuerpos semejantes (deductivo).
- Establecer la relación entre las razones de perímetro, área y volumen de polígonos en relación de semejanza (inductivo).
- Resolución de problemas de triángulos semejantes.

Objetivos a desarrollar:

6. Establecer la relación entre las razones de perímetro, superficie y volumen de figuras semejantes.
7. Relacionar áreas y perímetros de polígonos semejantes.
8. Relacionar volúmenes de cuerpos semejantes.

Sistemas de representación utilizados: Verbal, simbólico y gráfico-numérico.

Intenciones y justificación de la planificación de la sesión:

Esta sesión está relacionada con la anterior porque seguimos estudiando figuras semejantes pero comparando otras características: sus perímetros, sus áreas y sus volúmenes.

Secuencia de tareas:

Tarea 1: Pirámide (Tarea inicial, Duración aproximada: 10 min.)

La altura de una pirámide hexagonal regular mide 10 cm y su arista base, 6 cm. Indica cuáles de las siguientes pirámides hexagonales regulares son semejantes a ella, indica la razón de semejanza:

a) Altura: 2,5 cm, radio de la base: 2 cm

b) Altura: 65 cm, arista de la base: 39 cm

Calcula el volumen de las pirámides anteriores y establece una relación entre ellos.

Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: El trabajo, al ser la primera actividad, lo realizará el profesor en la pizarra aunque se intentará que los alumnos colaboren para que pongan en práctica los conceptos aprendidos.

Esta tarea es sencilla, pero nos servirá para que los alumnos recuerden la definición de pirámide hexagonal y vean la relación entre volúmenes de pirámides semejantes. Los errores pueden surgir a la hora de recordar la fórmula para calcular los volúmenes o cuando tengan que comprobar si se establece la misma proporción entre las alturas y las aristas.

Tarea 2: Perímetros (Tarea de clase, Duración aproximada: 10 min.)

Dos figuras son semejantes con razón de semejanza 4. Si el perímetro de la figura menor es 12 cm y el área 20 cm^2 , calcula el perímetro y el área de la figura mayor.

Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: El trabajo será individual aunque podrán consultar las dudas con su compañero más cercano. Pasados unos minutos, algún alumno lo resolverá en la pizarra.

El grado de complejidad de esta tarea es reproducción, es sencilla pero es necesario realizar al menos una para que vean la relación entre perímetros y áreas de figuras semejantes. Los errores pueden deberse a que los alumnos no sean capaces de establecer la relación correcta entre los perímetros usando la semejanza.

Tarea 3: Prisma (Tarea para casa)

El lado de la base de un prisma regular hexagonal mide 4'8 cm y su altura 8'2 cm. Si el lado de la base de otro semejante mide 12 cm, calcula la medida de su altura.

Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: El trabajo lo realizará cada alumno en casa y se entregará o corregirá en la siguiente sesión.

La importancia de esta tarea se debe a que además de usar los conceptos aprendidos en el tema, para calcular la altura deben usar el teorema de Pitágoras.

Sesión 5: TEOREMA DE THALES

Comenzaremos la sesión explicando el teorema de Thales: lo enunciaremos ayudándonos de la semejanza de triángulos. Daremos importancia a este teorema porque es un resultado muy conocido en matemáticas. Después de enunciar el teorema realizaremos algunas actividades para que el alumnado compruebe cómo podemos aplicarlo en problemas concretos y corregiremos algunas actividades anteriores para resolver las posibles dudas. Antes de finalizar la clase, mandaremos un trabajo de investigación que consiste en: buscar información sobre los orígenes de la semejanza o sobre el teorema de Thales y su autor. El trabajo será entregado en la última sesión de clase y podrá realizarse de manera individual o por parejas.

Contenidos y objetivos de la sesión:

Concepto: Triángulos en posición de Thales.

Estrategias:

- Desarrollar la capacidad de construcción gráfica que se deriva del teorema de Thales.
- Cálculo de la longitud de un segmento en triángulos en posición de Thales.

Objetivo a desarrollar:

9. Identificar y construir triángulos semejantes utilizando el teorema de Thales.

Sistemas de representación utilizados: Verbal, simbólico y gráfico-numérico.

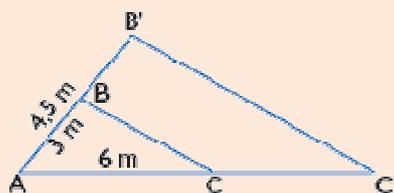
Intenciones y justificación de la planificación de la sesión:

Esta sesión está programada después de explicar los criterios de semejanza para que la comprensión del teorema de Thales les resultara más sencilla. Al enunciar el teorema vamos a señalar los triángulos semejantes que se forman y veremos porque son semejantes utilizando los criterios, pensamos que de esta forma van a aprender el teorema y también a recordar los criterios.

Secuencia de tareas:

Tarea 1: Segmentos desconocidos (Tarea inicial, Duración aproximada: 10 min.)

Halla la longitud del lado AC' . ¿Cómo están los triángulos ABC y $AB'C'$?



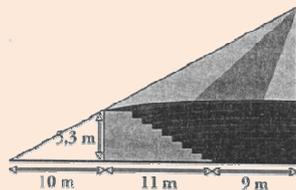
Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: La actividad será realizada a modo de ejemplo por el profesor en la pizarra.

Al ser la primera tarea, pretendemos que simplemente apliquen el teorema teniendo en cuenta los triángulos semejantes que se forman en el gráfico.

Tarea 2: El circo (Tarea inicial, Duración aproximada: 10 min.)

¿Cuál es la altura del siguiente circo? Sabemos que desde nuestra posición estamos a 10 m del circo, desde ahí al final de las escaleras hay 11 m y desde este punto al final del circo 9 m, también sabemos que la altura de las escaleras son 5,3 m.



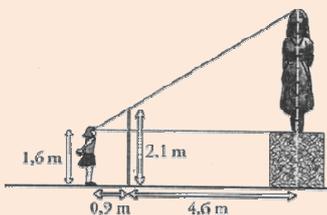
Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: La actividad será realizada a modo de ejemplo por el profesor en la pizarra.

A pesar de que en la descripción de la tarea hemos incluido el dibujo, pretendemos que con los datos del problema los alumnos sean capaces de desarrollar la capacidad gráfica para llegar a tener triángulos en posición de Thales y poder así aplicar el teorema. El error principal puede ser que no sean capaces de llegar a realizar el dibujo correctamente o incluso que con el dibujo no distingan los triángulos que están en posición de Thales.

Tarea 3: La estatua (Tarea de clase, Duración aproximada: 15 min.)

¿Cuánto mide el alto de la estatua del dibujo?



Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: La actividad será realizada individualmente. Un tiempo después, la corregiremos en la pizarra.

La diferencia entre esta tarea y la anterior, es que en esta hemos incluido el dibujo por lo que simplemente deben averiguar que triángulos son semejantes usando el teorema de Thales.

Podemos situar las tareas anteriores dentro de dos contextos según el Informe PISA: social y personal.

