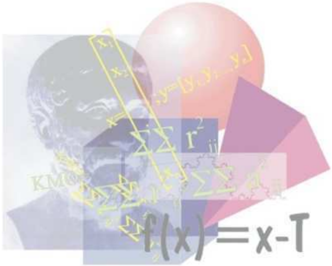
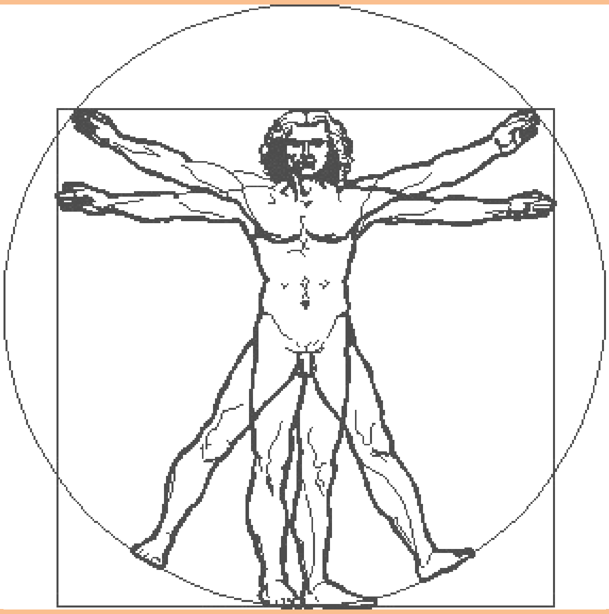
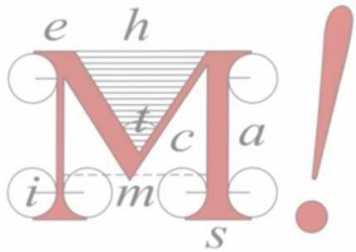
UNIVERSIDAD DE GRANADA
MASTER EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS.

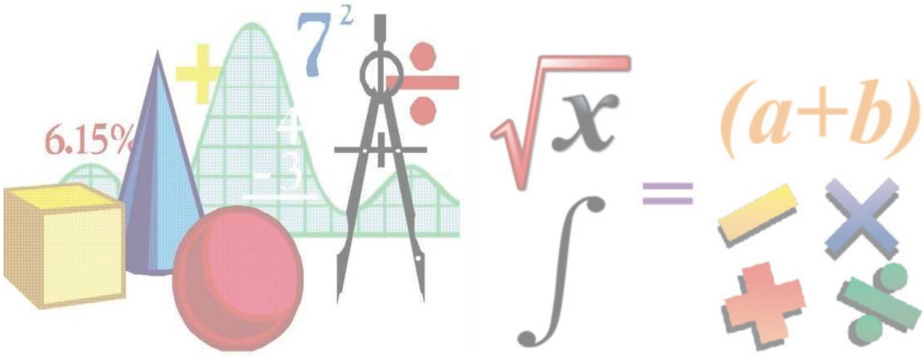






TRABAJO FIN DE MÁSTER

PROGRAMACIÓN DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA
Introducción al Cálculo Diferencial



PABLO GÓMEZ GONZÁLEZ

MAYO DE 2010

MASTER EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS.

TRABAJO FIN DE MÁSTER

UNIDAD DIDÁCTICA:
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DIFERENCIAL

Pablo Gómez González

Tutor: D. Luis Rico Romero

Mayo de 2010

"Michael Spivak: El saber algo acerca de f' nos informa mucho acerca de f".

Contenido

0. CONTEXTO DE PARTIDA. LA UNIDAD DENTRO DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

El Currículo de Matemáticas tanto en Educación Secundaria Obligatoria como en Bachillerato, es un plan de formación, que se propone ofrecer propuestas concretas sobre modos de:

- entender el conocimiento matemático,
- interpretar el aprendizaje de las matemáticas,
- poner en práctica la enseñanza de las matemáticas,
- valorar la utilidad y dominio de los aprendizajes realizados en matemáticas,

El currículo se establece cuando se determinan claramente los Objetivos, Contenidos, Metodología y la Evaluación. Estas cuatro componentes no pueden considerarse de manera independiente y aislada sino de modo conjunto, como un sistema, ya que existe una relación muy estrecha entre todas ellas.

En la planificación del currículo podemos encontrar distintos niveles de concreción.

- **Primer nivel de concreción curricular**: Los decretos del Ministerio de Educación o de las Comunidades Autónomas con competencias en Educación muestran unas especificaciones sobre los objetivos, contenidos, metodología y evaluación, con carácter normativo. Esta normativa constituye una primera orientación de cómo debe desarrollarse la enseñanza de las matemáticas en las aulas. No obstante su importancia, muestra un nivel muy general de consideración sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y no resulta suficiente para el diseño y planificación del trabajo que el profesor y los alumnos deben llevar a cabo en el aula.
- **Segundo nivel de Concreción curricular**: La planificación curricular del centro educativo donde vayamos a impartir la asignatura de Matemáticas I.

- En último término, y el más importante para nosotros como docentes, **el tercer nivel de concreción curricular** que es el referido a la programación de aula.

En dicho nivel nosotros como docentes, tomaremos parte activa, y es el desarrollo de esta unidad didáctica que a continuación presentamos, el resultado de haber intervenido directamente en una programación didáctica correspondiente a un curso de 1º de Bachillerato de Ciencias e Ingeniería.

1. UBICACIÓN

El BOE núm. 266 de Martes 6 noviembre 2007 establece en el Currículo de **Matemáticas I** la enseñanza de Derivadas como herramienta de cálculo notándolo como ***"Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo"*** dentro del Bloque 3 de Análisis.

El concepto de derivada surgió como resultado de algunos siglos de esfuerzo dirigidos a resolver dos problemas:

- Determinar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos y
- Encontrar las velocidades instantáneas en movimientos no uniformes.

Estos problemas interesaron a los matemáticos desde tiempos remotos, veamos someramente la evolución histórica del pensamiento analítico:

1.1. Evolución histórica

El concepto que vamos a estudiar surgió como consecuencia de las necesidades de la Mecánica en el siglo XVII, así como de viejos problemas de la Geometría (los griegos consideraban por ejemplo una circunferencia como un polígono de infinitos lados). Fundamentalmente venía a resolver dos problemas: dibujar una tangente a una curva y encontrar la velocidad en un instante dado de un movimiento no uniforme (o, en general, encontrar la velocidad de variación de una magnitud dada).

Fermat (1601-1665) en una fecha tan temprana como el año 1629 hizo dos importantes descubrimientos que están estrechamente relacionados con sus trabajos sobre lugares geométricos. El más importante es un tratado titulado "Método para hallar máximos y mínimos". Durante los primeros años en los que Fermat se encontraba desarrollando su geometría analítica, descubrió también cómo aplicare su procedimiento de los valores próximos de la variable, para hallar la tangente a una curva algebraica de la forma $y = \ (x)$. El método de Fermat resulta equivalente a decir que el $\lim_{E\to 0}\frac{f(a+E)-f(a)}{E}$ es la pendiente de la curva en el punto $x = a$, pero lo cierto es que Fermat no explicó este procedimiento de una manera satisfactoria, limitándose a decir simplemente que era análogo a su método para determinar máximos y mínimos.

Surgimiento del análisis infinitesimal:

La primera etapa de la existencia del análisis fue la formación del cálculo diferencial e integral. Surgió como una parte independiente de las matemáticas casi simultáneamente en dos formas diferentes: en la forma de teoría de las fluxiones en los trabajos de I. Newton y sus sucesores ingleses y en la forma del cálculo de los deferenciales de G. W. Leibniz, que obtuvo difusión ante todo en el continente europeo.

Leibniz (1646-1716) hablaría de la recta tangente a una curva como la recta que une dos puntos separados por una distancia infinitamente pequeña. Partiendo de los estudios de Leibniz, destacarían las aportaciones de **Bernouilli**.

Por consiguiente destacaría el postulado de **L'Hopital (1661-1704)** ya que se dedicó a dar un planteamiento didáctico a las aportaciones de los dos anteriores. L'Hopital decía que una cantidad incrementada por otra infinitamente pequeña puede considerarse que sigue siendo la misma cantidad $\Longrightarrow y + dy = y$. Para ello emplearía el concepto de diferencial. **Bezout** mostró la forma de determinar un incremento determinando el valor de una cantidad para un instante y el de la misma para el instante inmediatamente siguiente.

De todo este desarrollo tan sencillo se introdujo la razón de cambio como el cociente de incrementos finitos. Se hablaría igualmente de las segundas diferencias y sucesivas, considerando por ejemplo una segunda diferencia como el diferencial de un diferencial.

Barrow (1630-1677) explicó un método de determinación de tangentes prácticamente idéntico al actual en Cálculo Diferencial. Ocupando la cátedra lucasiana en Cambridge, sería el predecesor de Newton.

Newton (1642-1727) no se apoyaría tanto en el cálculo a base de concepciones geométricas, utilizando los fenómenos físicos para la explicación de los infinitesimales. Se encontró dos dificultades, encontrar la velocidad de movimiento en cualquier tiempo propuesto (cálculo diferencial) y encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier tiempo (cálculo integral). Para ello utilizaría el método de las fluxiones que considera la velocidad como aquella determinada por unas **cantidades fluyentes** v, x, y y z. La velocidad con la que fluyen se incrementa por el movimiento generado por éstas denominándose **fluxiones**.

Euler (1707-1783) un siglo después mejoró los resultados obtenidos. No obstante la base lógica y, por tanto, los conceptos formales creados por estos matemáticos fueron insuficientes para que el cálculo de derivadas fuera un proceso claro y sistemático.

Bolzano (1781-1848) fue el primero en definir la derivada de (x) como la cantidad $'(x)$ a la que se acerca indefinidamente la razón $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ conforme Δx se acerca a 0 con valores positivos y negativos.

Cauchy (1789-1857) definió la derivada de la misma manera que Bolzano. Entonces unificó esta noción con la de diferenciales de Leibniz definiendo dx como cualquier cantidad finita y dy como $'(x)dx$.

Weierstrass (1815-1897) fue el principal impulsor de la propuesta de Cauchy, y con pequeños cambios que introdujo, hoy día se habla del **modelo de Cauchy-Weierstrass**.

La significación histórica del descubrimiento de que la continuidad no implica da diferenciabilidad y de que las funciones pueden tener todos los tipos de comportamiento anormal fue grandiosa. Hizo que los matemáticos fueran más aprensivos al confiar en la intuición o en el pensamiento geométrico.

1.2. Planteamientos de partida

La presente unidad trata del estudio de la derivada de una función obtenida como límite de la tasa de variación media, y de su aplicación a la resolución de uno de los problemas que más ha interesado a los matemáticos a lo largo de la Historia: la obtención de la recta tangente a una curva en un punto dado.

Habitualmente, se presentan dificultades en cuanto a la comprensión de los conceptos relacionados con la tasa de variación instantánea y de derivada de una función en un punto. Estos pueden ser aminorados, en gran medida, si se proponen numerosos ejemplos y en muy diversos contextos, relacionados con la vida cotidiana o con las Ciencias de la Naturaleza. Es por tanto, por lo que, aunque en Bachillerato no es obligatorio, desde estos conceptos pretendemos trabajar las Competencias Básicas en el alumno, haciendo hincapié en la Competencia Matemática regulada por los informes PISA.

El concepto de derivada de una función en un punto, y los procedimientos que con él están relacionados, se conforman en una de las herramientas matemáticas que más aplicación tiene en la solución de situaciones relacionadas con las diversas Ciencias: La velocidad y aceleración de un móvil, el crecimiento de poblaciones bacterianas o el perfil de un tramo de carretera pueden ser ejemplos que corroboran esta afirmación. En este sentido, es conveniente procurar hacer patente la relación entra los conceptos estudiados en esta unidad y aquellos que en otras materias como por ejemplo Física y Química, sean trabajados por los alumnos.

1.3. Contextualización y primeros planteamientos metodológicos

Como hemos dicho al comenzar, la ubicaremos en el Primer curso de Bachillerato Científico-Tecnológico dentro del Bloque de Análisis y como cierre de las cuatro unidades que conforman el mismo.

Su desarrollo lo iniciamos con unas cuestiones de diagnóstico de cálculo de límites a modo de introducción y para utilizarlos para establecer el concepto de tasa de variación instantánea de una función en un punto, presentando, posteriormente, actividades que pretenden hacer reflexionar al alumnado sobre qué entiende por recta tangente a una curva en un punto. El alumno deberá saber explicar al grupo qué entiende por Tasas de Variación, Recta tangente como preámbulo a la Unidad Didáctica (Competencia de Comunicar).

Es importante relacionar la existencia de derivada de una función en un punto con la posibilidad de trazar la recta tangente en él, pero no al revés.

Como vía de ampliación de los contenidos correspondientes a los primeros conceptos que se explicarán, podemos citar la aplicación de esto y de los procedimientos propios de la derivada a: la resolución de problemas no complicados y ejercicios con funciones no necesariamente elementales, el estudio de la derivabilidad en funciones definidas a trozos mediante la obtención de las derivadas laterales y la discusión, en funciones con parámetros, de los valores que hace que la función sea continua y derivable. La competencia matemática de Argumentar y Justificar (AJ) será una oportunidad para desarrollarla con estas cuestiones.

Resulta evidente que es más práctico calcular derivadas empleando las reglas de derivación cuando es necesario obtener rectas tangentes.

También es más rentable calcular derivadas laterales como límite de la función derivada cuando este límite existe. La **actividad 1** del apartado de Metodología intentará aclarar que en ocasiones la derivada de una función en un punto existe y, sin embargo, no existe el límite de la función derivada en dicho punto, es decir, la función derivada no es continua.

