UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

ANÁLISIS DE ERRORES Y DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ALGEBRAICAS POR ALUMNOS DE PRIMER INGRESO EN NIVEL LICENCIATURA.

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

JOSÉ GARCÍA SUÁREZ

GRANADA

2010

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

ANÁLISIS DE ERRORES Y DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS ALGEBRAICAS POR ALUMNOS DE PRIMER INGRESO EN NIVEL LICENCIATURA.

Trabajo Final de Máster presentado por D. José García Suárez para su aprobación por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Los Directores

Dr. D. Isidoro Segovia Alex

Dr. D. Enrique Castro Martínez

GRANADA 2010

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de fin de máster ha sido elaborado bajo la tutela de los doctores Isidoro Segovia Alex y Enrique Castro Martínez, a quienes les agradezco su colaboración durante el proceso de realización de este estudio.

Agradezco al Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara por el otorgamiento de mi beca de estudios.

Agradezco al Dr. Donato Vallín González, Jefe del Dpto. de Ingenierías del Centro Universitario de la Costa Sur, por haberme dado todas las facilidades posibles para la elaboración de este trabajo.

Agradezco a mis compañeros y profesores del Programa de Máster por su apoyo en todo momento.

Agradezco a mi familia por haberme brindado su apoyo, cariño y motivación incondicional y por los cuales ha sido posible la culminación del presente.

Granada, 6 Septiembre del 2010

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

El estudio que aquí se presenta es un Trabajo de Fin de Máster, desarrollado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, bajo la dirección de los doctores Isidoro Segovia Alex y Enrique Castro Martínez.

Se plantea el problema de analizar los errores y dificultades al resolver tareas algebraicas que aparecen en las respuestas de una prueba departamental realizada por alumnos de primer curso a nivel de Licenciatura del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México. En el estudio participan 153 estudiantes de la asignatura de Matemáticas I, del curso académico 2008-B. A estos sujetos se les administró un instrumento con 10 problemas en los cuales están presentes distintas tareas algebraicas como factorización, resolución de ecuaciones lineales y desigualdades. Dichas tareas algebraicas están presentadas de forma simbólica y en formato de ejercicio.

El contenido de este trabajo está organizado en las siguientes capítulos: En el capítulo 1 se plantea y justifica el problema de investigación, en el capítulo 2 se presenta una revisión de la literatura relacionada con los sistemas de representación en matemáticas y las investigaciones acerca de los errores y dificultades, en el capítulo 3 se describe el tipo de investigación y el método, el capítulo 4 incluye los resultados observados tras el análisis de los datos y para finalizar, en el capítulo 5 se presentan las conclusiones, limitaciones y posibles vías para la realización de futuros estudios.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO

El aprendizaje de las matemáticas genera muchos errores y dificultades a los alumnos y éstas son de naturaleza distintas. Algunas tienen su origen en el macrosistema educativo, pero en general, su procedencia se concreta en el microsistema educativo, es decir, alumno, materia, profesor e institución escolar. Las dificultades, por tanto, pueden abordarse desde varias perspectivas según se ponga énfasis en uno y otro elemento como el desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza.

Aceptando que la naturaleza de las dificultades del aprendizaje de las matemáticas es de diversa índole y que se conectan y se refuerzan en redes complejas, éstas pueden ser agrupadas en cinco grandes categorías: las dos primeras asociadas a la propia disciplina como objetos matemáticos y procesos de pensamiento; la tercera ligada a los procesos de enseñanza de las matemáticas; la cuarta en conexión con los procesos cognitivos de los alumnos, y una quinta la relacionada con la falta de una actitud racional hacia las matemáticas (Socas, 1997).

En el caso del álgebra, muchos docentes coinciden en afirmar que la mayoría de los alumnos cometen los mismos errores de forma reiterada, síntoma de las serias dificultades que tienen en su aprendizaje. Estos problemas parecen estar relacionados con una serie de deficiencias en comprensión de conceptos y en la forma de enfocar el álgebra que traen como consecuencia inmediata una forma errónea de enfrentarse con su aprendizaje; en la mayoría de los casos los alumnos memorizan sin comprender las reglas y procedimientos de cálculo y las aplican automáticamente, lo que les lleva a cometer las mismas equivocaciones de manera persistente, además, los errores suelen ser considerados por el docente como falta de estudio o de atención, cuando en realidad indican una fuerte carencia de comprensión.

Ahora bien, si se compara la enseñanza de la aritmética con la del álgebra, esto implica indudablemente un cambio metodológico al pasar del cálculo con números de la aritmética al cálculo literal del álgebra, lo que significa un gran avance en el campo de la abstracción y la generalización.

Se requiere por tanto un especial cuidado didáctico para que quede patente el nexo entre ambas materias, y que el alumno perciba que el simbolismo algebraico es solo una manera de generalizar ciertas propiedades aritméticas.

Asimismo, el rendimiento académico de los alumnos es un indicador de la productividad de un sistema educativo que suministra la data fundamental que activa y desata cualquier proceso evaluativo destinado a alcanzar una educación de calidad.

En nuestra experiencia profesional año tras año venimos observando una serie de graves deficiencias en las evaluaciones:

- Bajos puntajes de admisión en las pruebas de acceso a la Universidad.
- Heterogeneidad marcada entre los alumnos provenientes de distintos centros educativos
- Altos índices de reprobación en periodo de evaluación ordinaria de matemáticas y en particular de álgebra.
- Una actitud de rechazo hacia las matemáticas en las carreras que en teoría no tienen mucha relación de esta con el desarrollo del profesional.

Debido a lo anterior, la presente investigación tiene como finalidad abordar el análisis de errores y dificultades en el manejo de sistemas de representación simbólico en la resolución de tareas algebraicas.

1.2 OBJETIVO DEL TRABAJO

El objetivo general del trabajo es la evaluación del rendimiento, errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer curso de diferentes carreras del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara México; las tareas algebraicas están presentadas de forma simbólica y en formato de ejercicio

Este objetivo se concreta en los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar el rendimiento de los alumnos de manera global.

2. Analizar el cuestionario o examen que realizan los alumnos en su fiabilidad, dificultad y asociación de los ítems

3. Analizar el rendimiento de los alumnos desde el punto de vista de las diferentes carreras a las que pertenecen.

4. Describir los errores que cometen los alumnos en la ejecución de las tareas.

II. MARCO TEÓRICO

Como hemos indicado este trabajo se centra en la evaluación del rendimiento, errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer curso de diferentes carreras del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México. Las tareas algebraicas están presentadas de forma simbólica y en formato de ejercicio; así pues, el trabajo tiene relación con el manejo del sistema de representación simbólico algebraico, los errores y las dificultades en la resolución de tareas algebraicas.

Hacemos pues una revisión de investigaciones que tienen relación con el manejo del sistema representación algebraico y errores y dificultades en el manejo de este sistema de representación, después de hacer una revisión teórica de los conceptos que se manejan.

2.1 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

El termino representación es un concepto con distintas acepciones por lo que es necesario determinar con precisión cuál de ellas se utiliza en el área de la didáctica de la matemática y que utilizaremos en este trabajo. Según la Real Academia Española (RAE), representar significa: Hacer presente algo con palabras o figuras que la imaginación retiene. Por lo tanto en la noción de representación subyace el supuesto de un algo objetual que se representa. De este supuesto surge el esfuerzo por ir a la entidad misma, sin intermediarios de palabras o imágenes.

Las representaciones matemáticas son todas aquellas herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. (Rico, 2009).

Desde un enfoque semiótico, Robert Duval de la Universidad de Estrasburgo, ha venido trabajado sobre la noción de representación y la comprensión de los objetos matemáticos desde comienzos de la década de los 80; sus trabajos Semiosis y Noesis (1993) y Semiosis y Pensamiento Humano (1999), son aportaciones valiosas en este campo. La revista Les Sciences de l'Education, editada por el Centre d'Etudes et de Recherche en Sciences de l'Education de la Universidad de Caen, editó el monográfico Les Représentations Graphiques dans l'Enseignement et la Formation (Baillé y Maury, 1993), que incluye una serie de contribuciones notables sobre las representaciones gráficas.

Sierpinska (1994), Glasersfeld (1995) y muchos otros autores, han reflexionado también sobre estas nociones. En la obra colectiva Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline (Biehler, Scholtz, Strasser y Winkelmann, 1994), el concepto de representación se trabaja y emplea extensamente: "La representación de hechos y relaciones es un aspecto muy importante del aprendizaje y el pensamiento matemático, por ello los educadores matemáticos han estado fuertemente interesados en la investigación psicológica que contribuye a la comprensión de las representaciones".

La noción de sistema de representación se encuentra claramente referida, en el grupo de investigación Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en las tesis de Castro (1995), González (1995), Romero (1995), Fernández (1997), Gairín (1998) y Ruiz (2000); también en Coriat y Scaglia (2000) hay un uso extenso de estas nociones. Castro y Castro (1997) hacen un análisis conceptual detallado de esta noción, que se ha utilizado en muchos otros trabajos e investigaciones.

Otro punto importante que se debe distinguir es el hecho de que símbolo y concepto asociado son dos entidades diferentes (Skemp, 1980). Kaput (1987) señala esta dualidad y muestra las dificultades que de ella se derivan para las matemáticas:

> *El concepto de representación da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas. Uno de estos entes se denomina el objeto representante (símbolo o representación), el otro es el objeto representado (concepto), también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados. (p. 23)*

De acuerdo a lo anterior, cualquier descripción específica de la noción de representación debiera detallar, al menos, cinco entidades:

> *1. Los objetos representados,*
>
> *2. Los objetos representantes,*
>
> *3. Qué aspectos del mundo representado se representan,*
>
> *4. Qué aspectos del mundo representante realizan la representación,*
>
> *5. La correspondencia entre ambos mundos o conjuntos.*
>
> *En buena parte de los casos importantes uno o ambos de los mundos pueden ser entidades hipotéticas e, incluso, abstracciones. (p. 23)*

Representaciones externas e internas

Es conocido que el uso de la representación es un factor que facilita el proceso de aprendizaje. Las representaciones mentales son usadas según Cifarelli (1998):

> Para describir el proceso de resolución de problemas en matemáticas, ya que la investigación sugiere que si un alumno es capaz de resolver problemas, tal vez se debe en gran parte a su habilidad de construir representaciones que le ayudan a entender la información y la relación de la situación problemática. (p.239).

Del mismo modo, coexisten dos tipologías de representaciones, según (Cuoco y Curcio, 2001):

- Las internas y
- Las externas

Y se entenderá para cada una de ellas lo siguiente:

En el año de 1996 estuvieron señaladas por Goldin y Kaput, estas dos características de representación ya que manejan el término representación interna para las configuraciones que no son directamente observables, pero aluden que se consiguen inducir desde su forma, mientras que para la representación externa consideran las configuraciones visibles tales como las palabras, gráficos, diseños, ecuaciones, etc., que representan cuestiones que son accesibles a la observación.

Asumiendo el valor de las representaciones en la enseñanza de la matemática, el perfeccionamiento eficaz de sistemas de representaciones internas en los alumnos corresponderá coherentemente y sobre una buena información con el método matemático determinado, es decir, lo que estarían las representaciones externas (Goldin y Shteingold, 2001).

Además, expresamos la necesidad de emplear diferentes representaciones, ya que cada modo, significativamente distinto, de entender un concepto necesita de un sistema de simbolización propio. Por lo que podemos reflexionar que cuando un sujeto maneja una representación seguida de ciertas sistematizaciones suele emplear diferentes formas para concepciones desiguales. Esto muestra que hay que utilizar varias representaciones para captarlo en su totalidad; Friedlander y Tabach (2001) señalan que el estudiante será mejor solucionando problemas algebraicos si desde temprana edad se mueve fácilmente de una representación a otra.

Para estos autores “elegir una representación puede ser resultado de una tarea natural como son las preferencias personales, el estilo de pensamiento del resolutor de problemas o el intento de vencer las dificultades para resolver el problema cuando se estaba utilizando otra representación”.

Al mismo tiempo el interés de las representaciones mentales es reconocido por gran parte de la comunidad de los investigadores en Didáctica de la Matemática. Según (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 66), para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. … Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas

Con diferentes enfoques diversos autores reconocen esta distinción. Así, Kaput (1992) considera un mundo de operaciones mentales y un mundo de operaciones físicas, mientras que Duval (1993) postula la existencia del mundo de las representaciones mentales y el de las representaciones semióticas, y sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se efectúa como una interiorización de las representaciones externas.

