UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

OBTENCIÓN DEL VOLUMEN DEL TETRAEDRO POR ALUMNOS CON TALENTO MATEMATICO SIN EMPLEAR FORMULAS

Sandra Guerrero García

Granada, 2014

OBTENCION DEL VOLUMEN DEL TETRAEDRO POR ALUMNOS CON TALENTO MATEMATICO SIN EMPLEAR FORMULAS

Trabajo Fin de Máster

MEMORIA realizada por Sandra Guerrero García bajo la dirección del Dr. Pablo Flores y el Dr. Rafael Ramírez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada para optar al Máster en Didáctica de la Matemática.

Fdo. Sandra Guerrero García

Vº Bº

Dr. Pablo Flores Dr. Rafael Ramírez

AGRADECIMIENTOS

A Dios por regalarme la mejor experiencia que he tenido en mi vida. Sus tiempos indefinidos van más allá del horizonte de nuestra visión.

A mis padres, por enseñarme a ver la vida desde una perspectiva positiva.

A mi esposo Toni, por compartir el significado del sacrificio mutuo.

Al Dr. Pablo Flores, por la invitación a trabajar en este proyecto de particular belleza lo que fue un estímulo para decidirme a emprenderlo, implicando seguir un camino esforzado pero de mucha retribución, durante el cual he podido crecer y madurar a todos los niveles, ya que entraron en juego el compromiso, la voluntad de hacerlo y una constante comunicación fluida en la que pude contar permanentemente con su invaluable ayuda.

Al Dr. Rafael Ramírez, por su trabajo de supervisión y por poner a disposición su experiencia mediante sus meritorios aportes.

A mis compañeros y a todo el equipo de profesores por sus valiosas enseñanzas.

Página

Contenido

INDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO 1. ASPECTOS PRELIMINARES.	3
1.1. Presentación del problema	3
1.2. Justificación	3
1.3. Definición del problema	4
1.4. Marco de investigación	5
CAPITULO 2. MARCO TEORICO	7
2.1. Conceptos matemáticos: la magnitud volumen	7
Descomposición de áreas en el plano	11
Imposibilidad de descomponer pirámides	12
Forma de calcular el volumen de la pirámide.	14
Papel de las fórmulas	14
2.2. Aspectos didácticos	17
2.2.1. Aprendizaje del volumen	17
2.2.2. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje del volumen	18
2.2.3.Talento matemático	26
CAPITULO 3. METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION	31
3.1. caracterización	31
3.2. Proceso formativo	32
3.3. Elementos de la investigación	35
CAPÍTULO 4. RESULTADOS	46
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES	56
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	61
ANEXOS.	65

INTRODUCCIÓN

Este documento recoge el informe de la investigación realizada como trabajo final para adquirir el título de máster de didáctica de la matemática, realizado en el curso 2013-2014 como finalización de los estudios.

El presente trabajo se ha llevado a cabo en estudiantes con talento matemático, su interés se centra en el dominio del concepto de volumen, sin necesidad de recurrir a las formulas clásicas, diferenciando la magnitud como cualidad, de su medida, la comprensión de esta última está asociada al sentido de medida (Moreno y Gil, 2015).

Por otro lado los juegos didácticos de manejo del espacio tienen repercusión en la parte cognitiva del estudiante, por ello se sugiere que en la enseñanza de la geometría se tenga en cuenta el aspecto lúdico con sus proyecciones en el aprendizaje de la misma. (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987). El material didáctico prepara el camino, para que el alumno desarrolle habilidades y destrezas y las pueda aplicar en la resolución de problemas con flexibilidad y fluidez (Alsina, Burgués y Fortuny, 1988, Flores, 2006). Los puzles utilizados en la propuesta de enseñanza son "pirámide rellena de pirámides" descritos en Flores, (2006) y el "puzle del tetraedro" conformado por un tetraedro regular y cuatro pirámides trirectángulas que lo complementan para componer el cubo".

La función instructiva del material manipulativo incluye uno de los objetivos que establecen los estándares del NCTM (2001), ya que capacitan al estudiante para investigar las particularidades y propiedades de los poliedros, dándole la facultad de argumentar y justificar sus razonamientos matemáticos sobre las relaciones geométricas, existentes entre los mismos.

En el primer capítulo abordamos la presentación, justificación y definición del problema y el marco de investigación.

En el segundo capítulo describimos las componentes del marco teórico desglosadas en dos dimensiones. En la primera se describen las bases teóricas matemáticas sobre cómo se define matemáticamente el volumen, qué es y cómo se mide y en la dimensión didáctica se incluye recomendaciones para el aprendizaje del volumen. Uno de los aspectos a tomar en cuenta es incorporar un proceso de comparación de los volúmenes de diferentes pirámides entre si y de estas en su relación con el cubo.

Tratamos aspectos relacionados con la proporcionalidad para comparar el volumen de dos pirámides identificando las magnitudes empleadas para medirlo, como por ejemplo, identificar cuándo se calcula el volumen a partir de bases y alturas (Grupo Beta, 1990).

En la dimensión didáctica caracterizamos al estudiante con talento matemático, describimos su proceso de aprendizaje y explicamos la fase de intervención con los mismos. Finalmente hemos incluido investigaciones relativas al aprendizaje y enseñanza del volumen.

En el capítulo tres correspondiente a la metodología, se define y caracteriza la investigación, se describe el proceso formativo llevado a cabo con los estudiantes, establecemos entre otros aspectos las variables, para el análisis e interpretación de los datos de acuerdo a lo que se pretendía comprobar.

En el capítulo cuatro correspondiente a los resultados se organizó la información procedente de las acciones sucedidas en clase y las respuestas escritas al formulario, lo cual fue propicio para hacer apreciaciones generales y particulares conducentes a la obtención de los resultados.

En el capítulo cinco presentamos las conclusiones a las que hemos llegado con el presente estudio en relación a los objetivos propuestos

CAPITULO 1.

ASPECTOS PRELIMINARES

Sabemos que es relevante abordar la enseñanza del volumen y la resolución de problemas del mismo, introduciendo ante todo procesos de comparación de volúmenes entre poliedros, que ayuden a profundizar en la adquisición del concepto, para ello nos hemos valido entre otras cosas de material manipulativo mediante el cual los estudiantes pueden establecer relaciones de orden y obtener reglas a partir de la generalización de regularidades.

1.1. Presentación del problema.

El proceso de calcular el volumen del tetraedro no es fácil porque habitualmente para calcular la altura se hace uso de fórmulas, que en este caso implicarían aplicar el teorema del baricentro y el teorema de Pitágoras. Para llegar a determinar volúmenes se necesita primero captar la magnitud volumen antes de pasar al cálculo. Mediante una actividad de enriquecimiento curricular se pretende ver en concreto hasta qué punto los alumnos con talento matemático son capaces de obtener el volumen de un tetraedro sin el requerimiento de fórmulas o con un empleo mínimo de estas. Para desarrollar este proceso nos centramos en dos aspectos: el primero calcular el volumen del tetraedro por comparaciones entre pirámides y el segundo realizar un estudio comparativo de las mismas al interior del cubo para concretar la relación de proporción entre estas. Todo ello facilitará los cálculos para comparar el volumen del tetraedro con el del cubo en el que está incluido.

1.2. Justificación.

Queremos mostrar la dificultad de justificar las formulas del cálculo del volumen del tetraedro, para ello nos hemos centrado en proporcionar al estudiante apreciaciones de cómo obtener el volumen del tetraedro a través de procesos de comparación y rellenado de pirámides., rompiendo el socorrido recurso de utilizar fórmulas, sin antes haberlas comprendido; haciendo antes un discernimiento de las mismas, empleando para ello material manipulable, graficando las apreciaciones en el plano, para finalmente obtener reglas a partir de una generalización.

Es frecuente en los procesos de enseñanza-aprendizaje del volumen introducir de manera inmediata la medida indirecta, generalmente realizada a partir de la medida de longitudes. No es extraño que esto pueda inducir a error en el estudiante, ya que el solo uso de fórmulas no garantiza el dominio de un concepto. La comparación entre poliedros permite que el estudiante pueda distinguir la magnitud volumen de otras magnitudes como las áreas y las longitudes.

La dificultad para pasar a calcular directamente volúmenes de pirámides se centra en que la mayoría de las pirámides no rellenan el espacio, ni aceptan un relleno a partir de figuras cúbicas. La pirámide no se puede rellenar con cubos, pero si se puede comprobar que algunas pirámides se convierten en una parte del cubo, así que se puede hallar el volumen de estas pirámides particulares cuando se conoce a qué parte del volumen del cubo corresponden. Aplicando que "dos pirámides de igual superficie de la base e igual longitud de la altura tienen el mismo volumen, se logra descomponer el volumen del cubo en la suma del volumen de tres tetraedros, precisando las relaciones de volumen 1:3 entre el tetraedro y el cubo, propiedad que se maneja desde los elementos de Euclides, pero que requiere para su justificación el Principio de Cavalieri. Llegando a apreciar que el cubo se puede descomponer en un tetraedro y cuatro pirámides que juntas forman una pirámide cuadrada de igual arista que el tetraedro regular, se precisa la relación 1:2 entre el volumen del tetraedro y la pirámide cuadrada, a partir de estas proporciones y otras relaciones el estudiante estará en capacidad de hallar el volumen del tetraedro mediante un proceso razonado, es así como queda justificada la fórmula para hallar su volumen.

Este proceso de descomposición para obtener el volumen de la pirámide no es sencillo, pero pensamos que los alumnos con talento matemático pueden seguirlo, cuidando de no utilizar la fórmula de cálculo indirecto del volumen de la pirámide en relación a la longitud de las aristas, en ningún paso del proceso.

Pretendemos observar cómo evolucionan los estudiantes a través de este proceso, a medida que van desarrollando las tareas planteadas en una sesión de enriquecimiento curricular. El objetivo de estas sesiones es profundizar en los contenidos, afrontando nuevos problemas no tratados en clase. Se imparte a los alumnos con talento matemático del proyecto "Estalmat Andalucía Oriental" programa en el que se ha diseñado y aplicado la experiencia que se relata en este informe.

1.3. Definición del problema

Hay numerosas investigaciones que muestran el comportamiento de niños con talento matemático, especialmente respecto a tareas aritméticas o algebraicas (Ramírez, 2012). El rendimiento geométrico está menos estudiado, llegando incluso a considerar que las destrezas visuales no son especialmente destacadas en niños considerados con talento matemático. Examinar cómo se comportan estos alumnos ante situaciones geométricas, o de medida de magnitudes geométricas, es un reto que llevan a cabo determinados profesores, como Ramírez (2012), y ha dado lugar a otros trabajos fin de máster realizados en este programa (Osorio, 2009, Salto, 2013). En todos ellos se está estudiando cualidades visuales y geométricas de niños con talento matemático.

En línea con estos trabajos, la investigación presente se ha centrado en estudiar el razonamiento que hacen 23 estudiantes con talento matemático entre 14 y 16 años, para determinar el volumen del tetraedro regular T y la pirámide cuadrada P de igual arista y de caras triángulos equiláteros[1], estableciendo relaciones de volúmenes entre estos.

1.4. Marco de Investigación.

Este problema se concreta en los siguientes objetivos de investigación:

Objetivo general: Comprender el razonamiento que hacen estudiantes con talento matemático, para obtener el volumen del tetraedro, mediante procesos de comparación y de rellenado de pirámides, sin emplear fórmulas, durante una sesión de enriquecimiento curricular.

Objetivos específicos:

O1. Obtener el volumen del tetraedro regular mediante comparaciones de volúmenes.

O1.1. Relacionar volúmenes por comparación directa de poliedros de madera, a partir de la composición y descomposición de pirámides.

O1.2. Precisar el volumen del tetraedro regular, continuando los procesos de comparación a partir del estudio de la relación existente de volúmenes de diversas pirámides al interior del cubo y/o en relación con este.

[1] En lo que sigue, cuando hablemos de pirámides cuadradas (P) y tetraedros (T), siempre nos referimos a la pirámide recta y al tetraedro, formados por triángulos equiláteros.

O1.3. Combinar el enriquecimiento curricular con fijar su atención en aspectos de razonamiento matemático, en este caso hacer un uso discriminado de fórmulas para hallar el volumen del tetraedro.

O1.4. Implementar dicha sesión, siguiendo la secuencia de tareas encaminadas a no emplear fórmulas y examinar qué aspectos de los programados han sido posibles poner en práctica.

O2.Analizar el proceso llevado a cabo por los estudiantes, examinando como lo han comprendido y como lo expresan en sus respuestas a las tareas propuestas

O2.1.Identificar los pasos que han sido más seguidos por los estudiantes.

O2.2.Estudiar respuestas que no estaban previstas, por ser originales y/o creativa

CAPITULO 2

MARCO TEORICO

En este capítulo se clarifican las componentes teóricas y didácticas que definen el problema. En la dimensión didáctica entre otros aspectos presentamos algunas investigaciones que han trabajado el problema del aprendizaje y enseñanza del volumen, en ellas los diferentes autores nos dan a conocer los resultados obtenidos, los cuales serán de utilidad para incorporarlos a la mejora de la práctica docente e investigativa. Algunas de las investigaciones abordadas dan pautas sobre cómo abordar la fase de intervención de estos alumnos, haciendo hincapié sobre la relevancia de incorporar las sesiones de enriquecimiento curricular como componente potenciador de las altas capacidades.

2.1. Conceptos matemáticos: la magnitud volumen

La definición intuitiva de volumen hace referencia a que este es la cualidad que tienen todos los cuerpos de ocupar espacio (Olmo, Moreno y Gil, 1989). La construcción matemática formal del concepto de volumen se hace delimitando los objetos a los que se aplica y determinando sus propiedades.

El volumen es una cualidad de los sólidos, líquidos y gases, pero para su estudio matemático conviene identificar unos objetos tridimensionales que se presten a manejo. Para ello identificaremos los objetos como cuerpos sólidos que reclaman un espacio a los cuales se les puede medir su volumen. A efectos de construcción matemática elemental, recurrimos a objetos sólidos determinados por caras planas, poliedros.

Para determinar cantidades de volumen recurrimos a establecer criterios de equivalencia de la cualidad volumen. Comenzamos por definir poliedros congruentes.

Dos poliedros son congruentes, si sus caras, la forma y número de cada una estas, los ángulos diedros comprendidos entre ellas son respectivamente iguales. (Olmo, Moreno y Gil, 1989). La definición de equivalencia incluye las transformaciones de romper y rehacer, empleándolas se puede transformar un poliedro en otro que sea equicompuesto con el primero. Dos poliedros de diferente forma son equicompuestos si al descomponer uno de ellos en piezas y arreglarlas de distinta manera se obtiene el segundo (Guillén, 1991).