Además de la dificultad que conlleva la formalización y el rigor en algunas de las demostraciones de las reglas anteriormente mencionadas, sobre todo en lo que se refiere, por ejemplo a la regla de la cadena (la cual no se considera conveniente desarrollar en toda amplitud y rigor). **La actividad 2** del apartado de Metodología nos mostrará un ejemplo de trabajo con los alumnos. Los alumnos pueden encontrarse con dificultades de tipo operativo, ya sea al desarrollar la derivada o a la hora de simplificar las derivadas obtenidas. En este sentido, es importante revisar las reglas de simplificación de expresiones algebraicas, además de proponer suficiente número de actividades que permitan asegurar el nivel de competencia en estos procedimientos.

Aprovecharemos los conocimientos adquiridos sobre derivadas, junto con los de límite y continuidad, para afrontar el fin principal para el que se aprenden: la representación y el estudio local y global de funciones que constituyen la segunda y última parte de la unidad.

En anteriores unidades, y también durante el curso pasado, se aprendieron una serie de mecanismos para construir curvas. En esta unidad se retoman, se sistematizan y se dan pautas para su utilización racional. Las herramientas que aquí se trabajan tienen evidentes aplicaciones para los estudiantes de Bachillerato, ya que son numerosas las situaciones que pueden ser estudiadas mediante la representación gráfica de una función.

Básicamente, las etapas a seguir son tres:

- Estudiar , determinando sus características generales y realizando la determinación de sus posibles asíntotas.
- Estudiar ′ y obtener intervalos de monotonía y extremos.
- Estudiar ′′ obteniendo los intervalos de curvatura y puntos de inflexión.

Para ello se recuerdan los teoremas pertinentes sobre la relación entre las derivadas sucesivas de una función y sus características locales. Los rasgos de la curva se irán perfilando “haciéndole preguntas” a la función. Para ello se poseen una serie de herramientas cuyo conocimiento profundo es como el panel en el que el artesano sitúa todos sus instrumentos: tiene muy claro cuáles son y para qué sirve cada uno, pero rara vez tendrá que emplear todos ellos. De igual modo, nuestros alumnos deben acostumbrarse a reflexionar antes de empezar su tarea (la representación de una función concreta): cuáles son sus características y, por tanto, qué instrumentos debe utilizar y en qué orden. Con la práctica irán cogiendo “oficio”.

Un entrenamiento especial en algunos tipos de funciones (polinómicas, racionales, circulares, con radicales, exponenciales…) les irán familiarizando con las peculiaridades de cada una de ellas. En muchos casos (funciones con radicales, por ejemplo) lo más complicado es identificar las asíntotas oblicuas y aunque no es un objetivo primordial, se debe mostrar cómo reconocer por qué lado se acerca una curva a la asíntota. En el apartado de problemas “para pensar un poco más” se aportan algunas ideas que pueden resultar muy útiles e ilustrativas.

2. ANÁLISIS CONCEPTUAL

2.1. Conexión con temas anteriores y posteriores.

Esta Unidad sobre derivación y representaciones gráficas resume, de alguna manera, todo un trabajo que hasta el momento de abordarla se ha desarrollado en este curso y en cursos precedentes. La relación entre derivación, continuidad y límite tiene aquí su punto culminante, cuando en 4º de ESO se trataba de dejar patente, en un sentido puramente geométrico, el concepto de límite y de continuidad.

Se trata así de repasar, consolidar y aportar nuevos planteamientos y desarrollos prácticos a lo aprendido por los alunos en cursos precedentes y en este mismo de primero, todos los cuales serán de vital importancia tanto en el próximo curso como en los previsibles años universitarios.

Al principio de este curso se habrán realizado las correspondientes "pruebas iniciales" para conocer lo más ampliamente posible el nivel de los alumnos y en particular para, respecto de las funciones, determinar de dónde debimos de partir. (**Preguntas de Análisis en Prueba Inicial**)

Preguntas referentes al Bloque de Análisis en la Prueba Inicial

5) Halla f(-1), f(0) y f(2), siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \mathrm{n} & si\ x \leq -\mathrm{n} \\ x + \mathrm{n} & si - \mathrm{n} < x \leq 2 \\ x^2 & si\ x > 2 \end{cases}$$

6) a) Representa gráficamente: $y = -\frac{1}{2}x + 3$

b) Halla el vértice de la parábola: $y = 2x^2 - \mathrm{n}0x + 8$

7) Halla con calculadora, el valor de f(4,13), siendo $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{3x+4}$

El bloque de Análisis, el tercero de este curso en órden cronológico, comienza con la Unidad de "**Características generales de las funciones**" donde se fundamentan conceptos aprendidos y desarrollados en 4º de ESO cuando se trabajaba con rectas, parábolas e hipérbolas y las correspondientes funciones por partes.

La segunda unidad del bloque de Análisis es la de "**Límite y Continuidad**" que formaliza algebráicamente ambos conceptos gráficos ya conocidos por los estudiantes, elementos imprescindibles para el desarrollo de la derivabilidad y su aplicación a la optimización y el estudio de funciones.

El estudio de las **funciones exponenciales, logarítmicas y trigonomVtricas** constituye la Unidad precedente a ésta que estamos trabajando, la cuarta del bloque mencionado, lo que permitirá múltiples aplicaciones respecto de la derivación y como ya se ha indicado, la utilización de los logaritmos a la hora de obtener ciertas fórmulas para derivar algunas funciones tipo.

Por otra parte, es conveniente introducir el concepto de diferencial, sobre todo en su importancia en la aproximación de funciones y por su aparición en contextos diversos de las Ciencias Experimentales:

El cálculo de funciones derivadas se conforma en uno de los procedimientos más útiles para resolver gran cantidad de situaciones relacionadas con las diferentes Ciencias: numerosas magnitudes físicas, tales como la velocidad y aceleración de un móvil en un cierto instante o la rapidez con la que varía la cantidad de movimiento de una partícula se expresan mediante la derivada de una función.

Además de los procedimientos correspondientes a la derivación de funciones, los alumnos deben poseer un buen nivel en lo que se refiere a la utilización de diferentes herramientas de tipo algebraico (como la descomposición factorial o la resolución de ecuaciones e inecuaciones) procedimientos que resultan imprescindibles para el correcto desarrollo de los contenidos que se trabajan en la unidad. Por ello, es una buena ocasión para retomar y repasar dichos procedimientos con el fin de aclarar aspectos que, tal vez, no hubieran sido suficientemente comprendidos y asimilados en su momento.

Relacionados con las Ciencias Económicas aparecen conceptos, tales como inflación, presión fiscal o producto interior bruto, que pueden ser presentados mediante gráficas de funciones. La interpretación de las mismas y de la realidad económica por tanto, se puede realizar mediante la ayuda de conceptos matemáticos como crecimiento y curvatura.

Lo mismo que ocurre a la hora de ajustar mediante funciones numerosos conceptos de la Física: movimiento de partículas, el trabajo desarrollado al aplicar una fuerza para desplazar un objeto, la ecuaicón del estado de un gas ideal o la propagación de una onda sonora plana son sólo algunos de los numerosos ejemplos que se podrían enunciar.

Al terminar este curso de primero, nuestros alumnos deberían estar en condiciones de obtener la derivada de cualquier función dada y de acomenter con confianza el estudio local y la correspondiente gráfica de prácticamente cualquier tipo de funciones con un no excesivo grado de dificultad, lo que, sin duda, permitirá afrontar con garantías de máximo aprovechamiento el curso de 2º de Bachillerato.

Tampoco debemos olvidar que en este curso de primero deben conocer el concepto de primitiva de una función así como su aplicación al cálculo de áreas sencillas para una vez en el próximo curso desarrollarlo con el máximo potencial, adecuado, naturalmente, al nivel del que se trata, recordando que la integración indefinida se trata a partir del proceso recíproco de la derivación.

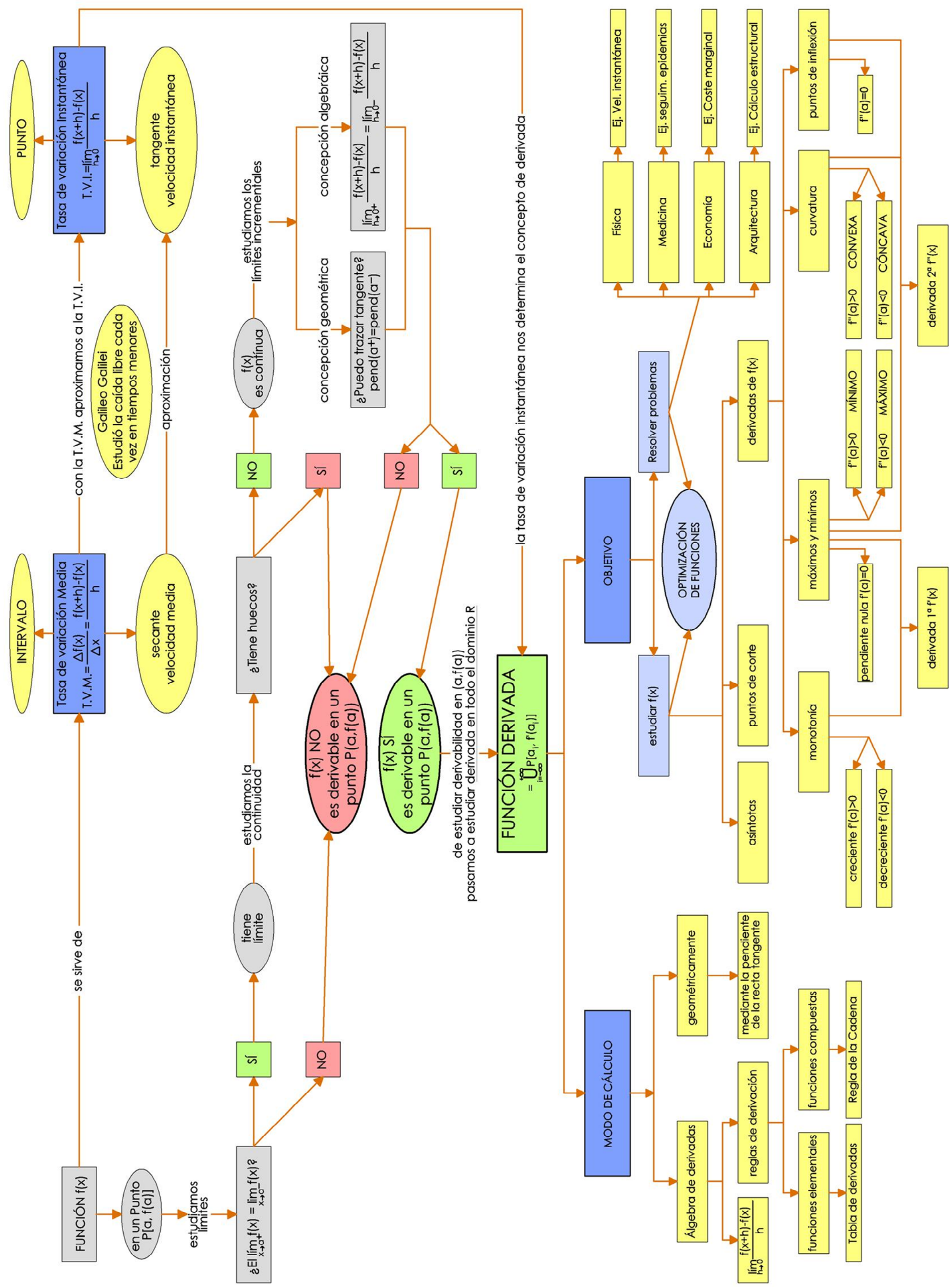
En definitiva, la noción derivada y sus aplicaciones se considera de suma importancia para la fomración de los alumnos que cursan estudios de esta modalidad del Bachillerato.

2.2. Procedimiento Didáctico

Realizaremos un análisis didáctico en base a tres componentes fundamentales:

- **Análisis de Contenido**: será expuesto en el punto siguiente. El profesor debe tener muy claro el esquema general de lo que quiere hacer en el aula para poder llevar a cabo una buena labor didáctica. Este análisis además, servirá para que cualquier persona que vea el procedimiento desde fuera, pueda entender rápidamente lo que se está haciendo y cómo se está haciendo.
- **Análisis fenomenológico**: En la sección de Metodología se hará constante alusión a la Fenomenología ya que todos los conceptos fundamentales se explicarán en base a ejemplos y aplicaciones sencillas de la vida cotidiana que los alumnos pueden entender sin ningún problema.
- **Análisis de los sistemas de Representación**: También en la parte de Metodología, se hará alusión a los distintos sistemas de representación utilizados en las diversas actividades. Dichos sistemas serán el numérico, el algebráico y el gráfico. Los alumnos irán interrelacionando constantemente los tres sistemas.

2.3. Mapa conceptual ampliado de la unidad.



2.4. ESQUEMA DE LA UNIDAD.

1. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica.
2. Derivadas laterales.
3. Continuidad y derivabilidad.
4. Función derivada.
    a. Definiciones.
    b. Derivadas sucesivas.
5. Reglas de derivación.
    a. Derivada de la función constante.
    b. Derivada de la función identidad.
    c. Derivada de una suma y de un producto de funciones.
    d. Derivada de la función producto por un número real.
    e. Derivada de la función potencial.
    f. Derivada de la función $c/f(x)$.
    g. Derivada de un cociente de funciones.
    h. Derivada de la función logarítmica.
    i. Derivada de la composición de funciones. Regla de la cadena.
    j. Derivación logarítmica.
    k. Derivada de una función exponencial.
    l. Derivada de las funciones circulares.
    m. Resumen de la derivada de las principales funciones compuestas.
6. Representación gráfica de funciones.
    a. Características que se deducen de la expresión explícita de una función.
    b. Asíntotas. Comportamiento de una función en el infinito.
    c. Estudio de la derivada primera: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos.
7. Problemas de optimización.