En estos casos las representaciones desempeñan un papel fundamental para los procesos de construcción de conceptos y, por ello, son importantes en la enseñanza, aprendizaje del conocimiento matemático. De ahí el interés que tienen para la investigación en Educación Matemática (Hitt, 1997).

Dentro de los modos convencionales de representación externa es común diferenciar dos grandes familias de sistemas: las representaciones simbólicas y las representaciones gráficas. Las primeras se componen de aquellas representaciones alfanuméricas, que pueden ser simuladas por medio de programas informáticos y cuya sintaxis esta descrita por una serie de reglas de procedimiento. Los sistemas de representación gráficos recogen las representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación. (Castro y Castro, 1997).

Pero en las matemáticas las representaciones no se pueden reducir a los simples sistemas estructurados de codificación mediante signos o gráficas. Si bien la representación de un concepto matemático consiste en hacerlo presente mediante unos signos específicos, convencionales y contextualizados, con unas reglas sintácticas de procesamiento, dicha representación con sus reglas no agota el concepto sino que sólo pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes. Una estructura matemática es un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de composición y de unas relaciones mediante las que se comparan y organizan dichos entes; la consideración conjunta de los entes, sus operaciones y sus relaciones es lo que caracteriza una estructura (Feferman, 1989).

La representación de una estructura matemática ha de tener también carácter sistémico (Kaput, 1987), por ello se habla de sistema o sistemas de representación cuando se refiere a una estructura matemática en su totalidad (Rico, Castro y Romero, 1996).

Una de las principales características distintivas de los conceptos y estructuras matemáticas es la necesidad de emplear diversas representaciones distintas para captarlos en toda su complejidad, como lo han descrito distintos investigadores (Castro,1995 ; Goldin, 1993; Janvier, 1987; Kaput, 1987; Romero 1995; Ruiz, 2000). Duval (1993) menciona la necesidad de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático y establece que las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias, ya que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por la percepción o por una experiencia intuitiva inmediata como lo son los objetos comúnmente llamados físicos. Esto lleva a la necesidad de considerar las relaciones entre los diversos sistemas de representación para un mismo concepto. Janvier habla de traducciones (translations) entre distintos sistemas, mientras que Duval se refiere a estas relaciones con el término conversión.

En Duval (1993, 1999) se realiza un trabajo teórico, coherente y unificador (Semiosis -aprehensión o producción de una representación semiótica, lo que se puede generar con una sola representación-, y, Noesis -aprehensión conceptual de un objeto, articulación de varias representaciones semióticas-) de los diferentes acercamientos teóricos, a las representaciones. La actividad de conversión de un registro (sistema matemático de signos con ciertas reglas, según Duval) a otro, va a provocar el conocimiento.

Duval (1993) caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente:

> *Un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:*
>
> *1) La presencia de una representación identificable...*
>
> *2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada...*
>
> *3) La conversión de una representación es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...*

Acerca de la construcción de conceptos, Duval (p. 46) establece que:

"toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa"

Y por tanto:

"la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva".

Otros estudios, por ejemplo Hiebert (1988) elabora una teoría para explicar el desarrollo de la competencia del manejo de los símbolos matemáticos escritos (entendidos como cosas que se usan para ocupar el lugar de otras). Propone una serie de procesos cognitivos que se acumulan para producir la competencia en el manejo de dichos símbolos. Establece cinco tipos de procesos básicos: conectar o relacionar los símbolos individuales con sus referentes; desarrollar procedimientos de manipulación de símbolos, elaborar procedimientos para los símbolos; mecanizar los procedimientos con los símbolos; y, construir un sistema de símbolos más abstracto. Cada tipo de proceso debe emplearse y debe hacerse siguiendo la secuencia señalada.

El uso de los primeros procesos permite la fundamentación del dominio de los procesos posteriores. Desde este punto de vista, los primeros conocimientos y experiencias son cruciales para el aprendizaje posterior (Socas, Palarea, 1997). Por lo tanto, la teoría sugiere que muchas de las dificultades que se presentan en los estudiantes al trabajar con símbolos escritos, se debe a que estos se involucran en los proceso más avanzados, sin tener los fundamentos de los procesos más elementales.

Kaput (citado en Plasencia, 2000) desarrolla una aproximación teórica para explicar el uso de los símbolos matemáticos. Señala: "He intentado expresar relaciones entre la "notación A (escrita, dibujada, etc.) y el referente B" donde cada uno (y quizá la correspondencia) es expresable en forma material, pero donde la relación referencial existe sólo en términos de operaciones mentales de los miembros de un dominio consensual particular". Es claro que Kaput destaca la existencia de operaciones mentales y que las transformaciones de una representación a otra son esenciales en la construcción de conceptos matemáticos.

Por otra parte, es de interés las representaciones externas de los alumnos ya que, en base a las exposiciones externas originadas por los educandos, se consiguen hacer deducciones acerca de su perspicacia de un contenido (Fernández, 1997). Sin embargo hay que tener en cuenta que la etapa de la traducción de esas representaciones juega un papel muy importante en el aprendizaje y la resolución de problemas (Lesh, Post y Behr, 1987).

Fernández (1997) menciona cinco sistemas de representación para solucionar problemas de álgebra elemental y son los siguientes:

Ensayo–Error

Se supone como un sistema numérico, ya que se manipula la notación numérica y símbolos aritméticos para formar relaciones entre los datos conocidos y los excluidos. El uso de este sistema de representación demanda de tiempo y de una sistemática formación en el trabajo de suposición y ensayo.

Parte – Todo

Las relaciones positivas en el problema se planean mediante destrezas que atañen los fundamentos. Se meditan los antecedentes excluidos como parte del corolario de maniobrar los datos conocidos, cotejando el total con las partes.

Gráfico

Se usa este sistema de representación cuando se utilizan símbolos gráficos para solucionar el problema, como son:

- Representaciones físicas,
- Geométricas o diagramas.

Las relaciones entre los antecedentes y las incógnitas del problema se instituyen a partir del gráfico. Para satisfacer las sistematizaciones se manejan ordinariamente los sistemas numéricos, más concretamente el Parte–Todo, o relaciones de proporcionalidad.

Gráfico–Simbólico

Este método de representación se consigue suponer como una mezcla entre el Gráfico y el Simbólico, ya que las recomendaciones entre los datos y las incógnitas se consiguen a partir del uso de un gráfico, con apoyo de una representación gráfica, pero mediante una expresión simbólica.

Simbólico

Este sistema de representación Simbólico se usa cuando se maneja el lenguaje algebraico puro. Se muestra cuando se maneja un lenguaje únicamente indefinido, prácticamente alfabético. Se igualan las incógnitas con letras o disposición de ellas u otros símbolos, inclusive gráficos, y se formulan las relaciones mediante ecuaciones. No se hace uso de objetos concretos para establecer las relaciones.

2.2 ERRORES Y DIFICULTADES

Los errores son un tema de constante malestar en los docentes de todos los niveles educativos. En el desarrollo de la construcción de conocimientos matemáticos se presentan de manera sistemática los errores y es por eso que dicho proceso debe considerar criterios de diagnóstico, corrección y superación de los mismos.

Evidentemente estos errores influyen en el aprendizaje de los diferentes contenidos y es imprescindible que los estudiantes los reconozcan y admitan la necesidad de superarlos a fin de obtener logros de aprendizaje. Su análisis sirve para ayudar al docente a organizar estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y contribuyen a una mejor preparación de instancias de corrección.

En Rico (1999) se refiere a la noción de organizadores para articular el diseño, desarrollo y evaluación de cada unidad didáctica, considerando organizadores del currículo a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de las mismas. El mismo Rico considera como organizadores, entre otros, errores y dificultades en el aprendizaje. Ellos forman parte de las producciones de los alumnos durante el aprendizaje de matemática y constituyen datos objetivos que encontramos permanentemente a lo largo del proceso educativo. Siendo un objetivo permanente de la enseñanza, lograr un correcto aprendizaje, las producciones o respuestas incorrectas a las cuestiones que se plantean se consideran señales de serias deficiencias e incluso fracaso en el logro de dicho objetivo. En el marco del Análisis Didáctico (Gómez, 2007), compuesto por cuatro tipo de análisis, de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación, los errores y dificultades se enmarcan en el análisis cognitivo donde "el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento" (p. 56).

El análisis de errores en el aprendizaje tomó una gran relevancia en las investigaciones en Educación Matemática. Los estudios se fueron orientando según las corrientes pedagógicas y psicológicas predominantes y por el currículo matemático en los diferentes sistemas educativos. Según Radatz (1980) destaca, la aritmética y el conocimiento numérico constituyen el área que predomina en la mayoría de los estudios sobre errores en matemáticas escolares. Afirma además que, en Estados Unidos se logró un desarrollo teórico continuo desde principios del siglo veinte para realizar este análisis mientras que, en los países europeos este desarrollo se llevo a cabo en forma esporádica y no se ha dado con continuidad hasta la actualidad.

A continuación haremos una reseña de lo acontecido en los principales países que actúan como referentes.

En Alemania, el interés por estudiar los errores crece cuando toma importancia la pedagogía empírica entre las dos guerras mundiales. En estos trabajos se nota de influencia de las escuelas predominantes en psicología: la psicoanalítica, la Gestalt y la psicología del pensamiento. En una primera etapa comprendida entre 1922 y 1931 investigadores como Weiner, Seseman, Kiesling y Rose citados en Rico (1995) trataron de implantar patrones de errores que explicaran las equivocaciones en todas las materias y para las distintas edades, proporcionar una fundamentación psicológica adecuada para una metodología didáctica en la enseñanza de la matemática considerando a los errores surgidos de una combinación incorrecta de tendencias, analizar la predisposición especial de las personas para equivocarse y la manera de tratar el error y establecer una clasificación de las causas de error en educación matemática.

Este estudio resurge a partir de la década de los 60 con Schlaak, Glück y Pipping. Algunos de los aportes más destacados fueron: la determinación y descripción de causas de error, interpretación de los errores y dificultades desde una perspectiva psicológica y la tipificación y clasificación de los errores que están relacionados con el cálculo.

En la Unión Soviética el análisis de los errores y las dificultades individuales del aprendizaje se fortalece a principios de los años sesenta cuando se consolidó la investigación sobre educación matemática. Los principales investigadores son Kuzmitskaya y Menchinskaya quienes lograron determinar y describir causas de los errores.

En Estados Unidos, desde 1917 y a través de Thorndike comienza la difusión y el conocimiento de trabajos sobre la determinación de errores. A partir de ese momento los aportes más importantes sobre el tema los realizaron Buswell, Judd y Brueckner hasta la década del 30 donde se le da preferencia al análisis de las dificultades especiales, la persistencia de técnicas erróneas individuales y la agrupación y clasificación de errores. A partir de los años setenta surgieron nuevas corrientes que intentaron diseñar actividades, metodologías y organización del currículo escolar con el objeto de disminuir los errores. Muchos autores sostienen y presentan estudios que avalan la afirmación que los errores no tienen un carácter accidental.

En España, Villarejo, Huerta, Centeno, Rico, Castro, González, Coriat y Molina entre otros, se movilizaron a partir de la década del 50, en torno a este tema. Los más destacados refieren a tratar de determinar los errores más frecuentes, a presentar bases para la enseñanza correctiva y a la necesidad de interpretar los mismos para orientar el proceso de enseñanza.

Brousseau, Davis y Werner (Citados en Rico , 1995) expresan:

> Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el

> estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera. (p. 7).

Radatz (1980) señaló varias razones por las que el estudio de errores y la necesidad de un marco teórico de explicación son importantes. Entre ellas, señaló la importancia del análisis de los errores y la necesidad de un marco teórico para explicarlos, mencionando que una de las razones es, que al reformular sucesivamente la currícula de Matemática, surgen nuevos errores a causa de los contenidos específicos. Los profesores necesitan modelos de actuación para diagnosticar y corregir aprendizajes erróneos.

Mulhern (1989) hace una caracterización general de los errores cometidos por los alumnos:

- Los errores surgen en la clase son espontáneos y generalmente resultan sorprendentes para el profesor.
- Son persistentes, resistentes a cambiar por sí mismos y difíciles de corregir porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumno.
- Son más frecuentes los errores sistemáticos (revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada) con respecto a los errores por azar u ocasionales.
- Los alumnos en el momento no toman conciencia del error.

Por otra parte Brosseau, Davis y Werner (1986), señalan cuatro vías por las que los errores pueden presentarse:

- Como resultado de concepciones incorrectas acerca de principios básicos de las matemáticas.
- Cuando los alumnos recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el profesor.
- Por la aplicación correcta y sistematizada de procedimientos imperfectos fácilmente reconocidos por el profesor.
- Al aplicarse por parte del alumno procedimientos imperfectos y concepciones

inadecuadas no reconocidas por el profesor.