Sesión 6: ESCALA

Esta sesión es una de las más importantes desde el punto de vista de la fenomenología de nuestro tema, ya que, el uso de mapas, maquetas y planos es imprescindible en muchos aspectos de la vida cotidiana.

Queremos que el carácter de esta sesión sea práctico, por lo que, después de explicar el concepto de escala vamos a comenzar a realizar ejercicios. Durante la última media hora,

realizaremos un ejercicio grupal, en grupos de cuatro alumnos a ser posible, donde tengan que usar la información que ofrece un plano.

Contenidos y objetivos de la sesión:

Concepto: Escala (gráfica y numérica).

Razonamientos:

- Obtener la escala.
- Cálculo de distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando el concepto de escala.
- Representación a escala de un objeto de la realidad (figurativo).

Objetivo a desarrollar:

10. Calcular distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando la escala.

Sistemas de representación utilizados: Verbal, simbólico y gráfico-numérico.

Intenciones y justificación de la planificación de la sesión:

Como vimos en el cuestionario que describiré en el siguiente punto, los alumnos apenas conocen los fenómenos a los que da respuesta la semejanza, por ello, esta sesión es clave para señalar la fenomenología. La relación con las anteriores es evidente porque la escala es un caso particular de razón.

Secuencia de tareas:

Tarea 1: El callejero (Tarea inicial, Duración aproximada: 10 min.)

Una pareja que va a comprar una casa, consulta un callejero a escala 1:30000, mide la distancia de esta al metro y resulta ser de 2 m. ¿Cuál es la distancia real? Por otro lado, saben que la distancia de esa casa a la guardería es de 1,5 km. ¿A qué distancia se encontrarán en el callejero?

Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: La actividad será realizada a modo de ejemplo por el profesor en la pizarra aunque se intentará que los alumnos participen.

Al ser la primera tarea queremos que simplemente apliquen el concepto de escala y la relación existente entre la realidad y lo que encontramos representado en el callejero. Podemos encontrar algunos errores, el principal es confundir los datos relativos al plano con los de la realidad.

Tarea 2: La estatua de la libertad (Tarea inicial, Duración aproximada: 10 min.)

En la orilla del río Sena hay una réplica de la Estatua de la Libertad que mide 11,5 m, averigua cuál es la altura de dicha estatua y di a que escala está construida la réplica.

Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

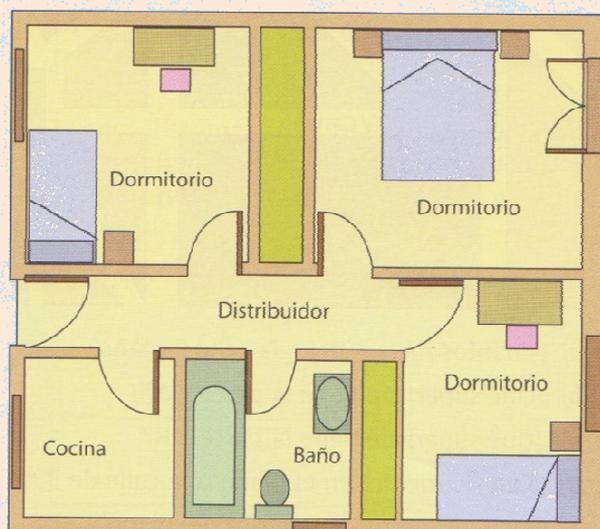
Gestión del aula: La actividad será realizada a modo de ejemplo por el profesor en la pizarra.

La diferencia entre esta tarea y la anterior, es el cálculo de la escala y su uso para calcular distancias desconocidas.

Tarea 3: La nueva casa (Tarea grupal, Duración aproximada: 30 min.)

En el siguiente plano de esta casa no se indica la escala a la que está hecho.

1. Si las camas individuales que se han dibujado representan camas de 90 cm de ancho, calcula las dimensiones del resto de las estancias y habitaciones.



2. En la pared de la puerta de la cocina y en la pared de enfrente queremos poner un lavavajillas de 40 cm, una nevera de 50 cm y algunos muebles de 35 cm, ¿cuántos muebles caben en la cocina, teniendo en cuenta que tenemos que instalar también la nevera y el lavavajillas?
3. Además queremos embaldosar el dormitorio principal, para ello, tenemos dos presupuestos: el primer albañil nos lleva 10€ por venir más 6,88 € por metro cuadrado embaldosado, mientras que el segundo albañil nos cobra 7€ por la visita y 7,76 € por metro cuadrado embaldosa. ¿Qué presupuesto es más económico?

Material o recurso necesario: Regla, lápiz y papel.

Gestión del aula: Dividiremos la clase en grupos de cuatro alumnos. Cada uno de ellos será el encargado de medir una habitación de la casa, de esta forma todos podrán participar. Al acabar cada apartado, un representante de cada grupo saldrá a la pizarra y discutiremos las soluciones entre todos.

El objetivo principal de esta tarea no es la dificultad, ni los procedimientos a seguir para llegar a la solución, es la importancia en la comunicación y cooperación de debe establecerse entre los miembros del grupo para defender sus ideas y soluciones. Los errores que pueden darse son con más frecuencia son en la medición y en consecuencia en la obtención de la escala.

Podemos situar las tareas anteriores dentro de dos contextos según el Informe PISA: social y personal.

Sesión 7: APLICACIÓN AL CÁLCULO DE DISTANCIAS INACCESIBLES

Llegados a esta sesión, ya se han acabado todos los conceptos del tema, por lo que esta nos servirá para repasar todo lo aprendido y para plantear todas las posibles dudas de cara a la evaluación. Utilizaremos la ficha de ejercicios dada al comienzo del tema para realizar

ejercicios formando parejas (a ser posible compensadas) de forma que siguiendo un turno vayan saliendo alternativamente a la pizarra para corregir los problemas.

Contenidos y objetivos de la sesión:

Estrategia: Cálculo de distancias y alturas inaccesibles usando el teorema de Tales y los criterios de semejanza de triángulos.

Objetivo a desarrollar:

11. Calcular distancias inaccesibles en situaciones reales usando el teorema de Tales.

Sistemas de representación utilizados: Verbal, simbólico y gráfico-numérico.

Intenciones y justificación de la planificación de la sesión:

La importancia de esta sesión radica en que servirá como resumen y consolidación de las sesiones tres y cinco, así revisaremos conceptos como los criterios de semejanza o el teorema de Tales en problemas.

Secuencia de tareas:

Tarea 1: El edificio (Tarea de clase, Duración aproximada: 10 min.)

Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 49 m en el momento en que una estaca de 2 m arroja una sombra de 1,25 m.

