UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA Y CALIDAD MATEMÁTICA DE LA INSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN: ESTUDIO DE CASO DE UN PROFESOR CHILENO

Nielka Rojas González

GRANADA, 2010

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

CONOCIMIENTO PARA LA ENSEÑANZA Y CALIDAD MATEMÁTICA DE LA INSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN: ESTUDIO DE CASO DE UN PROFESOR CHILENO

Trabajo de Investigación Tutelada presentado por
Dª. Nielka Rojas González
para optar por el máster en Didáctica de la Matemática,
bajo la dirección del Dr. Pablo Flores Martínez.

Dª. Nielka Rojas González

El Director

Dr. D. Pablo Flores Martínez

GRANADA, 2010

Este estudio se realizó dentro del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática*. *Pensamiento Numérico* de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM193), en la línea de investigación Formación del profesorado de Matemáticas.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco de manera muy especial al profesor Dr. Pablo Flores Martínez por la enseñanza brindada en cada momento, por el tiempo y dedicación que ha ocupado en sugerencias e ideas para desarrollar este trabajo, y por sus palabras de aliento.

A la profesora Heather C. Hill, asociada de la Escuela Graduada de Educación de la Universidad de Harvard, por facilitar un documento para concretar uno de los objetivos de este trabajo.

A los profesores de la Universidad de Granada, por la enseñanza entregada.

Al Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico, de la Universidad de Granada, por la facilitación y accesibilidad de los documentos.

Al grupo de investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva, especialmente a José Carrillo, por sus sugerencias y artículos recomendados.

A la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, Gobierno de Chile, por la beca otorgada para seguir mis estudios.

Al profesor que permitió el acceso a su salón de clases, a sus 33 alumnos y al colegio María Reina, Viña del Mar, por la amabilidad y buena acogida.

A mi familia por su apoyo y cariño transmitido cada día.

A mis amigos y compañeros, por su cariño.

A mi papá, que desde el cielo me da fuerzas para continuar.

Y a Dios, por acompañarme y guiarme siempre.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

ÁREA PROBLEMÁTICA, CONOCIMIENTO PROFESIONAL DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Es el maestro quien ha de transmitir al alumno lo que la humanidad ha aprendido sobre sí misma y sobre la naturaleza, todo lo que ha creado e inventado de esencial.
(Delors, 1994, *La educación encierra un tesoro*, UNESCO, p.15)

1.1. Introducción

Como nos indica el informe de la UNESCO (Delors, 1994), el papel del maestro es primordial en la enseñanza; es él quien hace despertar en los estudiantes el deseo de aprender. Sin embargo, circunstancias como “el aumento de la población escolar ha traído como consecuencia la contratación masiva de docentes y no siempre ha sido posible encontrar candidatos cualificados”. Como consecuencia, la Comisión que elaboró este informe “estima que los gobiernos de todos los países deben esforzarse por reafirmar la importancia del maestro y mejorar sus cualificaciones”. Entre las medidas a adoptarse, el informe señala “programas de formación continua, especificidad en formación pedagógica, control del rendimiento del docente”. En resumen, el informe llama la atención sobre la importancia del papel del profesor; la necesidad de organizar de manera conveniente la formación inicial y continua de los profesores y establecer controles sobre el rendimiento del docente. Desde estas perspectivas, el presente estudio aborda dos cuestiones que están íntimamente relacionadas con ellas: analizar el conocimiento profesional de los profesores, especialmente el conocimiento matemático, y la forma en que se manifiesta en el desarrollo de sus clases.

Este estudio surge de la motivación personal de estudiar uno de los componentes del triángulo didáctico: el profesor, y específicamente aquellos aspectos centrados en el conocimiento profesional necesario para desempeñar la labor de enseñanza.

Mis primeras incursiones en trabajos con profesores las he iniciado el año 2007, en un proyecto llevado a cabo por investigadores de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile) sobre el apoyo a docentes para la ejecución de Proyectos de Participación Activa. El proyecto consiste en actualizar los conocimientos matemáticos de docentes de aula para reflexionar y analizar sus prácticas pedagógicas y, a la vez, llevar a cabo propuestas de aprendizaje de contenidos específicos. Posteriormente, por la misma entidad universitaria, durante el año 2008-2009 he participado en un proyecto de Formación Para Docentes en Ejercicio denominado Talleres Comunales, que está orientado a promover e instalar en las comunidades chilenas un sistema de formación continua entre pares, siempre al servicio del mejoramiento de la calidad de los aprendizajes de alumnos de escuelas subvencionadas por el estado. Estos momentos de acercamiento a la labor docente me han permitido familiarizarme con conocimientos generados en la práctica cotidiana y, a su vez, observar la carencia de conocimiento de contenidos específicos en los profesores de matemática participantes, en ese momento en ejercicio.

El trabajo se concreta específicamente dentro de un dominio matemático que es especialmente importante para la enseñanza de la matemática elemental: las fracciones, trascendental porque domina el currículo escolar chileno en los primeros años escolares y es un contenido vital al aprendizaje del estudiante, por ser base para aproximarse al concepto de Número Racional.

1.2. Rendimiento matemático en Chile

La lectura de los documentos sobre evaluación docente de los profesores chilenos, así como del déficit de rendimiento de los alumnos en Chile, nos ha llevado a reflexionar sobre cómo estos hechos están relacionados. En este apartado presentamos algunos resultados sobre estos dos aspectos: la caracterización de los profesores de matemáticas y el rendimiento de los alumnos chilenos, en matemáticas, en general, y sobre fracciones en particular.

Según la Evaluación Docente correspondiente al año 2009, que incluye un conjunto de criterios y descriptores que dan a conocer las características de un buen desempeño docente, el portafolio (instrumento de evaluación en el cual el docente debe presentar evidencia que dé cuenta de su mejor práctica pedagógica), al analizar el total de profesores de Primer Ciclo Generalista[1] evaluados, pertenecientes al sistema educativo chileno subvencionado por el estado, revela los siguientes datos. De los 5.164 profesores que se sometieron a la evaluación docente, un 63,1% se encuentra en un nivel Competente, lo que indica un desempeño profesional adecuado en el indicador

[1] Profesores con formación universitaria con preparación teórica y práctica en todos los subsectores de aprendizaje de la educación elemental, especialmente en ciencias naturales y sociales, matemática y lenguaje. Los profesores Generalista sin preparación específica (sin mención) realizan clases en los primeros cuatro niveles de escolaridad básica, a alumnos entre 6 y 9 años de edad.

evaluado, cumpliendo con lo requerido para ejercer profesionalmente el rol docente. Aun cuando no es excepcional, se trata de un buen desempeño. Un 28,9 % de los profesores evaluados figura con un desempeño profesional que cumple con lo esperado en el indicador evaluado, pero con cierta irregularidad (esto es, de manera ocasional). Esta categoría también puede usarse cuando existen algunas debilidades que afectan al desempeño, pero su efecto no es severo ni permanente. Y un 1,5% de los profesores evidencia un desempeño que presenta claras debilidades en el indicador evaluado. Claramente, más de un 30% de los profesores evaluados se encuentran en una categoría, a nuestro juicio, poco competente para ejercer la labor de enseñanza. Sin embargo, aunque el portafolio tiene una ponderación del 60% en la Evaluación Docente del profesorado chileno, consideramos que para obtener datos más concretos respecto al desempeño docente se debe profundizar en el análisis del conocimiento de los profesores en su nivel o especialidad.

Algunos resultados de pruebas (tanto nacionales como internacionales) que miden el rendimiento de los estudiantes, han evidenciado resultados pocos favorables para el sistema educativo chileno. En el 2003, año en el que participó el país en el Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias (TIMSS), el promedio nacional en estos campos de conocimiento se ubica por debajo de la media internacional de los países participantes ese año.

Cada año el Ministerio de Educación de Chile (MIDEDUC), a través del Sistema de Medición de Calidad de la Educación (SIMCE), provee información acerca de los aprendizajes de los alumnos. Aplicando pruebas, obtiene datos sobre el desempeño de los alumnos en diferentes áreas del currículo nacional, evidenciándose en los últimos años resultados persistentemente bajos en el subsector de Matemática. Los resultados de las pruebas de matemáticas del SIMCE en los niveles de 4°[2] y 8°[3] año básico se han mantenido invariables, sin que se aprecien variaciones significativas[4] de los promedios.

El currículo escolar chileno sitúa el estudio de las fracciones desde cuarto año básico, siendo un Contenido Mínimo Obligatorio establecido por el Marco Curricular (2002, p.85), formando parte de las nociones básicas de matemática en los Planes y Programas

[2] Alumnos de 9 años de edad aproximadamente.
[3] Alumnos de 13 años de edad aproximadamente.
[4] Una diferencia de puntaje es estadísticamente significativa cuando la probabilidad de que ésta sea producto del azar es muy baja. Para mayor detalle ver documento técnico "Cálculo de Significancia Estadística" en www.simce.cl.

de Estudio, que tiene por objetivo que los estudiantes logren tener una visión más amplia del mundo de los números.

A partir del año 2007, para 4° Año Básico, el SIMCE entrega resultados según Niveles de Logros, sobre la base de un conjunto de Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios (OF-CMO) establecidos en el Marco Curricular de la Educación Básica (2002). Los Niveles de Logro son descripciones de los conocimientos, habilidades que deben manifestar los alumnos al responder las pruebas y representan los aprendizajes que los estudiantes debieran demostrar al finalizar el primer ciclo. Cada categoría de los Niveles de Logro, Avanzado, Intermedio o Inicial, está asociada a un determinado rango de puntajes de las pruebas SIMCE, lo que permite clasificar el desempeño de cada estudiante en matemáticas, según su puntaje obtenido; Nivel Avanzado, 286 puntos o más; Nivel intermedio, entre 233 y 285 puntos; y Nivel Inicial, menos de 232 puntos. A medida que los alumnos progresan hacia el Nivel Avanzado, van ampliando y profundizando sus conocimientos y habilidades. Esto implica que, además de ser capaces de demostrar los desempeños propios del nivel Avanzado, han debido consolidar los aprendizajes del Nivel Intermedio.

Puntualmente, uno de los últimos datos respecto al contenido de las fracciones, obtenidos de la prueba experimental[5] 2009, aplicada a una muestra nacional de estudiantes de 4° Año Básico, arroja que el 70,15% de los estudiantes evaluados resuelven de manera incorrecta problemas numéricos que involucran el uso de fracciones, contestando de manera correcta sólo un 29,22% de los estudiantes, mientras que el 0,63% omite este tipo de problemas.

Más de 50% de los alumnos que rindieron la prueba experimental, comparan (mayor, menor, igual) de manera incorrecta fracciones en variados contextos, y el mismo porcentaje de estudiantes no identifican fracciones de uso frecuente (medios, tercios, cuartos, octavos y décimos) con apoyo gráfico en variados contextos. Esto evidencia que la mayor parte de los estudiantes se encuentra en el nivel de logro inicial, lo que significa que no han ampliado y profundizado sus conocimientos y habilidades respecto al contenido de fracciones.

En general, la prueba SIMCE 2009 de matemática, que fue contestada por 231.455 estudiantes de 4° Año Básico, arroja los siguientes resultados nacionales según niveles

[5] Prueba que permite validar los ítems de la prueba SIMCE del año en curso.

de logro: el 29% de los estudiantes de 4º Básico que rindieron las pruebas SIMCE 2009 se encuentra en Nivel Avanzado, el 34% de los estudiantes alcanza el Nivel Intermedio y el 37% de los estudiantes no ha consolidado los aprendizajes señalados en el Nivel Intermedio, situándose de esa manera en el Nivel Inicial. De aquí se deduce que alrededor de 85.638 estudiantes se encuentran en el Nivel Inicial, lo que significa que no han consolidado aún los aprendizajes del Nivel Medio; es decir, estos alumnos no han ampliado y profundizado sus conocimientos y habilidades de Nivel deseado.

Los antecedentes expuestos muestran que una significativa proporción de los estudiantes chilenos no asimila la matemática que el país espera que aprendan, y específicamente presenta dificultad al trabajar las fracciones. Esto puede deberse a que las fracciones es un tema matemático de complejidad conceptual, que no se adquiere de forma inmediata; se va construyendo gradualmente (Kieren, 1980).

La complejidad del concepto de fracción debe ser comprendida por los profesores para diseñar e implementar una enseñanza adecuada. No basta con que los profesores sean competentes en el empleo de las fracciones, sino que se requiere un dominio específico del contenido para su enseñanza. Es decir, el profesor debe ser consciente de la diversidad de significados de las fracciones y el papel que desempeña cada significado para dar sentido a las relaciones y operaciones con fracciones. Por tanto, se requieren profesores con un conocimiento profundo de las fracciones.

El bajo conocimiento del contenido puede llevar a una enseñanza de baja calidad, repercutiendo en los aprendizajes de los estudiantes. Ball, Hill y Bass (2005) sostienen que la calidad de la enseñanza de las matemáticas depende del conocimiento de los profesores del contenido y, a su vez, requieren conocimientos específicos. Siendo de relevancia identificar los tipos de conocimientos que los profesores ponen en juego en su labor de enseñanza, como destaca Ball (2000), la práctica de los profesores es el punto de partida para cualquier intervención conjunta que pretenda incidir sobre sus conocimientos profesionales.

1.3. Área problemática de investigación

Tal como hemos señalado, los estudios (nacionales e internacionales) de rendimiento de alumnos en matemáticas evidencian resultados bajos en esta materia, del mismo modo que en el ámbito concreto de las fracciones. Una de las causas, tal como indica el informe de la UNESCO, puede ser la baja competencia de un porcentaje elevado de profesores para abordar el trabajo docente. La competencia del profesor se basa en los conocimientos profesionales de que dispone y de su forma de ponerlos en juego en el desempeño de su tarea. Por tanto, nos interesa analizar qué conocimiento profesional para la enseñanza de las matemáticas tienen los profesores chilenos. De ello surge nuestra área problemática.

En este trabajo fin de Máster de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, vamos a delimitar el área problemática, profundizando en aspectos teóricos, preferentemente centrando el análisis en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas, por un lado, y, por el otro, en cómo este se pone en juego al enseñar un contenido matemático básico como son las fracciones. El estudio de antecedentes teóricos y de las investigaciones similares nos permitirá definir el problema de investigación.

Específicamente, en el capítulo 2 presentamos las bases teóricas de la investigación en torno a los tres núcleos siguientes: a) nociones de Conocimiento Matemático para la Enseñanza, b) Calidad Matemática de la Enseñanza, y c) fundamentos matemáticos-didácticos, referentes a nuestro objeto de estudio: las fracciones. Posteriormente, comentamos aspectos generales sobre el estado de investigaciones relativas al: Conocimiento del Contenido para la Enseñanza, Calidad Matemática de la Instrucción y Conocimiento matemático de las fracciones. En el capítulo 3 se presenta la metodología del estudio. Primeramente atenderemos a los objetivos de la investigación, a los que intentamos dar respuesta a través de un diseño de estudio particular. Posteriormente expresamos los fundamentos metodológicos del estudio, tras la descripción del proceso de recogida de datos y las técnicas de análisis de los datos. En el capítulo 4 exponemos el proceso de codificación de los datos y su posterior interpretación. Finalmente en el capítulo 5 desplegamos conclusiones relativas al proceso de investigación, a los objetivos de la misma, planteándonos algunas ideas para continuar la investigación con vistas a la elaboración de una tesis doctoral.

CAPÍTULO 2

MARCO DE REFERENCIA DE LA INVESTIGACIÓN

2.1. Presentación

Teniendo en vista analizar y valorar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza que pone en juego un profesor chileno de Educación General Básica, al enseñar la unidad de fracciones, según el currículo escolar chileno, surge la necesidad de recoger algunos aspectos que están relacionados con estas cuestiones, con el objetivo de puntualizar hechos referentes a nuestro problema. Este capítulo consta de dos partes. Primero presentamos las bases teóricas de la investigación en torno a los tres núcleos siguientes: a) nociones de Conocimiento Matemático para la Enseñanza, b) Calidad Matemática de la Enseñanza, y c) fundamentos matemáticos-didácticos, referentes a nuestro objeto de estudio: las fracciones. Posteriormente, comentamos aspectos generales sobre el estado de investigaciones relativas al: Conocimiento del Contenido para la Enseñanza, Calidad Matemática de la Instrucción y Conocimiento matemático de las fracciones.

Con vista a un encuadre del tema que nos proponemos estudiar, hemos considerado los dos primeros puntos, que están dentro del la línea de investigación en Didáctica de la Matemática sobre desarrollo y conocimiento profesional del profesor. En este trabajo, prestamos atención, especialmente, a los trabajos desarrollados por Deborah L. Ball y colaboradores de la Universidad de Michigan, que estudian la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar y el desarrollo de medidas que permiten analizar la Calidad de la Enseñanza de las Matemáticas. Además, para tener un referente con el cual contrastar el conocimiento del profesor y qué tipo de conocimiento se pone en marcha al enseñar la unidad de fracciones, consideramos aspectos sobre el procedimiento de Análisis Didáctico, que se fundamenta en los trabajos desarrollados por Luis Rico y colaboradores, y enmarcados en la línea de trabajo del grupo de investigación Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Culminamos con una revisión bibliográfica sobre los componentes implicados en el estudio. A continuación, detallamos las bases teóricas de la investigación en torno a los tres núcleos mencionados.

2.2. Fundamentos teóricos

2.2.1. Conocimiento profesional

El estudio sobre el conocimiento profesional de los profesores y los efectos de estos conocimientos en la enseñanza y en el aprendizaje de los alumnos, es un tema de interés en investigaciones actuales en el ámbito de la educación. En la literatura se hace alusión al conocimiento profesional como el conocimiento en acción (Schön, 1983; Ponte, 1994). Este conocimiento se basa principalmente en la experiencia y la reflexión (Ponte, 1994; Ponte y Chapman, 2006). Específicamente, se atiende al conocimiento profesional del profesor como al conjunto de todos los saberes y experiencias que un profesor posee y del que hace uso en el desarrollo de su trabajo docente, que va construyendo desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional (Climent, 2002). En el contexto de nuestro trabajo, el foco de interés se centra en el conocimiento profesional más específico: el que dispone el profesor para la enseñanza de las matemáticas.

Algunas investigaciones sobre conocimiento profesional del profesor han identificado diferentes dominios de conocimiento que un profesor debe tener para desarrollar su profesión docente (Schön, 1983; Shulman, 1986, 1987; Bromme, 1994; Ponte y Serrazina, 2004; Ball, 2000; Ball et al., 2005; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ball, Thames y Phelps, 2008).

Una importante contribución al estudio del conocimiento profesional de los profesores aparece en los trabajos de Shulman (1986; 1987). Estos trabajos centraron su atención en el profesor, desde una perspectiva del Conocimiento del Contenido para la Enseñanza y materia a enseñar, intentando contrarrestar lo producido en los años 80, donde el interés se había enfocado en los aspectos generales de la enseñanza más que en el conocimiento del profesor como enseñante de un contenido. Trataron de precisar las formas en que el Conocimiento del Contenido para la Enseñanza es distinto del Conocimiento de los Contenidos, proponiendo implícitamente que el rol del Conocimiento del Contenido definiera la enseñanza como una profesión; es decir, la enseñanza sería un trabajo profesional con su propio conocimiento base profesional (Ball et al., 2008). Estos estudios han sido reconocidos como precursores en intentar determinar los componentes del conocimiento base que debe tener un profesor para la enseñanza de su disciplina (Shulman, 1987), de modo, que permita combinar adecuadamente la comprensión pedagógica, el Conocimiento del Contenido para la

Enseñanza de un dominio específico y el Conocimiento del Contenido del dominio específico.

2.2.2. Conocimiento Matemático del profesor para la Enseñanza

El grupo de investigación de la Universidad de Michigan liderado por Deborah Ball, se centra en el estudio de la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar y el desarrollo de medidas que hacen posible el análisis de relaciones entre el Conocimiento Matemático para la Enseñanza, la Calidad de su Enseñanza, y el rendimiento de los estudiantes. Particularmente los trabajos se concentran en el nivel primario, realizando estudios empíricos donde los datos son obtenidos de pruebas, entrevistas a los profesores o de la observación de la práctica misma.

El concepto de Conocimiento Matemático para la Enseñanza surge de estudios referentes a la práctica docente, en el ámbito matemático y a la identificación de las tareas habituales que realizan los profesores, y que a su vez requieren conocimientos específicos, razonamiento y conocimiento de la materia (Ball et al., 2005). Estos trabajos han analizado la naturaleza del conocimiento matemático y cómo este ayuda en el trabajo de la enseñanza, estableciendo una base práctica basada en lo que se denomina Conocimiento Matemático para la Enseñanza, que es una “clase de conocimiento profesional de las matemáticas diferente del exigido en otras intensivas ocupaciones matemáticas (por ejemplo, física, contabilidad)” (p.17). Hill, Ball et al., (2008) conceptualizan la noción de Conocimiento Matemático para la Enseñanza como “el conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos” (p.374). Desde esta perspectiva, podemos distinguir este conocimiento como específico y propio de los profesores, dado que implica, por ejemplo, lo siguiente: analizar los errores de los alumnos, examinar las estrategias utilizadas para la resolución de una tarea matemática, poder explicar a los alumnos cuando no comprenden, saber responder a cuestiones matemáticas, evaluar las cualidades de los materiales de enseñanza, disponer de representaciones, disponer de recursos para explicar un concepto y explicitar argumentos sólidos para evidenciar que un procedimiento funciona. Estas tareas del profesor exigen conocimiento matemático y, a su vez, conocimiento específico para la enseñanza.

Los estudios de este equipo de investigación han logrado caracterizar con detalle el conocimiento matemático para la enseñanza, y han establecido que el Conocimiento

Pedagógico del Contenido influye en los logros de los aprendizajes matemáticos de los estudiantes.

Ball y colaboradores, basándose en los componentes del conocimiento profesional propuesto por Shulman, proponen un modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza, distinguiendo entre Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido. Se propone una división del dominio de Conocimiento del Contenido, propuesto por Shulman, segmentando éste en: Conocimiento Común del Contenido (CCC), Conocimiento en el horizonte matemático (CH) y Conocimiento Especializado del Contenido (CEC).

En el segundo dominio, Conocimiento Pedagógico del Contenido, se identifican Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (CCEs), Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (CCEn) y Conocimiento del Currículo (CC) (Hill, Ball et al., 2008, p.377).

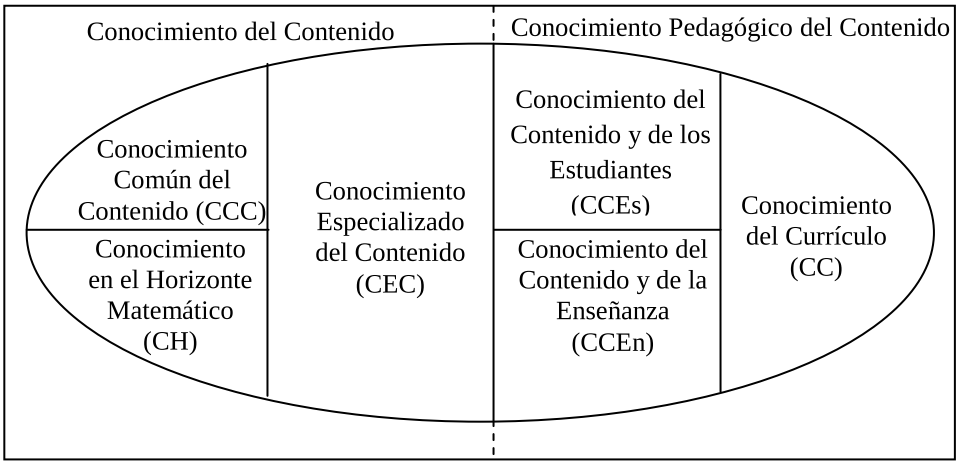


Figura 2.1. Dominios de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME)

El Conocimiento del Contenido está compuesto por tres tipos de conocimientos, el Conocimiento Común del Contenido que cualquier adulto bien instruido debe tener, el Conocimiento Especializado del Contenido, que es el conocimiento que sólo los profesores necesitan saber (Ball et al., 2005), y el Conocimiento en el Horizonte Matemático, que hace referencia a las relaciones existentes entre temas matemáticos en distintos niveles escolares.