3. OBJETIVOS Y ESTUDIO DE ERRORES EN EL APRENDIZAJE

3.1. Objetivos generales

Serán aquellos que marque la Programación de aula referida al Primer Curso de Bachillerato. Estos son los siguientes:

1d *Comprender los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas que les permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de ciencias o técnicas y adquirir una formación científica general.*

ud *Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolos en la interpretación de las ciencias, en la actividad tecnológica y en las actividades cotidianas.*

ad *Analizar y valorar la información proveniente de diversas fuentes, utilizando herramientas matemáticas, para formarse una opinión propia que les permita expresarse críticamente sobre problemas actuales.*

4d *Utilizar, con autonomía y eficacia, las estrategias características de la investigación científica y los procedimientos propios de las Matemáticas (plantear problemas, formular y contrastar hipótesis, planificar, manipular y experimentar) para realizar investigaciones y, en general, explorar situaciones y fenómenos nuevos.*

5d *Expresarse oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo del vocabulario específico de términos y notaciones matemáticas.*

”d *Mostrar actitudes asociadas al trabajo científico y la investigación matemática, tales como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el cuestiona miento de las apreciaciones intuitivas, la apertura a nuevas ideas.*

7d *Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, adquirir rigor en el pensamiento científico, encadenar coherentemente los argumentos y detectar incorrecciones lógicas.*

8d *Abordar con mentalidad abierta los problemas que la continua evolución científica y tecnológica plantea a la sociedad dominando el lenguaje matemático necesario.*

i d *Apreciar el desarrollo de las Matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, íntimamente relacionado con el de otras áreas del saber, mostrando una actitud flexible y abierta ante opiniones de los demás.*

3.2. Objetivos específicos

Presentamos los siguientes objetivos específicos a esta unidad tomando como primera referencia las directrices que los informes PISA nos marcan en lo referente a la Competencia Matemática a adquirir por los alumnos. Realizando preguntas sobre objetivos concretos es posible determinar ciertas carencias. Antes de introducir los objetivos, **recordaremos las competencias que PISA nos establece para alcanzar**:

- Pensar y Razonar **(PR)**
- Argumentar y Justificar **(AJ)**
- Comunicar **(C)**
- Modelizar **(M)**
- Plantear y Resolver Problemas **(RP)**
- Representar **(R)**
- Utilizar Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico y las Operaciones **(LS)**
- Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas **(HT)**

En base a estas competencias, establecemos los siguientes objetivos didácticos:

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Identificar tanto gráfica como analíticamente los distintos términos que aparecen en la definición de tasa de variación media y relacionarlos con su utilidad en situaciones de la vida cotidiana.	X		X	X		X		
2	Obtener la tasa de variación instantánea a partir de la tasa de variación media tanto numérica como gráficamente y asociarla a la definición de derivada en un punto.		X			X	X		
3	Aplicar la definición de derivada en un punto para ver si una función es derivable en dicho punto utilizando si es necesario las derivadas laterales.		X					X	
4	Relacionar la derivada de una función en un punto con la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto y calcular su ecuación.		X				X		
5	Establecer la relación entre continuidad y derivabilidad teóricamente y llevarlo a la práctica en la resolución de problemas.		X	X		X			
6	Distinguir función derivada del concepto de derivada de una función en un punto y las condiciones necesarias para calcular las derivadas sucesivas.	X						X	
7	Utilizar reglas de derivación, derivadas de las funciones elementales y la regla de la cadena para calcular derivadas de funciones verificando la validez del resultado con herramientas tecnológicas.					X			X
8	Determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento de una función según el signo de la derivada en dichos intervalos y representar la función haciendo uso de herramientas tecnológicas para comprobar el resultado obtenido.					X	X		X
9	Localizar los puntos críticos de una función de forma gráfica y analítica usando también herramientas tecnológicas para su comprobación.		X				X		X
10	Aplicar los conceptos vistos sobre derivadas en otras áreas no exclusivas de las matemáticas como por ejemplo la Física.	X	X			X			
11	Aplicar razonadamente las derivadas en la resolución de problemas de optimización.	X		X	X	X			
		4	6	3	2	6	5	2	3

3.3. Estudio de posibles errores de los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje

	ERRORES Y DIFICULTADES	OBJETIVOS ASOCIADOS										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E01	Confusión entre variable dependiente e independiente en el cálculo de tasas de variación o incremento de una función a la hora de interpretar datos de una tabla o gráfica.	X	X									
E02	Confusión del orden que ocupa el valor final y el inicial cuando se calcula un incremento, por lo que no se distingue la diferencia entre variación positiva y negativa de una función.	X	X									
E03	Dificultad en la identificación de un incremento con la razón de cambio de una función.	X	X									
E04	Problemas en relacionar los cambios de una función con su crecimiento.	X	X						X			
E05	Error en relacionar el cambio de la tasa de variación con la rapidez con la que crece una función.	X	X		X							
E06	Dificultad en relacionar la tasa de variación con un cambio en la función y la tasa de variación media con la velocidad de cambio de una función en un intervalo.	X	X									
E07	No relacionar la tasa de variación instantánea con el límite de la tasa de variación media.	X	X									
E08	Problemas en interpretar la velocidad promedio como la pendiente de la recta secante y la velocidad instantánea como la pendiente de la recta tangente.	X	X		X							
E09	Confusión entre la derivada en un punto y la función derivada.			X			X					
E10	Generalización lineal de propiedades como por ejemplo el error $d^2[f(x)]= d[f(x)]^2$							X				
E11	Cálculo erróneo de derivadas excesivamente complejas.							X				
E12	Generalización y confusión al derivar números como si fuesen variables.							X				
E13	Identificar quién es f(x) y g(x) para derivar funciones compuestas (regla de la cadena).							X				
E14	No distinguir con claridad cuándo utilizar la regla del producto y cuándo utilizar la regla de la cadena.							X				
E15	Relación con los máximos, mínimos y puntos de inflexión con las derivadas 1ª y 2ª.								X	X		
E16	Asociación de problemas de optimización con sus funciones respectivas.											X
E17	Interpretación de problemas con enunciado (comprensión lectora).										X	X

4. CONTENIDOS

4.1. Contenidos conceptuales

1. Tasas de Variación: T.V. Media y T.V. Instantánea.
2. Derivada de una función en un punto.
Y. Recta tangente a una curva en un punto.
4. Derivadas laterales de una función en un punto.
5. Teorema sobre la relación entre derivabilidad y continuidad.
6. Función derivada.
7. Derivada de funciones elementales.
8. Derivada de funciones compuestas. Regla de la cadena.
9. Monotonía, acotación, puntos críticos y curvatura de una función en un punto.
10. Asíntotas de una función.
11. Teoremas de Rolle y del Valor Medio de Lagrange.

4.2. Contenidos procedimentales

1. Cálculo de la derivada de una función en un punto a partir de su definición.
2. Cálculo de derivadas de funciones mediante las reglas de derivación y utilizando si es preciso la regla de la cadena.
Y. Obtención de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.
4. Estudio de la derivabilidad de una función en un punto, mediante el estudio de su continuidad en él y a través del cálculo de derivadas laterales.
5. Determinación de parámetros en la expresión analítica de una función derivable.
6. Determinación de puntos angulosos y de puntos de retroceso.
7. Derivación logarítmica.
8. Obtención de derivadas sucesivas.
9. Determinación de la monotonía, extremos relativos, concavidad y convexidad y puntos de inflexión en una función dada.
10. Aplicación de la regla de L'Hopital cuando la situación lo requiera.
11. Resolución de problemas de optimización.

4.3. Contenidos actitudinales

1. Valoración de la necesidad del concepto de derivada para la resolución de problemas geométricos y físicos.
2. Valoración de la utilidad de los procedimientos de cálculo de límites en la obtención de las derivadas de las funciones elementales.
Y. Confianza en las propias capacidades para afrontar y resolver problemas relacionados con la derivabilidad de una función.
4. Disposición a la revisión y mejora de los procedimientos adquiridos en estadios anteriores del proceso de aprendizaje.
5. Observación de las normas sistemáticas y de precisión que regulan los procedimientos que se utilizan en esta unidad.
6. Interés y respeto por los procedimientos distintos de los propios.
7. Perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas planteados.

5. METODOLOGÍA

Se trata de contribuir a desarrollar, entre otras, la Competencia Matemática en los alumnos, la cual viene determinada según los informes PISA. El aprendizaje y desarrollo de capacidades irá por tanto en relación a los siguientes puntos fundamentales:

- Pensar y Razonar (PR)
- Argumentar y Justificar (AJ)
- Comunicar (C)
- Modelizar (M)
- Plantear y Resolver Problemas (RP)
- Representar (R)
- Utilizar Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico y las Operaciones (LS)
- Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas (HT)

Para ello la Metodología empleada podría corresponder a planteamientos como los que siguen:

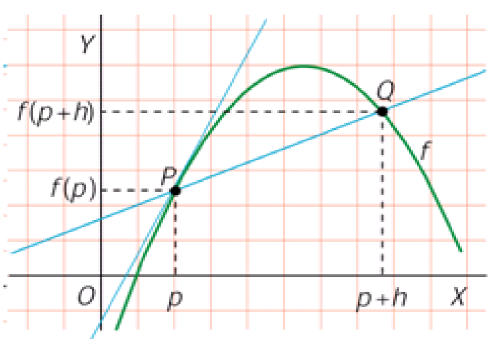
- Utilización de un enfoque desde los problemas
- Proposición de investigaciones
- Estudiar el lenguaje de los Medios de Comunicación
- Desarrollo de estrategias generales de resolución de problemas.

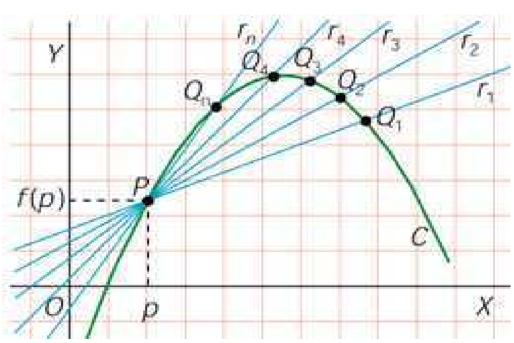
5.1. Introducción al planteamiento metodológico. Desarrollo de la Primera Parte del Análisis de Contenido.

Se comenzará la unidad a partir de soportes gráficos tales como fotos que puedan aludir a una de las situaciones relacionadas con ayuda de la noción de derivada. Posteriormente, el estudio de la gráfica correspondiente al perfil de una cierta etapa en una vuelta ciclista puede aportar información a los corredores sobre la estrategia que han de adoptar para obtener un rendimiento óptimo. Este estudio puede realizarse mediante la observación de la pendiente en cada punto que, por otra parte, viene dada por la derivada. Es preciso aclarar que desde el primer momento es necesario utilizar el lenguaje gráfico (representación de funciones) paralelamente al lenguaje algebraico. Los alumnos así potenciarán las competencias en Representación (R) y Lenguaje Simbólico (LS).

Dentro del comienzo de la unidad, después de este tipo de actividades llevaremos otra actividad: sobre un papel milimetrado y en referencia a unos ejes ortonormales se dibuja una gráfica. En uno de sus puntos de abscisa x_0 se traza la recta tangente de forma aproximada y se halla su pendiente **m** tomando como referencia la cuadrícula. Escribiremos directamente $f'(x_0) = m$.

Es decir, antes de dar ninguna definición de derivada, se identifica de forma práctica la derivada de una función en un punto con la pendiente de la recta tangente a su gráfica en ese punto. La realización de varios ejercicios como éste sirve para que el alumno sepa adónde se dirige cuando da los pasos para hallar la derivada mediante el límite del cociente incremental.





Calcularemos **tasas de variación media** y se enunciará que su límite es la derivada de la función escogida en el punto considerado lo que coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

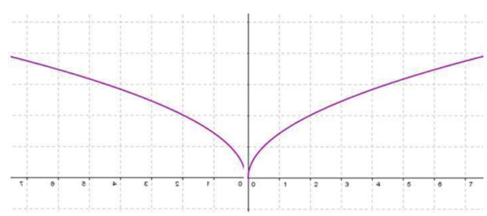
Naturalmente que plantearemos cómo definir **recta tangente a una curva en un punto** de la misma y llegaremos a la conclusión que se debe hacer a partir del límite de las secantes lo que nos introduce de nuevo en un planteamiento geométrico, por lo que la definición precisa de recta tangente vendrá dada por aquella recta que pasando por $\left(x_0, f(x_0)\right)$ tenga por pendiente $f'(x_0)$.

Definiremos derivadas laterales en un punto y en caso de disponer de tiempo se podrían caracterizar los puntos angulosos y los puntos de retroceso: el primer caso se puede presentar cuando ambas derivadas laterales en x_0 existen y no son iguales o bien se presenta cuando una derivada lateal existe y la otra es infinita.

Si las dos derivadas laterales en x_0 son infinitas y de distinto signo, siendo f continua en x_0, entonces el punto se denomina de retroceso. Un ejemplo de este último caso es: $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ en $x_0 = 0$. En efecto, en $x_0 = 0$, $f(x)$ es continua y se tiene que:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{2}{3}}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} = \mathrm{x}$$

Luego no es derivable en $x_0 = 0$ y se tiene que: $\begin{matrix} f'(0)^- = -\mathrm{x} \\ f'(0)^+ = +\mathrm{x} \end{matrix}$ 2 luego las derivadas laterales son infinitas y de distinto signo, con lo cual $x_0 = 0$ es un punto de retroceso.



