Universidad de Granada
Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática

Invención de Problemas Aritméticos por Estudiantes con Talento Matemático: Un Estudio Exploratorio

Johan Espinoza González
GRANADA, 2011

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

INVENCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS POR ESTUDIANTES CON TALENTO MATEMÁTICO: UN ESTUDIO EXPLORATORIO

TRABAJO FIN DE MÁSTER PRESENTADO POR

Johan Espinoza González

PARA OPTAR POR EL GRADO DE MÁSTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

DIRECTORES

Dr. José Luís Lupiáñez Gómez   Dr. Isidoro Segovia Alex

GRANADA, 2011

Esta investigación se ha sido realizada en el seno del Grupo de investigación "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM-193) y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Su autor es becario de la Universidad Nacional de Costa Rica y de la Comisión Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas del Ministerio de Ciencia y Tecnología del mismo país

A mi amada esposa Vivi. Por tu compañía y ayuda incondicional, Por tu amor y comprensión. Por siempre mi Sol...

AGRADECIMIENTOS

A Dios por darme la oportunidad de crecer profesionalmente y guiarme en cada paso que doy.

A mis tutores Dr. José Luís Lupiáñez y Dr. Isidoro Segovia por sus valiosos aportes, orientaciones y dedicación para terminar satisfactoriamente este trabajo de investigación.

A los profesores del Máster de Didáctica de la matemática por su valiosa formación.

A la Junta de Becas de la Universidad Nacional de Costa Rica, al Ministerio de Ciencia y Tecnología (MICIT) y a la comisión Nacional de investigación Científica y Tecnológica (CONICIT), Costa Rica, por el aporte económico brindado para la realización de mis estudios de posgrado.

Al Dr. Edwin Chaves Esquivel por su apoyo, motivación y ayuda desinteresada para iniciar mis estudios de posgrado.

Al proyecto ESTALMAT, Andalucía y al IES de Salobreña por permitirme un grupo de estudiantes para realizar este trabajo de investigación.

A los estudiantes que participaron en este estudio.

A mis padres por enseñarme a ser quien soy

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La temática implicada en el problema de investigación considerado en este trabajo exploratorio está relacionado con dos campos de estudio: la invención de problemas matemáticos y los sujetos con talento matemático. De acuerdo con el análisis de literatura realizado, se constata que ambos campos han sido interés dentro de la investigación en didáctica de la matemática.

Así, la investigación de los sujetos con talento se ha centrado en tres grandes temas: la caracterización del talento matemático, el establecer mecanismos de identificación y ofrecer alternativas de intervención (Castro, 2008). En el caso de la invención de problemas, existen investigaciones que se interesan en estudiarla como característica de la actividad creativa o talento excepcional, como actividad de clase, como características prominente de la actividad matemática, para mejorar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas, para observar la comprensión matemática de los estudiantes, etc.

Sin embargo, existen pocos estudios que relacionen ambos tópicos de forma que pongan de manifiesto las características particulares que presentan los estudiantes con talento matemático ante tareas de invención de problemas. De esta forma, con esta investigación pretendemos hacer un primer acercamiento al estudio de la invención de problemas aritméticos por estudiantes considerados con talento matemático.

Específicamente nos centraremos en caracterizar, de forma exploratoria, la actuación de un grupo de estudiantes considerados con talento matemático ante dos tareas semiestructuradas de invención de problemas aritméticos, construidas especialmente para este estudio y compararlo con las actuaciones que presentan un grupo de estudiantes de un colegio público ante la misma tarea. Además nos interesa identificar algunos indicios del uso de la invención de problemas como herramienta para identificar estudiantes con talento en matemática.

Así, en el primer capítulo se expone el planteamiento del problema que incluye elementos relacionados con la invención de problemas como actividad matemática y caracterizaciones previas del talento matemático. También se presenta la descripción del problema a investigar, las preguntas de investigación y los objetivos que nos proponemos.

En el capítulo 2 se realiza una revisión de literatura que incluye tres partes bien diferencias en nuestra investigación: el talento matemático, los problemas aritméticos verbales y la invención de problemas matemáticos.

El tercer capítulo trata sobre la metodología empleada en este trabajo y describe el tipo de investigación en el cual se enmarca el estudio, el diseño de la investigación, las categorías de análisis y el esquema empleado para valorar las producciones de los estudiantes.

Los resultados, que se presentan en el capítulo 4, describen las características de los problemas inventados por ambos grupos de estudiantes. De igual forma se pone de manifiesto las diferencias, tanto en la capacidad de invención de problemas de ambos grupos como en las características de los problemas planteados de acuerdo con las tareas y su resolubilidad.

Por último, en el quinto capítulo se exponen las conclusiones de esta investigación que fueron organizadas de acuerdo con las preguntas de investigación que nos planteamos en el primer capítulo. De igual forma comentamos las limitaciones de nuestra investigación y las perspectivas futuras de continuidad.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo situamos el problema de investigación de nuestro estudio y se presenta, en primera instancia, las principales ideas relacionadas con la invención de problemas como actividad importante dentro de la matemática y algunas características que suelen presentar los niños con talento en matemática.

Luego de exponer dichas ideas, pasamos a entrelazar estos dos temas de investigación y describimos algunos estudios previos relacionados con la actuación de estudiantes con talento ante tareas de invención de problemas.

Por último exponemos el problema a investigar, los objetivos que dirigen este estudio y las preguntas de investigación. A continuación pasamos a detallar los elementos descritos en cada uno de los tópicos mencionados.

1.1 La invención de problemas como actividad matemática

Desde la década de los 80´s se da un mayor énfasis a la resolución de problemas como una actividad central de la matemática escolar (NCTM, 1980, 1989) y es tal que en todas las clases de matemática de cualquier país se puede observar a los estudiantes resolver problemas matemáticos (Silver, 1994). A partir de ahí surgen diversas líneas de investigación en resolución de problemas, entre las cuales, la invención de problemas matemáticos es una de ellas (Castro, 2008).

Uno de los primeros investigadores que reconoció la importancia de tal actividad fue Krutetski (1976) en su estudio sobre la comprensión de la naturaleza de las habilidades matemáticas de niños considerados con talento matemático. Polya (1979) en su propuesta sobre el proceso de resolución de un problema (comprensión, planificación, ejecución del plan y visión retrospectiva) también hace referencia a esta actividad, al cuestionarse si el problema puede ser planteado de manera diferente o variar el problema descartando parte de la solución.

El interés sobre la invención de problemas también se ve reflejado en los reportes como los estándares sobre el currículo y evaluación para las matemáticas escolares (NCTM, 1989) y los estándares profesionales para la enseñanza de la matemática (NCTM, 1991), que sugieren un incremento en el uso de dicha actividad en las clases de matemática. Estos estándares también promueven la idea de que los estudiantes tengan la oportunidad de formular sus propios problemas a partir de situaciones dadas o de la modificación del enunciado original con la intención de promover, mejorar e incluir al estudiante en la construcción del conocimiento matemático.

El NCTM (2000) retoma las recomendaciones sugeridas en el NCTM (1989, 1991) y señala "Buenos solucionadores de problemas tienden naturalmente a examinar situaciones cuidadosamente en términos matemáticos y a plantear problemas basados en situaciones que ellos ven" (p. 53). Este documento también sugiere que el profesor debe animar y dar oportunidad para que los estudiantes planteen problemas complejos, se enfrenten a ellos y los resuelvan.

De igual forma, algunos distinguidos matemáticos e investigadores en educación matemática (Freudenthal, 1973; Polya, 1954; Brown y Walter, 1990; Ellerton 1986; NCTM, 2000; Polya 1979), reconocen la invención de problemas como actividad importante dentro de la experiencia matemática de los estudiantes y mencionan el gran valor educativo, a lo largo del tiempo, que tiene el que los estudiantes de todos los niveles inventen problemas en clase.

Kilpatrick (1987) también señala el valor pedagógico que puede tener el planteamiento de problemas por la riqueza de relaciones que proporciona. Al respecto, Ellerton (1986) menciona que ésta podría utilizarse como una actividad versátil de clase que permite disminuir lo estructurado de la tarea y aportar dinamismo en el salón de clase. De igual manera, podría ayudar a reducir la dependencia de los estudiantes sobre los profesores y libros de texto, así como dar a los estudiantes la oportunidad de una mayor implicación en su educación (Lavy y Shrik, 2007).

Algunas investigaciones ponen de manifiesto la riqueza que puede aportar las actividades de invención de problemas como actividad matemática. Por ejemplo, se ha utilizado como una herramienta que permite desarrollar y mejorar las habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos (Leung y Silver, 1997), estudiar niños con talento matemático (Krutetskii, 1976; Ellerton, 1986; Kesan, Kaya y Güvercin, 2010), tener una visión de la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos de los estudiantes (English, 1997; Brown y Walter 1993), dar un punto de vista sobre cómo los estudiantes manejan y estructuran su propio conocimiento matemático (Pelczer y Gamboa, 2008) o investigar cómo piensan los niños sobre la matemática (Ellerton, 1986).

A pesar de las recomendaciones realizadas por investigadores en cuanto al uso de la invención de problemas como actividad importante dentro de la matemática, en pocas ocasiones los estudiantes tienen la oportunidad de plantear sus propios problemas en clase (Silver, 1994).

1.2 Caracterización del talento matemático

El interés por la investigación relacionada con la inteligencia, la superdotación y el talento no son una novedad, ya que han sido estudiados desde el siglo XX; sin embargo, esto no es así para las relacionadas con el talento en matemática que tienen un desarrollo más reciente (Castro 2008). Al respecto, National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en su documento An Agenda for Action afirma que

los estudiantes más olvidados en términos de alcanzar su desarrollo potencial, son los estudiantes con talento en matemáticas. La habilidad matemática resultante es un recurso valioso para la sociedad, tan necesario para mantener el liderazgo en un mundo tecnológico (NCTM, 1980, p. 18).

En la actualidad se ha cambiado de parecer y la atención al talento matemático es un tema de gran interés para la comunidad de educadores e investigadores en educación matemática, lo que puede evidenciarse, por ejemplo, en los grupos de estudio propuestos en el ICME 10 (TSG4) o el ICME 11 (TSG6)

En este sentido, Castro (2008) menciona que los estudios realizados sobre el talento matemático se han centrado en tres grandes focos de investigación: la caracterización del talento matemático, el establecer mecanismos de identificación y ofrecer alternativas de intervención.

Centrándonos en la caracterización del talento matemático, algunos investigadores en educación (Krutetskii, 1976; Sriraman, 2003; Lee, 2005) se han preocupado por observar y analizar el pensamiento característico de estudiantes considerados con talento matemático en diferentes tareas de resolución de problemas y concluyen que el razonamiento que muestran es muy diferente de aquellos estudiantes ordinarios en términos de velocidad y profundidad (Kesan et al., 2010).

Por ejemplo, Krutetskii (1976) señala varias características que suelen presentar los niños con talento en matemática. Algunas de ellas están relacionadas con la capacidad para: a) examinar el contenido matemático de un problema analítica y sintéticamente, b) rapidez en generalizar el contenido de un problema y su método de resolución, c) invertir fácilmente su proceso de pensamiento, d) buscar soluciones simples y directas, e) investigar aspectos de problemas difíciles antes de tratar de resolverlos y f) recordar información matemática general, métodos de resolución de problemas y principios de planteamiento.

Este autor señala que los estudiantes con talento matemático no sólo tienen mejor memoria y aprenden más rápido que sus compañeros, sino que también parecen pensar de forma cualitativamente diferente sobre las matemáticas y poseen algunas habilidades de resolución de problemas matemáticos de los adultos.

De igual forma, Banfield (2005), recoge con base en varias fuentes (House, 1987; NCTM, 2000; Wieczerkoski y Prado, 1993) un conjunto de características específicas de los niños con talento matemático en los dominios afectivo y cognitivo, entre ellas se pueden citar las siguientes: a) aprenden conceptos y proceso matemáticos más rápido que otros estudiantes, b) son capaces de resolver problemas complejos, c) realizan un razonamiento lógico sobre relaciones cuantitativas y especiales, d) organizan datos para observar patrones o relaciones, f) analizan conceptos y procesos matemáticos más rápidamente que otros estudiantes y g) son capaces de verbalizar conceptos, procesos y soluciones matemáticas.

Más recientemente Kesan et al., (2010) cita a House (1987) y Johnson (1983) quienes dan las siguientes propiedades de estudiantes talentosos en matemática: a) poseen una memoria excepcional, b) tienen habilidad para resolver problemas de diferentes formas, c) tienen éxito en identificar patrones y relaciones, d) disfrutan inventando problemas originales, e) les gusta los estudios abstractos, f) aprenden más rápido y g) tiene la capacidad para auto dirigirse a cualquier actividad.

Por último, Greenes (1981) también recoge algunos atributos que caracterizan a estudiantes con talento en matemática: a) formulación espontánea de problemas, b) flexibilidad en el manejo de datos, c) habilidad para la organización de datos, d) agilidad mental o riqueza de ideas, e) originalidad de interpretación, f) habilidad para transferir ideas y g) capacidad de generalización.

Con respecto al primer atributo, la formulación espontánea de problemas, esta autora menciona que es un proceso en el cual un estudiante con talento es presentado ante una situación en el que podría generar cuestiones acerca de dicha situación. También señala que la solución a estas cuestiones generalmente implica experimentación, generación y organización de datos.

Teniendo en cuenta que algunas características de los individuos talentosos en matemática reconocidas por Krutestkii (1976), Greenes (1981), House (1987; citado en Kesan et al., 2010), Johnson (1983; citado en Kesan et al., 2010) están relacionadas con la invención de problemas matemáticos y que en el trabajo de Pasarín, Feijoo, Díaz, Rodríguez, (2004) se analizó las características propuesta por Greenes (1981) resultando que la formulación espontánea de problemas fue la característica más frecuente que presentaron los estudiantes de la muestra; es que consideramos necesario revisar, en la literatura especializada en educación matemática, aquellos aspectos de la invención de problemas que estén relacionados con el talento matemático.

En el siguiente aparatado se profundiza al respecto y se comentan algunas investigaciones previas en las que se estudió la actuación de estudiantes con talento matemático ante tareas de invención de problemas.

1.3 Estudios previos sobre la actuación de estudiantes con talento matemático en tareas de invención de problemas

Un gran número de investigaciones realizadas con sujetos considerados con talento matemático se centran en la identificación de características de este tipo de población o su capacidad en tareas de resolución de problemas (Benavides, 2008). Sin embargo, se han realizado pocos estudios que aborden las particularidades de estos estudiantes en el proceso de invención de problemas matemáticos. Al respecto, se puede mencionar los trabajos realizados por Krutetskii (1976), Ellerton (1986); Silver y Cai (1996); Pelczer y Gamboa (2008) y Kesan et al., (2010). A continuación se explican brevemente estos trabajos y algunos de sus resultados más importantes.

En el estudio de Krutetskii (1976) se empleó un conjunto de series experimentales con el objetivo de comprender la naturaleza de las habilidades matemáticas en niños considerados con talento matemático. Una de estas series consistía en presentar problemas que no presentaban una pregunta planteada, por lo que los estudiantes debían inventarla sobre la base de la información dada y luego contestarla.

En dicha serie se propusieron tareas como "25 tuberías de 5 y 8 metros de longitud fueron colocadas a una distancia de 155 m". El objetivo de esta serie consistía en conocer si los estudiantes podían percibir las relaciones implicadas en la situación y por tanto formular preguntas como ¿cuántas tuberías de cada tipo fueron colocadas? Además, se pretendía revelar algunas características de la percepción mental que poseen los estudiantes sobre los problemas matemáticos y que según el autor, podrían ser inferidas *"si el examinado percibe la lógica de las relaciones y dependencias dadas en el problema, si él comprende su escencia"* (p. 105).

Krutetskii reportó que los estudiantes con talento matemático podían ver aquellos problemas que surgen naturalmente de una información dada, mientras que los estudiantes con baja habilidad hacia la matemática no lo hicieron, incluso cuando el entrevistador les dio consejos. También se concluye que los estudiantes con altas habilidades matemáticas tienen más probabilidad de percibir la estructura de los problemas matemáticos, independientemente de la solución de aquellos estudiantes que tiene baja habilidad.

En la investigación realizada por Ellerton (1986) se examinaron y compararon los problemas matemáticos inventados por dos grupos de niños de 11 a 13 años con mayor y menor habilidad hacia la matemática. Los resultados del estudio muestran diferencias importantes entre ambos grupos. Por ejemplo, se observó que los problemas inventados por los estudiantes con más habilidad requieren mayor dificultad de cálculo, presentan una mayor cantidad de operaciones, implican un sistema numérico más complejo y utilizan el lenguaje matemático con mayor fluidez que sus compañeros menos capaces.

El estudio también concluye que hay poca evidencia que sugiera que los estudiantes menos hábiles planearan sus problemas, mientras que los producidos por estudiantes hábiles presentaron mayor consistencia con el resto del problema, lo que sugiere una cierta planificación. Además, se observó que los estudiantes más hábiles saben cómo resolver sus propios problemas, mientras que sus compañeros menos capaces no siempre saben por dónde empezar. de ahí que los estudiantes con más habilidad responden correctamente sus problemas con mayor frecuencia que los de menos habilidad.

Otra característica común de los estudiantes con mayor habilidad fue su familiaridad con las reglas y algoritmos, mientras que los estudiantes con menor capacidad trataron de aplicar cualquier regla que pudieran recordar para resolver el problema; no obstante, sus verbalizaciones y comprensión de dichos algoritmos en ocasiones estuvieron lejos de la perfección.

Otro estudio que propone tareas de invención a estudiantes con mayor habilidad matemática es el realizado por Silver y Cai (1996). Para ello formaron, con base en el rendimiento en ocho tareas de resolución de problemas, dos grupos extremos (alto y bajo) de 50 estudiantes cada uno.

Los resultados del estudio muestran diferencias en la calidad de respuestas entre los grupos. Por ejemplo, el grupo con mayor habilidad de resolución de problemas (grupo alto) generó una proporción significativamente mayor de cuestiones matemáticas que el grupo de bajo rendimiento en resolución de problemas (grupo bajo). En contraste, el grupo bajo generó una proporción significativamente mayor de declaraciones que los del grupo alto.

Los investigadores también observaron que una proporción significativamente mayor de estudiantes del grupo alto, escribieron por lo menos una cuestión matemática en comparación con los estudiantes del grupo bajo. De igual forma, los estudiantes del grupo alto plantearon una cantidad significativamente mayor de problemas matemáticos multirelacionados (implican dos o más relaciones semánticas) que los estudiantes del grupo bajo y una proporción significativamente mayor de los problemas generados por estudiantes del grupo alto fueron problemas multirelacionados.

De esta forma, el estudio concluye que los estudiantes del grupo alto generaron no solo más problemas matemáticos, sino que también más problemas matemáticos complejos que sus compañeros y que el rendimiento de los estudiantes en la resolución de problemas tuvo una alta correlación con su rendimiento en el planteamiento del problemas.

Más recientemente, Pelczer y Gamboa (2008), llevaron a cabo un análisis preliminar sobre las estrategias de invención de problemas realizadas por 21 estudiantes con talento matemático miembros del equipo de la olimpiada de matemática de México.

La tarea propuesta consistió en inventar tres problemas de situación libre: uno fácil, otro de dificultad media y otro difícil. Una vez que terminaron la tarea de invención de problemas contestaron un cuestionario sobre aspectos de su proceso de planteamiento de problemas. Las preguntas de este instrumento están relacionadas con la existencia de una idea inicial (para cada problema de diferente dificultad), el cambio durante la generación de esta idea, el tipo de problema desde el cual inicio el proceso de generación y el criterio de dificultad que usaron, entre otros aspectos.

Los resultados de la investigación muestran que los estudiantes tuvieron un mejor rendimiento en el planteamiento de problemas fáciles. En el caso de los problemas difíciles, trataron de inventar enunciados que implicaran algún conocimiento complejo que no siempre manejaban bien, por lo que el número de problemas incorrectos es mayor que en los demás casos y los problemas más difíciles no tenían solución.

Con respecto al análisis sobre los procesos, los investigadores observaron que al inicio los estudiantes tratan de combinar sus ideas y en la forma final del problema intentan ocultar la idea original; sin embargo, esta idea puede ser algunas veces cambiada. Este hecho, según los investigadores, pone de manifiesto un punto interesante en el proceso de invención de problemas, ya que los estudiantes a partir de una idea inicial reúnen los conocimientos y experiencias para obtener el problema buscado; sin embargo, en el proceso ellos necesitan hacer cambios para cumplir con los requisitos de un problema matemático.

Los estudiantes consideraron que se puede partir de un teorema particular o algún resultado y prefirieron utilizar temas que están más allá del currículo para inventar problemas difíciles. También afirmaron que la complejidad de un problema, radica en la complejidad del conocimiento requerido para la solución, su propio conocimiento y el tiempo para resolverlo.

Por último, Kesan et al., (2010), estudió el efecto de las actividades de invención de problemas en el desarrollo de habilidades matemáticas de 40 estudiantes con talento matemático de octavo grado de un colegio llamado "*School for Kazakh gifted students*".

Estos estudiantes fueron divididos en dos grupos, de forma que uno de ellos participó en actividades de invención de problemas (grupo experimental) y el otro grupo recibió una instrucción tradicional (grupo control).

Antes del proceso de instrucción de invención de problemas, ambos grupos realizaron como pretest el test de habilidad en resolución de problemas matemáticos (MPSAT). Luego se aplicó nuevamente como un postest con el propósito de medir el efecto de la instrucción de invención de problemas sobre el desarrollo de las habilidades matemáticas de estudiantes con talento matemático.

Los resultados muestran que antes de la instrucción no hay diferencias significativas entre las medias de ambos grupos (control y experimental); sin embargo, sí se presentaron diferencias significativas entre las medias después de la instrucción de invención de problemas en el postest. Los investigadores concluyen que hay diferencias significativas entre las notas medias del test MPSAT para los estudiantes del grupo experimental, resultando así que las actividades de invención de problemas son efectivas en su rendimiento, especialmente para tareas no rutinarias y de composición abierta.

Los investigadores también encuentran que en las actividades de planteamiento de problemas los estudiantes se muestran más activos y se da una mayor interacción entre el profesor y los estudiantes, por lo que el docente tiene mayor facilidad para identificar a los alumnos superdotados y su capacidad matemática.

En resumen, los estudios de Kutetskii (1976), Ellerton (1986) y Silver y Cai (1996), ponen de manifiesto que los estudiantes con talento matemático presentan mejor capacidad de invención de problemas que sus compañeros menos hábiles en matemática. En el estudio de Pelczer y Gamboa (2008) se observó cómo los estudiantes con talento matemático reúnen, a partir de una idea inicial, los conocimientos y experiencias para obtener el problema buscado y durante el proceso realizan cambios para que el enunciado sea un problema matemático. Por último, Kesan et al., (2010) verificó en su estudio un efecto positivo de la instrucción de invención de problemas sobre el desarrollo de habilidades matemáticas de estudiantes con talento matemático.

1.4 Descripción del problema a investigar

Como queda de manifiesto, la invención de problemas es una actividad matemática reconocida por varios autores, quienes destacan su importancia como actividad importante de clase y parte relevante de la experiencia matemática de cualquier estudiante. Además, hemos descrito cómo en los últimos años se ha observado un crecimiento en el número de investigaciones y acercamientos, con una amplia variedad de resultados.

De igual manera, en la revisión de literatura relacionada con el talento matemático se aprecia que varios autores han caracterizado la capacidad matemática de estudiantes considerados con talento matemático, generalmente, ante tareas de resolución de problemas. Sin embargo, existen pocas investigaciones que centren su atención en estudiar la actuación de este tipo de estudiantes ante tareas de invención de problemas. De igual forma, es muy reducido el número de investigaciones que estudian la invención de problemas como un posible instrumento para identificar estudiantes con talento en matemáticas.

Nuestro interés es caracterizar la capacidad matemática de un grupo de estudiantes considerados con talento matemático ante tareas de invención de problemas, con base en algunas variables relacionadas con la estructura sintáctica, semántica y matemática; así como establecer, si las hay, diferencias con respecto a los problemas inventados por un grupo estándar de un colegio público en dichas variables. De igual forma estamos interesados en estudiar, de forma exploratoria, el uso de la invención de problemas como un instrumento para identificar estudiantes con talento en matemática.

Para ello, nos proponemos diseñar dos actividades o tareas de invención de problemas aritméticos que sean adecuadas, tanto para los estudiantes con talento matemático como para los del grupo estándar. Así, consideramos que la tarea propuesta debe tener una doble función: permitir a ambos grupos evidenciar su capacidad para inventar problemas y establecer diferencias en la calidad de las producciones realizadas.

Consideramos conveniente que la tarea propuesta se centre en el planteamiento de problemas aritméticos verbales, pues la aritmética es un conocimiento matemático común de ambos grupos, pero debido a sus capacidades matemáticas pueden establecer diferencia en los problemas planteados. Además, las variables de los problemas aritméticos verbales han sido ampliamente investigadas, por lo que nos permitirán estudiar las producciones de los estudiantes con mayor sustento teórico.

Creemos que hay elementos teóricos que sustentan el estudio del talento matemático mediante actividades de invención de problemas. Primero, porque este tipo de actividades proporciona una herramienta poderosa para estudiar niños con talento matemático (Ellerton, 1986) y sus habilidades matemáticas (Kesan et al., 2010), así como una características de la actividad creativa o talento excepcional y una “ventana” que permite observar la comprensión matemática de los estudiantes (Silver, 1994).