Un poliedro es más voluminoso que otro si existe una descomposición del primero que permita construir el segundo, quedando piezas que no se han utilizado en esta composición. Esta relación permite ordenar las cantidades de volumen. (Olmo, Moreno y Gil, 1989).

La suma en el conjunto de cantidades de volumen es una *operación cerrada*, es decir, dadas dos cantidades de volumen, representadas por dos poliedros, se forma otro, que representa la cantidad de volumen resultante de la suma de las anteriores.

Unicidad: Dados dos cantidades de volumen, representados por dos poliedros, la cantidad de volumen que resulta al descomponer los poliedros sumandos es única, cualquiera que sea la descomposición y composición de las formas que se haga. Por ejemplo la unión de dos romboedros, disponiéndolos adecuadamente da lugar a otro paralelepípedo

Asociativa: dados tres poliedros A, B y C, los cambios que se hacen en la manera de agrupar los sumandos no altera la cantidad de volumen resultante de su suma, pues está se conserva. El alterar el orden de los poliedros sumandos altera la forma del poliedro resultante, más no la cantidad de volumen obtenida.

Si el orden de A, B y C no se altera la forma del poliedro resultante también se conserva. Simbólicamente: $A + (B + C) = (A + B) + C$

Conmutativa: dados dos poliedros de volúmenes A y B respectivamente la suma consiste en la reunión de las partes que los componen, por lo que el orden no afecta al resultado de la cantidad, dado que esta se conserva. Simbólicamente: $A + B = B + A$. En este caso el volumen de la suma seria el volumen de la figura que resulta de unir los poliedros A y B.

El poliedro hacha, se compone de dos P y dos T (Flores, 2006) dispuestos como se observa en el gráfico. El poliedro de la derecha representa al romboedro. Estos poliedros están compuestos por las mismas figuras, dispuestas de diferente manera (figura 1).

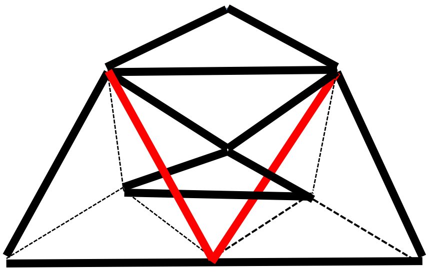
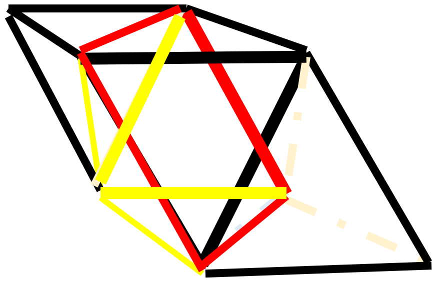
	
Poliedro Hacha	*Romboedro*

Figura 1. *Comprobación conmutativa de la suma*

Elemento neutro:

Dado el paralelepípedo de volumen A existe un poliedro N de volumen cero denominado poliedro nulo, tal que al realizar la suma de estos dos poliedros el volumen de A no se altera. Simbólicamente: $A + N = N + A = A$

El poliedro nulo N sumado con el volumen de un cuerpo tridimensional da como resultado el volumen del cuerpo original.

En la suma de volúmenes no existe el elemento simétrico dado que no se puede encontrar un cuerpo de volumen P que sumado con otro de volumen P´ de cómo resultado el poliedro nulo N. En efecto, la magnitud volumen es escalar, y por tanto, no admite elemento simétrico respecto a la suma. Con estas propiedades, podemos decir que el conjunto de las cantidades de volumen representadas por poliedros, es un semigrupo conmutativo respecto a la suma.

Multiplicación por un elemento externo.

Dadas 3 cantidades de volumen J, T y P; podemos multiplicar J por un número *d* cualquiera (racional), descomponiendo *d* poliedros que representan a J y componiéndolos de manera que se forme un poliedro que contenga todas las piezas obtenidas, indicando que la cantidad de volumen resultante es T, con la condición de que se cumpla que: $d \bullet J = T$.

Observación: la pirámide J[2] es la pirámide trirectángula de la esquina de un cubo (figura 6.2) ver su caracterización en la página 8 en el apartado: imposibilidad de descomponer pirámides.

La multiplicación de cantidades de volumen por un elemento externo cumple las propiedades distributivas respecto al escalar y a la cantidad de volumen:

Simbólicamente: $d \bullet (T + P) = d \bullet T + d \bullet P$ $\quad (c + d) \bullet J = c \bullet J + d \bullet J$

Un ejemplo de la propiedad distributiva respecto al escalar se consigue al sustituir los escalares c=2 y d=4 de este modo se obtiene 2J=T (figura 3) en volumen más no son equicompuestas y 4J=P (figura 2)

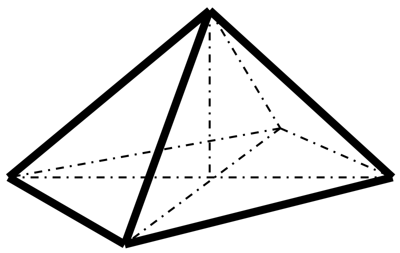
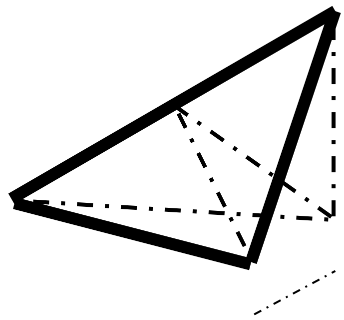
	

Figura 2. *Pirámide cuadrada P formada por 4 pirámides J*	Figura 3. *Dos pirámides J unidas de igual base y altura que el tetraedro T*

El semigrupo abeliano de las clases de volumen, con la operación externa y las propiedades distributivas descritas, forma un semimódulo conmutativo.

La medida del volumen es el resultado de medir una cantidad de volumen, que se obtiene al compararla con otra cantidad de volumen, que se toma como unidad de referencia. Hay dos tipos de medida del volumen a saber la medida directa y la medida indirecta.

La medida directa se obtiene por comparación entre una cantidad a medir con la unidad de medida, para determinar cuántas veces esta unidad de medida cabe en la cantidad que se va a medir. Una característica principal de la medida directa es que se emplean volúmenes para medir volúmenes.

[2] En adelante para referirnos al triedro trirectángulo lo nombraremos indistintamente como el poliedro J o Ttr

En el caso del volumen, se suele elegir un paralelepípedo en forma de cubo, para representar la cantidad de volumen unidad. Dentro del Sistema Métrico Decimal, se toma como unidad el metro cúbico, concebido como un cubo (que rellena el espacio), de un metro de lado. En general la unidad de medida del volumen es la unidad cubica.

El proceso de medida directa es poco usual en la medición de volúmenes, principalmente por la dificultad de rellenar el cuerpo al que se quiere medir su volumen, con las unidades correspondientes. Por ello usualmente se hace con volúmenes pequeños, empleando unidades de medida convencionales, determinando qué cantidad de estas unidades caben en dicho volumen.

La medida indirecta es el cálculo de una cantidad empleando para ello otras magnitudes diferentes, pero con las que guarda una relación matemática determinada de antemano. Por ejemplo el volumen de un poliedro se mide habitualmente en términos de longitudes y superficies. Las superficies también se calculan de manera indirecta a partir de las longitudes de sus elementos (aristas, alturas, apotemas, etc.), finalmente los volúmenes se obtienen mediante multiplicación de longitudes y áreas o simplemente de longitudes.

Descomposición de áreas en el plano

La medida directa de superficies es fácil de hacer en polígonos que se transforman en rectángulos. Esta descomposición y recomposición de áreas en el plano siempre es posible. En el plano cualquier polígono se descompone en triángulos, el triángulo se obtiene como la mitad del paralelogramo, y por tanto el área del paralelogramo se calcula a partir del área del triángulo. El paralelogramo más sencillo es el rectángulo. La base de todo está en calcular el área del rectángulo y a través de esta hallar la del paralelogramo y posteriormente la del triángulo, de esta manera se puede hallar el área de cualquier polígono (Segovia, Flores y Castro, 1996).

La descomposición de volúmenes en el espacio no siempre es posible. González-López, y Flores, (2001) señalan que sólo algunos cuerpos se pueden descomponer para generar otros. La descomposición de un paralelepípedo, da lugar a un ortoedro, al cortarlo por planos perpendiculares a su base y disponiendo adecuadamente las piezas obtenidas mediante los cortes. Si los cuerpos tienen la misma altura sus bases son equicompuestas (figura 4). Los autores también nos muestran que un prisma recto se puede descomponer en un ortoedro, siendo los dos equicompuestos. En la figura 5 se aprecia la descomposición del prisma recto en un paralelepípedo y como se mencionó antes este se puede descomponer en un ortoedro. Las piezas azules corresponden al juego "Arquimat" – El Juego de las Matemáticas y la Construcción. (García, s.f).

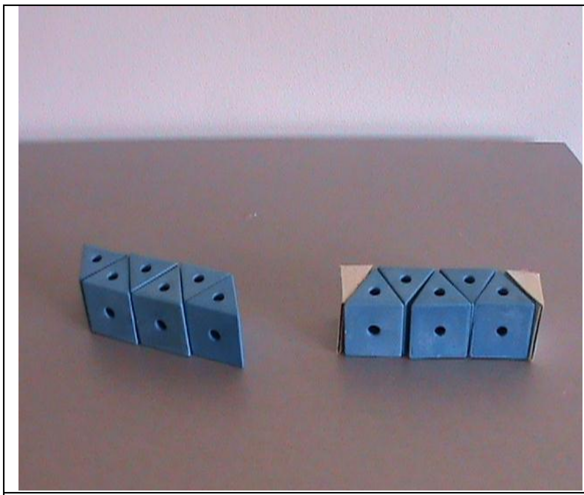


Fig.4. *Descomposición de un paralelepípedo en un ortoedro*

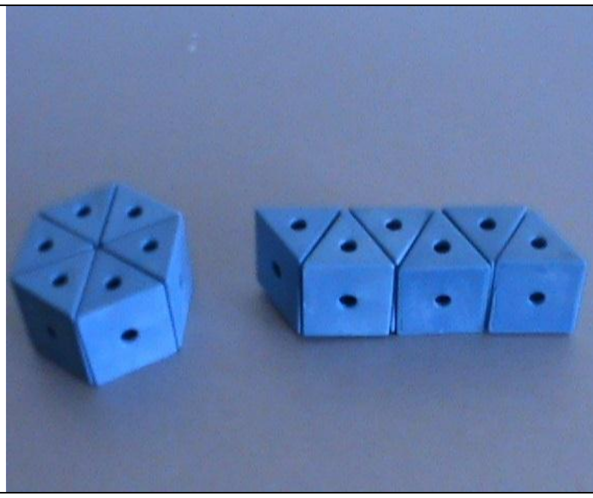


Fig.5. *Descomposición de un prisma recto en un paralelepípedo*

Imposibilidad de descomponer las pirámides

En general las pirámides no se pueden descomponer, No podemos descomponer una pirámide oblicua para formar una pirámide recta. Por tanto la descomposición de volúmenes de pirámides en el espacio no siempre se puede hacer.

Solo se descomponen algunas pirámides particulares veamos algunos casos:

La pirámide trirectángula (Ttr) de la esquina de un cubo (figura 6.2), posee 3 caras iguales formadas por triángulos rectángulos isósceles, de altura igual a la del cubo y una cara que es un triángulo equilátero. El cubo se completa con 4 pirámides trirectángulas y un tetraedro de arista la diagonal de la cara del cubo (figura 6.1). El Ttr se puede descomponer mediante un proceso de "truncamientos reiterados"; al truncarla por los puntos medios de las aristas perpendiculares se obtienen 3 pirámides trirectángulas semejantes y un cubo truncado, el cual se completa con una de ellas.

Mediante un proceso de descomposiciones reiteradas de las pirámides trirectángulas se obtiene que la suma de los cubos resultantes de las sucesivas divisiones sea 1/6 del cubo original, como se describe en Flores, Ramírez y Rodríguez, (2014)

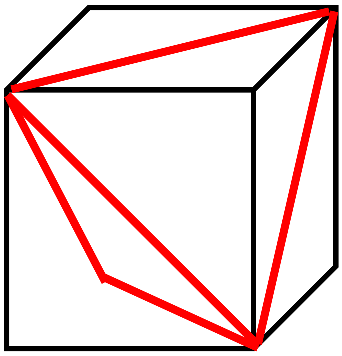


Fig.6.1. *Tetraedro dentro del cubo*

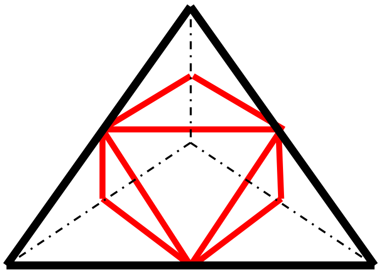


Fig.6.2 *Triedro trirectángulo*

González-López y Flores, (2001) indican que se puede hacer un estudio de pirámides en el interior del cubo, este se puede descomponer inicialmente en dos prismas triangulares cada uno igual en volumen a un semicubo. El prisma triangular se compone de dos caras cuadradas, dos caras que son triángulos rectángulos isósceles y una cara rectangular de base el lado del cuadrado y altura la hipotenusa del triángulo rectángulo isósceles (figura 7). El prisma triangular a su vez se descompone en las pirámides asimétricas cuadrada y triangular. (Figura 8). Las dos pirámides guardan entre si la relación 2:1 respectivamente, estos resultados prueban que la pirámide triangular es la tercera parte del semicubo y por tanto una sexta parte del cubo.