$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Nunca se debe olvidar mencionar que tener una función derivable es tener una función que no presenta cortes, picos o cambios bruscos. Lo que nos conducirá a demostrar que toda función derivable en un punto x_0 es continua en $\left(x_0, f(x_0)\right)$, no cumpliéndose el recíproco, utilizando un contraejemplo, por ejemplo y o $|x|$, para afirmar que aunque es continua en (0,0), no es derivable en $x_0 = 0$.

Presentamos un ejemplo que se trabajará con los alumnos para entender los conceptos de esta primera parte (**actividad nº 1**).

Actividad nº 1:

ENUNCIADO

Dada la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & -\mathrm{x} < x \le 3 \\ x & 3 < x < +\mathrm{x} \end{cases}$$

Estudiar si es o no es derivable en el punto $x = 3$.

SOLUCIÓN

- Estudiamos la continuidad de la función:
  Para $x = 3$,
  $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & si - \mathrm{x} < x \le 3 \\ x & si\ 3 < x < +\mathrm{x} \end{cases}$$
  $$f(3) = \begin{cases} 3^2 - 2 \cdot 3 = 3 & -\mathrm{x} < x \le 3 \\ 3 & 3 < x < +\mathrm{x} \end{cases}$$
  por lo que $f(x)$ es contínua.

- Estudiamos las derivadas laterales:
  Para $x = 3$,
  $$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & si - \mathrm{x} < x \le 3 \\ 1 & si\ 3 < x < +\mathrm{x} \end{cases} \Longrightarrow$$
  $$f'(3) = \begin{cases} 2 \cdot 3 - 2 = 4 & -\mathrm{x} < x \le 3 \\ 1 \ne 4 & 3 < x < +\mathrm{x} \end{cases}$$
  por lo que las derivadas laterales no coinciden.

CONCLUSIÓN

$f(x)$ no es derivable en el punto $x = 3$.

En esta primera parte metodológica, se hará hincapié en el sistema de representación gráfico, seguido del algebraico y numérico. Los alumnos entenderán mejor los conceptos viendo gráficamente qué ocurre con una función en un punto y qué se puede asociar de ello con el concepto de derivada.

5.2. Desarrollo de la Segunda Parte del Análisis de Contenido. Cálculo de las Derivadas mediante las Reglas de Derivación.

Dispondremos de gran cantidad de ejercicios y problemas pero no se pretende que hagan todos y cada uno. Graduaremos los ejercicios en función del nivel del aula. Los más sencillos serán aquellos del cálculo directo de derivada, aunque para funciones no muy complicadas debemos incidir en la demostración de las mismas a partir del límite del cociente incremental.

Una vez trabajados los contenidos básicos correspondientes al concepto e interpretación geométrica de la derivada, se proseguirá con el estudio del cálculo diferencial mediante el desarrollo de los procedimientos correspondientes a las operaciones con las derivadas, introduciendo además el uso de la derivada logarítmica tanto desde el punto de vista de sus aplicaciones teóricas (la obtención de las reglas de derivación del producto y cociente de dos funciones o de la expresión de la derivada de las funciones potenciales y exponenciales) como por su importancia como herramienta a la hora de obtener la derivada de una función del tipo potencial-exponencial, ya que no deja de ser absurdo que los alumnos memoricen una fórmula para obtener esa derivada.

Se incidirá en el cálculo de derivadas de funciones compuestas, ya que los alumnos suelen tener muchas dudas y problemas a la hora de abordar este trabajo. Como ejemplo, presentamos otra actividad (**actividad nº 2**) que muestra el tipo de ejercicio que plantearemos en clase:

Actividad nº 2:

ENUNCIADO

Hallar la función derivada de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$f(x) = \ln^2(3 - 2x^3)$

PLANTEAMIENTO

$f(x) = \ln^2(3 - 2x^3) = \ln[\ln(3 - 2x^3)] \Longrightarrow$

Para poder aplicar convenientemente la regla de la cadena, hay que distinguir claramente qué funciones intervienen en la función compuesta:

$$\begin{bmatrix} f(x) = \ln\big(g(x)\big) = \ln(\ln(3 - 2x^3)) \\ g(x) = \ln\big(h(x)\big) = \ln(3 - 2x^3) \\ h(x) = 3 - 2x^3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Por tanto:

$$f'(x) = \frac{d\big(g(x)\big)}{g(x)} = \frac{d\big(\ln\big(h(x)\big)\big)}{\ln(3 - 2x^3)} = \frac{\frac{d\big(h(x)\big)}{h(x)}}{\ln(3 - 2x^3)}$$

$$= \frac{\frac{-6x^2}{3 - 2x^3}}{\ln(3 - 2x^3)} = \frac{-6x^2}{(3 - 2x^3)\ln(3 - 2x^3)}$$

Se puede observar que se le dará mucha más importancia al lenguaje algebraico, pasando el gráfico a un segundo lugar.

5.3. Desarrollo de la Tercera Parte del Análisis de Contenido. Estudio local y global de funciones mediante las derivadas.

Estableceremos la relación entre la primera y segunda derivada y la monotonía, máximos y mínimos y curvatura de la función, a través de los correspondientes teoremas que no necesariamente se deberán exigir.

Véanse los siguientes ejercicios que muestran la dinámica de trabajo en el aula, en la que nunca prescindiremos del papel milimetrado como herramienta de trabajo:

Actividad nº 2:

ENUNCIADO

Representa la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

PLANTEAMIENTO

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}}$$

- DOMINIO — $Dom(f(x)) = \mathbb{R} - \{1\} \cup \{-1\}$
  RECORRIDO — $Rec(f(x)) = \mathbb{R}$
- Puntos de Corte $\left\{ \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow f(0) = \frac{0}{0-1} = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right\}$ $\boxed{P(0,0)}$
- Asíntotas
  - Vertical — $\nexists f(x) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}}$
  - Oblicua (Grado denominador = Grado Num. -1) $\Rightarrow$
    $y = mx+n$
    $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \cancel{\frac{x^2}{x}} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$
    $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + x}{x^2-1} = 0$
    Asíntota: $\boxed{y = x}$
- Estudio del signo

  -2, $-0'1$, $0'1$, $+2$; $-$, $+$; -1, 0, 1; $-$

  $f(-2) = \frac{-}{+} = -$ $\quad f(0'1) = \frac{+}{-} = -$
  $f(-0'1) = \frac{-}{-} = +$ $\quad f(2) = \frac{+}{+} = +$
- Estudio de las derivadas

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{x^4 - 2x^2 + 1} = \frac{x^4 - 3x^2}{x^4 - 2x^2 + 1}$$

¿Cuándo $f'(x) = 0$? $\Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array} \right.$

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^4 - 2x^2 + 1) - (4x^3 - 4x)(x^4 - 3x^2)}{(x^4 - 2x^2 + 1)^2}$$

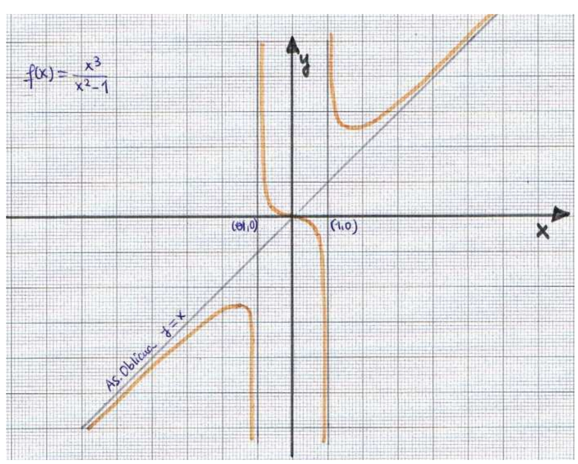
$f''(0) = \frac{(0)(1) - 0 \cdot 0}{1^2} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0 \Rightarrow \text{Punto de Inflexión}}$

$f''(\sqrt{3}) = \frac{(12\sqrt{3} - 6\sqrt{3})(9-6+1) - (12\sqrt{3} - 4\sqrt{3})(9-9)}{(6-6+1)^2} > 0 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{3} \Rightarrow \text{Mínimo}}$

$f''(-\sqrt{3}) = \frac{(-12\sqrt{3} + 6\sqrt{3})(9-6+1) - (-12\sqrt{3} + 4\sqrt{3})(9-9)}{(6-6+1)^2} < 0 \Rightarrow \boxed{x = -\sqrt{3} = \text{Máximo}}$

$f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3})^2 - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $f(-\sqrt{3}) = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$

SOLUCIÓN



Actividad nº Y:

ENUNCIADO

Representa la siguiente función:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$$

PLANTEAMIENTO

$$\boxed{f(x)=\frac{x^3+x^2}{2x^2+x}=\frac{x^{\cancel{2}}(x+1)}{\cancel{x}(2x+1)}=\frac{x(x+1)}{2x+1}}$$

- Cont. – Dom $=\mathbb{R}-\{0, 1/2\}$
- P. Corte $\begin{cases} x=0 \to y=0 \Rightarrow \text{Presentará hueco ya que } \nexists\ \text{Dom}(f(x))/x=0 \\ y=0 \to x(x+1)=0 \Rightarrow x+1=0 \to x=-1 \end{cases}$
- Asíntotas
  - Vertical $\Rightarrow$ Donde $\nexists f(x) \Rightarrow$ En $x=-1/2$ $\exists$ As. Vert.
  - Oblicua: $y=mx+n$

    $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\frac{x-1}{2x+1}=\frac{1}{2}$

    $n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{2x+1}-\frac{1}{2}x\right)=[\ldots]=\frac{1}{4}$

    As. obl. $\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$
- Estudio del signo

  (−2) (−0'6) (−0'1) (10)

  −1 $-\frac{1}{2}$ 0

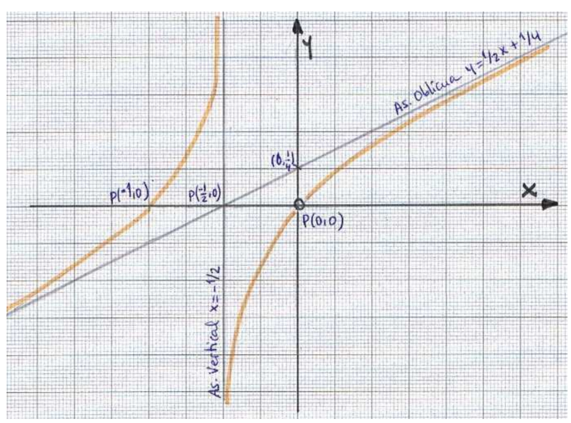
  $f(-2)=\frac{-}{+}=-$ $f(-0'1)=\frac{+}{-}=-$

  $f(-0'6)=\frac{+}{+}=+$ $f(10)=\frac{+}{+}=+$
- Estudio de la 1ª Derivada

  $f'(x)=\frac{(2x+1)(2x+1)-2(x^2+x)}{(2x+1)^2}=[\ldots]=\frac{2x^2+2x+1}{4x^2+4x+1}$

  Se comprueba que es imposible que se anule $f'(x)$ por lo que $f(x)$ no presenta ni máximos ni mínimos.

SOLUCIÓN



Actividad nº 4.

ENUNCIADO

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

a) Halla la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1.

b) ¿En qué puntos de esta curva la tangente es horizontal?

RESOLUCIÓN

a) Para hallar la ecuación de la recta tangente, debo conocer la pendiente en el punto 1, cuyo valor el alumno sabe que lo debe hallar con la derivada primera:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Longrightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3$$

Ecuación general de una recta: $y = mx + n$

m es la pendiente, y n lo puedo hallar dado un punto cualquiera, por ejemplo, para $x = 0$:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 \Longrightarrow f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 1 = -1$$

Ecuación de esta recta tangente: $y = -3x + n$

Sustituyendo el punto: $-1 = -3 \cdot 0 + n \Longrightarrow n = -1$

$$\boxed{y = -3x - 1}$$

b) La tangente es horizontal cuando su pendiente vale cero y eso vendrá determinado cuando $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x(3x - 6) = 0$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ 3x - 6 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 2} \end{cases}$$

Los puntos serán por tanto, sustituyendo en la función:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 1 \Longrightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \Longrightarrow (0, -1) \\ f(2) = -5 \Longrightarrow (2, -5) \end{cases}$$

5.4. Desarrollo de la Cuarta Parte del Análisis de Contenido. Optimización de funciones.

Uno de los focos más interesantes de esta unidad es el referido a problemas de optimización de funciones, puesto que es donde mejor se puede hacer un análisis fenomenológico, junto con el apartado de Temas Transversales. Los problemas de optimización serán el resultado de aplicar los conceptos vistos hasta ahora a problemas relacionados con la vida diaria o con cuestiones relacionadas con las Ciencias Naturales.

Para presentar los problemas de optimización puede recurrirse a diversos ejemplos reales tal y como se recoge en la parte del "Mundo de las Matemáticas" de los Temas Trasversales contenido en esta aplicación didáctica.

Actividad nº 5:

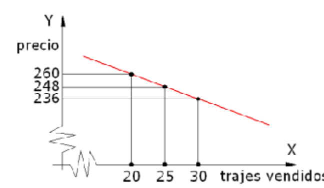
ENUNCIADO

El empresario de una tienda de ropa adquiere un determinado modelo de traje que le cuesta, de fábrica, 140 ª la unidad. Sabe que puede vender al mes 20 trajes a un precio de 260 ª, y también sabe que, por cada 5 trajes más que venda, puede ofrecer un descuento de 12 ª por unidad.