Por otra parte se considera que el análisis cognitivo se organiza y fundamenta según dos componentes, que tienen una marcada trayectoria dentro de la investigación cognitiva. La primera de ellas es relativa a las competencias que deseamos que los estudiantes desarrollen en torno a cierto tópico matemático. La segunda componente se refiere al estudio de los errores en que los escolares pueden incurrir en la ejecución de tareas relacionadas con ese tópico, y al análisis de las dificultades que subyacen a esos errores y permiten su interpretación. El estudio de las dificultades de aprendizaje y de los errores también es un foco importante de interés en la investigación en educación matemática, pues ayudan a explicar parte de la problemática del aprendizaje (Jiménez, 1999; Radatz, 1980; Rico, 1995; y Socas, 1997).

2.2.1. ESTUDIO SOBRE ERRORES

La investigación en torno a los errores en el proceso de aprendizaje es una de las principales preocupaciones actuales de la Educación Matemática.

Rico (1995) propone cuatro líneas de investigación actual en torno a los errores:

- Estudios sobre análisis, causas, elementos, taxonomías de clasificación de los errores.
- Trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores.
- Estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus alumnos.
- Trabajos de carácter técnico que incluyen técnicas estadísticas, como contrastar hipótesis para el análisis de los errores.

El mismo Rico señala también varias propuestas para la categorización de los errores. Cada una está inspirada en un modelo particular del procesamiento de información. Hay también algunas clasificaciones que son resultados de investigaciones empíricas sobre los errores.

2.2.2 CATEGORIZACIONES Y CLASIFICACIONES

La identificación de las distintas categorías de los errores nos puede permitir orientar la atención hacia los diferentes aspectos y nos permite una evaluación y diagnostico más efectivo para poder apoyar a los estudiantes en sus dificultades y carencias de sentido de los objetos matemáticos y en el desarrollo de una actitud racional hacia la matemática. A continuación se presentan algunas categorizaciones y clasificaciones realizadas por diferentes autores y teniendo en cuenta distintos enfoques.

Davis (1984) elaboró una teoría de esquemas o constructos personales que le permitió estandarizar e interpretar algunos de los errores más usuales de los alumnos en el aprendizaje de matemática. Los errores clásicos explicados son: reversiones binarias, errores inducidos por el lenguaje o la notación, errores por recuperación de un esquema previo, errores producidos por una representación inadecuada y reglas que producen reglas.

En Radatz (1979) se ofrece una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo categorías generales para este análisis.

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje

El aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos alumnos un problema similar al aprendizaje de una lengua extranjera. Errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático.

2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.

Las diferencias individuales en la capacidad para pensar mediante imágenes espaciales o visuales es una fuente de dificultades en la realización de tareas matemáticas.

3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

Se incluyen todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Errores originados por deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos, procedimientos para las tareas matemáticas.

4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.

La experiencia sobre problemas similares puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aún cuando las condiciones originales se hayan modificado. Están inhibidos para el procesamiento de nueva información. En general son causados por la incapacidad del pensamiento para adaptarse a situaciones nuevas. Interesan cinco subtipos:

- Errores por perseveración, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
- Errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares.
- Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
- Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura. Cuando la información es mal procesada debido a fallas de percepción.
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas.

5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Surgen con frecuencia por aplicar con éxito reglas o estrategias similares en áreas de contenidos diferentes.

Por otra parte Rico (1995) indica que, en una investigación sobre errores cometidos por alumnos de secundaria en Matemática, Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos.

De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados. Estas categorías son:

1. Datos mal utilizados.

Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno.

Se pueden producir porque: se añaden datos extraños; se olvida algún dato necesario para la solución; se contesta a algo que no es necesario; se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado.

2. Interpretación incorrecta del lenguaje.

Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.

3. Inferencias no válidas lógicamente.

Son los errores que tienen que ver con fallas en el razonamiento y no se deben al contenido específico.

4. Teoremas o definiciones deformados.

Errores que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable.

5. Falta de verificación en la solución.

Son los errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada.

6. Errores técnicos.

Se incluyen en esta categoría los errores de cálculo, al tomar datos de una tabla, en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos.

En Socas (1997), se consideran tres ejes, que permiten analizar el origen del error. De esta forma, podemos situar los errores que cometen los alumnos en relación con tres orígenes distintos:

- Obstáculos: conocimientos adquiridos que demuestran su afectividad en ciertos contextos pero no válidos en otros.
- ausencia de sentido: relacionado en las distintas etapas de aprendizaje de un sistema de representación, semiótica, estructural y autónoma.
- actitudes afectivas y emocionales: Los errores que tienen su origen en *actitudes afectivas y emocionales* tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

Esteley y Villarreal (1990,1996) realizaron una categorización de errores en matemática y discutieron las siguientes categorías:

1. Errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones.

2. No empleo o uso parcial de la información.

3. No verificación de resultados parciales o totales que se manifiesta en: desconexión entre lo analítico y lo gráfico, respuestas consecutivas incoherentes entre sí y no comprobación de que los resultados obtenidos satisfacen la o las ecuaciones originales.

4. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones (de números o funciones).

5. No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc. en un caso particular.

6. Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada.

7. Errores de lógica: justificaciones inadecuadas de proposiciones y uso inadecuado del lenguaje.

8. Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.

En Azcárate et al. (1996) se cita una investigación realizada por Orton basada en un trabajo acerca del concepto de derivada con alumnos de entre 16 y 22 años y de la que surge la siguiente clasificación:

1. Errores estructurales: relacionados con los conceptos esenciales implicados.

2. Errores arbitrarios: el alumno se comporta arbitrariamente sin tener en cuenta los datos del problema.

3. Errores ejecutivos: errores en la manipulación, si bien los conceptos implicados pueden ser comprendidos.

Mientras Astolfi (1999) describe la siguiente tipología de los errores:

1. Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones.

2. Errores resultado de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas.

3. Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos.

4. Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas.

5. Errores en los procesos adoptados.

6. Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad.

7. Errores que tienen su origen en otra disciplina.

8. Errores causados por la complejidad propia del contenido.

2.2.3 INVESTIGACIONES RELACIONADAS CON EL MANEJO DEL SISTEMA SIMBÓLICO ALGEBRAICO Y LOS ERRORES Y DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE TAREAS.

En un trabajo sobre las razones de los bajos rendimientos en matemáticas de egresados de Bachillerato (Vílchez, 2005 , p. 6.):

> Estos pueden ser causados, en gran medida, a que en secundaria no existe un aprendizaje de conceptos matemáticos de una manera significativa y más bien, se enseña matemática con una clase expositiva en donde no se crean espacios para interiorizar los conceptos básicos. Así por ejemplo, los estudiantes pueden aprender los algoritmos para factorizar un polinomio, técnicas de graficación y propiedades de algunas funciones, entre otros, pero no comprenden el concepto de factorización o calcular el valor de la imagen de una función, o más aun, que una gráfica de una función está formada por los pares ordenados.

Diversas investigaciones han trabajado aspectos de la enseñanza/ aprendizaje del álgebra que conforman diversos obstáculos para su aprendizaje. Así, Collis, (1975) hace consideraciones sobre el uso y significado que los alumnos hacen y atribuyen a las letras. Collis (1975), Behr (1980), Kieran (1981) y Palarea y Socas (1999) hacen aportaciones sobre el valor que los alumnos atribuyen al signo igual, encontrando la prevalencia de la aritmética sobre el álgebra. O respecto al uso de paréntesis (Kieran, 1979).

Enfedaque (1990) llevó a cabo un estudio con alumnos de 8º de EGB, de 1º y de 2º de BUP en Barcelona, aportando algunas sugerencias sobre cómo introducir el uso de las letras en álgebra para disminuir los errores en la misma, así como algunas cuestiones sobre la actitud del profesorado para detectar los anteriores y poder en definitiva mejorar la competencia algebraica de los alumnos.

Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero (1996) diseñan un cuestionario de diagnóstico del manejo del concepto de variable en el álgebra. Para ellos, el concepto de variable se usa con significados diversos en diferentes contextos y dependiendo de ello se maneja de distinta manera. Esta variedad en las formas de empleo hace que el concepto de variable sea difícil de definir y puede ser causa de muchas de las dificultades para los estudiantes.

Consideran tres las formas en las que la variable suele usarse en el álgebra escolar: como incógnita, como número generalizado y en relación funcional.

La mayor parte de las expresiones y manipulaciones algebraicas pueden ser explicadas a partir de las expresiones y manipulaciones aritméticas. Sin embargo, es necesario reconocer una variedad de discontinuidades entre la aritmética y el álgebra que da origen a una gama de dificultades en el aprendizaje de los alumnos (Schmidt. & Bednarz, 1997). Estas dificultades se entienden en el marco de la teoría de los obstáculos didácticos. En este sentido son obstáculos didácticos (a) la notación algebraica referida al producto, (b) la notación de las potencias de polinomios y (c) el uso de letras como variables.

De acuerdo a Socas y Palarea (1997 , p. 3) que establecen como uno de los orígenes de los errores la evolución en las distintas etapas de aprendizaje de un nuevo sistema de representación, para el caso del álgebra hay:

1. Errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética. Para entender la generalización de las relaciones y procesos se requiere que estos antes hayan sido asimilados en el contexto aritmético.

2. Errores de procedimiento en virtud de los cuales los alumnos usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento.

3. Errores debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Ejemplos de este tipo de error son el sentido del signo igual en álgebra y la sustitución formal.

Los errores que tienen su origen en *actitudes afectivas y emocionales* según estos autores, tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, etc.

La importancia de las representaciones para la formación adecuada de conceptos han sido reseñadas por diversos investigadores, Hiebert (1988), Kaput (1987,1991), Duval (1993,1995) quienes han realizado investigaciones y desarrollado aspectos teóricos, con la intención de explicar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento.

El uso de estos diferentes sistemas de representación también se puede justificar en base a que en Matemáticas, al estar los conceptos fuertemente jerarquizados, las conexiones entre los diferentes sistemas de representación generan “esquemas” mentales que facilitan la comprensión de estas abstracciones y permiten progresar en la adquisición de nuevos objetos. Además al relacionar los sistemas de representación entre sí se construye un mejor entendimiento entre ellos, y al mismo tiempo, el estudiante podrá adquirir confianza en su propia capacidad para utilizar ideas algebraicas.

Por lo anterior resulta razonable aceptar que la apropiación de un objeto matemático difícilmente puede lograrse sin recurrir a distintas representaciones del mismo. El uso de los estudiantes de representaciones matemáticas les brinda las herramientas necesarias para la construcción de imágenes mentales de un objeto matemático y la calidad de la imagen del objeto construido dependerá indudablemente de las representaciones utilizadas por el sujeto.

Por otro lado Caputo y Macías (2006) realizan un estudio desarrollado con alumnos de la asignatura Álgebra I, correspondiente al primer cuatrimestre del primer año de los planes de estudio de las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad del Nordeste en el cual se destaca la importancia de considerar que los errores de los alumnos son valiosos indicadores de los procesos intelectuales que ellos desarrollan. Por lo tanto, según los mismos autores es importante analizarlos, para tratar de determinar las razones por las cuales los alumnos no logran concluir o realizar correctamente una demostración, detectar los posibles obstáculos con que se enfrentan y planificar en función de ellos las futuras intervenciones.

Como resultado de este trabajo se establecieron categorías, clasificando los errores encontrados en cinco tipos, que se mencionan a continuación:

E_1: Secuencias incoherentes, o a primera vista incomprensibles, en las que no se justifican, o se justifican de manera incorrecta, los pasos de la demostración.

E_2: Uso incorrecto de la notación o confusión en el uso del lenguaje simbólico; en este sentido, se destacan los relacionados con los distintos contextos en los que se usan las letras en álgebra, los significados que las letras tienen en cada uno de esos contextos y los problemas de traducción del lenguaje usual al simbólico y viceversa.

E_3: Errores algebraicos elementales, debido a la insuficiencia de los conocimientos adquiridos en los niveles anteriores de enseñanza.

E_4: Desconocimiento o uso inadecuado de conceptos, definiciones o propiedades incluidas entre los contenidos de la asignatura.

E_5: No lograr concluir la demostración, o concluirla "por decreto" o con pasos "intermedios" incompletos.

III. MARCO METODOLOGICO

Este capítulo se dedica a caracterizar el tipo de investigación, se describen los participantes y el instrumento que se ha utilizado para recoger los datos adecuados para cumplir con los objetivos propuestos en el estudio. También se describen los datos obtenidos y el procedimiento que hemos seguido para analizarlos.