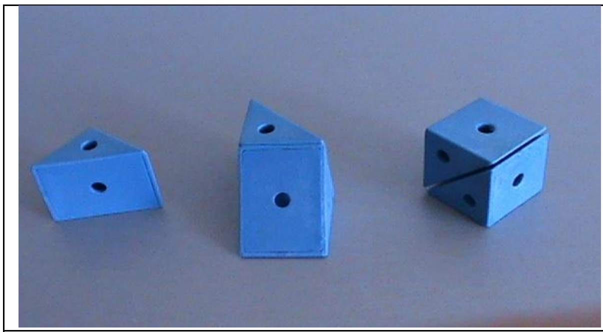


Fig. 7. *Dos prismas triangulares componen el cubo*

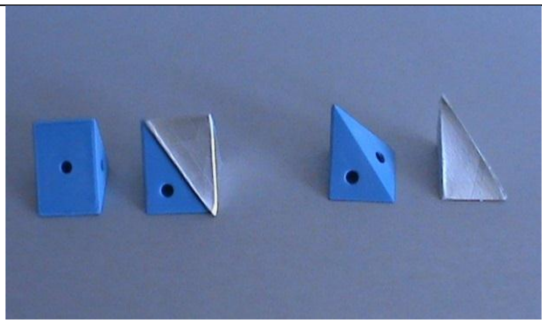


Fig. 8. *El prisma triangular se descompone en dos pirámides asimétricas cuadrada y triangular.*

La construcción de poliedros semejantes de lados más grandes, permite hacer una comparación cuantitativa de la cantidad de piezas a utilizar, para poder establecer si los volúmenes en comparación son iguales o diferentes. Al truncar la pirámide triangular asimétrica de lado doble por los puntos medios de las aristas se obtienen dos prismas triangulares y dos pirámides triangulares semejantes a la original de altura la mitad (figura 9). El semicubo de lados dobles se conforma de 4 cubos unidad que equivalen a 12 pirámides cuadradas asimétricas unidad. Las dos terceras partes corresponden al volumen de la pirámide cuadrangular de lado dos que serían 8 pirámides cuadradas unidad. El prisma triangular doble es equicompuesto con el semicubo de lado doble, con lo cual las 4 pirámides restantes corresponden a la pirámide triangular, por tanto la pirámide cuadrada es el doble de la triangular. El prisma triangular doble es equivalente en volumen al medio cubo de lado dos.

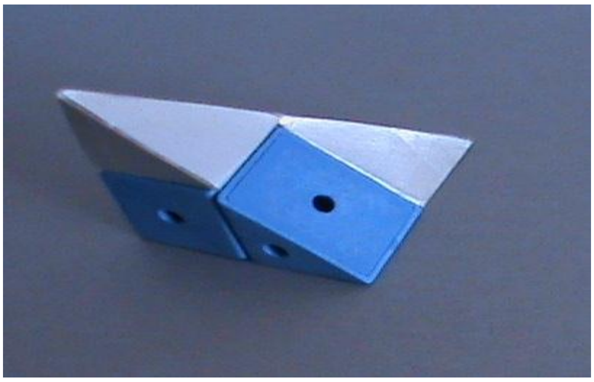


Fig. 9. *Pirámide triangular doble.*

Forma de calcular el volumen de la pirámide.

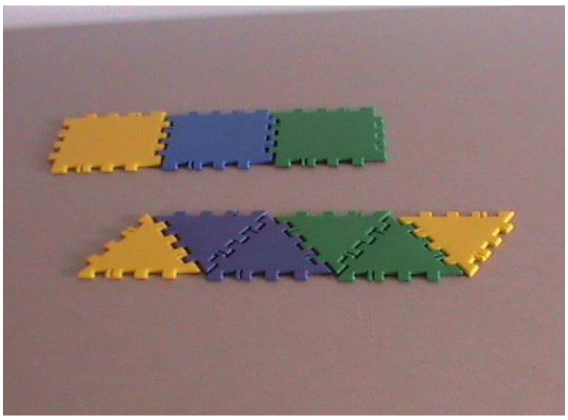
Debido a que en su mayoría las pirámides no se descomponen y por tanto no se puede hallar su volumen por descomposición (Gonzales-López y Flores, 2001), se debe hacer uso de otros procedimientos como el Principio de Cavalieri del que provienen preferentemente las formulas, el cual es aplicable a todas las pirámides, tanto las que se descomponen como las que no. La unidad de medida utilizada es la cúbica, la cual no presenta inconvenientes. Para las pirámides como el tetraedro regular se puede obtener fórmulas que no proceden del principio de Cavalieri.

Papel de las fórmulas

Segovia, Castro y Flores, (1996) resaltan la importancia que debe tener para el alumno distinguir el significado real del uso de las fórmulas, identificando cuándo y cómo debe hacer empleo de ellas. La Medida antes se estudiaba dentro de los contenidos de aritmética y geometría, desde hace un tiempo el NCTM (1991), manifiesta que es un tema que se trabaja en los currículos de manera independiente, propone que se debe dar mayor relevancia a las estrategias y al desarrollo de los conceptos y relaciones que están ligados a las magnitudes y a su medida, como son la estimación y la realización de mediciones para resolver problemas y dar menos énfasis a la memorización, a la manipulación de fórmulas y a la conversión entre sistemas de medida.

El proporcionar al alumno una percepción del sentido de las fórmulas, acompañadas de otras actividades que proporcionen un aprendizaje significativo de los conceptos involucrados en la medida de superficies y volúmenes, es relevante para que el estudiante entienda paulatinamente que puede vincular objetos físicos tridimensionales con las fórmulas como una expresión matemática resumida, que expresa lo que está viviendo en el proceso. El uso indiscriminado de fórmulas indican que uno de los errores más frecuentes es la confusión por parte del alumno entre perímetro y área, (Olmo y otros, 1989). Cuando calculan los dos a la vez por lo general asignan el número mayor al área. El cálculo de volúmenes mediante la medida indirecta se hace a partir de longitudes y áreas, las cuales también se calculan a través de longitudes, con lo cual el volumen finalmente se mide a través de longitudes, lo cual oscurece la reiteración de las respectivas unidades de medida que debería hacerse como una fase previa a la aritmetización (Segovia, Castro y Flores, 1996).

En el cálculo de áreas de polígonos, el rectángulo es una figura crucial ya que a partir de este se generan una serie de relaciones, mediante la descomposición se observa que el rectángulo y el paralelogramo son equicompuestos por tanto tienen la misma área y fórmula(figura 10).



El área de un triángulo es la mitad del área del paralelogramo de igual base y altura. Un paralelogramo se puede descomponer en un rectángulo, entonces el rectángulo transformado tendrá la misma base y altura que el paralelogramo dado (figura 10)

Figura 10. *Descomposición de un paralelogramo en un rectángulo.*

Los autores (Segovia et al., 1996) señalan que habitualmente se hace uso de enunciados de fórmulas con un lenguaje de supresión, con lo cual se da por supuesta la unidad de medida, por ello es obviada. Por tanto resaltan que la unidad de medida de las superficies, en este caso es un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal, hace que el número de cuadrados que caben en un rectángulo sea igual al producto del número de veces que cabe la unidad lineal en la base por el número de veces que cabe esta unidad lineal en la altura.

Al examinar la fórmula para hallar el área del rectángulo se presentan dos casos:

Cuando se utilizan cantidades de longitud de medida entera. El área del rectángulo es axb. Si utilizamos unidades de medida cuadradas, b indica el número de cuadrados unidad que caben en el lado b y a significa el número de cuadrados unidad que caben en el lado a. El área del cuadrado es longitud de a por longitud de b.

Cuando se presentan cantidades de longitud de medida racional: aparecen fracciones de unidad, por lo cual se hace el cambio a una unidad cuadrada menor. La unidad de medida tradicional es la cuadrada y se obtienen fórmulas cuadradas.

Para medir el volumen se toma como unidad de medida el cubo unidad. El volumen del paralelepípedo es $a \times b \times c$., lo cual significa que el número de cubos unidad que caben dentro del paralelepípedo es $a \times b \times c$, dado que hay una banda que tiene a**x**b cubos y hay c bandas como esta.

Si bien el cálculo de volúmenes de pirámides por comparación no es fácil (González, López y Flores, 2001) se puede afrontar en casos particulares, como los que presentamos en este trabajo, es decir, para el tetraedro regular y la pirámide cuadrada de igual arista y de caras triángulos equiláteros. Esta comparación dará lugar a realizar un proceso de medida directa, aunque no hagamos uso de la unidad de volumen, sino que la estudiamos respecto a un cuerpo del que es fácil medir directamente su volumen, como es el cubo. La comparación permite obtener coeficientes con los que calcular unos volúmenes a partir de otros, lo cual permite establecer relaciones de orden entre los mismos, evitando aplicar teoremas para determinar longitudes, con lo que la fórmula del volumen del tetraedro aparece mucho más justificada.

Para que el alumno pueda entender el concepto de volumen es conveniente que comience por realizar la manipulación de cuerpos tridimensionales físicos, luego plasme sus apreciaciones a través de figuras planas, como el dibujo en perspectiva de los poliedros o de su cara base, para finalmente pasar a la generalización de reglas con las cuales obtener el volumen buscado. Por otro lado, para que el estudiante pueda pasar de una representación tridimensional a una representación plana es necesario que tenga claro las características y propiedades de los objetos tridimensionales.

2.2. Aspectos didácticos:

A continuación se describen algunas recomendaciones para el aprendizaje y la enseñanza del volumen. Estableciendo comparaciones entre poliedros para medirlos.

2.2.1. Aprendizaje del volumen

Del Olmo, Moreno y Gil, (1989) plantean una propuesta didáctica para la enseñanza del volumen con tres fases: percepción, comparación y la fase de la medida que incluye: unidad de medida, medición directa, medición indirecta, aritmetización, estimación. En la medida de lo posible, sugieren que se haga un planteamiento lúdico para abordar el tema de la medida.

Los autores señalan que para percibir el volumen se deben elaborar representaciones mentales del objeto a partir de la información que disciernen los sentidos, principalmente la vista y el tacto.

En el proceso de aprendizaje para que el estudiante perciba y reconozca la magnitud volumen, se hace necesario promover procesos de visualización, de manipulación de figuras, a través de las cuales pueda hacer un reconocimiento intuitivo. Olmo, Moreno y Gil, (1989) proponen que se hagan composiciones, desarrollos planos y se elabore las figuras que se van a medir (e incluso inventarlas), actividades táctiles, de llenado, de empaquetado, de teselación del espacio, estas actividades permiten distinguir el volumen de otras cualidades y facilitan al estudiante el establecimiento de vínculos entre los cuerpos físicos que está estudiando.

En este tratamiento del volumen como cualidad el alumno podrá identificar y manejar los diferentes elementos de los poliedros como las formas de las bases, de las diferentes caras, la posición y medida de las alturas; para pasar luego a comparar los cuerpos y establecer medidas. Se hace preciso desarrollar actividades grupales, puestas en común, situaciones relacionadas con la cotidianidad.

Los investigadores, mencionan que las primeras comparaciones de objetos respecto de la cualidad volumen, pueden limitarse a los términos “más que”, “menos que”, para establecer relaciones de orden, mientras que se utiliza el término “tanto como”, para encaminar al estudiante hacia la noción de igualdad respecto de esa cualidad y, por tanto, de cantidad de volumen.

2.2.2. Investigaciones sobre aprendizaje y enseñanza del volumen

Olmo Moreno y Gil, (1989) mencionan estudios de varios autores expertos en el manejo del volumen, en los que el común denominador son aspectos como el estudio de la conservación del volumen, plantean que la implementación de este concepto debe hacerse a una edad temprana en las escuelas. A continuación desarrollamos algunas ideas mencionando los aspectos más importantes a los que se refieren cada uno de ellos.

Los trabajos más tempranos en el estudio del volumen se deben a la escuela de Ginebra, y los aportes de Piaget y colaboradores. Estos primeros estudios se centran en analizar cuándo se capta la conservación de volumen, al producir transformaciones en los cuerpos. Los trabajos les hacen recomendar practicar en las escuelas actividades de conservación del líquido desalojado entre otros. Los estudios posteriores de Carpenter reconocen que el concepto de conservación de volumen interno se desarrolla gradualmente en el estudiante. Otros estudios de Piaget estudian la distinción entre volumen y peso. Sugiere que se comparen las cualidades relativas al peso y volumen de los mismos objetos, pidiendo que los alumnos utilicen el adjetivo “pesado”, si hace referencia a la cantidad de peso, lo que se estimula haciendo preguntas como ¿poseen la misma cantidad?, mientras que si se alude al volumen, preguntar si ocupan el mismo espacio.

Freudenthal aclara que la cantidad de una magnitud solo puede compararse entre especímenes de la misma materia, y sugiere que se promueva que los estudiantes busquen la transformación que hace que se conserve la cualidad.

Olmo, Moreno y Gil (1989) aluden sobre la importancia de trabajar el concepto de volumen con objetos físicos tridimensionales abordando las etapas previas a la aritmetización del mismo, para que cuando llegue el momento de emplear las fórmulas el estudiante lo haga de manera razonada, entendiendo el porqué de su uso.

Tras esas ideas generales sobre el aprendizaje del volumen, hemos buscado investigaciones más recientes que se basan en una caracterización del concepto de volumen de acuerdo a sus propiedades y aspectos particulares. Lo interesante es que hay distintas formas de concebir el volumen.

Piaget, Inhelder y Szeminska dan tres significados de volumen: interno, ocupado, desplazado a saber:

-volumen interno; lo describen de dos maneras “aquello que está limitado por superficies” y como “la cantidad de unidades de material que forman un cuerpo”.

-volumen ocupado: espacio ocupado que ya no puede ser utilizado por otro objeto.

-volumen desplazado, corresponde a la cantidad de agua desplazada al introducir un objeto en ese líquido. (Sáiz, 2005).

Estos autores piensan que el volumen interno (material del que está hecho el objeto) coincide con el volumen ocupado. Referenciando a Sáiz, (2005) la investigadora aclara que la mencionada igualdad se cumple en solidos mas no en objetos que son huecos y cerrados, ya que estos tienen volumen encerrado. Es decir si se tiene dos objetos hechos con el mismo molde y de distinto material uno sólido y otro hueco, el primero no tiene volumen encerrado, entendido este como el espacio libre que está limitado por el material de la superficie con que está hecho el objeto.

Sáiz, (2005) menciona que Vergnaud realizó un estudio sistemático del volumen, contemplando las facetas unidimensional y bidimensional. En nuestro caso particular del volumen, en el aspecto unidimensional se emplean unidades de volumen para medir volúmenes, es decir se emplean unidades de la misma naturaleza, para establecer la comparación entre dos cuerpos tridimensionales, por tanto trata al volumen en su particularidad aislándolo de otras magnitudes. En el aspecto bidimensional se examina como varía el volumen respecto a la superficie y la longitud, es decir se hacen comparaciones entre cuerpos físicos, empleando unidades de magnitudes distintas respecto a la magnitud que se está midiendo, en este caso se mide el volumen a través de una primera dimensión que podría ser el área, multiplicada por una segunda dimensión que sería la altura. La faceta bidimensional a la que se refiere Vergnaud complica las relaciones de proporcionalidad entre los cuerpos, lo que hace que sea un concepto valioso pero a la vez difícil de captar por el estudiante. (Saiz, 2003).