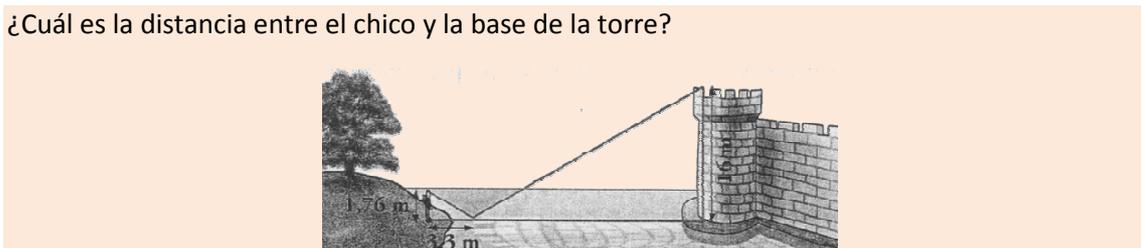
Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: Los alumnos realizarán la actividad con la ayuda de la pareja que tengan asignada. Pasados unos minutos, se corregirá.

La elección de esta tarea se basa en la dificultad que conlleva interpretar el enunciado para llegar a un problema que podamos resolver usando semejanza. Esta misma dificultad hace que un error sea no ser capaz de distinguir que triángulos representan los datos.

Tarea 2: La torre (Tarea de clase, Duración aproximada: 10 min.)

¿Cuál es la distancia entre el chico y la base de la torre?

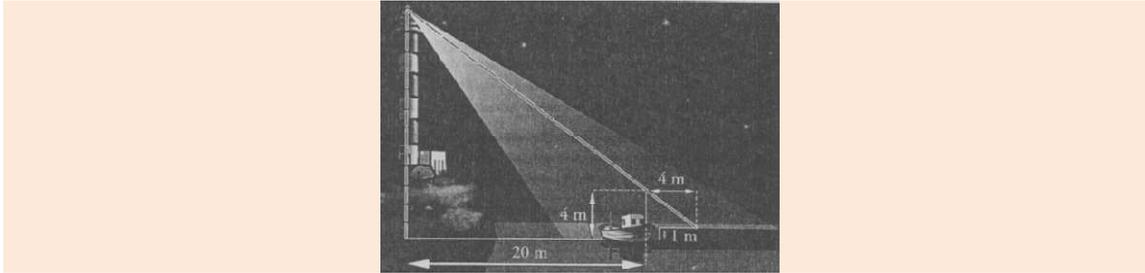


Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: Los alumnos realizarán la actividad con la ayuda de la pareja que tengan asignada. Pasados unos minutos, se corregirá.

Tarea 3: El faro (Tarea de clase, Duración aproximada: 10 min.)

¿A qué altura del mar se encuentra el foco del faro?



Material o recurso necesario: Lápiz y papel.

Gestión del aula: Los alumnos realizarán la actividad con la ayuda de la pareja que tengan asignada. Pasados unos minutos, se corregirá.

La tarea anterior tiene como finalidad mostrar a los alumnos como pueden usarse los principales conceptos del tema en situaciones cotidianas para calcular alturas inaccesibles.

La mayoría de las tareas expuestas anteriormente pueden consultarse en los libros (Uriondo, Pérez y García, 2008) y (Colera y Gaztelu, 2007).

Para finalizar este apartado, destacar que en algunas sesiones de las descritas anteriormente se desarrollan competencias PISA: por ejemplo, en la sesión seis, al realizar la actividad grupal, encontramos competencias como *Comunicar y Argumentar y Justificar*. En la sesión siete, nos dedicamos a realizar problemas de aplicación por lo que las competencias que pretendemos desarrollar son *Resolver Problemas y Modelizar*. Las competencias *Lenguaje Simbólico y Herramientas tecnológicas* se pondrán de manifiesto en la segunda sesión. Evidentemente, hay competencias como *Pensar y Razonar y Representar* que pueden estar presentes en más de una sesión.

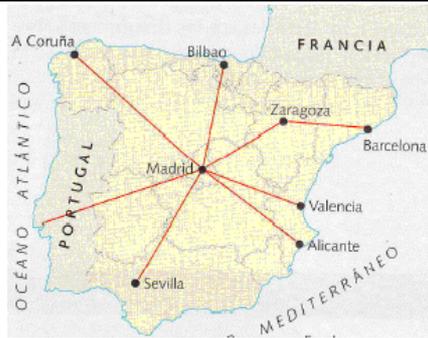
Sesión 8: SESIÓN DE EVALUACIÓN

Esta sesión cerrará el tema con la realización del examen que expondremos a continuación. El control lo realizaremos en una hora de clase e intentaremos que los alumnos se sienten en mesas separadas para evitar que se copien. En la siguiente sesión, se entregará el examen corregido y se resolverá en la pizarra con la ayuda de todos. En el siguiente punto, vamos a realizar la justificación de la elección del examen.

CONTROL: PERÍMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES. SEMEJANZA 4ºE.S.O.

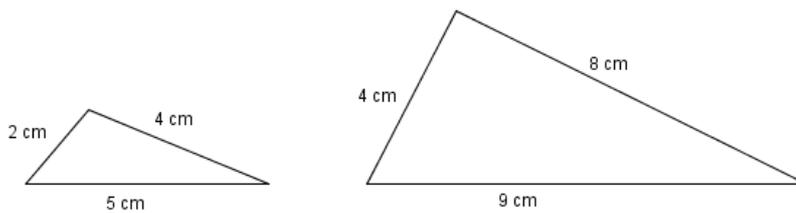
NOMBRE Y APELLIDOS: _____

- El radio de la base de un cono mide 3,5 cm y su generatriz 8 cm.
 - Calcula el volumen de dicho cono.
 - ¿Qué volumen tendrá un cono semejante a él con razón de semejanza 5?
 - RAZONA** si el cono original es semejante a otro cuyo radio mide 7 cm y cuya altura mide 7,2 cm.
- Sabiendo que la distancia en línea recta entre Sevilla y Madrid es de 380 km, calcula:
 - La distancia real (en línea recta) entre Madrid y Valencia.
 - La distancia real entre Madrid y Barcelona pasando por Zaragoza.

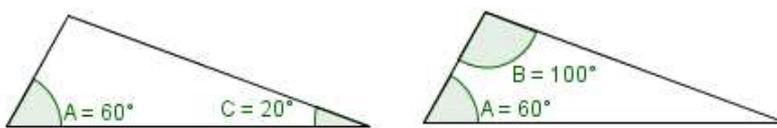


3. **RAZONA**, en cada uno de los apartados, si los triángulos son semejantes o no.

a)



b)



4. Para medir la altura de un árbol, Juan coloca un espejo en el suelo a una distancia de 7,5 m. Luego, tiene que retirarse 2 m para poder ver reflejado el árbol en el punto medio del espejo. Calcula la altura del árbol. (Nota: la altura de Juan hasta sus ojos de de 1,60 m)

5. Para medir la altura de su casa, Antonio, de 165 cm de altura, se situó a 1,5 m de la verja de su jardín, que se encuentra a 25,5 m de su casa. Sabiendo que la verja mide 3,5 m de altura, calcula la altura de la casa.