De manera más específica, el Conocimiento Común del Contenido corresponde al conocimiento adquirido en la escuela o a lo largo de la vida. Es el que se pone en juego para resolver problemas matemáticos, operar correctamente y aplicar definiciones y propiedades, por lo que es el conocimiento del matemático o de un sujeto adulto instruido.

El Conocimiento Especializado del Contenido es el conocimiento matemático que permite a los profesores participar en tareas de enseñanza, incluyendo en particular: formas de representar las ideas, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, aplicar modelos y visualizar, examinar o comprender métodos excepcionales de resolución de problemas (Ball et al., 2005). Por ejemplo, para organizar una secuencia de enseñanza con la cual lograr el aprendizaje de diferentes aspectos de un contenido determinado, el profesor tiene que tener un conocimiento que va más allá del conocimiento matemático que se aprende en la escuela, lo cual exige del docente poseer un conocimiento matemático y competencias específicas.

El Conocimiento en el Horizonte Matemático está estrechamente relacionado con el Conocimiento del Contenido. Corresponde al conocimiento de las relaciones existentes entre los distintos temas matemáticos y a la forma por la que el aprendizaje de los temas va evolucionando en los distintos niveles escolares. Destacamos que este tipo de conocimiento está siendo actualmente estudiado por el grupo de investigación mencionado, con objeto de definirlo con mayor precisión.

Dentro del domino de Conocimiento Pedagógico del Contenido, Hill, Ball et al., (2008) definen el Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes como el "conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden un contenido particular" (p.375); es decir, es el utilizado en tareas de enseñanza que implican atender un contenido específico y aspectos particulares de los alumnos. Incluye el conocimiento de los errores comunes de los alumnos y dificultades más habituales, las concepciones erróneas, las estrategias que se pueden utilizar, etc.; todo esto hace que el profesor sea capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático (qué aprende primero, tipos de problemas a la edad correspondiente); así como las estrategias de cálculo comunes en los alumnos.

Por otra parte, el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido. Abarca saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas, seleccionar tareas de enseñanza, identificar y utilizar materiales y recursos didácticos, etc.

El Conocimiento del Contenido del Currículo (CC) hace alusión al conocimiento de los objetivos, contenidos, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza, que permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas al aprendizaje.

Existiendo un cuerpo de conocimiento matemático para la enseñanza que es especializado para el trabajo que realiza el profesor, surge la necesidad de valorar los tipos de conocimientos implicados en el proceso de enseñanza y, en general, la Calidad Matemática de la Instrucción puesta en marcha por el profesor.

Queda de manifiesto que la práctica es un reflejo del conocimiento, pero también de destrezas y actitudes, por lo cual interesa evaluar la forma en que se pone en juego el conocimiento para la enseñanza y la calidad matemática docente. Para abordar este tema, hemos considerado una de las líneas de trabajo del grupo de Deborah L. Ball y colaboradores (Universidad de Michigan), que a partir del modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza, han procurado desarrollar categorías para medir la Calidad Matemática de la Instrucción (Mathematical Quality of Instruction). Cabe destacar que la profesora Heather Hill, para efecto de este trabajo de investigación, ha proporcionado el documento que detalla la descripción de las categorías para medir la Calidad Matemática de la Instrucción, que detallamos en el apartado próximo.

2.2.3. Calidad Matemática de la Instrucción

El conocimiento profesional de un profesor se compone de saberes que dispone para ejercer su acción docente, y de destrezas que pone en juego en su actuación. Suponemos que la práctica docente es un reflejo de su conocimiento profesional, pero también de otros elementos, como las destrezas, las actitudes, etc.

Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball (2008) definen la Calidad Matemática de la Instrucción como “un compuesto de varias dimensiones que caracterizan el rigor y la riqueza de las matemáticas de la clase, incluyendo la presencia y ausencia de errores matemáticos, explicación y justificación matemática, representaciones matemáticas, y observaciones relacionadas” (p.431). Esto último se refiere a cualquier otro aspecto observable en la sala de clases, como: imprecisión en el lenguaje por parte del profesor, forma de afrontar la participación de los estudiantes, etc. Para estos autores, la Calidad de la Enseñanza de las Matemáticas depende del Conocimiento del Contenido para la Enseñanza, por lo cual sus trabajos tratan de estudiar en qué medida se relacionan estos dominios (Ball et al., 2005; Hill, Ball et al., 2008).

Hill, Blunk et al., 2008, intentan probar de manera más formal la relación entre el Conocimiento del Matemático para la Enseñanza y la Calidad Matemática de su Instrucción. En este trabajo lo que se hace es comparar profesores con diferentes grados de Conocimiento del Matemático para la Enseñanza con el fin de comprender cómo es expresado en la instrucción. A través de un marco formal de categorías se cuantifica la relación entre el Conocimiento del Matemático para la Enseñanza y la Calidad Matemática de la Instrucción. Se usan técnicas exploratorias, para ver cómo el Conocimiento del Matemático para la Enseñanza aparece en la instrucción.

Una forma de examinar el es estudiando cómo se pone en juego a través de la práctica docente, centrando el interés en examinar el conocimiento en acción con la intención de examinar qué conocimiento subyace a una buena práctica y con ello interaccionar con los profesores para mejorar su conocimiento y su práctica.

A través de un marco formal para Medir la Calidad Matemática de la enseñanza, introducido por Hill, Blunk et al., (2008) y cuyo detalle se presenta en un documento por publicar, Mathematical Quality of Instruction (Hill, 2010), valoraremos la calidad de la instrucción, impartida por un profesor de educación primaria, referente a las fracciones. Cabe destacar que para efectos de este trabajo utilizaremos el termino “valorar” dado al carácter cualitativo del estudio, en contraposición al termino “medir” que hace referencia a comparar cantidades; cuestión que no trataremos en este estudio.

2.2.3.1. Categorías para valorar la Calidad Matemática de la Enseñanza

Hill, Blunk et al., (2008) establecen un sistema de categorías para medir la Calidad Matemática de la Enseñanza. Distinguen categorías específicas y categorías generales. Las categorías específicas, que hemos agrupado en seis (ver anexo B.), están conformadas algunas de ellas por subcategorías, y permiten obtener una apreciación puntual de cada segmento de clases. Las categorías generales, permiten valorar la Calidad Matemática de la Instrucción de manera global. A continuación enunciamos las categorías que permiten realizar una apreciación general del conocimiento matemático para la enseñanza; la descripción de cada una de ellas se presenta en el anexo B.

Categorías para valorar la Calidad Matemática de la Enseñanza:

- Formato del segmento
- El trabajo en clases está conectado a las matemáticas
- La riqueza de las matemáticas

- La riqueza de las matemáticas
- Explicaciones matemáticas
- Múltiples procedimientos o métodos de resolución
- El desarrollo de generalizaciones matemáticas
- El lenguaje matemático
    - Riqueza de las matemáticas en general
- Trabajo con los estudiantes
    - Trabajo con los estudiantes y las matemáticas
    - Respuesta a las producciones matemáticas de los estudiantes
        - El trabajo con los estudiantes y las matemáticas en general
- Errores e imprecisiones en el lenguaje
    - Errores en el lenguaje
    - Imprecisiones en el lenguaje o en la notación
    - Falta de claridad
        - Errores de imprecisiones en general
- Participación de los estudiantes
    - Participación de los estudiantes en dar sentido y razonar
    - Cuestionamiento y razonamiento matemático del estudiante
    - Activación cognitiva de las tareas promulgadas
        - Participación general del estudiante en dar sentido y razonar

2.2.4. Análisis Didáctico

Para poder estudiar el conocimiento matemático del profesor necesitamos profundizar sobre nuestro objeto matemático de estudio, las fracciones. Esta profundización la realizaremos desde una perspectiva teórica que relacione a su vez aspectos sobre la enseñanza y el aprendizaje. El grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, al que pertenece el profesor guía de este trabajo de investigación, ha desarrollado un procedimiento de análisis sobre los aspectos ligados a la enseñanza y aprendizaje de un concepto matemático, que es denominado Análisis Didáctico.

El Análisis Didáctico surge de los trabajos de Luis Rico (1997), destinados a diseñar el programa de cursos de formación inicial de profesores de matemáticas de educación secundaria, y se concreta en dos documentos fundamentales (Rico, 1997a; Rico, 1997b).

En estos documentos se establece el concepto de currículo, las dimensiones que lo definen y los niveles de decisión que cada nivel determina (Rico 1997a). Ello le permite establecer qué dimensiones de reflexión sobre un contenido matemático tiene que considerar el profesor cuando programa sus clases. A estas dimensiones denomina Rico (1997a) organizadores curriculares. Posteriormente, en el otro documento (Rico, 1997b) se definen estos organizadores de manera precisa, hasta concretarlos en lo siguiente: Aspectos Históricos, Fenomenología, Sistemas de Representación, Errores y dificultades y Materiales y Recursos (Rico 1997a; Rico 1997b). Posteriormente, los organizadores se han incluido en el llamado Análisis Didáctico (Rico, 1997b, Gómez, 2007 y Lupiáñez, 2009).

Gómez (2007) considera el Análisis Didáctico como una herramienta que le permite al profesor: el diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas sobre temas específicos de la matemática escolar. Definiendo el Análisis Didáctico como "el procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferente y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje" (pp.18-19).

El Análisis Didáctico tiene por objetivo facilitar al profesor, de una manera sistemática y suficientemente profunda, el programar una unidad didáctica, tomando en consideración el máximo de dimensiones que influyen en su enseñanza y aprendizaje. Para ello se compone de análisis parciales, que comienzan con el estudio de los documentos legales que establecen la forma de enseñanza, para terminar en el establecimiento de la unidad didáctica. Se estructura el Análisis Didáctico en torno a cuatro tipos de análisis: a) análisis de contenido, b) análisis cognitivo, c) análisis de instrucción y d) análisis de actuación (Gómez, 2007, p.29).

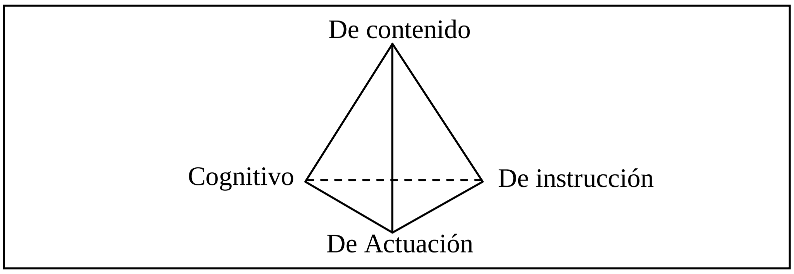


Figura 2.2. Componentes del análisis didáctico (Gómez, 2007, p-29)

En el contexto de nuestro trabajo estamos analizando el conocimiento profesional puesto en juego por un profesor, mediante observación de su actuación. Nos interesa por tanto examinar la profundidad en que el profesor ha realizado los análisis previos del concepto matemático. Es por esto que nos vamos a limitar a estudiar el análisis de contenido y el cognitivo, con el objetivo de identificar, seleccionar y organizar los significados respecto al concepto de fracción y, a su vez que esto nos permita comprender el conocimiento profesional del profesor que se pone de manifiesto al enseñar las nociones de fracciones.

2.2.4.1. Análisis de Contenido

Como destaca Rico (1997b), un concepto matemático escolar puede ser estudiado desde una multiplicidad de significados. Estudiaremos los significados atribuidos a las fracciones atendiendo a tres dimensiones del significado de un concepto matemático: estructura conceptual, fenomenología y sistemas de representación.

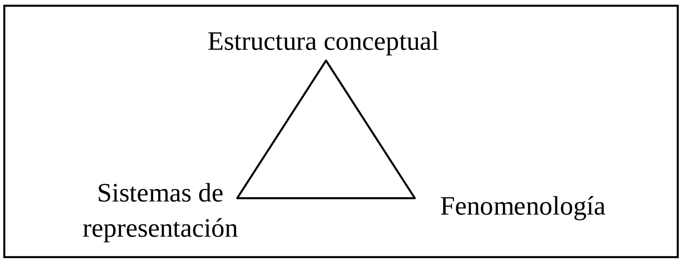


Figura 2.3. Dimensiones del significado de un concepto en la matemática escolar (Gómez, 2007, pp.27)

La exploración de las tres dimensiones del significado de un concepto matemático determina el Análisis de Contenido.

- La estructura conceptual incluye las relaciones de los conceptos y procedimientos implicados en el contenido estudiado, ocupándose a la estructura matemática de la que forma parte como aquella que configuran los conceptos y procedimientos (Lupiáñez, 2007, p. 42)
- Fenomenología. Segovia y Rico (2001) destacan que la fenomenología de un concepto matemático "la componen los fenómenos para los cuales dicho concepto constituye un medio de representación y organización" (p. 89), pudiendo considerarse como una agrupación de fenómenos. Gómez (2007) emplea el término fenomenología como dimensión del significado de un concepto, para referirse a los fenómenos que dan sentido a dicho concepto, partiendo de la base de que existe una variedad de fenómenos que le dan sentido al concepto matemático escolar. En efecto, consideraremos los contextos, situaciones y problemas que pueden dar sentido al concepto matemático escolar.
- Los sistemas de representación incluyen las distintas maneras en que se puede representar un concepto y sus relaciones con otros conceptos (Castro y Castro, 1997).

Algunos sistemas de representación de los conceptos matemáticos escolares que se distinguen en la literatura son el gráfico (plano cartesiano, la recta real), el simbólico, numérico, verbal, algebraico, entre otros.

Para realizar el análisis de contenido de las fracciones, iniciamos con una revisión del contenido de las fracciones en los documentos curriculares chilenos, lo cual permitirá organizar el objeto matemático escolar, como paso previo al estudio de la estructura conceptual referente a las fracciones.

2.2.4.1.1. Las fracciones en el currículo escolar chileno

Comenzamos por presentar el contenido de las fracciones según el currículo escolar chileno, haciendo previamente una introducción al sistema educativo de Chile.

El sistema educacional chileno actual según la Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza (LOCE) y clasifica la enseñanza en: Parvulario, Básico, Secundario y Superior. Este trabajo se centra en el nivel de enseñanza básico, en el cual se han de distinguir los ciclos que conforman el nivel de Educación General Básica, que se subdividen en:

- Nivel Básico 1 (N.B.1): 1º y 2º Básico (6-8años)
- Nivel Básico 2 (N.B.2): 3º y 4º Básico (8-10años)
- Nivel Básico 3 (N.B.3): 5º Básico (10-11años)
- Nivel Básico 4 (N.B.4): 6º Básico (11-12años)
- Nivel Básico 5 (N.B.5): 7º Básico (12-13años)
- Nivel Básico 6 (N.B.5): 8º Básico (13-14años)

Focalizamos el trabajo en el Nivel Básico 2 (N.B.2), específicamente en 4º Año, equivalente a 4º de Educación Primaria en el sistema educativo español actual, según la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE).

Según el Currículo escolar chileno de Educación Básica (actualización 2002), a partir de 4° año básico los alumnos deben comenzar a ampliar el ámbito numérico; es decir, se extiende el conocimiento de los números que han ido construyendo, números naturales, introduciéndose una nueva clase de números: las fracciones. Desde 4° año básico se presentan momentos importantes en el aprendizaje de las matemáticas, como es el caso de la introducción de las fracciones, números decimales, porcentaje, razón y proporción.

La figura 2.4., presenta algunos contenidos que los estudiantes chilenos han de adquirir a lo largo de su educación básica, antes de estudiar los Números Racionales de forma explícita.

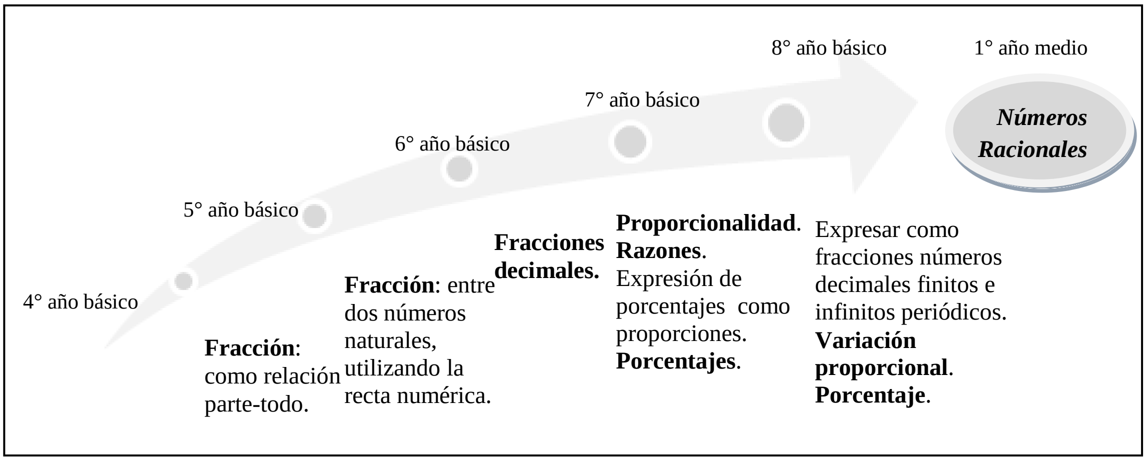


Figura 2.4. Las fracciones en el currículo escolar chileno

En 4° año básico, según el currículo escolar vigente, se deben presentar las fracciones como números que dan respuestas a situaciones en que no se puede cuantificar a través de los números naturales. Incorporándose las fracciones como una forma de dar respuesta a situaciones de reparto equitativo y de medición, permitiendo cuantificar trozos o partes de objetos, colecciones o unidades de medida; por ejemplo: repartir 5 papeles entre 2 niños o niñas (Programa de estudio, Cuarto Año Básico, pp. 142-144).

En 5° año básico, se da un estatus de números a la fracción; es decir, se pueden ordenar y operar (adición y sustracción) con ellas. Se trata de ampliar y profundizar el uso y el conocimiento de las fracciones, de modo que permitan dar cuenta de acciones de fraccionamiento, como razones y con un estatus de números, avanzando progresivamente a la asociación, en términos generales, de un entero a la unidad (uno) (Programa de estudio, Quinto Año Básico, pp. 89-90).

En 6° año básico se desarrollan en mayor profundidad nociones relacionadas con las fracciones, se establece sistemáticamente la relación entre escritura fraccionaria y decimal de porcentajes de uso corriente (sin llegar a tratar los porcentajes de manera general). Se estudia el significado de las operaciones: multiplicación y división con fracciones y se comparan dichas operaciones con las de los números naturales. Se extiende el sistema de numeración a décimos, centésimos y milésimos. Se estudian los números decimales: equivalencias, ordenen, familias, adición y sustracción (Programa de estudio, Sexto Año Básico, pp. 9-11).

En 7° año básico, se deben desarrollar con mayor profundidad nociones relacionadas con los números decimales. Se comienza a trabajar sistemáticamente con las relaciones proporcionales y no proporcionales entre magnitudes. (Programa de estudio, Séptimo Año Básico, pp. 9-11).

En 8° año básico, se ha de considerar tanto la escala asociada a números enteros como a números decimales y fracciones (positivas y negativas). Caracterización de situaciones de proporcionalidad inversa y directa, mediante un producto constante y un cociente constante, respectivamente. Cálculo de porcentaje. (Programa de estudio, Octavo Año Básico, pp. 9-11).

Durante los años de Educación Básica los alumnos han de aprender acerca de los números enteros, fraccionarios y decimales, positivos y negativos, para, posteriormente, adentrarse en el mundo de los números racionales, concepto que se introduce formalmente en primer año de la Educación Secundaria.

Es importante mencionar que a partir del año 2009 se ha ajustado el Currículo escolar chileno, realizando adecuaciones curriculares a los Contenidos Mínimos Obligatorios. Específicamente en el nivel de interés donde centramos nuestro estudio, se ha formulado que los números decimales han de trabajarse a partir de 4° básico, donde hay que relacionarlos con las fracciones.

Como observamos, en el currículo chileno se plantean las fracciones como conceptos que permiten a los estudiantes relacionar cantidades, ampliar el sistema de numeración decimal y hacer uso de nuevos sistemas de símbolos para su representación, permitiendo a los estudiantes formar una estructura que comparte aspectos matemáticos y cognitivos (Llinares, 2003).

Existe un largo camino desde el primer contacto intuitivo de los niños con las fracciones (relación parte-todo) hasta afianzar el conocimiento de carácter algebraico asociado a las fracciones (Llinares y Sánchez, 1988).

Llinares (2003) destaca que la presentación de las fracciones en los primeros años permite introducir a los alumnos a un nuevo mundo matemático que los lleva al desarrollo de una manera de pensar sobre las comparaciones relativas que se concretan en las situaciones de proporcionalidad. De la misma forma, las fracciones son un contenido esencial como fundamento, por ejemplo, para relaciones algebraicas, estudio de razones, proporcionalidad, con el fin de cimentar el camino al estudio de los Números Racionales.

2.2.4.1.2. Fenomenología de las fracciones

El análisis fenomenológico de los conocimientos matemáticos consiste en, “describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos” (Puig, 1997, p.63). Bajo este planteamiento, los significados de los conceptos y procedimientos matemáticos se muestran mediante su conexión con el mundo real, con los contextos en los que tiene sentido ponerlos en juego, con los fenómenos de los que surgen o en cuyo tratamiento se envuelven tales conceptos (Lupiáñez, 2009).

En el contexto de este trabajo, podemos considerar que las fracciones son el recurso fenomenológico del número racional, dado que es la noción con la que se inicia el estudio del número racional. A través de un pasaje histórico podemos ver cómo surge esta noción. Antecedentes históricos (por ejemplo, papiro Rhind 1700 años a.C., estudios arqueológicos) evidencian que el uso de las fracciones en las culturas antiguas nace de manera intuitiva, siendo empleadas para resolver problemas de reparto cuando la cantidad a repartir es menor que el número de partes, utilizando sistemas de medida de peso, tiempo, capacidad y longitud. La importancia del reparto es concluyente para el descubrimiento de los números fraccionarios y, especialmente, la partición de objetos continuos que lleva a atribuir un origen espacial y perceptual, y no sólo aritmético y procedimental. Esto último no quiere decir que los números fraccionarios se abstraigan de los objetos físicos, sino de las acciones que conforman estos objetos (Almendros, Rico et al., 1984).

De la revisión de algunos trabajos (Gómez, 1999; Moreno y Flores, 2000) y principalmente del trabajo del grupo de E.G.B. de la A.P.M.A (Almendros et al., 1984), hemos extraídos algunas ideas que hacen un recorrido de los usos de las fracciones en culturas pasadas.

Los babilonios empleaban fracciones de numerador unidad y denominador fijo (60 notación numérica utilizada) mientras que los egipcios empleaban fracciones de numerador fijo (unidad) y denominadores variables. Estas fracciones permitían obtener relaciones numéricas y de medidas. La matemática griega hace un primer intento de obtener un sistema de numeración para las fracciones a través del empleo de unidades fraccionarias. Los romanos vuelven a la idea empleada por los babilonios usando como denominador el número 12; que tenía un significado especial para ellos; en esta época no hubo avances sobre el concepto de fracción. Es la matemática árabe que da un auge importante en el manejo de las fracciones, introduciéndose el Sistema de Numeración Indoarábigo que permitió expresar las fracciones de manera similar a la usada actualmente. El matemático italiano Leonardo de Pisa fue uno de los primeros en separar el numerador y denominador mediante la línea fraccionaria, y además quien explicó cómo resolver fracciones mediante suma de unidades fraccionarias. Stevin, en el siglo XVI establece las operaciones con las fracciones y la expresión decimal, dando un fuerte empuje a su aceptación generalizada. Prontamente, se pierden los componentes intuitivos y representativos que caracterizaron a las fracciones. El resultado fue que el símbolo $\frac{a}{b}$ quedó desposeído de referencias concretas a procesos de medida y a las cantidades de medidas, y fue considerado simplemente como un número, conduciéndose a la formalización del número racional.