Nuestro interés en estudiar la invención de problemas en estudiantes con talento matemático se basa particularmente en tres cuestiones: una relacionada con la intención de contribuir a las investigaciones realizadas por el grupo de pensamiento numérico de la Universidad de Granada sobre esta temática; otra es porque consideramos que actualmente existen pocas investigaciones que relacionen las tareas de invención de problemas con el talento matemático y su competencia en dicha tarea, y por último, porque pretendemos aportar información sobre el uso de la invención de problemas como una herramienta funcional en la identificación de estudiantes con talento matemático.

De igual forma, consideramos que el estudio del talento matemático mediante la invención de problemas revelará algunas características del talento matemático que quizás no han sido identificadas en otras investigaciones, ya que éstas, generalmente, son reconocidas por medio de tareas de resolución de problemas u otras formas que no incluyen el planteamiento de problemas.

1.5 Preguntas y objetivos de investigación

En el contexto de este trabajo nos planteamos las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué características presentan los problemas aritméticos verbales inventados por un grupo de estudiantes considerados con talento matemático cuando se les propone este tipo de tareas?
2. ¿Cuáles son las diferencias entre los problemas aritméticos planteados por el grupo de estudiantes considerados con talento matemático y un grupo estándar de un colegio público?
3. ¿Cuáles son las diferencias, con respecto a las variables de estudio, de los problemas planteados en la primera tarea de invención de problemas y la segunda? ¿Cuál tarea de invención de problemas propuesta promovió plantear problemas con mayor riqueza?
4. ¿Existe diferencia en cuanto a la riqueza de los problemas resolubles y no resolubles planteados por ambos grupos? ¿Es conveniente analizar en las tareas de invención de problemas aquellos problemas que no tienen una solución?
5. ¿Qué elementos aporta la invención de problemas aritméticos verbales al proceso de identificación de estudiantes con talento matemático?

Estas preguntas las hemos sintetizados en dos objetivos generales de investigación y en varios objetivos específicos que describimos a continuación.

Objetivos generales de investigación

1. Describir, analizar y caracterizar la capacidad de un grupo de estudiantes considerados con talento matemático en tareas de invención de problemas aritméticos verbales.
2. Determinar indicios del uso de la invención de problemas como herramienta para identificar estudiantes con talento matemático

Para alcanzar estos objetivos generales de investigación, es necesario plantear una serie de objetivos específicos relacionados con los mismos.

Los objetivos específicos de esta investigación son:

1. Construir un instrumento de planteamiento de problemas con dos tareas o situaciones semiestructuradas de invención problemas aritméticos verbales.
2. Definir categorías de análisis que permitan caracterizar las producciones de los estudiantes ante la tarea de invención de problemas aritméticos
3. Caracterizar los problemas planteados por el grupo considerado con talento en matemática con base en las categorías de análisis definidas.
4. Identificar diferencias entre los problemas inventados por ambos grupos con base en las categorías de análisis definidas.
5. Analizar la riqueza de los problemas planteados por ambos grupos con base en las categorías de análisis definidas.
6. Describir las características de problemas planteados en la primera y segunda tarea de planteamiento de problemas propuestas, con base en las categorías de análisis definidas.

CAPÍTULO 2
MARCO TEÓRICO

La revisión de literatura que se incluye en este capítulo comprende tres partes bien diferenciadas: el talento matemático, los problemas aritméticos verbales y la invención de problemas matemáticos. En primera instancia se tratan algunos conceptos relacionados a los sujetos con talento y especialmente con talento matemático, así como algunas formas que se han utilizado en la identificación de estos estudiantes.

Luego se presentan aspectos relacionados con los problemas aritméticos verbales, su conceptualización, clasificación y algunas variables de estudio que son de interés en nuestra investigación.

Por último se explica en qué consiste la invención de problemas, sus diferentes perspectivas de investigación, algunas implicaciones en dicho proceso y cómo estudiaremos la invención de problemas matemáticos.

2.1 Talento matemático

Algunos autores sostienen que los estudiantes con talento presentan características que los diferencias del resto de sus compañeros. Por ejemplo, Freeman (1988) señala que estos aprenden más rápido y presentan mayor profundidad y extensión en el aprendizaje. Greenes (1981) menciona que varios autores destacan características particulares en este tipo de estudiantes como su rápido ritmo de aprendizaje, excelente memoria y excepcionales capacidades verbales y de razonamiento, su gran poder de abstracción y estar dispuestos a asumir riesgos en la exploración de nuevas ideas. Pero, ¿quiénes son los estudiantes con talento?

De acuerdo con Villarraga, Martínez y Benavides (2004), existe una gran diversidad de términos para referirse a estos estudiantes: superdotados, de altas capacidades, talentosos; encontrándose más de cien definiciones de superdotación y sus sinónimos. Sin embargo, Gagné (1995, 1993, citado en Benavides, 2008) propone un modelo para distinguir los conceptos superdotación y talento, denominado Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento.

Para Gagné, la superdotación consiste en la posesión de habilidades naturales en alto grado que son espontáneas e innatas, las cuales se presentan en al menos un dominio de habilidad; mientras que el talento denota la posesión de habilidades, destrezas y conocimientos desarrollados sistemáticamente en al menos un campo de la actividad humana. Así, la superdotación está asociada, en general, a actividades intelectuales y el talento a destrezas y aptitudes más específicas. Tomando el punto de vista de Gagné en cuanto a la diferencia entre estos dos conceptos, nos centraremos en el talento.

Uno de los objetivos de muchas investigaciones relacionadas con el talento ha sido precisar y clarificar este término con el fin de hacerlo operativo para la investigación (Benavides, 2008). Según esta misma autora, el término talento ha sido definido de distintas maneras según el enfoque teórico adoptado. Así, se han podido diferenciar cinco nociones del talento orientadas en distintos aspectos: al logro o rendimiento, a lo innato o genético, a la interacción entre lo innato y el medio ambiente, a modelos cognitivos y a modelos sistémicos (Villagra et al., 2004).

En esta investigación trataremos la noción de talento orientado al logro o rendimiento. Al respecto, Mönks y Mason (2000) aportan una definición en este sentido y consideran que los estudiantes con talento presentan habilidad por encima de la media, compromiso con la tarea y creatividad.

Dentro de este enfoque, la teoría más conocida es la de los tres anillos de Renzulli (1977), quien concibe el talento como la interacción entre tres grupos básicos de rasgos humanos: capacidad por encima de la media, fuertes niveles de compromiso con la tarea y fuertes niveles de creatividad.

En esta investigación estamos interesados en analizar habilidades matemáticas de un grupo de sujetos con talento al resolver tareas de invención de problemas matemáticos, por lo que nos interesa estudiar un talento específico, el talento matemático.

Uno de los primeros investigadores en estudiar el talento matemático fue Krutetskii (1976), al observar los procesos cognitivos de 192 niños entre los 6 y 16 años ante una serie de problemas especialmente preparados. Krutetskii identifico en estos estudiantes la tendencia a preferir formas de pensamiento visuales-espaciales o una forma lógica-analítica.

Ellerton (1986) también se interesó en estudiar el talento matemático combinando actividades de invención y resolución de problemas. Un resumen de estos dos trabajos se encuentra en la sección 1.4 del primer capítulo de esta memoria.

Una de las formas más sencillas de definir el talento matemático y quizás la más difundida, es la de considerarlo como la capacidad matemática de un sujeto que se sitúa significativamente por encima de la media (Pasarín et al., 2004). Por lo que, en general, se nomina a aquellos estudiantes talentosos en matemática que son hábiles resolviendo problemas para sujetos de una edad superior.

Wenderlin (1958) considera que la capacidad matemática de una persona está formada por cuatro aspectos fundamentales: a) la habilidad para comprender la naturaleza de los problemas, símbolos y reglas matemáticas; b) aptitud para aprenderlas, retenerlas en la memoria y reproducirlas; c) facilidad para combinarlas con otros problemas, símbolos, métodos y reglas, y d) la competencia para emplearlas en la resolución de tareas matemáticas.

En esta investigación hemos elegido el término talento matemático, en el sentido que define Passow (1993), para referirnos a los alumnos que han demostrado unas aptitudes específicas en el área de matemáticas. Esto porque uno de los grupos seleccionados está conformado por estudiantes que han demostrado, con base en pruebas de selección, aptitudes específicas en el área de la matemática.

2.2 Formas de Identificación de niños con talento matemático

Tradicionalmente se ha prestado atención diferenciada sólo a aquellos estudiantes que muestran alguna necesidad educativa especial; sin embargo, actualmente los alumnos con talento están reclamando atención especializada como resultado de la atención a la diversidad (Castro, 2008). Esto ha provocado que la comunidad de investigación interesada en el tema, preste atención a las diferentes formas de identificar el talento matemático (Benavides, 2008).

Al respecto, Rodríguez (2004) menciona que los cambios en la concepción de este término han influido en las estrategias utilizadas para su identificación, de manera que se da un mayor énfasis a la identificación de los talentos específicos. Este autor menciona varios instrumentos de evaluación diagnóstica que agrupa en dos grandes bloques: las subjetivas o informales y las técnicas objetivas.

Las técnicas subjetivas o informales se basan generalmente en la observación de aquellas personas que pueden proporcionar información referente al desarrollo, intereses, expectativas o aficiones del sujeto valorado. Las pruebas de este tipo utilizadas con mayor regularidad son: informes de los profesores, informes de los padres, nominaciones de los compañeros y autoinformes.

Con respecto a las técnicas del segundo grupo, las objetivas, se refieren a pruebas psicométricas, estandarizadas o inventarios de personalidad. Este tipo de pruebas reúnen criterios de consistencia interna, validez y fiabilidad estadísticas. Algunos tipos de pruebas objetivos son: test de inteligencia general, test de aptitudes específicas, pruebas de rendimiento, test de creatividad y los test de personalidad.

En relación con las ventajas e inconvenientes de los instrumentos citados, Benavides (2008) menciona que las pruebas subjetivas aportan datos complementarios muy relevantes pero irregulares. Según esta autora, una propuesta adecuada debería incluir criterios de ambos tipos de técnicas, como es el caso de la prueba de Renzulli y Reis (1991), que utilizan los resultados de las pruebas objetivas (test de CI y test de aptitudes) y las nominaciones de los profesores e incluso incluyen los informes de los padres, compañeros y autoinformes para ser evaluadas por el comité de expertos del centro.

De acuerdo con Rodríguez (2004), las pruebas objetivas también presentan ventajas e inconvenientes. Al respecto, menciona que los test de inteligencia aplicados de forma individual ofrecen una buena fiabilidad para diferenciar las características del talento, pero tienen un alto costo en tiempo y especialización de quien lo aplica. Los test de aptitudes son muy importantes para la determinación de los talentos específicos, aunque tienen limitaciones similares a los de inteligencia general. El test de rendimiento debe usarse en combinación con los anteriores y permite una buena identificación de los talentos académicos. Los test de personalidad son relevantes en el caso de talentos con inadaptación escolar, pero requiere una alta especialización en su aplicación y las pruebas de creatividad son imprescindibles para evaluar el pensamiento divergente, la originalidad y flexibilidad del pensamiento.

En cuanto a la identificación del talento matemático, la literatura especializada describe diversos métodos tanto de enfoque cualitativo como cuantitativos; sin embargo, los más utilizados han sido los test estandarizados, corriendo el peligro de rechazar a niños que deberían ser identificados como talentos matemáticos. (Benavides, 2008).

Niederer e Irwin (2001) propone seis formas de identificar el talento matemático: test, nominación de los profesores, nominación de los padres, nominación por parte del alumno, la nominación de los compañeros y la habilidad de los estudiantes para resolver problemas. De igual forma, Marjoram y Nelson (1988) sugieren algunos métodos subjetivos como la nominación de los profesores u objetivos como una puntuación sobresaliente en test de inteligencia general.

Un aspecto importante en relación con la identificación del talento matemático es, ¿qué se mide en los test y de qué tipo son los ítems que constituyen los test? Esto porque tradicionalmente se aplicaban test de rendimiento cuyos ítems eran de cálculo aritmético, por lo que se primaba en la identificación del talento matemático la capacidad de los sujetos sobre el cálculo matemático, frente a otras formas de pensar matemáticamente (Benavides, 2008). Esta misma autora menciona que se decidía sobre el talento matemático de acuerdo al número de ítems acertados y se prestaba menos atención a los procesos de pensamiento del estudiante o a cómo razonaba en matemáticas.

Por último, algunos autores destacan el uso de la invención de problemas como una herramienta que podría ser utilizada tanto en la identificación de estudiantes con talento matemático (Ellerton, 1986, Kesan et al., 2010) o en la comprensión de la naturaleza de las habilidades matemáticas en niños considerados con talento matemático (Krutetskii, 1976). Además autores como Getzels y Jackson (1962; citado en Silver, 1994) y Balka (1974) han empleado actividades de invención de problemas en el proceso para identificar individuos creativos.

De esta forma, continuando la línea de trabajo propuesta por Ellerton (1986), Kutetskii (1976) y Kesán et al., (2010) para estudiar niños con talento en matemática, nos proponemos caracterizar un grupo de estudiantes considerados con talento matemático ante tareas o situaciones de invención de problemas aritméticos y determinar indicios del uso de la invención de problemas en la identificación del talento matemático.

2.3 Definición de problema aritmético

Dado que en este trabajo de investigación se propone a los estudiantes una tarea de invención de problemas matemáticos aritméticos, consideramos pertinente exponer, en primera instancia, la noción de problema matemático que consideraremos en nuestro estudio.

Un problema matemático es considerado comúnmente como una situación en la que es necesario superar un obstáculo para llegar a un resultado o meta. Sin embargo, varios investigadores en educación matemática han realizado diversas aproximaciones sobre dicho concepto.

Al respecto, Bouvier y George (1979), consideran que un problema matemático es una situación de la que se conoce alguna información que se puede manejar convenientemente para encontrar otra que se busca. Para Fernández (1997) un problema debe incluir una primera componente que consiste de la puesta en escena, que incluye, la contextualización, los caracteres y la localización de la historia que tiene lugar. Una segunda componente de información se refiere a los datos necesarios para resolver el problema y por último, una cuestión o pregunta a la que hay que dar respuesta.

En esta investigación se adoptará la noción propuesta por Castro (1991), quien señala cinco componentes que debe incluir una situación para ser considerada un problema matemático: una proposición: enunciado oral o escrito; unos datos conocidos; una intención: movilizar una o más personas para que lo resuelvan; una meta: llegar a un resultado y un proceso: modo de actuación para alcanzar el resultado.

Con respecto a la noción de problema aritmético, en este trabajo se adoptará la definición propuesta por Puig y Cerdán (1988), quienes consideran que es aquel enunciado verbal o escrito en el cual la información proporcionada es de carácter cuantitativo, pues los datos suelen ser cantidades definidas generalmente de forma numérica. La condición implicada en el enunciado expresa relaciones cuantitativas entre los datos y la pregunta se refiere al cálculo de una o varias cantidades o relaciones entre cantidades.

La resolución de un problema aritmético consiste, fundamentalmente, en la realización de una o varias operaciones aritméticas, de manera que un problema será aritmético, siempre que los conceptos, conocimientos o recursos no estrictamente aritméticos de los contextos que aparecen en el enunciado del problema, no sean decisivas en la solución de mismo (Puig y Cerdán, 1988).

2.4 Clasificación de los problemas aritméticos

Se han realizado varias investigaciones con el propósito de clasificar los problemas aritméticos. Al respecto, Castro et al., (1997), clasifican de forma general los problemas aritméticos en simples y compuestos dependiendo del número de relaciones que aparecen explícita o implícitamente en la información del enunciado. Puig y Cerdán (1988) los denominan problemas de una etapa y problemas de más de una etapa.

También existen otras clasificaciones que atienden al tipo de estructura operatoria y al componente semántico involucrado en el problema.

A continuación se explica brevemente cada una de estas clasificaciones, las cuales aportarán información importante para estudiar los problemas aritméticos inventados por los estudiantes en nuestro estudio.

Problemas de una etapa (problemas simples)

Un problema simple o de una etapa es aquel que contiene sólo una relación entre dos datos numéricos, de manera que para resolverlo se requiere el uso de una sola operación aritmética (Castro et al., 1997).

El estudio de los problemas de una etapa está relacionado con su estructura operatoria, ya sea ésta aditiva o multiplicativa. En el caso de los problemas de estructura aditiva intervienen sólo las operaciones de suma y/o resta y los problemas de estructura multiplicativa implican solamente las operaciones de multiplicación y/o división.

Con respecto al componente semántico, varios autores (Carpenter y Moser, 1983; Puig y Cerdán, 1988) están de acuerdo en clasificar los problemas de estructura aditiva en cuatro grandes categorías: Cambio, combinación, comparación e igualación. A continuación se exponen las principales ideas de cada una de estas categorías con base en las ideas de Puig y Cerdán (1988).

- Cambio: en esta categoría se incluyen los problemas en los que las relaciones están implicadas en una secuencia temporal de sucesos. De esta forma, en estos problemas se pueden distinguir tres momentos diferentes en los que se describe como una cantidad inicial es sometida a una acción que modifica y la convierte en otra cantidad o estado final.

- Combinación: corresponden a problemas en los que se describe una relación entre conjuntos que responde al esquema parte-parte-todo. La pregunta del problema puede tratarse acerca del todo o acerca de una de las partes

- Comparación: este tipo de problemas presentan una relación de comparación entre dos cantidades. Las cantidades que aparecen en el enunciado del problema se denominan cantidad de referencia, cantidad comparada y diferencia.

- Igualación: estos problemas se caracterizan porque se presenta una comparación entre cantidades establecida por medio del comparativo de igualdad "tantos como".

Es importante mencionar que esta categorización no es excluyente, ya que un mismo problema puede presentar características propias de varias clases, por ejemplo, un problema puede ser catalogado como de cambio y comparación o de comparación e igualación, etc. Cuando esto ocurre se dice que un problema es híbrido.

En los problemas de estructura multiplicativa no existe una clasificación universalmente aceptada en cuanto a su componente semántica, como sí ocurre con los problemas de estructura aditiva; sin embargo, autores como Vergnaud (1983), Nesher (1987), Castro (2001), Puig y Cerdán (1988), entre otros, han realizado diversas clasificaciones. En esta investigación se adoptó la clasificación realizada por Puig y Cerdan (1988), quienes clasifican los problemas de estructura multiplicativa en: isomorfismo de medidas, comparación multiplicativa y producto de medidas. A continuación se presenta una explicación breve de cada una de las categorías mencionadas.

- Isomorfismo de medidas: en esta categoría están los problemas que presentan una proporción simple directa entre dos espacios de medida. En su enunciado más típico aparecen una proposición que es una descripción existencial y otra que expresa la regla de correspondencia entre los espacio de medida. Vergnaud (1983) incluye dentro de esta categoría semántica los problemas de regla de tres.
- Comparación multiplicativa: en este tipo de problemas hay una función escalar que se utiliza para comparar dos cantidades extensivas del mismo tipo de magnitud. En su enunciado más típico aparecen una proposición que es una descripción existencial y otra que expresa la regla de asociación para comparar las cantidades.
- Producto de medidas: Presentan una composición cartesiana de dos espacios de medida en un tercer espacio de medida. Este tipo de problemas se trata de averiguar el área, volumen, trabajo, o dimensiones de una figura.

Problemas de más de una etapa (Problemas compuestos)

Un problema de más de una etapa o problema compuesto es aquel que para resolverlo es necesario utilizar al menos dos operaciones distintas o una operación más de una vez, por lo que debe existir más de una relación entre las cantidades implicadas (Castro et al., 1997). En este tipo de problemas, el número de pasos depende del número de relaciones entre las cantidades y por tanto del número de operaciones que se utilicen o del número de veces que se emplee una operación (Frías y Castro, 2007).

La estructura de este tipo de problemas es distinta a los de una etapa, ya que en éstos siempre hay más de dos datos, por lo que se tienen que tomar más decisiones que son de tres tipos: qué operaciones, entre cuáles cantidades y en qué orden (Puig y Cerdán, 1988).

Por último, hay un tipo de problemas que son de más de una etapa y que Puig y Cerdán (1988) les denomina problemas de varias operaciones combinadas. Estos problemas se pueden clasificar de acuerdo con la estructura del enunciado en varios tipos, entre ellos los problemas combinados mixtos. De acuerdo con Echenique (2006), en los problemas combinados mixtos intervienen distintas operaciones pertenecientes a campos conceptuales diferentes, de manera que el resolutor debe descubrir entre los datos las relaciones aditivas y multiplicativas y el orden estratégico para resolver el problema.

Castro et al., (1997) también hace referencia a este tipo de problemas y menciona que los problemas mixtos combinan las estructuras aditivas y multiplicativas y cuya resolución requiere de más de una relación entre los datos.

2.5 Variables de estudio en los problemas aritméticos verbales

Una vez definida las componentes de un problema matemático y la noción de problema aritmético adoptadas en nuestro estudio, consideramos necesario indagar algunas variable que son de interés particular en el estudio de los problemas aritméticos.

Puig y Cerdan (1988) destacan las variables sintácticas que están relacionadas con el orden y relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema. Algunos ejemplos de este tipo de variables son: longitud del enunciado, complejidad gramatical, presentación de los datos, ubicación de la pregunta, relación del orden en el que aparecen los datos en el problema y la secuencia operatoria para resolverlo, etc.

Estos autores citan a Web (1997), quien menciona las variables de contenido, que corresponden al significado matemático profundo inmerso en el problema y que puede clasificarse de acuerdo con las áreas, materias o disciplinas inmersas en el problema.

Castro (1995) hace referencia a otra variable que denomina proposiciones interrogativas. Según este autor, una proposición es interrogativa cuando pregunta o interroga sobre el valor numérico de una cantidad y puede hacerse sobre una asignación o relación. En el primer caso se desconoce la cantidad asignada y la pregunta demanda que se halle ese valor, por ejemplo ¿cuánto tiempo tardó Daniel en darle una vuelta a la pista? En el segundo caso, la interrogación se hace sobre la cuantificación de la comparación entre dos cantidades relacionadas, por ejemplo ¿cuántas veces tiene María las canicas que tiene Daniel?

Estos dos tipos de proposiciones interrogativas también son mencionadas por Silver y Cai (2005), los cuales agregan una tercera denominada condicional, en la cual la pregunta establece una condición entre dos elementos, por ejemplo ¿Si María recorrió 300 metro más que Pedro, cuántos metros recorrió María? Estos autores asocian esta variable con la complejidad lingüística de un problema.

Otra variable de interés en el estudio de los problemas aritméticos es la componente semántica (Nesher 1982, citado en Puig y Cerdán, 1988). Ésta se puede clasificar, como se presentó en la sección 10.1 de esta memoria, según su estructura operatoria. Así los problemas aditivos pueden ser clasificados de acuerdo a su componente semántica en: cambio, combinación, comparación e igualación y los problemas multiplicativos en isomorfismo de medidas, comparación multiplicativa y producto de medidas.

En los problemas aritméticos también es relevante la información proporcionada en su enunciado, de forma que si se da explícitamente toda la información y además en forma numérica y se pregunta por otra cantidad, entonces el problema se clasifica como estándar; mientras que si en el enunciado no se proporciona toda la información cuantitativa necesaria para resolverlo, pero para alcanzar la solución es preciso realizar una serie de operaciones aritméticas, entonces el problema se clasifica como incompleto (Puig y Cerdán, 1988).

Por último, Rico et al., (1988) señalan entre otros dos criterios generales que determinan algunas variables de interés en la resolución de problemas aritméticos: la información proporcionada y la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta.

En el primer criterio destacan la variable relacionada con los datos numéricos en la información, la cual puede distinguirse según el conjunto y tamaño de los números, la inclusión de datos superfluos, entre otros. En este criterio también se menciona la variable contexto de la información, en la que se incluyen aspectos como la credibilidad del problema y el vocabulario más o menos usual que se emplee.

En cuanto a la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta, los autores mencionan variables como las operaciones necesarias para la obtención del resultado y el algoritmo empleado en cada operación. Castro et al., (1997) hace referencia a esta variable y menciona que si los cálculos necesarios para resolver un problema aritmético implican sólo adiciones y multiplicaciones entonces es un problema de dos procesos.

Así, consideramos que las variables de estudio de los problemas aritméticos presentados en esta sección y los esquemas para valorar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas que serán analizados en la sección 2.10 de esta memoria, nos serán de gran ayuda en la definición de nuestras categorías de análisis.

En la siguiente sección se aborda las diferentes interpretaciones que se le han dado a la invención de problemas, las diferentes formas en las que se ha estudiado, algunas implicaciones a tomar en cuenta en dicho proceso y la forma en que estudiaremos la invención de problemas.

2.6 Invención de problemas matemáticos

Algunos autores (Polya, 1979; Cázares, 2000; English, 1997) ponen de manifiesto la importancia que tiene la invención de problemas dentro de la resolución de problemas, ya que varias investigaciones reconocen en sus etapas de solución del problema actividades relacionadas con la invención de problemas. Por ejemplo, Osbon, (1963; citado en Castro, 1991) menciona que se debe dividir el problema en subproblemas para facilitar la resolución del mismo; Rossman (1971; citado en Castro, 1991), sugiere en sus dos primeras etapas de resolución de problemas la necesidad reformular el problema para resolverlo y en la fase “looking Back” de resolución de problemas citada por Polya (1979) y el método IDEAL de Bransford y Stein (1986), aparece dicha componente.