Hallar el número de trajes que se deben vender para que el precio sea óptimo.

PLANTEAMIENTO

Esta relación funcional se puede expresar mediante la siguiente ecuación, en la que x es el número de trajes vendidos e y su precio.



Ecuación de la recta de la figura: $r \equiv \frac{y-260}{x-20} = \frac{-12}{5}$

Es decir: $y = \frac{-12}{5}(x-20) + 260 \Longrightarrow y = \frac{-12}{5}x + 308$

El beneficio, $B(x)$ que se obtiene de esta operación será el precio de cada traje por el número de trajes vendidos menos lo que se pagó en fábrica por todos los trajes.

Es decir:

$$B(x) = \left(\frac{-12}{5}x + 308\right)x - 140x = \frac{-12}{5}x^2 + 168x$$

SOLUCIÓN

Para que el beneficio sea máximo en función del número de trajes vendidos, debe cumplirse que $B'(x) = 0$ por lo que:

$$B'(x) = \frac{-24}{5}x + 168 = 0 \Longrightarrow x = \frac{168 \cdot 5}{24} = 35\ trajes$$

¿Cuál es el tamaño óptimo de una lata de refresco con un mínimo gasto de material de aluminio? Lo que admite otra cuestión. ¿Por qué no se hacen de ese tamaño?

Se puede explicar cómo obtener los extremos absolutos de una función en un intervalo (**Actividad nº 4**), pero lo más difícil para los estudiantes es expresar analíticamente la función que hay que optimizar a partir del enunciado y establecer en qué intervalo está definida. Los ejemplos propuestos y resueltos intentarán razonar todo el proceso que se sigue para evitar que, una vez obtenida la función, resolver el problema sea totalmente mecánico.

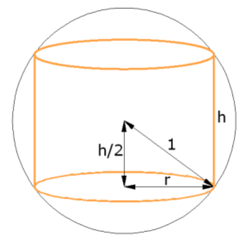
Actividad nº 6:

ENUNCIADO

Calcular las dimensiones del cilindro inscrito en una esfera de radio r = 1m de manera que su volumen sea el máximo posible.

PLANTEAMIENTO

En este caso, hacernos un dibujo de la situación nos ayudará a comprender el enunciado y por tanto a fijar los parámetros deseados.
De la figura, podemos hallar el volumen del cilindro y las relaciones entre el radio y la altura proporcionados por el triángulo rectángulo que se puede ver.



Por tanto:

$$\left.\begin{array}{c} r^2\ 1\ \left(\frac{h}{2}\right)^2\ \text{o}\ 1 \\ V\ \text{o}\ \pi r^2 h \end{array}\right\} \Rightarrow r^2\ \text{o}\ 1-\left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$V(h)=\pi\left(1-\left(\frac{h}{2}\right)^2\right)h=\pi h-\pi\frac{h^3}{4}$$

SOLUCIÓN

Para que el volumen sea máximo, $V'(h)=0$ por lo que:

$$V'(h)=\pi-\pi\frac{3h^2}{4}=0\Rightarrow\pi\left(1-\frac{3h^2}{4}\right)=0\Rightarrow 1-\frac{3h^2}{4}=0\Rightarrow h^2=\frac{4}{3}\Rightarrow h=\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Por lo que el radio será:

$$r=\sqrt{1-\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{4/3}}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}\Rightarrow r=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

A lo largo de la unidad se resolverán muchas actividades, tanto de optimización como de determinación de características locales de una función, lo que nos conducirá a abundantes representaciones gráficas. Se ofrecerá material con actividades complementarias y otro que se utiliza para distribuir a los estudiantes que demuestren más interés, sobre, por ejemplo la construcción de gráficas de funciones polinómicas cuando sus ceros no se pueden obtener de forma sencilla, de funciones logarítmicas o exponenciales o sobre problemas de optimización con enunciados de texto.

5.5. Desarrollo de una clase al completo: Primera clase completa en la Zue trabajaremos problemas de optimización

Es la primera clase que vamos a impartir donde los alumnos van a ver un contacto directo de las Matemáticas con problemas relacionados con la vida real.

Empezaremos la sesión preguntando las dudas surgidas hasta el momento, puesto que el último día se terminó la clase representando funciones y sacando características de ellas en base a la primera y segunda derivadas. Para ello, tenemos previsto alrededor de unos quince minutos.

Posteriormente plantearemos el siguiente problema, que no resolveremos nosotros directamente sino los alumnos con nuestra ayuda:

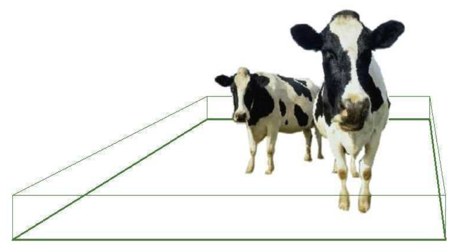
Calcula dos números cuya suma sea ”0 y de forma que sea mínimo el cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo

Los alumnos llevan todo el curso trabajando en todas las unidades un apartado denominado “Estrategias para la Resolución de Problemas”. Significa esto que deben estar ya acostumbrados a ver un enunciado y pasarlo al lenguaje algebraico.

- **Ellos verán** que si hay dos números, uno puede ser x y el otro y y que por tanto, $Suma = \boxed{S = x + y = 60}$.
- Por otro lado, dicen que el cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo, es mínimo. En términos matemáticos: $\boxed{f = x^2 + 2y^2 = mínimo}$.
- **Hasta aquí, todo lo han hecho ellos**, ahora es cuando el profesor debe intervenir para aclararles que lo que se ha formado es un SISTEMA de ecuaciones en el que hay datos que no conocen. Si en el primer sistema despejan una de las incógnitas, pueden sustituirla en la segunda ecuación, es decir: $\boxed{y = 60 - x}$ que sustituida en la segunda ecuación (**lo hacen ellos**), resulta $\boxed{f = f(x) = x^2 + 2(60 - x)^2 = 3x^2 - 240x + 7200 = mínimo}$
- Es el momento de hacerles ver que tenemos una segunda ecuación con una incógnita y una condición o restricción (la suma se hace mínima). Significa esto que si representásemos esa función (Sistema GRÁFICO de Representación) en el Sistema de Coordenadas, habría que ver dónde f(x) alcanza un mínimo. **Sin decirles nada, los alumnos con esa premisa deberán deducir que lo que hay que hacer**, es derivar la función e igualarla a cero, ya que f(x) presenta un mínimo cuando su derivada se anula, y eso es lo que haremos: $\boxed{f'(x) = 6x - 240 = 0}$.
- Obviamente, **el resto del problema lo resuelven ellos bajo nuestra supervisión**, saben que $x = 40$ y que pueden hallar perfectamente el valor de y sustituyendo en la primera ecuación. Ven por tanto que $\boxed{y = 60 - 40 = 20}$.

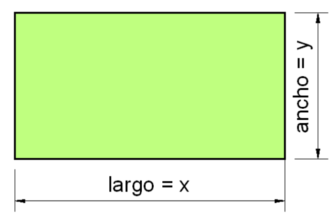
Posteriormente propondremos la siguiente actividad:

Un ganadero quiere cercar un recinto de forma rectangular en un prado para que puedan pastar las vacas. Si dispone de 1”00 m de cerca. ¿Cuánto medirá de largo y de ancho el recinto para que la superficie del recinto sea máxima?



Este tipo de ejercicio lo resolverán ellos con nuestra ayuda. Les indicaremos que los pasos a seguir son exactamente los mismos que los del ejercicio anterior, con la salvedad de que tienen que visualizar cuáles son las incógnitas (en el ejercicio anterior venían más explícitas.

Para ello el lenguaje gráfico será un método de representación importante, es por lo que con las mismas premisas del ejercicio anterior iremos resolviendo el presente. Para ayudarlos, les introduciremos la imagen de la figura y ellos solos tienen que ir diciéndonos qué creen que hay que hacer.



Conseguiremos que la clase así sea un medio dinámico de trabajo en el que los alumnos están actuando de forma participativa constantemente.

Finalmente, para cerrar la sesión, propondremos otro ejercicio parecido para que los alumnos se terminen de familiarizar con esta tipología de problemas (para casa y para las siguientes sesiones, se propondrán ejercicios de mayor nivel, tales como los del apartado inmediatamente anterior).

Se quiere construir un recipiente cuadrangular tal que su volumen sea máximo. Si la superficie es de 24 m2, ¿Qué dimensiones debe tener la caja?

Como recurso didáctico, para casa, teniendo en cuenta que hay alumnos que llevan un ritmo de aprendizaje más lento, propondremos la visión de un vídeo que les puede ayudar en la comprensión del tema:

http://www.youtube.com/watch?v=08tXuN_lxY8

http://www.youtube.com/watch?v=pbCyBAzOxiE

Además, mandaremos para casa los ejercicios del apartado anterior para que vengan resueltos para clase.

5.6. Sugerencias didácticas

- Los problemas y ejercicios de cálculo de derivadas mediante la aplicación de la definición refuerzan tanto las habilidades relacionadas con la simplificación de expresiones algebraicas como las propias de la resolución de indeterminaciones en el cálculo de límites.
- Relacionar los valores obtenidos en el cálculo de tasas de variación con las características de crecimiento de la función estudiada puede facilitar la asimilación por parte de los alumnos del significado de estos valores como medidas de la velocidad de variación de una función.
- Es preferible que el alumno, antes de demostrar algo, se familiarice con ello, con el fin de que tenga muy claro qué es lo que se desea demostrar.
- Parece conveniente que, más que la simple memorización de la tabla de derivadas, se procure la asimilación correcta del manejo de los procedimientos y, sobre todo, de la utilización de la regla de la cadena.
- Conviene insistir en la diferencia entre extremo absoluto y extremo relativo y dejar claro que estos conceptos no tienen que ver con la derivada en sí: una función puede no tener derivada en un punto y tener un extremo en él.
- Al alumno debe quedarle muy claro que una función definida en un intervalo, puede alcanzar el máximo, el mínimo o ambos en los extremos de éste.
- Se pondrá de manifiesto, análogamente a como se hizo con los extremos de la función, que en un punto de inflexión la función puede no ser derivable o no tener derivada segunda. Por este motivo se insistirá en caracterizar los puntos de inflexión a partir de los intervalos de curvatura constante.
- La regla de L'Hopital que, aunque no se demuestre, nos servirá para resolver ciertas indeterminadas como $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0^0, \infty^0, 1^r$ (lo que reforzará el cálculo de límites que se debe realizar para obtener las asíntotas), se puede interpretar como sigue: "si alrededor de un punto, el cociente entre la derivada de dos funciones tiene límite, es decir, se estabiliza, entonces las funciones deberán tener un comportamiento análogo al de sus rectas tangentes alrededor de dicho punto".

6. TIEMPO DE DURACIÓN Y RECURSOS

6.1. Tiempo de duración

La presente unidad trabaja conceptos fundamentales e imprescindibles en lo referido al estudio de funciones y en lo que se refiere a las importantísimas aplicaciones del cálculo diferencial.

Por otra parte, y en relación con los contenidos del Análisis en el próximo curso, donde se volverán a tratar todos y cada uno de los conceptos aquí estudiados, conviene afianzarlos lo más posible, permitiendo abrir el camino a posibles nuevos conocimientos, bajo una visión amplia y abierta que permita desarrollar nuevas formas de abordar los clásicos planteamientos del Análisis infinitesimal:

El problema que plantean funciones como $f(x) = \frac{x^7}{7}$ en relación a la obtención de sus extremos y puntos de inflexión a partir de la derivación se produce al ser nulas su primera y segunda derivada, de esta forma para el curso de 2º de Bachillerato dejaremos abierta la idea sobre de qué orden par o impar es su primera derivada sucesiva que no se anula; esto, como es sabido, queda resuelto a partir de los corolarios del Teorema de Taylor.

Con esto queremos poner de manifiesto lo trascendental que es el hecho de dedicarle a esta unidad el tiempo necesario e imprescindible para que nuestros alumnos sepan derivar funciones y estudiarlas localmente de forma precisa y adecuada, por lo que al menos le dedicaremos un total de 16 unidades horarias teniendo en cuenta la actual disposición de 4 horas semanales y sin obviar la idea de que para aquellos alumnos con especial implicación se podrán aportar materiales que les permitan resolver ciertos planteamientos abiertos cara al 2º curso de Bachillerato.

6.2. Temporalización de las clases

La Unidad Didáctica presente es la unidad más larga que se va a impartir en todo el curso, abarcando un total de 16 horas lectivas. Como la carga semanal es de 4 horas, nos resulta una distribución bastante lógica de dividir la unidad en cuatro partes, impartiéndose cada una en una semana distinta.

En la **primera semana** de clase, trabajaremos el **concepto de derivada** partiendo de las tasas de variación, tal y como se ha explicado en el punto 5.1. de la Metodología.

En la **segunda semana**, se darán las **reglas de derivación (álgebra de derivadas)** y los alumnos se dedicarán a hacer ejercicios guiados por el profesor.

Todo ello contribuirá a que, en la **tercera semana**, los alumnos estén preparados para realizar **estudios de funciones**, completando así lo que aprendieron en las unidades de “Características Generales de las Funciones” y “Límites y Continuidad”.

En la **cuarta semana**, se trabajarán los **problemas de optimización** y se repasará lo estudiado hasta el momento, dando a los alumnos una visión global de todo el Análisis estudiado hasta el momento.