Cada vez toma más fuerza, en el ámbito escolar, que la enseñanza de los contenidos matemáticos escolares ha de establecerse replicando los procesos históricos de cómo han ido surgiendo los diferentes contenidos. Por ejemplo, respecto al contenido matemático escolar de las fracciones una de las primeras nociones surge de dividir un todo en partes, repartir un conjunto de objetos en partes iguales o medir una cierta cantidad de una magnitud que no es múltiplo de la unidad de medida.

La fracción es una noción que tiene implicada una abundancia de fenómenos. Pretendemos organizar aquellos fenómenos, para cuya comprensión y dominio se elaboró el concepto.

Las nociones informales que presentan los alumnos sobre reparto equitativo y de medida brindan el contexto fenomenológico sobre la base para construir los significados vinculados a los números racionales (Llinares, 2003).

Los números fraccionarios $\frac{1}{5}, \frac{2}{6}\dots$ se expresan lingüísticamente con dos numerales; un cardinal en función adjetiva que designa el numerador del número: un, dos; y un numeral ordinal en función sustantiva que designa el denominador del quebrado: quinto, sexto. Causar fracciones se deriva de dividir sustancias, medidas por magnitudes, etc. Esta idea de fracturar puede ser irreversible, reversible, o meramente simbólica. Una de las maneras de estimar las partes puede ser: doblando en dos, para partir por la mitad; doblando en tres, para dividirlo en tres partes iguales; doblando repetidamente en dos y tres, conduce a más fracciones. Cuando se trabaja con objetos pesados se pueden pesar en una balanza, o bien se distribuyen con respecto al área o volumen mediante el uso de simetrías y congruencias (Freudenthal, 1994).

El uso y significado de las fracciones es de gran riqueza, por ejemplo, desde las expresiones del lenguaje cotidiano medio día, un cuarto de hora, la mitad del pastel... Son situaciones que llevan la idea de fracción. De forma más específica, la Tabla 2.1, fracciones en lenguaje cotidiano y la interpretación matemática que se atribuye.

Tabla 2.1
Uso habitual de las fracciones

Frases donde se comparan cantidades y valores de magnitudes	La mitad de … Un tercio de… Dos tercios de…	Largo Ancho Pesado Viejo
Frases que describen una cantidad o un valor de una magnitud por medio de otra. (Se pueden formar múltiplos)	La mitad de un Un tercio de un Dos tercios de un	Pastel(es) Hora (s) Millón (es)
Del nombre al número de medida expresado mediante números	$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2\frac{1}{3}, \ldots$	Metros Kilogramos Segundo Millones

a) Relación parte-todo

Atendemos a la fracción como relación parte-todo cuando un todo o unidad (magnitudes continuas o discretas) se dividen en partes congruentes (por ejemplo, equivalente como cantidad de superficie o como cantidad de objeto) y se consideran algunas de esas partes. Esto implica situaciones de medida y por lo tanto consideran un todo dividido en partes. Se interpreta la expresión a/b representante de un todo o unidad que se ha dividido en *b* partes iguales (congruentes) de las que se consideran *a* de las partes.

Por ejemplo:

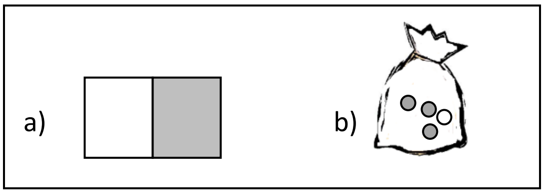


Figura 2.5. Ejemplos parte-todo

En el caso de un folio (figura 2.5. a.), unidad o todo (continuo), se ha dividido en dos partes iguales, y se ha considerado una de estas partes, aquella sombreada en la figura. Representamos la situación con los números 1 y 2, que se expresan en forma de fracción $\frac{1}{2}$; donde el numerador indica las partes considerada (sombreadas) y el denominador las partes en que se ha dividido el todo. En el caso del ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$ representa la acción de separar en dos partes iguales y considerar una.

El todo o unidad también puede ser discreto, como se observa en la figura 2.5.b. En este caso la unidad está compuesta de elementos separados: hay cuatro canicas, las canicas grises son $\frac{3}{4}$ del total de canicas.

Las situaciones de reparto llevan a dividir en partes iguales la unidad de reparto. Por ejemplo: repartir de forma equitativa 2 chocolates entre 3 personas. Cada chocolate se divide en 3 partes iguales y se consideran 2 de ellas para cada niño.

Del modo más concreto, las fracciones se presentan si un todo ha sido o está siendo: cortado, partido, rebanado, roto, coloreado, en partes iguales. Esto puede hacer referencia a: una parte, un número de partes, todas las partes. Las partes pueden estar conectadas o desconectadas, y el modo de dividir puede ser estructurado o no estructurado. Las Tablas 2.2 y 2.3 presentan algunos ejemplos cuando el todo es discreto o continuo y, a su vez definido o indefinido.

Tabla 2.2
Todo definido discreto o indefinido discreto, estructurado o no estructurado

Discreto	**Estructurado**	**No estructurado**
Definido	De una bolsa de 30 canicas, $\frac{1}{2}$ son rojas, $\frac{1}{3}$ blancas y $\frac{1}{6}$ azules.	Las mismas 30 canicas, encima de una mesa.
Indefinido	La humanidad dividida en grupos sanguíneos donde la atención se presta a uno o más de ellos: estructurado según sexo, raza, etc.	Sin tener en cuenta el sexo, etc.

Tabla 2.3
Todo definido continuo o indefinido continuo, estructurado o no estructurado

Continuo	**Estructurado**	**No estructurado**
Definido	Un círculo, dividido en sectores que separadamente o tomados juntos representan partes.	Un polígono regular o irregular, sin estructura de retícula subyacente.
Indefinido	Una fila de cuencas	El aire dividido en gases.

Las partes y el todo se comparan numéricamente según medidas que pueden variar. Cuántas veces una parte cabe en el todo es significativa sólo si se ha acordado bajo qué condición se consideran las partes como equivalente. El criterio puede ser número o valor de cierta magnitud. Esta relación es factible cuando se trabaja con fracciones propias, es decir, menores que la unidad, siendo no válido al trabajar con fracciones mixtas (Freudenthal, 1994).

b) Las fracciones como cociente

La fracción como cociente puede significar el cociente de dos enteros a entre b. Dada la representación más general de la fracción $\frac{a}{b}$. $(b \neq 0)$, conduce a la idea de cociente de dos números: "a unidades en b partes iguales", surgiendo la noción de reparto en cantidades iguales. Este caso se produce cuando se trata de resolver una igualdad del tipo $a = b \cdot x$, $(b \neq 0)$, donde a no es divisible por b dentro del conjunto de los enteros. Por ejemplo:

$\frac{1}{2}$, podría representar la acción de dividir 1 litro entre 2 personas. Dividir una cantidad en un número de partes dadas.

$\frac{3}{4}$, podría representar tres bolsas de caramelos repartidas entre 4 niños.

Cuando dividimos un objeto en un número arbitrario de objetos parciales que se reemplazan entre sí, esto lleva a la división por números naturales (fracción como cociente). En este caso la fracción puede ser descrita como un representante de la clase de equivalencia. Los objetos, mediante una relación de equivalencia, se requieren para formar clases que representan valores de magnitud.

c) La fracción como razón

La fracción tiene significado de razón cuando lo que simboliza es la relación entre dos cantidades o conjunto de unidades. Es esta otra interpretación de la fracción para comparar situaciones: una relación entre dos números que son medidas de dos cantidades asociadas. En este caso no existe de forma natural definido un todo o unidad. Por ejemplo:

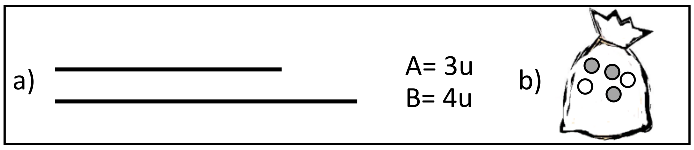


Figura 2.6. Ejemplos fracción como razón

Dos cuerdas A y B, de longitud $3cm$ y $4cm$ de largo, respectivamente. Podemos decir que la razón de la medida de A y la medida de B es de 3 a 4, expresado $\frac{3}{4}$. Otra manera de decir que la medida de A es $\frac{3}{4}$ de la medida de B. Podemos establecer la relación entre la medida de B y A, donde la medida de B es $\frac{4}{3}$ de la medida de A.

En una colección de objetos, como es el caso de la figura 2.6.b, podemos decir que las canicas blancas son $\frac{2}{3}$ de las canicas negras. También podemos establecer, que las canicas negras son $\frac{3}{2}$ de las canicas blancas.

En el caso de la fracción como razón, las visualizaciones espaciales son altamente recomendadas como: la recta numérica, peso, área, tiempo, volumen, etc. Los pesos pueden ser visualizados linealmente, en la escala de balanza; el tiempo puede ser visualizado sobre ejes de tiempo; longitudes y áreas son los medios más naturales para visualizar magnitudes con respecto a la enseñanza de fracciones (Freudenthal, 1994).

d) *La fracción como operador*

Llinares y Sánchez (1988) describen la fracción operador como una transformación; es decir, la fracción actúa a partir de un estado inicial transformándolo en un estado final. La modificación se realiza mediante una sucesión de las operaciones de multiplicación y división.

Por ejemplo:

En un contexto discreto, si en una clase hay 36 alumnos y $\frac{2}{3}$ de ellos son mujeres. ¿Qué cantidad de los alumnos son mujeres?

La situación inicial, 36 alumnos, mediante la actuación del operador se transforma en el número 24 que representa a las mujeres del curso, como se ilustra en la figura 2.7.

$$\boxed{36} \xrightarrow{x2 \text{ y } :3} \boxed{24}$$

Figura .2.7.

El operador fracción puede actuar sobre objetos y relacionarlos entre sí, con respecto a: cantidades y valores de magnitud (número, longitud, peso).

2.2.4.1.3. Sistemas de representación

La organización del contenido matemático escolar, en nuestro contexto las fracciones, es un primer paso para interpretar su extensión y complejidad (Lupiáñez, 2009). Complementamos el procedimiento con el que es posible explorar y profundizar los contenidos y estructuras, con la revisión y estudio de las diferentes formas de representar el objeto matemático de estudio.

Consideramos interesante hacer la distinción entre qué se entiende por representación y por sistemas de representaciones. Se alude al término representación como “el modo en que los sujetos expresan sus conocimientos con notaciones simbólicas o mediante algún tipo de gráfico" (Rico, 1997a, p.53). Estos modos de expresar los conocimientos llevan a formular los conceptos y procesamientos matemáticos y sus características y propiedades. Castro y Castro (1997) enfatizan que es importante "distinguir el objeto matemático de su representación" (p.102), puntualizando que la representación de un concepto no es el concepto en sí mismo, sino que esta actúa como un medio que permite acercarnos a la comprensión del concepto. En nuestro contexto, se trata de distinguir los diferentes significados atribuidos a la fracción, de sus representaciones como: la escritura (fraccionaria, decimal, porcentaje), la gráfica, etc.

Por otra parte, se hace referencia a los sistemas de representación como al conjunto de símbolos, gráficos y reglas que admiten representar una estructura matemática que responde a un carácter sistémico (Castro y Castro, 1997, p.103). Algunos sistemas de representación de los conceptos matemáticos escolares que se distinguen en la literatura son: gráfico, simbólico, verbales, numérico, algebraico, entre otros.

En la enseñanza primaria, normalmente, las representaciones que suelen utilizarse para referirse a un concepto o sus propiedades son figural, numérica y verbal. También constituyen un medio de representación los materiales manipulativos.

Los modelos sirven para la representación y desarrollo de un determinado concepto (Rico, 1997a). Castro y Castro (1997) definen modelo como esquemas o materiales estructurados, conectado mediante leyes o reglas, que ofrecen una imagen isomorfa de un determinado concepto respecto a determinadas relaciones y propiedades (p.96). Entre los modelos usuales en el trabajo con números y operaciones podemos destacar los siguientes: modelo lineal, que utiliza la recta numérica como modelo de representación numérica, siendo un modelo que está ligado a la idea abstracta de fracción y respeta el orden y operaciones entre fracciones; modelo métrico que emplea longitudes, superficies, balanzas para el estudio de conceptos numéricos; modelo geométrico, que utiliza figuras geométricas para representar partes de la unidad; modelo de conjuntos, que permite representar a la fracción como parte de un todo (unidad o todo corresponde al conjunto, y las partes a cada uno de los elementos del conjunto). Estos tipos de modelos permiten manipular y representar las fracciones en sus distintos significados y permiten realizar operaciones entre fracciones, dado que obedecen a una imagen isomorfa del concepto y respetan relaciones y propiedades características del mismo (Castro y Castro, 1997; Castro y Torralbo, 2008). En este contexto son las representaciones y modelos externos, tienen un soporte físico tangible (Castro y Castro, 1997).

A continuación presentamos la figura 2.8, donde se enuncian algunos sistemas de representación usados en la enseñanza de las fracciones.

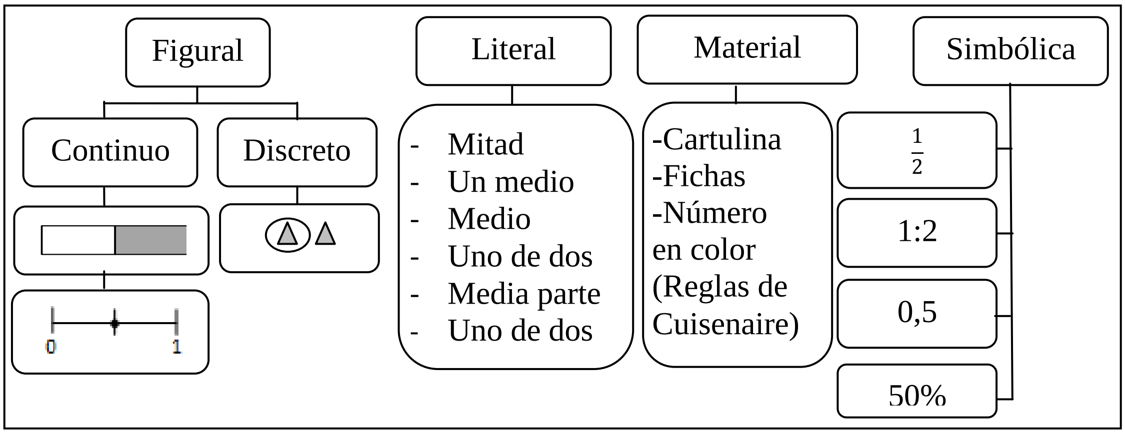


Figura 2.8. Principales sistemas de representación de las fracciones

a) Representación figural

La representación figural puede ser continua o discreta. Frecuentemente las representaciones en un contexto continuo son los diagramas circulares, rectangulares y la recta numérica. En la figura 2.8, el rectángulo puede representar una de dos partes iguales, el segmento de recta un punto equidistante entre 0 y 1. En general, las fracciones en la recta numérica asocian la fracción *a/b* con un punto situado sobre la recta numérica en la que cada segmento unidad se ha dividido en *b* partes congruentes de las que se consideran *a*.

En las representaciones discretas la unidad está formada por un conjunto discreto de objetos. En la figura 2.8, el ejemplo puede representar una de dos unidades, el todo está formado por el conjunto total de dos triángulos. $\frac{1}{2}$ indica la relación entre el número de triángulos considerados y el número total de triángulos. Llinares y Sánchez (1988) destacan que utilizar contextos discretos ayuda a que el alumno amplíe su esquema como relación parte-todo, ya que usar un conjunto de objetos discretos como unidades aumenta la dificultad. La representación figural puede permitir a los alumnos trasladarse desde situaciones concretas, intuitivas, a un nivel más formal y sistemático (Llinares y Sánchez, 1988), siendo estos cambios de representaciones necesarios para la comprensión de los conceptos.

b) Representación simbólica

La representación simbólica permite variadas formas de utilizar los números para indicar una relación: representación como división indicada $\left(\frac{1}{2}\right)$, representación como razón (1:2), representación decimal (0,5) y representación de porcentajes (50%) lo que sugiere 100 como la unidad.

c) Representación literal (verbal o escrita)

Se trata del modo en que expresamos verbalmente los números y sus relaciones: mitad, un medio, medio, uno de dos, media parte, uno es a dos.

d) Representación material

La diversidad de sistemas de representación en una misma estructura matemática y las relaciones entre ellos, permite profundizar sobre el dominio de la estructura (Lupiáñez, 2009). La gran variedad de representaciones ayuda en la comprensión del concepto; según la representación usada se permite enfatizar el significado de la fracción que se esté considerando (Castro y Torralbo, 2008).

2.2.4.1.4. Esquema análisis de contenido

La revisión de los documentos curriculares chilenos, y de los trabajos de Kieren (1976), Dickson y col. (1984), Llinares y Sánchez (1988), nos ha permitido organizar los contenidos fundamentales referentes a las fracciones, tipos de representaciones posibles, materiales concretas a utilizar y como eje transversal la resolución de problemas. Presentamos la organización de lo expuesto en la figura 2.9, a modo de mapa conceptual, que permite observar las conexiones y relaciones entre los diferentes conceptos concernientes a las fracciones, y el camino que se ha de recorrer antes de definir el cuerpo de los Números Racionales.

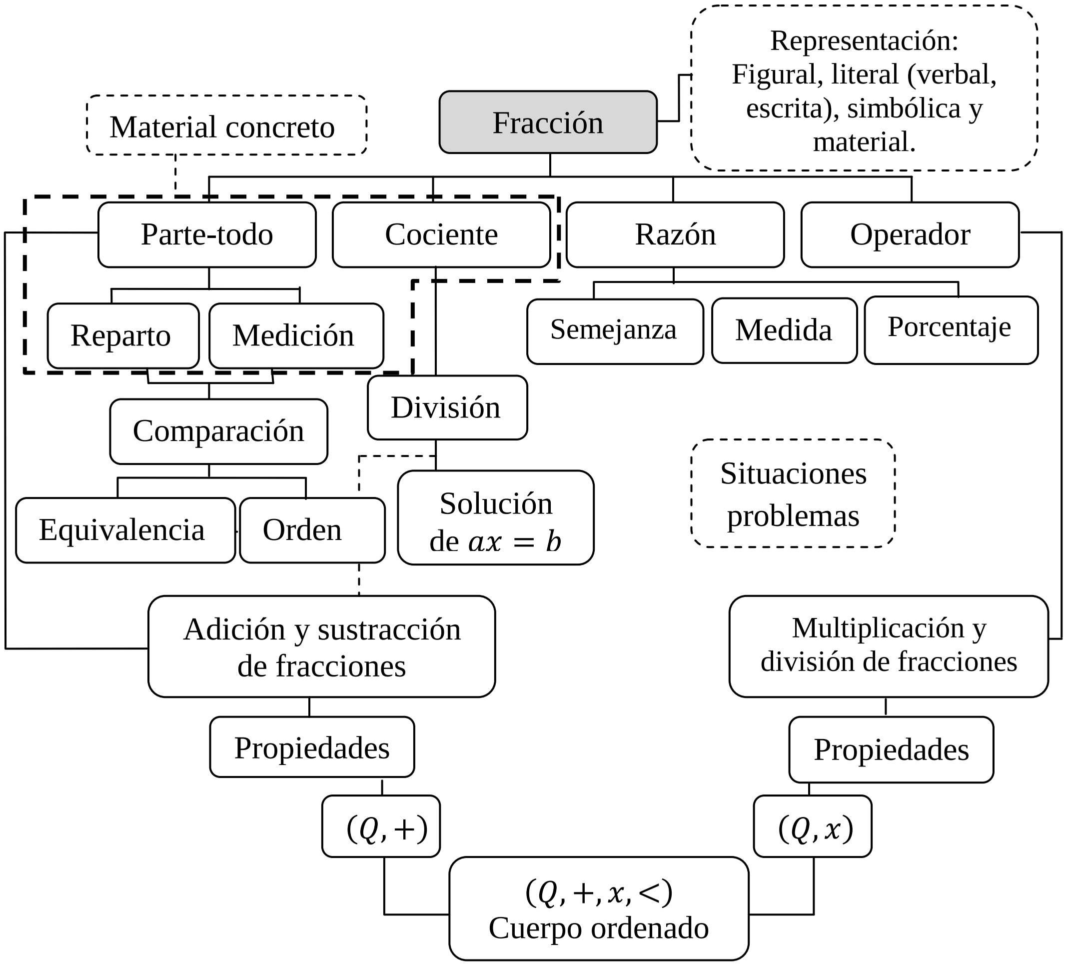


Figura 2.9. Mapa conceptual sobre las fracciones

El mapa conceptual permite tener presentes las nociones principales en torno a las fracciones y así poder establecer un sistema de relaciones que articulen los diferentes conceptos que comprenden esta noción. Esta red de conceptos y procedimientos forma una estructura donde se conectan las nociones principales referente al objeto de estudio.

En la figura 2.9, lo segmentado nos indica los conceptos que se han de estudiar, según el currículo escolar chileno en cuarto año de educación básica. En el contexto de nuestro trabajo nos situamos en un nivel en particular, Cuarto Año de educación básica, donde se introduce el concepto de fracción. Principalmente se estudian las fracciones como relación parte-todo, se abordan situaciones de reparto y medición, se comparan y ordenan fracciones.

De modo más ilustrativo, presentamos la figura 2.10, que contiene los Contenidos Mínimos Obligatorios establecidos por el Currículo Escolar chileno referente a la unidad de fracciones para Cuarto Año de educación básica. Aquí hemos organizado tareas, orientaciones didácticas para afrontar las tareas y materiales con los cuales se puede dirigir el proceso de enseñanza y aprendizaje, siempre en el nivel señalado según el currículo escolar descrito.