Como se puede observar, la invención de problemas ha sido parte de la resolución de problemas desde hace ya varios años; sin embargo, es hasta en las últimas décadas cuando los investigadores en Educación Matemática prestan atención a la invención de problemas como una línea de investigación dentro de la resolución de problemas.

Al respecto, Castro (2008) identifica la invención de problemas como un campo de indagación dentro de la investigación en resolución de problemas matemáticos, pero ¿en qué consiste este proceso? ¿Cuáles son las interpretaciones que se le ha dado?

El término invención de problemas, también conocida en la literatura en inglés como *"problem posing" (*Brown y Walter, 1993; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; English, 1997), es usada para referirse tanto a la generación de nuevos problemas o la reformulación de problemas dados (Silver, 1994; English, 1997; Silver y Cai, 1996).

Uno de los primeros autores en referirse a este proceso fue Dunker (1945, citado en Silver, 1994), quien menciona que la resolución de problemas consiste en sucesivas reformulaciones de un problema inicial. Esta concepción de invención de problemas referida como un proceso de formulación o reformulación de problemas, ocurre durante la resolución de un problema complejo (Silver, Mamona-Down, Leung y Kenny, 1996).

Sin embargo, la invención de problemas puede ocurrir antes de resolver un problema, cuando lo que se persigue no es la solución sino la creación de un problema a partir de una situación o experiencia (Silver, 1994). Un ejemplo de este tipo particular de invención de problemas fue realizado por Cázares (2000), quien presentó a 14 estudiantes de primaria varias tarjetas con diferentes ilustraciones de situaciones relacionadas con el contexto del estudiante, de las cuales debían escoger algunas y plantear varios problemas matemáticos.

Esta actividad también puede ocurrir después de la solución de un problema, en el cual se modifica el objetivo, meta o condición de un problema ya resuelto con el fin de generar nuevos problemas (Silver, 1994). Este tipo de estrategia está relacionada con la fase "looking Back" de resolución de problemas citada por Polya (1979).

Esta concepción de invención de problemas posterior a la solución de un problema, es utilizada por Brown y Walter (1993) en su estrategia denominada "¿Wath if not?" Esta consiste en cambiar las condiciones y restricciones de un determinado problema para plantear nuevos e interesantes problemas que pueden llevar a resultados relevantes. La cuestión operativa de este tipo de invención de problemas consiste en *"¿qué nuevos problemas son sugeridos mediante esta situación, problema o experiencia?"* (Silver, 1994; p. 20).

En el modelo de Polya (1979), de hace más de tres décadas, aparece esta componente esencial de la actividad matemática cuando se cuestiona ¿Cómo podemos plantear el problema de manera diferente? ¿Cómo variar el problema descartando parte de la condición? Al respecto, Silver (1994) menciona que si un resolutor no puede resolver el problema original, entonces el proceso de invención de problemas "*se produce cuando* *el problema dado es reformulado y personalizado a través del proceso de reformulación. La cuestión operativa que estimula esta forma de inventar es ¿cómo puedo formular el problema de manera que pueda resolverlo?"*(p.20).

Por otra parte, Stoyanova (1998) identifica tres categorías de experiencia de planteamiento de problemas que permiten estudiar el conocimiento y habilidades matemáticas de los estudiantes para generar y resolver problemas matemáticos: situación libre, situación semi-estructurada y situación de planteamiento de problemas estructurada. En la primera situación los estudiantes plantean problemas sin ninguna restricción, en la segunda y tercer actividad los estudiantes inventan problemas con base en alguna situación, experiencia o información cuantitativa. Lo que cambia en estos dos últimos tipos es el nivel de estructuración de la tarea propuesta.

Con base en la literatura consultada, al hecho de inventar problemas se le ha dado distintas denominaciones por diferentes autores. Así se le ha designado como generación de problemas o reformulación de problemas dados (Silver, 1994), formulación de problemas (Kilpatrick, 1987) y planteamiento de problemas (Brown y Walter, 1990). A nuestro parecer, estas denominaciones hacen referencia al mismo hecho, inventar problemas, por lo que utilizaremos con más frecuencia la expresión invención de problemas.

También se puede decir que la invención de problemas es un proceso matemático que tiene lugar, bien, durante la resolución de un problema matemático, luego de resolver un problema o cuando el sujeto se enfrenta ante una situación conocida previamente, para la cual no hay una formulación matemática.

En este trabajo de investigación se planteará la tarea de invención de problemas como una situación semi-estructurada y previo al proceso de resolución de problemas. Esto porque corresponde al escenario de invención de problemas que quizás ha sido más estudiado y por tanto del que se tiene mayor información. Además, consideramos que es la situación de invención de problemas más adecuada que nos permitirá explorar algunas variables de los problemas aritméticos planteados por dos grupos de estudiantes, uno conformado por estudiantes considerados con talento matemático y otro grupo de estudiantes de un colegio estándar.

2.7 Perspectivas de investigación en la invención de problemas matemáticos

Varios autores (Krutetskii ,1976; Kilpatrik, 1987; Silver, 1994; Ellerton, 1986; Walter y Brown 1993, Silver y Cai, 1996; Leung y Silver, 1997: English ,1997; Kesan et al., 2010; entre otros) han estudiado la invención de problemas matemáticos con distintos propósitos. A continuación se hace una breve aproximación sobre la manera en que se ha estudiado dicho componente de la actividad matemática y que está relacionada con este estudio.

2.7.1 La invención de problemas como característica de la actividad creativa o talento excepcional

Algunas estrategias para identificar individuos creativos han utilizado actividades de invención de problemas dentro de dicho proceso. Por ejemplo, Getzels y Jackson (1962; 1962; citado en Silver, 1994) desarrollaron un conjunto de tareas para medir la creatividad, donde una de ellas a los sujetos plantear problemas que podrían ser contestados usando información dada (Silver, 1997). Balka (1974) también pidió a un grupo de sujetos que inventaran problemas matemáticos que podrían ser contestados con base en una información dada y los analizó desde tres aspectos: número de problemas inventados, flexibilidad en el número de diferentes categorías de problemas inventados y originalidad.

Otros autores como Van den Brink (1987); Streefland (1987); Healy (1993); Skinner (1991) citados en Silver (1997), coinciden en que los procesos de invención y resolución de problemas pueden fomentar el desarrollo de la fluidez, que es una de las principales características de la creatividad.

La invención de problemas también ha sido estudiada para explorar la capacidad de estudiantes con talento en matemáticas. Esto queda de manifiesto en los estudio de Krutetskii (1976), Ellerton (1986), Pelczer y Gamboa (2008) y Kesan et al., (2010) quienes propusieron tareas de invención de problema a estudiantes con talento matemático.

2.7.2 La invención de problemas como instrumento para identificar estudiante con talento en matemática

Algunos autores ven en la invención de problemas una herramienta que podría ser utilizada en el proceso de identificación de estudiantes con talento matemático (Kesan, et al., 2010; Ellerton, 1986). Esto porque algunos estudios (Ellerton, 1986; Silver y Cai,

1996) identifican diferencias en los problemas planteados por estudiantes con mayor y menor capacidad matemática. Además, Kesan et al., (2010) afirma que por medio del planteamiento de problemas, la relación entre el profesor y los estudiantes es más alta y los estudiantes son más activos, por lo que el profesor puede identificar al alumno superdotado y su capacidad matemática.

2.7.3 La invención de problemas como una ventana para observar la comprensión matemática de los estudiantes

Las actividades de planteamiento de problemas abren una "ventana" que permiten analizar la comprensión de los conceptos matemáticos y habilidades matemáticas de los estudiantes (Silver, 1994; Pelczer y Gamboa, 2008). De acuerdo con Ellerton (1986), los niños demuestran su comprensión y nivel de desarrollo de conceptos en las ideas matemáticas expresadas cuando inventan problemas.

En España se han realizado algunas investigaciones con esta dirección. Por ejemplo, Luque (2004) utilizó la invención de problemas como el mecanismo por el cual un grupo de estudiantes de tercer curso de secundaria pondrían de manifiesto su conocimiento y comprensión sobre las fracciones y sus operaciones. Ayllón (2004) usó esta misma técnica para conocer el significado, diferentes usos y contextos que un grupo de profesores en educación primaria dan a tres tipos de números: naturales, enteros negativos y racionales.

La invención de problemas también permite al profesor observar patrones en el aprendizaje y el pensamiento matemático de los estudiantes (Kwek y Lye, 2008), por lo que algunos investigadores la han utilizado como una herramienta para evaluar el aprendizaje de conocimientos matemáticos (Kwek y Lye, 2008; Cai y Silver, 2005).

Además, un aspecto positivo que tiene la invención de problemas como herramienta de evaluación, es que no está separada del proceso de instrucción sino inmersa en ella (Lin, 2004).

2.7.4 Implicaciones en el proceso de invención de problemas

Algunos autores hacen una serie de recomendaciones a tomar en cuanta cuando se propone una tarea de invención de problemas a partir de una situación dada. Al respecto, Moses, Bjork y Goldenberg (1990), hacen referencia a tres cuestionamientos: la clase de información que proporciona el problema, qué tipo de información permanece desconocida (y requerida) y qué tipo de restricciones están implicadas en la respuesta. También mencionan que las actividades de planteamiento de problemas se deben dar en un contexto matemático muy familiar para los estudiantes.

Del estudio de English (1997), se recoge que los estudiantes necesitan un marco de conocimientos que les permita hacer frente a las actividades cognitivas que conlleva el inventar problemas. Así, propone que un estudiante debe comprender lo que es un problema, reconocer su estructura e identificar estructuras similares para que pueda inventar un problema.

En este sentido, Leung (1994) sugiere que existe una influencia de los conocimientos matemáticos en la invención de problemas, ya que los sujetos con altos conocimientos matemáticos manipularon sistemáticamente las condiciones dadas para hacer problemas y usaron las soluciones antes de inventar problemas como una nueva pieza de información e inventar problemas subsecuentes, mientras que los sujetos con menos conocimientos matemáticos inventaron problemas que podrían no ser resueltos matemáticamente.

Por otra parte, algunos autores indican que la invención de problemas es una herramienta que puede ser utilizada para mejorar la disposición y actitudes de los estudiantes hacia la matemática (Brown and Walter, 1983, 1993; Silver, 1994; Silver, Mamona-Downs, Leung, & Kenney, 1996; English 1997), como característica de una enseñanza orientada a la indagación (Brown y Walter 1990, 1993; Cunningham, 2004), como actividad prominente de la actividad matemática (Freudenthal, 1973; Polya, 1954; Kilpatrik, 1987; Brown y Walter, 1990) y como medio para mejorar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas (Brown y Walter, 1977; Silver, 1994; Leung y Silver (1997); Silver y Cai, 1996).

como queda de manifiesto en esta sección, la invención de problemas ha sido objeto de investigación con diferentes propósitos, los cuales aportan resultados valiosos tanto en la mejora de la educación matemática como en la aportación de elementos teóricos y metodológicos. De igual forma, es claro que en este tipo de actividades además de abrir una ventana a través de la cual mirar la comprensión matemática de los estudiantes, también es un espejo en el cual se refleja los contenidos y características de sus experiencias matemáticas escolares (Silver, 1994).

2.8 Valoración de las producciones de los estudiantes en tareas de invención de problemas

Recientemente se observa un progreso en el desarrollo de enfoques de instrucción que incorporan la invención de problemas como una actividad de clase (Brown y Walter, 1990; Silverman, Winograd y Strohauer, 1992; Skinner, 1991); sin embargo, se ha prestado poca atención a la valoración de las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas (Silver y Cai, 2005). A continuación se presentan algunos esquemas utilizados para valorar las producciones de los estudiantes cuando inventan problemas.

Leung y Silver (1997) examinaron la calidad de las respuestas dadas por los estudiantes utilizando un proceso de tres pasos. Primero clasificaron cada respuesta como un problema matemático o no matemático; luego cada problema matemático fue clasificado como creíble o no creíble. Por último se clasificaron todos aquellos problemas matemáticos creíbles con respecto a la suficiencia de la información proporcionada para resolver el problema planteado.

La complejidad matemática de los problemas se examinó de acuerdo a si la solución del problema requería un único o múltiples pasos para su solución. El número de pasos requeridos para resolver el problema fue determinado por la trayectoria mínima de solución de la estrategia MEA, (discutida en Simon, 1972) producida por cada problema que presentaba suficiente información para resolverlo. Las producciones de los estudiantes también fueron analizadas de acuerdo con su estructura semántica.

Cázares (2000) se centró en establecer niveles de desarrollo evolutivo en la competencia aritmética de un grupo de estudiantes en la invención de problemas aritméticos. Para ello, realizó un primer análisis general en el que consideró la estructura semántica de los enunciados planteados, la interpretación de los números como cantidades, el significado asignado a los números, el tipo de números utilizados, el dominio de las operaciones y las dificultades observadas en su realización.

También definió cinco categorías de análisis junto con una escala de evaluación que consta de cinco valores diferentes (1 a 5) que van de los niveles menos elaborados hasta cuestiones que muestran un mayor dominio de la tarea. Las categorías establecidas corresponden a: Coherencia global del enunciado, estructura semántica, utilización de los datos numéricos que aparecen en la imagen, la coherencia de las operaciones con la estructura del problema y la validez del procedimiento de resolución de problemas.

En el trabajo de Ayllón (2004) se valoró las producciones de los estudiantes en función de cinco aspectos: si el enunciado se considera o no un problemas, el número de operaciones necesarias en su resolución, la estructura numérica de la operatoria, la estructura semántica y a partir de los significados de los números.

Silver y Cai (2005), proponen tres criterios generales para valorar las respuestas generadas por los estudiantes: Cantidad, originalidad y complejidad. La primera consiste en contar el número producciones correctas de un estudiante ante tarea de invención de problemas. La originalidad se refiere a que una respuesta puede ser comparada con el conjunto de respuestas típicas y por tanto identificar si un estudiante generó un problema atípico considerado como original.

En cuanto a la complejidad de los problemas planteados, estos autores consideran que puede ser valorada de acuerdo a la sofisticación de las relaciones matemáticas implicadas en el problema y argumentan que los problemas que implican la relación entre dos o más cantidades son generalmente, aunque no siempre, más complejos que aquellos que implican solo una. Del mismo modo, mencionan que los problemas que implican relaciones de multiplicación entre cantidades son generalmente más sofisticados que aquellos que implican relaciones aditivas.

También consideraron estudiar la complejidad lingüística implicada de acuerdo con la presencia de proposiciones de asignación, relacionales o condicionales en la sentencia de los problemas matemáticos. Una proposición de asignación es una sentencia como "¿cuántas millas condujeron entre todos?" Una proposición relacional sería una sentencia como "¿cuánta millas más condujo Arturo que Jerome?" Una proposición condicional es una sentencia como "si Arturo condujo 80 millas más que Elliot ¿cuántas millas condujo Arturo? Los autores afirman que los problemas con proposiciones condicionales y relacionales tienden a ser más difíciles de resolver que aquellos que contienen solo una proposición de asignación.

Estos autores mencionan que la complejidad matemática podría ser juzgada de acuerdo al número de relaciones de estructura semántica, de manera que los problemas que implican gran cantidad de relaciones semánticas son más complejos matemáticamente que aquellos que implican menos relaciones.

En el estudio de Silver y Cai (1996) se presentan un esquema para examinar la naturaleza y complejidad de los problemas aritméticos, el cual consiste en clasificar las respuestas de los estudiantes en cuestiones matemáticas, no matemáticas y declaraciones. Las cuestiones matemáticas fueron clasificadas en resolubles y no resolubles. Si el problema planteado es resoluble entonces se analizó su estructura semántica, lingüística y sintáctica; mientras que si el problema se clasificaba como no resoluble entonces se analizaba sólo los aspectos lingüísticos y sintácticos.

Como se puede observar, son pocas las investigaciones que abordan el cómo valorar las respuestas de los estudiantes ante tareas de invención de problemas; sin embargo, estas ideas junto con el estudio realizado sobre las variables de los problemas aritméticos presentado en la sección 2.7 de esta memoria, nos aporta información relevante para definir el esquema de análisis que utilizaremos en nuestra investigación.

2.9 Cómo estudiaremos la invención de problemas matemáticos

En este estudio se busca aportar información relacionada con la capacidad que tiene un grupo de estudiantes con talento en matemática al inventar problemas aritméticos y compararlo con la capacidad de un grupo estándar de un colegio público ante la misma tarea. Esta información permitirá también estudiar la invención de problemas como una herramienta para identificar estudiantes con talento en matemática.

De esta forma, se pretende investigar la invención de problemas como característica del talento excepcional y como instrumento para identificar estudiantes con talento en matemática, continuando la línea de investigación desarrollada por Ellerton (1986), Krutetskii (1976) y Kesán et al. (2010).

De igual forma consideramos que la invención de problemas aritméticos nos permitirá observar y analizar el pensamiento matemático puesto de manifiesto por estudiantes con talento en matemática (Kwek y Lye, 2008), ya que dichas tareas son un espejo en el cual los estudiantes reflejen las características de sus experiencias matemáticas escolares (Silver, 1994).

La revisión de literatura relacionada con el talento, la invención de problemas, así como de problemas aritméticos expuesta en este capítulo, nos permitió definir los objetivos e hipótesis de investigación y la elaboración del instrumento de recolección de informacion. Igualmente nos ayudó a definir las variables de estudio que conforman las categorías de análisis y que son explicadas con mayor detalle en el tercer capítulo de este estudio.

Así, para recolectar información se construirá un instrumento con dos situaciones semiestructuradas de invención de problemas (Stoyanova, 1998), tomando en cuenta las recomendaciones realizadas por Moses, Bjork y Goldenberg (1990) y English (1997).

En cuanto a la actuación de los estudiantes ante la tarea de invención de problemas se van a considerar las siguientes variables: resolubilidad del problema, estructura operatoria y número de etapas, tipo de estructura semántica y cantidad de las mismas, cantidad de pasos para resolver el problema, tipo de proposición interrogativa, área o disciplina implicada en el problema, etc.

Esperamos aportar información relevante tanto en aspectos relacionados con la comprensión de las actividades de invención de problemas, la valoración de las producciones de los estudiantes, características de las situaciones de planteamiento de problemas, así como características particulares que presentan los estudiantes con talento en matemática al enfrentarse a tareas de invención de problemas aritméticos.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

En este apartado exponemos la metodología empleada en la investigación, presentando en primer lugar el tipo de investigación en el cual se enmarca nuestro estudio. Seguidamente se expone el diseño de la investigación que aborda la selección de los estudiantes, el diseño, descripción y procedimiento de aplicación del instrumento utilizado para recolectar información y el proceso de transcripción y codificación de las producciones de los estudiantes.

En la sección 3.7 se describe el proceso realizado para construir las categorías de análisis y en la sección 3.8 se presentan las tres categorías con sus respectivas variables de estudio que finalmente fueron empleadas en la investigación. Por último se explica el método empleado para determinar la riqueza de los problemas y el esquema para valorar las producciones de los estudiantes.

3.1 Tipo de investigación

Esta investigación se considera de tipo exploratorio ya que corresponde a un primer acercamiento al estudio de la invención de problemas aritméticos por estudiantes considerados con talento matemático y su comparación con un grupo de estudiantes de un colegio estándar. De acuerdo con Hernández, Fernández, y Baptista (1991), los estudios exploratorios se llevan a cabo para examinar un problema de investigación desconocido o poco estudiado con el objetivo de familiarizarse con el mismo.

Dankhe (1986) menciona que los estudios exploratorios en pocas ocasiones constituyen un fin en sí mismos y generalmente determinan tendencias y relaciones potenciales entre variables, estableciendo una guía de ideas para una posterior investigación más rigurosas. De esta forma, la información recolectada en este primer estudio permitirá tomar decisiones sobre la dirección y acercamiento del trabajo de tesis doctoral en aspectos como la construcción del instrumento de recolección de información, categorías de análisis, hipótesis de investigación, entre otros.

También consideramos que esta investigación corresponde a un estudio descriptivo ya que busca especificar las propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis (Dankhe, 1986). En este estudio se pretende describir y caracterizar en términos cualitativos y cuantitativos las producciones de los estudiantes ante la tarea de inventar problemas aritméticos de acuerdo con algunas características presentes en los enunciados de los problemas y que se relacionan con la estructura sintáctica, semántica y matemática de los mismos.

3.2 Selección de los estudiantes

Dadas las características de la investigación se requerían dos grupos de estudiantes con características diferentes en cuanto a su capacidad matemática. Así, se escogió un grupo de 21 estudiantes considerados con talento matemático que fueron seleccionados para participar en el proyecto ESTALMAT Andalucía oriental durante el curso 2010-2011.

Este proyecto pretende detectar y estimular durante dos años académicos el talento precoz en matemática de 25 alumnos de centros andaluces escogidos mediante la realización de pruebas de selección. Estos estudiantes reciben una preparación especial con el objetivo de estimular y orientar su sentido e intuición, sin pretende hacer avanzar a los estudiantes en contenidos de matemáticas del currículum, sino en darles orientaciones que les permitan desarrollar su especial talento en matemáticas[1].

Este grupo está conformado por 18 hombres y 3 mujeres con edades comprendidas entre los 13 y los 15 años que provienen de las provincias de Málaga, Almería, Jaen y Granada. 20 de estos estudiantes cursan tercer curso de la ESO y solamente un estudiante está matriculado en segundo de la ESO.

El segundo grupo lo conforman 19 estudiantes de tercer grado de Instituto de Educación Secundaria Nazarí, que está ubicada en el municipio de Salobreña en la provincia de Granada. En este grupo hay 7 hombres y 12 mujeres cuyas edades oscilan entre los 14 y los 15 años. La selección de este grupo se debió a que cumplía con las características de ser un grupo estándar. Además, uno de los estudiantes con talento seleccionado formaba parte de este grupo. De igual forma se tomó en cuenta la disponibilidad y facilidad ofrecida por la profesora de matemáticas del grupo.

3.3 Diseño del instrumento para recolectar información

En este estudio se elaboró un cuestionario en el que se propusieron dos tareas o situaciones semiestructuradas de invención de problemas (Stoyanova, 1998) con características relativamente diferentes que permitieran a los estudiantes poner en práctica sus habilidades, conocimientos y creatividad.

[1] http://thales.cica.es/estalmat/

Para el diseño de este instrumento se tomaron en cuenta aspectos como la clase de información que proporciona el problema, el tipo de información que permanece desconocida y que el contexto escolar presentado en la situación sea muy familiar para los estudiantes (Moses et al., 1990). De igual forma se consideró el tipo de número y cantidad, la presentación de la información, la riqueza de ideas y las relaciones matemáticas que podrían surgir de la situación presentada a los estudiantes.

Así, consideramos que el instrumento utilizado debía cumplir al menos los siguientes condiciones: el contexto debe ser de interés y familiar para los estudiantes; motivar a plantear diferentes tipos de problemas; estimular la creatividad, permitir el empleo de diferentes tipos de números, cantidades y representaciones numéricas y favorecer e incentivar la invención de problemas difíciles para ambos grupos de estudiantes.

Con respecto a esta última condición, creemos importante pedir a los estudiantes el plantear problemas que consideren difíciles de resolver, ya que nos interesa ver en qué medida ponen en juego sus conocimientos, habilidades y creatividad para inventar problemas elaborados. Además, consideramos que esto puede hacer que el estudiante ponga su mayor esfuerzo y sienta un reto y compromiso hacia la actividad de inventar problemas originales.

Luego de identificar dichos parámetros, se decidió elaborar diferentes tipos de situaciones de planteamiento de problemas y analizarlas de acuerdo con la riqueza de los elementos antes mencionados, con el fin de escoger la que mejor se adecuara a los intereses del estudio. En total se tuvieron nueve propuestas, si bien por cuestiones de disponibilidad de tiempo en la aplicación del cuestionario y la posible dificultad que pudieran tener los estudiantes en responder a las tareas, se decidió utilizar solamente dos. En la siguiente sección se describen dichas tareas.

3.4 Descripción del instrumento

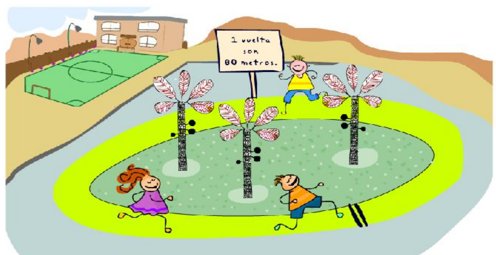
El instrumento es presentado a los sujetos en dos hojas y en cada una de éstas se muestra una tarea de invención de problemas. En la parte superior de la primera página se consigna la siguiente información general del estudiante: nombre y apellidos, edad, provincia de residencia, nombre del centro educativo y nivel que cursa.

Luego de esta información, se presenta al estudiante la instrucción de la primera tarea de invención de problemas que indica:

De acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.

La figura propuesta[2] a los estudiantes para que invente el problema es la siguiente:

Figura 1 *Imagen presentada en la primera tarea de invención de problemas*



En la figura 1 se puede observar la presencia de un cartel que muestra explícitamente una información numérica de tipo natural (80 metros) y un contexto en el que los estudiantes pueden plantear el problema (tres niños recorriendo una pista alrededor de una plaza que está junto a una chancha de futbol). Este contexto permite que los estudiantes puedan establecer relaciones entre la pista y la cancha de futbol, así como entre los sujetos que están corriendo en la pista.