4.6 Evaluación de aprendizaje de la unidad didáctica

La evaluación es parte integrante y fundamental del proceso de enseñanza y aprendizaje. Requiere obtener información de manera sistemática, que permita al profesor/a emitir un juicio valorativo sobre el ritmo del proceso de aprendizaje. Evaluar no es tarea fácil, sobre todo en lo relativo a aprendizajes a largo plazo. La evaluación debe extenderse no sólo a la adquisición de rutinas y hechos aislados, sino que debe recoger otros contenidos.

Para describir el sistema de evaluación que emplearemos en nuestra propuesta de unidad didáctica, en primer lugar enunciaremos los criterios de evaluación seleccionados, a continuación detallamos los instrumentos de evaluación que emplearemos y, finalmente, describimos los criterios de calificación de algunos de esos instrumentos.

Criterios de evaluación

1. Encontrar polígonos semejantes conocida la razón de semejanza.
2. Calcular la razón de semejanza dados dos polígonos semejantes.
3. Resolver problemas de triángulos semejantes haciendo uso de los criterios de semejanza.

4. Aplicar la razón de semejanza en el cálculo de perímetros y áreas de polígonos semejantes y de volúmenes de cuerpos semejantes.
5. Encontrar cuerpos semejantes conocida la razón de semejanza.
6. Calcular longitudes en triángulos utilizando el teorema de Tales.
7. Calcular distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando el concepto de escala.
8. Manejar herramientas tecnológicas para resolver problemas.

Estas capacidades, sintetizan el conjunto de objetivos de aprendizaje que hemos descrito anteriormente. Asimismo, brindan información acerca del desarrollo de las competencias PISA.

Instrumentos de evaluación:

La variedad de capacidades a evaluar que hemos propuesto y su diferente nivel de complejidad, hace que no se deba pretender evaluar todo a través de un mismo tipo de prueba. Por tanto, utilizaremos diversos instrumentos de recogida de información, como son los siguientes:

- La **observación directa** de la actividad del alumno/a, de su interés y de su comportamiento ante la clase. Podemos evaluar su participación en clase, ya sea trabajando con sus compañeros (actividades por parejas o actividad grupal) o haciendo preguntas y sugerencias sobre el tema.
- La **revisión del trabajo diario**, mediante el cuaderno de trabajo, se observará que esté completo, aseado, con explicaciones razonadas, etc.
- La **corrección de los trabajos de los alumnos/as**, individuales (tareas para casa o tareas de clase) o colectivos.
- **Prueba escrita:** Abarcará el contenido visto en las sesiones anteriores.

Ponderación de los instrumentos de evaluación:

La nota final del tema se confeccionará con los siguientes criterios:

- Prueba individual: 60%
- Trabajo escrito: 20%
- Trabajo diario: 10%
- Actitud: 10%

Vamos a realizar la justificación de la elección de las preguntas del examen expuesto en el punto anterior, esta elección se debe a algunas razones que podemos clasificar según los siguientes apartados:

Los contenidos

Respecto al orden de los contenidos, comenzamos con la pregunta relativa a la relación existente entre volumen y semejanza, luego aparece la escala, los criterios de semejanza y finalmente los problemas de cálculo de alturas inaccesibles. Hemos cambiado el orden de aparición de los conceptos para que no fuese el mismo que en las sesiones de clase. En virtud de los procedimientos estamos pasando de un ejercicio sencillo y mecánico en los cálculos a otro algo más complejo pero mecánico y que añade interpretación a la actividad en función de la escala. En la tercera tarea volvemos a un ejercicio rutinario de aplicación de criterios para acabar en las últimas preguntas con problemas un poco más complejos porque necesitamos un gráfico para resolverlos.

La complejidad

Podemos destacar aquí que las tareas no siguen un orden creciente de complejidad, empezamos con una tarea de reproducción ya que se trata de cálculos y procedimientos

rutinarios, siguiendo con una de conexión debido a que se trata de interpretar y solucionar problemas. El tercer problema vuelve a ser rutinario, pero los dos últimos podemos englobarlos en tareas de reflexión ya que requieren una interpretación y comprensión más profunda.

Competencias PISA

A nivel de competencias, la secuenciación engloba un alto número de ellas. Entendemos natural trabajar en las primeras tareas competencias como *Pensar y Razonar*, *Argumentar y Justificar* y el *Lenguaje Simbólico* y dejar para la tarea final el trabajo de las competencias de *Modelizar y Resolver Problemas* debido a que se crean modelos matemáticos para resolver situaciones de la realidad.

Errores y limitaciones

En cuanto a la detección de errores y limitaciones destacar que la segunda tarea ayuda a reconocer errores de concepto y procedimientos. En la quinta tarea podemos trabajar directamente con la limitación tan clara que sufren los alumnos/as para realizar un gráfico correcto asociado a un problema.

4.7 Atención a la diversidad

Las tareas propuestas a los alumnos en las sesiones descritas anteriormente atenderán a los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado así como a sus intereses. Se dispondrá de una batería de tareas de refuerzo y de ampliación para que, tanto los alumnos con dificultades de aprendizaje como los que tienen capacidad para profundizar en los contenidos, puedan superar la evaluación de la unidad didáctica y/o ampliar sus conocimientos sobre la misma. A continuación, proponemos varios ejemplos de tareas, una de refuerzo y otra de ampliación para la unidad didáctica:

Tarea de refuerzo:

En las cercanías de la Torre Eiffel hay puestos en los que se venden reproducciones suyas de tamaños diversos. Nos fijamos en dos de ellas: una mide 30 cm de altura, y la otra, 12 cm de altura.

- ¿Son figuras semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?
- El lado de la base de la mayor es de 10 cm. ¿Cuál es el lado de la base de la pequeña?
- Si el lado de la base de la auténtica Torre Eiffel es 108 m, ¿cuál es su altura?

Tareas de ampliación:

Tarea 1:

Enunciar el primer criterio de semejanza (igualdad de ángulos homólogos) de triángulos para el caso de triángulos rectángulos.

Tarea 2:

Toma una hoja de tamaño A4 y anota sus medidas.

- Parte la hoja por la mitad (por el lado más largo). ¿Cómo son los rectángulos obtenidos con respecto al rectángulo original?
- Parte una de las mitades obtenidas otra vez por la mitad como antes. ¿Cómo son las dos mitades obtenidas con respecto a la anterior y con respecto a la hoja entera?

3. Vuelve a hacer lo mismo con la mitad que tienes ahora, ¿qué observas? Comprueba si se sigue conservando la misma relación entre las hojas de papel tamaño A4 y las de tamaño B2.
4. Por último, dibuja en el mismo papel cada una de las dimensiones que has obtenido en los apartados anteriores y busca información sobre la construcción de los DIN.

5. UN ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE LA NOCIÓN DE SEMEJANZA EN ESTUDIANTES DE 4º E.S.O.

5.1 Contexto y finalidad

En esta sección del trabajo expondremos el desarrollo y los resultados de un estudio que tuve la oportunidad de realizar durante mi época de prácticas. Mi tutora daba clase a dos cursos, 2º E.S.O. y 4º E.S.O., ambos debían estudiar el tema de semejanza durante mi estancia en el centro.