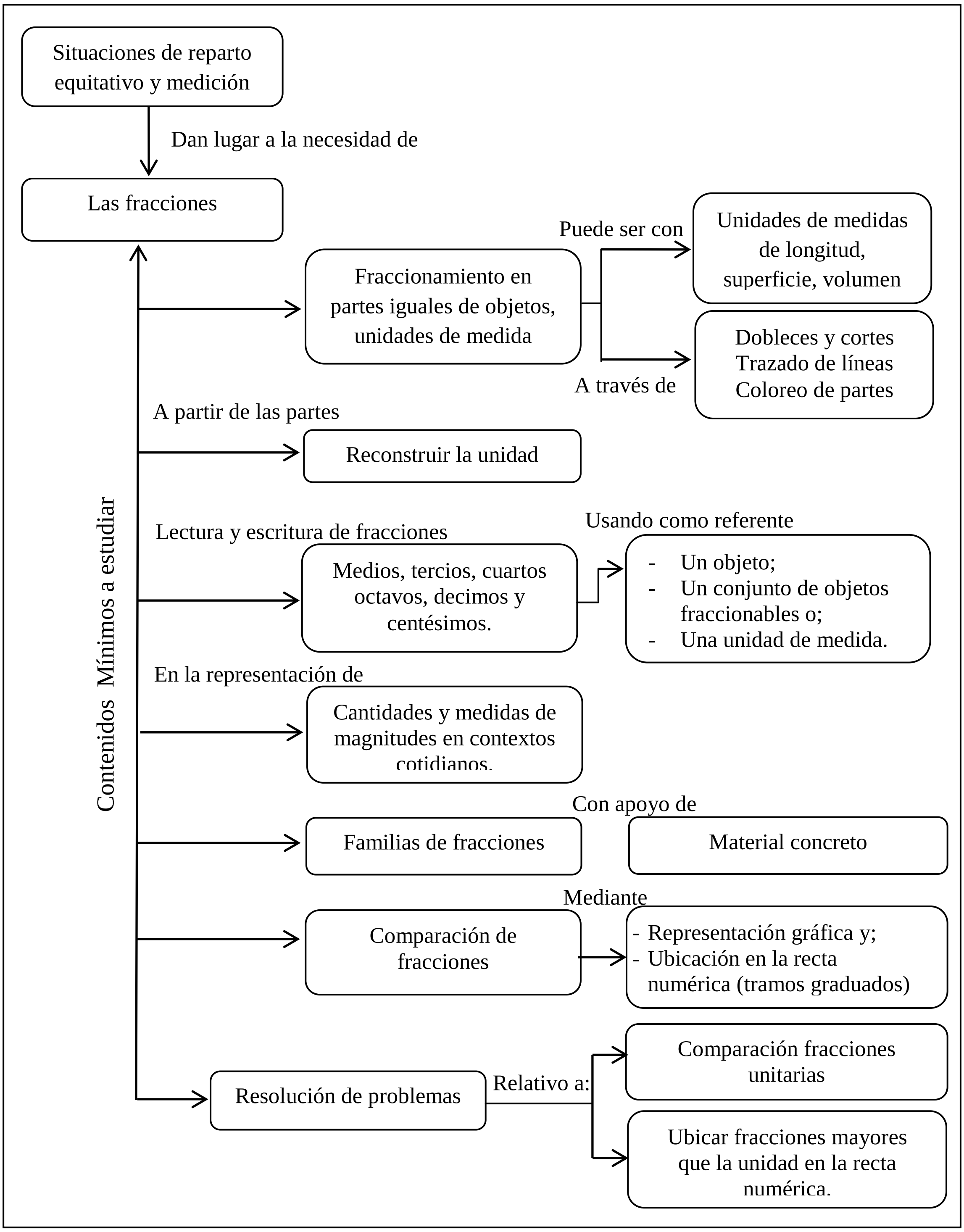


Figura 2.10. Contenidos Mínimos Obligatorios establecidos por el Currículo Escolar chileno referente a la unidad de fracciones para Cuarto Año de educación básica.

La síntesis y estructuración de conceptos y procedimientos básicos en torno a las fracciones permite observar, por ejemplo, que el concepto de fracción no sólo se estudia como relación parte-todo, sino que puede ser conceptualizado de diferentes maneras.

La auténtica comprensión del concepto de fracción sólo puede alcanzarse mediante presentaciones plurales de dicho concepto; es decir, logrando la articulación de las distintas conceptualizaciones. Es importante incluir aspectos que potencien el papel de las fracciones, como por ejemplo: razón, cociente de números naturales en situaciones de reparto, su vinculación con los decimales (Llinares, 2003).

2.2.4.2. Análisis Cognitivo

Una vez realizado el análisis de contenido, en el que el foco de atención es el tema matemático que se va a enseñar, pasamos a realizar otro análisis en el que el foco de atención es el aprendizaje del estudiante. Se trata de examinar qué expectativas puede tener el profesor sobre lo que se espera que el alumno aprenda sobre la fracción y sobre el modo en que el alumno va a desarrollar ese aprendizaje.

Este análisis permite al profesor describir sus hipótesis sobre lo que los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento cuando se enfrentan a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza-aprendizaje (Gómez, 2007). Tiene que ver con los fines formativos, que se preocupan del desarrollo intelectual de los estudiantes, de sus aprendizajes (Lupiáñez, 2009, p. 28).

En nuestro caso vamos a responder a dos cuestiones:

- Expresar hipótesis sobre cómo se puede desarrollar el aprendizaje al abordar tareas matemáticas, proponiendo específicamente caminos de aprendizaje, conjeturas sobre el proceso que seguirán los alumnos al resolver tareas matemáticas.

- Determinar las limitaciones al aprendizaje que surgen en el tema matemático: qué dificultades y errores van a surgir en el proceso de aprendizaje.

2.2.4.2.1. Aprendizaje de las fracciones

Las fracciones en el currículo escolar chileno son un contenido que se estudia en varios niveles educativos, siendo un tema pertinente, hoy en día, en la enseñanza. El tratamiento de este contenido ha de proporcionar al alumno un aprendizaje significativo del concepto mediante la utilización de modelos para el estudio de las fracciones (Castro y Torralbo, 2008).

Los alumnos han de manejar los símbolos con significado, ya que es fundamental para la comprensión de los conceptos, para que se produzca el vínculo han de presentarse a los estudiantes experiencias de repartir cantidades de manera equitativa, utilizando material concreto, dibujos, etc., de modo que pueden conectar las acciones con los símbolos matemáticos (Llinares, 2003).

Castro y Torralbo (2008) recomiendan que, antes de iniciar la enseñanza de las fracciones como relación parte-todo, se ha de trabajar con modelos concretos, presentar situaciones que se puedan considerar cotidianas. Siendo el estudio de esta relación, implica que los alumnos asimilen qué se considera como unidad en el caso del trabajo con material concreto (Llinares y Sánchez, 1988, pp. 55-56).

Por ser la relación parte-todo una de las primeras en trabajar con los estudiantes, ha de usar una interpretación simple: contexto continuo (área) e ir gradualmente incorporando actividades que involucren contextos discretos. Ha de tenerse cuidado en la identificación de los símbolos con las situaciones, al igual que con la utilización del lenguaje asociado a las ideas de relación parte-todo.

La relación parte-todo constituye una de las interpretaciones de fracción más natural, lo que lleva que a lo largo del proceso de enseñanza deba complementarse con otras interpretaciones del concepto de fracción. Es necesario presentar las ideas desde un plano simbólico pasando por la utilización de representaciones escritas y verbales. El uso de variadas representaciones se torna beneficioso para el aprendizaje de los alumnos, al igual que la enseñanza de las fracciones a través de la resolución de problemas.

Llinares y Sánchez (1988) sugieren utilizar el conocimiento informal que poseen los alumnos sobre fracciones, como: las nociones de reparto equitativo o de medición; además de hacer uso del lenguaje que los niños utilizan como: mitad, parte, dividir, partir, repartir, etc.

Se han de reconocer conjuntos y subconjuntos; distinguir cuándo un elemento pertenece o no al conjunto, cuando un conjunto está incluido en otro.

2.2.4.2.2. Errores y dificultades

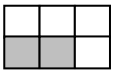
El proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones conlleva a una serie de errores y dificultades. A continuación presentaremos algunos resultados de investigaciones realizadas en torno a errores y dificultades de comprensión del contenido matemático escolar de las fracciones.

Consideramos los errores como manifestaciones de un “conocimiento deficiente e incompleto” (Rico, 1995, p.69). En un marco cognitivista los errores están asociados a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Krauss, Brunner, Kunter et al., (2008) enfatizan que los profesores han de ser conscientes de los típicos conceptos erróneos de los estudiantes y de las dificultades de comprensión. Manifestando estos autores que el conocimiento del profesor ha de ir más allá, ha de poseer Conocimientos Matemáticos, Conocimiento del Contenido y del Currículo, en un nivel de entendimiento más profundo que el de sus alumnos (p.2).

Errores

- Puede que los alumnos en vez de escribir 2/6 escriban seis medios. Esto se puede evitar como señala Payne (1975), citado por Llinares y Sánchez (1988), introduciendo antes de la representación simbólica la forma escrita, habiéndose fortalecido la forma oral previamente.

 → 2 sextos → 2/6

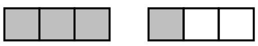
Ha de prestarse más atención a los cambios de representaciones, especialmente desde diagramas, forma escrita y simbólica.

- Los estudiantes realizan la comparación entre las partes en vez de la comparación de la parte y el todo (Castro y Torralbo, 2008).

Dificultades

Llinares y Sánchez (1988) evidencian una serie de dificultades que se pueden dar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones, que iremos detallando:

- Una posible dificultad surge entre los alumnos cuando se manejan fracciones mayores que la unidad, los alumnos por ejemplo, pueden indicar 4/6 en vez de 4/3 aunque se indique la unidad.



Por esto es necesario prestar atención a las tareas sobre la identificación de la unidad, reconocer las partes en que está dividida la unidad y actividades en relación a las fracciones unitarias (1/n).

- Aparecen dificultades cuando se estudia la relación parte-todo a través de diagramas, en forma escrita y simbólica, en las que están implícitas algunas operaciones con fracciones. Cuando se cuentan las fracciones unitarias para identificar cuántas partes hay sombreadas, por ejemplo:

 Un cuarto y un cuarto. Quedando representado por ¼+¼.

Estas representaciones han de aparecer de manera natural, en este caso utilizando como apoyo las fracciones unitarias y la secuencia de contar. Lo mismo con la representación de las fracciones en la recta numérica. Si los alumnos han trabajado con situaciones concretas y realizan cambios entre representaciones, por ejemplo verbalizando o mediante el uso de símbolos, no deberían presentar problemas. Hay que destacar que esto no se refiere al uso de los algoritmos, sino al trabajo de situaciones; para trabajar los algoritmos quedos un gran tramo aún.

- Otra dificultad que se puede presentar en el trabajo con fracciones, es cuando se está en contextos discretos, al considerar partes de la unidad formadas por objetos concretos, por ejemplo: 

Los triángulos pintados son un cuarto de la unidad. En este caso es importante evitar que los alumnos confundan la cantidad de fichas de cada parte (subgrupo) con el número de partes que se obtengan. Aquí se pueden presentar actividades donde la cantidad de fichas en cada grupo sea diferente al de número de grupos.

- Los alumnos en los que se ha potenciado el trabajo con la relación parte-todo de las fracciones, a partir de diagramas, pueden presentar dificultades al considerar 2/5 como una fracción entre 0 y 1, o como una situación de reparto 2 entre 5. De este modo, se presenta un problema conceptual en la integración de tipos de representaciones de la fracción.

- El conocimiento previo sobre los números naturales también puede llevar a dificultad a los alumnos en el trabajo con las fracciones, dado que los símbolos de los números naturales también se utilizan para las fracciones, añadiendo solamente una línea fraccionaria horizontal. Lo que puede llevar al estudiante a ver las fracciones como un conjunto de dos números naturales, separados por una línea fraccionaria. Esto puede producir algunos de los errores frecuentes en la suma de las fracciones; por ejemplo, sumando numeradores y denominadores, lo que supone dificultades tanto conceptuales como algorítmicas.

- Puede que los alumnos al enfrentarse tempranamente al trabajo algebraico (por ejemplo, operaciones con fracciones), no alcancen un trasfondo concreto desarrollado referente a las fracciones.
- Otra dificultad que se puede presentar al trabajar con la recta numérica, es la identificación del segmento unidad cuando la recta numérica se ha extendido más allá del uno o cuando el segmento unidad está dividido en múltiplos del denominador.

Consideramos que otras posibles dificultades pueden estar relacionadas con el aspecto espacial como no considerar las partes de manera congruente. También puede ser una dificultad, cuando se solicita una sexta parte del todo dividido en tercios. Aquí los alumnos pueden no considerar las partes como todo.

2.3. Antecedentes de investigación sobre las componentes implicadas

Una vez estudiados los referentes teóricos sobre el área problemática, pasamos a hacer una revisión bibliográfica sobre los aspectos que cubrían nuestro interés. En este apartado comentaremos algunos resultados de la revisión bibliográfica sobre los componentes implicados en el estudio. Distinguiremos algunos trabajos asociados al conocimiento profesional del profesor de matemáticas, específicamente sobre el Conocimiento Pedagógico del Contenido y el Conocimiento del Contenido.

2.3.1. Conocimiento del Contenido para la Enseñanza

Inicialmente, Shulman (1986) enuncia tres dominios de conocimiento base que se requieren para la enseñanza: Conocimiento del Contenido de la Materia, Conocimiento Pedagógico del Contenido y Conocimiento Curricular. El primer tipo de conocimiento hace alusión a la "cantidad y organización del conocimiento, como tal, en la mente del profesor" (p.9) e incluye la comprensión de los factores principales, conceptos, marco explicativo de la materia. Mientras, el Conocimiento Pedagógico del Contenido[1] alude, más específicamente, al conocimiento de la materia para la enseñanza, concretamente a los modos de representar y enunciar el contenido para hacerlo comprensible a los demás. Este dominio incluye comprender las características del alumno y del contexto educacional; disponer con claridad metas educativas, bases filosóficas e históricas, propósitos y valores, identificar el grado de dificultad en el aprendizaje de determinados temas, así como las concepciones y concepciones erróneas que los estudiantes de

[1] Hace referencia a la expresión en inglés Pedagogical Content Knowledge. Destacar que en la literatura española, se alud, en ocasiones, a esta expresión como Conocimiento Didáctico del Contenido.

diferentes edades traen consigo. Shulman (1986) destaca que "cuando las concepciones son erróneas el profesor ha de conocer las estrategias efectivas para tener éxito en la reorganización, superación y transformación de la comprensión del estudiante" (p.9-10). El conocimiento curricular queda constituido por el conocimiento de materiales instruccionales válidos para enseñar diversos tópicos, por ejemplo: los programas y materiales diseñados para la enseñanza, que sirven de herramientas al profesor para presentar el contenido. Pueden incluirse el conocimiento de materiales manipulativos y *software* que ayuden a representar ideas matemáticas. Es importante que los profesores conozcan alternativas para afrontar los procesos de enseñanza y aprendizaje, implicando conocer el contenido curricular referente a las materias que cursan los alumnos, los materiales disponibles para afrontar la enseñanza, etc. Posteriormente, Shulman (1987) complementa los dominios de conocimiento descritos, añadiendo componentes más generales: Conocimiento Pedagógico General, Conocimiento de los Estudiantes, Conocimiento del Contexto Educativo, Conocimiento de los Fines y Valores Educativos.

El Conocimiento Pedagógico del Contenido ha recibido especial atención, tanto en el campo de la investigación como en el de la práctica, dado que es el conocimiento que incluye las formas más útiles de representar los contenidos, las más poderosas analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones, y demostraciones; es decir, las formas de representar y formular la materia que la hagan comprensible a los demás (Shulman, 1986, p.9). Esto lo diferencia del Conocimiento Pedagógico General para la Enseñanza, que es el conocimiento de principios y estrategias generales de manejo y organización de la sala de clases; el conocimiento de las teorías y métodos de enseñanza. Hemos de destacar que el conocimiento del contexto educativo abarca desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión de la clase, hasta el carácter de las comunidades y culturas. En palabras de Shulman (1987) "el Conocimiento Pedagógico del Contenido es la categoría que, con mayor probabilidad, permite distinguir entre la comprensión del contenido del especialista en un área del saber y la comprensión del pedagogo" (p.8).

Los trabajos de Shulman sobre las categorías del conocimiento para la enseñanza han sido de gran impacto en una variedad de áreas temáticas: ciencias, matemáticas, estudios sociales, química, ingeniería, música, educación especial, educación superior, y otros; y tales estudios no muestran signos de retroceso (Hill, Ball et al., 2008). A su vez, las categorías del conocimiento para la enseñanza han sido sometidas a diversas críticas y revisiones por parte de investigadores; sin embargo, han sido reconocidas como herramientas para identificar distinciones en el conocimiento para la enseñanza que ha de tener un profesor y puede concernir para una enseñanza efectiva. Esto ha permitido que surjan grandes ideas y teorías relacionadas con el conocimiento profesional del profesor en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, siendo un modelo de referencia para algunos investigadores (Grossman, 1990; Ponte, 1994; Krauss et al., 2008; Ball et al, 2005; Hill, Ball et al., 2008; Ball et al., 2008) que han seguido estas directrices tratando de caracterizar el dominio del Conocimiento Pedagógico del Contenido.

Hill, Ball et al., (2008) manifiestan que existen pocos estudios a gran escala que den cuenta del conocimiento pedagógico del contenido y, a su vez, que es necesario ahondar en su significado. Ball et al., (2008) sostienen que los progresos por desarrollar un marco teórico coherente para el Conocimiento del Contenido para la Enseñanza, han sido escasos desde los trabajos de Shulman. No se ha establecido una definición clara, la mayoría son definiciones superficiales, o definidas en términos generales, por lo cual las ideas siguen siendo teóricamente dispersas. A menudo no se distingue el conocimiento pedagógico de otras formas de conocimientos para la enseñanza, se hace referencia a algo que es simplemente conocimiento del contenido y, en ocasiones, a algo que es en gran medida la habilidad pedagógica.

Parks y Oliver (2008) conceptualizan el Conocimiento Pedagógico del Contenido identificando cinco componentes: conocimiento de la comprensión de los alumnos, conocimiento del currículo, conocimiento de las estrategias de enseñanza, conocimiento de la evaluación del aprendizaje de los alumnos en torno a un tema, y orientación a la enseñanza de los contenidos matemáticos. Estos investigadores concluyen que el Conocimiento del Contenido Pedagógico se modifica con la reflexión del profesor sobre la enseñanza, siendo este factor el que lo hace difícil de medir.

Krauss et al., (2008) e investigadores del Centro de investigación Educacional y del Instituto Max Planck para el Desarrollo Humano (Berlín, Alemania), basándose en el trabajo de Shulman (1986), han buscado conceptualizar el Conocimiento del Contenido Pedagógico y el Conocimiento de los Contenidos del nivel secundario de matemáticas. A través de un enfoque empírico para evaluar el Conocimiento del Contenido Matemático de los profesores de secundaria, aplican pruebas a profesores alemanes para evaluar las categorías de conocimiento, tanto el Conocimiento Pedagógico del Contenido como el Conocimiento del Contenido. En el estudio de referencia se aplican pruebas a dos grupos de profesores, uno con más especialización que otro. Las pruebas evalúan el conocimiento pedagógico del contenido distinguiendo los distintos tipos de conocimientos: de las tareas matemáticas; de conceptos erróneos y de las dificultades de los estudiantes; y el conocimiento de las estrategias de enseñanza específica de las matemáticas. Mientras, se ha conceptualizado el conocimiento del contenido centrándose en las áreas de estudio de la enseñanza secundaria (por ejemplo, la aritmética, álgebra y geometría). Los resultados han arrojado que los dos grupos de profesores difieren sustancialmente en cuanto al nivel y la estructura de conocimientos, aunque no se puede descartar la posibilidad de que este hallazgo sea simplemente una manifestación de las diferencias que existían ya entre los grupos antes de su formación docente. Además se obtiene que el grado de conexión cognitiva entre el Conocimiento Pedagógico del Contenido y el Conocimiento del Contenido está en función del grado de Conocimiento Matemático.

Rossouw y Smith (1998) discuten la necesidad de ampliar la noción de Conocimiento del Contenido Pedagógico que define Shulman (1986). Presentando un modelo específico de cuatro categorías para la enseñanza de la geometría (el conocimiento de la geometría, el aprendizaje de la geometría, las representaciones docentes y el contexto de enseñanza).

El grupo de investigación de Deborah L. Ball y sus colaboradores de la Universidad de Michigan ha aportado al campo de la didáctica de la matemática los principales trabajos que miden el Conocimiento Matemático para la Enseñanza en los profesores de educación básica, además de estudiar su relación con el progreso de los estudiantes.

Este grupo se ha esforzado en desarrollar una teoría basada en la práctica del Conocimiento del Contenido para la Enseñanza construida sobre la noción de conocimiento pedagógico del contenido desarrolla por Shulman (1986), aceptando que es un concepto que requiere un desarrollo teórico, clarificación analítica y comprobación empírica (Ball et al., 2008). Los trabajos de este equipo han logrado caracterizar con gran detalle los dominios de conocimiento matemático requerido para la enseñanza, y han establecido que el Conocimiento Pedagógico del Contenido de los profesores incide en los logros de los aprendizajes matemáticos de los estudiantes.

Los estudios citados abarcan un interesante conjunto de metodologías. Los instrumentos utilizados en estas investigaciones son cuestionarios, observaciones e investigación-acción. Aunque varios de los estudios se centran en los métodos cualitativos o cuantitativos, algunas investigaciones han tratado de combinar ambos métodos.

Observamos de la revisión bibliográfica que variados estudios cualitativos se centran de manera general en el conocimiento, otros en una disciplina en particular y especialmente sobre los efectos del conocimiento del profesor en la enseñanza. De esto se desprende una de las principales conclusiones sobre la enseñanza de las matemáticas: que las diversas estrategias de enseñanza para explicar y representar los contenidos matemáticos en el aula son dependientes de la profundidad y amplitud de la comprensión conceptual del contenido (Ma, 1999; Ball et al., 2005). Una citada investigación que da cuenta de lo señalado es la llevada a cabo por Ma (1999), donde se realiza un estudio comparativo entre profesores de enseñanza primaria de Estados Unidos y de China, y da cuenta de las diferencias de conocimiento del contenido y de la comprensión entre los profesores de educación primaria. Se concluye que la profundidad y flexibilidad de la comprensión de las matemáticas de los profesores chinos les proporcionan un amplio repertorio de estrategias pedagógicas para representar y explicar el contenido matemático respecto a los profesores de Estados Unidos. Se destaca igualmente que la calidad del conocimiento del contenido afecta directamente al el aprendizaje de los alumnos, enfatizando que la mejora sólo del conocimiento docente no lleva a mejorar los aprendizajes de los alumnos, sino que ha de darse un trabajo conjunto. Como destaca Ponte (2005), la calidad y el alcance de la formación no sólo dependen de la calidad de los formadores, sino también de la inversión y la actitud de los alumnos.

2.3.2. Calidad Matemática de la Instrucción

Algunos investigadores señalan que el Conocimiento del Contenido, el Conocimiento Pedagógico del Contenido y las habilidades son determinantes importantes de la calidad de la enseñanza, y que éstas inciden en el aprendizaje de los alumnos (Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007; Hill, Rowan y Ball, 2005). Sin embargo, pocos son los estudios empíricos a la fecha que evalúen las componentes del conocimiento matemático para la enseñanza y, a su vez, que les permita medir la calidad de la enseñanza y los logros de los estudiantes (Hill, Ball et al., 2008; Baumert et al., 2010). Al respecto, varios métodos cualitativos y mixtos se han usado para explorar cómo los profesores utilizan diversas estrategias para explicar y representar el contenido matemático a sus estudiantes (Ma, 1999; Ball et al., 2005). Pero hay una falta de comprensión detallada de cómo el conocimiento del profesor afecta la instrucción en la sala de clases y al rendimiento de los estudiantes.

Hill, Blunk et al., (2008) comparan profesores con diferentes grados de conocimiento matemático para la enseñanza, con el fin de comprender cómo expresan el conocimiento en el proceso de instrucción. Desarrollan un marco formal para analizar la calidad matemática de la instrucción, considerando las sugerencias desde la literatura sobre errores, representaciones, explicaciones matemáticas, lenguaje matemático, formalizándolos como elementos de calidad matemática de instrucción. También miden y analizan el Conocimiento Matemático para la Enseñanza usando un instrumento desarrollado (Hill, Rowan y Ball, 2005). Usan técnicas exploratorias, para ver cómo el Conocimiento Matemático para la Enseñanza aparece en la instrucción, y cómo se intercepta con otras características del profesor para producir la instrucción. Una conclusión destacable es que el conocimiento matemático para la enseñanza ayuda a los profesores, por ejemplo, a evitar errores en el proceso de enseñanza, a presentar actividades con sentido. Se ofrece a los estudiantes explicaciones y representaciones matemáticas sólidas, descripciones explícitas de trabajo disciplinario y precisión matemática; también se incrementan los resultados de oportunidades para el aprendizaje matemático de los estudiantes (p.496). En consecuencia, como sostienen Ball y Rowan (2004) cada vez es más claro que la calidad de la instrucción afecta a lo que los estudiantes aprenden en la escuela y cómo crecen académicamente, por lo que tiene sentido preocuparse por la calidad de la enseñanza.