3.1 JUSTIFICACIÓN Y OBJETIVOS DEL ESTUDIO

Como indicamos al comienzo de este trabajo nuestra experiencia profesional año tras año en el Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara se evalúan a los alumnos de primer ingreso de las carreras antes detalladas que tienen la asignatura común de Matemáticas I por medio de exámenes departamentales que tienen el objetivo de evaluar su rendimiento académico. Dichos estudiantes ingresan a la Universidad con la formación del nivel secundaria y bachillerato por lo que se espera cuenten con los conocimientos básicos del álgebra que se requieren en este nivel de estudios.

El objetivo general del estudio indicado anteriormente es la evaluación del rendimiento, errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos de primer curso de diferentes carreras del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara México; las tareas algebraicas están presentadas de forma simbólica y en formato de ejercicio.

Este objetivo se concreta en los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar el rendimiento de los alumnos de manera global.

2. Analizar el cuestionario o examen que realizan los alumnos en su fiabilidad, dificultad y asociación de los ítems

3. Analizar el rendimiento de los alumnos desde el punto de vista de las diferentes carreras a las que pertenecen.

4. Describir los errores que cometen los alumnos en la ejecución de las tareas.

De manera resumida el proceso de investigación parte de la constatación de unos resultados anómalos en la evaluación en la resolución de tareas algebraicas de los alumnos de primer curso de diferentes carreras y de la disponibilidad de información sobre esta cuestión a través de los exámenes que realizan año a año; se ha seleccionado un curso determinado, que implica un examen determinado, unos determinados alumnos y unos resultados; del análisis de esta información se extraen conclusiones.

3.2. METODOLOGÍA DEL CASO EN ESTUDIO

La metodología representa la manera de organizar el proceso de la investigación, de controlar los resultados y de presentar posibles soluciones al problema que nos llevará a la toma de decisiones” (Zorrilla y Torres 1992).

En este trabajo, la metodología está orientada al análisis de la problemática que se presenta en el Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara; hasta el momento no se ha realizado análisis alguno de los anómalos resultados de los exámenes departamentales de Matemáticas I en los cursos y carreras referidos.

3.3. TIPO DE INVESTIGACIÓN

La investigación tiene carácter exploratorio y descriptivo.

La investigación exploratoria “tiene como objetivo primario facilitar una mayor penetración y comprensión del problema que enfrenta el investigador” (Malhotra, 1997)

La investigación descriptiva “tiene como objetivo principal la descripción de algo, generalmente las características o funciones del problema en cuestión” (Malhotra, 1997) y “busca especificar las propiedades, características, y los perfiles importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis” (Danhke, 1989).

3.4 DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con Malhotra (1997) el diseño de la investigación es una estructura o un plano que sirve para dirigir un proyecto de investigación. Nos detalla los pasos necesarios para obtener información indispensable en la solución al problema que nos ocupa. El diseño "es la estrategia que se desarrolla para obtener la información que se requiere para la investigación" (Hernández R., Fernández C. y Baptista, P. 1991).

Aunque exista un planteamiento amplio del problema, el diseño de la investigación, específica los detalles para determinar este.

Un buen diseño de la investigación, nos asegura que el proyecto se realizará de manera efectiva y eficiente, de acuerdo con Malhotra (1997). Generalmente el diseño de la investigación incluye los siguientes pasos:

1. Definir la información necesaria.

2. Diseñar las fases exploratorias, descriptivas o causales.

3. Especificar los procedimientos para medir y elaborar escalas.

4. Construir y probar previamente un cuestionario (cuestionario piloto) o una forma apropiada para recolectar datos

5. Especificar el proceso de muestreo y el tamaño de la muestra.

6. Desarrollar un plan para el análisis de los datos recabados.

Como se ha indicado la investigación se realiza con base en unos grupos de alumnos determinados, unos cuestionarios ya establecidos y unos resultados obtenidos en un determinado curso; así pues las fases referidas, en este caso, están condicionadas a la situación y circunstancias indicadas.

La investigación llevada a cabo en este trabajo tiene las características para considerarse Ex post facto, ya que en este tipo de investigación los cambios en la variable independiente ya ocurrieron y el investigador tiene que limitarse a la observación de situaciones ya existentes dada la incapacidad de influir sobre las variables y sus efectos (Hernández, Fernández y Baptista, 1991).

3.5 LOS DATOS

Para esta investigación los datos se obtuvieron de la aplicación del examen departamental que posteriormente se detallará.

La finalidad de la recolección de los datos, es aportar información verídica, oportuna y de relevancia para la elaboración de propuestas o sugerencias de mejora como objetivo de esta investigación.

De acuerdo con Hernández y coautores (1991) la recolección de los datos implica tres actividades relacionadas entre sí:

- Seleccionar un instrumento o método de recolección de datos entre los disponibles en el área de estudio en la cual se inserte nuestra investigación, o desarrollar uno; el instrumento debe de ser válido y confiable, de lo contrario no podemos basarnos en los resultados.
- Aplicar este instrumento para recolectar los datos. Es decir, obtener observaciones, registros o mediciones de variables, sucesos, contextos, categorías u objetos que resulten de interés para nuestro estudio.
- Preparar observaciones, registros y mediciones obtenidas para que se analicen correctamente.

En este caso, el instrumento ya está diseñado y aplicado; se trata pues sólo de organizar la información para su análisis.

3.6 INSTRUMENTO DE MEDICIÓN

3.6.1. ELABORACIÓN Y APLICACIÓN

El instrumento utilizado para este estudio es el Primer Examen departamental de Matemáticas I para el calendario 2008 B aplicado por el Departamento de Ingenierías del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara (ver ANEXO 1).

Este instrumento consta de 10 ejercicios de desarrollo de operaciones de tipo algebraico. Evalúa contenidos procedimentales, distribuidos por los siguientes bloques temáticos que se muestran en la Tabla 1:

Tabla 1

Descripción del contenido de los ítems

Numero de Ítem	Contenido algebraico
1 , 3	Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales
2 , 7	Aplicación de reglas de operaciones algebraicas
4 , 5	Desarrollo de reglas de productos notables
6 , 8	Factorización de expresiones algebraicas
9 , 10	Resolución de inecuaciones lineales

La asignatura de Matemáticas I se caracteriza mayoritariamente por tener contenidos procedimentales. Por ello, el examen recoge en su totalidad, preguntas de contenido procedimental. Las cuestiones son planteadas tanto en forma de evocación.

La construcción del examen que mide el nivel de conocimiento en matemáticas al finalizar el primer bimestre del primer ciclo del curso de Matemáticas I se elaboró de la siguiente forma:

Cada inicio de ciclo se convoca a un equipo de trabajo con profesores de la academia de Matemáticas del Departamento de Ingenierías del CUCSUR, compuesto de profesores que imparten asignaturas de Matemáticas en todas las titulaciones que ofrece el Centro. Los profesores proporcionaban ejercicios, que ellos creen imprescindibles para superar la asignatura.

Se contó con la colaboración de docentes de distinto nivel educativo, para confirmar que existía un acuerdo en cuanto a los contenidos mínimos que debe saber un alumno para superar ese ciclo educativo y que sirvieran de antecedentes a cursos posteriores relacionados con las matemáticas.

Una vez seleccionado el material que proponía el profesorado, se continúa contrastando estos contenidos con los objetivos curriculares y contenidos de la asignatura a evaluar y, finalmente, se comprobaba que los objetivos y contenidos seleccionados formaban parte de la bibliografía básica que aparece en los programas analíticos de la misma.

De todas estas fuentes de información, se seleccionaban aquellos contenidos que fueron compartidos por todas estas fuentes. Es decir, si los, consideraban que determinados contenidos eran conocimientos básicos, se confirmaban que estos contenidos estaban en los objetivos curriculares del ciclo y que además se trabajaba en los diferentes libros sugeridos como bibliografía básica. Cabe mencionar que la elección final de los ejercicios estaba a cargo de profesores que no impartían la asignatura en el ciclo que se iba aplicar la prueba para evitar algún tipo de sesgo por parte del diseñador final de la prueba.

La fecha para la aplicación de la prueba se acordaba considerando el calendario escolar vigente y además un periodo de tiempo adecuado según las experiencias de los profesores que impartían la asignatura en cuestión.

Los alumnos se distribuían en grupos de aproximadamente 25 integrantes y bajo el criterio del orden alfabético de sus apellidos buscando con esta medida que no se concentraran los mismos alumnos que tomaban el curso en las diversas titulaciones.

La fecha programada para la aplicación de la prueba acudían los alumnos al mismo horario y se les daba un tiempo de dos horas para la resolución de la misma. Al iniciar la prueba se les daba a conocer las instrucciones normativas, destacando en la cuestión pedagógica que no se les permitía usar ningún tipo de instrumento electrónico de cálculo y se les insistía en la utilidad de desarrollar procedimientos en las hojas que se les proporcionaba para ese fin.

Una vez terminada la aplicación de la prueba se entregaban las hojas de procedimientos y respuestas al responsable de la academia de matemáticas quien citaba a una reunión posterior para la evaluación de esta.

Finalmente se reunían los profesores aplicadores para evaluar las pruebas, se les proporcionaba una guía de respuestas pero con la recomendación de considerar los procedimientos de las respuestas y consensuar cualquier duda acerca del valor que debería de asignarse a los mismos.

3.6.2. VALIDEZ Y FIABILIDAD DEL INSTRUMENTO

La validez de un instrumento es el grado en que ese instrumento mide lo que se supone que está midiendo (Ary, Jacobs y Razavieh, 1994). Dentro de ésta, la **validez del contenido**, denominada también validez lógica o de muestreo, se basa en el análisis del contenido del factor que se propone evaluar; el instrumento debe ser representativo, para medir los diversos aspectos de ese contenido (Van Dalen y Mayer, 1984).

En este sentido como se mencionó anteriormente las pruebas se conforman a partir de una base de datos de ítems elaborados por los profesores que imparten la asignatura a evaluar por lo que se asegura la validez del contenido de las mismas al estar apegadas al programa de la asignatura.

La **confiabilidad** de un instrumento de medición es considerada como el grado en que, al aplicarse de manera repetitiva al mismo objeto de estudio u otro diferente, se producirán resultados iguales o similares. Para poder estudiar la confiabilidad del instrumento utilizado, se aplica la prueba Alfa de Cronbach, que relaciona las variables y establece la confiabilidad de cada sección del cuestionario.

Para poder obtener el alfa de Cronbach se tiene una fórmula general, de acuerdo a lo establecido por Hernández et al. (2003) la fórmula es la siguiente:

$$\alpha = \frac{\overline{N}p}{1 + \overline{p}(N-1)}$$

Donde:

N = número de preguntas

p = promedio de las correlaciones

El alfa de Cronbach obtenido fue el que se muestra en la tabla 2:

Tabla 2

Valor de confiabilidad obtenida

Case Processing Summary

		N	%
Cases	Valid	49	97,4
	Excluded[a]	4	2,6
	Total	153	100,0

a. Listwise deletion based on all variables in the procedure.

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Ítems
,760	10

El alfa de Cronbach obtenido es mayor a 0.70 que es el mínimo establecido por Cronbach para que un instrumento sea confiable.

3.7 DESCRIPCIÓN DEL ALUMNADO

La población considerada para efectuar la investigación fue la de estudiantes de primer ingreso del nivel de Licenciatura de las titulaciones de Licenciado en Administración de Empresas, Licenciado en Turismo, Ingeniero en Recursos Naturales y Ambientales, Ingeniero en Obras y Servicios y Técnico Superior Universitario en Electrónica y Mecánica Automotriz, inscritos en el Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México.

Para el estudio se considero una muestra de 153 estudiantes inscritos en el curso académico 2008-2009.

Los estudiantes de la población fueron escogidos en un muestreo no probabilístico (León y Montero, 2003). La elección fue de tipo incidental, por lo tanto no aleatoria, ya que los estudiantes se eligieron porque estaban inscritos en el curso de Matemáticas I.

Descripción del nivel de estudio del alumnado

Los alumnos que ingresan a las distintas titulaciones del Nivel de Licenciatura son egresados de bachillerato que han cursado distintos cursos de matemáticas como los que se detallan a continuación:

MATEMÁTICAS I:

1. Sistema decimal. 2. Divisibilidad. 3. Fracciones y reales. 4. Conteo y probabilidad. 5. Estadística. 6. Lenguaje algebraico y ecuaciones de primer grado.