La idea surgió cuando comenzamos a analizar los objetivos y las tareas de esta tema que queríamos que los alumnos desarrollarán durante el período en el que íbamos a darles clase. Observando el estudio tan amplio que habíamos hecho sobre semejanza, empezamos a tener dudas sobre qué recordarían o sabrían de cursos anteriores, por ello, se nos ocurrió realizar un test cuya finalidad era obtener información de sus conocimientos básicos sobre el tema para poder abordarlo de una forma u otra.

Decidimos realizar el estudio a 4º E.S.O. porque según el currículo en 2º E.S.O. deberían haber estudiado ya prácticamente todos los conceptos que íbamos a explicarles, así que al menos, deberían saber cuándo una figura era semejante a otra, la definición de razón de semejanza, el concepto de escala y sus usos en la vida cotidiana, etc.

5.2 Instrumento y realización de la prueba

El instrumento que utilizamos fue el siguiente cuestionario:

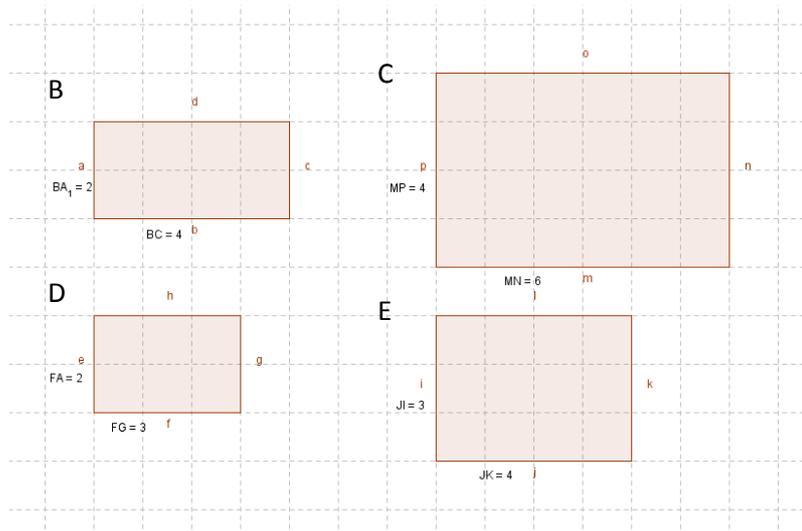
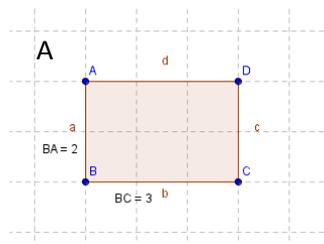
CUESTIONARIO SEMEJANZA 4º ESO

NOMBRE:

Contesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuáles de los siguientes rectángulos son semejantes al rectángulo dado A? Marca con una cruz.

B ___ C ___ D ___ E ___



2. Encontramos una píldora que hace que las cosas crezcan al doble de su tamaño. El perro que está dibujado se va a comer la píldora. ¿Cómo quedará el perro después de comerse esa píldora? Dibújalo



3. ¿Cómo le explicarías a un amigo/a que son dos figuras semejantes?
4. Pon tres ejemplos de la vida cotidiana donde se usa la semejanza.

El diseño del cuestionario lo llevamos a cabo después de distinguir algunos conceptos y destrezas claves del tema con motivo del análisis cognitivo que realizamos, además pensábamos que éstos nos serían útiles más adelante pero que también los alumnos deberían conocer. En la primera pregunta, nuestra intención era saber si reconocerían figuras semejantes. Utilizamos una figura conocida por ellos, el rectángulo, y las que dibujamos semejantes fueron con razón de semejanza 1 y 2, para que supieran distinguirlas fácilmente. Respecto a la segunda pregunta, la extrajimos de un artículo (Gómez, 2002) porque nos pareció interesante averiguar si son capaces de dibujar figuras semejantes. Las dos primeras preguntas, eran bastantes claras y de respuesta relativamente cerrada, por ello, en la tercera preguntamos la definición de dos figuras semejantes para darles la oportunidad de que pudieran expresarse. Para finalizar el cuestionario, a pesar de que existían conceptos y procedimientos que nos hubieran podido proporcionar mucha información, preferimos preguntar por la fenomenología, debido a todas las situaciones en la vida cotidiana que tienen alguna relación con la semejanza.

Lo llevamos a cabo durante los últimos quince minutos con alumnos de 4º E.S.O. en una clase previa a comenzar el tema de semejanza explicándoles que no contaba para su evaluación que simplemente era para recabar información, por lo que les pedimos que fueran sinceros con el fin de obtener una información lo más fiel a la realidad posible.

5.3 Resultados

A continuación voy a comentar las diferentes respuestas que obtuvimos:

Pregunta 1:

Las diferentes respuestas fueron: (A) marcar la respuesta correcta, (B) marcar sólo el rectángulo que es el doble, (C) marcar sólo el rectángulo que es igual y (D) dejarlo en blanco o responder varias opciones incorrectas. Teniendo en cuenta que realizaron el test 15 alumnos, las respuestas en porcentajes fueron las siguientes: (A) 20%, (B) 20%, (C) 40% y (D) 20%. Destacaré el porcentaje de la respuesta (C) porque normalmente cuando se habla de figuras semejantes se obvia el caso de figuras iguales o razón de semejanza 1, sin embargo, casi la mitad de los alumnos marcan esta. De igual forma, contestan la (A) y la (B) en igual proporción otro 40% del alumnado. Es importante destacar que nadie respondió marcando la respuesta (E) cuya finalidad era descubrir si los alumnos utilizaban procedimientos aditivos en vez de multiplicativos. En general, podemos decir que un porcentaje bastante alto ha respondido al menos seleccionando un rectángulo correcto.

Pregunta 2:

Para realizar el análisis de esta pregunta vamos a contrastar las respuestas dadas por nuestros alumnos con las respuestas que dieron los alumnos en los que se basó el artículo del que fue extraída la pregunta, en ese caso, estudiantes de educación primaria. En él se establecen cuatro categorías de respuesta:

- Métodos de escala lineal: interpretan el enunciado como un problema de escala.
 - Aumento de los lados de la figura al doble de su longitud: realizan un aumento bidimensional (ancho y alto).
 - Aumento de la figura sensible al contexto: aumentan el cuerpo del perro pero no la oreja y/o la cola.
- Métodos de área: centran su atención sobre el área.
 - Aumento en una dimensión hasta obtener otra figura de área doble.
 - Aumento de un lado de la figura hasta obtener otra de área doble.
 - Aumento arbitrario de las dos dimensiones hasta obtener otra figura de área doble.
 - Aumento de la figura hasta obtener otra de área aproximadamente el doble.
 - Aumento aditivo hasta obtener una figura de área doble.
 - Aumento de la figura hasta obtener otra de área aproximadamente el doble renunciando a la métrica inducida por la retícula.
- Métodos ingenuos:
 - Aumento aditivo parcial.
 - Aumento lineal.
 - Aumento de altura doble.
 - Aumento arbitrario.
- Métodos idiosincrásicos: son respuestas de los estudiantes que interpretan la pregunta de una manera singular.
- Métodos formales. Razón de semejanza: los estudiantes efectúan un aumento bidimensional utilizando la diagonal del cuadrado unitario.