Potari y Spiliotopoulou, (1996) han realizado sus estudios con niños y adolescentes. Las autoras griegas consideran relevante integrar la enseñanza de las matemáticas y las ciencias (física, química y biología), para dar sentido a muchos de los conceptos que se estudian en las matemáticas. Es así como manifiestan que la naturaleza de la sustancia juega un papel importante en los acercamientos de los niños al volumen y tiene un efecto positivo en las concepciones que van adquiriendo al analizar las relaciones que guarda el concepto volumen con otras propiedades físicas y geométricas de los cuerpos u "objetos volumen medibles". Por ejemplo integrar el aspecto geométrico que abarca aspectos como la medición, la forma, el tamaño, las dimensiones de los objetos, con otros aspectos, como cuando se emplea el principio de inmersión de Arquimedes, tratado generalmente en fenómenos de física, química, etc.

Los alumnos participantes en este estudio son niños de 11 años, están entre quinto y sexto grado de primaria. Las investigadoras señalan que su estudio cubre y completa otros estudios como los de Piaget e Inhelder, y los de Ricco y Vergnaud.

Las autoras proponen actividades que pueden ayudar a los estudiantes a construir su objeto mental volumen, observando en los niños las diferentes concepciones para aplicar y comparar aspectos del volumen.

Las actividades incluyen seis tareas, que describimos a continuación, en ellas los niños pueden descubrir qué es el volumen, detectando elementos comunes. El concepto de volumen es relacionado con la forma y las propiedades geométricas, con la masa, el peso, la capacidad de contener de un objeto. Las actividades sugeridas son apropiadas para integrar una diversidad de ideas y lograr un concepto reflexivo de volumen.

TAREA 1.

Se les enseña dos copas una vacía y otra con agua, los niños deben comparar los diferentes tipos de volumen (Tabla1) de acuerdo al material, a la forma etc. de los objetos. Al volumen material también se le conoce como volumen interno o contenedor. El volumen geométrico considera a los cuerpos como objetos cerrados, es decir no contempla la abertura y grueso del cristal, estos aspectos se abarcan generalmente en ciencias (física, química etc.).

Tabla 1. *Comparación de los diferentes tipos de volumen con objetos vacíos y llenos.*

Tipo de volumen	Volumen interno	Capacidad	Volumen geométrico
Copa de cristal llena de agua	espacio ocupado por el cristal	volumen del agua	
Copa de cristal	cristal	lo que cabe dentro	cristal

TAREA 2 – TAREA 3 – TAREA 4.

En las tareas 2 y 3 se presenta a los niños una pareja de sólidos elaborados con el mismo molde y diferente material. En la tarea 4 los objetos están hechos con el mismo molde y son de igual material (Tabla 2). Las parejas de objetos de las tareas 2 y 3 difieren en la forma (cilíndrica, cúbica).

Tabla 2. *Parejas de sólidos isomorfos y de diferente material.*

Tarea 2	cilindro sólido de madera	cilindro hueco de plástico
Tarea 3	cubo sólido de madera	cubo hueco de plástico
Tarea 4	vaso plástico con tapa	vaso plástico sin tapa

Los objetos sólidos tienen igual el volumen ocupado, el interno y el geométrico, no ocurre lo mismo con los objetos cerrados huecos, donde el volumen interno es diferente.

En los objetos cerrados y huecos el volumen geométrico es igual al volumen ocupado y el espacio cerrado se forma por la suma de las “capas” de espacio libre que están limitadas por la superficie material de la cual está elaborado el objeto

En el vaso abierto el volumen ocupado es el mismo que el volumen del material, mientras que en el cerrado el volumen ocupado y el geométrico son lo mismo. El caso del vaso abierto es igual que el de la copa de cristal, los dos son objetos huecos abiertos, no se tiene en cuenta el espacio libre dentro de ellos para determinar su volumen ocupado. Por su forma irregular el volumen se puede hallar por inmersión. En la tabla tres se presenta diferentes tipos de objetos con los diferentes tipos de volúmenes correspondientes a cada uno de ellos.

Tabla 3. *Comparación de volúmenes para diferentes objetos*

Tipo de objeto	Volumen ocupado	Volumen interno	Volumen geométrico	Capa-cidad
objetos sólidos de madera: cilindro, cubo	madera	madera	madera	no tiene sentido
objetos cerrados y huecos de plástico: cilindro, cubo, vaso con tapa	plástico más espacio libre interior	plástico	igual al volumen ocupado	
vaso plástico abierto	plástico	plástico	plástico	
vaso plástico cerrado	plástico más espacio libre interior	plástico	igual al volumen ocupado	

El volumen ocupado por el vaso plástico cerrado es mayor que el volumen ocupado por el vaso plástico abierto (caso similar a hallar el volumen de la copa de cristal, los dos son objetos huecos abiertos). La tarea 5 tiene que ver con este aspecto.

TAREA 5

A los niños se les presenta el siguiente dibujo en el que se observan dos cubetas llenas con agua hasta un orificio. Se pide que predigan qué va a suceder si dos cubos hechos del mismo molde y material, uno abierto y el otro cerrado se sumergen en cada una de ellas. El nivel de agua será mayor en el recipiente A, ya que el volumen del cubo de la izquierda contiene un volumen encerrado con lo cual este es mayor que el volumen del cubo que está situado a la derecha que no tiene volumen encerrado (Figura 11).

En las tareas 1 a 4 el medio de desplazamiento es el aire, en la tarea 5 es el agua. El volumen geométrico y el ocupado están relacionados cuando, el medio de desplazamiento ha cambiado.

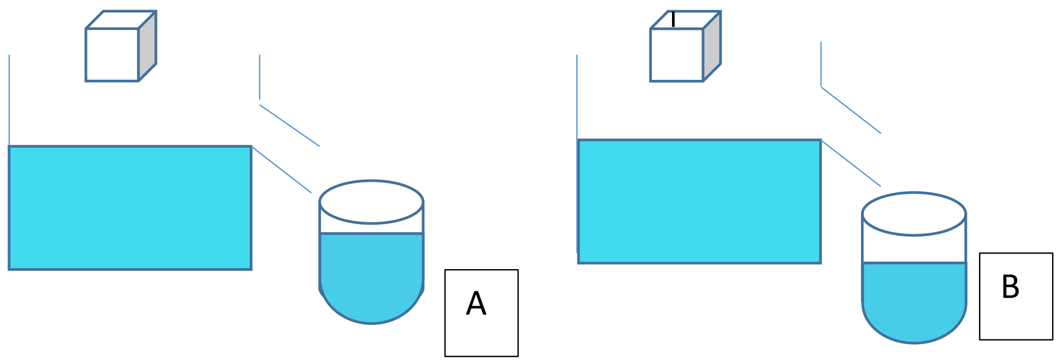


Fig. 11. *Comprobación del nivel de agua desalojado por dos cubos con y sin tapa respectivamente.*

Algunos resultados de la investigación muestran que hay una parte común en las concepciones que tienen los niños acerca del volumen, quienes asocian significados diferentes al término volumen de acuerdo con características físicas de los cuerpos que se les presentan. Al comparar dos objetos idénticos huecos y sólidos respectivamente, piensan que el objeto hueco tiene mayor volumen porque le cabe más en cambio al sólido no le cabe nada, es decir asignan al concepto de volumen el de capacidad; otros dan al término el significado de masa o material con el que está hecho, en ese caso dicen que el mayor es el de madera. Lo mismo ocurre cuando el significado asociado es el peso. Cuando el significado asociado es el de volumen como espacio ocupado dicen que ambos cubos tienen el mismo volumen.

Las investigadoras utilizan procedimientos para comparar volúmenes sin aludir al número, es decir hacen un tratamiento cualitativo, haciendo alusión al carácter geométrico de los cuerpos empleando objetos diversos como, sólidos, cuerpos huecos de plástico, modelos huecos de papel, recipientes abiertos y cerrados, vacíos y llenos. Este tratamiento cualitativo debe prolongarse a juicio de Vergnaud, es muy poco probable que un niño de esa edad logré deducir la fórmula a partir de ciertas exploraciones.

Sáiz, (2007) menciona a Ricco y Vergnaud quienes encuentran dificultades en alumnos de cuarto grado en adelante, para deducir la fórmula del volumen de un paralelepípedo; ya que no se visualiza el volumen midiéndolo con unidades diferentes como el área de la base, o la longitud de su altura.

Vergnaud, afirma que el concepto volumen está formado por diferentes propiedades y relaciones con otros conceptos matemáticos. También está relacionado con conceptos físicos como la naturaleza de la materia y el peso. Esta complejidad explica la diversidad de concepciones expresadas por los niños.

Sáiz, (2002) realizó una investigación sobre concepciones del concepto de volumen de maestros de primaria. El marco teórico se basa en las diferentes concepciones y formas de contemplar el volumen por parte de los sujetos en estudio. La autora recogió los datos mediante un cuestionario. Una de las preguntas demanda la posible relación entre otras cualidades y el volumen, como por ejemplo la masa, el área lateral de un cuerpo etc. La investigación trabaja el concepto de volumen apreciando que tiene por lo menos cinco aspectos que se pueden considerar al identificarlo, a saber el volumen desplazado, o líquido desplazado al sumergir un objeto en él; el volumen ocupado, o lugar que ocupa un cuerpo en el espacio; el volumen interno, o número de unidades de volumen que conforman un cuerpo, el volumen encerrado o espacio limitado por una superficie cerrada (más próximo a la capacidad), y un número, es decir, el volumen como una magnitud que se puede calcular y se identifica mediante su medida.

Saiz, (2003) describe los resultados obtenidos por (Freudenthal, 1983) al aplicar un análisis fenomenológico al concepto, este señala que según su función el volumen, puede ser entendido de diferentes maneras por ejemplo como el espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos, como la cantidad de unidades que forman un cuerpo, como un espacio desplazado al sumergir un objeto en un líquido, como un espacio libre encerrado en una superficie cerrada, como una función de medida, como una integral etc. es decir como objetos medibles. Es necesario organizar los distintos fenómenos que suceden en diferentes contextos y agrupar la totalidad de estos significados para conseguir lo que Freudental denomina "análisis fenomenológico del concepto volumen". Freudenthal afirma que los niños trabajan con "objetos mentales", como el "objeto mental volumen" sin necesidad de haber construido el concepto volumen; considerando al objeto mental como los significados personales que pueda tener un sujeto del tema en mención.

Sáiz, (2005) comenta que para mejorar el nivel en la enseñanza del volumen Freudenthal recomienda realizar un análisis fenomenológico didáctico y que además el autor considera indispensables las siguientes actividades para la formación del objeto mental volumen: hacer muchas transformaciones con objetos, diversos en forma y naturaleza de sustancia (material del que están hechos), como moldear, verter, transformaciones de romper y rehacer, sumergir en líquidos y otras. Aprovechar estas transformaciones para establecer diferencias entre volumen y área, capacidad y volumen, observar la aditividad de este último. Realizar comparaciones; reproduciendo con otras formas; comparando bases, alturas, usando transformaciones que conserven el volumen. Hacer mediciones por exhaución, con transformaciones de romper y rehacer, por relaciones geométricas conocidas, por medio de fórmulas, por inmersión. Construir cuerpos de igual área y volumen diferente. A mayor variedad de actividades realizadas en clase, mejor será el resultado.

Olmo, Moreno y Gil, (1989) recomiendan hacer, entre otros, estimaciones del volumen por ser este un contenido poco abordado, siendo por tanto una carencia a remediar debido a su importancia en el aprendizaje del concepto.

Enochs y Gabel, (1984) encuentran que además de la conservación, otros problemas detectados con el aprendizaje del volumen tienen que ver con la relación entre el volumen y otras magnitudes, como la capacidad y el peso. Estos autores realizan un estudio con futuros maestros de primaria y encuentran que muchos de ellos no distinguen volumen de área o los confunden. (Sáiz, 2007).

Los estudios de Enochs y Gabel, (1984) ponen de manifiesto que el campo de la medición de volúmenes y áreas se desarrolla de forma casi exclusiva en las matemáticas elementales de la escuela primaria. El hecho es que al no profundizar en este campo, en los ciclos educativos de primaria y secundaria los estudiantes presentan deficiencias importantes en cursos posteriores, incluso en los universitarios. Es importante considerar esta realidad a la hora de formar los maestros de primaria, ya que son ellos prioritariamente los que deben tener los conceptos claros y las habilidades necesarias para transmitir a los estudiantes, no sólo nociones, si no bases firmes y amplias en cuanto a la enseñanza del cálculo y medición de volúmenes y áreas.

Los autores recuerdan otros estudios en los que se ha propuesto la enseñanza del volumen antes que el de la longitud, aunque no han llegado a conclusiones suficientemente avaladas sobre los resultados satisfactorios de los estudiantes respecto al manejo del volumen.

El uso de fórmulas para determinar el volumen y el área de superficies parece estar relacionado con el bajo apoyo conceptual del significado de volumen que tienen los estudiantes. Enochs y Gabel indican que es importante entender primero el concepto de volumen y a partir de esta base, incorporar las fórmulas, y de este modo en el momento que se introduzcan, el estudiante esté en condiciones de hacer un manejo razonado de las mismas. Es importante distinguir y al mismo tiempo relacionar el volumen y la capacidad, el volumen y el peso, el volumen y el área de un cuerpo. Es necesario reforzar procedimientos cualitativos para resolver problemas sobre volumen. Es importante enriquecer la enseñanza de este concepto y no reducirla a la aplicación de fórmulas.

Todas estas investigaciones son un aporte valioso, para la enseñanza y el aprendizaje del concepto volumen, nos invitan a profundizar de manera disciplinada en la formación sólida del objeto mental volumen. No se trata de encontrar soluciones rápidas, sino de invertir tiempo en un proceso en el que la meta es adquirir un aprendizaje significativo.

Por otro lado es importante resaltar que las investigaciones realizadas por los diferentes autores tienen entre otras cosas el objetivo de solventar las dificultades que se pueden presentar en el aprendizaje del concepto del volumen tanto por parte de maestros en formación y en ejercicio como por los propios estudiantes.

2.2.3. Talento matemático.

Es preciso hacer una semblanza lo más cercana posible a la del grupo con el que se ha realizado este estudio, es la base sobre la cual hemos partido para caracterizarlos y tratar sobre la intervención propuesta que para los mismos hacen en sus propuestas Freiman, Greenes y Miller.

En el estudio de Ramírez (2012) se hace una comparativa de las características de los estudiantes con talento según diferentes autores. Se utiliza la terminología de las altas capacidades a nivel general siguiendo la propuesta de Passow y se particulariza al ámbito matemático con las propuestas de autores como Freiman, Greenes o Miller. Concretamente en sus estudios no se encuentran diferencias significativas entre las características del talento matemático (Ramírez, 2012). La caracterización que hacen los autores es complementaria en cuanto a los aspectos que manifiestan la excepcionalidad de los mismos.