2.3.3. Conocimiento matemático de las fracciones

Ponte y Chapman (2006) llevan a cabo un estudio donde identifican y analizan diversas investigaciones que se centran en el conocimiento y en la práctica docente. En la Tabla 2.4, hemos organizado algunas investigaciones enunciadas por estos autores, específicamente sobre el conocimiento matemático para la enseñanza referente a nuestro tema de interés, las fracciones. Además hemos considerado investigaciones de nuestra búsqueda bibliográfica que destacamos en negrita. A continuación detallamos tal información, para posteriormente presentar una descripcion de algunas de las investigaciones citadas.

Tabla 2.4
Investigación sobre el conocimiento matemático de las fracciones

Autor(es)/año	Tema	Nivel*
Linchevsky y Vinner (1989)	Números y operaciones	PEP
Llinares y Sánchez (1991)	Fracciones	PFP
Tirosh, Graeber y Glover (1986)	Resolución de problemas	PFP
Ball (1990)	División de fracciones	PFP
Llinares et al., (1994)	Fracciones (representaciones)	PFS
Pinto y Tall (1996)	Número Racional	PFP
Klein y Tirosh (1997)	Multiplicación y divisiones de fracciones	PEP
Llinares y Sánchez (1997)	Fracciones	PFP
Gairin (1998)	Fracciones (representaciones)	PFP
Klein et al.,(1998)	Fracciones (errores en operaciones)	PEP
Ma (1999)	División de fracciones	PEP

** PEP: Profesores en ejercicio de educación primaria, PFP: Profesores en formación de educación primaria, PFS: Profesores en formación de educación secundaria.*

A continuación detallamos algunas de las investigaciones mencionadas y una síntesis de resultados de las mismas.

Llinares y Sánchez (1991), investigadores de la Universidad de Sevilla, estudiaron los conocimientos de profesores en formación en educación primaria acerca del contenido pedagógico de las fracciones. Encontraron que muchos de los participantes mostraban incapacidad para identificar la unidad, para representar algunas fracciones y trabajar con fracciones más grandes que uno. Llinares et al., (1994) estudiaron la función de las representaciones relacionadas con el concepto de fracción y el tipo de tareas propuestas, en diferentes grupos: estudiantes de magisterio, profesores de EGB y estudiantes de Ciencias. La recolección de la información se realizó a través de un cuestionario con ítems de selección múltiple, donde se consideraban tres variables: modo de representación, la magnitud de la fracción y el tipo de tarea. Algunos resultados obtenidos son que los estudiantes para profesor intentan repetir el esquema con el cual aprendieron las fracciones, y que se observa poca influencia de modos de representaciones. Los autores del estudio sugieren que los programas de formación de profesores han de crear condiciones que posibiliten la generación de conocimientos pedagógicos del contenido; para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.

Pinto y Tall (1996) realizaron un estudio sobre las concepciones del número racional, donde los sujetos participantes eran futuros profesores de educación primaria y secundaria. Realizaron entrevistas a los profesores participantes donde las preguntas se enfocaron a definir número racional e irracional y a clasificar los números racionales e irracionales de una lista de números reales. Los resultados obtenidos evidenciaron que los futuros profesores participantes en el estudio tenían una diversidad de imágenes de los números racionales asociados al concepto.

Klein y Tiroch (1997) evalúan el conocimiento pedagógico del contenido de 67 profesores en formación y de 46 profesores en ejercicio. Se centran en las dificultades más usuales en las experiencias con los niños sobre problemas verbales de multiplicación y división con números racionales. El resultado obtenido es que los profesores en formación muestran bajo conocimiento pedagógico del contenido sobre los dos aspectos mencionados. En cambio, la mayoría de los profesores en ejercicio identifican las respuestas incorrectas de los alumnos, pero no los posibles orígenes. Se establece así la importancia de estudiar los procesos de pensamiento más usuales de los alumnos con los profesores en formación y en ejercicio, ya que los lleva a aumentar el conocimiento pedagógico del contenido.

Resumen

Los estudios citados abarcan un interesante conjunto de metodologías. Los instrumentos utilizados en estas investigaciones son cuestionarios en los primeros años, más tarde las entrevistas, observaciones e investigación-acción. Aunque varios de los estudios se centran en los métodos cualitativos o cuantitativos, algunas investigaciones han tratado de combinar ambos métodos. Destacamos que en la mayoría de las investigaciones mencionadas en la Tabla 2.4, los sujetos de estudio son profesores en formación de educación primaria.

En el capítulo siguiente, plantearemos los objetivos de la investigación, además de la metodología que seguiremos para buscar respuesta a las cuestiones planteadas.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta la metodología de nuestro estudio. Primeramente atenderemos a los objetivos de la investigación, a los que intentamos dar respuesta a través de un diseño de estudio particular. Posteriormente expresamos los fundamentos metodológicos del estudio, tras la descripción del proceso de recogida de datos y las técnicas de análisis de los datos.

3.1. Objetivo de la investigación

La presente investigación centra su interés en analizar qué conocimiento profesional para la enseñanza de las matemáticas tienen los profesores chilenos. De ello surge nuestra área problemática, que se centra en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas y en cómo este conocimiento se pone en juego al enseñar el contenido matemático escolar de las fracciones. A partir de la profundización en el marco teórico y la revisión bibliográfica realizada, nuestro interés por profundizar en el Conocimiento del Contenido para la Enseñanza, nos llevó a seleccionar el caso de un profesor en ejercicio de Educación General Básica, con el fin de analizar su práctica pedagógica. Para efecto de este trabajo nos limitaremos al análisis de una sesión de clase, donde se introduce el concepto de fracción. Tenidos en cuenta estos supuestos, nos planteamos el siguiente objetivo general de investigación:

3.1.1. Objetivo general

Caracterizar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza que pone en juego un profesor chileno de Educación General Básica en una sesión de clases, al enseñar el concepto de fracción a estudiantes de 4º año de educación básica y valorar la calidad matemática de la instrucción.

3.1.2. Objetivos específicos

El objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

1. Caracterizar el proceso de enseñanza del contenido matemático de las fracciones que desarrolla un profesor en una sesión de clase.

2. Identificar los componentes del Conocimiento Matemático que pone en juego el profesor en el proceso de enseñanza, concretando en el Conocimiento Común, el Conocimiento Especializado y Conocimiento de Horizonte Matemático referente a las fracciones.

3. Identificar los componentes del Conocimiento Pedagógico de las fracciones que pone en juego el profesor en su enseñanza, concretamente, el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza, el Conocimiento del Contenido y del Estudiante y el Conocimiento del Contenido Curricular.

4. Valorar la Calidad Matemática de la Enseñanza impartida por un profesor de Educación General Básica.

3.2. Caracterización de la investigación

La investigación científica se caracteriza por dos tipos de actividades: empírica y teórica. La primera está basada en la observación y la experimentación, y la segunda en la construcción de teorías científicas (Bisquerra, 1989). Para efecto de este estudio consideramos un trabajo basado en la observación, que nos permita profundizar en aspectos referentes al conocimiento profesional de un profesor chileno. Con ello nos situamos en un estudio de caso. La observación suele ser el método de investigación de base de los estudios de casos, pues el investigador observa las características de una unidad de análisis, una clase, un profesor, etc. (Cohen y Manion, 1990). Por ende, realizaremos un estudio de caso que nos permita un proceso de indagación detallado y sistemático y que nos permita alcanzar en profundidad nuestros objetivos (Rodríguez, Gil y García, 1996).

3.2.1. Selección del caso

Durante los años 2006 y 2007 el Instituto de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas (IREM)-Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, apoya a cuatro docentes de Educación General Básica con especialidad en Matemática, en la ejecución de Proyectos de Participación Activa. Esta propuesta consistió en actualizar los conocimientos matemáticos de estos docentes de aula, para reflexionar y analizar sus prácticas pedagógicas y hacer propuestas de aprendizaje de contenidos específicos. A su vez, los cuatro docentes transmitían los saberes adquiridos a sus pares de los establecimientos respectivos. Juan[1] es un profesor beneficiario que participó del

[1] Nombre ficticio del profesor

Proyecto. En esa oportunidad se grabaron las sesiones correspondientes a una secuencia de 12 lecciones referentes a la unidad de fracciones. Hemos empleado este material con el fin de estudiar el conocimiento profesional que pone en juego el profesor en una sesión de clases. Siendo un caso de tipo intrínseco, que nos acerca a una mejor comprensión sobre el conocimiento profesional del profesor. De este modo esperamos identificar los componentes del Conocimiento Matemático y del Conocimiento Pedagógico de las fracciones que pone de manifiesto Juan en su enseñanza.

3.2.2. Descripción del proceso

Se ha observado a un profesor de Educación General Básica en la ejecución de doce sesiones de clases, donde se aborda: el concepto de fracción, fracciones equivalentes, suma y resta de fracciones con igual denominador. Como hemos señalado, para este trabajo de tercer ciclo se ha considerado estudiar y analizar la primera sesión de clase; donde se inicia la unidad de fracciones.

En la figura 3.1., se presentan los contenidos abordados en la clase y cómo son llevados a cabo.

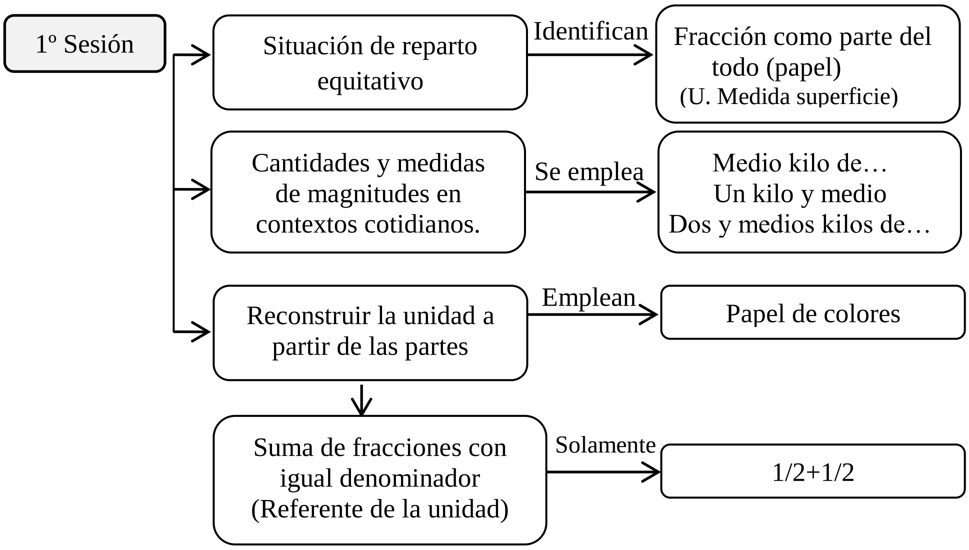


Figura 3.1. Contenidos abordados en una sesión de clases

El tiempo de la clase programada es de 90 minutos (2 horas pedagógicas). Sin embargo el tiempo real en que se aborda el contenido (figura 3.1) corresponde a 48 minutos. Debido a que el profesor antes de comenzar la clase, entrega a los alumnos calificaciones de evaluaciones anteriores, pasa lista y facilita 15 minutos a los alumnos para la lectura. La Tabla 3.1 detalla lo señalado.

Tabla 3.1
Tiempo real de cada clase, tiempo efectivo de cada clase, tema abordado

Sesión	Tiempo de clase	Tiempo en que se aborda el contenido	Tiempo actividades de gestión	Temática (de sesiones de clase/de unidad)
1	90 minutos	48 minutos	42 minutos	Concepto de fracción como relación parte todo

El profesor que ejecuta la clase tiene una experiencia de 22 años en la enseñanza de matemática con alumnos de educación básica. Su formación inicial es Profesor de Educación General Básica; es decir, tiene formación universitaria con preparación teórica y práctica en todos los subsectores de aprendizaje de la educación elemental, especialmente en ciencias naturales y sociales, matemática y lenguaje. El profesor no tiene mención en ninguna disciplina. Trabaja en un colegio subvencionado gratuito (sin financiamiento compartido), situado en Viña del Mar, Chile, en un barrio de nivel socioeconómico medio-bajo.

Juan ha enseñado las fracciones desde hace aproximadamente 11 años en el nivel descrito. El grupo al cual se dispone a enseñar tiene una matrícula de 33 estudiantes. Parece en general cohesionado a pesar de las diferencias entre capacidades, conocimientos, hábitos y contexto de los alumnos. En las relaciones de aula se observa entre el profesor y los alumnos, y viceversa, un clima de confianza, respeto y trabajo.

3.2.3. Recogida de datos

Hemos recogido la información sobre la enseñanza puesta en marcha por el profesor y las características de las clases ejecutadas, a través de la observación no participante o pasiva, es decir, con un nivel de distanciamiento en las actividades de la sala de clases y, puntualmente, en el trabajo del profesor. Debemos señalar que ante cualquier consulta respecto al contenido, realizada por los alumnos al observador, se les indicaba que debían dirigirse al profesor. Respecto a la posible distorsión que pudiera observarse en la actuación de los alumnos y del profesor, producto a la grabación de las sesiones de clases, tenemos que indicar que la familiaridad con la presencia del observador y de la cámara fue rápido.

El profesor que ejecuta la clase presenta al investigador a sus alumnos como una profesora que estará acompañándolos durante un tiempo, y tiene como interés grabar las clases para realizar una investigación. Se enfatiza a los alumnos, que ellos han de trabajar normalmente y participar como de costumbre. El profesor, previo al proceso de grabación, solicitó asentimiento a los alumnos para poder llevarla a cabo. Además, se contó con el consentimiento de los padres o encargados, y con la autorización del personal del establecimiento.

La observación de aula ha sido grabada en vídeo desde la parte trasera del salón de clases, con el fin de captar la totalidad del escenario y las interacciones entre el profesor y los alumnos. La cámara se mantuvo fija la mayor parte del tiempo, de modo que permitiera registrar el total de las interacciones producidas.

Además, se han recogido por medio de notas (textuales) de campo, aquellas observaciones sobre aspectos destacables que podrían no apreciarse en las grabaciones, como por ejemplo, lo escrito en la pizarra. Después de la grabación y examen de las imágenes, cada sesión se ha transcrito (ver anexo A.). En la transcripción se han incorporado las notas recogidas durante la observación de clase, de modo que podemos establecer que contiene la práctica totalidad de las interacciones entre el profesor y los alumnos. Al término de las filmaciones de todas las clases, se realizó una entrevista semiestructurada al profesor, con el objetivo de tener antecedentes a su formación, años de experiencia y tiempo que lleva enseñando las fracciones.

La figura 3.2, muestra el proceso llevado a cabo para la recolección de datos.

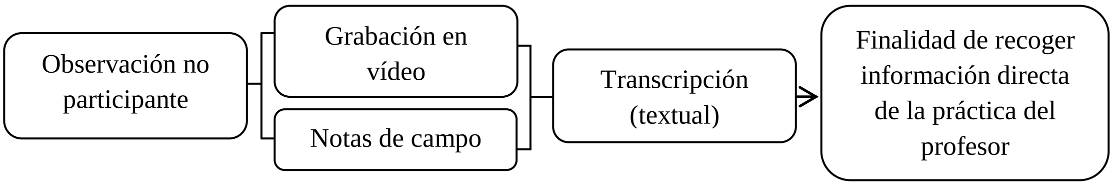


Figura 3.2. Proceso de recogida de datos

3.2.4. Análisis de datos

En el contexto de nuestro trabajo los datos obtenidos son cualitativos, el análisis de los datos se realizará a través de una descripción detallada interpretativa. El análisis de los datos es un conjunto de manipulaciones, transformaciones, operaciones, reflexiones y comprobaciones que se han de realizar sobre los datos con el objetivo de extraer significados relevantes en relación al problema de investigación (Rodríguez et al., 1996, p.200). A continuación, nos referimos al tratamiento de los datos:

Primeramente, segmentamos en elementos singulares los datos obtenidos. Realizamos una primera división de los datos a través del criterio conversacional, que consiste en separar las declaraciones o turnos de palabras u oraciones de los sujetos implicados, en nuestro caso cuando interviene el profesor y los alumnos (Rodríguez et al., 1996, p. 207). Así se evidencia a continuación:

7	*A*	*No se puede*
8	*As*	*Siiii*
9	*P*	*Shuuu, calladito, a ver qué va a hacer ella*

La primera anotación (columna), corresponde al número de la declaración. La segunda hace referencia al sujeto implicado: A: alumnos, As: alumnos y P: profesor. Y la tercera columna hace mención a la declaración formulada por los alumnos o el profesor. La clase que se analizará se ha separado en 103 declaraciones o turnos de palabra u oraciones realizadas por el profesor (P), un alumno (A) y los alumnos (As).

Luego realizamos una segunda división de los datos, esta vez consideramos unidades de análisis (episodios y subepisodios) que corresponden a un fragmento que tiene un principio y un fin reconocible, y una secuencia de acciones que lo constituye (Krippendorff, 1990, p.85). Teniendo en cuenta que "la unidad deber ser bastante grande como para proveer significado, al menos mediante un contexto, pero bastante pequeña como para permitir objetividad en su uso" (Hayman, 1991, p.128), los episodios se han definido en función del tema abordado. A su vez, los episodios se han segmentado en unidades menores (subepisodios), que corresponden a una unidad de información con sentido completo, como por ejemplo el proceso de ejecución de una tarea, la validación de un concepto matemático, etc. Denotaremos los episodios por **[i]** y los sub episodios **[i.j]**, donde el índice i corresponde al número de episodio y j al número de subepisodios.

Por ejemplo: el episodio **[1]** queda definido por la secuencia de acciones que constituye el inicio y final de una actividad de reparto equitativo. Posteriormente, el episodio **[1]** ha sido fragmentado en unidades menores que constituyen 5 subepisodios. Como se presenta en la Tabla 3.2 el subepisodio **[1.1]** corresponde al planteamiento de la actividad de inicio de la clase; el **[1.2]**, a la instrucción para la ejecución de la actividad; el **[1.3]**, a la realización de la actividad (acción); el **[1.4]**, a formulaciones respecto a la ejecución de la actividad, y finalmente, el **[1.5]** hace consideraciones sobre el objeto matemático implicado en la actividad.

Tabla 3.2.
Fragmentación de datos en episodios y subepisodios

Episodio	Subepisodio	Nº	P/A/AS	Descripción
[1]	**[1.1]**	**0**	**P**	[Trabajo de gestión: asistencia, entrega evaluaciones anteriores, lectura 15 minutos. Pide que saquen el cuaderno, que se queden en silencio].
		1	**P**	*Vamos a iniciar una nueva unidad de estudio: la unidad se llama fracción*.

	2	**As**	*Cómo, fracción*
	3	**P**	*Qué vamos a ver, niños, hoy día vamos a ver fraccionamiento de enteros en partes iguales, la escritura, la escritura de fracciones, trabajando con papelitos lustres que les pedí ayer que trajeran.*
	4	**P**	[Profesor pide a los alumnos que escriban en su cuaderno] 06 de septiembre Unidad V: "Fracción" Fraccionamiento, lectura y escritura de fracciones
	5	**P**	[El profesor saca a tres alumnas adelante y explica a los alumnos]
[1.2]	**6**	**P**	*Le voy a pasar a María 5 papeles lustres y ella tiene que repartir entre sus dos compañeras en partes iguales*
	7	**A**	*No se puede*
	8	**As**	*Sííí*
	9	**P**	*SHuuu, calladito, a ver qué va a hacer ella*
	10	**P**	*María ¿qué puede hacer usted para repartirlo?*
[1.3]	**11**	**As**	*Dobla a la mitad* [Dos alumnos gritan]
	12	**A**	[La alumna muestra el papel, lo dobla a la mitad y da dos a cada uno]
	13	**P**	*Ya, dóblelo primero*
	14	**P**	*Ya, lo corta por la mitad, dos partes iguales*
	15	**A**	[Reparte cada pedazo (mitad de un papel) a cada niño]
	16	**P**	*A ver, ¿cuántos papeles enteros recibió cada niño?*
	17	**A**	*Dos, dos*
	18	**As**	*No, dos y medio* [a coro los alumnos]
	19	**P**	*A ver, papeles enterossss*
	20	**A**	[una alumna] *Dos enteros y dos medios*
[1.4]	**21**	**P**	*Puede mostrar cuántos papeles recibió* [pide a las alumnas]
	22	**P**	*Ahí tiene cada niña, que recibió dos papeles enteros*
	23	**P**	*¿Ya, y qué se tuvo que hacer con el otro papel para que cada niña recibiera lo mismo?*
	24	**As**	*Partirlos por la mitad*
	25	**P**	*Partirlo por la mitad, están todos de acuerdo*
	26	**As**	*Sííí*
	27	**P**	*Cada trozo de papelito que recibió cada niña se llama fracción de papel, le vamos a llamar*
[1.5]	**28**	**P**	*Pregunta:* ¿qué *fracción de papel recibió cada niño?*
	29	**As**	*Mitad, mitad…*

30	**P**	*Bien, la mitad*
31	**P**	*Y vamos a llamarle a la mitad un medio de la fracción*
32	**P**	*Un medio es una fracción, es un número fraccionario*

Para tener mayor precisión del inicio y fin de los episodios, y subepisodios, se ha realizado la descripción detallada de la sesión de clases (ver anexo C.) Siendo fragmentados los datos en un nivel general en 5 episodios, y un total de 21 subepisodios.

Seguidamente consideramos el modelo presentado en la Tabla 3.3, que ha sido adaptado por Ribeiro, Carrillo y Monteiro (2008) procedentes del modelo de enseñanza propuesto por Schoenfeld (1998; 2000). El modelo para el área de la matemática con la introducción del conocimiento profesional, Ball et al., (2008), permite caracterizar en detalle, momento a momento, los contenidos y los conocimientos que son activados prioritariamente en un contexto de enseñanza.

Tabla 3.3
Modelo para caracterizar el conocimiento profesional

[i.1] Designación del sub episodio
Momento desencadenante: Hecho que funciona como desencadenante de la secuencia de acciones. *Conocimiento en acción*: Identificación de conocimientos del profesor para que implemente esta secuencia de acción (componentes del conocimiento del profesor, esquema teórico de Ball et al., 2008, sobre el conocimiento matemático para la enseñanza).

Para identificar el conocimiento en acción que pone en juego el profesor al momento de enseñar, hemos vinculados algunos de los conocimientos que definen Ball et al., (2008) con las componentes que caracterizan al análisis didáctico que surge de los trabajos de Luis Rico (1997a; 1998b).

Dentro del dominio de Conocimiento del Contenido identificamos:

El Conocimiento Especializado del Contenido con los aspectos fenomenológicos de las fracciones, con los usos de sistemas de representaciones y conocimiento conceptual. Por ejemplo: cuando se da una importancia al reparto como modo concluyente para el descubrimiento de los números fraccionarios. La partición de objetos continuos que lleva a atribuir un origen espacial y perceptual, y no sólo aritmético y procedimental.

Dentro del dominio de Conocimiento Pedagógico del Contenido identificamos:

El Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes cuando se evidencia que el profesor tiene conocimientos sobre los errores y dificultades que los estudiantes pueden presentar, respecto a las fracciones, en el proceso de enseñanza.

El Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza cuando el profesor emplea materiales y recursos, que permitan el aprendizaje de las fracciones. También si el profesor aplica los elementos del análisis de contenido de manera coherente con la encontrada en la literatura. Por ejemplo, antes de la enseñanza de las fracciones como relación parte-todo trabajar con modelos concretos, presentar situaciones que se puedan considerar cotidianas (Castro y Torralbo, 2008).

El Conocimiento del Contenido y del Currículo se relaciona con el currículo escolar de referencia. Por ejemplo, se identifica si el profesor enseña los contenidos mínimos obligatorios exigidos por el currículo escolar chileno.

Para valorar la Calidad Matemática de la Enseñanza, consideramos un sistema de categorías definidas por Hill, Ball y colaboradores (2008) que hemos agrupado en 6: formato del segmento (A), el trabajo en clases está conectado a las matemáticas (B), la riqueza de las matemáticas, trabajo con los estudiantes, errores e imprecisiones en el lenguaje y participación de los estudiantes. A excepción de las dos primeras categorías, las restantes están conformadas por subcategorías (para más detalle ver anexo B.).