MATEMÁTICAS II

1. Sistema de ecuaciones lineales.2. Ecuaciones cuadráticas.3. Funciones. 4. Probabilidad y estadística. 5. Temas selectos de álgebra

MATEMÁTICAS III

1. Polígonos. 2. Congruencia y cuadriláteros. 3. Semejanza y círculo. 4. Áreas y perímetros. 5. Trigonometría. 6. Sólidos

MATEMÁTICAS IV

1. Sistemas de coordenadas para el plano y el espacio. 2. Líneas rectas y circunferencias. 3. Cónicas. 4. Sistema de coordenadas polares y trigonometría.

Un egresado del nivel de bachillerato general en México debe tener las siguientes competencias en el área del pensamiento matemático según el perfil del egreso del nivel medio superior (UDG, 2008, p. 49).

> Competencia para el pensamiento matemático. El pensamiento es una actividad mental mediante la cual los individuos comparan, clasifican, ordenan, estiman, extrapolan, interpolan, forman hipótesis, identifican evidencias, formulan conclusiones, estructuran argumentos de manera inductiva o deductiva, elaboran juicios, establecen analogías, y realizan acciones típicamente clasificadas dentro de la categoría de pensamiento.
>
> Cuando estos conocimientos y habilidades se relacionan con cuestiones numéricas, concretas, abstractas o espaciales, con análisis cuantitativo de información o con situaciones aleatorias, se define el pensamiento matemático. Su desarrollo parte de una visión que fomenta en los alumnos un interés hacia el conocimiento objetivo, y lo reconoce como un ente vivo que se renueva y crece.
>
> Esta competencia destaca el logro de habilidades de razonamiento. Parte de la concepción de que la matemática es un todo; permite que sus distintas ramas se estudien simultáneamente y se apoyen unas en otras. Se busca que los estudiantes muestren interés por la matemática, disfruten su aprendizaje, lo utilicen en su vida diaria, y sean capaces de vincularla a otras áreas de conocimiento.

Esta competencia puede ser descrita a través de:

I. Comunicación de ideas mediante el lenguaje de la matemática.
II. Desarrollo de procesos de razonamiento, conceptualización y juicio crítico.
III. Resolución de problemas en contextos diversos.
IV. Uso de innovaciones científicas y tecnológicas, para el desarrollo de procedimientos matemáticos y la solución de problemas.
V. Establecimiento de relaciones entre ideas matemáticas y de otros contextos.
VI. Representación de ideas y procesos de la matemática y su aplicación, para la interpretación de fenómenos naturales y sociales.

Por lo anteriormente expuesto el estudiante de primer ingreso debe estar capacitado para resolver problemas de álgebra básica como los que se le presentan en las pruebas aplicadas.

Metodología del trabajo en aula

La metodología utilizada mayoritariamente en el curso de Matemáticas I donde se aplica la prueba de este trabajo son las lecciones magistrales.

Cada tema se desarrolla durante varias sesiones, en ella el profesor muestra, razonando en voz alta y mientras resuelve una serie de problemas cuidadosamente elegidos.

Como se persigue que el alumno llegue a interiorizar el método general, la actuación del profesor ante una dificultad de un alumno debe limitarse a ponerle de manifiesto qué punto de la directriz no ha sido comprendida, empleando para ello el método de interrogación progresiva.

Los problemas se van proponiendo a cada alumno respetando su ritmo individual de trabajo y manteniendo, al igual que en la etapa de ejemplificación, el principio de variación del contenido propuesto por Landa (1972). Esto significa que durante dichas etapas intermedias deben utilizarse problemas de contenido diferente al de los utilizados en las etapas de evaluación.

De manera complementaria se requiere a los alumnos una serie de ejercicios destinados a la reafirmación de los contenidos revisados en las sesiones los que se entregan en fechas previas a la aplicación del examen.

Para evaluar el rendimiento de los estudiantes se realizan exámenes parciales y finales. En el curso se convocan 2 exámenes parciales. Cada uno de estos exámenes consiste en la resolución de ejercicios prácticos que medirán el grado de asimilación por parte del alumno de los conceptos, los resultados, las técnicas y los métodos correspondientes a la materia objeto del examen.

Los exámenes parciales serán, si se aprueban, liberatorios con respecto al examen final. Es decir, el alumno o alumna sólo presenta en el examen final la unidad correspondiente al examen o exámenes parciales no aprobados.

IV. ANÁLISIS DE LOS DATOS CUANTITATIVOS DE LA PRUEBA

En este capítulo se analizan los datos cuantitativos referidos a las calificaciones de los alumnos en los diferentes ítems del cuestionario. En primer lugar se realiza un análisis descriptivo para cada uno de los ítems, después se establecen asociaciones entre los ítems a través de un análisis clúster y por último se comprueba si existen diferencias significativas entre las calificaciones de las diferentes carreras a través de un análisis de la varianza.

Las variables que entran en juego en el análisis son las siguientes:

- Ítems del 1 al 10
- Calificación de cada uno de los ítems para cada sujeto con valores de de 0 a 10
- Calificación total de cada alumno con valores de 0 a 100
- Carrera a la que pertenece el sujeto identificada de 1 a 5

Para el análisis estadístico de los ítems se identificaron las siguientes variables:

En el primer y segundo análisis:
Variable independiente: Ítems
Variable dependiente: Puntuación en el ítem

En el tercer análisis:

Variable independiente: Carrera
Variable dependiente: Calificación total obtenida

Para el análisis estadístico hemos utilizado en programa SPSS en su versión 17.0.

4.1. ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LOS ÍTEMS

En la tabla 3 se muestran los resultados globales de la prueba para cada ítem, media global y desviación típica.

Tabla 3: Resultados globales de la prueba

Descriptive Statistics

	N	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation
Item1	153	0	10	7,05	4,382
Item2	153	0	10	4,20	4,887
Item3	152	0	10	2,84	4,342
Item4	153	0	10	4,65	4,725
Item5	152	0	10	3,51	4,548
Item6	153	0	10	5,29	4,875
Item7	153	0	10	7,51	4,210
Item8	153	0	10	2,29	4,014
Item9	152	0	10	3,85	4,584
Item10	151	0	10	1,91	3,640
Valid N (listwise)	149				

Los datos de la tabla 3 se presentan en el siguiente gráfico:

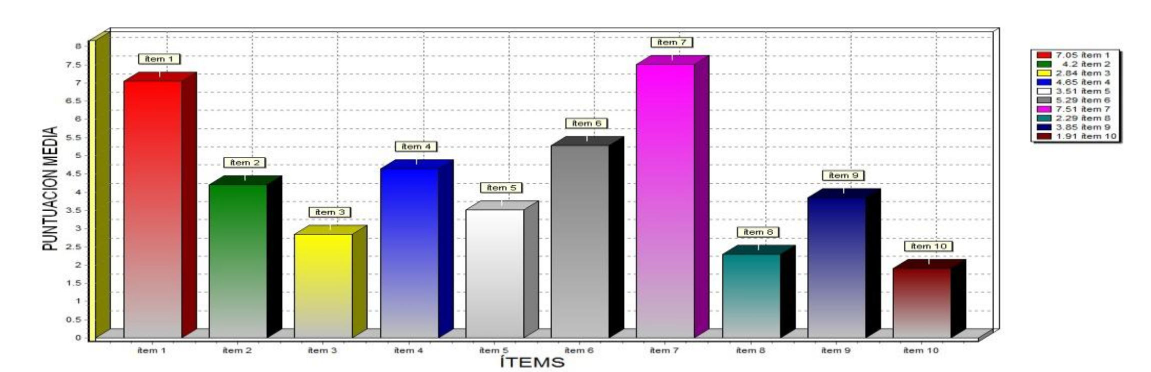

Gráfico 1

Puntuación media de los ítems

La media de las calificaciones de los alumnos para cada ítem muestra la dificultad que presentan; el ítem más difícil es el 10 con una media de 1,91 y el más sencillo es el 7, con una media de 7,05. La desviación estándar, superior a 4 en todos los ítems excepto en el 10, también nos muestra una gran dispersión de las calificaciones para cada uno de los ítems; esto es lógico en cuanto que las calificaciones, en su gran mayoría son 10, en el caso de que la respuesta sea correcta y cero para la respuesta incorrecta; no son muchos los casos en los que se adjudican calificaciones intermedias como puede observarse en los análisis de cada uno de los ítem.

De acuerdo con la dificultad establecida por la media de la totalidad de los alumnos para cada ítem, desde el más sencillo al más difícil, el orden de los ítems sería:

Ítem 7, Ítem 1, Ítem 6, Ítem 4, Ítem 2, Ítem 9, Ítem 5, Ítem 3, Ítem 8, Ítem 10

Presentamos a continuación un análisis de cada uno de los ítems.

Ítem 1

Tabla 4: Calificaciones del ítem 1

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	40	26,1	26,1	26,1
	5	10	6,5	6,5	32,7
	8	1	,7	,7	33,3
	10	102	66,7	66,7	100,0
	Total	153	100,0	100,0	

La mayor parte de los alumnos, el 66,7 %, contestan correctamente a la cuestión y el 26,1 % lo hacen mal, con una calificación de cero; una pequeña parte, un 7,2 % tienen calificaciones distintas.

Ítem 2

Tabla 5: Calificaciones del ítem 2

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	87	56,9	56,9	56,9
	5	3	2,0	2,0	58,8
	7	1	,7	,7	59,5
	10	62	40,5	40,5	100,0
	Total	153	100,0	100,0	

En el ítem 2, el 40,5 % de los alumnos responden correctamente; el 56,9 % lo hacen mal y el 2,7 % tienen una parte del proceso de resolución correcto.

Ítem 3

Tabla 6: Calificaciones del ítem 3

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	104	68,0	68,4	68,4
	5	9	5,9	5,9	74,3
	7	1	,7	,7	75,0
	10	38	24,8	25,0	100,0
	Total	152	99,3	100,0	
Missing	System	1	,7		
Total		153	100,0		

En el ítem 3, un 24,8 % de los alumnos responden correctamente, un 68,4 % lo hacen mal y un 6,6 % tienen algún error en la ejecución de la tarea.

Ítem 4

Tabla 7: Calificaciones del ítem 4

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	74	48,4	48,4	48,4
	5	14	9,2	9,2	57,5
	7	3	2,0	2,0	59,5
	10	62	40,5	40,5	100,0
	Total	153	100,0	100,0	

En este caso, el 40,5 % de los alumnos responden correctamente y el 48,4 % lo hacen mal; un 11,2 % lo hacen con algún error en la resolución de la tarea.

Ítem 5

Tabla 8: Calificaciones del ítem 5

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	92	60,1	60,5	60,5
	5	12	7,8	7,9	68,4
	6	1	,7	,7	69,1
	8	1	,7	,7	69,7
	10	46	30,1	30,3	100,0
	Total	152	99,3	100,0	
Missing	System	1	,7		
Total		153	100,0		

En este caso, el 30,1 % de los alumnos responden correctamente a la cuestión; el 60,1 lo hacen mal y el 9,2 % tienen alguna incorrección en la resolución.

Ítem 6

Tabla 9: Calificaciones del ítem 6

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	68	44,4	44,4	44,4
	5	8	5,2	5,2	49,7
	10	77	50,3	50,3	100,0
	Total	153	100,0	100,0	

En este caso, el 50,3% de los alumnos responden adecuadamente a la cuestión; el 44,4 % lo hacen mal y el 5,2% tiene algún error en la resolución.

Ítem 7

Tabla 10: Calificaciones del ítem 7

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	35	22,9	22,9	22,9
	5	5	3,3	3,3	26,1
	7	2	1,3	1,3	27,5
	10	111	72,5	72,5	100,0
	Total	153	100,0	100,0	

En este caso, el 72,5% de los alumnos responden correctamente a la cuestión; el 22,9 % lo hacen mal y el 4,6% tiene alguna incorrección en la resolución.

Ítem 8

Tabla 11: Calificaciones del ítem 8

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	113	73,9	73,9	73,9
	5	10	6,5	6,5	80,4
	10	30	19,6	19,6	100,0
	Total	153	100,0	100,0	

En este caso, el 19,6% de los alumnos responden correctamente a la cuestión; el 73,9 % lo hacen mal y el 6,5% tiene alguna incorrección en la resolución.

Ítem 9

Tabla 12: Calificaciones del ítem 9

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	85	55,6	55,9	55,9
	5	17	11,1	11,2	67,1
	10	50	32,7	32,9	100,0
	Total	152	99,3	100,0	
Missing	System	1	,7		
Total		153	100,0		

En este caso, el 32,7% de los alumnos responden correctamente a la cuestión; el 55,6 % lo hacen mal y el 11,1% tiene alguna incorrección en la resolución.