Además, la situación permite el plantear problemas con diferentes tipos de números y relacionados con la distancia, tiempo, velocidad, área, perímetro, etc. Consideramos que al aparecer en la figura tres sujetos, el problema puede presentar tres o más proposiciones, aunque no necesariamente.

En la siguiente página aparece la segunda tarea de invención de problemas con su respectiva instrucción, que es muy similar a la anterior, salvo que en esta actividad se les propone a los estudiantes inventar un problema matemático con base en una situación expuesta de forma escrita. La instrucción indica:

Con la siguiente información inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma,

[2] http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/problematic/menuppal.html

resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.

Enseguida se presenta la situación de la cual los estudiantes deben inventar un problema matemático:

Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros.

Esta tarea también presenta algunas particularidades interesantes. Por ejemplo, en contraste con la anterior, la información suministrada está dada de forma verbal e incluye tres datos numéricos de forma explícita (hora, capacidad del tren y cantidad de vagones). Además, consideramos que se pueden inventar problemas con distintos tipos de números y relacionados con la distancia, tiempo, velocidad, capacidad, peso, fuerza, costo, etc. Igualmente, pueden establecerse relaciones de diferente tipo entre los vagones del tren y plantear problemas con cuatro o más proposiciones ya que el tren está formado por cuatro vagones.

En el anexo A se reproduce el cuestionario tal y como fue implementado.

3.5 Procedimiento de aplicación del instrumento

El instrumento para recolectar información fue aplicado por separado a cada grupo de estudiantes en un tiempo de 20 minutos. En el caso del grupo de ESTALMAT, la información se recolectó el sábado 7 de mayo de 2011 aproximadamente a las 10:00 horas y el grupo de estudiantes del I.E.S Nazarí el jueves 26 de mayo de 2011 a las 9:00 horas.

El procedimiento para aplicar el instrumento en ambos grupos fue la misma y consistió en que el entrevistador-investigador entregó las dos hojas con las tareas de invención de problemas a cada estudiante y les indicó que la actividad propuesta formaba parte de una investigación que se realiza en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, con relación a los procesos de invención de problemas matemáticos.

También les dijo que las tareas se debían responder de forma individual y plantear, de acuerdo con la información suministrada, un problema matemático que consideraran difícil de resolver y en el que utilizaran para su resolución las operaciones aritméticas. Además se les indicó que podían agregar más información o datos si lo consideraban necesario. Por último se les indicó que la información obtenida era completamente confidencial, por lo que en ningún momento se particularizaría alguna de las producciones.

3.6 Transcripción y codificación de las producciones de los estudiantes

Luego de aplicar el instrumento para recolectar información se procedió a transcribir las producciones de los estudiantes ante la primera (T1) y segunda tarea (T2) de invención de problemas. En esta fase se observó que todos los estudiantes contestaron a las dos tareas propuestas, obteniendo un total de 80 producciones.

Para facilitar la organización y presentación de dichas producciones decidimos llamar al grupo de estudiantes de ESTALMAT que participaron en este estudio "grupo talento", el cual abreviamos como GT, y a los estudiantes seleccionados del IES de Salobreña "grupo estándar", abreviado GE.

En la transcripción de las producciones se utiliza una codificación con 6 caracteres para hacer referencia a las mismas, de manera que los primeros tres indican el número del estudiante y grupo al que pertenece y los restantes a la producción, ya sea de la primera o segunda tarea. Por ejemplo, el código 6GE-T2 se refiere a la producción del estudiante número 6 del grupo estándar ante la segunda tarea de invención de problemas y el 17GT-T1 corresponde a la producción del estudiante número 17 del grupo talento ante la primera tarea de invención de problemas.

La transcripción de las producciones de los estudiantes del grupo talento y estándar se encuentra respectivamente en el anexo B y C de esta memoria.

3.7 Proceso de construcción de las categorías de análisis

Dado que uno de los planteamientos de esta investigación es caracterizar los problemas matemáticos inventados por ambos grupos de estudiantes e identificar algunas diferencias en dichas producciones, nos propusimos definir algunas categorías de análisis que nos permitieran describir el trabajo realizado por los estudiantes.

Para ello consideramos las características propias de esta investigación, las variables de estudio de los problemas aritméticos expuestas en la sección 2.5 y el estudio de los esquemas utilizados para valorar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas descritos en la sección 2.8 de esta memoria.

Luego de una revisión general de los problemas inventados por los estudiantes, se observó que algunas de estas variables no eran de interés para nuestro estudio, ya sea porque no aportaban riqueza al problema o porque consideramos que no marcaba una diferencia entre las producciones de ambos grupos. Por ejemplo, el vocabulario y tamaño de los números empleados fueron, en general, similares en todas las producciones.

Además, se tenía que tomar en cuenta que la tarea propuesta no incluía resolver el problema, por lo que el análisis debía centrarse también en la complejidad de plantear un problema difícil. Ante esto se consideró analizar los problemas que no tuvieran una solución por ser incompletos o presentar alguna incompatibilidad matemática.

Así, a partir de estas consideraciones definimos tres categorías de análisis y en cada una de ellas variables de estudio que nos permitieron estudiar de una forma más eficiente los problemas inventados por ambos grupos de estudiantes.

3.8 Categorías de análisis empleadas

Como se mencionó anteriormente, antes de llegar a las siguientes categorías se realizó un análisis que nos permitió identificar aquellas variables que permitieran establecer diferencias entre los problemas planteados por el grupo considerado con talento matemático y el grupo estándar; así como aportar riqueza al problema. A continuación se presenta una descripción de las categorías empleadas con sus respectivas variables de estudio.

3.8.1 Estructura sintáctica

La primera categoría considerada es la estructura sintáctica del problema, la cual se analizó con base en tres variables: longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado.

- Longitud del enunciado: En esta variable se utilizó como indicador el número de proposiciones presentes. Las proposiciones hacen referencia a aquellas expresiones explícitas en el texto del enunciado que asignan un valor numérico o una cantidad a una variable, o bien, establece una relación cuantitativa entre dos variables. Cada una de estas expresiones aportan un dato al problema, sin embargo; algunas podrían no ser utilizadas en la solución del mismo por aportar un dato superfluo. Algunos ejemplos de proposiciones son, “el tren viaja a una velocidad de 348 km/h”, “Pedro corrió 300 metros más que Roberto” “María tiene el doble de caramelos que Juan”.

Además, se definieron cinco posibles valores de variable: una o dos proposiciones, tres proposiciones, cuatro proposiciones, cinco o seis proposiciones y siete o más proposiciones. La escogencia de estos valores se basó en la cantidad de proposiciones que incluía los enunciados de los problemas inventados, ya que en una revisión general de los mismos se observó que una gran cantidad estaban compuestos por tres o más proposiciones. Además, definimos cinco posibles valores para tener un nivel intermedio, el cual consideramos debían ser los problemas que presentan cuatro proposiciones, ya que la información suministrada en cada tarea de invención de problemas facilitaba inventar problemas con un mínimo de dos. Así consideramos que los problemas del siguiente nivel debían contener cinco o seis proposiciones y en el último nivel siete o más.

- Tipo de proposición interrogativa: Ésta variable corresponde a la manera en que el estudiante hace la pregunta del problema que inventó y se estudió de acuerdo con la presencia de proposiciones de asignación, condicionales o relacionales. Una proposición interrogativa de asignación podría ser “cuantas personas viajaban en el tren”, una relacional es una declaración como ¿cuántas veces tiene María las canicas que tiene Daniel? mientras que una condicional es una declaración como “Si María recorrió 300 metros más que Pedro, cuántos metros recorrió María”.

  Es importante destacar de acuerdo con Silver y Cai (2005), los problemas con proposiciones relacionales y condicionales tienden a ser más difíciles de resolver por los estudiantes que aquellos que contienen sólo proposiciones de asignación.

- Tipo de número empleado: En esta variable de estudio se identificó el tipo de número presente en el enunciado, el cual se caracterizó por el empleo de números naturales y números racionales expresados en notación decimal y/o fraccionaria. De igual forma se estudió el uso de más de un tipo de número en los problemas propuestos por los estudiantes.

3.8.2 Estructura matemática

La segunda categoría considerada corresponde a la estructura matemática del problema, la cual será estudiada con base en cuatro variables: tipo de estructura operatoria y número de etapas, cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema, cantidad de pasos distintos para resolver el problema y bloque de contenido curricular al que hace referencia el enunciado del problema.

- Tipo de estructura operatoria: Esta variable se clasificó de acuerdo a la estructura aditiva y/o multiplicativa y al número de etapas del problema. Así los problemas inventados por los estudiantes se clasificaron en: aditivos de una etapa, multiplicativo de una etapa, aditivos de más de una etapa, multiplicativo de más de una etapa y problemas mixtos.

  Esta caracterización se realizó con base en la clasificación hecha por Puig y Cerdán (1988) y se incluyeron, además, los problemas mixtos que combinan las estructuras aditivas y multiplicativas y cuya resolución requiere de más de una relación entre los datos (Castro et al., 1997).

- Tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema: Cómo parte del análisis matemático, nos interesamos en las operaciones necesarias para resolver los problemas planteados, así como determinar la cantidad de procesos distintos de cálculo requeridos para resolver el problema, de manera que si los cálculos necesarios para resolverlo implican sólo operaciones aditivas y multiplicativas, entonces consideramos que se trata de un problema de dos procesos (Castro et al., 1997).

- Cantidad de pasos distintos para resolver el problema: Esta variable corresponde a la cantidad de pasos distintos para resolver el problema y consideramos que dos pasos son iguales si éstos conllevan el mismo procedimiento de cálculo. Por ejemplo, en la primera tarea para calcular la distancia recorrida por los tres sujetos en un tiempo determinado sabiendo que se desplazan a velocidades diferentes, consideraremos que se ha realizado un único paso. Sin embargo, si además de calcular la distancia recorrida por cada uno de los sujetos se solicita determinar cuánta distancia recorrieron entre los tres, entonces se considera que la solución del problema está conformada por dos pasos distintos.

  Esta variable fue considerada porque cada paso distinto necesario para resolver el problema implica una relación semántica y un problema que contiene tres relaciones semánticas (iguales o distintas) puede ser más rico que otro con dos relaciones semánticas (iguales o distintas). Además, la cantidad de pasos puede condicionar la extensión en la resolución del problema.

- Bloque de contenido curricular al que hace referencia el enunciado del problema: En esta investigación se pretende que los estudiantes inventen problemas aritméticos; sin embargo, ellos tienen la libertad de plantear un problema que además de ser aritmético también puede estar relacionado con otras áreas del saber.

  Así, se identificó el bloque de contenido curricular al que hace referencia el enunciado del problema, ya que también es un aspecto que lo enriquece dado el conocimiento que debe movilizar el resolutor para afrontarlo. Los bloques de contenido propuestos para esta variable son: aritmética, física, geometría, lógica y medida.

3.8.3 Estructura semántica

Por último, los problemas inventados por los estudiantes también fueron estudiados de acuerdo a su estructura semántica y para ello se adoptó las clasificaciones realizadas Puig y Cerdan (1988). Así se clasificaron los problemas de estructura aditiva de acuerdo a la relación que se establece entre los datos en: *combinación, cambio, comparación e igualación*. De igual forma los problemas de estructura multiplicativa se clasificaron en *isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto de medidas*.

En esta categoría también se estudió la cantidad de relaciones semánticas distintas presentes en el enunciado, de manera que si un problema involucra las siguientes relaciones semánticas: combinación, isomorfismo de medida y combinación; entonces se considera un problema con dos relaciones semánticas distintas.

3.9 Riqueza de los problemas

Como se mencionó anteriormente, las categorías de análisis mencionadas también nos serían útiles para estudiar la riqueza que presentan los problemas planteados por los estudiantes. Para ello tomamos en cuenta las siguientes variables de estudio: longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa, cantidad de pasos distintos para resolver, cantidad de procesos distintos de cálculo implicados en la solución del problema, cantidad de bloques de contenido curricular presentes en el enunciado del problema y cantidad de relaciones semánticas distintas.

En cada una de estas variables se definieron niveles de actuación representados por valores numéricos ordenados de forma ascendente y que van desde las cuestiones más sencillas a aquellas que indican que el estudiante demuestra un mayor dominio de la tarea. En la siguiente tabla se presentan los niveles de actuación definidos en cada una de las variables consideradas.

Tabla 1 *Niveles de actuación de acuerdo con las variables de estudio consideradas en el estudio de la riqueza de los problemas*

Longitud del enunciado		
Actuación del estudiante	Una o dos proposiciones	1
	Tres proposiciones	2
	Cuatro proposiciones	3
	Cinco o seis proposiciones	4
	Siete o más proposiciones	5
Tipo de proposición interrogativa		
Actuación del estudiante	Proposición interrogativa de asignación	1
	Proposición interrogativa condicional o relacional	2
Cantidad de pasos distintos para resolver el problema		
Actuación del estudiante	Un paso	1
	Dos pasos	2
	Tres pasos	3
	Cuatro pasos	4
	Cinco o más pasos	5
Cantidad de procesos distintos de cálculo implicados en la solución del problema		
Actuación del estudiante	Un proceso	1
	Dos procesos	2
	Tres procesos	3
	cuatro procesos	4
Cantidad de bloques de contenido curricular presentes en el enunciado del problema		
Actuación del estudiante	Un bloque de contenido	1
	Dos bloques de contenido	2
	Tres o más bloques de contenido	3
Cantidad de relaciones semántica distintas		
Actuación del estudiante	Una relación semántica	1
	Dos relaciones semánticas	2
	Tres relaciones semántica	3
	Cuatro relaciones semánticas	4
	Cinco o más relaciones semánticas	5

En esta investigación concebimos la riqueza de los problemas planteados por un estudiante con base en la suma de los puntos obtenidos en cada una de las variables, de modo que a mayor puntuación mayor riqueza del problema. Así, si un estudiante planteó un problema que presenta las siguientes características: dos bloques de contenido, cuatro proposiciones, proposición interrogativa de asignación, tres pasos, dos procesos y dos relaciones semánticas, entonces la riqueza de dicho problema será de 13 puntos.

Luego, las puntuaciones obtenidas por cada estudiante en ambas tareas nos servirán para identificar, de manera exploratoria y tomando en cuenta las limitaciones de nuestro estudio, indicios del uso de la invención de problemas como herramienta para identificar niños con talento matemático.

3.10Esquema para valorar las producciones de los estudiantes

Antes de realizar el análisis de las respuestas de los estudiantes fue necesario decidir cuáles de ellas serían evaluadas. Para ello se identificó entre todas las producciones aquellas que corresponden a un problema matemático de acuerdo con la definición de Castro (1991) y problema aritmético de Puig y Cerdán (1988). Luego los problemas aritméticos fueron resueltos por los autores de este estudio y clasificados en resolubles o no resolubles.

Dentro de las producciones de los estudiantes se encontraron problemas matemáticos no resolubles que presentaban características importantes de analizar. Por ello clasificamos los problemas matemáticos no resolubles en incompletos y los distinguimos de aquellos que presentan incompatibilidad matemática. Los primeros corresponden a problemas que no proporcionan toda la información necesaria para resolverlo; sin embargo, para alcanzar la solución es preciso realizar una serie de operaciones aritméticas (Puig y Cerdán, 1988).

Los problemas con incompatibilidad matemática presentan inconsistencias de tipo numérico y conceptual. Por ejemplo, un problema donde se considere que el tren tiene una capacidad máxima de 294 pasajeros y que en cada vagón viajan la misma cantidad de pasajeros muestra incompatibilidad matemática por inconsistencia numérica ya que 294 no es divisible por 4. De igual forma, si un problema que afirme que la capacidad máxima del tren es de 294 pasajeros, pero de los datos suministrados se concluye que la capacidad sobrepasa dicha cantidad, también presenta inconsistencia de tipo numérica.

Por otro lado, un problema con incompatibilidad matemática de tipo conceptual es aquel que presenta una ambigüedad en el uso de algún concepto implicado en el problema, por ejemplo preguntar por el grado de apertura de un círculo (en lugar de la longitud de su radio).

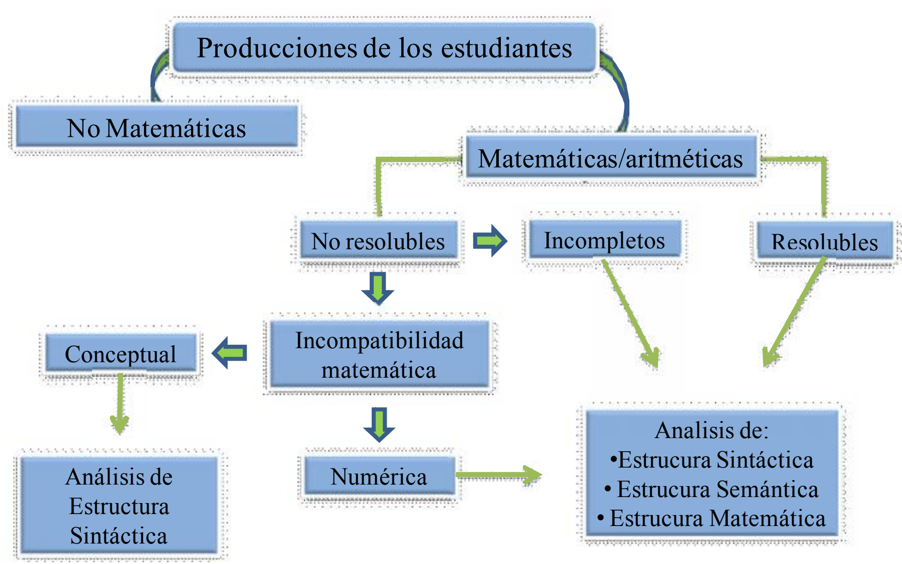
Consideramos importante analizar los problemas no resolubles porque aunque no es posible determinar una solución numérica, algunos de ellos presentan una riqueza con respecto a las demás variables de estudio consideradas en la investigación. Además, creemos que la resolubilidad de un problema inventado es sólo una complejidad más dentro del proceso de invención de problemas, la cual será tomada en cuenta en las características generales de los problemas planteados por ambos grupos.

A los problemas matemáticos resolubles y a los no resolubles clasificados como incompletos o que presentan incompatibilidad matemática de tipo numérica se les aplicó el análisis de la estructura sintáctica, semántica y matemática explicado anteriormente. Por otro lado, los problemas matemáticos que presentan incompatibilidad matemática de tipo conceptual fueron analizados sólo desde su estructura sintáctica, pues no era posible analizar la estructura semántica y matemática.

Por último, es importante mencionar que si un estudiante inventó más de un problema en alguna de las dos tareas, entonces se decidió tomar el de mayor dificultad puesto que cada tarea propuesta consistía en plantear un problema difícil.

La figura 2 muestra el esquema que resume el proceso utilizado para valorar las producciones de los estudiantes.

Figura 2 *Esquema para valorar las producciones de los estudiantes*



CAPÍTULO 4

RESULTADOS

En este apartado se presentan los resultados obtenidos al analizar la información con base en las tres categorías de análisis denominadas: sintáctica, matemática y semántica que fueron descritas en el tercer capítulo de esta memoria.

En primera instancia se muestran las características generales de los problemas inventados por los estudiantes. Seguidamente se exponen los resultados obtenidos según la estructura sintáctica, matemática y semántica.

Luego, se presentan los resultados con respecto a la riqueza de los problemas y finalizamos el capítulo con tres tablas que muestran el balance general de los resultados de acuerdo con las variables de estudio y en relación con tres aspectos: grupo al que pertenece el estudiante, tipo de tarea y resolubilidad del problema. Estos tres aspectos también fueron tomados en cuenta cuando se analizó la información relacionada con las variables de cada categoría.

4.1 Características generales de los problemas inventados

Es importante señalar que todos los estudiantes respondieron a las dos tareas de invención de problemas propuestas, obteniendo un total de 80 problemas matemáticos de los cuales 42 fueron inventados por el grupo talento y 38 por el grupo estándar.

Con respecto a la resolubilidad de los problemas se observó que el grupo talento inventó, en ambas tareas, menos problemas resolubles que el grupo estándar, los cuales representan respectivamente el 57% y 74% aproximadamente. Es importante hacer notar que la proporción de problemas resolubles en la primera tarea (80%) es mayor que en la segunda (50%).

En cuanto a los tipos de problemas no resolubles, se obtuvo que del total de problemas planteados, los no resolubles por incompatibilidad matemática representan el 22,5% (18 problemas) y los problemas incompletos 12,5 % (10 problemas). Estos dos tipos de problemas representan el 35% de los problemas matemáticos producidos por los estudiantes.

Un ejemplo de problema incompleto es el siguiente: *En este viaje va lleno. En una primera parada se bajan 2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan 290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15* *personas, y en la última antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenían cada pareja (de la 1° parada)?* (3GT-T2)

Este problema es interesante porque propone una serie de relaciones entre los datos y presenta una gran riqueza en cuanto a las variables de estudio; sin embargo, no es resoluble porque el estudiante no indicó el total de personas que quedaron en el interior del tren luego de la última parada.

Un problema que presenta incompatibilidad matemática de tipo numérica porque 294 no es divisible por 4 es el siguiente: *De la estación de tren de Madrid sale un tren con cuatro vagones a las 9:00 h con destino a Málaga. Todos los pasajes están vendidos (294) pero en un último momento uno de los vagones sufre una serie de desperfectos por lo que debe quedarse en la estación. Si todos los vagones tienen la misma capacidad. ¿Cuánto pasajeros deben quedarse en tierra?* (6GE-T2)

Otro problema que presenta incompatibilidad matemática pero de tipo conceptual es el siguiente: *Suponiendo que sea un círculo perfecto, ¿Cuántos grados más de apertura se necesitan para correr 109m?* (7GT-T1). El inconveniente de este problema radica en que la longitud de la circunferencia depende de su radio y no de algún ángulo.

La información relacionada con la distribución de los problemas no resolubles de acuerdo con la tarea propuesta y grupo al que pertenece el estudiante, se presenta en la siguiente tabla.

Tabla 4.1 *Distribución de los problemas no resoluble de acuerdo con su tipo, tarea y grupo al que pertenece el estudiante*

Tipo de problema	Grupo talento				Grupo estándar			
	T1	T2	Total	%	T1	T2	Total	%
Incompatibilidad matemática	2	10	12	66,6	1	5	6	60,0
Incompletos	3	3	6	33,3	2	2	4	40,0
Total	5	13	18	100,0	3	7	10	100,0

De acuerdo con la información de la tabla, la mayor cantidad de problemas no resolubles planteados por ambos grupos corresponden a problemas que presentan incompatibilidad matemática. De éstos, el grupo talento inventó 10 que fueron clasificados con incompatibilidad matemática de tipo numérico y dos de tipo conceptual. En el caso del grupo estándar los 6 problemas presentan incompatibilidad matemática de tipo numérica. Además no se encontraron grandes diferencias en cuanto al porcentaje de cada tipo de problemas no resolubles planteados por cada grupo de estudiantes.

En cuanto al tipo de tarea, se aprecia que en la segunda se planteó una mayor proporción de problemas con incompatibilidad matemática (75%) que en la primera (37,5%), por lo que, la proporción de problemas incompletos es mayor en la primera tarea que en la segunda.

En resumen, podemos resaltar que todos los enunciados inventados por los estudiantes son problemas matemáticos, de los cuales el 65% son resolubles. Es interesante hacer notar que se plantearon una mayor proporción de problemas resolubles en la primera tarea que en la segunda. Además, los estudiantes del grupo talento plantearon una mayor proporción de problemas no resolubles que el grupo estándar. Este último resultados nos sorprende en la medida que se espera que ocurra lo contrario; a falta de la realización de otro estudio más amplio que los confirme, pueden ser varios los factores que inciden en los mismos: mejor actitud del grupo talento ante las matemáticas, menor ansiedad, menor miedo a equivocarse, el no tener que resolver los problemas que inventaban, etc.

4.2 Análisis según la estructura sintáctica

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al analizar la estructura sintáctica de todos los problemas inventados por los estudiantes. Este análisis comprende el estudio de tres variables: longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado. A continuación se exponen los resultados con respecto a dichas variables.

Longitud del enunciado

Para analizar la longitud del enunciado se decidió clasificar los problemas de acuerdo al número de proposiciones presentes en el mismo. En este estudio consideramos que las proposiciones son las expresiones explícitas en el texto del enunciado que asignan un valor numérico o una cantidad a una variable, o bien, establece una relación cuantitativa entre dos variables y que podría ser parte de la resolución del problema.

Al respecto, resultó que el promedio de la cantidad de proposiciones presentes en los problemas planteados por el grupo talento (5,27) es mayor que en los problemas inventados por sus compañeros del grupo estándar (3,44). En la tabla 4.2 se profundiza un poco más en el estudio de esta variable

Tabla 4.2 *Distribución de los problemas de acuerdo con la cantidad de proposiciones, tarea y grupo al que pertenece el estudiante*

Cantidad de proposiciones	Grupo talento				Grupo estándar			
	T1	T2	Total	%	T1	T2	Total	%
Una o dos proposición	5	0	5	11,9	6	2	8	21,1
Tres proposiciones	2	1	3	7,1	5	5	10	26,3
Cuatro proposiciones	3	2	5	11,9	6	2	8	21,1
Cinco o seis proposiciones	7	5	12	28,6	2	7	9	23,7
Siete o más proposiciones	4	13	17	40,5	0	3	3	7,9
Total	21	21	42	100,0	19	19	38	100,0

De acuerdo con la información obtenida, el 69,1% de los problemas matemáticos inventados por el grupo talento están formados por cinco o más proposiciones, mientras que el grupo estándar planteó 31,6% de problemas con dicha característica. Otro aspecto interesante de resaltar es que aproximadamente la mitad (47,4%) de los problemas inventados por el grupo estándar poseen tres proposiciones o menos, en contraste con el grupo talento quienes planteron el 19% de los problemas con esta característica.