La codificación para cada categoría y subcategorías se ilustra a continuación:

C1: La riqueza de las matemáticas
C2: Explicaciones matemáticas
C3: Múltiples procedimientos o métodos de resolución
C4: El desarrollo de generalizaciones matemáticas
C5: El lenguaje matemático
D1: Trabajando con los estudiantes y las matemáticas
D2: Respuesta a las producciones matemáticas de los estudiantes
E1: Errores en el lenguaje
E2: Imprecisiones en el lenguaje o en la notación
E3: Falta de claridad
F1: Participación de los estudiantes en dar sentido y razonar
F2: Cuestionamiento y razonamiento matemático del estudiante
F3: Activación cognitiva de las tareas promulgadas

Además, existen categorías generales que permiten valorar de manera global los episodios.

CG: Riqueza de las matemáticas en general
DG: El trabajo con los estudiantes y las matemáticas en general
EG: Errores de imprecisiones en general
FG: Participación general del estudiante en dar sentido y razonar

Para realizar el análisis de la Calidad Matemática de la Enseñanza se consideran las unidades menores, los subepisodios. Luego se realiza una apreciación general por episodio. Sin embargo, para estudiar el conocimiento profesional puesto en juego, nos vamos a ceñir a los episodios, tal como se verá en los siguientes puntos.

El protocolo de análisis de datos se presenta en la Tabla 3.4.

Tabla 3.4
Categorías para valorar la Calidad Matemática de la enseñanza

<table>
<tr><td>Categorías</td><td rowspan="2">A</td><td rowspan="2">B</td><td colspan="6">Riqueza de las Matemáticas</td><td colspan="3">Respuestas a los estudiantes</td><td colspan="4">Errores en el Lenguaje</td><td colspan="4">Participación de los estudiantes</td></tr>
<tr><td>Episodios</td><td>C1</td><td>C2</td><td>C3</td><td>C4</td><td>C5</td><td>Cg</td><td>D1</td><td>D2</td><td>Dg</td><td>E1</td><td>E2</td><td>E3</td><td>EG</td><td>F1</td><td>F2</td><td>F3</td><td>FG</td></tr>
</table>

La primera categoría, formato del segmento, es descriptiva (no valorativa) y permite distinguir el tipo de actuación del profesor. Por ejemplo, se codifica 0 si el trabajo se manifiesta en grupos o es individual, mientras que se codifica 1 si hay una instrucción activa. La segunda, el trabajo en clase, se codifica 0 si es No y 1 si es Sí. Las restantes se miden en escalas categóricas, que consisten en observar el resultado por episodio y asignarle una categoría ordinal, es decir, categorías de orden natural: baja, media y alta, en este caso se codifica 0 a baja, 1 a media y 2 a alta, según corresponda a los descriptores de cada categoría (ver anexo B.).

Una vez explicado el procedimiento empleado para organizar los datos, en el siguiente capítulo presentamos el resultado de la codificación de los mismos, así como los resultados obtenidos y unas primeras conclusiones. En el capítulo 5 obtenemos las conclusiones de nuestra investigación.

CAPÍTULO 4

DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA DE UN ROFESOR CHILENO

4.1. Presentación

Con este estudio de caso se pretende describir la enseñanza de un profesor de un aula chilena, donde Juan, el profesor en ejercicio, ha abordado el tema de las fracciones, específicamente el concepto mismo de fracción. En este capítulo presentamos el proceso de codificación de los datos y su posterior interpretación. El análisis y la descripción de la enseñanza pueden ayudar a construir explicaciones sobre la acción docente y a identificar el conocimiento matemático para la enseñanza que dicho profesor pone en juego, con lo que se pretende conseguir cubrir los objetivos de nuestra investigación.

4.2. Análisis del conocimiento profesional de un profesor chileno en el aula

Comenzamos por presentar el análisis del conocimiento profesional que pone en juego el profesor en su enseñanza. Los siguientes cuadros reflejan qué conocimiento profesional surge en cada episodio, indicando para referenciarlo las líneas del episodio correspondiente en que aparece reflejado el dominio de conocimiento profesional según Ball, et al., (2008). Identificamos cada uno de los tipos de conocimiento con las siguientes siglas: Dentro del dominio de Conocimiento del Contenido consideramos: CCC: Conocimiento Común del Contenido; CH: Conocimiento en el Horizonte Matemático, y CEC: Conocimiento Especializado del Contenido. Dentro del dominio de Conocimiento Pedagógico del Contenido se tiene: CCEs: Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes, CCEn: Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza, y CC: Conocimiento del Currículo.

[1] Episodio
Síntesis del episodio: Inicio de la unidad de fracciones. Planteamiento de una actividad de reparto**,** realización de la actividad, formulaciones respecto a la ejecución de la actividad y consideraciones del objeto de enseñanza implicado en la actividad (0-32).
Objetivo: Iniciar la unidad de fracciones a través de una situación de reparto que permita a los alumnos adquirir el significado de fracción como parte-todo.
Momento desencadenante: Planteamiento de un problema (*Le voy a pasar a María 5 papeles lustres y ella tiene que repartir entre sus dos compañeras en partes iguales* (6)).

Conocimiento en acción:

CEC: Dado a que la situación-problema lleva a un Conocimiento Específico del Contenido, la introducción de la fracción como división (dividir 5 papeles entre 2 estudiantes) (6). Fenomenológicamente, se introduce la fracción como división, dando lugar a un fraccionamiento, para terminar en una fracción relación parte-todo (medio), relacionando estos sentidos de manera explícita (23) (reparto-fraccionamiento-parte/todo). Los sistemas de representación empleados durante el episodio son el verbal (medio, un medio, mitad, fracción, número fraccionario) y concreto (el papel) como representación material mediante un modelo interesante para las fracciones (parte de una superficie de papel).

CCC: El Conocimiento Común del Contenido (CCC) es elemental (el concepto de fracción y su resultado de una partición de reparto), si bien el problema planteado es un problema que en **Z** se resolvería por medio de una división entera (cociente 2 y resto 1), que da lugar a una división racional, cuando se reparte el resto. No hemos apreciado indicios de Conocimiento en el Horizonte Matemático (CH).

CCEn: El profesor muestra un conocimiento para la enseñanza al iniciar la unidad de fracciones a través de una situación-problema que implica repartir una cantidad inicial en partes iguales donde la unidad sobrante es menor que el número partes. La situación es realizable por los niños (adecuada a sus capacidades) y se relaciona con un material manipulativo familiar (el papel lustre), que tiene una unidad bien conocida por los alumnos; el papel permite el fraccionamiento de manera sencilla, más aún cuando la fracción utilizada (mitades) permite su construcción mediante plegado (hacer coincidir una parte con la otra). Existe una intención educativa que pone en juego el Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza (6).

CCEs: El profesor usa una división que da lugar a una fracción mayor que la unidad (5:2, impropia), esto dificulta a los alumnos a identificar la fracción como la parte resultante del reparto (16-30), pero permite repartir los trozos enteros, con lo que facilita el comienzo de la acción.

CC: Los contenidos enunciados por el profesor son contenidos mínimos obligatorios exigidos por el currículo escolar chileno. Explícitamente, se pide incorporar fracciones como una forma de dar respuesta a situaciones de reparto equitativo, en las que no es posible cuantificar partes de un todo o de una unidad de medida empleando los números naturales, permitiendo así cuantificar trozos o partes de objetos, colecciones o unidades de medida. Por ejemplo: repartir 5 papeles entre 2 niños o niñas (Programa de estudio, Cuarto Año Básico, pp. 142-144). (3-6).

[2] Episodio

Síntesis del episodio: Las fracciones en contextos cotidianos. Los alumnos describen circunstancias donde usan los números fraccionarios (33-49).

Objetivo: Identificar situaciones donde se usan fracciones en contextos diarios.

Momento desencadenante: Solicita a los alumnos que indiquen dónde se han relacionado con fracciones. (*A ver dónde, en qué momento ustedes han escuchado hablar de fracciones, un medio, cuándo, en qué circunstancias, en su vida diaria*). (21).

Conocimiento en acción:

CEC: Trabaja la fracción en diversos contextos, siempre de medida (fenomenología). Las representaciones empleadas son en forma oral (medio, kilo y medio, mitad), pero luego el profesor da un status de número a la fracción, pasando a representación escrita (49).

CCC: Conocimiento sobre fracciones extraído de la vida diaria, conocimiento adquirido a lo largo de la vida (33-49).

CCEn: Explota el conocimiento anterior de los alumnos sobre las fracciones, incorporando su experiencia previa. Aludir a expresiones del lenguaje cotidiano es una forma de mostrar la utilidad del concepto de fracción (33).

CC: En el currículo chileno se reclama trabajar con estas fracciones, recordando explícitamente el empleo en contextos familiares.

[3] Episodio

Síntesis del episodio: Dividir en partes iguales un papel. Asignan a cada parte del papel un nombre (representación escrita y verbal). A través de las partes, enunciar las partes que conforman el entero (50-68).

Objetivo: Estudiar la fracción como relación parte-todo (6).

Momento desencadenante: Indicación de acción: fraccionamiento con papel lustre (*Toma un cuadrado de papel lustre y divídelo en dos partes iguales. Pégalas en el cuaderno*).

Conocimiento en acción:

CEC: Se presta atención a los cambios de representaciones, especialmente desde una figura a la forma literal y simbólica (55).

CCC: Manejo de la fracción un medio y del fraccionamiento correspondiente, obtenida por dos formas de doblez (50).

CCEn: Trabajo con material concreto para fijar una idea de fracción (51-52).

CCEs: Al indicar que los papeles se pueden pegar en forma vertical u horizontal, lo que permite a que los alumnos adquieran un concepto más flexible de la fracción y, al mismo tiempo, les permitirá identificarla y relacionarla con la unidad en el futuro.

CC: Reconstruir la unidad a partir de las partes, con material concreto, como se sugiere en el currículo escolar chileno (57-62)

[4] Episodio

Síntesis del episodio: Reconstruir la unidad a partir de las partes, con material concreto, y representar cada parte de manera simbólica (69-88).

Objetivo: Estudiar la reconstrucción de la unidad a partir de una figura, y expresarla como suma de las partes usando representación simbólica.

Momento desencadenante: El profesor hace una llamada de atención sobre las formas de notación y las operaciones relacionadas (*Podemos hacerlo esto con números, a ver, voy a sumar esto, fíjense bien. Tengo* $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$ (69).

Conocimiento en acción:

CEC: Del trabajo concreto para construir el entero o unidad, se pasa a trabajar con la representación simbólica. Se atiende a la suma de fracciones con igual denominador de modo de obtener la unidad.

CC: La suma de fracciones con igual denominador es contenido que no se estipula en el currículo escolar chileno para el nivel que estamos estudiando (ver figura 2.10, p.30).

CCEn: A partir del trabajo con material concreto, los alumnos construyen el entero y se establece la relación con la adición de fracciones, pasando de un trabajo concreto a operaciones con símbolos (episodio anterior-86).

CCEs: En este episodio, es presentado el número fraccionario como un conjunto de dos números naturales, lo que puede producir algunos de los errores frecuentes en la suma de las fracciones, por ejemplo, sumando numeradores y denominadores. En el episodio no se atiende a un error específico de los alumnos cuando se suman los denominadores de dos fracciones unitarias (72-82), que correspondería a un Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes.

[5] Episodio

Síntesis del episodio: Dividir en partes iguales un papel. Asignan a cada parte del papel un nombre (representación escrita y verbal). Enuncian las partes que conforman el entero (89-103).

Objetivo: Estudiar la fracción como relación parte-todo.

Momento desencadenante: Indicación de acción: fraccionamiento con papel lustre (S*í. Otro papel, divídelo en cuatro partes iguales. Pégalo en el cuaderno*) (91).

Conocimiento en acción:

CEC: Se presta atención a los cambios de representaciones, desde una figura que representa una parte del todo considerado, con el nombre de manera simbólica (94). **CCEn**: Trabajar con material concreto las fracciones como relación parte-todo, específicamente obtener medios y cuartos. Conjuntamente, vincular la actividad con la construcción del entero a partir de los medios y los cuartos obtenidos.

El trabajo con fracciones como un medio y un cuarto permite obtener fácilmente partes congruentes al trabajar con material concreto. (91-96).

CC: Trabajar con fracciones unitarias: un medio, un cuarto. Reconstruir la unidad a partir de las partes (medios y cuartos) con material concreto (89-102).

4.2.1. Resumen de los hallazgos

Como primer resultado de este estudio, en la siguiente Tabla 4.1 se resumen las componentes del conocimiento profesional que ha puesto en juego el profesor en su clase.

Tabla 4.1
Síntesis de conocimiento profesional observado

Episodio/ Conocimiento	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
CEC	√	√	√	√	√
CCC	√	√	√		
CH					
CCEn	√	√	√	√	√
CCEs	√		√		
CC	√	√	√		√

√: Indica el tipo de conocimiento observado

En la Tabla 4.1 observamos que dentro del dominio de Conocimiento del Contenido se destaca el Conocimiento Especializado del Contenido; es decir, se pone en juego el conocimiento matemático que permite al profesor participar en las tareas de enseñanza, representar ideas matemáticas, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, etc. En cambio, el Conocimiento Común del Contenido, el conocimiento adquirido a lo largo de la vida, es elemental y se observa su crecimiento durante tres episodios de la clase. No hemos apreciado indicios de Conocimiento en el Horizonte Matemático.

En tanto que en el dominio de Conocimiento Pedagógico del Contenido se manifiesta el Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza a lo largo de los cinco episodios que conforman la clase, en los cuales el profesor integra el contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de las fracciones, se presentan tareas de enseñanza a los alumnos y se utilizan materiales y recursos didácticos. El Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes se observa durante dos episodios, atendiéndose a respuestas particulares de los alumnos. Finalmente, el Conocimiento del Contenido y del Currículo se observa durante cuatro episodios, se hace alusión a los contenidos establecidos en el currículo escolar de referencia y algunas orientaciones curriculares para la enseñanza del contenido abordado.

4.3. Análisis de la Calidad Matemática de la Enseñanza

Tal como hemos indicado, vamos a valorar la Calidad Matemática de la Instrucción empleando el instrumento que diseñaron Hill, Ball et al., (2008). Para presentar el resultado de nuestro análisis, consideramos para cada categoría en particular las unidades de análisis menores, los subepisodios, y luego hacemos una valoración general por episodio. En la Tabla 4.2, se resumen las apreciaciones obtenidas de cada episodio y subepisodio. Cada código, como se indicó en el capítulo anterior, hace referencia a las categorías para valorar la Calidad Matemática de la Instrucción; se trata de seis categorías generales, al tiempo que algunas de ellas poseen subcategorías. Hay que recordar que la primera categoría (A), formato del segmento, es descriptiva (no valorativa) y permite distinguir el tipo de actuación del profesor. Se codifica 0 si el trabajo lo realizan principalmente los alumnos, trabajando en problemas o tareas matemáticas en grupos o individualmente, teniendo una participación menor el profesor dado a que puede estar pasando asistencia, etc. Mientras que se codifica 1 si es el profesor el que lleva el peso de la actuación. La segunda categoría (B), el trabajo en clase, se codifica 0 si el trabajo no está conectado a las matemáticas, y 1 si lo está. A las restantes categorías se les asigna una categoría de orden natural: baja, media y alta; en este caso se codifica 0 a baja, 1 a media y 2 a alta, según corresponda a los descriptores de cada categoría. Debemos destacar que la categoría que hace referencia a los errores en el lenguaje (E), es valorada de manera inversa a las demás, pues el 0 identifican aspectos de la categoría de manera positiva, por ejemplo, el hecho de no presentar errores. De este modo, el 2 indicaría los aspectos contrarios: se presentan errores (ver anexo B).

Tabla 4.2

Categorías para valorar la Calidad Matemática de la Instrucción

Categorías	A	B	Riqueza de las Matemáticas						Respuestas a estudiantes			Errores en el Lenguaje				Participación de los estudiantes				Total
Episodios			C1	C2	C3	C4	C5	CG	D1	D2	DG	E1	E2	E3	EG	F1	F2	F3	FG	C+D-E+F
1.1	1	0	0	0	0	0	1		0	0		0	0	0		0	0	0		1
1.2	1	1	0	0	0	0	0		0	0		0	0	0		0	0	0		0
1.3	1	1	1	1	0	0	1	**2**	0	1	**1**	0	0	0	**0**	1	1	1	**1**	7
1.4	1	1	1	1	0	0	1		1	2		0	1	0		1	1	0		8
1.5	1	1	2	1	0	1	2		0	2		0	0	0		1	0	1		10
2.1	1	1	0	0	0	0	0		0	0		0	0	0		0	0	0		0
2.2	1	1	0	1	0	0	0	**1**	0	1	**1**	0	0	0	**0**	1	0	1	**1**	4
2.3	1	1	0	0	0	0	0		0	1		0	0	0		1	0	1		3
3.1	1	1	0	1	1	0	1		0	0		0	0	0		0	0	0		3
3.2	0	1	0	0	0	0	1		0	1		0	0	0		1	0	0		3
3.3	0	1	1	1	0	0	1	**1**	0	0	**1**	0	0	0	**0**	0	0	0	**1**	3
3.4	0	1	1	0	0	0	1		2	1		0	0	0		1	0	1		7
3.5	0	1	0	1	0	0	2		0	1		0	0	0		1	0	1		6
4.1	1	1	1	1	1	0	0	**1**	0	1	**0**	2	1	1	**1**	1	1	2	**1**	4
4.2	1	1	1	1	1	0	2		1	1		0	0	0		1	0	1		9
5.1	0	1	0	0	0	0	0		0	0		0	0	0		0	0	0		0
5.2	0	1	0	0	0	0	1		0	0		0	0	0		0	0	0		1
5.3	1	1	0	1	1	0	0	**1**	0	1	**1**	0	0	0	**0**	1	0	1	**1**	5
5.4	0	1	0	0	0	0	1		0	0		0	0	0		1	0	0		2
5.5	1	1	0	1	0	1	2		0	1		0	0	0		1	0	1		7
5.6	0	0	0	0	0	0	0		0	0		0	0	0		0	0	0		0
Total 0	8	2	14	10	17	19	8	0	18	9	1	20	19	20	4	8	18	11	0	
Total 1	13	19	6	11	4	2	9	4	2	10	4	0	2	1	1	13	3	9	5	
Total 2			1	0	0	0	4	1	1	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	

A continuación hacemos una descripción sobre cada episodio de acuerdo a las apreciaciones obtenidas, y simultáneamente una valoración general por episodio. Posteriormente, se realiza una síntesis de las valoraciones de acuerdo a los totales obtenidos en la Tabla 4.2, que hace referencia a las frecuencias de 0, 1 ó 2.

Episodio [1]:

En este episodio de la clase se presenta una instrucción activa, se enuncia una actividad al grupo curso y de ella se genera la discusión, estableciéndose una participación activa por parte de los alumnos.

El trabajo en clase está conectado a las matemáticas, dado que el profesor enuncia la actividad (unidad 6), con la intención de que los alumnos resuelvan un problema de reparto que requiere pasar de la división entera a la división racional, donde la cantidad sobrante a repartir es menor que el número de partes. La situación involucra el significado de fracción como cociente:

6 P: Le voy a pasar a María 5 papeles lustres y ella tiene que repartir entre sus dos compañeras en partes iguales

C. Riqueza de las matemáticas

Tal como se ha calificado en CG, hemos considerado una alta riqueza de las matemáticas (2). Dado a que no aparecen errores matemáticos (producciones incorrectas), se permite a los alumnos la oportunidad de aprender más allá de la memorización de reglas y procedimientos estándar y se focaliza en el significado, estableciendo relación entre la fracción y el resultado de una división que da lugar a un fraccionamiento.

En la Tabla 4.2, vemos que esta riqueza está basada en dos aspectos, la riqueza en general (categoría C1) y en el lenguaje matemático (categoría C5). Analizando parcialmente las subcategorías, apreciamos que sólo en los subepisodios [1.3] y [1.4] se presentan explicaciones por parte del profesor y de los alumnos (C2), que pertenecen a la tarea específica.

22 P: Ahí tiene cada niña, que recibió dos papeles enteros
23 P: ¿Ya, y qué se tuvo que hacer con el otro papel para que cada niña recibiera lo mismo?
24 As: Partirlos por la mitad
25 P: Partirlo por la mitad, están todos de acuerdo

Se propone un reparto, en el que no apreciamos el estímulo o la manifestación de diversas formas de resolución de la tarea (C3), lo que nos hace pensar en que se estimula un método único; repartir dos papeles a cada niño y la unidad sobrante partirla en dos. Sólo en el subepisodio [1.5] se atiende a la generalización (C4), a partir del examen de un caso en particular (un medio) para establecer una declaración general.

32 P: Un medio es una fracción es un número fraccionario

En relación al lenguaje matemático (C5), el profesor usa un lenguaje matemático como medio de transmisión del contenido. La densidad del lenguaje matemático es media durante el episodio.

D. Respuestas a los estudiantes

En general el episodio [1] presenta un trabajo con los estudiantes y las matemáticas medio, ya que hay pocas ocasiones de realizar la corrección, lo que hace una combinación de características altas y bajas. Se podría calificar de alto si atendiéramos a los dos últimos subepisodios [1.4] y [1.5], en los que el profesor muestra un fuerte y significativo uso de las ideas de los estudiantes, potenciando las respuestas de los alumnos o aclarándolas cuando son erróneas.

Respecto al trabajo de los estudiantes y las matemáticas, se producen pocas interacciones sobres malos entendidos y dificultades de los estudiantes con el contenido abordado. En el caso siguiente (unidad 7-9), el profesor prefiere dejar que el alumno actúe por si mismo, sin corregir.

7	*A:*	*No se puede*
8	*As:*	*Sííí*
9	*P:*	*SHuuu, calladito, a ver qué va a hacer ella*

En las unidades 24-27 las explicaciones que ofrece el profesor son breves, aunque en la unidad 27 la explicación es más importante, ya que está declarando a qué se llamará fracción, haciendo referencia a la fracción como parte de un todo.

24	*As:*	*Partirlos por la mitad*
25	*P:*	*Partirlo por la mitad, están todos de acuerdo*
26	*As:*	*Sííí*
27	*P:*	*Cada trozo de papelito que recibió cada niña se llama fracción de papel, le vamos a llamar*

Sobre las respuestas a las producciones matemáticas de los estudiantes (D2), es decir, preguntas, solicitudes, explicaciones, métodos de resolución, etc., que contienen ideas matemáticas importantes, en el subepisodio [1.3] hay evidencias de que el profesor comprende el pensamiento del estudiante, pero decide no utilizarlo en ese momento.

8	*As:*	*Sííí*
9	*P:*	*SHuuu, calladito, a ver qué va a hacer ella*

En [1.4] y [1.5], las producciones de los estudiantes están presentes. El profesor "escucha" lo que los estudiantes están diciendo, matemáticamente, y responde de forma apropiada durante la instrucción, tal y como se detalla en las siguientes unidades:

17 A: Dos, dos
18 As: No, dos y medio (a coro los alumnos)
19 P: A ver papeles enterossss
20 A: (una alumna) Dos enteros y dos medios

E. Errores en el lenguaje

De modo general, se obtiene que en gran parte del episodio no se producen errores e imprecisiones en el proceso de enseñanza, por lo que podemos calificar esta categoría de baja (0) para este episodio.