6.3. Recursos didácticos

- El programa FUNCIONES para Windows puede ser una herramienta muy útil para la preparación de las actividades de visualización de representaciones gráficas ya ejecutadas. Así mismo, puede ser utilizado como herramienta auto correctora y de comprobación por los propios alumnos en la revisión de los ejercicios que han realizado de forma manual.
- La calculadora gráfica también se puede utilizar para desarrollar las aplicaciones anteriores.
- El programa DERIVE. A. Mathematical Assistant permite la obtención de funciones derivadas, tanto de forma gráfica como analítica y puede ser útil para el desarrollo de estrategias de identificación entre la expresión de la función y su representación gráfica, y entre ésta y la expresión de la derivada.
- La visualización de un número suficiente de representaciones gráficas, presentadas al alumno por medio de la calculadora gráfica, programas informáticos o transparencias, ayuda a identificar los aspectos globales y locales de aquellas con las características de la función obtenidas mediante el estudio con derivadas y el cálculo de asíntotas, y facilita el desarrollo de las destrezas creativas asociadas a los procedimientos de representación.

7. ACTIVIDADES DE AMPLIACIÓN Y RAZONAMIENTO

Realizaremos actividades para los alumnos con mayor interés, actividades que presenten retos interesantes, como por ejemplo las dos actividades que presentamos y que resolvemos tal y como un alumno debería resolverla.

Actividad nº 1:

ENUNCIADO

Representa la función

$$f(x) = \frac{|x|}{x+1}$$

PLANTEAMIENTO

La función valor absoluto es una función definida en dos trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x+1} & si\ x < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Estudiamos $f(x)$:

- $\boldsymbol{Dom(f(x))} = \mathbb{R} - \{-1\}$ ya que -1 no puede pertenecer a $f(x)$ ya que anularía el denominador y eso no debe ocurrir.
  En -1 habrá una asíntota vertical aunque los alumnos estudiarán qué pasa exactamente en ese punto en el apartado de asíntotas.
- $\boldsymbol{Rec(f(x))} = \mathbb{R}$ puesto que $f(x)$ puede tomar cualquier valor.
- **Continuidad de $\boldsymbol{f(x)}$**: $f(x)$ es contínua en todo $\mathbb{R}$ excepto en el punto -1 que presenta una discontinuidad.
- **Simetrías y periodicidades**: Los alumnos saben que no presenta periodicidad ya que no es una función trascendente. Sí tendrán que considerar que las dos funciones dadas (una para la parte negativa y otra para la positiva) son simétricas respecto al eje x.
- **Puntos de corte con los ejes**.
  - $x = 0 \Longrightarrow f(x) = \frac{0}{0+1} = 0$
  - $f(x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \frac{-x}{x+1} = 0 & si\ x < 0 \\ \frac{x}{x+1} = 0 & si\ x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow x = 0$
- Representamos en función del dominio y de los puntos de corte, **dónde la función es positiva y dónde es negativa**. Para ello damos valores en lugares intermedios.

$$f(-10) = \frac{-(-10)}{(-10)+1} = \frac{+10}{-\text{í}} < 0 \Longrightarrow \boxed{-}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)+1} = \frac{+\frac{1}{2}}{+\frac{1}{2}} = 1 > 0 \Longrightarrow \boxed{+}$$

$$f(10) = \frac{(10)}{(10)+1} = \frac{+10}{+11} > 0 \Longrightarrow \boxed{+}$$

	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$		$+$	$+$

- **Estudio de las asíntotas**
  - **Asíntota vertical**: Presenta como hemos visto antes en el punto -1. Dado el estudio de signos, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$
  - **Asíntota horizontal**: Presenta, dado que el grado del numerador es el mismo que el del denominador. Estudiamos qué ocurre cuando $x \to \pm\infty$

- $x \to -\infty \Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$
  - $x \to +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

- **Asíntota oblicua**: Los alumnos deben saber que no presenta, para que presentara este tipo de asíntota, el grado del numerador debería ser una unidad mayor que el denominador.

- **Información suministrada por las derivadas primera y segunda**

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x+1)^2} & si\ x < 0 \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} & si\ x \geq 0 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^3} & si\ x < 0 \\ \dfrac{-2}{(x+1)^3} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

- **Suavidad vs. Angulosidad**: La función es discontinua en el punto -1 como habíamos dicho, ahora, vamos a ver si en los demás puntos la curva es suave o presenta ángulos. El único punto donde puede presentar un ángulo es en $x = 0$ ya que es donde acaba una función $\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)$ y empieza la otra $\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$.
  Los alumnos habrán estudiado que para que la curva sea suave en el punto (no presente ángulos), las derivadas laterales deben coincidir, por lo que hallamos el valor de $f'(x)$ en el punto 0.

$$f'(0) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(0+1)^2} & = -1 \\ \dfrac{1}{(0+1)^2} & = 1 \end{cases}$$

Por tanto en $x = 0$, $f(x)$ presenta un punto anguloso.

- **Determinación de máximos y mínimos relativos**
  - $f(x)$ presentará máximos y mínimos relativos si su derivada primera se anula en algún punto. Esto, los alumnos verán que es imposible, ya que la derivada primera nunca se anula, pero sí sabrán que en $x = 0$ hay un ángulo, por lo que puede fácilmente ser un máximo o un mínimo.
  - Teniendo en cuenta que las derivadas laterales cambian de signo en $x = 0$ significa que hay un máximo o un mínimo, concretamente un mínimo ya que $f'(0)^- = -1$ y $f'(0)^+ = 1$.

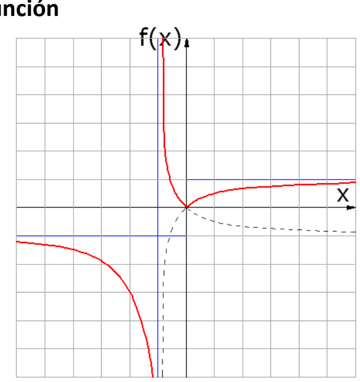
- **Determinación de la curvatura**: Estudiamos en la derivada segunda el signo para nuestros intervalos, donde:

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
Curvatura	∩	∪	∪

Resumen de los elementos más importantes de la función

	$-\infty$ a -1	-1 a 0	0 a $+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
Pendiente	↘	↘	↗
Curvatura	∩	∪	∪

Representación de la función



Actividad nº 2:

ENUNCIADO

Lectura comprensiva. Explica en clase las diferencias entre el cálculo de Newton y el de Leibniz según la lectura efectuada del siguiente documento:

2004
José Manuel Arcos Quezada
RIGOR O ENTENDIMIENTO, UN VIEJO DILEMA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS: EL CASO DEL CÁLCULO INFINITESIMAL.
El cálculo según Newton y Leibniz

Universidad Autónoma del Estado de México
Toluca, México
pp. 77-110

LECTURA

1. El cálculo según Leibniz

1.1. Contexto de partida

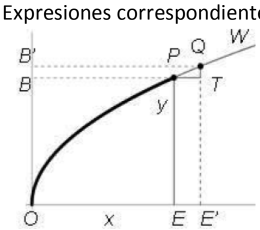
Noción de infinitesimal: Griegos: Consideraban el círculo como un polígono con muchos lados minúsculos.
Geometría: Herramienta muy potente
Curvas: Líneas poligonales con infinitos lados
Recta tangente a la curva: Recta que une dos puntos de una curva separados por una distancia infinitamente pequeña.
Recta que determina el lado de un polígono de infinitos lados.
Herramienta de problemas geométricos.

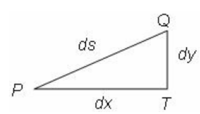
1.2. Cálculo leibniziano

Leibniz no era didáctico, L'Hopital sí.
L'Hopital publicó las comunicaciones de Bernouilli pero con un planteamiento didáctico.
Primera definición: Cantidades constantes y variables.
Segunda definición: Concepto fundamental del Cálculo leibniziano.

Diferencia: Parte infinitamente pequeña.

Notación moderna:
Expresiones correspondientes a los elementos de arco y de área bajo la curva.

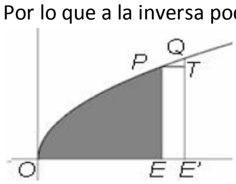


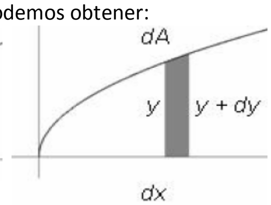


$$OPW = curva$$
$$PQ = \Delta t \ (infinitamente\ pequeño)$$
$$x = OE \Longrightarrow dx = EE' = PT$$
$$y = OB \Longrightarrow dy = BB' = TQ$$

$$s = OP \Longrightarrow ds = PQ$$
$$= \sqrt{PT^2 + TQ^2} \Longrightarrow$$
$$\boxed{ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

Por lo que a la inversa podemos obtener:





$$dA = área\ del\ trapecio\ EE'QP = \frac{y + (y + dy)}{2}dx = \frac{2y + dy}{2}dx$$
$$= ydx + \frac{dydx}{2} \simeq ydx$$

Fenómeno dado a confundir a los alumnos de cara a ver el fenómeno de integración como la inversa de derivar.

1.3. Postulado de L'Hopital

Una cantidad incrementada por otra infinitamente pequeña puede considerarse que sigue siendo la misma cantidad. $\Longrightarrow y + dy = y$
Diferencial: Medida de un cambio infinitesimal de la misma.
Variación continua de una variable: Variación con "saltos" infinitesimales. (Ver Bezout)
Bezout: Mostró la forma de determinar un incremento determinando el valor de una cantidad para un instante y el de la misma para el instante inmediatamente siguiente (Bezout, 1770:14)

Ejemplo:

$$dxy = [(x+dx)(y+dy)] - [xy] = [xy + xdy + ydx + dxdy] - [xy] \Longrightarrow$$
$$dxy = xdy + ydx + dxdy \simeq xdy + ydx$$

De todo este desarrollo tan sencillo introducimos la razón de cambio como el cociente de incrementos finitos.

1.4. Segundas diferencias y sucesivas

Partiendo de los cocientes de incrementos finitos, podemos estudiar los diferenciales segundos, considerándolos como el diferencial del diferencial.
Se diferencia el diferencial de una variable con respecto el diferencial de la otra considerada como constante, de manera que tenemos:

$$a = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{\frac{dt\, d(ds) - ds\, d(dt)}{(dt)^2}}{dt} = \frac{\frac{dt\, d(ds)}{(dt)^2}}{dt} = \frac{d(ds)}{(dt)^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

2. El cálculo según Neĺton. MVtodo de las fluxiones

2.1. Contexto de partida

Newton rechaza el cálculo a base de concepciones geométricas.
Utilización de los fenómenos físicos para la explicación de infinitesimales.

Dificultades basadas en dos problemas.
Encontrar la velocidad de movimiento en cualquier tiempo propuesto.
CÁLCULO DIFERENCIAL
Encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier tiempo propuesto (Newton, 1671:81)
CÁLCULO INTEGRAL

2.2. Definición de Velocidad

No será considerada como una razón de incrementos infinitesimales (Leibniz):

Considerará la velocidad como aquella determinada por unas **cantidades fluyentes** v, x, y y z. La velocidad con la que fluyen se incrementa por el movimiento generado por éstas denominándose **fluxiones**.

$$Momentos = Incrementos\ de\ variables\ (espacio) = fluxiones \cdot tiempo\ (t)$$

Si

$$x = \dot{x}o \begin{cases} \dot{x} = \text{velocidad} \\ o = \text{cantidad infinitamente pequeña} \end{cases} \Longrightarrow \dot{v}o, \dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o \text{ son entre sí como } \dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$$

Aunque existen notables diferencias con Leibniz, el infinitesimal siempre está presente.

Actividad nº Y:

ENUNCIADO

Problema de optimización anteriormente desarrollado (cilindro en esfera).

8. ACTIVIDADES DE RECUPERACIÓN Y REFUERZO Y MEDIDAS DE ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Proponemos actividades que pretenden cubrir los objetivos mínimos de la unidad, para ayudar a que los alumnos con dificultades puedan superar la evaluación, y que a la vez sirvan como ejercicios de recuperación si la evaluación ha resultado negativa.

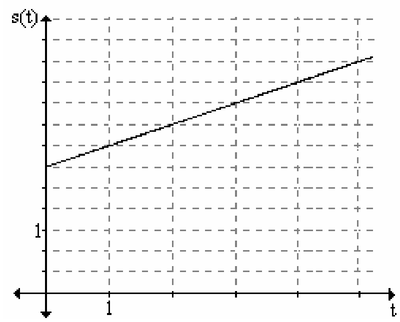
Si esto último ocurre, trataremos paralelamente al desarrollo de la siguiente unidad, ir mandando y supervisando el trabajo que los alumnos con esta unidad pendiente vayan haciendo.

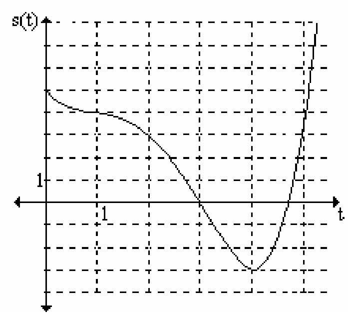
Actividad nº 1. Ejercicio de Síntesis.