Ítem 10

Tabla 13: Calificaciones del ítem 10

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	0	115	75,2	76,2	76,2
	4	1	,7	,7	76,8
	5	13	8,5	8,6	85,4
	10	22	14,4	14,6	100,0
	Total	151	98,7	100,0	
Missing	System	2	1,3		
Total		153	100,0		

En este caso, el 14,4% de los alumnos responden correctamente a la cuestión; el 75,2 % lo hacen mal y el 9,2% tiene alguna incorrección en la resolución.

4.2. COMPARACIÓN DE ÍTEMS

Una vez analizados los ítems de manera individual se procedió a investigar su posible relación mediante el análisis por clúster. El análisis clúster referido a los ítems genera el dendograma que se muestra a continuación.

```
H I E R A R C H I C A L  C L U S T E R   A N A L Y S I S

 Dendrogram using Average Linkage (Between Groups)

                         Rescaled Distance Cluster Combine

    C A S E      0         5        10        15        20        25
  Label     Num  +---------+---------+---------+---------+---------+

  Item3        3   -+-----------+
  Item10      10   -+           +-----+
  Item8        8   -------------+     +-------+
  Item9        9   -------------------+       +---------------------+
  Item4        4   ---+-------------+         |                     |
  Item5        5   ---+             +---------+                     |
  Item2        2   -----------------+                               |
  Item1        1   -------------------------+-------+               |
  Item7        7   -------------------------+       +---------------+
  Item6        6   ---------------------------------+
```

Gráfico 2

En un primer nivel aparecen dos cluster; uno formado por los ítems 1, 7 y 6 y otro constituido por el resto de los ítems. Ambos clúster se constituyen de acuerdo al nivel de dificultad de los ítems; en el primer clúster referido la media de las calificaciones está por encima de 5; los ítems del otro clúster tienen una media inferior a 5; así pues el primer clúster serán los ítems más sencillos y el segundo los más difíciles.

En un segundo nivel de asociación los ítems 3, 10, 8 y 9 constituyen un clúster y los ítems 4, 5 y 2 otro, aparentemente en esta asociación se sigue manifestando el agrupamiento de los ítems por el nivel de dificultad de los mismos, sin embargo el ítem 5 su situación resulta atípica al ser más sencillo que el ítem 9; probablemente la causa esté en que el ítem 5 es similar al 4; ambos son desarrollo de la potencia de un binomio.

4.3. COMPARACIÓN ENTRE LAS DIFERENTES CARRERAS

Con el análisis de la varianza tratamos de comprobar si el resultado de los alumnos en los diferentes ítems depende de la carrera que están realizando. Previamente hemos comprobado la idoneidad del modelo para estos datos viendo que los datos siguen una distribución normal de media cero. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

La tabla 14 recoge las medias en las calificaciones de los alumnos para cada uno de las carreras.

Tabla 14: Media de los alumnos por carrera

Carrera	Mean	N	Std. Deviation
1	54,52	29	18,975
2	30,22	37	18,650
3	55,20	30	27,442
4	25,37	27	19,996
5	51,33	30	22,746
Total	43,01	153	24,957

La tabla 15 corresponde al ANOVA

Tabla 15: Análisis de varianza

ANOVA Table

			Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Total * Carrera	Between Groups	(Combined)	24833,719	4	6208,430	13,156	,000
		Linearity	97,546	1	97,546	,207	,650
		Deviation from Linearity	24736,172	3	8245,391	17,472	,000
	Within Groups		69843,275	148	471,914		
	Total		94676,993	152			

Como se observa hay diferencias significativas entre las medias de los grupos dado que el nivel de significación del contraste 0.05 es mayor que el p-valor obtenido que es 0.

El resultado de la comparación múltiple a posteriori por el método Scheffe se refleja en la tabla 16.

Tabla 16: Relaciones entre carreras

Scheffe[a,,b,,c]

Carrera	N	Subset	
		1	2
4	27	25,37	
2	37	30,22	
5	30		51,33
1	29		54,52
3	30		55,20
Sig.		,944	,975

El análisis establece que hay similitud entre los grupos 4 y 2 y entre los grupos 5, 1 y 3 y diferencias significativas entre las dos agrupaciones.

Cabe destacar que la relación entre las carreras 4 y 2 que se presenta en la tabla 16, siendo estas carreras las de Ingeniero en Obras y Servicios e Ingeniero en Recursos Naturales y Ambientales, puede explicarse por la poca demanda que tienen por parte de los alumnos; por tanto no tienen un puntaje mínimo de admisión y por consecuencia son las que históricamente presentan menores puntajes, es decir, ingresan alumnos con cualquier promedio obtenido en la formación del bachillerato, además con cualquier puntaje alcanzado en la Prueba de Aptitud Académica que se les aplica para el ingreso al nivel superior. Resulta además notable que la lógica indicaría que las carreras de corte científico tecnológico teóricamente deberían de tener los alumnos de mejor rendimiento académico, lo cual no se cumple como se muestra con el presente trabajo.

V. ANÁLISIS DE LOS ERRORES EN LA RESOLUCIÓN DE LAS TAREAS

En este capítulo describiremos la forma en la que se realizó el análisis de los errores que se presentaron en los ítems de las pruebas revisadas y se detallaran las características principales de esos errores.

Para iniciar el estudio de los errores de los ítems, se consideraron los datos obtenidos del análisis estadístico el cual nos indicaba la cierta tendencia de agrupamiento de los mismos debidos principalmente por la afinidad del contenido temático entre ellos. Por esta razón decidimos realizar el análisis 5 de los 10 ítems en qué consistía la prueba considerando el índice de dificultad que presentaban, de esta manera una vez seleccionados los ítems representativos se procedió examinar cada una de las respuestas de las 153 pruebas aplicadas en esta investigación.

Inicialmente se distinguieron los errores que se presentaban en cada uno de los ítems de las pruebas, enseguida se clasificaban de acuerdo a criterios comunes de aquellos errores que coincidían entre las pruebas y finalmente se categorizaron de una manera más general tratando de resaltar las relaciones entre ellos. Por último se clasifican los errores de acuerdo a las categorías existentes surgidas de investigaciones previas.

5.1. ERRORES DETECTADOS

Detallamos a continuación los diferentes errores detectados:

i. **Eliminación incorrecta de denominadores**: En este error el alumno reconoce que para eliminar un denominador debe multiplicar toda la expresión por un múltiplo del denominador pero omite multiplicar todos los elementos de la misma, alterando de esta forma el resultado final; así mismo, el alumno pretende aplicar las reglas algebraicas validas de las propiedades de la transposición de términos, pero presenta dificultades para recordar que es necesario el que un término esté como denominador de todo el miembro para que pueda transponerlo multiplicando al otro miembro de la expresión.

En unos casos, ***multiplica por el denominador sólo el miembro de la desigualdad afectado por el denominador***.

Por ejemplo, en el ítem 10, $\frac{2x+3}{2} + 4 < 3x + 5$ para resolverlo utilizan un procedimiento como el siguiente:

$2\,(\frac{2x+3}{2}) + 4 < 3x + 5$; $4x + 6 + 8 < 3x + 5$; $4x - 3x < 5 - 6 - 8$; $x < -9$

Este mismo procedimiento erróneo se observa en las producciones de 34 sujetos.

En otros caso, ***quita el denominador al pasarlo, multiplicando, al otro miembro de la igualdad, sin considerar que no divide a todo el miembro de la desigualdad en la que se ubica.***

Otro ejemplo en el mismo ítem 10, para resolverlo los alumnos utilizan un procedimiento como el siguiente:

$2x + 3 + 4 < 3x + 5\,(2)$; $2x + 3 + 4 < 3x + 10$; $2x + 7 < 3x + 10$; $2x - 3x < 10 - 7$; $-x < 3$

Este error lo identificamos en 10 sujetos

Por último, otra modalidad de supresión incorrecta de denominadores***, consiste en suprimir el denominador que coincide con un número del numerador, sin tener en cuenta que afecta a otros sumandos del miembro afectado por el denominador***.

En el mismo ítem 10, para resolverlo utilizan un procedimiento como el siguiente:

$x + 3 + 4 < 3x + 5$; $x - 3x < 5 - 3 - 4$; $-2x < -2$; $X < -2 / -2$; $X < 1$

Estos errores se detectaron en las pruebas de 28 sujetos.

En total este error se comete en 72 ocasiones.

Desde una perspectiva general este error podríamos clasificarlo como técnico, según la clasificación de Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987); según Radatz (1979) se deben a ‘un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos’.

Para la clasificación más específica sobre álgebra que realiza Caputo y Macías (2006), estaría dentro de la categoría E4.

ii. Errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas: Dentro de esta clasificación encontramos aquellas respuestas en las que aparentemente se sigue un procedimiento de resolución coherente pero se comete un error al realizar alguna de las operaciones básicas aritméticas-algebraicas, tales como, multiplicación, reducción de términos semejantes, operaciones con números enteros, decimales o fracciones que incluyan variables. Algunos ejemplos serian:

Para el Ítem 10, por ejemplo, resuelven de la forma,

$2\left(\frac{2x+3}{2}\right) + 4 < 3x + 5$; $2x + 3 + 8 < 6x + 10$; $2x - 6x < -3-8+10$; $4x < 21$;

$X < \frac{21}{4}$

Para el Ítem 3 que está referido a la resolución del sistema*:*

$2x+2y+2z = 4$

$4x+10y+6z= 2$

$6x-2y-4z = -2$

Un alumno en la parte final del proceso de resolución obtiene $8y = -16$ de donde $y = -16 / -8$; $y = 2$

Otro alumno, en el mismo ejercicio, establece que $-50+6=44$

Para el ítem 5, por ejemplo (se destaca en negrita el error)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2y^2 + 12y + 38 \\ \hline
Y + 3 & 2y^3 + 5y^2 + \quad 2y + 15 \\
 & -2y^3 + \boldsymbol{6y^2} \\ \cline{2-2}
 & \qquad 12y^2
\end{array}
$$

Este error fue identificado 15 veces en el ítem 10, 23 veces en el ítem 3 y 10 veces en el ítem 2.

De manera general el error aparece en 48 ocasiones.

Desde una perspectiva general este tipo de errores podríamos considerarlo como errores técnicos según Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) y según Radatz (1979) a la categoría 3. Para Caputo y Macías (2006) sería un error tipo E3.

iii. Procedimiento inconcluso: Se detectaron también algunas pruebas en las cuales el procedimiento estaba parcialmente correcto pero no se terminó o se interpretaba de manera incorrecta el resultado.

Por ejemplo, en el ítem 10 un alumno presenta como resultado, $X < \dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{2}{1}}$

Estos errores se presentaron en las pruebas en 8 ocasiones.

De acuerdo con la revisión de la literatura lo encontramos como error E5 de la clasificación de Caputo y Macías (2006).

iv. Procedimientos propios incorrectos e inferencias no validas: En algunas de las pruebas se identificaron errores en los cuales los alumnos utilizaban algún tipo de procedimiento en el que hacen inferencias no validas de reglas parcialmente recordadas, errores al transcribir datos, aplicación de métodos de tanteo y otras operaciones que aparentemente se realizan por el simple hecho de desarrollar algún procedimiento.

Por ejemplo:

Para el ítem 10,

$\frac{2x+3}{2} + 4 < 3x + 5$; $\frac{2x+3}{2}+4 < 3x + 4 - 5 + 4$; $\frac{2x+3}{2}+4 < 3x - 3$; $6x + 6 < 3x - 3$

Para el ítem 5 que consiste en desarrollar el binomio $(ab^2 + y^2)^3$ se presenta como respuesta $a^3y^5 + b^5a^3y^5 + b^5y^5$ y en otro caso $3(ab^2) + 3(y^2) = 3ab^2 + 3y^2$

Para el ítem 3, relativo a la resolución de un sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{l}
2x + 2y + 2z = 4 \\
4x + 10y + 6z = 2 \\
\underline{6x - 2y - 4z = -2} \\
12x + 10y + 4z = 4
\end{array}
$$

En este caso, el alumno suma de manera vertical, los coeficientes de las incógnitas manteniendo sin cambio las incógnitas y al mismo tiempo suma los valores de las constantes.

En otros casos:

$2x + 2y + 2z = 6\ xyz$

$4x + 10y + 6z = 20\ xyz$

$6x - 2y - 4z = 8xyz$

En este caso, el alumno suma de manera horizontal, el valor de los coeficientes de las incógnitas y multiplica las incógnitas.

Otro caso llamativo de procedimiento propio inadecuado para el ítem 3:

$2x+2y+2z = 4$; $2(-4) + 2(-4) + 2(-4)$; $-8 + 8 - 8$; x y z; haciendo lo mismo con otras dos ecuaciones.