Probablemente debido a la edad de los alumnos (están en Educación Secundaria no primaria) y al número al que le pudimos aplicar el cuestionario, las respuestas dadas no se encuentran en todas las categorías anteriores. Se concentran dentro de las dos categorías del primer método, por ello, voy a clasificar las respuestas en: (A) aumento de los lados de la figura al doble de su longitud (dibujar correctamente el perrito), (B) aumento de la figura sensible al contexto (dibujar algo bien), (C) aumento de la figura sensible al contexto (dibujan bien el perro pero no la cola) y (D) dejarlo en blanco. Utilizando porcentajes las respuestas fueron: (A) 66,6%, (B) 13,3%, (C) 13,3% y (D) 0,6%.

En esta pregunta, lo más importante es que la mayoría de los alumnos han realizado el dibujo correctamente y que sólo uno lo ha dejado en blanco. Es curioso que dos alumnos, a pesar de estar separados cada uno en un extremo de la clase, hayan dibujado bien todo el perro excepto la cola aunque observando los resultados del experimento realizado en el artículo parece que es una respuesta común.

Pregunta 3:

Como esta pregunta es de respuesta abierta es difícil establecer una clasificación. Destacaría que sólo dos alumnos dieron la respuesta correcta y que uno la dio pero explicando solamente el caso en el que ampliamos la figura. Siete alumnos, prácticamente el 50%, dijeron que son figuras iguales o figuras de forma que una es el doble, triple, la mitad, etc. de la otra. El resto de respuestas no tienen mucha relevancia: algún alumno mezcla el volumen y el área

de manera errónea con la semejanza o dejan la pregunta en blanco. Algunos ejemplos de estas fueron:

1. “Que al aumentar o disminuir la figura no cambia su forma”
2. “Son 2 figuras que miden lo mismo, es decir, que su área mide lo mismo”
3. “Son iguales lo que pasa que la de la derecha es el doble de la grande”
4. “Son dos figuras que son iguales o que tienen la misma utilidad aunque el tamaño varíe”
5. “Las figuras que son iguales, o una figura es el doble de la otra....”
6. “Son figuras que son parecidas y que no se diferencian casi en nada o que son iguales pero de distinto tamaño pero de la misma forma”

Comprobamos que la primera respuesta es válida porque básicamente da la definición correcta y además se expresa con claridad, sin embargo, la segunda respuesta además de ser incorrecta está mal expresada e informa de que para ese alumno medir una figura es lo mismo que medir la superficie de la figura. Desde el punto de vista de la competencia de *Comunicar*, el primer alumno la habría alcanzado pero el segundo no. Respecto a la tercera respuesta, parece ser que compara las figuras (el perrito y su doble) de la pregunta anterior para responderla. En la cuarta, el alumno responde en términos de utilidad y de tamaño, pero no tiene ningún sentido desde nuestro tema. Comparando la quinta y la sexta respuesta, la quinta es correcta aunque no da la definición general y la sexta mezcla ideas que sugieren que no tiene claro el concepto y además está mal redactada, así que desde la competencia de *Argumentar* y *Justificar* comprobamos que no son capaces de redactar frases largas con coherencia y que no utilizan términos matemáticos.

Pregunta 4:

Podemos enmarcar las respuestas en las siguientes: (A) poner ejemplos que aluden a situaciones personales de la vida cotidiana, (B) poner ejemplos que aluden a situaciones sociales de la vida cotidiana, (C) hacer dibujos de objetos semejantes y (D) dejarlo en blanco. Las respuestas clasificadas según los porcentajes son: (A) 13,3 %, (B) 20%, (C) 20% y (D) 46,6%. Quizás por ser la pregunta más complicada de todas, la mayoría la ha dejado en blanco. El resto de respuestas, desde mi punto de vista, no tienen especial interés porque aunque algunas son correctas no la han explicado o son respuestas que pueden englobar muchos aspectos. Aún así, las hemos clasificado según las situaciones recogidas en el Informe PISA (OCDE, 2005), exponemos los siguientes ejemplos: “En la arquitectura”, “En los azulejos”, “Repartiendo una tarta”, “Al comprar queso”, “La ropa”, etc.

5.4 Conclusiones

Una vez analizadas las preguntas comprobamos que el cuestionario se podría mejorar para que la información extraída sea más útil e interesante. La primera pregunta parece que no ha tenido mucha dificultad para ellos pero creo que es importante por la información que ofrece, aunque es cierto que puede condicionar las respuestas a las siguientes preguntas. Por ejemplo, en la tercera pregunta algunos alumnos contestaron el doble, o figuras iguales y puede que se fijaran en que los rectángulos que eran semejantes lo eran con razón de semejanza uno y dos. Respecto a la segunda, creo que es interesante comprobar que todas las respuestas se centraban en un solo cuadro de respuestas de los cuatro que ofrecía el artículo, pero también demuestra que ningún alumno fue capaz de usar el método del área para resolver el problema. La pregunta tres, es una pregunta muy genérica y eso hace que la información extraída no sea concluyente, además algunas respuestas podrían estar condicionadas por las preguntas uno y dos. De igual forma, la cuarta pregunta ofrece menos información aún, porque es abierta y porque los alumnos no tenían los ejemplos claros.

Las preguntas pueden ofrecer información sobre algunas competencias citadas anteriormente como *Comunicar* y *Argumentar y Justificar*. Analizando las respuestas podemos concluir que debemos realizar tareas que ayuden a los alumnos a expresarse correctamente utilizando ideas matemáticas y la terminología específica del tema.

Como conclusión diría que las respuestas han demostrado que a nivel general los alumnos de 4º E.S.O. tienen alguna idea del concepto de semejanza. Particularmente, observando las respuestas de cada alumno, hay tres o cuatro que tienen bastante claro estos conceptos. Respecto a la información extraída, pienso que nos fue bastante útil porque para comenzar el tema empezamos dando unas fichas y poniendo algunos ejemplos básicos para reforzar la parte fenomenológica que habíamos visto que era bastante escasa e incluso nula. Además, clarificamos la relación existente entre el área, el perímetro y el volumen de figuras semejantes, ya que, cuando definieron el concepto de semejanza algunos hicieron uso de ella aunque este fue incorrecto.

6. CONCLUSIONES

Consideramos que en los últimos años la enseñanza ha estado y está en la actualidad sometida a muchos cambios. Por una parte, el cambio en la actitud del alumnado que hace que las propuestas didácticas tengan que ser más motivadoras si queremos lograr todos los objetivos y por otro, la aparición de las nuevas tecnologías y su uso en las aulas.