Derivabilidad de f en $x = a$	Se dice que la función f es derivable en $x = a$ si existe el límite: …………………………………………………………………………………………… Este límite se denomina derivada de f en $x = a$ y se denota por: …………………………………………………………………………………………… La derivada de una función en un punto es el valor de la ………………………… De la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. Si existe derivada en $x = a$ entonces la ecuación de la recta tangente en $\left(a, f(a)\right)$ es: ……………………………………………… Las derivadas laterales de una función f contínua en $x = a$ se definen como: …………………………………………………………………………………………… …………………………………………………………………………………………… Si ambas son iguales, entonces: …………………………………………………………… Si ambas son diferentes, puede suceder que: …………………………………………… Punto anguloso: ……………………………………………………………………………… Punto de retroceso: ……………………………………………………………………………
Derivabilidad y continuidad	Si una función es continua en $x = a$, entonces es derivable en $x = a$ …………………………………………………………………………………………… Si una función es derivable en $x = a$, entonces es continua en $x = a$ …………………………………………………………………………………………… Si f no es ……………………………… entonces no es …………………………… en $x = a$.
Función derivada	Definición de función derivada: …………………………………………………………………………………………… Si g es derivable en $x = a$ y f es derivable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es derivable en $x = a$ y se cumple: $(f \circ g)'(a) =$………………………………………… Esta fórmula recibe el nombre de: …………………………………………………………

Actividad nº 2. Ejercicio de Comprensión del concepto de Tasa de Variación.

Las gráficas muestran el espacio recorrido s(t) por dos partículas respecto del tiempo demorado en recorrerlo.





Para cada una complete una tabla como la que sigue.

Intervalos	Δs
0 ≤ t ≤ 1	
1 ≤ t ≤ 2	
2 ≤ t ≤ 3	
3 ≤ t ≤ 4	
4 ≤ t ≤ 5	

Intervalos	Δs
0 ≤ t ≤ 1	
1 ≤ t ≤ 2	
2 ≤ t ≤ 3	
3 ≤ t ≤ 4	
4 ≤ t ≤ 5	

- **¿Cómo se comportan en cada caso los cambios de la función?**
- **¿En quV intervalos los cambios fueron más rápidos?**

En esta actividad se presentan dos funciones definidas gráficamente y se solicita a los alumnos la medición de los cambios de la variable dependiente y el análisis del comportamiento de estos cambios. Con respecto a los registros, el alumno debe elaborar la traducción del registro gráfico al numérico e interpretar lo realizado en el registro coloquial, lo que exige relacionar las diferentes representaciones.

ERRORES QUE PODEMOS EVITAR CON ESTA TAREA		OBJETIVOS										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E01	Confusión entre variable dependiente e independiente en el cálculo de tasas de variación o incremento de una función a la hora de interpretar datos de una tabla o gráfica.	X	X									
E02	Confusión del orden que ocupa el valor final y el inicial cuando se calcula un incremento, por lo que no se distingue la diferencia entre variación positiva y negativa de una función.	X	X									
E03	Dificultad en la identificación de un incremento con la razón de cambio de una función.	X	X									

Actividad nº Y.

La posición de una piedra que es lanzada hacia arriba está dada por $s(t) = -2t^2 + 8t + 2\ m$, donde el tiempo t se mide en segundos. Complete la siguiente tabla. Realice la representación gráfica e interprete en la misma las medidas $t_2 - t_1$ y $s(t_2) - s(t_1)$.

TABLA

Intervalo t1 ≤ t ≤ t2	$\Delta s = s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
0 ≤ t ≤ 1		
1 ≤ t ≤ 2		
2 ≤ t ≤ 3		
3 ≤ t ≤ 4		

- **¿QuV significado tienen los valores obtenidos en cada columna?**
- **Determine las unidades en las que se expresan los mismos.**
- **¿QuV puede decir con respecto a la velocidad de la piedra en todo su trayecto?**
- **Estime la velocidad de la piedra a los Y segundos de iniciado el movimiento.**

ERRORES QUE PODEMOS EVITAR CON ESTA TAREA		OBJETIVOS										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E04	Problemas en relacionar los cambios de una función con su crecimiento.	X	X						X			
E05	Error en relacionar el cambio de la tasa de variación con la rapidez con la que crece una función.	X	X		X							
E06	Dificultad en relacionar la tasa de variación con un cambio en la función y la tasa de variación media con la velocidad de cambio de una función en un intervalo.	X	X									
E07	No relacionar la tasa de variación instantánea con el límite de la tasa de variación media.	X	X									

Actividad nº 4.

Un estudio de contaminación realizado por un Ayuntamiento concluye que dentro de t años, el nivel medio de monóxido de carbono, CO, en el aire será

$$m(t) = 0{,}05t^2 + 0{,}10t + 3{,}4\ partes\ por\ millón.$$

Calcula la tasa de variación instantánea del nivel de CO cuando t sea igual a 1 año

SOLUCIÓN

$$T.V.I \rightarrow m(1) = \lim_{h\to 0} \frac{m(1+h) - m(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{0{,}05(1+h)^2 - 0{,}1(1+h) + 3{,}4 - (0{,}05 + 0{,}1 + 3{,}4)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{0{,}05 + 0{,}05h^2 - 0{,}1 - 0{,}1h + 3{,}4 - 0{,}05 - 0{,}1 - 3{,}4}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(0{,}05h + 0{,}2)}{h} = 0{,}2$$

Será de 0,2 partes de CO por millón

ERRORES QUE PODEMOS EVITAR CON ESTA TAREA		OBJETIVOS										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E07	No relacionar la tasa de variación instantánea con el límite de la tasa de variación media.	X	X									

Actividad nº 5.

Dibuja la gráfica de la función cuadrática $y = x^2$

1. Calcula su función derivada y represéntala en los ejes coordenados.
2. Observando el dibujo, calcula los puntos en los que la derivada toma por ejemplo los valores 1 y -1.
3. ¿Podrías razonar otra forma de encontrar la derivada en estos puntos?

SOLUCIÓN

ERRORES QUE PODEMOS EVITAR CON ESTA TAREA		OBJETIVOS										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E09	Confusión entre la derivada en un punto y la función derivada.			X			X					

Actividad nº 6.

Calcula para la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+3}$$

a) **Los puntos de corte con los ejes.**

$$\text{Eje x: } f(x) = \frac{x^2}{2x+3} \Longrightarrow \frac{x^2}{2x+3} = 0 \Longrightarrow x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$\text{Eje y: } f(x) = \frac{x^2}{2x+3} \Longrightarrow f(0) = \frac{0^2}{2\cdot 0+3} = \frac{0}{3} = 0$$

b) **Los máximos o mínimos relativos.**

$$f(x) = \frac{x^2}{2x+3} \Longrightarrow f'(x) = \frac{(x^2)(2x+3)' - (2x+3)(x^2)'}{(2x+3)^2}$$

$$= \frac{(x^2)2 - (2x+3)(2x)}{(2x+3)^2} = \frac{-2x^2 - 6x}{(2x+3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{-2x^2 - 6x}{(2x+3)^2} = 0 \Longrightarrow -2x^2 - 6x = 0 \Longrightarrow x(-2x-6) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ -2x - 6 = 0 \Longrightarrow \boxed{x = -3} \end{cases}$$

<u>Procedimiento:</u> De la misma forma, el alumno calculará la segunda derivada, con lo que sustituyendo en ella x=0 y x=-3, sabrá si se trata de un máximo o un mínimo.

c) **La pendiente en el eje de ordenadas.**

Sustituyendo en f'(x) la x por 0, se determina la pendiente de la tangente.

d) **¿Dónde f(x) no es derivable?**

Para que f(x) sea derivable tiene que ser continua y suave (sin ángulos) por lo que será derivable en los puntos que sean a la vez dominio de f y de f'.

ERRORES QUE PODEMOS EVITAR CON ESTA TAREA		OBJETIVOS										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E09	Confusión entre la derivada en un punto y la función derivada.			X			X					
E10	Generalización lineal de propiedades como por ejemplo el error $d^2[f(x)] = d[f(x)]^2$							X				
E11	Cálculo erróneo de derivadas excesivamente complejas.							X				
E14	No distinguir con claridad cuándo utilizar la regla del producto y cuándo utilizar la regla de la cadena.							X				
E15	Relación con los máximos, mínimos y puntos de inflexión con las derivadas 1ª y 2ª.								X	X		

Actividad nº 7.

Encuentra tres números no negativos que sumen 14 y tales que uno sea el doble de otro y la suma de sus cuadrados sea máxima o mínima

SOLUCIÓN

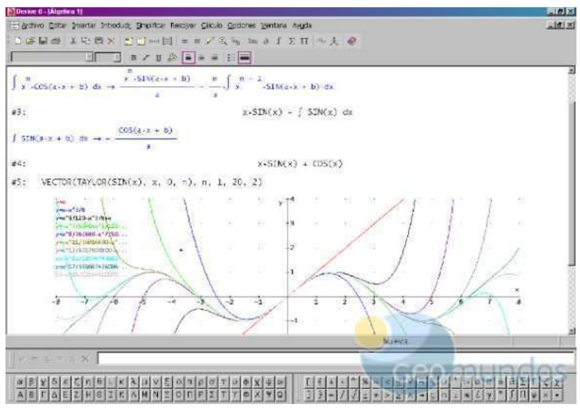
- Se nombran los tres números: x, 2x, y
- Se escribe la función a maximizar: $s=x^2+(2x)^2+y^2$ (Ec1)
- Se sabe que $x+(2x)+y=14$ (Ec2)
- En Ec2, dejamos y en función de x., y el resultado se sustituye en Ec 1. Quedando la expresión en función de x
- Se considera que x, y son positivos luego se calculará el intervalo donde la función será máxima (o mínima)
- Por último para buscar máximo o mínimo de la función en el intervalo, se debe resolver s'(x)=0
- El máximo se alcanzará para x=0 con lo que los números en este caso son 0,0 y 14, y el mínimo realcanza para x=3 y los números son 3, 5 y 6.

ERRORES QUE PODEMOS EVITAR CON ESTA TAREA		OBJETIVOS										
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
E16	Asociación de problemas de optimización con sus funciones respectivas.											X

9. TEMAS TRANSVERSALES

9.1. Matemáticas y Nuevas TecnologVas

Programa Derive: Con él, los alumnos podrán obtener funciones derivadas tanto gráfica como analíticamente y puede ser útil también para relacionar con la expresión de la función, su representación gráfica y la expresión de la derivada.



Calculadora Gráfica: Ayudará a los alumnos a visualizar la representación gráfica identificando los aspectos globales y locales de la función.

Actividad nº 1

Con ayuda del Derive, halla la ecuación de la recta tangente y la recta secante a las siguientes funciones, en el puno que se indica

$$a) \quad y = x^2 - 6x + 11 \quad en \quad x = 4$$
$$b) \quad y = x^4 - 2x^3 \quad en \quad x = 1$$

En cada una de ellas representa la función, la recta tangente y la secante. Explica relacionando los resultados obtenidos.

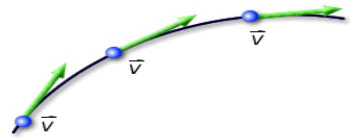
9.2. Matemáticas y otras ciencias

Los alumnos trabajarán en clase con muchos ejemplos de otras ciencias tipo Física que no solo les servirán para afianzar el concepto de derivada, sino que también será útil para la demanda de otras asignaturas.

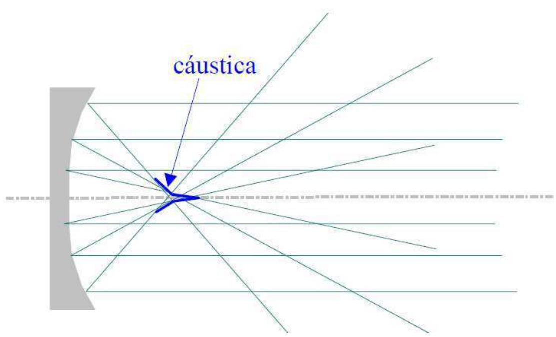
FÍSICA: Velocidad media:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{x}(P_d)\; x\; \vec{x}\,(P_1)}{t_d\; x\; t_1}$$

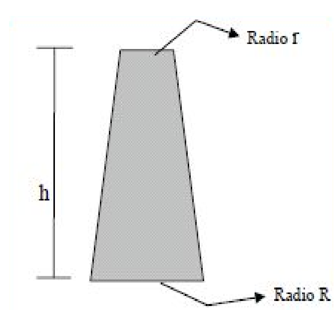
FÍSICA: Velocidad instantánea: Corresponde en la curva espacio-tiempo a la recta tangente a cada punto.



FÍSICA Y ÓPTICA: Aberración esfVrica: En espejos de apertura grande, el lugar geométrico de las intersecciones de los rayos reflejados se conoce como cáustica, así dichos rayos son tangentes a la cáustica.



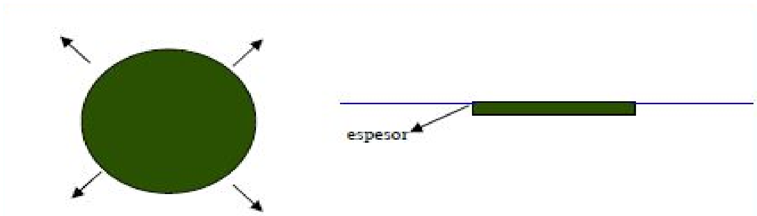
ECOLOGÍA: Forestación: Se puede estudiar la cantidad de madera que produce un tronco cada año. Este ejemplo será muy útil, ya que en la unidad didáctica anterior (Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas), habrán estudiado cómo el crecimiento de madera en un bosque al año, corresponde a una función exponencial.



9.3. Matemáticas y Educación Cívica

Educación Vial: Pendientes de las señales de tráfico

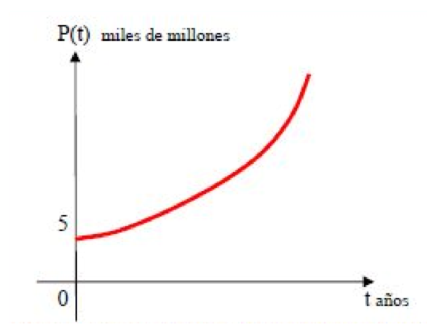
Contaminación: El alumno puede estudiar cómo aumenta una mancha de fuel en el mar, ya que el aumento de la mancha corresponde a una variación instantánea en el tiempo de la superficie de esa mancha.