Con respecto al tipo de tarea se aprecia que la proporción de problemas con cinco o más proposiciones es mayor en la segunda tarea (70%) que en la primera (32,5%). Además, la cantidad media de proposiciones de la segunda tarea (4,7) es mayor que la primera (3,8).

También consideramos interesante estudiar si la cantidad de proposiciones que conforman los problemas tienen alguna relación con la resolubilidad del mismo. Al respecto, resultó que los problemas no resolubles planteados por los estudiantes del grupo talento y estándar están conformados por una mayor cantidad de proposiciones, en promedio (5,58 y 4,3 respectivamente), que los problemas resolubles (5,04 y 3,63).

En la tabla 4.3 se presentan la distribución de los problemas de acuerdo con la cantidad de proposiciones, resolubilidad y grupo al que pertenece el estudiante.

Tabla 4.3 *Distribución de los problemas de acuerdo con la cantidad de proposiciones, resolubilidad y grupo al que pertenece el estudiante*

Cantidad de proposiciones	Grupo talento				Grupo estándar			
	Resol	%	No resol	%	Resol	%	No resol	%
Una o dos	4	16,7	1	5,5	6	21,4	2	20,0
Tres	1	4,1	2	11,1	9	32,1	1	10,0
Cuatro	4	16,7	1	5,5	6	21,4	2	20,0
Cinco o seis	6	25,0	6	33,3	5	17,9	4	40,0
Siete o más	9	37,50	8	44,4	2	7,1	1	10,0
Total	24	100,0	18	100,0	28	100,0	10	100,0

De acuerdo con la información de la tabla, se observa que el grupo talento inventó una mayor cantidad de problemas no resolubles con cinco o más proposición (77,7%) que problemas resolubles con dicha característica (62,5%). En el caso del grupo estándar se aprecia que la proporción de problemas no resolubles con cinco o más proposiciones (50%) es mayor que los problemas resolubles con dicha cantidad característica (25%).

Sin embargo, consideramos que las diferencias con respecto a la resolubilidad del problema y la cantidad de proposiciones no es tan significativa, puesto que la proporción de problemas resolubles con cuatro o menos proposiciones es mayor, en ambos grupos, que los no resolubles con la misma cantidad de proposiciones.

Tipo de proposición interrogativa

El tipo de proposición interrogativa está relacionada con la pregunta implicada en el enunciado del problema. Ésta se clasificó de acuerdo con tres aspectos: proposición interrogativa de asignación, condicional o relacional.

Resultó que la mayoría de las proposiciones interrogativas que plantearon los estudiantes del grupo talento y estándar son de asignación (52,4% y 60,5% respectivamente), mientras que las proposiciones interrogativas relacionales fueron las menos preferidas por los estudiantes de ambos grupos.

El siguiente es un ejemplo de problema que presenta una proposición interrogativa de asignación: *A las 9:00 de la mañana sale un tren con 50 pasajeros, a las once vuelve con 70 pasajeros, vuelve a salir y vuelve con 30 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros han entrado y salido en total?* (2GE-T2).

Otro resultado interesante es que no existe una gran diferencia entre la cantidad de proposiciones interrogativas de asignación que planteó cada grupo y lo mismo ocurre con los otros dos tipos de proposiciones interrogativas. De igual forma, se observó que no existe una gran diferencia entre la cantidad de proposiciones, de cada tipo, planteadas en la primera y segunda tarea de invención de problemas.

Con respecto a la resolubilidad y esta variable, se encontró que ambos grupos plantearon una mayor proporción de problemas no resolubles con proposiciones interrogativa de asignación que resolubles con dicha característica; sin embargo, plantearon una mayor proporción de problemas resolubles con proposiciones interrogativas condicionales y relacionales.

Tipo de número empleado

Los enunciados de los problemas se caracterizaron principalmente por la presencia de números naturales y números racionales expresados en notación decimal y fraccionaria. Sólo se encontró un problema que no presenta el uso de algún tipo de número, por tanto no será tomado en cuenta en el estudio de esta variable. El problema citado es el siguiente: "Calcula el área de un triangulo equilátero inscrito en esta circunferencia" (4GT-T1). En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos de acuerdo al tipo de número empleado.

Tabla 4.4 *Distribución de los problemas de acuerdo con el tipo de número, tarea y grupo al que pertenece el estudiante*

Tipo de número	Grupo talento				Grupo estándar			
	T1	T2	Total	%	T1	T2	Total	%
Naturales	20	20	40	97,6	18	19	37	97,4
Racionales (decimal)	3	5	8	19,5	2	0	2	5,3
Racionales (fraccionaria)	1	9	10	24,4	2	3	5	13,2

Así, resultó que ambos grupos prefirieron utilizar números naturales en el planteamiento de su problema, con un 97,6% en el grupo talento y 97,4% en el grupo estándar. También resultó que el 43,9% de los problemas planteados por el grupo talento presentan el uso de número racionales expresados tanto en notación decimal como fraccionaria; mientras que el uso de este tipo de número en los problemas planteados por el grupo estándar representó el l8,5%.

En cuanto al tipo de tarea, se observó que la cantidad de problemas que incluyen números naturales fue muy similar en ambas tareas, no así con la presencia de números racionales expresados en notación fraccionaria, ya que en la segunda tarea se plantearon una mayor cantidad de problemas con este tipo de número que en la primera.

También consideramos interesante analizar cuántos enunciados presentaban el uso de un sólo un tipo de número, dos tipos de números distintos o incluso utilizar tres tipos de números en el mismo enunciado. Al respecto, se observó que la mayoría de los problemas planteados por ambos grupos presentan sólo un tipo de número; sin embargo, los estudiantes del grupo estándar plantearon una mayor proporción (81,6%) de problemas de este tipo que el grupo talento (65,9%).

También resultó que el grupo talento plantea casi el doble de proporción de problemas con dos o más tipos de números que el grupo estándar, los cuales corresponden a 34,1% y 18,4% respectivamente. Es importante hacer notar que los estudiantes del grupo estándar no plantearon problemas cuyo enunciado contenga tres tipos de números distintos y sólo el 5% de los problemas planteados por el grupo talento presentan dicha característica.

En cuanto a la tarea y la cantidad de tipos de números, resultó que no existen grandes diferencias, ya que 75% de los problemas planteados en la primera tarea presentan solo un tipo de número y el 70% de la segunda tarea presentan esta característica. Lo mismo ocurre con los problemas que presentan dos o tres tipos de números.

También analizamos si existen diferencias en cuanto a la cantidad de tipos de números empleados en los problemas resolubles y no resolubles. Al respecto se observó que el grupo talento inventó una mayor proporción de problemas resolubles que implicaban un solo tipo de número (73,9%) que problemas no resolubles con la misma característica (55,6%). Sin embargo, esto no es así para los problemas que presentaban dos o tres tipos de números, ya que la mayor proporción se encuentra en los problemas no resolubles.

Con respecto al grupo estándar no se observaron diferencias significativas en relación con la cantidad de tipos de números empleados y resolubilidad del problema.

4.3 Análisis según la estructura matemática

Esta categoría fue analizada de acuerdo con tres variables: tipo de estructura operatoria y número de etapas, tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema, cantidad de pasos distintos para resolver el problema y bloque de contenido curricular al que hace referencia el enunciado del problema.

Es importante mencionar que este análisis fue aplicado a 78 problemas, 40 inventados por el grupo talento y 38 por el grupo estándar. Esto se debe a que dos problemas que presentan incompatibilidad matemática son imposibles de resolver incluso con información adicional. Los problemas mencionados son el 7GT-T1 y 20GT-T1 que se incluyeron en el anexo A de esta memoria. A continuación se presentan los resultados obtenidos de acuerdo a las variables mencionadas.

Tipo de estructura y cantidad de etapas

En esta sección se clasifican los problemas según la estructura operatoria presente en el enunciado en problemas de estructura aditiva, multiplicativa o mixta. De igual forma se catalogan de acuerdo al tipo de estructura operatoria y número de etapas en estructura aditiva de una o más de una etapa, estructura multiplicativa de una o más etapas y problemas mixtos que son de más de una etapa pues combinan las estructuras aditivas y multiplicativas.

Así, se encontraron en general 6 problemas de estructura aditiva (7,7%), 19 problemas de estructura multiplicativa (24,4%) y 53 problemas mixtos (67,9%). En la tabla 4.5 se presenta la distribución de estos problemas con respecto al número de etapas, tipo de tarea y grupo al que pertenece el estudiante.

Tabla 4.5 *Distribución de los problemas en relación con la estructura operatoria, número de etapas, tarea y grupo al que pertenece el estudiante*

Estructura operatoria y número de etapas	Grupo talento			Grupo estándar		
	T1	T2	%	T1	T2	%
Estructura mixta	12	20	80,0	8	13	55,3
Multiplicativa de dos o más etapas	6	0	15,0	9	2	28,9
Aditiva de dos o más etapas	0	1	2,5	1	3	10,5
Multiplicativa de una etapa	1	0	2,5	1	0	2,6
Aditiva de una etapa	0	0	0,0	0	1	2,6
Total	19	21	100,0	19	19	100,0

De igual forma resultó que la mayoría de los problemas planteados por ambos grupos son de estructura mixta; sin embargo, los estudiantes del grupo talento plantearon una proporción mayor de este tipo (80%) que sus compañeros del grupo estándar (55,3%).

Además, se observó que el grupo estándar planteó una proporción mayor de problemas de estructura multiplicativa y aditiva (31,5% y 13,1% respectivamente) que sus compañeros del grupo talento (17,5% y 2,5% respectivamente).

También se aprecia que el 97,5% de problemas planteados por el grupo talento son de estructura multiplicativa o aditiva de más de una etapa o problemas de estructura mixta; por lo que podemos afirmar que este mismo porcentaje corresponde a los problemas de dos o más etapas inventados por el grupo talento. De igual forma, una gran proporción de problemas inventados por el grupo estándar (94,7%) presentan las estructuras mencionadas, por lo que este porcentaje representa la proporción de problemas de más de una etapa inventado por este grupo.

En cuanto a las tareas, se encontró que los estudiantes de ambos grupos plantearon en la segunda tarea una mayor cantidad de problemas mixtos y aditivos que en la primera; sin embargo, en esta última se plantearon una mayor cantidad de problemas multiplicativos.

También nos interesó estudiar si existe diferencia en la estructura operatoria y la resolubilidad del problema. Al respecto resultó que ambos grupos plantearon una mayor proporción de problemas no resolubles con estructura mixta que problemas resolubles con la misma característica. Sin embargo, esto no fue así en los problemas de estructura multiplicativa y aditiva, ya que la mayor proporción de éstos son problemas resolubles.

Tipo de operación y cantidad de procesos distintos implicados en la resolución del problema

En este apartado se exponen los resultados obtenidos de acuerdo con el tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo distintos que se requieren para resolver el problema, de manera que si un problema requiere para su solución sólo sumas y multiplicaciones entonces se considera un problema de dos procesos.

La tabla 4.6 muestra la clasificación de los problemas de acuerdo con esta variable.

Tabla 4.6 *Distribución de los problemas de acuerdo con el tipo de operación y grupo al que pertenece el estudiante*

Tipo de operación	Grupo talento	%	Grupo estándar	%
Suma	1	2,5	3	7,9
Multiplicación	2	5,0	4	10,5
Suma-Multiplicación-División	4	10,0	1	2,6
Suma-Resta-Multiplicación	5	12,5	3	7,9
Multiplicación-División	6	15,0	7	18,4
Suma-Multiplicación	9	22,5	10	26,3
Suma-Resta-Multiplicación-División	9	22,5	3	7,9
Otra	4	10,0	7	18,4
Total	40	100,0	38	100,0

Se aprecia que los estudiantes del grupo talento prefirieron plantear problemas que implicaban el uso de multiplicación-división, suma-multiplicación y suma-resta-multiplicación-división, los cuales corresponden al 60% de los problemas planteados por este grupo. En el caso del grupo estándar, los problemas requieren aplicar las operaciones de multiplicación, multiplicación-división y suma-multiplicación que corresponden al 55,2%.

Con respecto a la cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema, resultó que el grupo talento y estándar plantearon respectivamente el 92,5% y 81,6% de los problemas con dos o más procesos. También se observó que aproximadamente la mitad (47,5%) de los problemas inventados por el grupo talento presentan tres o más procesos distintos mientras que el 21,1% de los problemas del grupo estándar presentan tal cantidad de procesos. Es importante resaltar que los estudiantes del grupo talento y estándar plantearon una proporción similar de problemas con dos procesos o tres procesos (70% y 73,7% respectivamente).

En cuanto a la tarea, resultó que en la segunda se plantearon una mayor proporción de problemas que implican tres o más procesos (42,5%) que en la primera (26,31%). Esto también se reflejó en los problemas planteados por el grupo talento, quienes inventaron en la segunda tarea una proporción mayor de problemas con tres o más procesos que en la primera, mientras que en el grupo estándar esta diferencia es pequeña.

Por último, consideramos que no existen diferencias en la cantidad de procesos implicados en los problemas resolubles y no resolubles.

Cantidad de pasos distintos para resolver el problema

En esta categoría también se decidió estudiar la cantidad de pasos distintos para resolver el problema, ya que cada uno involucra una relación semántica. Además, el número de pasos es un indicador de la extensión del proceso de resolución del problema.

Los resultados muestran que el promedio de pasos requeridos para resolver los problemas planteados por el grupo talento (3,95) es mayor que el promedio de pasos que incluyen los planteados por el grupo estándar (2,92). La siguiente tabla muestra la distribución de los problemas de acuerdo a la cantidad de pasos, tarea y grupo al que pertenece el estudiante.

Tabla 4.7 *Clasificación de los problemas de acuerdo con la cantidad de pasos distintos para resolverlo, tarea y grupo al que pertenece el estudiante*

Cantidad de pasos distintos	Grupo talento			Grupo estándar		
	T1	T2	%	T1	T2	%
Un paso	1	1	5,0	2	1	7,9
Dos pasos	4	2	15,0	8	5	34,2
Tres pasos	3	2	12,5	4	6	26,3
Cuatro pasos	2	4	15,0	3	5	21,1
Cinco o más pasos	9	12	52,5	2	2	10,5
Total	19	21	100,0	19	19	100,0

La información de la tabla 4.7 muestra que la diferencia en los promedios también se refleja en la cantidad de problemas que requieren cuatro o más pasos para ser resueltos, puesto que el grupo talento planteó más del doble en proporción (67,5%) de problemas con dicha característica que sus compañeros del grupo estándar (31,6%). En contraste, el 68,4% de los problemas planteados por el grupo estándar requieren tres o menos pasos distintos para ser resueltos.

Otro aspecto interesante es que los estudiantes del grupo estándar plantearon una gran cantidad de problemas (80%) que requieren entre dos y cuatro pasos para ser resueltos; en contraste con el grupo talento donde el 39% presentan dicha característica.

En cuanto a las tareas, se obtuvo que los problemas inventados en la segunda requieren, en promedio, una mayor cantidad de pasos (3,65) que los planteados en la primera tarea (3,24). Este mismo resultado se obtiene si nos concentramos en el grupo al que pertenece el estudiante y la cantidad de pasos requerido para resolver el problema.

De igual forma estudiamos si existen diferencias en la cantidad de pasos requeridos para resolver los problemas resolubles y no resolubles que presentan incompatibilidad matemática de tipo numérica (estos últimos pueden ser resueltos si ignoramos el inconveniente de la incompatibilidad numérica). Al respecto, en el caso del grupo talento la media de la cantidad de pasos requeridos para resolver los problemas resolubles (4,04) es mayor que en los no resolubles (3,81), en contraste con el grupo estándar quienes plantearon problemas no resolubles con una mayor media de cantidad de pasos (3,4) que en los resolubles (2,75). Además, el grupo estándar planteó una mayor proporción de problemas no resolubles con más de cuatro pasos (50%) que problemas resolubles con la misma característica (26%).

También consideramos conveniente estudiar más a fondo la cantidad de pasos que requieren los problemas que presentan dos o tres relaciones semánticas distintas y los que incluyen dos o tres procesos, ya que ambos grupos plantearon una proporción similar de ambos tipos de problemas. En la tabla 4.8 se presenta la información relacionada con esta variable.

Tabla 4.8 *Distribución de los problemas que presentan dos o tres relaciones semánticas con relación a la cantidad de pasos distintos para resolverlo y grupo al que pertenece el estudiante*

Cantidad de pasos distintos	Grupo talento	%	Grupo estándar	%
Dos pasos	5	18,5	9	32,1
Tres pasos	4	14,8	7	25,0
Cuatro pasos	6	22,2	8	28,6
Cinco o más pasos	12	44,4	4	14,3
Total	27	100,0	28	100,0

De acuerdo con la tabla 4.8 se aprecia que el grupo talento y estándar plantearon respectivamente el 55,5% y 85,4% de problemas que requieren entre dos y cuatro pasos para ser resueltos. También se observa que casi la mitad implican cinco o más pasos para ser resueltos, mientras que el grupo estándar planteó el 14,3% de los problemas con dicha característica.

En relación con la cantidad de pasos que requieren los problemas que incluyen dos o tres procesos resultó que el grupo talento planteó una mayor proporción de problemas que requieren cuatro o más pasos para ser resueltos (60,7%) que los inventados por el grupo estándar con dicha característica (35,7%).

Bloque de contenido curricular al que hace referencia el enunciado del problema

Los bloques de contenido curricular presentes en el enunciado hacen referencia al área de la matemática en la que los estudiantes plantearon el problema y pudimos distinguir cinco bloques: aritmética, física, geometría, lógica y medida (tabla 4.10)

Tabla 4.9 *Clasificación de los problemas de acuerdo con el tipo de bloque de contenido curricular, tarea y grupo al que pertenece el estudiante*

Tipo de bloques curriculares	Grupo talento				Grupo estándar			
	T1	T2	Total	%	T1	T2	Total	%
Aritmética-física	13	8	21	52,5	12	7	19	50,0
Aritmética	2	13	15	37,5	3	12	15	39,5
Aritmética-geometría	1	0	1	2,5	1	0	1	2,6
Aritmética-medida	1	0	1	2,5	1	0	1	2,6
Otro	2	0	2	5,0	2	0	2	5,3
Total	19	21	40	100,0	19	19	38	100,0

De acuerdo con la tabla 4.9, los estudiantes del grupo talento y estándar prefirieron plantear problemas que combinan los bloques curriculares de aritmética y física (52,5% y 50% respectivamente) y en menor proporción problemas que incluyen sólo el bloque curricular de aritmética (37,5% y 39,5% respectivamente)

También consideramos interesante conocer la cantidad de bloques de contenido curricular presentes en los enunciados. Al respecto se observó que la mayoría de los problemas inventados por el grupo talento y estándar presentaban dos bloques de contenido curricular (57,5% y 55,3% respectivamente) y en menor proporción un sólo bloque (37,5% y 39,5% respectivamente).

En cuanto a las tareas, se observó que en la segunda se plantearon una mayor proporción de problemas que presentan sólo un bloque de contenido curricular, mientras que en la primera tarea se plantearon una mayor proporción de problemas que presentan dos o tres bloques de contenido curricular.

4.4 Análisis según la estructura semántica

En esta sección se exponen los resultados obtenidos en relación con el tipo de estructura semántica presente en problemas aditivos y multiplicativos, así como las relaciones semánticas implicadas en los problemas mixtos. Además, se estudia la cantidad de relaciones semánticas que presentan los problemas inventados por ambos grupos de estudiantes. Es importante recordar que en esta categoría, al igual que en la anterior, sólo se analizaron 78 problemas.

Estructura semántica de los problemas aditivos

Para analizar esta variable se utilizó la clasificación realizada por Puig y Cerdán (1988), quienes dividen estos problemas en cuatro grupos: cambio, combinación, comparación e igualación. Es importante recordar que ambos grupos plantearon en total 6 problemas de estructura aditiva. Los resultados obtenidos con respecto a esta variable se muestran en la tabla 4.10

Tabla 4.10 *Distribución de los problemas aditivos en relación con su componente semántica, tarea y grupo al que pertenece el estudiante*

Componente semántica	Grupo talento				Grupo estándar			
	T1	T2	Total	%	T1	T2	Total	%
Cambio	0	1	1	100,0	0	3	3	60
Combinación	0	0	0	0,0	1	3	4	80
Comparación	0	0	0	0,0	1	0	1	20
Igualación	0	0	0	0,0	0	0	0	0,0

Como se aprecia, el único problema aditivo planteado por el grupo talento presenta la relación semántica de cambio, mientras el grupo estándar se encontraron cuatro (80%) que presentan la estructura semántica de combinación, tres de cambio (60%) y uno de comparación. Como se puede observar, algunos de los problemas aditivos planteados por el grupo estándar presentan más de un componente semántico.

La tabla anterior muestra sólo los resultados de los problemas de estructura aditiva, por lo que nos pareció interesante estudiar de los 59 problemas de estructura aditiva y mixta, de los cuales 33 fueron inventados por el grupo talento y 26 por el estándar (Tabla 4.5), la cantidad de ellos que presentan la relación semántica de cambio, combinación, comparación e igualación. En la siguiente tabla se presentan dichos resultados.

Tabla 4.11 *Distribución de los problemas en relación con su componente semántica aditiva, tarea y grupo al que pertenece el estudiante*

Componente semántica	Grupo talento				Grupo estándar			
	T1	T2	Total	%	T1	T2	Total	%
Combinación	10	17	27	81,8	9	9	18	69,2
Cambio	1	16	17	51,5	1	13	14	53,8
Comparación	7	2	9	27,3	2	0	2	7,7
Igualación	0	3	3	9,1	0	0	0	0,0

Se puede apreciar que los estudiantes de ambos grupos prefirieron plantear problemas de combinación, seguido de problemas que incluyen la componente semántica de cambio. Además, se observó que una pequeña proporción de los problemas inventados por el grupo talento presentan la estructura semántica de igualación; mientras que el grupo estándar no planteó problemas con dicha estructura.

En cuanto a las tareas, resultó que en la segunda se plantearon una mayor proporción de problemas que presentan las relaciones de combinación y cambio, mientras que en la primera se plantearon una mayor proporción de problemas de comparación.

Estructura semántica de los problemas multiplicativos

Los problemas multiplicativos fueron clasificados de acuerdo con su estructura semántica conforme a la categorización presentada por Puig y Cerdán (1988) en: Isomorfismo de medidas, comparación multiplicativa y producto de medidas. Es importante recordar que el grupo talento inventó 7 problemas de este tipo y el grupo estándar 12. En la siguiente tabla se muestran los resultados con respecto a esta variable.

Tabla *4.12 Distribución de los problemas multiplicativos en relación con su componente semántica, tarea y grupo al que pertenece el estudiante*

Componente semántica	Grupo talento				Grupo estándar			
	T1	T2	Total	%	T1	T2	Total	%
Producto de medida	5	0	5	74,4	3	0	3	25,0
Isomorfismo de medidas	4	0	4	57,1	9	2	11	91,7,
Comparación multiplicativa	1	0	1	14,3	1	0	1	8,3

En la tabla 4.12 se aprecia que de los problemas multiplicativos, las estructuras semánticas más utilizadas por el grupo talento fueron la de producto de medidas (71,4%) e isomorfismo de medida (57,1%). En el caso del grupo estándar, el 91,7% de los problemas multiplicativos presentan la relación semántica de isomorfismo de medida y el 25% producto de medidas.

En cuanto a las tareas propuestas, resultó que ambos grupo de estudiantes plantearon una mayor cantidad de problemas multiplicativos que presentan isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto de medida en la primera tarea que en la segunda.

También nos interesó estudiar de los 72 problemas de estructura multiplicativa y mixta, de los cuales 39 fueron planteados por el grupo talento y 33 por el grupo estándar (tabla 4.5), la cantidad de ellos que presentan la relación semántica de isomorfismo de media, producto de medida y comparación multiplicativa.

En la siguiente tabla se muestran los resultados con respecto a esta variable

Tabla 4.13 *Distribución de los problemas con respecto a su componente semántica multiplicativa, tarea y grupo al que pertenece el estudiante*

Componente semántica	Grupo talento				Grupo estándar			
	T1	T2	Total	%	T1	T2	Total	%
Isomorfismo de medida	14	17	31	79,5	17	14	31	93,9
Producto de medidas	10	3	13	33,3	3	0	3	9,1
Comparación multiplicativa	4	7	11	28,2	1	2	3	9,1

Se observa que ambos grupos de estudiantes prefirieron plantear problemas que incluyeran la componente semántica de isomorfismo de medida, seguida de producto de medidas y en menor proporción comparación multiplicativa.

Relaciones semánticas implicadas en los problemas mixtos

Dado que la mayoría de los problemas inventados por ambos grupos son de estructura mixta, consideramos importante conocer cuáles son las estructuras semánticas aditivas y multiplicativas presentes en los enunciados de este tipo de problemas.

Así, resultó que la mayoría de problemas mixtos (66%) planteados por el grupo estándar están formados por las componentes semánticas combinación-isomorfismo de media o cambio-isomorfismo de medida, mientras que el grupo talento planteó sólo el 13% de los problemas mixtos con estas características.