La propuesta de unidad didáctica que hemos realizado es un modelo de enseñanza y aprendizaje que se apoya en las nuevas tecnologías y en la importancia de la fenomenología de nuestro tema para mantener la motivación del alumnado. Incide en las propuestas prácticas con actividades y metodología que facilitan el aprendizaje mediante el trabajo en grupo para analizar, tomar decisiones, llegar a acuerdos ante los retos que plantean las distintas actividades. Otro aspecto a destacar teniendo en cuenta el difícil curso en el que nos situamos, es la evaluación. Por ello, en la propuesta hemos intentado utilizar diversos recursos para que los alumnos pudieran alcanzar los objetivos a través de varios caminos, dándoles así más oportunidades e intentando mantener su motivación a lo largo del tema.

También hemos considerado oportuno relacionar la semejanza con otros temas, por ejemplo, recordando los principales polígonos y cuerpos geométricos o la proporcionalidad numérica. El interrelacionar unos temas con otros ayuda tanto a intervenir con mayor profundidad en el propio como a conseguir una visión global y una estructura general de la matemática. A través de percibir unos temas dentro de otros el alumno será capaz de entender el conocimiento como un todo y la utilidad de poseer saberes previos para afrontar el aprendizaje de los nuevos.

Para la realización de la unidad didáctica ha sido imprescindible toda la información recogida en el análisis didáctico del tema expuesto en el punto tres y la experiencia adquirida en mi época de prácticas, ya que, durante la misma tuve la suerte de poder explicar el tema de semejanza. De esta forma, mediante la realización del cuestionario descrito en el punto anterior hicimos una exploración de los conocimientos del alumnado para luego construir una unidad didáctica basándonos en ellos que ha sido útil para la realización de la unidad aquí expuesta. Obviamente he utilizado muchas de las ideas que aprendí mientras estaba con ellos, he perfeccionado algunos ejercicios que llevé a la práctica y he desechado algunos que fueron innecesarios porque no les aportaron nada.

Pienso que este trabajo se puede llevar a las aulas porque ha surgido precisamente de la depuración del trabajo que ya se hizo en una, la experiencia no fue mala por lo que pienso que con las mejoras realizadas se puede contribuir a la obtención de unos mejores resultados. Respecto al tiempo quizás sea bastante ajustado, he descrito ocho sesiones que aproximadamente equivaldrían a dos semanas de clase aunque en la práctica probablemente harían falta algunas sesiones más. Como aspectos positivos destacaría las diferentes tareas, las tareas en parejas o en grupo y como negativos el poco uso que le damos al ordenador a pesar de que el tema se presta a ello. También hubiera sido interesante realizar alguna tarea fuera del centro para que los alumnos entendieran en la práctica las aplicaciones de la semejanza.

Un aspecto fructífero del trabajo es la investigación realizada, lo que comenzó como un simple cuestionario para ver los conceptos conocidos por los alumnos se convirtió en una importante fuente de información. Me pareció bastante complejo aunque interesante el procedimiento seguido para llegar a los resultados mediante el análisis de las respuestas, esto significó tomar consciencia de lo difícil que es realizar alguna investigación por todos los caminos que pueden tomarse.

Como conclusión final, valoro positivamente la formación adquirida en el máster sobre todo en mi época de prácticas donde tuve la oportunidad de poner en práctica toda la teoría aprendida durante los módulos anteriores. Espero que a través de este trabajo fin de máster hayan quedado reflejados los conocimientos y competencias que he adquirido.

7. BIBLIOGRAFÍA

- Boyer C. (2001), *Historia de la Matemática*, Editorial Alianza.
- Colera J. y Gaztelu I. (2007). *Matemáticas 2º*. Madrid: Anaya.
- Gómez, A. (2002). *La razón en semejanza: el perrito*. Disponible en:
<http://www.uv.es/gomezb/6Larazonensemejanza.pdf>
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.
- Grupo Beta (1990), *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza*. Editorial Síntesis.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria obligatoria. *BOE*, 174, 31680-31828.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.
- Rico, L. (1997). *Los organizadores del currículo de matemáticas*. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.
- Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.
- Uriondo J.L., Pérez S. y García B. (2008). *Matemáticas 4º Opción A, Proyecto Ánfora*. Valencia: Oxford.

8. ANEXOS

Anexo I: ¿Qué les ocurre a estas figuras?



1



2



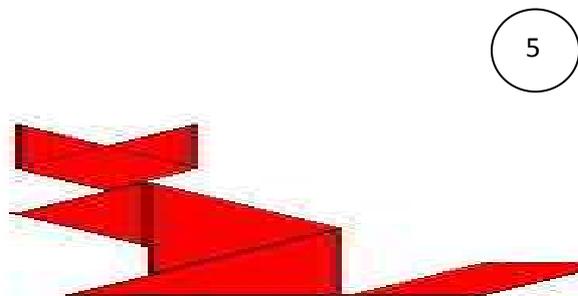
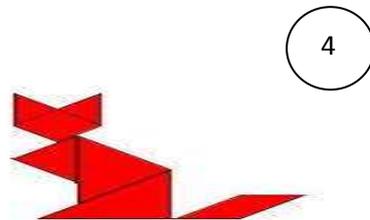
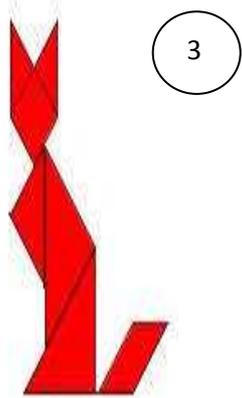
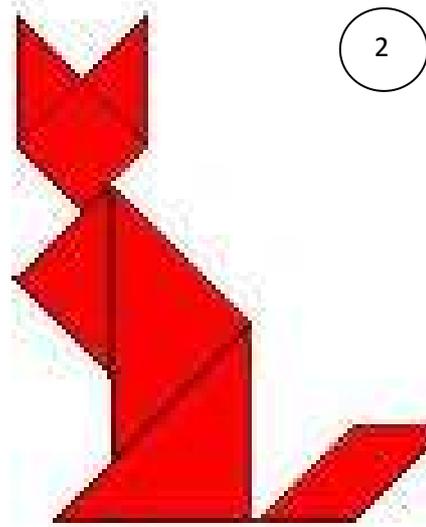
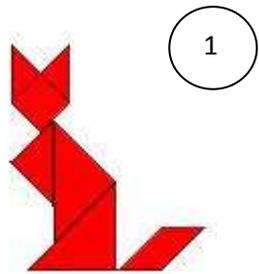
3