Respecto al lenguaje matemático (E1), específicamente, se ha obtenido que el episodio está limpio de los principales errores, tanto de intervenciones orales como en el trabajo escrito. De manera más específica, sobre las imprecisiones de lenguaje (E2) (términos matemáticos) o notación (símbolos), la enseñanza está limpia de errores de lenguaje matemático, de lenguaje general y de notación. En relación a la falta de claridad en el proceso de enseñanza (E3), por parte del profesor, se obtiene que la presentación del contenido matemático y de las tareas se lleva a cabo en forma clara y sin ambigüedades. Hay un momento, en el subepisodio [1.4], donde la pregunta de "¿Cuántos papeles enteros recibió cada niño?", no la responden bien algunos alumnos, que señalan dos y medio. Esto puede deberse a que la unidad de referencia (papel entero) no ha sido asimilado como referente.

16 P: A ver, ¿cuántos papeles enteros recibió cada niño?
17 A: Dos, dos
18 As: No, dos y medio (a coro los alumnos)
19 P: A ver papeles enterossss

F. Participación de los estudiantes

En general hemos considerado que la participación de los estudiantes en dar sentido y razonar es media (1). Se inicia la participación de los estudiantes cuando se les deja actuar, es decir, en los tres últimos subepisodios, en los que hay participación por parte de los alumnos, involucrándose con el contenido durante el tiempo de trabajo. Ellos contribuyen sustancialmente a la creación de las ideas matemáticas implícitas en las actividades planteadas. En relación a la participación de los estudiantes en las tareas matemáticas ejecutadas (F1), tras los primeros subepisodios [1.1] y [1.2], no hay explicaciones ni preguntas de parte de los alumnos. En los subepisodios restantes, sus intervenciones son breves, pertenecen a la tarea específica y son fundamentalmente iniciadas por el profesor, como se muestra a continuación:

10 P: *María ¿qué puede hacer usted para repartirlo?*
11 As: *Dobla a la mitad (dos alumnos gritan)*

16 P: *A ver, ¿cuántos papeles enteros recibió cada niño?*
17 A: *Dos, dos*
18 As: *No, dos y medio (a coro los alumnos)*

28 P: *Pregunta: ¿qué ¿fracción papel recibió cada niño?*
29 As: *Mitad, mitad…*

Respecto al cuestionamiento y razonamiento de los estudiantes (F2), se observa sólo en los subepisodios [1.3] y [1.4] que los estudiantes responden y corrigen afirmaciones o ideas matemáticas propuestas por otros estudiantes, como se evidencia en las unidades siguientes:

7 A: *No se puede*
8 As: *Síííí*

17 A: *Dos, dos*
18 As *No, dos y medio (a coro los alumnos)*

Sobre la activación cognitiva de las tareas enunciadas (F3), en tres de los subepisodios se observa que los estudiantes se involucran con el contenido en un nivel cognitivo bajo, dado que la unidad se introduce con la participación principal del profesor, lo que implica, en este caso, escuchar la presentación del profesor con pocas interacciones por parte de los alumnos. En cambio, en los subepisodios [1.3] y [1.5], los estudiantes se involucran en el contenido en un nivel medio de activación cognitiva, es decir, responden a las preguntas que el profesor enuncia demostrando relacionar los conceptos previos, trabajados en clases, con los conocimientos en juegos.

10 P: *María, ¿qué puede hacer usted para repartirlo?*
11 As: *Dobla a la mitad (dos alumnos gritan)*

28 P: *Pregunta: ¿qué fracción papel recibió cada niño?*
29 As: *Mitad, mitad…*

Episodio [2]:

En este episodio de clases se presenta una instrucción activa (A), el profesor lleva a los alumnos a participar en clases enunciando la siguiente pregunta, que desencadena el momento de acciones:

33 P: *A ver ¿dónde, en qué momento ustedes han escuchado hablar de*

fracciones, un medio, cuándo, en qué circunstancias…en su vida diaria?

La intervención del profesor permite que surjan ideas por parte de los alumnos, enunciándose ejemplos de contextos cotidianos de usos de fracciones donde se comparan cantidades y valores de magnitudes o describen cantidades o valores de magnitudes por medio de otra.

36 P: Bien, cuando dice me da dos y medio kilos de lentejas
41 P: Medio de marisco…bien

El trabajo en clases está conectado a las matemáticas (B), dado que los alumnos practican sobre el contenido relacionando situaciones en contextos cotidianos con las fracciones.

C. Riqueza de las matemáticas

De modo general como se ha establecido en CG, hemos considerado que en el episodio se produce una riqueza matemática media (1), siendo un segmento que ofrece a los alumnos una cierta oportunidad de reconocer situaciones de uso de las fracciones en un contexto cotidiano. No se profundiza en aspectos matemáticos, pero se relacionan situaciones vivenciales con el contenido estudiado.

Analizando parcialmente las subcategorías, se aprecia que las explicaciones y formulaciones explicitas sólo son enunciadas por algunos alumnos y aseveradas por el profesor, sin discutirlas. En relación a las explicaciones matemáticas (C2), en general sólo se da sentido a los comentarios de los alumnos, sin apreciarse explicaciones de los porqués de los hechos. El episodio en general no implica resolver problemas, por lo cual no tiene sentido el uso de múltiples procedimientos o métodos de resolución de problemas (C3), como tampoco se desarrollan generalizaciones matemáticas (C4). Referente al lenguaje matemático implicado en el episodio, no se tiene detalle, dado que el profesor interactúa en periodos cortos durante el episodio, y en éstos sólo se refuerza las formulaciones de los estudiantes.

D. Respuestas a los estudiantes

En general, en el episodio [2] se generan interacciones entre el profesor y los alumnos, aunque no se presenta un trabajo de carácter matemáticamente fuerte. En relación a las interacciones se evidencia un significativo uso de las ideas de los estudiantes, por lo cual hemos valorado el episodio medio (1), como indica DG.

De manera particular, respecto al trabajo con los estudiantes y las matemáticas (D1), en el episodio no se observan dificultades con el contenido, por lo que no se produce ninguna corrección a los alumnos por parte del profesor. Respecto a las producciones de los estudiantes (D2), es decir explicaciones, preguntas, etc., en los subepisodios [2.1] y [2.3] se observa que el profesor va dirigiendo el proceso de enseñanza a partir de las ideas (respuestas) de los estudiantes, sin que ello conlleve un uso fuerte de las ideas matemáticas de los estudiantes.

E. Errores en el lenguaje

De manera general, se obtiene que el episodio está libre de errores e imprecisiones por lo que valoramos baja (0), como se indica en EG. De manera particular, en relación a los errores (E1) e imprecisiones (E2) en el lenguaje, en el episodio no se detectan errores matemáticos o descuidos matemáticos importantes, como definiciones incorrectas, resolución de problemas de manera incorrecta, etc. Por lo que se obtiene que la enseñanza que comprende al tiempo del episodio está exenta de errores. En cuanto a la categoría referente a la claridad (E3), se observa que las tareas y las preguntas que dirigen el proceso de enseñanza son enunciadas de forma clara y sin ambigüedades.

F. Participación de los estudiantes

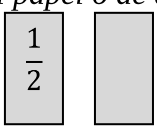
De acuerdo a una valoración general del episodio, respecto a la categoría de referencia, se observa que los alumnos se involucran con el contenido y contribuyen a dar sentido a las ideas que surgen en el proceso de instrucción. Aunque el segmento no implica tareas de alta complejidad conceptual, los alumnos detallan variadas situaciones, por lo que se ha valorado el episodio respecto a la participación de los estudiantes como media (1), según se indica en FG. Atendiendo a la apreciación particular del episodio, referente a la participación de los estudiantes en dar sentido y razonar (F1), se aprecia que los estudiantes participan activamente, ofrecen explicación y formulan ejemplos, aunque las acciones son breves y no llevan a la generalización de las principales ideas matemáticas del contenido que se está considerando. En relación a la categoría F2, podemos destacar que los estudiantes presentan ejemplos cotidianos, pero no se generan cuestionamientos. Ningún estudiante, en el episodio correspondiente, se cuestiona sobre el contenido más allá de lo abordado, por lo que se ha valorado como baja (0), como se indica en F2. Respecto a la generalización (F3) que puede derivarse de las tareas planteadas, se observa que los estudiantes se involucran con el contenido (explican y justifican) pero no se producen generalizaciones.

Episodio [3]:

En este episodio el formato principal de trabajo de los estudiantes (A) es individual, salvo en el primer subepisodio [3.1], donde se presenta la actividad a trabajar. Mientras los estudiantes trabajan en la actividad planteada en clases, el profesor circula entre los estudiantes comprobando el progreso.

En el episodio [3], el trabajo en clases está conectado a las matemáticas (B). Durante el episodio, los estudiantes desarrollan una actividad, a través del uso de material concreto, que les permite trabajar las fracciones como relación parte-todo. Conjuntamente, trabajan tres tipos de representación de las fracciones: material concreta (como una parte del todo), literal (verbal y escrita) y simbólica, como se detalla a continuación:

55 P: Bien, vamos a colocar, una vez que usted pegó los dos papeles, vamos a poner el nombre de la fracción escrito por número $\frac{1}{2}$, lo pueden poner dentro del papel o de abajito.



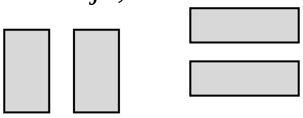
56 P: Una vez que usted anotó, vamos a notar debajito
Cada parte se llama un medio

C. Riqueza de las matemáticas

Como se aprecia en CG, la categoría respecto a la riqueza de las matemáticas ha sido valorada como media (1), dado a que el episodio ofrece a los alumnos una cierta oportunidad de aprender más allá de la memorización de reglas o procedimientos estándar. A partir del trabajo con material concreto y de distintas representaciones se da significado a la fracción como relación parte-todo. De manera específica respecto a C1, los dos primeros subepisodios y el último han sido valorado baja (0). En el caso de los dos primeros se debe a que son de introducción de la actividad y no se observa un trabajo mayor por parte de los alumnos. Los subepisodios [3.3] y [3.4] se han valorado media (1), como se presenta en C1, porque se observan vínculos entre diferentes representaciones, relacionándose estas con las ideas matemáticas subyacentes.

La actuación del profesor se concentra en describir los pasos de un procedimiento, las explicaciones matemáticas (C2) que se generan en el episodio son pocas por su parte del profesor. No hay explicaciones en el episodio por parte de los alumnos. Destacamos la explicación siguiente:

51 P: (Profesor lee lo escrito y explica) pueden pegar los papeles para el lado o hacia abajo, de este modo o en forma vertical u horizontal.



En este momento el profesor propone modos de pegar el papel para cubrir el entero, hace énfasis en que se puede pegar el papel de forma vertical u horizontal para cubrir el entero. Esto es válido dado que el papel con el que trabajan los alumnos es un cuadrado; sin embargo, esto no es generalizable a cualquier papel con otras dimensiones.

En el episodio [3.1], el profesor subraya dos maneras de pegar el papel, de manera vertical u horizontal, con lo que alude a múltiples procedimientos o métodos de resolución (C3) de un problema, pero, como hemos comentado, es válido tan sólo en este caso particular.

En el episodio se trabaja con la noción de fracción como relación parte-todo y específicamente con la fracción propia un medio, por lo que no se desarrollan generalizaciones matemáticas (C4).

El profesor usa lenguaje matemático (C5) como medio de transmisión del contenido, de manera clara y sin confundir a los estudiantes. Especialmente en el subepisodio [3.5] fomenta que los estudiantes usen los términos exactos del lenguaje matemático.

65 A: Con dos medios se forma el entero
66 P: A ver cómo responde
67 A: Formé el entero con dos medios
68 P: Formé el entero con dos medios (escribe el profesor en la pizarra)

D. Respuestas a los estudiantes

La estimación global de las interacciones entre el profesor y los estudiantes en torno al contenido, ha sido valorada como media (1), según se indica en CG. Podemos destacar que el subepisodio más fuerte y significativo es el [3.4], donde el trabajo con los estudiantes es más amplio. Se establece lo que se entenderá por unidad, se construye la unidad, estando implícito el concepto de superficie.

De modo particular se observa en la categoría (D1) del trabajo con estudiantes y las matemáticas, que no aparecen dificultades con el contenido, ni se evidencian errores matemáticos. Específicamente en el episodio [3.4] el profesor ofrece explicaciones procedimentales amplias de cómo resolver la tarea.

61 P: *Entonces el papel que elegimos entero, que se llama entero, lo vamos a pegar en el cuaderno. Ahora, a continuación, vamos a pegar cada parte de papel lustre que ustedes cortaron, sobre el entero (profesor lo muestra, con un cuaderno de un alumno) cubriendo toda la superficie. Y le vamos a poner la fracción que teníamos hace rato, o sea, un medio a cada lado, bien adentro.*

En los subepisodios donde se producen respuestas por parte del profesor a las producciones (preguntas, respuestas matemáticas) de los estudiantes, se observa que el profesor responde a los alumnos de manera correcta, afirmando las respuestas, corrigiendo el modo de expresar una idea, sin profundizar demasiado en aspectos matemáticos, tal como se manifiesta en las unidades siguientes:

53 As: *Medios (varios alumnos)*
54 P: *Bien, un medio. Un medio y un medio (mostrando los papeles).*

58 As: *Hay que cortarlo entonces al medio*
59 P: *Sí, muy bien, exacto.*

63 As: *Con dosssss*
64 P: *Bien, respuesta entonces, con oraciones*
65 A: *Con dos medios se forma el entero*
66 P: *A ver cómo responde*
67 A: *Formé el entero con dos medios*

E. Errores en el lenguaje

De manera general se obtiene que en el episodio no se producen errores como resolución errónea de problemas, definiciones incorrectas, etc. El proceso de instrucción está limpio de errores y no se presentan ambigüedades, lo que admite una valoración baja (0), según se indica en EG.

Específicamente, en relación a los errores (E1) e imprecisiones (E2) en lenguaje y notación, se aprecia que la enseñanza que comprende el episodio está limpia de errores, tanto en intervenciones orales como en el trabajo escrito manifestado por el profesor. El profesor presenta el contenido matemático y pone en marcha las tareas de forma clara y sin ambigüedades (E3).

F. Participación de los estudiantes

La participación de los estudiantes, en general, se ha valorado como media (1) en el episodio, tal como se indica en la Tabla 4.2, en FG. Atendiendo de manera detallada a la categoría, se obtiene que, en relación a la participación de los estudiantes en las tareas matemáticas propuestas (F1) y el grado en que ellos contribuyen en la resolución de las tareas, en los subepisodios [3.2], [3.4] y [3.5] los estudiantes participan en la resolución de las tareas, y las explicaciones dadas a preguntas enunciadas por el profesor son breves, sin mayor interacción entre los alumnos. En los subepisodios restantes no se producen interacciones entre los alumnos en relación al contenido abordado.

53 As: Medios (varios alumnos)

58 As: Hay que cortarlo entonces al medio

63 As: Con dosssss
65 A: Con dos medios se forma el entero

Los estudiantes no ofrecen contraejemplos como respuesta a afirmaciones o ideas matemáticas generadas en la clase, no hacen preguntas sobre los porqués de las formulaciones (F2). En los subepisodios [3.4] y [3.5] se establecen relaciones entre las representaciones y conceptos matemáticos implicados (F3), siendo tarea implicada de complejidad conceptual. En la unidad siguiente se relaciona la representación concreta con la verbal:

62 P: Bien, ya pegaron las fracciones sobre el entero. Ahora vamos a responder a la pregunta ¿con cuántos medios formaste el entero?

En cambio, en los restantes subepisodios los alumnos escuchan la presentación de las actividades por parte del profesor, recortan, aplican procedimientos bien definidos.

Episodio [4]:

En este episodio de clases se realiza una instrucción activa. Se continúa con la actividad del episodio anterior, presentándose una nueva forma matemática de contemplar la situación en desarrollo, lo que implica que el trabajo en clases está conectado a las matemáticas. Específicamente, el episodio [4.1] se centra en el contenido matemático durante la mayoría del segmento.

69 P: Podemos hacerlo esto con números. A ver, voy a sumar esto, fíjense bien.
Tengo ($\frac{1}{2}$+$\frac{1}{2}$)
R: Formé el entero con dos medios (+)=---

El profesor explica a los alumnos que también se puede trabajar con números para saber cuántos medios se necesitan para obtener el entero. Para ello, hace referencia a la suma de fracciones de igual denominador, que puede introducirse aludiendo a la suma de unidades diferentes: 1 vez ½ + 1 vez ½ = 2 veces ½, o bien mediante el algoritmo de la suma. En el episodio no hemos podido apreciar por cuál de los métodos se inclina el profesor.

C. Riqueza de las matemáticas

Esta categoría permite tener una visión global por episodio sobre la profundidad de las matemáticas ofrecida a los estudiantes. La valoración general asignada a la categoría es media (1), ya que permite al alumno la oportunidad de aprender más allá de la memorización de reglas y procedimientos estándar. Analizando parcialmente las subcategorías, respecto a la riqueza de las matemáticas (C1) se observan en el episodio actividades que permiten a los alumnos establecer conexiones entre las distintas representaciones y el concepto matemático abordado, como se evidencia en la unidad siguiente:

69 *P:* *Podemos hacerlo esto con números. A ver, voy a sumar esto, fíjense bien.*
Tengo $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})$
R: Formé el entero con dos medios (+)=---

La actividad inicialmente fue desarrollada por los alumnos con material concreto, luego el profesor enseña a los alumnos a resolver el problema de manera numérica, pasando desde una representación concreta a una representación simbólica y, a su vez, a operar con los símbolos. En cuanto a las explicaciones (C2) ofrecidas por el profesor o los estudiantes durante el episodio, se observa que contienen elementos de "por qué" pero no se explican con mayor detalle, como se evidencia en la unidad siguiente:

75 *P:* *Sumemos 1 +1*

Por parte de los estudiantes, se limitan a responder a las preguntas del profesor sin profundizar en ellas, por lo que no se indaga en las respuestas para estudiar, por ejemplo, por qué es verdadera la respuesta o por qué funciona un procedimiento.

72 *A:* *Me da cuatro*
73 *A:* *Es igual al entero*

Como señalamos, en el episodio [4] se continúa con la actividad iniciada en el episodio anterior, pero esta vez se presenta otro método de resolución al problema; a través de la adición de fracciones se obtiene la unidad. Así se presenta otro procedimiento de resolución al problema (C3). No se desarrollan a lo largo del segmento generalizaciones matemáticas (C4). Respecto al lenguaje matemático (C5), en el subepisodio [4,2] se tiene una apreciación alta (2), dado que el profesor utiliza con fluidez el lenguaje matemático, explica terminologías y recuerda a los estudiantes el significado de los términos usados.

85 P: *Dos medios, eso se escribe así. Ahora ustedes hicieron en su cuaderno un medio más un medio, equivale a*
88 P: *Muy bien y eso se escribe así, 1 y se escribe así, el número grandecito, para indicar cuál es el entero. Estamos aplicando suma de fracciones aquí.*

D. Respuestas a los estudiantes

Respecto a la categoría descrita, en el episodio es valorada baja (0), como se indica en la Tabla 4.2, en DG. Esta valoración se obtiene de la apreciación de las dos subcategorías que la definen: El trabajo con los estudiantes y las matemáticas (D1) y Respuestas a las producciones matemáticas de los estudiantes (D2).

En relación a D1, en el primer subepisodio no se corrige la respuesta de un alumno, como se detalla a continuación:

72 A: *Me da cuatro*
73 A: *Es igual al entero*

El alumno suma los denominadores en una adición de fracciones con igual denominador, sin que el profesor considere ese error matemático ni dé la oportunidad de discutir al respecto. En lo que resta del episodio las explicaciones emitidas por el profesor son breves y poco cuidadosas, por ejemplo:

75 P *Sumemos 1 +1*

Aquí se alude a las fracciones por medio de sus componentes, dos números naturales. En relación a las respuestas del profesor a las producciones de los estudiantes (explicaciones, generalizaciones, cuestionamientos, etc.), él hace caso omiso a las respuestas, decide no responder al alumno en ese momento, específicamente cuando un alumno suma los denominadores en la adición de fracciones de igual denominador (72).

E. Errores en el lenguaje

En general, la valoración para el episodio respecto a la categoría de errores e imprecisiones en el proceso de enseñanza es media (1), en relación a las valoraciones particulares por cada subcategorías, como detallamos a continuación:

En el primer subepisodio, un alumno da una respuesta errónea al problema:

2 A: *Cuatro, un cuarto (señala cuando el profesor va escribiendo en la pizarra)*

El error no se corrige durante la clase (E1). Por otro lado, se produce una imprecisión y abuso de lenguaje (E2) cuando se trabaja con las fracciones como un par de números naturales (75). Respecto a la claridad (E3), al iniciarse el episodio la tarea se pone en marcha de forma poco clara.

F. Participación de los estudiantes

De modo general la valoración para la participación de los estudiantes es media (1). Los alumnos ofrecen explicaciones breves, sin explicar la razón de un procedimiento ni profundizar en las respuestas dadas (F1). El profesor tampoco toma en consideración estas respuestas (F2). Referente a la activación cognitiva de las tareas enunciadas (F3), se observa en el primer episodio que los estudiantes se involucran con el contenido en un nivel alto de activación cognitiva, dado que pasan de la representación concreta, a la representación numérica y luego realizan una operación matemática; estableciendo conexiones entre las diferentes representaciones.

Episodio [5]:

Durante gran parte del tiempo en que transcurre el episodio, los estudiantes trabajan de manera individual en la resolución de las tareas matemáticas. El profesor constantemente circula por el aula comprobando el progreso de los alumnos en la resolución de las tareas.

En el episodio se observa un trabajo conectado a las matemáticas (B). Por ejemplo, los alumnos, a partir del trabajo concreto, identifican cuántos medios tiene el entero y cuántos cuartos tiene el mismo entero, como se detalla en las unidades siguientes:

97	*P:*	*A ver, para ir terminando por hoy. A ver, Juan, una pregunta:¿Cuántos medios tiene el entero?*
98	*A:*	*Dos*
99	*P:*	*Dos medios, bien*
100	*P:*	*¿Cuántos cuartos tiene el entero?*

C. Riqueza de las matemáticas

El episodio [5], respecto a la riqueza de las matemáticas, se ha valoradora media (1), como se detalla en la Tabla 4.2, en CG. Analizando parcialmente las subcategorías que conforman la categoría descrita, apreciamos que el subepisodio más rico matemáticamente (C1) es el [5.5], donde se hace una síntesis de lo trabajado y los estudiantes, en general, van respondiendo de manera correcta. En relación a las explicaciones matemáticas (C2), en gran parte del episodio se enuncian respuestas concisas, sin ofrecer explicaciones matemáticas que incluyan los porqués de los hechos, como se observa en las siguientes unidades:

99 P: Dos medios, bien
100 P: ¿Cuántos cuartos tiene el entero?
101 As: Cuatro

No se observan diferentes aproximaciones matemáticas para resolver las situaciones planteadas (C3). En cuanto a las generalizaciones matemáticas (C4), en el subepisodio [5.5] se examinan dos casos particulares, aunque no se llega a establecer una declaración general. En los subepisodios restantes no se desarrollan generalizaciones matemáticas.

98 A: Dos
99 P: Dos medios bien
100 P: ¿Cuántos cuartos tiene el entero?
101 As: Cuatro

El profesor usa lenguaje matemático (C5) como medio de transmisión del contenido, explicita terminologías, recuerda a los estudiantes cómo representar una fracción, como se observa en las unidades siguientes:

92 P: Y recuerde hay que escribir el nombre igual que la vez pasada, un número, el nombre de fracción.
93 A: Un uno, una raya y un cuatro

D. Respuestas a los estudiantes

En general, el episodio [5] presenta un trabajo con los estudiantes y las matemáticas que se ha valorado como medio (1), dado a que se producen pocas interacciones sustantivas entre el profesor y los estudiantes. Las explicaciones que se ofrecen son breves., sin que se produzcan malentendidos o dificultades del estudiante con el contenido que den paso a correcciones o explicaciones más amplias.

E. Errores en el lenguaje

En el episodio, en general, no se producen errores e imprecisiones importantes en el proceso de enseñanza; por ende se ha valorado como baja (0) respecto a la categoría de errores en el lenguaje, como se indica en EG. La enseñanza en general está limpia de los principales errores, tanto en las intervenciones orales como en el trabajo escrito.