En el caso del grupo talento no es posible establecer una mayoría del uso específico de combinaciones de estructuras semánticas aditivas y multiplicativas implicadas en los problemas mixtos. La combinación que tiene mayor frecuencia (30%) en el grupo talento es cambio-combinación-isomorfismo de media o cambio-comparación-isomorfismo de medidas.

Cantidad de relaciones semánticas distintas

Además de identificar cuáles estructuras semánticas estaban presentes en los problemas inventados por ambos grupos, también consideramos importante determinar la cantidad de relaciones de estructura semántica distintas presentes en los problemas. Esta información nos ayudó a caracterizar mejor los problemas de más de una etapa planteados por los estudiantes y establecer diferencias importantes entre ambos grupos.

Así, resultó que los estudiantes del grupo talento inventaron problemas con una mayor media de cantidad de relaciones de estructura semántica distintas (2,83) que el grupo estándar (1,89). En la tabla 4.14 se profundiza un poco más con respecto a esta variable.

Tabla 4.14 *Clasificación de los problemas de acuerdo a la cantidad de relaciones de estructura semántica diferentes, tarea y grupo al que pertenece el estudiante*

Cantidad de relaciones	Grupo talento				Grupo estándar			
semánticas distintas	T1	T2	Total	%	T1	T2	Total	%
Una relación	3	1	4	10,0	7	3	10	26,3
Dos relaciones	6	4	10	25,0	10	12	22	57,9
Tres relaciones	9	8	17	42,5	2	4	6	15,8
Cuatro relaciones	1	6	7	17,5	0	0	0	0,0
Cinco o más relaciones	0	2	2	5,0	0	0	0	0,0
Total	19	21	40	100,0	19	19	38	100,0

Se aprecia que el grupo talento plantea una proporción mayor (65%) de problemas con tres o más relaciones semánticas distintas que sus compañeros del grupo estándar (15,8). Además, todos los problemas del grupo estándar poseen tres o menos relaciones semánticas y un alto porcentaje (84,2%) presentan dos o menos relaciones semánticas distintas. También se observa que el grupo talento y estándar plantearon un porcentaje similar de problemas que presentan dos o tres relaciones semánticas distintas (67,5% y 73,7 respectivamente).

Con respecto a las tareas propuestas, resultó que en la segunda se plantearon, en promedio, problemas con una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas (2,65) que en la primera (2,08). Esto también se reflejó en la cantidad de problemas planteados con tres o más relaciones semánticas distintas, ya que en la segunda tarea se planteó una mayor proporción de problemas de este tipo (55%) que en la primera (31,6%).

En cuanto a la resolubilidad del problema y la cantidad de estructuras semánticas implicadas, se observó que la media de la cantidad de relaciones semánticas presentes en los problemas inventados por el grupo talento y estándar es mayor en los problemas no resolubles (3,13 y 2,20 respectivamente) que en los resolubles (2,63 y 1,79 respectivamente). Consideramos que estas diferencias no son significativas.

Además, se encontró que la proporción de problemas resolubles del grupo talento que presentan tres o más relaciones semánticas es de 62,5% y la proporción de problemas no resolubles con la misma característica es de 68,5%.

En el caso del grupo estándar, se observó que se plantearon una mayor proporción de problemas resolubles con dos o menos relaciones de estructura semántica que no resolubles con dicha característica; sin embargo, no así en los problemas con tres o más relaciones semánticas, ya que la mayor proporción corresponde a problemas no resolubles.

4.5 Balance general de los resultados de acuerdo con las tres categorías de análisis

A continuación se presenta el balance general de los resultados obtenidos de acuerdo con las variables de estudio incluidas en las tres categorías de análisis, la cual fue organizada en tres tablas. En la primera se expone el balance general de acuerdo al grupo que pertenece el estudiante y variable de estudio, la segunda presenta los resultados de acuerdo a las tareas y la última presenta la relación de las variables de estudio con respecto a la resolubilidad de los problemas.

Tabla 4.15 *Balance general de los resultados con respecto al grupo al que pertenece el estudiante y variables de estudio*

	Variable	Grupo talento	Grupo estándar
	Resolubilidad	Plantearon casi la mitad de los problemas no resolubles.	El 73% de los problemas son resolubles
ESTRUCTURA SINTÁCTICA	Longitud del enunciado	Plantean problemas con cinco o más proposiciones. La cantidad media de proposiciones es de 5,27.	Casi el 50% de los problemas tienen tres o menos proposiciones La cantidad media de proposiciones es de 3,44.
	Tipo de proposición interrogativa	Prefirieron plantear problemas con proposiciones interrogativas de asignación.	Prefirieron plantear problemas con proposiciones interrogativas de asignación.
	Tipo de número	Prefirieron emplear números naturales. 44% empleó números racionales expresados en notación decimal o fraccionaria.	Prefirieron emplear números naturales. El 18,42% empleó números racionales en notación decimal o fraccionaria.
	Cant. de tip de números	El 44% empleó al menos dos tipos de números.	El 19% empleó al menos dos tipos de números.
ESTRUCTURA MATEMÁTICA	Tipo de estructura operatoria	Prefirieron plantear problemas de estructura mixta. Casi la totalidad de los problemas son de más de una etapa (97,5%).	Prefirieron plantear problemas de estructura mixta. Casi la totalidad de los problemas son de más de una etapa (94,8%).
	Tipo de operación y cantidad de procesos distintos implicados en la resolución del problema	Combinaron las operaciones multiplicación-división, suma-multiplicación y suma-resta-multiplicación-división. El 95% de los problemas presentan dos o más procesos y casi la mitad de los problemas presentan tres o más procesos distintos.	Combinaron las operaciones multiplicación, multiplicación-división y suma-multiplicación. El 84% de los problemas presentan dos o más procesos y el 21,1% de los problemas presentan tres o más procesos distintos
	Cantidad de pasos distintos para resolver el problema	El 67,5% plantean problemas que requieren cuatro o más pasos. La cantidad media de pasos requeridos para resolver los problemas es de 3,95. El 85,4% de problemas que presentan dos o tres relaciones semánticas requieren entre dos y cuatro pasos para ser resueltos. El 60,7% de problemas que presentan dos o tres procesos requieren de cuatro o más pasos para ser resueltos	El 68,4% plantean problemas que requieren tres pasos o menos La cantidad media de pasos requeridos para resolver los problemas es de 2,92. El 55,5% de problemas que presentan dos o tres relaciones semánticas requieren entre dos y cuatro pasos para ser resueltos. El 35,7% de problemas que presentan dos o tres procesos requieren de cuatro o más pasos para ser resueltos
	Bloque de contenido curricular al que hace referencia el enunciado	El 52,5% plantearon problemas que combinan los bloques aritmética-física y en menor proporción (37,5%) solo aritmética.	El 50% plantearon problemas que combinan los bloques aritmética-física y en menor proporción (39,5%) solo el bloque de aritmética.
EST. SEMÁNTICA	Estructura semántica de los problemas aditivos	Sólo plantearon un problema aditivo y es de cambio. En general las relaciones de combinación y cambio fueron las más utilizadas.	El 80% son de combinación y el 60% de cambio. En general las relaciones de cambio y combinación fueron las más utilizadas.
	Estructura semántica de los problemas multiplicativos	El 74 % presentan la relación semántica de producto de medida El 57,1 % presentan la relación semántica de isomorfismo de medida. En general la relación semántica de isomorfismo de medida fue la más utilizadas	El 91,7% presentan la relación semántica de isomorfismo de medida. El 25% presentan la relación semántica de producto de medida. En general la relación semántica de isomorfismo de medida fue las más utilizadas.
	Relaciones semánticas implicadas en los problemas mixtos	No es posible establecer una mayoría del uso específico de combinaciones de estructuras semánticas aditivas y multiplicativas problemas mixtos.	La mayoría de problemas mixtos (66%) planteados por el grupo estándar están formados por las componentes semánticas combinación-isomorfismo de media o cambio-isomorfismo de medida
	Cantidad de relaciones semánticas distintas	El 65% presentan tres o más relaciones semánticas distintas. El promedio de la cantidad de relaciones semánticas distintas es de 2,83.	84% presentan dos o menos relaciones semánticas distintas. El promedio de la cantidad de relaciones semánticas distintas es de 1,89.

Tabla 4.16 *Balance general de los resultados con respecto a las tareas propuestas y variables de estudio*

	Variable	1ª Tarea	2ª Tarea
	Resolubilidad	El 80% de los problemas son resolubles	El 50% de los problemas son no resolubles
ESTRUCTURA SINTÁCTICA	Longitud del enunciado		En la segunda tarea se plantearon problemas con una mayor promedio de proposiciones (4,7) que en la primera (3,80)
	Tipo de proposición interrogativa	No existe diferencia entre la cantidad de proposiciones, de cada tipo, planteadas en la primera y segunda tarea	
	Tipo de número	La cantidad de problemas que incluyen números naturales fue muy similar en ambas tareas; sin embargo, en la segunda tarea se plantearon una mayor cantidad de problemas que utilizan números racionales expresados en notación fraccionaria que en la primera. No se encontraron diferencias en el uso de los otros dos tipos de números con respecto a las tareas	
	Cantidad de tipo de números	No hay diferencia en la cantidad de tipos de números que emplean los problemas de la primera y segunda tarea.	
ESTRUCTURA MATEMÁTICA	Tipo de estructura		En la segunda tarea se presenta una mayor cantidad de problemas de estructura mixta y aditiva que en la primera
	Cantidad de pasos distintos para resolver el problema		En la segunda tarea se plantearon problemas con una mayor media de pasos (3,65) que en la primera (3,24).
	Cantidad de procesos distintos implicados en la resolución del problema		En la segunda se plantearon una mayor proporción de problemas que implican tres o más procesos (42,5%) que en la primera (26,31)
	Bloques de contenido curricular al que hace referencia el enunciado	En la primera tarea se plantearon una mayor proporción de problemas que presentan dos o tres bloques de contenido curricular	En la segunda se plantearon una mayor proporción de problemas que presentan sólo un bloque de contenido curricular
ESTRUCTURA SEMÁNTICA	Relaciones semánticas implicadas en los problemas aditivos	En la primera se plantearon una mayor proporción de problemas de comparación	En la segunda tarea se plantearon una mayor proporción de problemas con estructura semántica de cambio y combinación.
	estructura semántica de los problemas multiplicativos	En la primera tarea plantearon una mayor cantidad de problemas de isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto de medida	
	Cantidad de relaciones semántica distintas		En la segunda tarea se plantearon, en promedio, problemas con una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas (2,65) que en la primera (2,08). En la segunda tarea se planteó una mayor proporción de problemas con tres o más relaciones semánticas distintas que en la primera tarea

4.17 *Balance general de los resultados con respecto a la resolubilidad del problema y variables de estudio*

	Variable	Resoluble	No resoluble
ESTRUCTURA SINTÁCTICA	Longitud del enunciado		La media de la cantidad de proposiciones en los problemas no resolubles (5,13) es mayor que la media de los problemas resolubles (4,27). Ambos grupos plantearon una mayor proporción de problemas no resolubles con cinco o más proposiciones que problemas resolubles con dicha característica.
	Tipo de proposición interrogativa	Ambos grupos plantearon una mayor proporción de problemas resolubles con proposiciones interrogativa condicional y relacional.	Ambos grupos plantearon una mayor proporción de problemas no resolubles con proposiciones interrogativa de asignación.
	Cantidad de tipos de números	El grupo talento inventó una mayor proporción de problemas resolubles que implicaban un solo un tipo de número (73,9%) que problemas no resolubles con la misma característica (55,6%). En el grupo estándar no se observaron diferencias.	
ESTRUCTURA MATEMÁTICA	Tipo de estructura		Ambos grupos plantearon una mayor proporción de problemas no resolubles con estructura mixta que problemas resolubles con dicha estructura.
	Cantidad de pasos distintos para resolver el problema	En el grupo talento, la media de la cantidad de pasos requeridos para resolver los problemas resolubles (4,04) es mayor que en los no resolubles (3,81).	En el grupo estándar, la media de la cantidad de pasos requeridos para resolver los problemas no resolubles (3,4) es mayor que en los problemas resolubles (2,75) En el grupo estándar planteó una mayor proporción de problemas no resolubles con más de cuatro pasos (50%) que problemas resolubles con la misma característica (26%)
	Cantidad de procesos distintos implicados en la solución del problema	No existe diferencia en la cantidad de procesos implicados en los problemas resolubles y no resolubles	
ESTRUCTURA SEMÁNTICA	Cantidad de relaciones semánticas distintas	Los problemas no resolubles inventados por el grupo talento presentan en promedio 3,13 relaciones de estructura semántica distintas; mientras que los resolubles 2,63	Los problemas no resolubles del grupo estándar presentan en promedio 2,20 relaciones de estructura semántica y los resolubles 1,79

4.6 Riqueza de los problemas

Como se mencionó en el tercer capítulo de esta memoria, en nuestra investigación concebimos la riqueza de los problemas planteados de acuerdo con la suma de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes en los niveles de actuación de las variables tomadas en cuenta para el estudio de la riqueza del problema.

En las siguientes tablas se presentan las puntuaciones de los estudiantes de acuerdo al grupo que pertenecen y ordenadas de forma ascendente.

Tabla 4.18 *Riqueza de los problemas planteados por el grupo talento*

Estudiante	7	16	4	10	18	20	15	11	12	13	2	17	3	5	8	19	6	9	14	21	1
Puntaje	23	23	25	25	25	25	27	28	28	28	29	29	30	30	30	30	32	35	36	37	39

Tabla 4.19 *Riqueza de los problemas planteados por el grupo estándar*

Estudiante	17	2	15	16	3	19	11	3	14	1	5	18	8	12	9	4	6	13	7
Puntaje	18	19	19	19	20	20	22	23	23	24	24	24	25	25	27	28	28	29	30

Como se aprecia, las puntuaciones obtenidas por los estudiantes con talento oscilan entre 23 y 39 puntos, mientras que las del grupo estándar están entre 18 y 30 puntos. Dado que el estudio de la riqueza de los problemas es un aporte de este trabajo, realizamos un contraste de hipótesis (anexo D) sobre la variable riqueza de los problemas en el grupo talento y estándar, y confirmamos estadísticamente con un nivel de significancia de 0,05 que la media del puntaje obtenido por el grupo talento (29,24) es mayor que el obtenido por el grupo estándar (24,53).

También es importante resaltar que el 25% de los estudiantes del grupo estándar obtuvieron una puntuación mayor o igual a 26 y 16 estudiantes (71,4%) del grupo talento obtuvieron una puntuación mayor o igual a ésta. De manera que si consideramos con talento matemático, del mismo modo que lo hizo Benavides (2008), a aquellos estudiantes que obtuvieron una puntuación superior o igual a 26 (que corresponde a las notas superiores al percentil 75 de la muestra del grupo estándar), entonces el 71% de los estudiantes del grupo talento hubiesen sido identificados como tal.

Es importante mencionar que el estudio de la riqueza de los problemas corresponde a una herramienta de análisis de la producción de los estudiantes, la cual es un aporte de nuestro trabajo la cual será mejorada en la continuación de esta investigación.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones de nuestra investigación respondiendo a cinco interrogantes relacionadas con los objetivos de investigación propuestos. Las dos primeras preguntas que tratamos de responder se relacionan con las características que presentaron los estudiantes del grupo talento ante las tareas de invención de problemas, así como las diferencias encontradas con respecto a los planteados por el grupo estándar.

En la tercera pregunta se responde a las diferencias encontradas en los problemas planteados con base en la primera y segunda tarea de invención de problemas y algunos factores que consideramos pudieron influir en que alguna de las dos tareas se planteara problemas con mayor riqueza.

La cuarta pregunta aborda la riqueza de los problemas resolubles y no resolubles. Por último, en la quinta pregunta contestamos, considerando las limitaciones de nuestra investigación, si existen elementos que indiquen el uso de la invención de problemas en el proceso de identificación de estudiantes con talento matemático. Para finalizar este capítulo, exponemos las limitaciones del estudio y algunas perspectivas de investigación.

5.1 Respuestas a nuestras interrogantes de investigación

Pregunta 1. ¿Qué características presentan los problemas aritméticos verbales inventados por un grupo de estudiantes considerados con talento matemático cuando se les propone este tipo de tareas?

Luego de revisar los problemas aritméticos planteados por los estudiantes de acuerdo con las variables de estudio y considerando las limitaciones de este estudio, podemos concluir que un estudiante con talento se puede caracterizar por:

a) Inventar una gran cantidad de problemas no resolubles.

b) Incluir en el enunciado del problema cinco o más proposiciones.

c) Emplear números naturales y en menor proporción números racionales.

d) Emplear dos tipos de números distintos, ya sean naturales o racionales expresados en notación decimal y/o fraccionaria.

e) Incluir como pregunta del problema proposiciones interrogativas de asignación.

f) Combinar la estructura aditiva y multiplicativa para plantear problemas de estructura mixta.

g) Incluir las relaciones semánticas de combinación y producto de medidas.

h) Plantear tres o más relaciones semánticas distintas.

i) Inventar problemas que requieren cuatro o más pasos para resolverlo.

j) Plantear problemas que presentan dos o más procesos de cálculo distintos en su solución y en menor proporción tres o más procesos.

k) Combinar los bloques de contenido curricular de aritmética y física

A continuación se muestran dos problemas inventados por el grupo talento que cumplen las características citadas.

María corre 6 m por segundo, Juan 3m y Pepe 1m. Realiza una estadística que nos cuente cada cuantas vueltas se encontrarán en la meta si al salir, María le deja 4 segundos de ventaja a Pepe y 6 a Juan (9GT-T1)

En este viaje va lleno. En la primera parada se bajan 2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan 290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15 personas, y en la última antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenía cada pareja (de la 1° parada)? (3GT-T2)

Pregunta 2. ¿Cuáles son las diferencias entre los problemas aritméticos planteados por el grupo de estudiantes considerados con talento matemático y un grupo estándar de un colegio público?

Se pudieron encontrar varias diferencias entre los problemas planteados por ambos grupos. Primeramente se observó que los estudiantes del grupo estándar plantearon una mayor cantidad de problemas resolubles que los del grupo talento. Consideramos que esto pudo haber sucedido porque la tarea propuesta no solicitaba a los estudiantes resolver el problema que planteaban, de modo que no debían comprobar si éste tenía o no solución.

Además, de los 18 problemas no resolubles inventados por el grupo talento, 10 presentaban incompatibilidad matemática de tipo numérica, lo cual indica a nuestro parecer, que los estudiantes con talento se centraron en inventar problemas difíciles de resolver agregando más relaciones entre los datos, sin tomar en cuenta que éstos fueran compatibles numéricamente. También consideramos que presentan menor ansiedad y temor hacia la matemática, así como un mayor nivel de creatividad, por lo que tienen menos miedo a equivocarse y en consecuencia agregan más información al problema haciéndolo más creativo per no resoluble.

Sin embargo, podemos concluir que los problemas inventados por el grupo talento son más ricos que los inventados por el grupo estándar, ya que están conformados por una mayor cantidad de proposiciones y tipos de números, requieren de más pasos y procesos de cálculo distintos para ser resueltos y presenta una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas. Este resultado es similar al obtenido por Ellerton (1986), ya que los problemas inventados por los estudiantes más hábiles requieren mayor dificultad de cálculo, presentan una mayor cantidad de operaciones e implican un sistema numérico más complejo.

También se puede concluir que a pesar de que ambos grupos plantearon un porcentaje similar, tanto de problemas que presentan dos o tres relaciones semánticas distintos como dos o tres procesos de cálculo distintos, éstos no son del todo similares, ya que los planteados por el grupo talento requieren una mayor cantidad de pasos para ser resueltos.

Con respecto al tipo número, ambos grupos prefirieron inventar problemas que involucraran números naturales; pero una gran cantidad de estudiantes del grupo talento emplearon también números racionales, en contraste con el grupo estándar quienes hicieron uso de este tipo de número en una proporción muy pequeña de problemas.

En relación con la estructura operatoria, se concluye que los estudiantes del grupo talento plantearon una proporción mayor de problemas de estructura mixta que sus compañeros del grupo. De igual forma se observó diferencias entre los problemas de estructura mixta planteados por ambos grupos de estudiantes. Esto porque los inventados por el grupo estándar implican, en general, la combinación de las relaciones semánticas combinación-isomorfismo o cambio-isomorfismo y requieren dos o tres pasos para ser resueltos. En contraste, los problemas inventados por los estudiantes con talento presentan una gran variedad de combinaciones de relaciones semánticas y requieren de cuatro o más pasos para ser resueltos.

Consideramos que estas diferencias también se reflejaron en la sensación de dificultad percibida al resolver los problemas, ya que en el caso del grupo estándar, al terminar de leer el enunciado se identifica de forma inmediata un procedimiento para resolverlo. Sin embargo, esto no siempre fue así en el grupo talento, donde varios problemas daban la sensación de no ser tan fáciles de resolver a simple vista, incluso en uno de ellos, que fue presentado anteriormente (9GT-T1), no fue posible encontrar la solución aún cuando creemos que sí tiene.

Por último, consideramos importante mencionar que no se encontraron diferencias entre los problemas planteados por ambos grupos con respecto a las variables: tipo de proposición interrogativa, bloque de contenido curricular presente en el enunciado del problema y relaciones semánticas de los problemas aditivos y multiplicativos, no se encontraron diferencias.

Pregunta 3. ¿Cuáles son las diferencias, con respecto a las variables de estudio, de los problemas planteados en la primera tarea de invención de problemas y la segunda? ¿Cuál tarea de invención de problemas propuesta promovió plantear problemas con mayor riqueza?

Luego de estudiar y comparar los problemas planteados por los estudiantes con base en la primera y segunda tarea de invención de problemas, se pudieron observar algunas diferencias. Por ejemplo, en la primera tarea se plantearon una mayor proporción de problemas resolubles que en la segunda; sin embargo, los problemas inventados con base en la segunda situación están conformados por una mayor cantidad de proposiciones, requieren más pasos y procesos de cálculo distintos para ser resueltos e implican una mayor cantidad de relaciones semánticas distintas. De igual forma, en la segunda tarea se plantearon una mayor proporción de problemas de estructura mixta y aditiva que en la primera.

Así, podemos concluir que los problemas inventados con base en la segunda tarea de invención de problemas, presentan en general, una mayor riqueza con respecto a las variables de estudio. De igual forma consideramos que la sensación de dificultad percibida en los problemas planteados en la segunda tarea es mayor que en la primera.

Creemos que las diferencias encontradas se puede deber principalmente a dos factores: características particulares de las situaciones de invención de problemas propuestas y el periodo de acomodación que requieren los estudiantes ante una tarea nueva para ellos como fue el inventar problemas.

En relación con el primer factor, se podría pensar que aquellas características propias de la segunda tarea de planteamiento de problemas que no posee la primera, pudieran haber influenciado en inventar problemas con mayor riqueza. En este sentido, aspectos como presentar la información de forma verbal y no mediante una figura son aspectos a considerar, ya que los datos presentados en la figura son en su mayoría implícitos, por lo que el estudiante tiene que poner en juego una mayor creatividad; mientras que en la segunda situación se presenta una mayor cantidad de información explícita (Cantidad de vagones, hora, cantidad de pasajeros). Otro aspecto puede ser que la segunda tarea presenta una mayor variedad de tópicos en el cual plantear el problema (distancia, tiempo, velocidad, capacidad, peso, fuerza, costo) que la primera (distancia, tiempo, velocidad, área, perímetro).

También consideramos que en la segunda tarea se pudieron haber planteado problemas con mayor riqueza porque los estudiantes necesitan un periodo de acomodación ante una situación nueva o que no es habitual para ellos, como es el inventar problemas. Esto concuerda con los resultados del estudio de Silver y Cai (1996), donde la complejidad del problema fue mayor en el segundo y tercer problema que inventaron los estudiantes.

Con respecto a las variables: tipo de proposición interrogativa, tipo de número empleado y cantidad de tipos de números empleados; no se encontraron diferencias entre los problemas planteados en la primera y segunda tarea.

Pregunta 4. ¿Existe diferencia en cuanto a la riqueza de los problemas resolubles y no resolubles planteados por ambos grupos? ¿Es conveniente analizar en las tareas de invención de problemas aquellos problemas que no tienen una solución?

De acuerdo con el balance general de los resultados con respecto a la resolubilidad de los problemas, podemos concluir que los no resolubles inventados por el grupo talento presentan una mayor cantidad de proposiciones, tipos de números y relaciones semánticas distintas que los problemas resolubles; sin embargo, estos últimos requieren una mayor cantidad de pasos para ser resueltos que los no resolubles. También se observó que este grupo planteó una mayor proporción de problemas no resolubles con estructura mixta y que presentan proposiciones interrogativas de asignación.

En el caso del grupo estándar, los problemas no resolubles presentan una mayor cantidad de proposiciones, y relaciones semánticas distintas, así como más pasos distintos para ser resueltos que los problemas resolubles. Además, plantearon una mayor proporción de problemas no resolubles con estructura mixta y que presentan proposiciones interrogativas de asignación.

En ambos grupos no se observaron diferencias en cuanto a la cantidad de procesos implicados en los problemas resolubles y no resolubles.

Consideramos que esto pudo suceder porque los estudiantes intentaron agregar condiciones al problema con la intención de hacerlo más difícil, sin verificar que el problema fuera resoluble. A pesar de esto, creemos que es importante analizar dichos problemas, ya que como se mencionó, inventar un problema resoluble es una parte más de la complejidad de inventar un problema difícil.