4

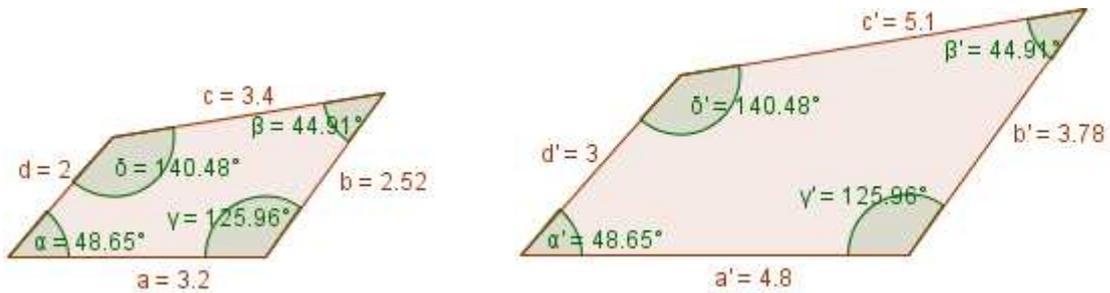


5

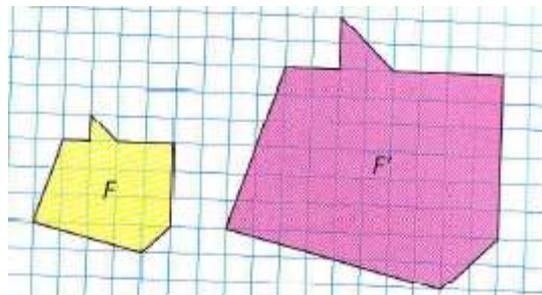


Anexo II: Relación de ejercicios

1. Comprueba que las siguientes figuras son semejantes y calcula la razón de semejanza:



2. Dados los polígonos F y F' :



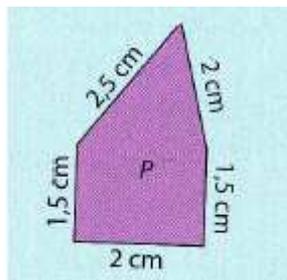
a) Averigua si son semejantes y, en caso de serlo, indica la razón de semejanza.

b) Dibuja F y otro semejante a él, con razón de semejanza 3, en una hoja de papel cuadrado. Toma como unidad el lado del cuadrado de la cuadrícula.

3. Dibuja el siguiente polígono, P , y traza otro semejante con razón de semejanza:

a) $r = 0.8$

b) $r = 2$



4. Dibuja un rectángulo de 3 cm de largo y 5 cm de ancho y otro que mida 1 cm más de largo y 1 cm más de ancho. ¿Son semejantes?

5. En cada uno de los siguientes apartados se dan las medidas de los tres lados o de dos ángulos de dos triángulos, T y T' . Comprueba si son semejantes:

a) T : 3 cm, 4 cm y 5 cm y T' : 9 cm, 12 cm y 15 cm.

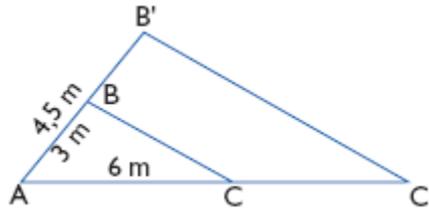
b) T : 3 cm, 5 cm y 6 cm y T' : 1.5 cm, 2.5 cm y 4 cm.

c) T : 30° , 80° y T' : 70° , 30° .

d) T : 90° , 20° y T' : 70° , 50° .

6. Un árbol de 1,6 m proyecta una sombra de 1,2 m. En el mismo sitio, el mismo día y a la misma hora, la sombra de una antena de telefonía móvil mide 52 m. ¿Cuánto mide de alto la antena de telefonía móvil?

7. Halla la longitud del lado AC' . ¿Cómo están los triángulos ABC y $AB'C'$?



8. La arista básica y la altura de un prisma pentagonal regular miden 3'2 cm y 4'8 cm, respectivamente.

a) ¿Es semejante a otro prisma cuya arista básica mide 2'56 cm y su altura 3'84 cm?

b) ¿Cuál es la razón que transforma el mayor en el menor? ¿Y el menor en el mayor?

9. El lado de la base de un prisma regular hexagonal mide 4'8 cm y su altura 8'2 cm. Si el lado de la base de otro semejante mide 12 cm, calcula la medida de su altura.

10. Halla el radio de un cilindro de altura 54'4 cm semejante a otro de radio 8 cm y altura 17 cm.

11. La razón de semejanza entre dos esferas es 1'3. Calcula el radio de la esfera mayor si el de la menor mide 5 cm.

12. La altura y la generatriz de un cono, C , miden, respectivamente, 24 cm y 26 cm. ¿Cuánto mide el radio de otro cono, C' , semejante a C , si la razón de semejanza que transforma C en C' es igual a 2,8?

13. Dos figuras son semejantes con razón de semejanza 4. Si el perímetro de la figura menor es 12 cm y el área 20 cm^2 , calcula el perímetro y el área de la figura mayor.

14. Las áreas de dos polígonos semejantes son 36 cm^2 y 100 cm^2 . Determina la razón de semejanza que transforma el mayor en el menor.

15. Los perímetros de dos polígonos semejantes son 33 cm y 11 cm. Calcula:

a) La razón de semejanza y la razón entre las áreas de las dos figuras.

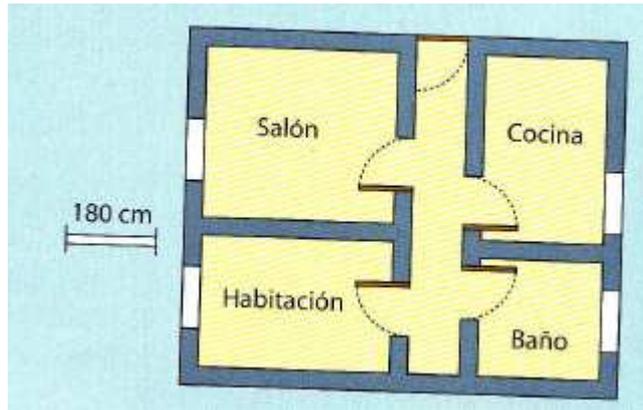
b) La longitud del lado del polígono menor homólogo a uno de los lados del mayor que tiene una medida de 12 cm.

c) El área del polígono de mayor tamaño, sabiendo que el área del polígono homólogo de menor tamaño es 25 cm^2 .

16. Unos excursionistas han planeado hacer una marcha por la montaña desde el albergue en el que se alojan hasta la cueva del Gigante. Si en un mapa a escala 1:50000, el camino que va del albergue a la cueva tiene una longitud de 12 cm, ¿cuántos kilómetros tienen que recorrer para llegar a la cueva?

17. La distancia entre dos ciudades es de 354 km. ¿Qué distancia hay entre sus representaciones en un mapa a escala 1: 1 500 000?

18. La siguiente representación muestra el plano de un apartamento:



a) Calcula las dimensiones del apartamento y de cada una de las estancias que lo componen.

b) En la pared de la ventana de la cocina se quiere poner un mueble de 90 cm de ancho y muebles de 60 cm de ancho. ¿Cuántos muebles de 60 cm se pueden colocar? ¿Cuánto espacio sobra?

19. Calcula la distancia que hay en línea recta entre:

- a) Huelva y Almería.
- b) Cádiz y Jaén.
- c) Sevilla y Málaga.
- d) Granada y Córdoba.