Passow menciona que un alumno posee altas capacidades cuando en virtud de las mismas es capaz de un alto rendimiento en diferentes ámbitos como puede ser el matemático, el musical, el artístico etc. Para caracterizar las altas capacidades en el ámbito matemático, los autores coinciden en señalar características tales como que los alumnos se sitúan en la escena de los problemas, construyen vínculos y relaciones, cambian fácilmente de una estructura a otra, poseen dominio en la resolución de problemas, conceden interés a los detalles, tienen agilidad mental y habilidad para generalizar.

En esta investigación se ha elegido el término “talento matemático” de acuerdo a las caracterizaciones que hacen Miller, Freiman y Greenes, puesto que en la experiencia con los estudiantes participantes en el estudio, observamos similitud con las citadas por estos autores. Coincidimos con ellos, específicamente con lo señalado por Greenes en que el estudiante con talento elabora planteamientos aplicando su capacidad para generalizar, demostrando su competencia para transferir ideas y siendo flexible en la manipulación de los datos. Estos elementos dinamizan su aprendizaje, les lleva a la elaboración de propuestas que contienen más aspectos de lo que se aborda en las actividades. Miller también aporta ideas interesantes cuando señala que los chicos presentan un entusiasmo inusual y un gran deseo de indagar la información numérica, manifestando creatividad, rapidez en el aprendizaje, alta capacidad de entendimiento y aplicación de las ideas matemáticas. Esto hace que desarrollen habilidades especiales para trabajar de forma abstracta en cuanto a la relación de objetos matemáticos. Cabe resaltar la capacidad que poseen de transferir conocimientos adaptándolos de forma válida a situaciones nuevas partiendo de los conocimientos adquiridos en experiencias previas. Miller manifiesta la flexibilidad que presentan en sus razonamientos. En esta línea, Freiman evidencia que estos estudiantes interrelacionan ideas en la integración de varias estructuras conducentes a la resolución de problemas, buscan patrones y relaciones, lo que implica una capacidad de incorporar la información obtenida en forma de aprendizaje útil y aplicable. Además, controlan la solución de los problemas, son persistentes en el desarrollo de sus objetivos lo que les lleva a producir ideas que aplicarán en otras situaciones. Se reconoce en la experiencia realizada en estudiantes con talento las capacidades inherentes a los mismos que les llevan a destacar por cuanto crean sus propios esquemas, desarrollan estrategias eficientes, ubican la esencia de los problemas y buscan patrones y relaciones.

En la tabla 4 se describe la caracterización de los estudiantes con talento matemático según los autores antes citados.

Tabla 4. *Características del talento matemático.*

Greenes, (1981)	Miller, (1990)	Freiman, (2006)
Flexibilidad en la manipulación de datos	Creatividad, rapidez en el aprendizaje, alta capacidad de entendimiento y aplicación de las ideas matemáticas, flexibilidad en los razonamientos.	Interrelacionan ideas en la integración y construcción de estructuras conducentes a la resolución de problemas.
Habilidad para la organización de datos. Capacidad para generalizar		Ubica la esencia de los problemas. Busca patrones y relaciones, desarrolla estrategias eficientes. Controla la solución de los problemas.
	Entusiasmo inusual y deseo de indagar sobre la información matemática.	Persiste en la consecución de sus objetivos.

En la fase de intervención es relevante la visión amplia que tienen sobre estos estudiantes los responsables del proyecto ESTALMAT (programa de estímulo del talento matemático) ya que presentan tareas a los alumnos pensando en sus aptitudes excepcionales.

En este sentido, siguiendo a Blanco, Ríos y Benavides, (2004), realzamos la importancia de los programas de enriquecimiento como una solución fructífera para satisfacer las necesidades de aprendizaje de los estudiantes con talento. Los autores acentúan la trascendencia de incorporar actividades de aprendizaje por descubrimiento para que el estudiante se involucre en ellas. Las tareas instructivas extracurriculares son complementarias y a la vez alternan con las actividades desarrolladas durante las clases ordinarias. Para tal fin Johnson propone el uso de herramientas didácticas tales como material manipulativo. En nuestro trabajo hemos incluido puzles para el desarrollo de las tareas con contenido recreativo e instructivo, siguiendo la propuesta de los autores. Johnson recomienda que estas actividades sean planteadas a nivel grupal para favorecer el enriquecimiento mutuo además de la capacidad para poder discutir, debatir y argumentar las soluciones dadas por cada uno. De este modo se favorece que el enriquecimiento personal sea mayor al incorporar los avances que los otros compañeros realicen. Todo esto conduce a que el estudiante plantee estrategias para resolver los problemas, utilice la lógica como elemento dinamizador de la memorización de los contenidos aprendidos y les capacite para el planteamiento y resolución de problemas abiertos, novedosos y que impliquen varias posibilidades de conclusión.

Salir de la rutina de la normalidad general aporta una dosis especial de motivación lo que les lleva a animarse en las tareas al mismo tiempo que se divierten y aprenden. Elementos importantes en dichas actividades es el trabajo en equipo y que vayan enfocadas a abordar situaciones de la vida real. De esta manera, el estudiante con talento es alentado a protagonizar su propio aprendizaje en un contexto integrado en el que el profesor se constituye también en coaprendiz al mismo tiempo que tutor y guía del proceso.

Es por lo tanto que los programas de enriquecimiento deben ser considerados como pilares fundamentales en el desarrollo educativo de los estudiantes con capacidades intelectuales altas. Sus características demandan actividades extracurriculares especiales, con lo cual es necesario adoptar este tipo de elementos educativos específicos con el fin de complementar la formación impartida con el currículo oficial, que por sí sola no es suficiente para satisfacer las necesidades de estos estudiantes. En España existen experiencias interesantes al respecto, y en líneas generales, las propuestas y directrices que se desarrollan a nivel educativo para estudiantes con talento que cursan la E.S.O de acuerdo a la propuesta de Blanco, Ríos y Benavides (2004), son:

- Añadir contenidos que no formen parte del Currículo oficial.
- Abordar con mayor profundidad ciertos contenidos que sean susceptibles de ahondar más en la capacidad especial y sobresaliente de aprendizaje de los estudiantes con talento matemático.
- Hacer un esfuerzo significativo con el fin de ampliar la estructura de los temas y contenidos curriculares, para adaptarlos a las características especiales de los estudiantes con talento y aportar de este modo mayor nivel de abstracción y complejidad en dichos contenidos.
- Que la investigación impulse la innovación en el contenido curricular, como mecanismo favorecedor de procesos educativos adecuados para los estudiantes con talento en el que puedan desarrollar al mismo tiempo el pensamiento creativo y sus destrezas.

Nuestra investigación se centra en una sesión de enriquecimiento curricular, en ella se propone una serie de actividades diseñadas para que los alumnos sean ejercitados en el desarrollo de las características anteriormente citada

CAPITULO 3

METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION

En este capítulo vamos a describir el tipo de investigación, el proceso formativo llevado a cabo con los estudiantes durante la sesión de enriquecimiento, definiremos los elementos que la identifican, entre otros el análisis de datos, las variables y categorías que nos permiten interpretar las respuestas de los estudiantes al formulario presentado en la sesión.

3.1. Caracterización de la investigación.

Nuestra investigación es de tipo cualitativo. En este apartado exponemos la definición y las características que dan los autores abajo mencionados sobre este tipo de estudio, las cuales aparecen plasmadas en el presente trabajo.

Munarriz (1992) señala que la investigación cualitativa se entiende como un diseño flexible que se obtiene a partir de información cualitativa. No conlleva un manejo estadístico riguroso, ya que su estructura se orienta más al proceso seguido para obtener soluciones que a la obtención de resultados.

Una de las aplicaciones del diseño cualitativo está en el campo educativo, razón por la cual permite interpretar el significado que los estudiantes dan a sus acciones, lo cual lleva a mejorar el tratamiento que se da a los problemas de aprendizaje.

Estando interesados en examinar cómo los estudiantes con talento, de una muestra intencional, resuelven una tarea de enseñanza, en un contexto de enriquecimiento curricular, hemos diseñado una investigación cualitativa. Según Munarriz, (1992) dichas investigaciones no hacen posibles ni pretenden las generalizaciones, se llevan a cabo en el entorno habitual, en el sitio donde acontecen los hechos, mediante un diseño abierto, no estructurado, que se va desarrollando a medida que evoluciona.

La autora referenciando a Tejedor, (1986) recalca que la investigación cualitativa requiere una metodología sensible a las diferencias, a los procesos singulares e irregulares y a los significados profundos.

El diseño que hemos planteado es descriptivo y exploratorio porque tiene la intención de percibir y analizar las reflexiones que hacen los estudiantes.

En resumen, la investigación planteada es de tipo cualitativo porque está encaminada a estudiar el razonamiento que hacen estudiantes con talento matemático para obtener el volumen del tetraedro sin emplear fórmulas, es decir haciendo un tratamiento cualitativo del concepto volumen.

Estos razonamientos que hacen los estudiantes los aplican para comparar volúmenes de poliedros dados entre sí y de estos con respecto al cubo. Para ello se observan y describen qué relaciones entre los volúmenes de los objetos tridimensionales y sus formas aprecian los estudiantes, cuáles de estas relaciones son las que más se han reflejado en sus reflexiones. Y cuáles de ellas les han ayudado más para generalizar. También estudiamos cómo llegaron a esta generalización.

Hernández, Fernández y Baptista (2010), identifican que muchas investigaciones cualitativas tienen intenciones descriptivas, pretendiendo entender cómo el estudiante comprende el concepto. Para ello se ejerce un control moderado de las variables, y es mínimo el peso que se concede a los procedimientos estadísticos, utilizándose la parte estrictamente necesaria de estos.

3.2. Proceso Formativo

La sesión pretendía que los estudiantes apreciaran el volumen del tetraedro por percepción directa, comparando los volúmenes del tetraedro y la pirámide cuadrada de aristas iguales, determinando razonadamente cuál tiene mayor volumen tras examinar cómo se relacionan sus elementos. La continuidad de los argumentos de comparación la harían componiendo tetraedros y pirámides más grandes tomando como referencia los que tienen por lado la unidad, empleando para ello un puzle compuesto de pirámides y piezas de pirámides, descrito en Flores (2006). Esto les permitiría observar que el volumen de P es mayor que el de T, dado que el número de piezas utilizadas para su composición es mayor (figura 12)

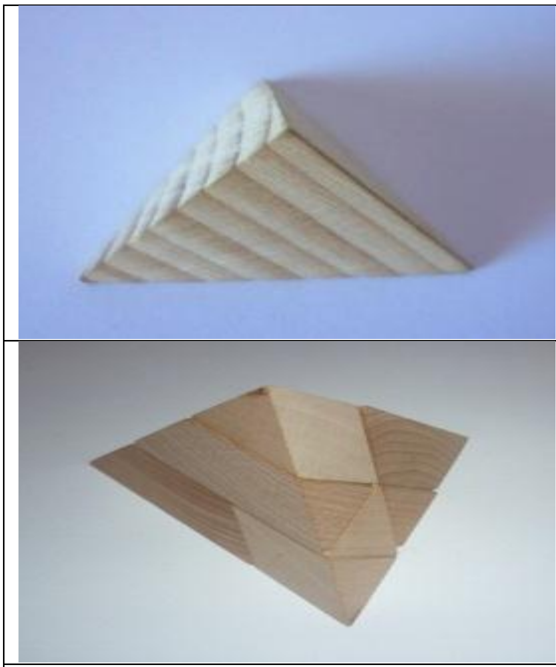
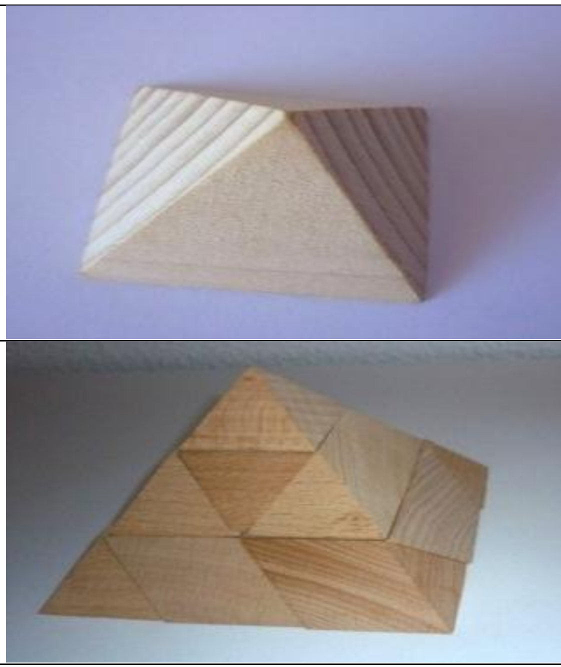
	

Fig. 12. *Tetraedro simple y triple*	*Pirámide simple y triple*

Con objeto de concretar esta comparación y establecerla con una unidad de volumen conocida como es la del cubo, se propone buscar formas descomponer el cubo a partir de tetraedros y pirámides, identificando qué pirámides se forman al obtener un tetraedro dentro del cubo, indicando cuántas caras tienen, qué son esas caras, qué relación tienen con los datos del cubo. (Figura 13).