Además, una gran proporción de estos problemas presentan incompatibilidad matemática de tipo numérica pero presentan una gran riqueza en cuanto a las variables de estudio consideradas. Consideramos que la cantidad de problemas no resolubles se podría disminuir si las actividades de invención de problemas incluyen la resolución del problema.

Pregunta 5. ¿Qué elementos aporta la invención de problemas aritméticos verbales al proceso de identificación de estudiantes con talento matemático?

Consideramos que a pesar de las limitaciones de nuestra investigación, se logró identificar algunos elementos que nos indican que la invención puede ser usada con dicho propósito.

Por ejemplo, los problemas planteados por el grupo talento presentan características distintas a los inventados por el grupo estándar. Así, si consideramos que la capacidad de los estudiantes para inventar problemas aritméticos se relaciona con la riqueza de los problemas plantados, entonces los estudiantes con talento mostraron una mayor capacidad ante dichas tareas. Esto también se refleja en la resolución de los problemas planteados por este grupo, ya que desde nuestro punto de vista, estos dan la sensación de mayor dificultad puesto que al leer el enunciado no se identifica de forma inmediata un procedimiento para resolverlo.

También creemos que las puntuaciones obtenidas por los estudiantes en los problemas inventados (riqueza de los problemas) y que se presentaron en la sección 4.6 de esta memoria, corresponden a otro indicador del uso de la invención de problemas como instrumento de identificación del talento matemático.

En dicha sección mostramos que si consideramos al grupo estándar como grupo control e identificamos con talento matemático a los estudiantes que obtuvieron el 25% de las mejores puntuaciones, entonces el 71% de los estudiantes con talento hubiesen sido identificados como tal, lo cual tiene sentido ya que éstos fueron identificados con talento matemático mediante una prueba de selección.

Así, coincidimos con Ellerton (1986) al concluir que la invención de problemas es una herramienta poderosa para estudiar niños con talento matemático, ya que éstos pusieron en prácticas sus conocimientos y habilidades matemáticas al inventar problemas lo cual se reflejó en la riqueza de sus problemas. De igual forma, consideramos que la invención de problemas debería ser mayormente estudiada como una herramienta para identificar estudiantes con talento matemático.

5.2 Limitaciones

Las limitaciones de este estudio están relacionadas con los siguientes aspectos: los sujetos, las características del instrumento de recolección de información, el tiempo que tuvieron los estudiantes para inventar los problemas y el contenido matemático utilizado.

Con respecto al primer aspecto tenemos que limitarnos a describir el comportamiento del grupo de estudiantes con talento seleccionados, sin poder generalizar los resultados.

Una segunda limitación que presenta nuestro estudio son la cantidad de tareas de invención de problemas propuestas, ya que por cuestiones de tiempo sólo se pudieron proponer dos. De igual forma, las características particulares de cada una de las tareas propuestas limitan la amplitud de la investigación.

También creemos que el tiempo que tuvieron los estudiantes para resolver las dos tareas de invención de problemas fue una limitante, ya que sólo se dispuso de 25 minutos para tal actividad. Recomendamos que en estudios posteriores se debe asignar más tiempo para que ellos puedan replantear el problema hasta llegar al que cumpla sus expectativas. Además, con base en la experiencia del estudio, cuando se inventan problemas se requiere tiempo para que las ideas y relaciones entre los datos vayan surgiendo e incluso evolucionen.

Por último, las actividades de invención de problemas que propusimos están centradas sobre un contenido en particular, la aritmética, por lo que sería interesante conocer la actuación de los estudiantes con talento ante tareas de invención de problemas en otras áreas de la matemática.

5.3 Perspectivas de investigación

Luego de concluir este estudio exploratorio, consideramos que quedan algunos aspectos abiertos en relación con el tema central de nuestra investigación. y que es de interés en el ámbito de la Didáctica de la Matemática.

Una línea de continuidad posible está relacionada con el proceso para valorar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas, el cual es un tema que ha sido poco abarcado por la comunidad interesada en el tema (Silver y Cai, 2005). En este sentido, nuestro trabajo aporta el estudio de la riqueza de los problemas como una herramienta de análisis de las producciones de los estudiantes, en la que se continuará trabajando con el fin de mejorarla.

También sería interesante ampliar la muestra de ambos grupos de estudiantes y realizar un análisis estadístico para confirmar las diferencias encontradas.

Otra línea está relacionada con el estudio de las características y tipos de actividades de invención de problemas que potencie en los estudiantes el poner en práctica su conocimiento, habilidad y creatividad. De igual forma sería interesante indagar sobre los errores que cometen y las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes al resolver este tipo de tareas.

Además, se podría continuar la investigación sobre el uso de la invención de problemas como herramienta para identificar estudiantes con talento matemático, dado que los estudios en esta línea son escasos. También se podría comparar el rendimiento de estudiantes con talento matemático en pruebas de invención de problemas y resolución de problemas matemáticos.

Por último, sería interesante replicar este estudio con estudiantes con talento matemático de otros países y comprar los resultados con los mostrados en esta investigación.

5.4 Reflexiones

En primera instancia, creemos que las actividades de invención de problemas deben incluir también resolver el problema planteado para que el estudiante se cerciorarse de la resolubilidad del problema o incluso pueda replantear el problema de manera que presente una mayor riqueza.

En cuanto a la construcción de las situaciones de invención de problemas que se proponen a los estudiantes, se deben considerar aspectos como el contexto, el tipo y cantidad de números que se pueden emplear, el tipo de información que se muestra (implícita o explícita), la presentación de la información (verbal, mediante una figura o combinación de éstas), los bloques curriculares y los posibles tópicos en los que se puede plantear el problema.

De igual forma consideramos que el tiempo que se destina a este tipo de actividades debe ser suficiente para que el estudiante tenga la oportunidad de poner en práctica pensamientos metacognitivos, aunque esto signifique ocupar más tiempo. Para ello es importante el acompañamiento del profesor durante la actividad, con el fin de guiar el trabajo del estudiante y optimizar el tiempo y la actividad.

Desde nuestra perspectiva, estas consideraciones permitirán potenciar las habilidades de los estudiantes ante la situación propuesta, así como hacerlo sentir más cómodo ante una tarea que puede ser más difícil que la de resolver problemas.

También creemos que al ser la invención de problemas una actividad que implica la producción de ideas originales, brinda un escenario en el cual se pueden observar las habilidades, percepciones y conocimientos de los estudiantes y particularmente de los estudiantes con talento matemático, por lo que esta herramienta tiene un gran valor tanto para estudiar niños con talento matemático como dentro del proceso de identificación de sujetos con talento matemático.

Por último, consideramos que el esquema propuesto en esta investigación para valorar los problemas aritméticos inventados por estudiantes, así como el estudio de la riqueza de los problemas, pueda ser utilizado en otro estudio o aportar información para la elaboración de otros esquemas de valoración.

REFERENCIAS

Ayllón¸M. (2004). *Invención de problemas con números naturales, enteros negativos y racionales. Tarea para profesores de educación primaria en formación.* Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada

Balka, D. S. (1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher, 21,* 633-636.

Banfield, T. (2005). Ability grouping for mathematically gifted adolescent boys. *International Journal, 6*(2), 141-149.

Benavides, M. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Bouvier, A. y George, M. (1979). *Diccionario de matemáticas*. Madrid: Akal Editor.

Bransford, J. D y Stein, B. S (1986). *Solución ideal de problemas*. Barcelona: Editorial labor.

Brown, S., Walter, M. (1990). *The Art of problem posing.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, S., Walter, M. (1993). *Problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 7-44). Orlando, Florida: Academic Press

Castro, E (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo Ricardo; Gómez Bernardo; Camacho Matías; Blanco Lorenzo (Eds.). Investigación en Educación Matemática XII. *Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-140). Basajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"/ Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral. Granada: Comares.

Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutierrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., et al. (1997). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer simposio nacional de la SEIEM* (pp 63-76). Granada: SEIEM.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Cázares, J. (2000). *La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo.* Memoria de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Cunningham, R. (2004). Problem posing: An opportunity for increasing student responsability. *Mathematics and Computer Education, 38*(1), 83-89.

Dankhe, G.L. (1986). Investigación y comunicación. En C. Fernández-Collado y G.L. Dankhe (eds), *La comunicación humana ciencia social* (pp. 385-454). México: McGraw-Hill.

Echenique, I. (2006). *Matemáticas resolución de problemas.* Departamento de Educación. Gobierno de Navarra.

Ellerton N. (1986). Children’s made up mathematics problems- A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 261-271.

English, L. (1997). The development of fifth-grade children’s problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34,* 183-217.

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Freeman, J. (Dir.) (1988). *Los niños superdotados. Aspectos psicológicos y pedagógicos*. Bilbao: Santillana.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht. Reidel.

Frías, A. y Castro, E. (2007). Enfoques de invención en problemas de más de un paso. En E. Castro y J. L. Lupiañez (Eds.), *Investigaciones en educación matemática: Pensamiento numérico* (pp 343-364). Granada: Editorial de la Universidad de Granada.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematic. *Arithmetic Teacher, 28* (8),14-17.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptistias, P. (1991). *Metodología de la investigación.* Mexico: McGraw- Hill.

Kesan, C., Kaya, D & Güvercin, S. (2010). The Effect of Problem Posing Approach to the Gifted Student's Mathematical Abilities. *International Online Journal of Educational Sciences, 2*(3), 677-687.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating*:* Where do good problema com from? En A. Shoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education.* (pp 123-148). New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates.

Krutetskii, V.A (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

Kwek y Lye (2008). Using problem-posing as an assessment tool. Paper presented at the *10° Asia Pacific conference on Giftedness Singapore,* Singapur. Disponible en http://hkage.org.hk/en/events/080714_10th_APCG.htm

Lavy, H. y Shrik, A. (2007). Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3, pp. 129-136. Seoul: PME.*

Leung, S. (1994). On analyzing problem posing processess: A study of prospective elemntary teachers differing in mathematics knowledge. In J.P. Da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3 (pp. 168-175). Lisbon, Portugal: Author.

Leung, S., Silver, E (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 5-24.

Lin P, (2004). Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning. *Proceedings of the 28th Conference of the international. Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3 pp 257–264.

Luque, A. (2004). *La invención de problemas en los que intervienen fracciones por estudiantes del tercer curso de secundaria*. Memoria de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Marjoram, D. y Nelson, R. (1988). Talentos matemáticos. En J. Freeman (Ed.), *Los niños superdotados*. Aspectos Psicológicos y Pedagógicos. Bilbao: Santillana.

Mönks, F., Mason, E. (2000). Developmental psychology and giftedness: theories and research. En K. Heller, F. Mönks, R. Sternberg, T. Subotnik (Eds.), *International Handbook of Giftedness and Talent*. Oxford: Pergamon Press.

Moses, B., Bjork, E. y Goldenberg, E. R (1990): Beyond problem solving: problem posing. En T. J. Cooney y C. R. Hirsch (eds.), *Teaching and Learning Mathematics in the 1990s*. Yearbook: National Council of Teachers of Mathematics, 83-91.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s.* Reston, VA: El autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School of Mathematics*. Reston, VA: El autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: El autor.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: El autor

Nesher, P. (1987). Toward an instructional theory: the role of student's misconceptions. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 33-39.

Niederer, K., & Irwin, K. (2001). Using problem solving to identify mathematically gifted students. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceeding of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, Vol. 3, 431-438. Utrecht: The Netherlands.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O., Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *Faísca, Revista de altas capacidades N° 11,* pp 83-102

Passow, A. (1993). National/State Policies Regarding Education of the Gifted. En K.Heller, F. Monks y A. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.

Pelczer, I., Gamboa F. (2008). Problem posing strategies of mathematically gifted students. En R. Leikin (Ed.), Proccedings of the *5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students,* (pp 193-199). Haifa, Israel.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princenton, NJ: Princenton University Press.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos*. Madrid: Síntesis.

Renzulli, J. S. (1977). *The enrichment triad model. A guide for developing defensible programs for the gifted and talentes*. Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.

Rico, L. (Ed.) (1998). *Didáctica activa para la resolución de problemas 6° Nivel E.G.B curso 86-87*. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.

Rodríguez, L. (2004). Identificación y evaluación de niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 37-47). Santiago (Chile): OREALC/Unesco.

Silver y Cai (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129-135.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problema posing. *ZDM- Zentrallblatt fur Didaktik der Mathematik, 29*(3), 75-80.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Silver, E., Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521-539.

Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S., Kenney, P (1996). Posin matehematical problem: An exploratory study. *Journal for research in matehematics education. 27*(3), 293-309.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective*. (pp 164-185). Edit Cowan University: MASTEC.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). London: Academy Press.

Villarraga, M., Martínez, P. y Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 25-35). Santiago (Chile): OREALC/Unesco.

Walter, M., Brown, S. (1977). Problem posing and problem solving: An illustration of their interdependence. *Mathematics Teacher, 70*(1), 5-13.

Wenderlin, I. (1958). *The mathematical Ability: Experimental and Factorial Studies*. Lund, Glerups.

ANEXO A

Instrumento de recolección de información

Nombre del alumno ____

Edad _______

Provincia de residencia ___________________________

Nombre del centro educativo ____

Nivel que cursa en dicho centro educativo _______________________________

Tarea # 1

De acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.

Tarea # 2

Con la siguiente información inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.

Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros.

ANEXO B

Tabla B.1 *Transcripción de las producciones de los estudiantes del grupo talento*

Código	Enunciado
1GT-T1	Tres chicos están compitiendo en una carrera en la que tienen que dar unas vueltas (5) a la pista del dibujo de arriba. El primero se coloca en la línea de salida (también de meta); el segundo a 3 metros del primero y el 3° a 3,5 m del segundo. Si el primero los corre 100 m en 18 segundos, el segundo los recorre en 17,5 y el 3° en 16,9 segundos. ¿Quién llegará antes a la meta si una vuelta consta de 80 metros? (la velocidad de los niños no se mantiene constante; cada vuelta tardan 2 segundos más menos el tercero que tarda 1,9 segundos más por vuelta).
1GT-T2	Si el tren va a una velocidad de 384 km/h (constante), y entre su posición actual y Málaga hay 583,85 km. Cada vagón mide 5,9 m (locomotora incluida). El primer asiento de cada vagón está situado en el metro cero justo donde empieza el vagón y el último a 1 m del final (a cada vagón). Si el tren no se parase en Málaga y siguiera. ¿Cuál sería la diferencia de tiempo que tardaría en cruzar la frontera de Málaga desde el primer pasajero hasta el último, suponiendo que el tren va lleno?
2GT-T1	En una escuela se pone a correr a 5 niños en una pista de atletismo. Al dar dos vueltas se cuenta el tiempo que ha tardado cada niño; pero los hombres no son apuntados y tenemos que averiguar el tiempo de cada uno. Los alumnos nos han dado 5 afirmaciones de las cuales dos no son verdaderas. ¿Cuál es el tiempo de cada uno? María ha tardado 2 min. Juan ha tardado el doble que María. Carlos dice que Juan miente. Laura dice que María, Juan y Carlos han corrido lo mismo. Ana dice que Carlos ha tardado 3 min.
2GT-T2	Un tren con cuatro vagones para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros. Tarda 9 horas en llegar a Málaga. Hay 3 estaciones de parada. Al partir de la estación el tren sale con el máximo de pasajeros. En la primera parada se bajan un tercio de los pasajeros y suben el doble de los que quedaban. En la segunda y tercera se bajan la mitad pero en la tercera suben la mitad que en la segunda. Si en la segunda subieran 4 veces los pasajeros que quedaban. ¿Cuántos llegan al destino?
3GT-T1	Javi corre a una velocidad media de 20 m/min, y Francis a una de 40 m/min. Elena prefiere llevar un ritmo más suave y corre a 10m/min. Por el esfuerzo hecho, todos tienen que hacer un número de paradas cada cierto número de vueltas, acorde con el esfuerzo realizado. Suponiendo que Elena haga una parada de un minuto cada cuatro vueltas, y los otros la hagan en proporción a esa cantidad, averigua. ¿Cuándo ganaría Javi, cuándo Francis y cuándo Elena?
3GT-T2	2 parejas, una con un hijo más que la otra, y suben un número de personas tal que quedan 290. En la segunda parada bajan 10 parejas y suben 15 personas, y en la última antes de llegar, bajan 3 personas y suben el triple de niños que tenían las dos primeras parejas juntas. ¿Cuántas personas subieron en la primera parada y cuántos niños tenía cada pareja (de la 1° parada)?

Código	Enunciado
4GT-T1	Calcula el área de un triangulo equilátero inscrito en esta circunferencia
4GT-T2	El tren por si solo va a 150 km/h, el peso de cada pasajero hace que el tren vaya a 0,1 m/h más despacio y detrás de cada compartimiento hay un motor que hace que el tren vaya 0,05 m/s más deprisa. ¿a qué velocidad irá el tren llevando dos tercios de su capacidad?
5GT-T1	Si el niño de naranja lleva 70 metros recorridos en la carrera, el de amarillo 140, y a la niña le faltan 2/8 de vuelta. ¿Cuántos metros llevará recorridos cada niño hasta juntarse los 3 en un mismo punto? ¿En qué punto de la pista(metro 1, metro 27, etc) se juntarán?
5GT-T2	Si hacen una parada a las 10:.00h, otra a las 12h, y a Málaga llegan a las 12:30, ¿Cuántos pasajeros podían subir en cada parada como máximo sabiendo que al salir hay 4/10 de la capacidad total y que en cada parada sube el mismo número de personas y no baja nadie? ¿Cuántos pasajeros habría en cada vagón durante cada tramo para ir repartidos equitativamente? Si cada vez que hacen una parada_intermedia hubiese un retraso de 14,5 segundos por persona que sube ¿A qué hora llegarían a Málaga? P.D. (Importante) El tren siempre llega a Málaga con el número máximo de pasajeros
6GT-T1	A tiene una velocidad de 60m/min y B de 75 m/min. Sabiendo que el circuito es una circunferencia perfecta y que A recorre interiormente la circunferencia en su línea recta más larga 7 veces y B da 7 vueltas al circuito. ¿Cuál de los dos termina antes? ¿Cuánto tiempo transcurre entre que el primero acaba y acaba el segundo?
6GT-T2	Cada pasajero reduce la velocidad del tren en 0,2 Km/h. Si la hora de llegada prevista del tren es a las 10:15h y el tren contiene un número de pasajeros mayor que 201 productos de dos primos diferentes y que la suma de sus cifras es 16. ¿Podrá Ana coger el tren si este se para dos minutos en Málaga y ella se ha retrasado tomando un café hasta las 10y21? (la distancia aproximada entre ambas estaciones es de 37km)
7GT-T1	Suponiendo que sea un círculo perfecto, ¿Cuántos grados más de apertura se necesitan para correr 109m?
7GT-T2	El tren lleva 2/3 de su capacidad máxima, ¼ de los pasajeros están en el primer vagón. Otro cuarto en el 2°. Mientras que 3/8 están en el tercero y 1/8 en el cuarto. El tren para en Putarra y 3/8 de los del 1er vagón se bajan. También se bajan 1/3 de los del segundo vagón, 3/10 de los del tercero y 5/13 del 4° ¿Cuántos pasajeros llegan a Málaga? P.D Putarra es un pueblo.
8GT-T1	Si se hace un círculo utilizando como radio la distancia desde el centro hasta un árbol, se obtiene un círculo con un radio que mide la mitad que el del círculo de 80 m. ¿Cuántos metros recorrerá un niño que le da una vuelta al círculo grande, se mueve hacia el pequeño y da una vuelta a éste?
8GT-T2	De los cuatro vagones del tren, el primero puede transportar dos veces más personas que el segundo, el segundo transporta los mismos que el cuarto y el tercero transporta lo que pueden transportar el primero, segundo y cuarto juntos. Si por una nueva regla el cuarto sólo puede transportar dos tercios de los que puede el segundo y el primero sólo puede transportar el doble de los pasajeros que lleve el cuarto. ¿Cuál es la nueva capacidad máxima?

Código	Enunciado
9GT-T1	María corre 6 m por segundo, Juan 3m y Pepe 1m. Realiza una estadística que nos cuente cada cuantas vueltas se encontrarán en la meta si al salir, María le deja 4 segundos de ventaja a Pepe y 6 a Juan.
9GT-T2	Cada vagón pesa vacío 200 kg, y cada pasajero 80kg, junto con su equipaje de 20kg y las mujeres un bolso de 0,5 kg. En los dos primeros vagones sólo hay 158 mujeres. En el primer vagón hay el mismo número de personas que en el segundo y en el 3° vagón hay las mismas que en el cuarto. Sabiendo que el tren tiene que recorrer 20 kg en 3 h, ¿qué fuerza tendrá que hacer el motor para llegar a la hora exacta si la cabina del maquinista pesa 400 kg? ¿y si pesara 500 kg y tuviera que llegar en 1 hora y media?
10GT-T1	Si el chico de naranja da dos vueltas por cada una que da la chica de morado y el chico de amarillo da dos vueltas por cada ocho que dan entre los tres y en dar, entre los tres, 16 vueltas tardan 5 minutos ¿A qué velocidad va cada uno (teniendo en cuenta que cada vuelta son 80 m)?
10GT-T2	Hay subidos en el tren 294 personas, 1/3 son hombres, la mitad son mujeres y el resto niños (as) si hay 94 niños (as) ¿Cuántos empleados (as) hay?
11GT-T1	Un patio circular tiene 80 m de longitud, si hay un camino de 2 m de ancho rodeándolo ¿Cuál es el área del camino? ¿y la del espacio central?
11GT-T2	Un tren quiere llevar 275 personas desde Sevilla a Málaga. El tren viaja a 80 m/s. Si hay 207 Km de Sevilla a Málaga y el tren sale a las 9:00 ¿a qué hora llegarán los pasajeros a Málaga? Si la capacidad del tren es 294 pasajeros y 295 quieren ir a Málaga desde Sevilla. ¿Cuándo llegará el último pasajero si el tren descansa 27 minutos en cada estación?
12GT-T1	Corredor A: 100m/min Corredor B: 70 m/min En una carrera el corredor A llega el 1° lugar tras correr durante 12 min. ¿ De cuántas vueltas consta la carrera? El corredor B ha llegado en 2° lugar tras 13 min de carrera. ¿Cuál ha sido la velocidad media de la carrera?
12GT-T2	El tren para en 3 estaciones. En el primer vagón la capacidad máxima es de 94 pasajeros, en el 2° de la mitad. En la primera estación se suben 5/7 de la capacidad máxima de pasajeros. En la segunda estación se bajan 2/5 de los pasajeros y se suben 70 más. Al llegar a Málaga todos los pasajeros se bajan y los controladores se dan cuenta de que el 3° ha llegado lleno. Sabiendo que el 3° y 4° vagón tienen la misma capacidad máxima, ¿cuál es esa capacidad?
13GT-T1	Tres chicos empiezan a acorrer desde la línea de salida a 20, 15 y 10 km/h respectivamente ¿Cuánto tiempo deben estar corriendo para que vuelvan a coincidir?
13GT-T2	Un vagón es de mercancía y los otros tres son: vagón de primera clase (75 euros por persona), vagón restaurante (50 euros por comida) y clase turista (25 euros) al salir los 3 están llenos con el mismo número de personas. Si cada hora se bajan 2 de clase turista y uno de primera clase y son sustituidos, ¿Cuánto pagan entre todos los pasajeros?

Código	Enunciado
14GT-T1	En esta pista de atletismo circular están corriendo tres deportistas (A,B,C). El deportista A lleva una hora corriendo a una velocidad de 6 metros/segundo; el deportista B lleva 45 minutos corriendo a una velocidad de 19 Km/hora; el deportista C lleva 1,5 horas corriendo a una velocidad de 0,7 Km/minuto. Suponiendo que sus velocidades son constantes, ¿Cuántas vueltas completas habrán dado entre los 3 deportistas dentro de 37 minutos?¿cuantos metros faltan para acabar otra vuelta completa más?
14GT-T2	Un tren con cuatro vagones iguales (misma capacidad) para pasajeros sale de una estación a las 9:00 h con destino a Málaga. Pero antes de llegar realiza 4 paradas. El tren tiene una capacidad máxima para 294 pasajeros. El tren sale con todos los vagones llenos desde la estación. Al llegar a la 1° parada 15 de los pasajeros del primer vagón y 1/8 de los del segundo se bajan. Al primer vagón se suben 3 pasajeros y en el segundo se suben ¼ del número de pasajeros que se habían bajado. En la segunda estación, se baja 1/18 de los pasajeros del tercer vagón y 10 pasajeros del 4°. En la tercera parada no se baja nadie pero se suben 1 pasajero a cada vagón. En la 4° parada se bajan 1/8 del número de pasajeros que ocupaban el tren antes de salir de la 1° estación. ¿Cuántos asientos vacíos quedan al llegar a la estación de Málaga?
15GT-T1	Juan, María e Isabel están corriendo. Los tres salieron a la vez. Juan es el más rápido pero también se cansa antes; y lleva 7 vueltas a Isabel y ésta le lleva tres a María. Cada 400 metros Isabel le recorta a Juan 15 metros María le recorta a Isabel 22. ¿Cuántas vueltas tienen que dar para que María tome la delantera?
15GT-T2	En un vagón caben 74 personas, en otro 86, en otro 55 y en otro 79. En el tren se suben grupos de 6,9,12 y 15 personas. ¿Cuántos grupos de cada uno tendría que haber para poder distribuir a los grupos en todos los vagones, de manera que no se parta ningún grupo?
16GT-T1	Halla el perímetro del campo de fútbol sabiendo que este es el quíntuple del radio del parque de forma circular. Averigua quién ganará la carrera a tres bandas que sucede en el parque sabiendo que la chica corre a 10km/h, el chico con la camiseta naranja hace los 100 metros en 25 segundos y el chico con la camiseta amarilla hace 1 km en 30 min. Ten en cuenta que el primero que dé 5 vueltas gana, que la chica es constante, el chico de la camiseta naranja para para andar una vez y lo hace durante 3 segundos a velocidad de 3km/h.
16GT-T2	Un tren parte hacia Málaga con 294 pasajeros. Teniendo en cuenta que un noveno de las personas que partieron hacia Málaga no llegaron a su destino por haber parado antes en dos estaciones. Averigua el número de personas que bajaron del tren antes de parar, cuantas personas se bajan del tren a lo largo de un trimestre si todos los días bajan 1/9 de las personas que cogen el tren y por último averigua cuantas personas llegarán a Málaga entre Enero y Marzo del 2008.