Referente a la claridad (E3) con que se pone en marcha el proceso de enseñanza, el profesor presenta el contenido matemático y pone en marcha las tareas de forma clara y sin ambigüedades.

F. Participación de los estudiantes

En general hemos considerado que la participación de los estudiantes en dar sentido y razonar es media (1). Los momentos en que se produce una participación (F1) más activa por parte de los estudiantes son en los subepisodios [5.3] y [5.5], al responder a las preguntas formuladas por el profesor. Aunque las explicaciones ofrecidas son breves y corresponden a respuestas del problema o a la tarea específica, como se destaca a continuación.

93	*A:*	*Un uno, una raya y un cuatro*
95	*A:*	*Profesor, yo no sé partirlo en cuatro pedacitos.*
96	*A:*	*Ya, cómo se llama cada parte* [alumnos están trabajando en pegar profesor y escribe]. *Cada parte se llama <u>un cuarto</u>*
98	*A:*	*Dos*
99	*P:*	*Dos medios, bien*
100	*P:*	*¿Cuántos cuartos tiene el entero?*
101	*As:*	*Cuatro*

En el proceso de enseñanza no se ofrecen mayores explicaciones (F2) para una idea, tampoco se enuncian preguntas que puedan llevar a debatir algunos aspectos referentes al contenido. En los subepisodio [5.3] y [5.5], los estudiantes se involucran con el contenido. Por ejemplo, en la unidad 93, el alumno identifica y parece manejar la escritura simbólica de la fracción, como se tiene en la unidad siguiente:

93 *A:* *Un uno, una raya y un cuatro*

En los episodios restantes, las tareas se concentran en recortar y pegar, implicando un trabajo de baja complejidad cognitiva (F3).

4.3.1. Resumen de los hallazgos

A continuación presentamos apreciaciones generales respecto a la Calidad Matemática de la Instrucción analizada.

- De un total de 21 segmentos de clase, en 13 de ellos se evidencia una instrucción activa, es decir, el elemento central es el planteamiento de problemas matemáticos o la presentación del material matemático a un grupo de alumnos. Se presenta, por tanto, en más del 60% de los segmentos de clase una instrucción activa, y en menos de un 40% un trabajo de gestión y trabajo en grupos pequeños.

- De un total de 21 segmentos de clase, en 19 de ellos se observa que el trabajo se centra en el contenido matemático durante la mayoría del segmento; es decir, en más del 90% de los segmentos de clase, se está centrado en asuntos matemáticos o en actividades que tienen conexiones claras con el desarrollo del contenido matemático.

- En general, se aprecia una estructura de los episodios bien definida, que comienza con la presentación desencadenante del episodio, le sigue la actuación de los alumnos y las interacciones del profesor, y termina por un proceso breve de institucionalización que lleva a cabo el profesor.

- Por categorías, examinando los números más altos de totales finales obtenidos en la Tabla 4.2, destacamos la ausencia de errores (20, 19, 20, total de 0 en categoría E); luego, el buen lenguaje matemático del profesor, que se evidencia especialmente a partir del episodio [3] (4 puntuaciones 2 en C5).

- Observando la frecuencia de 0 en las categorías C, D y F apreciamos una escasa riqueza matemática, debida especialmente a no prestar atención a las generalizaciones (19 veces 0, en total 0 en subcategoría C4), ni a incitar a resolver problemas por procedimientos múltiples (17 veces 0, en total en subcategoría C3), así como la poca presencia de explicaciones de los porqués de los conceptos matemáticos (14 veces 0, en total en subcategoría C1). También se observa que se producen pocas correcciones por malos entendidos, en la mayoría de los casos por no ponerse de manifiesto, aunque también porque el profesor prefiere no corregir (18 veces 0, en total en subcategoría D1). Hay poca atención al debate entre estudiantes, y una escasa participación de los alumnos en formular preguntas motivadas matemáticamente o en enunciar contraejemplos como respuestas a una afirmación o idea matemática propuesta (18 veces 0, en total en subcategoría F2).

- Para valorar los episodios hemos procedido a efectuar la suma de la Riqueza + Respuestas – Errores + Participación (ver Tabla 4.2, columna total), por cada subepisodio, obteniéndose con ello una medida de la calidad matemática de los subepisodios. Posteriormente hemos obtenido la media de la calidad de los subepisodios logrando con ello una apreciación general sobre la calidad de cada episodio. El episodio más llamativo (con una media más alta) es el [4], tanto por la alta calidad matemática observada, como por no corregirse un error de los alumnos durante la clase y por aparecer algún tipo de imprecisión en el lenguaje, como hemos señalado anteriormente. En este episodio se continúa la actividad del episodio [3], donde se estudia la completación del entero para hacer una formalización mediante la suma de fracciones. Al introducir el elemento formal suma, el profesor puede aludir a la suma en unidades diferentes (1 vez ½ + 1 vez ½ = 2 veces ½), ya que dice "uno más uno". Sin embargo, no todos los alumnos siguen esta operación, produciéndose respuestas que no son atendidas (unidades 72 y 76). El cierre en el episodio [4.2], con calidad alta, está basado en la intervención del profesor, el uso con fluidez del lenguaje matemático, y el fomento del uso de los términos exactos del lenguaje matemático. El episodio [3] le sigue en calidad, con mayor regularidad. En él se aborda la primera parte de la composición del entero a partir de los medios. Resultan especialmente interesantes los dos últimos subepisodios, donde se da una participación más activa por parte de los alumnos, pero siempre basada en la dirección de trabajo del profesor y respuestas comunes de los alumnos.

- El momento más brillante se produce a la mitad del episodio [1], cuando una alumna resuelve la división reparto, mediante un fraccionamiento, haciendo uso además de la representación verbal para explicar el procedimiento de resolución. Su calidad es media, tanto por la riqueza matemática puesta en juego, como por la atención a las respuestas del estudiante.

- En general, la calidad de todos los episodios es media, caracterizada por el vector (1, 1, 0, 1) [Riqueza, Estudiantes, Errores, Participación]. De todos ellos podemos destacar la ausencia de errores matemáticos, pues sólo en el episodio 4 se produce una falta de atención a las respuestas de los estudiantes.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Como indicamos en el capítulo 3, nuestro interés por profundizar en el Conocimiento del Contenido para la Enseñanza de las fracciones, nos llevó a seleccionar el caso de un profesor en ejercicio de Educación General Básica, con el fin de analizar su práctica pedagógica. La toma de datos de una clase impartida por el profesor, su transcripción y posterior codificación a partir de las herramientas presentadas, nos han permitido en el capítulo 4 llegar a una serie de resultados. A continuación exponemos conclusiones relativas al proceso de investigación, a los objetivos de la misma. Finalmente planteamos algunas ideas para continuar la investigación con vistas a la elaboración de una tesis doctoral.

5.1. Conclusiones generales

A partir de las reflexiones realizadas a lo largo de la investigación, y tal como se recogen en esta memoria, llegamos a las siguientes conclusiones de carácter general.

- El Análisis Didáctico se ha manifestado una buena herramienta para filtrar el conocimiento profesional que el profesor ha puesto en juego en su clase. El Análisis Didáctico del concepto de fracción nos ha llevado a hacer una reflexión sobre sus cualidades educativas e instruccionales, gracias a las que hemos podido identificar componentes del conocimiento profesional del profesor.
- Las investigaciones examinadas, en general, y en particular, las del grupo de Ball et al., (2008), emplean cuestionarios o entrevistas con los profesores como instrumento de investigación para detectar los componentes de su conocimiento profesional. En dichos reactivos proponen problemas matemáticos y de enseñanza para obligar al profesor manifestar y reconocer su conocimiento. Pero, al realizarse en contactos en presencia, los investigadores pueden constatar el grado en que el profesor es consciente de esos componentes del conocimiento. Con ello toman en consideración que el conocimiento se observa de la reacción del profesor de manera consciente, posicionándose respecto a opciones, o realizando razonamientos que muestren el grado en que manejan el conocimiento matemático. Nuestra investigación ha utilizado como herramienta la observación de la clase, por lo que nuestro único recurso es interpretar a partir de la acción. Por tanto, sólo podemos decir que el

profesor pone de manifiesto algunos componentes del conocimiento profesional, sin saber si el profesor es consciente de ese conocimiento.

- El trabajo realizado para analizar la Calidad Matemática de la Instrucción ha empleado un sistema de categorías elaborado por Hill, Blunk et al., (2008), sin que por ello podamos decir que nuestro trabajo es una réplica de la ambiciosa y amplia investigación emprendida por estas autoras. Hemos empleado el mayor cuidado en respetar los procedimientos enunciados por las autoras, traduciendo e interpretando lo más fielmente posible su sistema de categorías. Sin embargo, nuestro trabajo es menos ambicioso, de tipo descriptivo y cualitativo, centrándonos en un estudio de caso.

Para resumir los resultados obtenidos en relación a la investigación, en el siguiente punto examinamos el logro que hemos alcanzado de los objetivos de la misma.

5.2. Conclusiones relativas a los objetivos planteados

El trabajo ha sido guiado por un objetivo general que se desglosa en cuatro objetivos específicos. Atenderemos a la evaluación de cada uno de los objetivos.

- El primer objetivo específico planteado pretendía caracterizar el proceso de enseñanza del contenido matemático de las fracciones que desarrolla un profesor en una sesión de clase. Para realizar los análisis del conocimiento puesto en juego por el profesor, así como la calidad matemática de su instrucción, nos hemos valido de un análisis de contenido de la trascripción de la clase. Gracias a ello hemos podido observar que la sesión se compone de 5 episodios, bien definidos, que hemos sintetizado, identificando los momentos desencadenantes y los objetivos, y separado en subepisodios, para percibir mejor los acontecimientos que suceden en cada uno. Gracias a ello hemos podido describir el procedimiento de enseñanza llevado a cabo por el profesor. Por tanto, establecemos que el primer objetivo del estudio fue cumplido.
- El segundo objetivo específico consistía en identificar los componentes del Conocimiento Matemático que pone en juego el profesor en el proceso de enseñanza, empleando el modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza establecido por Ball et al., (2008) y concretando en el Conocimiento Común, el Conocimiento Especializado y Conocimiento de Horizonte Matemático referente a las fracciones. A partir de la caracterización del proceso de enseñanza de una sesión de clase, se identificó el tipo de Conocimiento Matemático que pone en juego un profesor al

enseñar el contenido de las fracciones. Se destacó durante la sesión de clases el Conocimiento Especializado del Contenido; es decir, el profesor usa conocimiento matemático que le permite participar en la tarea de enseñanza, representar ideas matemáticas, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, etc. En cambio, el conocimiento adquirido a lo largo de la vida, Conocimiento Común del Contenido, se manifiesta durante toda la clase y especialmente durante sus tres últimos episodios. Sin embargo no apreciamos indicadores del llamado Conocimiento en el Horizonte Matemático. El procedimiento de investigación planteado, filtrando las acciones del profesor a partir del análisis didáctico del concepto de fracción que surge de los trabajos de Luis Rico (1997a;1997b), y la asociación de los organizadores relativos al análisis conceptual (especialmente la fenomenología y los sistemas de representación) con este conocimiento, nos ha permitido destacar un amplio espectro de este conocimiento matemático para la enseñanza puesto en juego por el profesor, lo cual lleva a establecer que el objetivo fue logrado.

- El tercer objetivo específico consistía en identificar las componentes del Conocimiento Pedagógico de las fracciones que pone en juego el profesor en su enseñanza; concretamente, el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza, el Conocimiento del Contenido y del Estudiante y el Conocimiento del Contenido Curricular. Como se puede apreciar en el capítulo anterior, hemos identificado el tipo de Conocimiento Pedagógico que se pone en juego al enseñar las fracciones, destacando el uso del Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza; es decir, el profesor hace visible la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de las fracciones. Por ejemplo, inicia la clase con una actividad de reparto que requiere pasar de la división entera a la división racional, donde la cantidad sobrante a repartir es menor que el número de partes. La situación involucra el significado de fracción como cociente, y además utiliza materiales y recursos de enseñanza que facilitan la comprensión de las ideas matemáticas. Respecto al Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes se evidencia menos en el proceso descrito, donde se observa que algunos errores y dificultades de los estudiantes no son atendidos por el profesor. Sin embargo, el Conocimiento del Contenido y del Currículo se hace latente en la mayoría de los episodios, en los que se hace alusión a los contenidos establecidos en el currículo escolar chileno, según en nivel de estudio, y se ponen de manifiesto algunas orientaciones curriculares para la enseñanza del contenido tratado. Por tanto, el empleo del análisis didáctico, utilizando el organizador “materiales y recursos”, completándose con los caminos de aprendizaje, dentro del análisis cognitivo, para examinar el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza, se ha mostrado como una herramienta interesante. El organizador “dificultades y errores”, para identificar el Conocimiento del Contenido y del Estudiante se ha mostrado menos útil, pero podemos considerar el tercer objetivo cumplido.

- El cuarto objetivo consistía en valorar la Calidad Matemática de la Enseñanza impartida por un profesor de Educación General Básica. A través de seis categorías para medir la calidad de la enseñanza de las matemáticas descritas por Hill, Blunk y colaboradores (2008), se ha dado paso a valorar el proceso de instrucción del profesor participante en el estudio. Hemos observado que la mayoría de la instrucción es activa, centrada en el planteamiento de problemas matemáticos y de la presentación del material matemático a un grupo de alumnos. Se refuerza cuando se aprecia que el trabajo en clases está conectado a las matemáticas en un amplio porcentaje (más del 90% de los segmentos de clase). Destacamos la ausencia de errores y un buen lenguaje matemático del profesor. Hemos constatado una riqueza matemática media, en la que se presta más atención a presentación del contenido que a promover generalizaciones e incitar a resolver problemas por procedimientos múltiples. El profesor no es propenso a levantar debates entre estudiantes, lo que se acompaña de una escasa participación de los alumnos a la hora de formular preguntas motivadas matemáticamente o enunciar contraejemplos como respuestas a una afirmación o idea matemática propuesta. Estas dimensiones nos han permitido concluir que el compuesto de las dimensiones que caracterizan el rigor y la riqueza de las matemáticas de la clase le dan una valoración media a la calidad matemática de la clase. Con ello podemos decir que el cuarto objetivo fue cumplido.

El objetivo general que orientaba esta investigación era caracterizar el Conocimiento Matemático para la Enseñanza que pone en juego un profesor chileno de Educación General Básica en una sesión de clases al enseñar el concepto de fracción a estudiantes de 4º año de educación básica, así como valorar la Calidad Matemática de la Instrucción. De modo general el objetivo fue concretado.

5.3. Limitaciones y perspectiva para el avance de la investigación

- El estudio está basado en la observación, sin que hayamos atendido a criterios de validez y fiabilidad. Con vistas a trabajos futuros, deberemos plantearnos nuevos procedimientos que nos lleven a mejorar estos aspectos. Por ejemplo, deberemos contrastar las codificaciones realizadas mediante consulta a expertos.
- Tal como hemos comentado, la necesidad de una entrevista al profesor, posterior al análisis, con el propósito de indagar sobre las conductas o actuaciones ejecutadas. Ello nos hubiera permitido analizar el grado en que el profesor es consciente de su conocimiento, conocer si sus intenciones educativas coinciden con las inferidas en nuestro análisis de la clase, y debatir sobre el papel que desempeñan las actividades puestas en juego. La entrevista de estimulación del recuerdo se vería mejorada con la toma de conciencia del conocimiento.

Perspectiva para el avance de la investigación

Entendemos que el trabajo emprendido se presta a continuarlo como trabajo de tesis doctoral, manteniendo los elementos conceptuales principales puestos en juego. A tal fin, consideramos importante llevar a cabo las siguientes ampliaciones:

- Ampliar el Análisis Didáctico en torno a los cuatro tipos de análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación, y así poder barrer más posibilidades para vincular los componentes que caracterizan este análisis con los dominios de conocimiento para la enseñanza, a fin de identificar el conocimiento profesional deseable de los profesores.
- Profundizar en la relación existente entre los componentes del conocimiento profesional del profesor y esos componentes del Análisis Didáctico, dado que esta herramienta ha tenido siempre una finalidad profesionalizadora para el profesor.
- Ampliar y concretar la revisión bibliográfica, ampliando las bases de datos revisadas y los términos empleados para ello.
- Estudiar la forma en que se relacionan el Conocimiento Matemático para la enseñanza y la Calidad Matemática de la Instrucción, comenzando por observar los nuevos caminos de investigación que sigue el grupo de la Universidad de Michigan.

Son, entre otras, actuaciones que nos proponemos abordar como continuación de este trabajo, con la espera de alcanzar la madurez investigadora necesaria y poder realizar la tesis doctoral en el área de Didáctica de la Matemática.

REFERENCIAS

Almendros, A., Castro, E., Cobo, F., Corpas, A., Ibáñez, B., Fernández. E., García, A., González, J., González, E., Gutiérrez, J., Ontiveros, F., Rico, L., Segovia, I., Serrano, M., Sevilla, F., Tortosa, A., Valenzuela, J., (1984). Estudio metodológico del Número fraccionario en el 6º. Nivel de E.G.B. *Epsilon*, *3*,3-24.

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*; 389.

Ball, D. L., Hill, H.C., y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, Fall 2005, 14-22.

Ball, D. L., y Rowan, B. (2004). Introduction: Measuring instruction. *The Elementary School Journal*, *105* (1), 3-10.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, *51*(3), 241-247.

Baumert, J., Kunter.M., Blum.W., Brunner. M., Voss.T., Jordan. A., Klusmann. U., Krauss. S., Neubrand. M. y Tsai. Y. (2010).Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*. *47* (1), 133–180.

Bisquerra, R. (1989). Métodos de investigación educativa. *Guía práctica*.Ediciones CEAC. Barcelona. España.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: "A psychological topology of teachers' professional knowledge". En R. Biehler, R. Scholz, R. SträBer y B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp.73-88). Dordrecht: Kluwer Academic.

Castro, E. y Torralbo, M. (2008). Fracciones en el currículo de la educación primaria En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática de la Educación Primaria* (pp. 285-314). Editorial Síntesis Educación.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. M. Marín, L. Puig, et al., *La Educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: ice - Horsori.

Chile, Ministerio de Educación de Chile (2002). *Marco Curricular de la Educación Básica*.

Chile, Ministerio de Educación de Chile. *Programa de Estudio. Educación Matemática. Cuarto año de Enseñanza Básica*. Vigente a la fecha.

Chile, Ministerio de Educación de Chile. *Programa de Estudio. Educación Matemática. Quinto Año de Enseñanza Básica.* Vigente a la fecha.

Chile, Ministerio de Educación de Chile. *Programa de Estudio. Educación Matemática. Sexto Año de Enseñanza Básica*. Vigente a la fecha.

Chile, Ministerio de Educación de Chile. (2000). *Programa de Estudio. Educación Matemática. Séptimo Año de Enseñanza Básica*. Vigente a la fecha.

Chile, Ministerio de Educación de Chile. *Programa de Estudio. Educación Matemática. Octavo Año de Enseñanza Básica*. Vigente a la fecha.

Chile, Ministerio de Educación de Chile. *Programa de Estudio. Educación Matemática. Primer Año de Enseñanza Media*. Vigente a la fecha.

Chile, Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (2008).*Niveles de Logro 4° Básico para Educación Matemática*. Unidad de Currículum y Evaluación Ministerio de Educación Chile.

Chile, Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (2009).*Resultados Nacionales*. Unidad de Currículum y Evaluación Ministerio de Educación Chile.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática*. *Un estudio de caso*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. España.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). Estudio de casos. En *Métodos de Investigación Educativa* (pp. 163-195). Madrid: Editorial. La Muralla S.A.

Delors, J. (1994). Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI. *La educación encierra un tesoro*. Santillana Ediciones UNESCO.

Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics: A teacher's guide to recent research*. Oxford, Great Britain, England: Schools Council Publications.

Freudenthal, H. (1994). Fracciones. En L. Puig, (Trad.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (pp. 9-69). Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México: E. Sánchez (Ed.).

Gómez, B. (1999). *Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud*. 9as Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (JAEM), 91-95.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Hayman, J. L. (1991). *Investigación y Educación* (3ª Ed.). Paidós Ibérica, Barcelona.

Hill, H. C. (2010). Mathematical Quality of Instruction (MQI) (Manuscrito no publicado). *Learning Mathematics for Teaching*. Universidad de Michigan.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., y Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511.

Hill, H.C., Sleep, L., Lewis, J.M. y Ball, D.L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. In Lester, F.K. (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. 111-155. NCTM Age Publishing.

Hill, H.C., Rowan, B., y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42* (2), 371- 406.

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. En T. E. Kieran (Ed.), *Recent Research on Number earning* (pp.125-149). Columbus, Ohio: ERIC-SMEAC.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundation of rational numbers. En R. Lesh y D. Bradberd (Eds.), *Number and measurement*. Eric/Smeac: Ohio.

Klein, R., y Tirosh, D. (1997). Teachers' pedagogical content knowledge of multiplication and division of rational numbers. In H. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference*, 3, 144-152.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand. M. y Jordan, A. (2008). Pedagogical Content Knowledge and Content Knowledge of Secondary Mathematics Teachers. *Journal of Educational Psychology*, *100* (3), 716-725.

Krippendorff, K. (1990). Determinación de las unidades. En K, Krippendorff (Ed.), *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica* (pp. 81-92). Paidós Comunicación.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 187-219). Pearson Prentice Hall.

Llinares, S., Sánchez, M. y García, M. (1994). Conocimiento de Contenido Pedagógico del Profesor. Tareas y modos de representación para las fracciones. *Revista de Educación*, *304*, 199-225.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1991). The knowledge about unity in fractions tasks of prospective elementary teachers. En F. Funghinetti (Ed) *Proceedings of the XV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Assisi, Italy, pp. 181-189.

Llinares, S y Sánchez, M. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics. Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Moreno, A. y Flores, P. (2000). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Un acercamiento a los números racionales. En Gámez y otros (Eds.) *IX Congreso sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (211-214) "THALES*". U. Cádiz y SAEM THALES.

Park, S. y Oliver, S. (2008) Revisiting the Conceptualization of Pedagogical Content Knowledge (PCK): PCK as a Conceptual Tool to Understand Teachers as Professionals. *Research in Science Education, 38*(3), 261-284.

Pinto, M. y Tall, D. (1996): Student teachers' conceptions of the rational number. *Proceeding XX PME*. Valencia, España.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P. (2005). A formação do professor de Matemática: Passado, presente e futuro. Em *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas. Encontro Internacional em Homenagem a Paulo Abrantes*, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. y Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13*(2), 51-74.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings PME XVIII* (pp. 195-210). Lisboa, Portugal.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Rico, L. (Ed.). (1997a). *Educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. (Ed.). (1997b). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* En Kilpatrick, J., Rico, L., Gómez, P. (Eds.), Educación Matemática. Errores y dificltades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia (pp. 69-108). Bogotá.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J. y Monteiro, R. (2008). Uma perspectiva cognitiva para a análise de uma aula de matemática no 1.º Ciclo: Um exemplo de apresentação de conteúdo tendo como recurso o desenho no quadro. En R. Luengo, B. Alfonso y L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 545-555).

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). Metodología de la investigación cualitativa. En *Proceso y fases de la investigación cualitativa* (pp. 61- 100). Ediciones Aljibe.

Rossouw, L. y Smith, E. (1998). Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Geometry. En Olivier, A. y Newstead, K. (Eds.) *Proceedings of PME22, 4*, 57-64.

Schön, D. (1983). The reflective practitioner: How professionals think in action. Nova York: *Basic Books*, Inc., Publishers.

Segovia, I y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: foundations of the New Reform Harvard *Educational Review, 57*(1), 1-22.

ÍNDICE DE ANEXOS

Los siguientes anexos, están incluidos en el CD que acompaña a este trabajo.