Para el ítem 2 relativo a la división

$$\frac{\mathbf{2y^3 + 5y^2 + 2y + 15}}{\mathbf{y + 3}}$$

Se presenta como resultado $\frac{24y^6}{3y} = 8y^6$; en otro caso

$$\frac{y^2(2+1)(y+5) + (2+5)(y+3)}{y+3} = y^2(2+1)(y+5) + (2+5)$$

EJEMPLO 14:

= **3y** ($2y^3+5y^2+2y+15$)= $6y^4+15y^3+6y^2+45y$

En este caso transpone el divisor como un factor multiplicativo de la expresión.

EJEMPLO 15:

$$\begin{array}{l|l}
 & \boldsymbol{y^2 - 5y - y - 5} \\
\hline
Y + 3 & 2y^3 + 5y^2 + \quad 2y + 15 \\
 & -2y^3 - 5y^2 - 2y + 15
\end{array}$$

EJEMPLO 16:

$$\begin{array}{l|l}
 & -2y^2 - 2y + 1 \\
\hline
Y + 3 & 2y^3 + 5y^2 + \quad 2y + 15 \\
 & -2y^3 \ \mathbf{- 3y^2} \\
\hline
 & \quad 2y^2 + 2y \\
 & \quad -2y^2 - 3y \\
\hline
 & \qquad -y + 15 \\
 & \qquad -y + \ 3 \\
\hline
 & \qquad 8
\end{array}$$

Ejemplo 17: Resta las potencias de cada uno de los términos y elimina la incógnita del denominador.

$$\frac{\mathbf{2y^2 + 5y \quad + 2 + 15}}{\mathbf{3}}$$

Ejemplo 18:

$$\frac{2y^3}{y} + \frac{5y^2}{y} + \frac{2y}{y} + \frac{15}{3} = 2y^2 + 5y + 2 + 5$$

Ejemplo 19:

$$\frac{2y^3 + 5y^2}{y+3} + \frac{2y + 15}{y+3} = \frac{7y^5}{y+3} + \frac{17y}{y+3} = \frac{24y^6}{3y} = 8y^6$$

Este tipo de errores se detectó 38 veces en el ítem 10, 15 veces en el ítem 8, 20 veces en el ítem 5, 28 veces en el ítem 3 y 48 veces en el ítem 2.

En total este tipo de error se detectó en 149 ocasiones.

De acuerdo con la revisión de la literatura, este tipo de errores, se encuentran identificados en diversas investigaciones realizadas al respecto. Según Radatz (1979) son identificados como "errores de asociación , que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares" así como "errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes". Por su parte en Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), los describen como "inferencias no válidas lógicamente, refiriéndose a las fallas que tienen que ver con el razonamiento".

Según la categorización especifica de Caputo y Macías (2006) sería un error de tipo E1.

v. **Aplicación parcial de regla de factorización por factor común**: Este error se presenta cuando el alumno intenta separar los factores comunes pero no recuerda el paso siguiente del procedimiento dejando inconcluso la operación o no verifica la validez del factor común así como no respetar las reglas de los exponentes del citado factor.

Por ejemplo en el ítem 8 referido a factorizar la expresión, $8x^2y^3-2xy^2+4x^3y^2+x^2y^2$ y cuyo resultado aceptado es xy^2 ($8xy -2 + 4x^2 + x$), se presenta como respuesta $2xy^2$ ($4xy -1$) + x^2y^2 ($4x + 1$) y en otros casos $xy(8xy^2 – 2y + 4x^2y + xy)$

En 51 ocasiones se presenta este tipo de error.

Estos errores están relacionados con los descritos en Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987),como ”teoremas o definiciones deformadas de un principio, regla, teorema o definición identificable”. Para Radatz (1979), este error estaría causado por un aprendizaje deficiente. En la categorización de Caputo y Macías (2006) sería un error de tipo E4

vi. Asociación incorrecta de productos notables: En este caso los alumnos intentan asociar las formas y formulas de productos notables para resolver la operación. Por ejemplo en el caso del ítem 8 sobre factorización de la $8x^2y^3-2xy^2+4x^3y^2+x^2y^2$ se presenta como respuesta: $[2(2xy) - (xy)]^2$

Este error se detectó en 15 ocasiones.

Para Radatz (1979) este tipo de errores se identifican como: “errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento ocasionados cuando los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado”. Para Caputo y Macías (2006) este error estaría en la categoría E4

vii. Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra: El alumno intenta resolver la expresión algebraica como una operación aritmética, ya sea suma, resta o multiplicación de los coeficientes y exponentes de la misma

Por ejemplo para el ítem 8 presentan como resultado, $8x^2y^3+4x^3y^2+x^2y^2-2xy^2 =12x^5y^4 - 2x^3y^4 = 10 x^3$

Este error se detecto en 9 ocasiones.

Estos errores estarían relacionados con los reseñados en Radatz (1979) como: “errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos donde se incluyen todas las deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para las tareas matemáticas”

Para Caputo y Macías (2006) sería un error de tipo E3.

viii. **Error en la determinación de la potencia de otra potencia:** Este error se encuentra en algunas pruebas en las cuales el alumno desarrolla la fórmula para el binomio al cubo pero se equivoca al aplicar la regla de multiplicación de los exponentes al parecer por una omisión al multiplicar los mismos.

Por ejemplo al resolver el ítem 5 sobre desarrollo de un binomio $\boldsymbol{(ab^2 + y^2)^3}$

se presenta como solución $a^3b^8 + 3\ (ab^2)^2\ y^2 + 3\ (ab^2)\ (\ y^2)^2 + \mathbf{8} = a^3b^8 + 3\ a^2b^4y^2 + 3\ a^2b^2y^4 + y^8$

Esto tipo de errores se presentan en 17 ocasiones.

Este error está relacionado con los descritos en Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), como errores técnicos en los cuales: "los errores de cálculo y otros derivados de la ejecución de algoritmos." Mientras que para Radatz (1979), este error estaría causado por un aprendizaje deficiente y en la categorización de Caputo y Macías (2006) sería un error de tipo E3 y de tipo E4.

ix. **Resolución aditiva de la potencia de un binomio:** En estos casos los alumnos multiplican los exponentes de cada uno de los elementos de la expresión algebraica ignorando la formula correcta de resolución.

Por ejemplo para el desarrollo del binomio $\boldsymbol{(\ ab^2 + y^2\ )^3}$ se presenta como solución $(ab^2 + y^2\ )^3 = a^3b^6 + y^6$

Estos errores se encontraron en 47 ocasiones.

Este error está relacionado con el descrito por Radatz (1979) como un error debido a un aprendizaje deficiente y para Caputo y Macías (2006) sería un error de tipo E3.

x. **Aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio*:*** Este error se presenta cuando el estudiante intenta aplicar la formula correspondiente pero al parecer no es capaz de recordarla de manera correcta aunque en algunos casos los procedimientos posteriores tengan coherencia.

Por ejemplo para el desarrollo de ***(ab^2 + y^2) ^{3}*** se presenta como respuesta $3\ a^3b^6 + 3\ a^3b^4y^2 + 3y^4ab^2+3y^6$

Este error aparece en 4 ocasiones.

Según la revisión de la literatura estos errores están relacionados con los descritos en Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987),como : “teoremas o definiciones deformadas que se producen por deformación de un principio, regla , teorema o definición identificable”; sería debido a la aplicación de reglas irrelevantes para Radatz (1979), y un error de tipo E4 según Caputo y Macías (2006).

xi. Error al realizar productos de polinomios: En este error el alumno descompone la expresión algebraica en factores simples pero se equivoca al multiplicarlos para encontrar el resultado, por ejemplo:

$(ab^2 + y^2)^3$

$(ab^2 + y^2)(ab^2 + y^2) = a^2b^4 + ab^2y^2+ y^2ab^2+y^4 =$

$= a^2b^4 + ab^2y^2+ y^2ab^2+y^4 (ab^2 + y^2) =$

$= a^3b^6+a^2b^4y^2+ a^2b^4y^2+ ab^2y^4+y^2a^2b^4+y^4ab^2+y^4ab^2$

$= 2\ a^2b^4y^2+ a^3b^6+ ab^2y^4+y^2a^2b^4+2y^4ab^2+y^6$

Este tipo de error se encontró 14 ocasiones.

Según la revisión de literatura efectuada este error está relacionado con los descritos en Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), como errores técnicos en los cuales: “los errores de cálculo y otros derivados de la ejecución de algoritmos.” Seria de tipo 3 según la clasificación de Radatz (1979) y de tipo E4 para Caputo y Macías (2006).

xii. Error de cálculo simple: Este error se presenta cuando el alumno se equivoca al realizar alguna de las operaciones básicas de la aritmética y por lo tanto obtiene un valor incorrecto que sigue utilizando sin detectar el error.

Este tipo de errores se detectó en 19 ocasiones.

Este error está relacionado con los descritos en Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), como errores técnicos en los cuales: "los errores de cálculo y otros derivados de la ejecución de algoritmos", de tipo 3 según Radatz (1979) y de tipo E3 según Caputo y Macías (2006).

Así como en Esteley y Villareal (1990, 1996) con los presentados como: "errores al operar números reales en cálculos.

5.2. CUANTIFICACIÓN DE ERRORES

Los errores que en total se presentaron se muestran en la tabla 17:

Tabla 17: Errores por ítem

	Errores												
Ítem	i	ii	iii	iv	v	vi	vii	viii	ix	x	xi	xii	E_t
2	0	10	0	46	0	0	0	0	0	0	0	0	56
3	0	23	0	28	0	0	0	0	0	0	0	19	70
5	0	0	0	20	0	0	0	15	47	4	14	0	100
8	0	0	0	15	52	16	9	0	0	0	0	0	92
10	71	15	8	38	0	0	0	0	0	0	0	0	132
Total	71	48	8	147	52	16	9	15	47	4	14	19	

Donde Et = Numero de errores total

En la tabla 17, se puede apreciar la frecuencia con que se presentaron los errores en los ítems analizados y que se describieron anteriormente. Siendo el que más presento errores el ítem 10.

De acuerdo a la frecuencia de los errores en cada carrera se obtuvieron los datos siguientes:

Tabla 18: Errores por carrera

	Errores												Total
Carreras	i	ii	iii	iv	v	vi	vii	viii	ix	x	xi	xii	
LAE	13	17	1	13	15	2	1	5	4	2	6	8	87
IOS	7	7	3	50	10	7	0	1	22	0	2	4	113
TSUEMA	14	14	2	16	10	2	0	4	5	0	6	6	79
IRNA	2	2	1	49	5	1	7	2	8	1	0	1	79
TUR	7	7	1	19	10	3	0	5	6	1	0	0	59

Donde:

LAE: Licenciado en Administración de Empresas
IOS: Ingeniero en Obras y Servicios
TSUEMA: Técnico Superior en Electrónica y Mecánica Automotriz
IRNA: Ingeniero en Recursos Naturales y Ambientales
TUR: Licenciado en Turismo

Como se puede apreciar la carrera con mayor frecuencia de errores fue la de Ingeniero en Obras y Servicios con 113. Cabe destacar el alto número de errores que se presentan en las carreras de orientación profesional científica como lo son las Ingenierías lo que puede ser influenciado por los bajos puntajes de admisión que exigen estas carreras al ser menor demandas que las demás.

VI. CONCLUSIONES

En este capítulo, se presentan las conclusiones de este trabajo y hacemos un resumen de todo aquello que consideramos más significativo de nuestra investigación. El capítulo se presenta en tres secciones; en la primera presentamos las conclusiones respecto a los objetivos planteados al inicio de la misma, enseguida se describen algunas limitaciones del trabajo y por último posibles vías para continuar el estudio.

6.1 CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS PLANTEADOS

O1. Analizar el rendimiento de los alumnos de manera global

De acuerdo a los datos estadísticos obtenidos en este trabajo se pone de manifiesto el bajo rendimiento de los alumnos de primer ingreso del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara; de manera global el promedio de 43 , sobre un máximo de 100 de calificación, del primer examen departamental el cual corresponde a una calificación no aprobatoria de 60 de acuerdo a la escala de evaluación utilizada en la citada institución.

O_2. Analizar el cuestionario o examen que realizan los alumnos en su fiabilidad, dificultad y asociación de los ítems

Tras el análisis de la fiabilidad de los datos cuantitativos procedentes de la prueba aplicada obtuvimos un alfa de Cronbach de 0,760. Por lo que el examen se considera fiable.