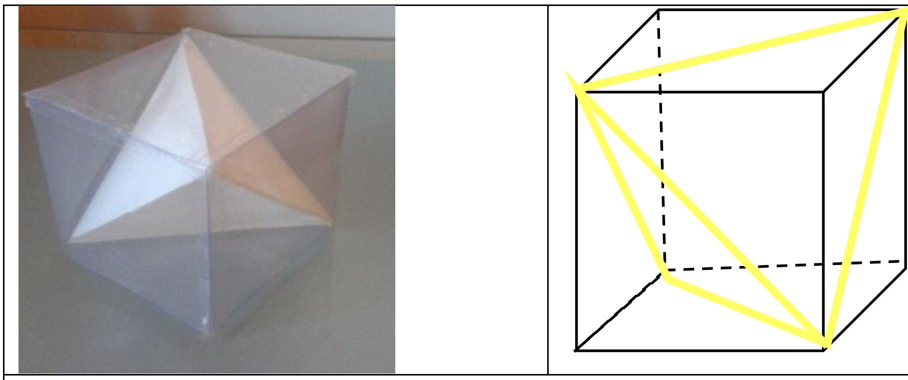


Fig.13. *Tetraedro dentro del cubo, formado con diagonales de las caras. Se complementa con cuatro pirámides trirectángulas.*

Los alumnos dibujarían el tetraedro dentro del cubo. El problema entonces pasa a ser determinar el volumen de las figuras en que queda descompuesto el cubo, preferentemente en función de tetraedros y pirámides Es útil identificar que se puede componer una pirámide con cuatro tetraedros trirectángulos (Ttr). El siguiente paso consiste en determinar el volumen del Ttr. Para ello se puede recurrir a unir dos Ttr para formar una pirámide oblicua de igual base y altura que el tetraedro, con lo cual, y aplicando que “dos pirámides de igual superficie de la base e igual longitud de la altura tienen el mismo volumen”, se logra descomponer el volumen del cubo en la suma del volumen de tres tetraedros, precisando las relaciones de volumen 1:3 entre T y el cubo y 2:1 entre P y T .En este caso aceptamos que el volumen depende de la superficie de la base y de la altura, propiedad que se maneja desde los elementos de Euclides, pero que requiere para su justificación el Principio de Cavalieri. (Figuras 14-15)

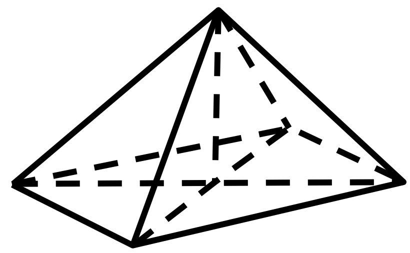
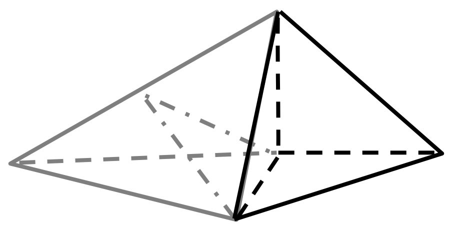
	

Fig. 14. *Pirámide cuadrada formada por 4 pirámides trirectángulas*	Fig. 15. *Dos pirámides trirectángulas unidas (gris), de igual base y altura que el tetraedro (negro)*

A partir de los puzles tendrían muchos elementos de comparación, como por ejemplo que los volúmenes de la pirámide y el tetraedro juntos son iguales al del cubo.

Para obtener el volumen de manera perceptible hay que buscar otras estrategias, como determinar el volumen del Ttr a través de particiones infinitas.

En cualquier caso, ya están en disposición de calcular el volumen de tetraedros y pirámides de lados dados, a partir del cubo en el que ambos caben. Al introducir el tetraedro dentro del cubo se hace visible que su arista es igual a la diagonal de la cara del cubo. La secuencia de enseñanza propone relacionar la diagonal y el lado de la cara del cubo expresando estos segmentos unos en función de otros, como un paso previo para hallar el volumen del tetraedro en función de su arista, empleando el resultado obtenido, es decir, que su volumen es un tercio del volumen del cubo.

Este proceso encamina al estudiante a obtener de manera razonada la regla general del volumen del tetraedro en relación al cubo, sin emplear fórmulas.

$$V_T = \frac{(l_c)^3}{3} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} l_t\right)^3}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12} l_t^{\,3}$$

3.3. Elementos de la investigación.

Descripción de la muestra.

Trabajamos con una muestra intencional de 23 niños con talento matemático, durante una sesión Estalmat, en un día de clase durante 3 horas realizada el 18 de enero de 2014.

ESTALMAT (**Es**tímulo del **Tal**ento **Mat**emático) es un proyecto desarrollado en España y cuya finalidad es la detección y estímulo del talento excepcional en las matemáticas en estudiantes, que cursan 6º de Primaria, E.S.O y Bachillerato. Para cumplir este objetivo se llevan a cabo actividades extraescolares en las que se canalizan los programas de enriquecimiento curricular, en ellas se desarrollan tareas de crecimiento grupal.

Los estudiantes participantes en esta investigación se consideran alumnos con talento matemático, por haber superado una prueba de acceso al programa, en la que compitieron con casi 500 compañeros de las cuatro provincias andaluzas orientales. No están diagnosticados mediante procesos objetivos.

Las edades están comprendidas entre catorce y dieciséis años. Aunque el curso se compone de veintitrés alumnos, asistieron a la sesión de enriquecimiento 7 chicas y 16 chicos, que resolvieron las tareas, dando lugar a 21 respuestas, dado que dos parejas resolvieron sobre el mismo formulario. (Tabla 1).

Tabla 1. *Asistencia por sexo y edad.*

Edad	14	15	16	Totales
Sexo				
Mujer		5	2	7
Hombre	3	7	6	16

Recolección e instrumentos de toma de datos

Esta investigación se ha llevado a cabo en dos fases. En la primera fase se realizó la planeación y diseño de la sesión de enriquecimiento curricular en la cual se contempla una secuencia de tareas que están ordenadas de tal manera que puedan conducir al estudiante a una evolución en sus razonamientos. La segunda fase corresponde al apartado empírico, en el cual se implementa dicha sesión para lo cual se emplea un formulario (anexo 1) con el contenido de las tareas propuestas en las actividades a desarrollar durante la sesión.

La recolección de los datos se realizó mediante dicho formulario y se complementó con una observación no participante, donde la investigadora ha estado de observadora mientras se hacia la prueba. Mediante las actividades los estudiantes podrían seguir los razonamientos previstos. Los instrumentos de recogida de datos son las respuestas escritas de los estudiantes al formulario y las anotaciones escritas de las observaciones por parte de la investigadora durante la sesión.

Las observaciones escritas de la investigadora ayudan a incorporar en la recogida de los datos, comentarios orales y acciones de los alumnos que no anotaban en sus libretas, como también algunos procedimientos desarrollados en las actividades (mediciones directas, forma de construcción de figuras dobles y triples, reflexiones sobre semejanzas entre estas. etc.).

Procedimiento de análisis de los datos

Para estructurar los datos recabados, el método que utilizamos en nuestra investigación cualitativa es el análisis de contenido. Este método exterioriza la significación del mensaje que va implícita en un texto. El texto se divide en segmentos llamados unidades de análisis o también unidades de contenido. Las unidades de contenido son frases con sentido que responden a cada una de las tareas planteadas. Estas se clasifican de acuerdo a las semejanzas, diferencias o relaciones existentes entre ellas.

La esencia del análisis cualitativo está en que recibimos datos no estructurados en forma de texto constituido por las respuestas escritas de los estudiantes, los cuales se estructuraron en segmentos de datos que luego se organizaron en un sistema de categorías codificadas, para ser interpretados. Las categorías fueron previamente clasificadas por actividades o por estar vinculadas en algún aspecto, siendo unas más relevantes que otras.

Hernández, Fernández y Baptista, (2010) facilitan orientaciones para la aplicación del método del análisis de contenido. Distinguen dos etapas a seguir: la identificación de las unidades de análisis y la elaboración de un sistema de categorías. Primero se revisó todo el material, después se identificaron las unidades de contenido. El propósito al estudiar las unidades de análisis es poder extraer significados que se pueden describir. Este método permite hacer más visible los significados latentes en los datos recogidos.

El tratamiento de las unidades de análisis ha sido de utilidad para encontrar el sentido a los datos en el marco del planteamiento del problema, para comprender e interpretar los procesos de razonamiento llevados a cabo por los estudiantes, para identificar en ellos los alumnos más destacados, explorar los tipos de respuestas más seguidas, difíciles, no previstas, creativas etc.

A continuación explicamos más detalladamente cómo se han seguido estas etapas.

Las unidades de contenido fueron extraídas de las partes del texto que nos daban respuesta a lo que habíamos previsto. Dentro de cada una de las respuestas escritas que dieron los estudiantes a las cuestiones planteadas en las actividades se han observado los pasos que se han desarrollado en las mismas, de modo que en cada respuesta pueden apreciarse una o varias unidades de significado.

Por ejemplo si analizamos la respuesta del sujeto 19 a las tareas de la actividad 1:

"La pirámide tiene más volumen que el tetraedro porque pesa más la pirámide. Además la pirámide tiene más superficie y su base es mayor. El único problema es que la altura del tetraedro es mayor"

Hemos extraído cuatro unidades de análisis:

1ª: *la pirámide tiene más volumen que el tetraedro*.

2ª: *porque pesa más*.

3ª: *la pirámide tiene más superficie y su base es mayor*

4ª: *El único problema es que la altura del tetraedro es mayor*.

En las anotaciones escritas de la investigadora se observa que el alumno 19 hace mediciones directas para observar que la altura de T es mayor que la de P, apoyando las dos pirámides en el plano de la mesa y cotejando las alturas de los ápices de ambas.

Tras examinar las producciones de los estudiantes observamos que las respuestas eran variadas y proporcionaban una información valiosa para hacer el seguimiento de sus razonamientos. En ellos percibimos los procesos que se llevaron a cabo para establecer comparaciones entre poliedros a través de procesos manipulativos, determinar el volumen del tetraedro y la pirámide cuadrada, percibir en qué grado se hizo uso de fórmulas. El análisis realizado anteriormente de la sesión de clase y del proceso de razonamiento propuesto, toma en cuenta las variables de la investigación, para organizar la información mediante el sistema de categorías que a su vez representa los valores de las variables de estudio. Las unidades de análisis se categorizaron y codificaron asignando un número a cada una de ellas. En total emergieron 16 categorías de las respuestas escritas de los estudiantes. Los valores que toman las variables son las categorías y estas corresponden a los pasos que han resuelto los estudiantes.

Variables de investigación

Las variables están en consonancia con el diseño de la sesión de enriquecimiento vista en todo su conjunto, interrelacionando todo el proceso llevado a cabo por los estudiantes a través del desarrollo de las tareas planteadas en cada una de las actividades. Por tanto nos permiten hacer el seguimiento de las producciones que realizan los estudiantes. En la variable 1 a través de procesos de comparación entre poliedros opacos, rellenado de pirámides y estudio de pirámides en el interior del cubo se establecen relaciones de orden entre los volúmenes de T y P. En la variable dos se estudia cuándo y cómo los estudiantes hacen o no empleo de fórmulas, ante todo para hallar el volumen de Ttr siendo este volumen la piedra angular para determinar las proporciones de P y T entre si y de estas con el cubo. La variable 3 estudia la eficacia de los estudiantes para llegar a la solución final. La variable dos depende de las variables uno y tres ya que el no emplear fórmulas para hallar el volumen de Ttr implica no emplearlas para hallar el volumen de T.

Como se puede ver la clásica fórmula del volumen de T indica que este es igual a "un tercio del área de su base multiplicada por la altura de T". En el presente estudio la fracción un tercio no se trata como un simple operador; sino que se obtiene razonadamente en el proceso de comparación de los volúmenes de Ttr con T y con el cubo (V1). Al introducir T dentro del cubo, se hace evidente que la arista de T es la diagonal de la cara del cubo, con lo cual el lado del cubo se puede expresar en función de esta (V3).

Esto unido a lo anterior hace que se pueda obviar el tener que hallar el área de la base y la altura de T para determinar su volumen, evitando en gran parte la medida indirecta, ya que hemos utilizado volúmenes para comparar volúmenes y los segmentos relacionados se han hecho con longitudes estudiadas al interior del cubo durante el proceso formativo.

En la tabla 6 se describen en qué consiste cada una de las variables y la finalidad que tienen.

Las variables organizan las respuestas de cada categoría, como se puede ver más adelante en la tabla 7 en la cual aparece la descripción de las categorías, asociándolas con las variables y las actividades de la sesión de enriquecimiento a las que pertenecen.

Tabla 6. *Definición de variables*

Variable	Descripción
V1	Examina la manera como los estudiantes hacen sus razonamientos para justificar que el volumen de P es mayor que el de T e identifica su relación con el volumen del cubo. V1 está en relación con las siete primeras categorías y algunas tareas planteadas en las actividades, encaminadas a precisar entre otros la proporción 1:2 entre T y P. Esta variable permite también estudiar la cantidad de pasos (categorías) más seguidos (Tabla13) y aquellos que son originales, por no estar previstos (Tabla 12).
V2	Estudia cuándo y cómo los estudiantes hacen o no empleo de fórmulas.
V3	Estudia la eficacia alcanzada por los estudiantes para llegar a la solución final de obtener el volumen de T en función de su arista, relacionando segmentos en el interior del cubo, generalizando patrones para hallar un determinado volumen a partir de su arista o realizar el proceso inverso.

La forma en que se han estructurado las categorías permite hacer un estudio cercano del dominio significativo de la medida que puedan manifestar los estudiantes en sus respuestas.

Las siete primeras categorías corresponden a la comparación de los volúmenes del tetraedro T y la pirámide cuadrada P.

En la categoría cuatro denominada “otras justificaciones” los alumnos hacen los siguientes razonamientos: la pirámide cuadrada tiene mayor volumen porque pesa más que el tetraedro y la altura de la pirámide cuadrada es la mitad de la diagonal de la cara cuadrada de la base. La altura de P y la mitad de la diagonal de su base son los catetos de un triángulo isósceles que tiene por hipotenusa la arista del tetraedro regular. La longitud de los catetos es igual a las aristas del cubo. Es decir hacen un estudio de pirámides al interior del cubo, en el que se destaca la proporción 1:4 entre Ttr y P.

Entre otras cosas en la categoría 6 apreciamos que los alumnos se percatan de que, aunque 6P es el triple de 2P, como en P_2 y T_2 hay también 4T, P_2 no triple de $T_{2.}$ En el anexo 2, en la tabla 15 se indica loa cantidad de P y T para construir poliedros de lado n.

Las categorías 8, 9 y 10 corresponden a hallar el volumen de la pirámide trirectángula. En la categoría 8 no hacen uso de fórmulas de ningún tipo, siendo esta una forma perceptible de hallar el volumen de la pirámide trirectángula Ttr.

En la categoría 9 se registra si obtienen el volumen de la pirámide trirectángula Ttr por descomposición. Significa que emplean relaciones de proporcionalidad entre pirámides que tienen la misma base y altura. Comparan una pirámide oblicua compuesta por dos pirámides trirectángulas con el volumen del tetraedro.

En la categoría 10 se recogen las respuestas que obtienen el volumen de la pirámide trirectángula por fórmula del volumen de una pirámide; para lo cual identifican la base y la altura de dicha pirámide al interior del cubo y calculan su volumen.

Para obtener el volumen de manera perceptible hay que buscar otras estrategias, como determinar el volumen del Ttr a través de particiones infinitas, como se indica en la categoría 8, aunque en cualquier caso, con las herramientas aportadas ya están en disposición de calcular el volumen de tetraedros y pirámides de lados dados, a partir del cubo en el que ambos caben.