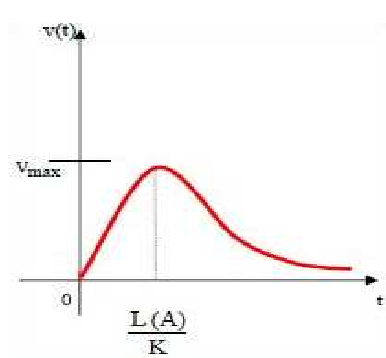
9.4. Matemáticas y Sociedad

El hacer ciertos estudios referidos a la sociedad será muy interesante de cara a poder conectar con el último bloque de esta asignatura (Estadística).

Variación de la población: Determinar la T.V.I. de la población en un determinado año.

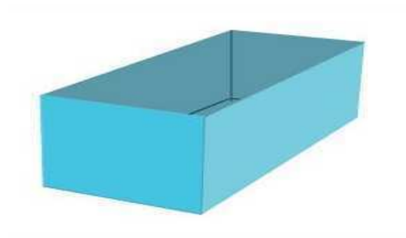


Propagación de una epidemia: Estudio de la máxima velocidad de propagación de una enfermedad.

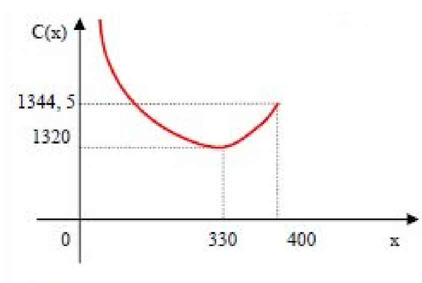


9.5. Educación para el Consumidor

Costo de fabricación: Determinar las dimensiones de un recipiente para que el coste de los materiales sea mínimo.



Problema del transporte: Hallar el número de unidades a transportar que hace mínimo el costo de un pedido.



10. EVALUACIÓN

10.1. Instrumentos de evaluación

Los instrumentos de evaluación que se tendrán en cuenta serán los mismos que los recogidos en el resto de unidades didácticas, es decir:

- Se realizará una observación continua en clase donde se valorará cómo va progresando el desarrollo de las capacidades de los alumnos. Supondrá esto un 10% de la nota global.
- Se harán revisiones periódicas de los cuadernos de clase, suponiendo esto un 10 % de la nota global.
- Se realizará una prueba de evaluación en la que habrá seis ejercicios, cinco de ellos acordes con los criterios de evaluación que a continuación se exponen y otro de ellos de carácter voluntario para subir nota. Cada ejercicio se evaluará de 0 a 2 puntos y el examen supondrá un 80% de la nota global.

10.2. Criterios de evaluación

Además de una Evaluación Inicial que nos permita saber el nivel de conocimiento de los alumnos, en esta Unidad Didáctica presentaremos cinco criterios de evaluación relacionados con nuestros objetivos didácticos que serán aplicados tanto en clase como en la prueba final de la Unidad que nos ayude a saber cómo se han desarrollado las capacidades en los alumnos de cara al desarrollo de posteriores Unidades Didácticas. Presentamos los cinco criterios acompañados de un ejercicio que nos ejemplificará la tipología de examen que se presentará a final de la unidad.

- **Criterio 1**: Hallar la tasa de variación media e instantánea de una función en un punto.

EJERCICIO DE EXAMEN	a) Halla la tasa de variación media de $\mathrm{f(x)} = \frac{3}{\mathrm{x+5}}$ en el intervalo $(\mathrm{x}, \mathrm{x+h})$. b) El espacio, en metros, recorrido por un móvil viene expresado por la función $s(t) = 4t^2 - t$, t en segundos. Halla la velocidad instantánea para $t = 1\ segundo$.

- **Criterio 2**: Obtener el valor de la derivada de una función en un punto aplicando las reglas de derivabilidad.

EJERCICIO DE EXAMEN	Halla el valor de la derivada en $x=0$ de las siguientes funciones: a) $\mathrm{f(x)} = \frac{1-x}{\mathrm{x}^2-1}$ b) $f(\mathrm{x}) = -e^{x} + \operatorname{tg} x - 2\ln x$

- **Criterio Y y 4**: Determinar los parámetros para que una función sea derivable en un punto. Determinar lo puntos de una gráfica en los que la recta tangente tiene una pendiente determinada.

EJERCICIO DE EXAMEN	Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si\ x\ 3\ 0 \\ k & si\ x = 0 \end{cases}$ a) Halla k para que sea derivable en $x = 0$. b) Halla los puntos de la función donde la pendiente de la recta tangente es igual a 1.

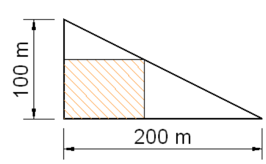
- **Criterio 5**: Derivar funciones simples y compuestas.

EJERCICIO DE EXAMEN	Deriva y simplifica todo lo que puedas las siguientes funciones: a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1} x^{\ln x}$ b) $g(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \operatorname{arcsen} x$

- **Criterio 6**: Estudio y representación de funciones calculando puntos de corte, monotonía, extremos relativos, asíntotas y curvatura.

EJERCICIO DE EXAMEN	Dada la función $f(x) = \frac{x^v}{x^2-4}$, haz una representación aproximada de la misma calculando puntos de corte, monotonía, asíntotas, extremos relativos y curvatura.

- **Criterio 7**: Resolver convenientemente problemas de optimización.

EJERCICIO DE EXAMEN	Sobre un terreno en forma de triángulo rectángulo cuyos catetos miden 100 y 200 m, se quiere construir un edificio de planta rectangular como el de la figura. Calcula las dimensiones que debe tener dicha planta para que la superficie sea máxima. 

11. BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

11.1. Bibliografía de aula.

Matemáticas de la E.S.O.

Libros de texto.

- *Proyecto EXEDRA*. J.L. Sánchez González – Juan Vera López. Ed. Oxford.
- *Serie Aula abierta*. Colera – Gaztely- García. Ed. Anaya.
- *Sigma.* Vizmanos – Anzola. Ed. S.M.
- *Algoritmo.* Vizmanos – Anzola. Ed. S.M.
- *Orbita 2000*. Almodóvar – Gil. Ed. Santillana.
- Esteve – Ramírez. Ed. Ecir.
- *Miriada XXI*. Besora – Jané – Guiteras. Ed. McGraw Hill.
- *Axis*. Arias – Maya – Mercadé. Ed. Casals.

Guías y Recursos Didácticos. Cuadernos de ejercicios:

Iguales autores y editoriales, además de los proyectos didácticos de:

- Sánchez Catalán (S.M.)
- Rayner y Cabrillo (Oxford)
- Oliveira (Anaya)

MATEMÁTICAS DE BACHILLERATO

Libros de texto.

- *Proyecto Exedra*. Bescós – Pena. Ed. Oxford.
- Colera – Oliveira – García. Ed. Anaya.
- Vizmanos – Anzola. Ed. S.M.
- *Proyecto Euler*. Romo – Cuevas – Delicado. Ed. S.M.
- Fernández – Monteagudo. Ed. Edelvives.
- Lafuente – Morales- Padilla. Ed. Magisterio Español.
- Arias – Maza. Ed. Casals.
- Tuduri – Casals . Ed. Autores.
- *Estadística.* Asensio – Romero. De Vicente. Ed. McGraw Hill
- Esteve – Ramírez. Ed. Ecir.
- Gil – Rivera – Vázquez. Ed. Santillana.
- Trillas – Vila. Ed. Vicens-Vives.

Guía y Recursos Didácticos. Cuadernos de ejercicios.

Iguales autores y editoriales, además de:

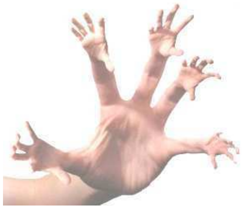
- los diversos textos sobre "*Actividades matemáticas*" de Brian Bolt (Ed. Labor)

- *"Paradojas" y "Diversos juegos matemáticos"* de Martín Gardner (Ed. Labor).
- *101 Proyectos matemáticos*. Bolt – Hobbs. Edl. Labor.

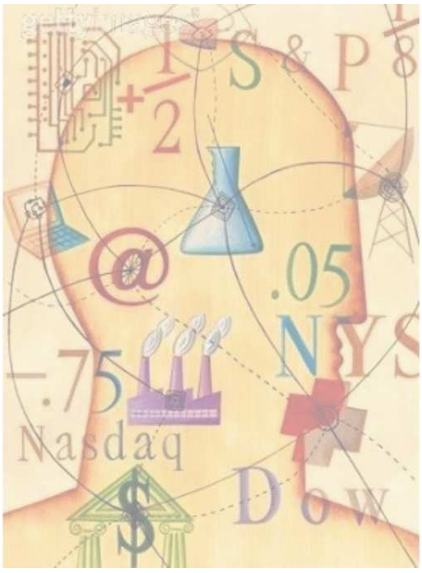
11.2. Bibliografía de departamento.

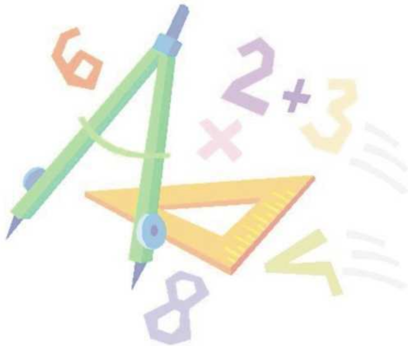
- *Álgebra moderna*. Lentin-Rivaud. Ed. Aguilar.
- *Carnaval Matemático*. Gardner. Ed. Alianza.
- *Circo Matemático*. Gardner. Ed. Alianza.
- *Cuadernos de Investigación y Ciencia*.
- *Curvas y Superficies*. Sánchez. Ed. Index.
- *Didáctica de las Matemáticas*. Roanes. Ed. Anaya.
- *El ingenio de las Matemáticas*. Honsberger. Ed. Gómez.
- *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. M. Kline. Ed. Alianza.
- *El señor del cero*. Molina. Ed. Alfaguara.
- *El Teorema del loro*. Guedj. Ed. Anagrama.
- *Elementos de la Teoría de probabilidades*. Cramer. Ed. Aguilar.
- *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Guzmán. Ed. Labor.
- *Foundations of Geometry*. Wylie. Ed. McGraw-Hill
- *Geometría*. Gutiérrez – García. Ed. Pirámide.
- *Historia de la Matemática*. C.B. Boyer. Ed. Alianza Universidad.
- *Historia de las Matemáticas*. Collette; Ed. Siglo Veintiuno.
- *Historia de las Matemáticas*. Ribnikov. Ed. Mir.
- *Historia Universal de las Cifras*. Ifrah. Ed. Espasa.
- *Introducción a la lógica matemática*. Suples. Ed. Reverté.
- *Introducción a la Matemática*. P. Abellanas. Ed. Saeta.
- *Introducción a la Teoría de Conjuntos*. Kuratowsky. Ed. Vicens Vives.
- *Introducción a la teoría de Grafos*. Wilson. Ed. Alianza.
- *Juegos de acertijos enigmáticos*. Emmet. Ed. Gedisa.
- *La Ciencia de lo bueno, lo malo y lo falso*. M. Gardner. Ed. Alianza.
- *La Matemática: su contenido, métodos y significado*. Alexandrov, Kolmogorov y otros. Ed. Alianza Universidad.
- *La selva de los números*. Gómez. Ed. Alfaguara.
- *La Tortuga de Aquiles*. Greityer. Ed. Gómez.
- *Las cifras. Historia de una invención*. G. Ifrah. Ed. Alianza.
- *Las Matemáticas en la E.S.O*. Barrio. Ed. Escuela Española.
- *Las Matemáticas si cuentan*. Informe Cockcroff.
- *Lecciones de Álgebra Lineal*. Pinilla. Ed. Varicop.
- *Lógica para matemáticos*. Hamilton. Ed. Paraninfo.

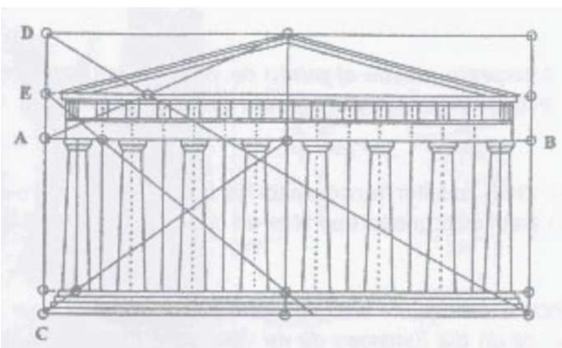
- *Matemática moderna aplicada*. Turner. Ed. Alianza Universidad.
- *Matemática recreativa*. Argüelles. Ed. Alcal.
- *Matemáticas básicas*. Hernández Ranero. Ed. UNED.
- *Matemáticas generales*. Dixmier. Ed. Aguilar.
- *Matemáticas generales*. Pisot – Zamansky. Ed. Montaner.
- *Matemáticas recreativas*. Perelman. Ed. Fontana.
- *Métodos estadísticos*. Sixto Ríos. Ed. Del Castillo.
- *Números Complejos*. Budden. Ed. Alhambra.
- *Números Enteros*. Vargas – Machuca. Ed. Síntesis.
- *Poliedros*. Guillén. Ed. Síntesis.
- *Programación lineal. Cónicas*. Pinilla. Madrid 1971.
- *Retrato de una profesión marginada*. Hernán. Ed. Proyecto Sur.




Φ


1/2
S&P
@
.05
NYS
-.75
Nasdaq
$
Dow




D
E
A
B
C