Con respecto a la dificultad de los ítems de acuerdo a los resultados obtenidos el ítem más difícil es el 10 con una media de 1,91 y el más sencillo es el 7, con una media de 7,05. La desviación estándar, superior a 4 en todos los ítems excepto en el 10, también nos muestra una gran dispersión de las calificaciones para cada uno de los ítems; esto es lógico en cuanto que las calificaciones, en su gran mayoría son 10, en el caso de que la respuesta sea correcta y cero para la respuesta incorrecta; no son muchos los casos en los que se adjudican calificaciones intermedias como puede observarse en los análisis de cada uno de los ítem.

O_3. **Analizar el rendimiento de los alumnos desde el punto de vista de las diferentes carreras a las que pertenecen**

En relación con el rendimiento de los alumnos de cada carrera es importante resaltar que los datos obtenidos nos muestran un fenómeno aparentemente poco lógico al ser las carreras de Ingeniero en Recursos Naturales y Ambientales con un promedio de 25.37 e Ingeniero en Obras y Servicios con un promedio de 30.22, las que presentan los más bajos rendimientos; siendo estas carreras de corte científico- tecnológico cabría esperarse un mayor nivel de conocimientos de los alumnos aceptados en ellas. Como se comentó anteriormente estos rendimientos pueden estar relacionados con la baja demanda de aspirantes que de manera histórica tienen estas carreras y que ocasiona que no haya un puntaje mínimo de admisión para el ingreso a las mismas; esto se refleja en los bajos puntajes que obtienen los aspirantes a estas carreras en la Prueba de Aptitud Académica que aplica la Universidad para su aceptación; como se demuestra en este estudio resulta estar muy relacionado con el rendimiento que tienen una vez en el curso de primer ingreso.

O_4. **Describir los errores que cometen los alumnos en la ejecución de las tareas**

Una vez que se analizaron los errores que cometen los alumnos en la ejecución de las tareas de las pruebas analizadas se identificaron 12 tipos de errores particulares en la resolución de las mismas y cuya relación con la literatura revisada fue descrita en él capitulo V. Estos errores fueron:

i. Eliminación incorrecta de denominadores
ii. Errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas
iii. Procedimiento inconcluso
iv. Procedimientos propios incorrectos e inferencias no validas
v. Aplicación parcial de regla de factorización por factor común
vi. Asociación incorrecta de productos notables
vii. Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra
viii. Error en la determinación de la potencia de otra potencia
ix. Resolución aditiva de la potencia de un binomio
x. Aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio

xi. Error al realizar productos de polinomios

xii. Error de cálculo simple

Es importante destacar que a lo largo de este estudio se ha puesto de manifiesto la grave problemática que se presenta con respecto al bajo rendimiento de los alumnos lo que de manera inicial se evidencia con los datos estadísticos obtenidos en esta investigación.

Considerando lo anterior en este trabajo se trata de descubrir las causas y los errores específicos que pueden ser el origen de estos bajos rendimientos.

Como se ha puesto de manifiesto, se encuentran errores básicos que no corresponderían al nivel de estudio donde se realizó la investigación; aparentemente estos errores están ocasionados por deficiencias de los alumnos en su formación matemática en niveles de bachillerato y secundaria anteriores a su ingreso al nivel del Licenciatura.

Así pues, este trabajo pone de manifiesto serias deficiencias en la formación matemática de los alumnos, en el caso específico del álgebra básica, en alumnos de primer curso de diferentes carreras; especialmente es significativo para el caso de los alumnos de carreras científico-tecnológicas.

Finalmente, consideramos la presente investigación como un punto de partida importante para exponer a mayor detalle las causas de esta problemática para que le sirva a la institución universitaria para proponer vías de solución internas y a la vez que pueda manifestar a las instituciones de nivel medio y medio superior las deficiencias con las que se reciben a los alumnos al momento de ingresar y de esta manera tratar que se involucren desde su perspectiva a la solución del tema tratado.

6.2 LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Una de las principales limitaciones en este caso fue la de que tanto la muestra como el instrumento aplicado ya estaban diseñados por lo cual solo nos limitamos a la interpretación de los resultados obtenidos.

Al mismo tiempo consideramos que otro de los aspectos que se puede mejorar se refiere a la muestra de sujetos; así una muestra más amplia nos puede mejorar la información con la que contamos.

Por otra parte debido a la limitante del tiempo se analizaron solo los 5 ítems de mayor dificultad de acuerdo a los datos estadísticos aplicados, por lo que se considera que si se analizan la totalidad de ítems de las pruebas pudiera encontrarse una mayor cantidad de información valiosa.

6.3 POSIBLES VÍAS DE INVESTIGACIÓN

Considerando la posibilidad de continuación de la investigación en una posterior investigación de tesis doctoral, podemos mencionar algunas vías probables para la continuación de este estudio:

- Ampliar el tamaño de la muestra considerando que se tienen los datos de ciclos anteriores al referido en la presente investigación, con lo cual se enriquecería el análisis de los errores.

- Analizar la posibilidad de implementar propuestas didácticas diferentes que consideren distintos tipos de representaciones, incluyendo el uso de nuevas tecnologías, para la resolución de las tareas algebraicas a los utilizados en las clases magistrales que se emplean en la actualidad.

- Considerar el mejoramiento del instrumento utilizado o en su caso la propuesta de un instrumento nuevo diseñado acorde a las propuestas didácticas señaladas en el punto anterior.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Astolfi, J. P. (1999) .*El "error", un medio para enseñar.* Colección: investigación y enseñanza, n° 15.Sevilla, Editora Díada.

Ary, D., L.CH. y RAZAVIEH, A. (1982)**:** *Introducción a la investigación pedagógica*. México: Interamericana.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Sıntesis.

Baillé, J. y Maury, S. (Eds.)(1993*). Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation. Les Sciences de l'Education*, 1-3. (pp. 92-126). New York: Academic Press.

Behr, M., Erlwanger, S., & Nichols, E. (1980). *How children view the equal sign. Mathematics Teaching*, 92, 13-18.

Biehler, R., Scholtz, R., Strasser, R. y Winkelmann, B. (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G., Davis, R. Y Werner, T. (1986). "Observing students at work". En B. Christiansen, A.G . Howson , y M. Otte, (Eds.). *Perspetives on Mathematics Education*. Dordrecht , Reidel Publishing Company..

Caputo, S. y Macías, D. Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Algebra I" al elaborar demostraciones. Descargado el 30 de agosto de 2010 de: http:// www.unne.edu.ar/ Web / cyt/ cyt2006/ 09-Educacion/ 2006-D-012.pdf.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Granada: Comares.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.*), La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Cifarelli, V. V. (1998). *The development of mental representations as a problem solving activity, Journal of Mathematical Behavior, 17* (2).

Collis, K.F. (1975). *A study of concrete and formal operations in school mathematics: a piagetian viewpoint*. Melbourne: Australian Council for Educational Research.

Coriat, M. y Scaglia, S. (2000). Representación de los números en la recta. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(1), 25-34.

Cuoco, A. y Curcio, F. (2001). *The roles of representation in school mathematics* . Reston, VA: NCTM.

Davis, R. B. (1984). *Learning Mathematics: The cognitive science approach to mathematics education.* Norwood, NJ: Ablex.

Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de la matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.*), Investigación en Matemáticas Educativa II.*, pp. 173 - 202. México: CINVESTAV.

Enfedaque, J.(1990). De los números a las letras. *Suma* 5. 23-34.

Esteley, C.; Villarreal, M. (1990). *Categorización de errores en Matemática*. XIII REM. San Luis Esteley, C.: Villarreal, M. 1992. Análisis y categorización de errores en Matemática. XV REM. Tandil.

Esteley, C.; Villarreal, M. 1996. Análisis y categorización de errores en matemática. *Revista de Educación Matemática*. Volumen 11. Nº 1. (16−35). Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba.

Feferman, S. (1989). *The number systems. Foundations of algebra and analysis*. New York: Chelsea Publishing Company.

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Friedlander, A . y Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra . En Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* . Holanda : NCTM. - Prefacio.

Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España.

Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism.* London: Falmer Press.

Goldin, G. A. (1993). The IGPME working group on representations. En I. Hirabayahi, N. Noluhiko, S. Keiichi y L. Fou-Lai (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 96). Tsukuba, Japan: University of Tsukuba.

Goldin,.G. y Shteingold, M. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. En Cuoco y Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics*, pp. 1–21. Reston, VA: NCTM

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada.

González Marí, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 19, 3, pp. 333- 335.

Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Hitt, F. (1997, julio). *Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum*. Presentado en el XI Relme, Morelia, México.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Jiménez, J. E. (1999). *Psicología de las dificultades de aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

Kant, E. (1978). *Crítica de la razón pura*. Madrid, España: Alfaguara.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515- 556). New York: MacMillan Publishing Company.

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in mathematics*, 12. 317-326.

Lacasta, E. (1995). *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques: Illusions et contrôles*. Tesis doctoral, Université Bordeaux I, Burdeos, Francia.

Landa, L. (1972). *Cibernetica y pedagogía*. (Labor, Barcelona).

Lesh, R. Post, T. y Berh, M. (1987) . Dienes revisited : Multiple embodiments in computer environments . En I. Wirszup y R. Streit (Eds.), *Developments in school mathematics education around the world*, pp. 647-680. Reston , VA: NCTM.

Movshovitz-Hadar, N. ; Zaslavsky, O. y Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 1, pp. 3-14.

Mulhern, G. (1989). Between the ears: Making inferences about internal processes. In B. Greer & G. Mulhern (Eds.) *New Directions in Mathematics Education.* London: Routledge

Palarea, M.M y Socas, M.M.(1999-2000). Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico. *El Guiniguada*, 8/9. 319-336.

Plasencia , I. (2000). *Análisis del papel de las imágenes en la actividad matemática. Un estudio de casos*. Tesis doctoral, Universidad de la Laguna, Tenerife.

Radatz , H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 163-172.

Radatz, H. (1980). Student's errors in the mathematics learning process: A Survey. *For the Learning of Mathematics*. Vol 1 (1).

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.

Rico, L. (1999). Los organizadores del currículo de matemáticas. En Rico, L. y otros. *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria*. Erre Eme S.A. Buenos Aires

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. En A. Gutiérrez y L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 87-102). Valencia: PME.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.

Romero, I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Ruiz, F. (2000). *La tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Schmidt, S. & Bednarz, N. (1997) Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de resolution de problèmes: Difficultés rencontrées par les futures enseignants. *Educational Studies in Mathematics*. *32(2)*, 127.155.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: Falmer Press.

Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, España: Morata.

Socas, M. (1997) Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (coord.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.125-154). Barcelona: Horsori.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R.(1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias*, *14(3)*. 351-363.

UDG, Universidad de Guadalajara. (2008). Bachillerato general por competencias del Sistema de Educación Media Superior de la Universidad de Guadalajara. Descargado el 8 de mayo de 2010 de http:// www.sems.udg.mx/ principal/ BGCDocumento_base.pdf.

Van Dalen, D. B. y Meyer, W. J. (1994): *Manual de técnicas de investigación educacional*. Barcelona, Paidós Educador.

Vilchez, E. (2005). *Impacto de las Nuevas Tecnologías de la información y la comunicación para la enseñanza de la matemática en la educación superior*. Descargado el 30 de agosto de 2010 de http:// www.cidse.itcr.ac.cr/ revistamate/ ContribucionesV7_n2_2006 / IMPACTO/ ImpactoTecn.html

ANEXOS

ANEXO 1. La prueba aplicada

Nombre: ____________________ **Carrera:** ________________ **Fecha:** ________ **ID: A**

PRIMER EXAMEN DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS I, 2008-B

Resuelve lo que se te pide, anexando tus procedimientos en hojas por separado. Recuerda que no se permite hacer uso de calculadora, formulario ni celular.

1. Encuentra el valor de x para la siguiente ecuacion: $3(x+4)-4=2x-5$
2. Efectuar la siguiente división: $\dfrac{2y^3+5y^2+2y+15}{y+3}$
3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:
   2x+2y+2z=4 ; 4x+10y+6z=2 ; 6x-2y-4z=-2
4. Desarrollar el siguiente binomio: $\left(2r-3s^2\right)^2$
5. Desarrolla el siguiente binomio: $\left(ab^2+y^2\right)^3$
6. Factoriza el siguiente polinomio: $x^2-15x+54$
7. Desarrolla la siguiente expresión: $4xy\left(5x+3y-3xy\right)$
8. Factorizar la siguiente expresión: $8x^2y^3-2xy^2+4x^3y^2+x^2y^2$
9. Encontrar el intervalo de solucion de la desigualdad: $4 < 3x - 4 < 11$
10. Resolver la siguiente desigualdad: $\dfrac{2x+3}{2}+4<3x+5$