Una vez que conocen el volumen del Ttr mediante la categoría 11 se recoge una red de relaciones que se establecen entre los poliedros dados, en su vínculo con el volumen del cubo concretándose las proporciones 1:4 entre Ttr y P, 1:2 entre Ttr y T, lo cual les lleva a precisar la relación buscada 2:1 entre P y T, de igual manera establecen la proporción 1:3 entre T y el cubo.

Las últimas cinco categorías van encaminadas a registrar las respuestas que relacionan la diagonal y la cara del cubo al interior del mismo, mediante el puzle del tetraedro, que es donde se visualiza claramente esta relación. Las aristas se expresan unas en función de otras, así dada una arista se pide hallar otra (categorías 12 y 13), o dada la arista de un poliedro se pide hallar su volumen (categorías 14 y 15), o dado el volumen de un tetraedro se pide hallar su arista (cat. 16). El propósito de estas categorías es expresar las respuestas sobre la obtención del volumen del tetraedro en función de la longitud de su arista, empleando la proporción de volúmenes 1:3 entre T y cubo. De este modo se prescinde de hallar la altura de T empleando Pitágoras como también se descarta el hallar el área de la base de T a través de su base unidimensional y su altura básica (Tabla 7).

Tabla 7. *Definición de las categorías*

Código	Categoría	Variable	Actividad
1	Afirma que el volumen de P es mayor que el de T	V1	Uno
2	Compara las bases de P y T	V1	Uno
3	Compara bases y alturas de p y T	V1	Uno
4	Otras justificaciones(comparación de peso, encuentran otros elementos con el estudio de pirámides al interior del cubo)	V1	Uno
5	Compone y expresa P_2=6P+4T y T_2=2P+4T	V1	Dos
6	Concluye que el volumen de P no es el triple de T	V1	Dos
7	Compone y expresa P_3=19P+16T y T_3=8P+11T	V1	Dos
8	Halla volumen de Ttr por truncamientos reiterados	V2	Tres
9	Halla el volumen de Ttr por descomposición (comparación de bases y alturas)	V2	Tres
10	Halla volumen de Ttr por fórmula	V2	Tres
11	Relaciona los volúmenes de Ttr, T, P, en relación al cubo obteniendo las proporciones 2:1entre P y T,1:3 entre T y C. (estudio de pirámides al interior del cubo)	V1	Tres
12	Dada la arista del cubo halla la del tetraedro	V3	Cuatro
13	Dada la arista del tetraedro halla la del cubo	V3	Cuatro
14	Dada la arista del cubo halla el volumen	V3	Cuatro
15	Dada la arista del tetraedro halla su volumen	V3	Cuatro
16	Dado el volumen del tetraedro hallar su arista	V3	Cuatro

Durante la sesión de enriquecimiento se realizaron 4 actividades que constan en el formulario (anexo 1.3, correspondiente al formulario). En la primera actividad se propuso comparar los volúmenes de T y P percibiendo formas y comparando elementos, buscando razones que justifiquen cual tiene mayor volumen

Dado que P y T de lado unidad no se pueden descomponer, con el fin de obtener un argumento más visible en la comparación de sus volúmenes, se planteó la segunda actividad, en la cual se propone trabajar el rellenado de pirámides para construir poliedros dobles y triples. Previamente los estudiantes identificaran y analizaran las piezas que componen el puzle. Después de componer los poliedros dobles y triples se pedirá que descompongan las piezas y las expresen en función de pirámides y tetraedros unidad, comparando en qué casos utilizan más cantidad de T y P unidad. Habíamos previsto que con las dos primeras actividades no se concluiría la proporción exacta entre los volúmenes de P y T, para ello se planteó la actividad 3, en la cual debían identificar un T dentro de un cubo, dibujarlo, identificando que figuras se forman al incluir T dentro de C. Después de reconocer que T se complementa con 4 Ttr para componer el cubo, debían caracterizar el Ttr, relacionándolo con los elementos del cubo. Posteriormente determinarían el volumen de Ttr en relación al cubo, con la ayuda del puzle del tetraedro compuesto por un T y 4 Ttr, estableciendo comparaciones de bases y alturas entre T y dos tetraedros trirectángulos dispuestos adecuadamente para ello. Otra de las formas aunque menos probable, en que podrían encontrar el volumen del Ttr sería valiéndose de las explicaciones breves dadas en la clase para hallarlo a través de procesos infinitos. Una vez hallado el volumen de Ttr establecerían las proporciones entre Ttr y T, entre Ttr y P, empleando las piezas del puzle en mención, lo cual les aportaría las constantes de proporcionalidad entre las diferentes pirámides y de estas con el cubo. Una vez establecidos estos índices se propone la cuarta actividad, en la que sabiendo que el volumen de T es la tercera parte del cubo, se pide entre otras tareas expresar su volumen en función de su arista, para que encuentren la fórmula del volumen de T de una manera justificada. Cada variable comprende una o más actividades. La variable uno organiza las respuestas a la primera y segunda actividad y gran parte de la actividad tres. La variable dos ordena las respuestas obtenidas al resolver las tareas de la actividad tres. La variable tres estructura los procesos alcanzados con las tareas de la actividad 4. En la tabla ocho se describen las actividades planteadas en el formulario de tareas.

Agrupando las categorías según las actividades planteadas el proceso se encamina como sigue:

Las categorías 1 a 4 comprenden las tareas desarrolladas en la actividad uno, en ellas se comparan alturas, bases, pesos de P y T unidad, para iniciar el proceso de establecer relaciones de orden entre los poliedros opacos de madera.

En la actividad dos las comparaciones se establecen entre poliedros dobles y triples, estando aquí contenidas las categorías 5, 6 y 7.

En la actividad 3 se hace un estudio de diversas pirámides al interior del cubo, se halla el volumen de Ttr y se relaciona con otros volúmenes, destacándose la proporción 1:3 entre T y C, aquí están incluidas las categorías 8, 9, 10 y 11.

En la actividad cuatro se propone calcular volúmenes de tetraedros y cubos de lados dados, con la finalidad de obtener reglas generales para hallar el volumen de T en función de su arista. Otro objetivo de esta actividad es relacionar longitudes al interior del cubo, y de esta manera prescindir hallar la altura de T. En esta actividad se incluyen las categorias12, 13, 14, 15 y 16. (Tabla 9).

Tabla 8. *Descripción de las actividades de la sesión de enriquecimiento, asociadas a su variable*

Var.	Actividad.	Descripción de la actividad
V1	Uno	La actividad uno tiene dos partes. En la primera el estudiante compara la relación de orden entre los volúmenes de P y T examinando sus elementos y en la segunda parte, justifica su respuesta.
	Dos	Tiene dos partes,
V1	Dos-a	Identifica y analiza las piezas que componen el puzle de pirámides.
V1	Dos-b	Compone poliedros dobles y triples para precisar la relación entre los volúmenes de P y T, estudiando las descomposiciones que se pueden hacer de estos en tetraedros y pirámides unidad.
	Tres	Esta actividad consta de 4 partes
V1-	Tres-a	Identificar un T dentro del cubo y dibujarlo
V1	Tres-b	Identificar el Ttr al introducir T en el cubo, caracterizándolo
V1	Tres-c	Determinar el volumen de las pirámides en que queda descompuesto el cubo en T y P.
V2	Tres-d	Hallar el volumen de Ttr en relación al volumen del cubo y/o en relación a T comparando bases y alturas
V1	Tres-3	Una vez hallado volumen de Ttr tomarlo como referencia para establecer la relación precisa: “P es el doble de T”.
V3	Cuatro	Relacionar longitudes al interior del cubo y este resultado emplearlo con el tetraedro T y cubos de lados dados para obtener la regla general del volumen del tetraedro.

Tabla 9. *Actividades con sus correspondientes categorías*

	Actividad 1				Actividad 2			Actividad 3				Actividad 4				
Cat.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

Pasamos a estudiar las producciones de los estudiantes, organizando la información obtenida en relación al razonamiento completo, analizando los resultados de la investigación.

Para examinar los razonamientos de los estudiantes, se recogieron sus formularios escritos. Se realizó una tabla con los campos en los que se esperaba respuestas y se rellenaron revisando los escritos. Aunque asistieron 23 alumnos, recogimos 21 respuestas escritas, dado que dos formularios estaban firmados por dos parejas de alumnos. La tabla 9 refleja que ha habido un seguimiento mayoritario del razonamiento completo, aunque ha habido diferencias en la cantidad de pasos y apreciaciones. Los estudiantes han sido capaces de llegar hasta el final del proceso previsto, siguiendo la propuesta de actuación correspondiente a los procesos planteados en el camino hacia obtener el volumen del tetraedro.

En la primera actividad a partir de la manipulación de figuras opacas, todos los estudiantes encontraron que P tiene mayor volumen que T (cat. 1), analizaron sus formas y propiedades. Dieciséis estudiantes comparan las pirámides estableciendo la proporcionalidad entre las bases y argumentan que el volumen de P es mayor que el de T porque su base tiene mayor área. Diez de ellos, además, comparan las alturas respectivas (cat. 2, 3). Otras justificaciones (cat. 4) acuden a dibujos interiores o a comparar el peso de las piezas entregadas, por ejemplo.

En la segunda actividad quince estudiantes compusieron las pirámides y tetraedros de lados dos (cat. 5), nueve de ellos incluso construyeron las figuras triples y las expresaron en función de la pirámide y el tetraedro unidad (cat. 7). En todas las composiciones percibieron que para construir las pirámides, emplearon más piezas que para componer los tetraedros, lo cual lleva a dos alumnos a expresar (cat. 6) que el volumen de P es menor del triple del volumen de T. Sin embargo no tienen argumentos suficientes para precisar la relación entre P y T.

En la tercera actividad, una vez dibujado el cubo y en su interior el tetraedro, pasan a calcular el volumen de Ttr, que lo encontraron de tres maneras. Cuatro estudiantes reproducen un proceso de truncamientos reiterados infinitos mostrado en clase (cat.8), mediante el cual se obtiene que el volumen de Ttr es 1/6 del cubo original (Flores, Ramírez y Rodríguez, 2014). Nueve estudiantes siguieron el proceso de descomposición empleando fórmulas de proporcionalidad tras comparar una pirámide oblicua de igual base y altura que el tetraedro(cat. 9), concluyen que sus volúmenes son iguales, sólo siete no han podido evitar emplear la fórmula (cat.10), pese a que se ha planteado la actividad para obviarlas, de todas formas lo hicieron visualizando Ttr dentro del cubo, apreciando que la base de Ttr es un triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden la unidad, con lo cual el área de la base es un medio, aunque emplearon formula al menos pudieron visualizar los segmentos de donde esta proviene, ya que la altura de Ttr es igual a la del cubo y su base es la mitad de la cara del cubo, de modo que encuentran el volumen multiplicando un tercio del área de la base por la altura. En total veinte de las respuestas llegan a establecer la relación 1:6 entre el volumen del Ttr y el cubo, (Cat. 11) siendo una de las más predominantes en los razonamientos.

En la actividad 4 al relacionar aristas y volúmenes; todos los estudiantes relacionan la diagonal y el lado de la cara del cubo (cat.12). Salvo el estudiante uno, los demás hallaron los volúmenes de T y del cubo conociendo o bien la arista de T o la del cubo (cat.14). Diecisiete estudiantes hallan el volumen de T y el del cubo, dada la arista de T (cat.15) Dieciocho estudiantes hallan la longitud de la arista de T, dado su volumen. Tras explicarles cómo construir un “tetrabrick” tetraédrico, con cartón, se les pidió realizar uno de medio litro de capacidad. Tenían que determinar la longitud de su arista y hacer las medidas adecuadas para construirlo. 18 respuestas recogen la relación que les permite determinar la arista de T conocido su volumen. (cat.16). Las tareas de la esta actividad fueron las que tuvieron más relaciones acertadas en todos y cada uno de los pasos. Los resultados respecto de las categorías se muestran en la Tabla 10.

Tabla 10. ***Respuestas satisfactorias de los alumnos a las etapas previas***

Categoría	1				5		7	Ttr			11					16
		2	3	4		6		8	9	10		12	13	14	15	
No.Alum.	21	17	10	2	15	2	9	4	9	7	20	21	21	20	17	18

Todos los estudiantes siguen el razonamiento propuesto, independientemente del número de pasos contestados. En general hicieron un uso escaso de fórmulas, siguiendo el proceso planteado.

En la tabla 11 aparece el porcentaje y el número de estudiantes que siguen cada categoría (paso) esto nos da una idea de cómo ha sido el seguimiento de cada una de ellas

Tabla 11. *Porcentaje de estudiantes que siguen cada categoría*

Categoría	Número de alumnos	Porcentaje de estudiantes
1	21	100%
2	16	76%
3	9	48%
4	2	10%
5	15	71%
6	2	10%
7	9	43%
8	4	19%
9	9	43%
10	7	33%
11	20	95%
12	21	100%
13	21	100%
14	20	95%
15	17	81%
16	18	86%

Durante las cuatro actividades planteadas en la sesión de enriquecimiento, los estudiantes pusieron en juego sus conocimientos, destrezas e ideas para desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas, en los que exteriorizan la forma en que deducen la fórmula del volumen del tetraedro regular en relación al cubo, a través del descubrimiento de relaciones entre segmentos, áreas y volúmenes mediante la comparación a través de la composición y descomposición de cuerpos poliédricos.

A continuación analizamos los resultados obtenidos en relación a las variables. En el análisis de los resultados con respecto a la variable uno hemos observado que la comparación entre los volúmenes de la pirámide cuadrada y el tetraedro la hicieron de manera intuitiva estableciendo comparación entre alturas, áreas de las bases, áreas laterales del tetraedro regular y la pirámide cuadrada respectivamente, aunque estas últimas no son determinantes. La fase de comparación, la hacen todos los estudiantes para ordenar volúmenes. Al comparar áreas de las bases señalaron propiedades, como que el volumen de una pirámide es proporcional al área de su base. Durante la primera actividad percibieron la dificultad de apreciar la comparación de la pirámide y el tetraedro dado el tamaño similar de estos, y su imposibilidad de descomponerlos por ser unitarios, mostrando disposición a comparar con poliedros semejantes más grandes; cuando pasaron a la segunda actividad, se sintieron tentados por el reto de obtener la pirámide con todas las piezas, lo que distrajo su atención durante algún tiempo. Posteriormente comenzaron a construir pirámides y tetraedros de lados dobles y triples. El puzle les obligaba identificar anticipadamente qué caras debían quedar solapadas y cuáles visibles, por ejemplo, los cuadrados debían quedar ocultos en el tetraedro, dado que no se pueden formar triángulos equiláteros de las caras laterales del tetraedro más grande, a partir de cuadrados.