Código	Enunciado
17GT-T1	Juan y Paula van a la plaza a correr (imagen) empiezan a correr desde el mismo sitio, pero Juan va a una velocidad de 18km/h, mientras que Paula va a 13km/h. cada 500 metros Juan desciende su velocidad en 0,5km/h, mientras que Paula tarda 1800 m en hacer este recorte. Si están corriendo durante dos horas ¿Quién correrá más vueltas? ¿Cuántas vueltas le sacará al que haya corrido menos?
17GT-T2	Un tren sale desde Madrid a las 9:00h, con destino a Málaga, cuando está vacío el tren va a una velocidad de 90 km/h, y por cada pasajero que se monte el tren reduce su velocidad en 100m/h. cuando el tren salo lleva 185 pasajeros; en la primera parada que dura 15 minutos suben 20 pasajeros y bajan 3; en la siguiente que duró 10 minutos suben 50 pasajeros y no baja ninguno; en la última parada el tren se llena entero, está parada duró 80 minutos porque hubo un problema que hizo que ahora cada pasajero reduzca la velocidad en 120 m/h. entre Madrid y Málaga hay 377 km de línea ferroviaria ¿a qué hora exacta llegará el tren a Málaga?
18GT-T1	Un muchacho ha dado 5 vueltas al circuito en un tiempo de 50 segundos. ¿Cuál es la velocidad media a la que ha corrido? Dada en km/h. ¿a qué velocidad tendría que ir para dar 8 vueltas al circuito en 1 minuto y 28 segundos?
18GT-T2	Al llegar a la primera parada iba a una velocidad de 240km/h y ha tardado 15 minutos. Al reducirse el número de pasajeros a la mitad el tren iba ligeramente más rápido. Sabiendo que llevaban ¼ de recorrido y el resto lo han recorrido en 35 minutos. ¿a qué velocidad iba el tren en la segunda parte del recorrido?
19GT-T1	En un polideportivo tres niños, (Juan, María y Paco), están hechando una carrera. La pista en la que corren es circular y cada vuelta son 80 metros. La carrera consta de 15 vueltas. En un momento dado de la carrera Paco lleva el 83% del total; María el 76% y Juan el 54%. ¿Cuántos metros llevan en total entre los 3 amigos?
19GT-T2	Un tren con cuatro vagones sale de una estación a las 9:00h en la que su 1° parada es Málaga. El tren lleva ahora 288 personas (la misma cantidad de ellas en cada vagón). Al llegar a Málaga, del 1° vagón se bajan la mitad de los que allí había, del 2° vagón se bajan ¼ de las que contenía, del 3° se bajan 1/3 y se suben el doble de los que antes había; y en el 4° se bajan 1/6 y suben 5 personas. ¿Cuántas personas quedan en todo el tren al salir de la estación?
20GT-T1	Pablo, Miguel y María deciden hacer una carrera alrededor de un patio circular. Pablo va a 10km/h, Miguel a 6 km/h y María a 3km/h. Se encuentran en esta posición: (VER DIBUJO).Comienzan a andar en la dirección que se indica a su velocidad. ¿Cuánto tardarán en recorrer toda la pista? (al llegar dos al mismo punto paran esos dos)
20GT-T2	Un tren con cuatro vagones transporta 294 pasajeros. Sale a las 9:00h de la estación hacia Málaga. El último vagón lleva 54 pasajeros, el tercero va vacío, y el primero lleva el doble que el segundo. El viaje dura 13 h, y cada dos horas se bajan 20 pasajeros del primer vagón y 3 del segundo. Cada 3 horas suben 10 al tercero y 2 al último. ¿Cuántos pasajeros tendrán al llegar a Málaga?

Código	Enunciado
21GT-T1	Se ha organizado una carrera en la que participan el corredor amarillo, el morado y el naranja. Antes de empezar han hecho un entrenamiento y la velocidad media a la que han corrido han sido: amarillo 20km/h, morado 18km/h y el naranja a 28km/h. para que la carrera esté más equilibrada se han colocado los corredores a 40 metros entre ellos, siendo el último el naranja y en la línea de salida el morado. El recorrido que hacen por vuelta es de 80m. Si la carrera es a 5 vueltas, ¿quién llegará primero a la meta? ¿Se producirán adelantamientos si todos corren a la velocidad que habían conseguido en los entrenamientos? Si es así, ¿en qué vuelta?
22GT-T2	Un tren con destino a Málaga realiza un trayecto de 4 horas. El tren sale con 1/3 de su capacidad, y cada 20 minutos realiza una parada en la que se retrasa 2 minutos y en la que se suben la 3° parte de los que iban más 4. El peso de cada persona hace que gane o,5 minutos por km. Si el trayecto es de 100 km ¿con cuántos minutos llegará de retraso?

ANEXO C

Tabla C.1 *Transcripción de las producciones de los estudiantes del grupo estándar*

Código	Enunciado
1GE-T1	El perímetro de una circunferencia es de 80 metros, si hay tres niños dando vueltas a su alrededor a 5 km/h, ¿Cuánto tardarán en dar 2 vueltas? Exprésalo en m/s.
1GE-T2	En un tren de cuatro vagones con destinación a Málaga, caben 294 pasajeros y sale completo. En la primera estación se bajan 15 pasajeros, y suben 3, en la segunda el tren se queda medio lleno, y en la última se sube un pasajero más. ¿Cuántos pasajeros llegan en cada vagón a Málaga? Recuerda que los vagones suelen tener una cantidad parecida de pasajeros.
2GE-T1	En un parque Juan, Antonio y Lucía deciden hacer una carrera. Una vuelta son 80 metros y quién de más vueltas en menos tiempo gana. Juan ha dado 2 vueltas y ha parado 5 minutos para descansar. Antonio ha dado 3 vueltas y media y ha parado 15 minutos y Lucía ha dado 2 vueltas y media corriendo y media vuelta caminando y ha parado 5 minutos. ¿Cuántos metros han hecho los 3 en total? ¿y cada uno? Más tarde deciden medir la pista de baloncesto para un trabajo de matemáticas y además necesitan saber su diagonal. ¿Cuántos metros medirá la diagonal de la pista y la pista entera?
2GE-T2	A las 9:00 de la mañana sale un tren con 50 pasajeros a las once vuelve con 70 pasajeros vuelve a salir y vuelve con 30 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros han entrado y salido en total? Al día siguiente los vagones se llenan enteros ¿Cuánta capacidad tiene cada vagón?
3GE-T1	Si tres chicos giran en torno a una plaza y una vuelta son 80 metros, si el primer niño consigue dar 17 vueltas y la siguiente niña 29 y en total han hecho entre todos 5000 metros ¿Cuántas vueltas ha dado el 3° niño? Y entre todos cuantas vueltas han dado?
3GE-T2	La última parada del tren es a las 20:00 horas, si cada parada se bajan 60 personas y se suben 80 ¿Cuántas paradas hace?
4GE-T1	En la plaza Villacós hay 3 niños que están corriendo dando vueltas a una fuente, están comprobando quién dura más dando vueltas. Julia consigue dar 24 vueltas, Antonio 35 y José 18 ¿Cuántos metros han recorrido todos en total? Dato: 1 vuelta son 80 metros.
4GE-T2	El tren en total cada hora hace una parada, la última parada la hace a las 21:00 horas de la noche, cada hora sube a 17 personas, y cada media hora se bajan 8. ¿Cuántas personas habrá en el tren a las 21:00 horas de la noche, es decir, en su última parada?

Código	Enunciado
5GE-T1	En el instituto Ines Nazarí se han organizado unas olimpiadas. Pasadas una eliminatorias han quedado 3 alumnos, cada alumno tiene que recorrer 320 metros en 3´50´´, en una simulación la media tardada por los corredores fue de 3´20´´ pero el día de las olimpiadas esta media aumento 12 segundos. Si el primer corredor recorrió los 320 metros en 3´50´´ segundos ¿a qué distancia del final y cuantos metros recorrieron los corredores restantes. ¿Qué tiempos hicieron cada uno?
5GE-T2	Un tren sale de Madrid con destino a Málaga a las 9h. Lleva la tercera parte de pasajeros del máximo. La distancia entre las dos ciudades es de 800 km pasados 200 km el número de pasajeros se ha duplicado. Cuando pasan 100 kilómetros más llegan a ciudad Real. Son las 12:00 horas aquí se bajan 40 pasajeros y se suben 12. Al salir de Ciudad Real el tren lleva una velocidad constante de 200 km/h. En la siguiente parada se bajan 7 personas y han pasado 1 hora y media. Desde esa parada a Málaga no se hacen más paradas y el tren sigue a una velocidad constante de 200 km/h. ¿Cuánto han tardado en llegar a su destino? ¿Cuántas plazas vacías quedan en el tren?
6GE-T1	Los alumnos de 3° del I.E.S Fco Javier de Burgos están haciendo una prueba para Educación Física. Esta consiste en correr 1000 metros en menos de 6 minutos y medio. Martha va por la 5ta vuelta y lleva 3 minutos y medio. Para superar la prueba. a) Podría seguir el mismo ritmo en las vueltas que le quedan? (ten en cuenta que cada vuelta son 80 metros recorridos), b) En caso negativo ¿Cuántos metros tendría que recorrer en el tiempo que estaba recorriendo 80?
6GE-T2	De la estación de Madrid sale un tren con cuatro vagones a las 9:00 h con destino a Málaga. Todos los pasajes están vendidos (294) pero en un último momento uno de los vagones sufre una serie de desperfectos por lo que debe quedarse en la estación. A) Si todos los vagones tienen la misma capacidad. ¿Cuánto pasajeros deben quedarse en tierra? B) Si estos desperfectos duran una semana todos estos billetes están vendidos y estaba previsto que el tren saliera dos veces al día ¿Cuántos pasajeros se verán afectados?
7GE-T1	Juan, Pedro y María han apostado en una carrera, el ganador se llevará el dinero aportado por todos. Han contratado a un hombre para que les cronometre corriendo, la van a pagar 0,50 euros por cada minuto que pase. Las condiciones son las siguientes: todos deben llevar el mismo peso; deben correr 3 vueltas a la pista; deben apostar 20 euros cada uno. Juan es el que más pesa (83kg) así que María y Pedro tienen que llevar el mismo peso en una mochila, María pesa 53kg y Pedro 74kg. María tarda en dar las 3 vueltas 4 minutos y 20 segundos, Pedro tarda 3 minutos y 36 segundos y Juan tarda 3 minutos y 5 segundos. ¿Cuánto peso tenían que añadir María y Pedro? ¿Cuánto dinero se llevará el campeón si debe pagarle al hombre?
7GE-T2	El tren con destino a Málaga posee 4 vagones, en cada uno entran entre 70 y 74 pasajeros. En el primer vagón hay 70 personas y cuesta 36 euros por persona. El segundo cuesta 23 euros por persona y hay 68. En el tercer vagón el precio es de 25 euros y hay 78. En el cuarto vagón hay 78 personas y cuesta 12 euros. ¿Cuánto dinero han ganado? ¿Cuántas personas han viajado en total? ¿Cuánto tiempo han tardado si salía a las 9:00 h y llegaba a las 12:48?

Código	Enunciado
8GE-T1	Benito, Juan y Vanessa rotan trotando en una plaza cuadrada formada por 2 círculos inscritos en ella. Si uno de ellos tarda en recorrer 180 m en 2 minutos antes que los demás y sin embargo, el último tarda 5 minutos menos que el anterior. ¿Cuantos metros recorren cada uno en 3 horas? ¿Cómo quedan clasificados? ¿Dónde rota cada uno si el último dice que se encuentra en la parte más soleada de la plaza?
8GE-T2	Un tren tiene 4 vagones para pasajeros y sale a las 9:00 con destino a Málaga. Al salir no llenan todo el tren de pasajeros sino que tienen 1/14 menos de su mitad. Se encuentran en él diferentes personas del mundo. Un inglés, un francés y un español van a parar en distintas paradas, todos ellos llevan 100 euros para sus gastos y sabemos que uno gasta el doble que el que gasta menos, y el que gasta menos gasta la ¼ parte de su anterior. ¿Qué gastó cada uno si el tren va a 120 km/h y llega a las 9:00 h?, ¿cuánto tardará si va a 150km/h y realiza 4 paradas de las cuales la primera es 10 minutos, la segunda la mitad de la primera, el 3° el doble de la primera y la segunda y la cuarta la tercer menos ¼ de la primera.
9GE-T1	El área de la circunferencia de la pista de corredores es de 38,40 m2 ¿Cuál será el área de la circunferencia de la pista de fútbol del instituto si es ¾ partes más pequeña que la pista de corredores?
9GE-T2	Un tren sale de la estación con un indefinido número de pasajeros. En la primera estación baja la tercera parte de los pasajeros y sube la mitad del máximo de pasajeros. En la segunda baja 1/8 parte de los pasajeros totales y no sube nadie ¿Cuántos pasajeros había al principio si ahora hay 132?
10GE-T1	Juan ha dado media vuelta a la pista en 5 minutos, Susana 3/5 en 5 minutos; y Pedro ¾ en 5 minutos. Si fueron a la misma velocidad todo el tiempo ¿a cada cuantos metros coinciden los tres?
10GE-T2	Si el tren lleva una velocidad de 200km/h y le faltan 5000km para llegar a su destino, sabiendo que también se va parando en cinco estaciones tardando 20 minutos en cada una ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a su destino? ¿A qué hora llega?
11GE-T1	Lucas lleva recorridos el 25% de la longitud de la vuelta, Annie el 45% y Fran sólo le falta un 12% para acabar ¿Cuánto llevan recorridos cada uno y cuanto le faltan para acabar? Si van a empezar otra carrera Annie va unos 5 m/s, Lucas 8m/s y Fran a unos 10m/s ¿quién llegará antes y cuanto tardarían en llegar cada uno?
11GE-T2	Si hasta llegar a Málaga hay 500km y el tren viaja a una velocidad de 150Km/h ¿a qué hora llegará a su destino? Y si el tren al salir solo tiene 280 pasajeros y tiene que parar 27 minutos en un pueblo para conseguir a los últimos 14 pasajeros ¿a qué hora llegaría a su destino, si mantiene la velocidad constante y sale a la misma hora?

Código	Enunciado
12GE-T1	En el patio de mi colegio hay un camino circular que tiene 80 m, mis amigos Juan y María han hecho una propuesta: tenemos que hacer una carrera. Si María da una vuelta completa en 3 minutos, Juan 1 min y medio y yo tardo 2, 15 min. ¿Cuándo volvemos a coincidir en la línea de salida si los tres empezamos a la vez? ¿Y si Juan tardase una cuarta parte más?
12GE-T2	Si cada 15 minutos se suben 37 personas y cada 30 minutos se bajan y se suben 22. ¿Cuántos pasajeros tendrá el tren si empezó con 184 pasajeros y el tren llegó a las 12:45?
13GE-T1	El profesor de gimnasia ha mandado a Lucas, Fran y María ha dar unas vueltas a la pista. Dicha pista, cada vuelta tiene 80 metros y a paso ligero Lucas tarda veinte segundos, María 15 y Fran 10. ¿En qué vuelta coincidirán Lucas y Fran? ¿y María y Fran?
13GE-T2	Un tren viaja de Barcelona a Málaga, saliendo a las 9:00h. Este tren tiene una capacidad máxima de 294 pasajeros y cuatro vagones. Tarda en hacer el recorrido unas 10 horas haciendo una parada cada 2 horas. El tren sale de Barcelona con 40 pasajeros en la primera parada se bajan del tren la cuarta parte de pasajeros y sube su mitad. En la segunda parada dicha cantidad se triplica y se le suma 20. En la tercera diez de las anteriores se bajan. En la cuarta parada se suben 97 pasajeros más y en la quinta se suben el doble de pasajeros que había en un principio más 17 ¿estará completo el tren?
14GE-T1	En un parque se encuentran tres niños dando vueltas a una zona circular. Por cada vuelta recorren 80 metros. Si tardan 2 minutos por cada media vuelta y entre los tres han recorrido 20.000 centímetros ¿Cuántos minutos habrán tardado en recorrerlos? ¿Si tardan 5 horas cuantos cm habrán recorrido?
14GE-T2	El tren con destino a Málaga sale a las 9:00h ha recogido a 253 pasajeros. Llegan a las 11h a Málaga y se bajan solo 2/5 de los pasajeros pero suben 3/2 de los mismos. En la siguiente se bajan ¼ y suben 10. ¿Cuántos pasajeros habrán en la última parada?
15GE-T1	En un parque el recorrido total de una vuelta son 80 metros, Marcos lleva una vuelta menos que Patricia, si Patricia lleva tres vueltas más que Victor, ¿Qué cantidad de vueltas llevan en total? ¿Cuántas vueltas lleva Patricia más que todos? ¿Cuántas vueltas lleva menos Marcos que Patricia y Victor?
15GE-T2	Antes de llegar a Málaga tienen que pararse porque bajan 30 pasajeros y a la primera deberían haber entrado 294 pasajeros y sólo hay 100 pasajeros, cuando paran suben 4 pasajeros más ¿Cuánta gente habrá en el tren cuando lleguen a Málaga? ¿Cuánta gente se ha subido a la primera?
16GE-T1	Ana quiere medir la longitud de la plaza con sus pasos, sin saber que una vuelta son 80 metros. Sabiendo que cada paso mide 70 cm ¿Cuánto medirá si ha dado 90 pasos? Una vez esto Ana, Juan y Antonio quieren saber cuantos pasos van a dar en 3 vueltas y media entre los 3. Pero el paso de cada uno debe ser de 55cm. ¿Cómo lo harán?
16GE-T2	Si un tren sale a las 9h y llega a las 12:00 horas a su destino ¿Cuántas personas podrán viajar en un día entero, si esto se repite durante las 24 horas y por problemas de asientos solo pueden viajar en cada viaje 285 pasajeros ¿Cuántas horas viajarán 583 pasajeros una vez arreglados los asientos? Y el tren tiene capacidad para 294.

Código	Enunciado
17GE-T1	María, Juan y Luis son los mejores corredores de 3°, por eso su maestro de educación física hoy les ha llevado a correr a la pista de atletismo. Si tienen que dar 6 vueltas y cada vuelta son de 80 metros y además las tienen que hacer en un tiempo mínimo de 6 minutos ¿Cuánta vueltas y en cuanto tiempo darán las 6 vueltas?
17GE-T2	Si la estación de tren se encuentra en Granada y de Granada a Málaga en coche a una velocidad de 110 se tarda una hora y media en llegar ¿Cuántas horas tardará el tren si va a una velocidad de 200? ¿y qué harías para que los 4 vagones estuvieran llenos en partes iguales si en este viaje hay 200 personas?
18GE-T1	En una plaza del parque hay 3 chicos que se han dispuesto a ejecutar una carrera cada chico tarda aproximadamente 13 segundos ¿Cuántas vueltas llevará el chico numero 1 si ya han transcurrido 2 minutos y 6 segundos ¿Cuántas vueltas darán en 24 horas? Dato: tardan en dar cada vuelta 13 segundos.
18GE-T2	Un tren con destino a Málaga para y recoge a 190 pasajeros y llena el 1° vagón, el tren para de nuevo suben 60 pasajeros al segundo vagón y se llena, pero a su vez en el 1° vagón se habían bajado 36 pasajeros y habían pasado del 2° vagón 26 al primero y del 1° vagón 12 pasajeros al 2°. El tren para de nuevo y recoge a 40 pasajeros que llenan el 3° vagón pero a su vez se bajan 40 pasajeros del 1° y suben 36 y del 2° bajan 11 pero se suben 4 y a su vez los pasajeros del 3° vagón se distribuyen entre el 1° y el 2°, se van al 1° 6 pasajeros y al 2° 2 quedando en el tercero 32 pasajeros. El tren por fin hace la última parada y se suben en el cuarto vagón 4 pasajeros llenándolo completamente pero se bajan 18 pasajeros del 1° vagón, 23 del segundo vagón y 3 del tercero ¿Cuántos pasajeros hay en cada vagón después de la última parada?
19GE-T1	Tres amigos quieren hacer una carrera, esta consta de cuatro vueltas ¿cuántos metros recorren? En el centro del recorrido hay una bandera que debe recoger el vencedor ¿A qué distancia está de la meta (radio), Juan ha cada zancada que da recorre 1,5 m y a una velocidad de 2m/seg ¿Cuánto tiempo tardará en hacer una vuelta? ¿y las cuatro vueltas?
19GE-T2	Un tren de granada a Málaga tarda 3 horas en llegar a su destino, sale a las 1:00 pero hay un pequeño retraso de 15 min, se montan 180 pasajeros y al llegar a una parada se montan los restantes, se tarda unos 20 minutos más, a casi la llegada el tren se para y el maquinista va a echar un vistazo, lo soluciona en 30 minutos, con tantas paradas el tren se retrasa mucho ¿Cuánto tiempo tarda en llegar a Málaga? ¿A qué hora del día llegan? Si el tren va a 100 km/h ¿Cuántos kilómetros recorre el tren?

ANEXO D

CONTRASTE DE HIPOTESIS PARA LA MEDIA DE LOS PUNTAJES OBTENIDOS EN LA RIQUEZA DE LOS PROBLEMAS DEL GRUPO TALENTO Y ESTÁNDAR

Primero comprobamos que las poblaciones “grupo talento” y “grupo estándar” son normales mediante el contraste de Shapiro-Wilk.

El contraste que se realiza es el siguiente:

H_0: La v.a. X tiene función de distribución Normal.

H_1: La v.a. X tiene otra función de distribución.

Para el grupo talento los resultados son los siguientes,

Pruebas de normalidad

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Grupo talento	,195	21	,037	,929	21	,134

a Corrección de la significación de Lilliefors

Si el contraste se realiza a un nivel de significación de α=0.05, como p_0=0,037<0,05=α rechazamos la hipótesis nula, es decir, los datos no siguen una distribución Normal. Sin embargo, si realizamos el contraste al nivel de significación del 0,01, la hipótesis nula se acepta, es decir, aceptamos que los datos siguen una distribución Normal. Esto puede ser debido a que disponemos de pocos datos, por lo que con una muestra mayor probablemente la normalidad se aceptaría en todos los casos.

Veamos que ocurre con la muestra procedente del grupo estándar.

Pruebas de normalidad

	Kolmogorov-Smirnov(a)			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
Grupo estándar	,144	19	,200(*)	,943	19	,295

* Este es un límite inferior de la significación verdadera.
a Corrección de la significación de Lilliefors

En este caso aceptamos la normalidad sin ninguna duda ya que el p-valor obtenido en el contraste es p0 = 0,2 >0,05 = α, por tanto los datos de la población siguen una distribución normal.

Una vez comprobada la normalidad de los datos, podemos proceder a comparar las poblaciones. Queremos saber si las medias de los puntajes obtenidos en la riqueza de los problemas en ambas poblaciones son iguales o no, es decir, queremos realizar el siguiente contraste:

$$H_0: \mu_X = \mu_Y$$

$$H_1: \mu_X \neq \mu_Y$$

Pero para ello en primer lugar tenemos que ver si las varianzas de las poblaciones son iguales o no:

$$H_0: \sigma_X = \sigma_Y$$

$$H_1: \sigma_X \neq \sigma_Y$$

Estadísticos de grupo

	Tipo de estudiante	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Riqueza de los problemas	Grupo talento	21	29,24	4,493	,981
	Grupo estándar	19	23,53	3,717	,853

Prueba muestras independientes

		Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias						
									95% Intervalo de confianza para la diferencia	
		F	Sig.	t	Gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	Superior	Inferior
Total	Se han asumido varianzas iguales	,247	,622	4,353	38	,000	5,712	1,312	3,056	8,368
	No se han asumido varianzas iguales			4,395	37,720	,000	5,712	1,300	3,080	8,343

Con la Prueba de Levene comprobamos si las varianzas son iguales. Como el p-valor obtenido para este contraste es $p=0{,}622>0{,}05=\alpha$, aceptamos la hipótesis nula y las varianzas son iguales a un nivel de significación del 5%.

Asumimos por tanto varianzas iguales para hacer el contraste sobre las medias. En este caso $p=0{,}000<0{,}05=\alpha$ y por tanto tenemos que rechazar la hipótesis nula, la media del puntaje obtenido en la riqueza de los problemas por grupo talento (29,24) es superior a la obtenida por el grupo estándar (23,53).