Fueron reconociendo qué partes componían cada una de las piezas, apreciando que todas se descomponen en tetraedros y pirámides cuadradas. Durante este trabajo establecieron relaciones de semejanza en el espacio entre los poliedros unidad (los que tienen por arista el lado del triángulo equilátero) y las de lado n veces el lado del triángulo equilátero. En esencia establecieron comparaciones de volúmenes mediante el rellenado de pirámides

La construcción de tetraedros y pirámides de lados dobles y triples les permitió confirmar su hipótesis de partida de que el volumen de P es mayor que el de T, al observar que la cantidad de piezas necesarias para construir pirámides de aristas dobles o triples con relación al lado del triángulo equilátero es mayor que el número de piezas utilizadas para construir tetraedros de lados dobles o triples respectivamente

Para ello les fue útil analizar la cantidad de pirámides y tetraedros unidad, necesarios para componer las pirámides y tetraedros semejantes de lados dobles y triples. En los argumentos que hicieron referidos a que la cantidad de volumen que posee la pirámide cuadrada es mayor que la del tetraedro mostraron evolución en la precisión de los mismos a medida que desarrollaban las distintas tareas.

La variable uno también contempla las respuestas originales y los pasos más seguidos por los estudiantes (tabla 12)

Tabla 12. Pasos más seguidos por los estudiantes en orden descendente

Número del paso	Código de estudiantes	Número de estudiantes
1	Todos	21
12	Todos	21
13	Todos	21
11	Todos excepto el código 16	20
14	Todos excepto el código 1	20
16	Todos excepto los códigos 13 y 20	18
2	1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15	17
15	Todos excepto los códigos 1,5,10,15	17
5	3,4,6,7,,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,21	15
3	2,5,6,8,13,15,17,18,19,20	10
7	3,4,6,9,11,12,14,18,20	9
9	1,7,9,10,12,14,17,20,21	9

Un grupo de estudiantes elaboró una serie de respuestas que no estaban previstas, que destacan por su creatividad, dando como resultado una ampliación del rango de contestaciones (tabla 13)

El estudiante 3 argumenta que si el volumen de los 4 Ttr es igual a dos tercios del volumen del cubo, el volumen restante que corresponde al espacio ocupado por el T será igual a un tercio. El estudiante 17 menciona que el T se forma al unir las diagonales de las caras opuestas del cubo y representa gráficamente esta idea, la cual está relacionada con el planteamiento de graficar el tetraedro dentro del cubo. En este proceso aparece de manera implícita el concepto de la posición relativa de dos segmentos en el espacio, que en este caso se cruzan con vectores libres perpendiculares. El estudiante 21 representa los desarrollos planos de la pirámide y el tetraedro. En la pirámide oblicua compuesta por los dos triedros trirectángulos, relaciona la arista del triángulo equilátero con la diagonal del cuadrado y el cateto con el lado del cuadrado. Veinte estudiantes son capaces de captar la tridimensionalidad, después de examinar las piezas de los puzles, realizar construcciones, y elaborar representaciones planas en perspectiva de las mismas, en las que plasman aspectos globales, como dibujar el tetraedro dentro del cubo y caracterizar la pirámide trirectángula.

Tabla 13. *Respuestas no previstas en la actividades de la sesión*

Act.	Acción creativa	Código alumno	No. de alumnos
1	Representación del desarrollo plano de T y P para comparar áreas de las bases, concluyen que P>T	14 y 16	2
1	Compara las alturas de P y T. Por medición directa obtiene que la altura de T es mayor que la altura de P. La altura de P es la mitad de la diagonal de la cara cuadrada de la base. La altura y la mitad de la diagonal corresponden a los catetos de un triángulo isósceles, de hipotenusa la arista del tetraedro y la longitud de los catetos es igual a la arista del cubo.	17	1
1	El Peso de P es mayor que el peso de T y las dos están hechas del mismo material, entonces volumen de P es mayor que el volumen de T.	19	1
2	Construyen tetraedros y pirámides dobles y concluyen que P no es el triple de T ya que el número de tetraedros T unidad que componen los cuerpos dobles es el mismo, aunque las pirámides unidad estén en relación 1:3.	7 y 12	2
2	Compone tetraedros y pirámides dobles y triples, menciona que aumentan su volumen de manera proporcional con P y T	11	1
3	Representa la pirámide oblicua compuesta por dos triedros trirectángulos	1,9,10,18	4
3	Representa la pirámide oblicua compuesta por dos triedros trirectángulos y un tetraedro adosado	7,10	2
3	Representa la base de la pirámide cuadrada, diferenciando en ella los 4 triángulos rectángulos isósceles.	10,13,21	3
3	Representa el cubo truncado	9	1
3	Representa el triedro trirectángulo Ttr	3,9,10,21	4

A través de las respuestas no previstas se refleja una de las características a las que hace mención Greenes en cuanto a que los estudiantes con talento matemático abarcan más de lo esperado en las actividades que se les plantea. Estas ideas se complementan con el estudio que hace Miller cuando señala la capacidad que tienen estos estudiantes para transferir sus conocimientos a nuevas situaciones.

La variable 2 identifica el uso de fórmulas que hacen los estudiantes. Describimos cuándo y cómo emplean fórmulas los estudiantes. Al incluir el tetraedro dentro del cubo, relacionaron longitudes, reconociendo que la arista del tetraedro es igual a la diagonal de la cara del cubo. El dibujo plano que hicieron del tetraedro dentro del cubo llevó a la mayoría de los alumnos a apreciar que se complementaba con cuatro pirámides triangulares o tetraedros trirectángulos, apreciando que estas encajan en el ángulo recto del cubo y que por tanto su altura es igual a la del cubo, esto les permite hallar el volumen de T prescindiendo de hallar su altura.

Todos los estudiantes salvo uno de ellos, hallan el volumen de la pirámide trirectángula, apreciando que corresponde a la sexta parte del volumen del cubo. Esto es importante, pues a partir de este volumen establecieron la relación de proporcionalidad entre el volumen de la pirámide cuadrada y el tetraedro, y de estos dos en relación con el volumen del cubo. Hemos percibido que cuatro estudiantes no emplean fórmulas para hallar el volumen de la pirámide trirectángula, pues lo hacen por truncamientos reiterados, reproduciendo lo que se les presentó en clase. Para ello realizan una explicación minuciosa, acompañada de dibujos aclaratorios en perspectiva (1, 4 y 12), tanto de las sucesivas pirámides como de los cubos que se construyen. Esto indica que dichos estudiantes han seguido el razonamiento con atención y son capaces de reproducirlo con sus palabras y con sus dibujos.

Las relaciones (1:6 entre la pirámide trirectángula y el cubo, 1:2 entre el triedro trirectángulo y el tetraedro, y 1:4 entre el triedro trirectángulo y la pirámide), les lleva a apreciar que el volumen del tetraedro es la mitad del volumen de la pirámide, que era la relación que queríamos precisar. Con ello concluyen que el tetraedro tiene de volumen 1/3 del volumen del cubo. Todos los estudiantes razonaron en relación con el cubo para hallar el volumen del tetraedro T y la pirámide cuadrada P. En lugar de aplicar la fórmula tradicional están manejando su relación con el volumen del cubo.

La variable tres nos permitió observar el grado de eficacia alcanzado por los estudiantes para obtener la solución final, relacionando previamente longitudes al interior del cubo y empleando este resultado para relacionar diferentes volúmenes de tetraedros regulares y cubos de lados dados. Al ofrecer medidas de aristas y volúmenes a los estudiantes, establecen relaciones entre estos.. Demuestran capacidad de generalización cuando obtienen la regla general del volumen del tetraedro en función de su arista, el relacionar segmentos y volúmenes lo complementaron con la proporción 1:3 entre T y el cubo obtenida anteriormente, es decir se da el paso de la comparación a determinar la medida a través de longitudes. Incorporan el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la longitud de la arista del tetraedro que corresponde a la diagonal del cuadrado y el lado del cubo (V3). Se les orientó a que no lo hicieran por medida indirecta, formulas o teoremas que no manejan, en su lugar que advirtieran que con la diagonal de un cuadrado se construye un cuadrado de área la mitad del anterior. Sin embargo nadie utilizo el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de las alturas que en el caso de la pirámide cuadrada hubiera sido posible, especialmente cuando apreciaron que dos pirámides unidas forman un octaedro, con lo cual la altura es la mitad de la diagonal del cuadrado.

El desempeño de los estudiantes fue excepcional, siguieron la mayoría de los pasos. Realizaron representaciones gráficas de los poliedros en mención como también realizaron dibujos planos (V1). Explicaron el proceso de los truncamientos reiterados para hallar el volumen de la pirámide trirectángula, también lo hicieron empleando el método de descomposición entre otras formas (V2). En general demostraron eficacia para llegar a la solución final (V3), interrelacionando todo el proceso involucrado.

La variable V1 contempla los pasos más seguidos por los estudiantes los cuales se registran en la tabla 13. La variable V1 además incluye otros aspectos que se describen en la tabla 14.

Los resultados obtenidos en relación a las variables V1, V2, V3 aparecen registrados en la tabla 14.

Tabla 13. Resultados de las variables

Var.	Acción	No. de alumnos
V1	Compara la relación de orden entre los volúmenes de P y T examinando sus elementos.	21
V1	Identifica y analiza las piezas que componen el puzle de pirámides.	21
V1	Compone poliedros dobles y/o triples para precisar la relación entre los volúmenes de P y T, estudiando las descomposiciones que se pueden hacer de estos en tetraedros y pirámides unidad.	15
V1	Identifica un T dentro del cubo y lo dibuja	21
V1	Identifica el Ttr formado al introducir T en el cubo y lo caracteriza.	21
V1	Una vez hallado el volumen de Ttr lo emplea para establecer la relación precisa: "P es el doble de T".	21
V2	Halla el volumen de Ttr en relación al volumen del cubo y/o en relación a T comparando bases y alturas.	13
V3	Relaciona longitudes al interior del cubo y este resultado lo emplea con T y cubos de lados dados para obtener la regla general del volumen del tetraedro.	20

Se puede observar que las respuestas han sido variadas pero siempre en dirección a seguir la propuesta planteada a lo largo de todas y cada una de las actividades de la sesión de enriquecimiento

En los resultados hemos podido constatar que la caracterización que hacen Greenes, Miller y Freiman se cumple ampliamente en los estudiantes participantes en el estudio, destacándose la rapidez que presentan para aprender y aplicar las ideas matemáticas, mostrando flexibilidad para pasar de una actividad a otra y aplicarla a nuevas situaciones.

CAPITULO 5

CONCLUSIONES

En esta investigación estudiamos los razonamientos geométricos que hacen los estudiantes para averiguar cómo aprenden. Examinamos cómo justifican sus respuestas, en ellas pudimos ver los descubrimientos que obtuvieron a través del procesamiento de la información recibida y considerar a qué argumentos les condujo todas y cada una de las actividades planteadas.

Las conclusiones están en relación con los objetivos propuestos y también con respecto a las variables. En este apartado también mencionamos las posibles líneas abiertas.

El proceso ante todo se enfocó a la comparación de poliedros a través de la composición y la descomposición para establecer relaciones de orden entre estos (O1.1) Todo este proceso se centró en hallar la medida del volumen del tetraedro y la pirámide en relación con el cubo a través del rellenado de pirámides con pirámides diversas, y el puzle del tetraedro que se completa con 4 pirámides trirectángulas. Hallar el volumen del triedro trirectángulo fue relevante para que apreciaran la relación de proporcionalidad entre el volumen de la pirámide y el tetraedro (O1.2). En general siguieron el proceso de razonamiento propuesto para hallar el volumen de T. Algunos estudiantes fueron tan hábiles que hallaron el volumen del triedro trirectángulo por medio de procesos infinitos, lo cual muestra una gran riqueza, al prescindir de procedimientos en busca de fórmulas para insertarse en cálculos de comparación directa. Los alumnos siguieron con cierta facilidad el proceso de construcción para la obtención del volumen del tetraedro sin necesidad de fórmulas con lo cual pudimos detectar que los estudiantes con talento matemático, participantes en el estudio efectivamente desarrollaron estrategias eficientes, encontraron patrones y establecieron relaciones como se esperaba de acuerdo a la caracterización que hace Freiman de los estudiantes con talento matemático (O1.3).

Los estudiantes han seguido, completado y terminado las actividades diseñadas en la sesión de enriquecimiento, además las tareas puestas en marcha les permitió establecer el máximo de relaciones posibles, cumpliendo su función en el proceso instructivo; probando lo que afirmó Freiman cuando se refirió a la persistencia con que enfrentan estos estudiantes la tarea, sin abandonarla, y al mismo tiempo confirmando su competencia para construir nexos y relaciones. Alcanzaron reglas generales que no necesitan medidas indirectas para obtener el volumen del tetraedro en relación a longitudes de las aristas, sino que la obtuvieron en relación al volumen del cubo (O1.4).

En relación al objetivo O2.1 los pasos más seguidos se dieron mediante las siguientes acciones:

El análisis comparativo del volumen del tetraedro regular y la pirámide cuadrada de caras triángulos equiláteros, estudiando cuál tiene mayor volumen.

La obtención de la relación entre el volumen de T y P, para posteriormente relacionarlos con el cubo.

El cálculo del volumen del tetraedro y la pirámide cuadrada, empleando como elemento de conexión el volumen de la pirámide trirectángula.

Los pasos que han resultado más difíciles a los estudiantes han sido la construcción de las figuras triples y la obtención del volumen de la pirámide trirectángula a través del proceso de truncamientos reiterados.

De acuerdo al objetivo O2.2 que estudia las respuestas originales y creativas, entre otros aspectos los estudiantes realizaron representaciones planas del triedro trirectángulo, del cubo truncado, desarrollos planos de T y P, establecieron relaciones de volumen y peso entre dos poliedros elaborados con el mismo material, relacionaron longitudes tales como la mitad de la diagonal de la base de P y su altura.

En general durante todo el proceso manifestaron su habilidad para comparar volúmenes, componer figuras dobles y triples, hacer representaciones planas de figuras tridimensionales. Demostraron creatividad al desarrollar representaciones graficas que no estaban previstas.

Entre los estudiantes más destacados se encuentran los que hallaron el volumen de la pirámide trirectángula a partir de procesos infinitos (V2) demostrando agilidad mental y capacidad de interpretación. Observaron que no todas las pirámides se pueden descomponer. Esta actividad contiene bastante información ya que en ella se integran varios procesos. Entre las acciones a realizar están las de apreciar la bidimensionalidad y adaptarla al campo tridimensional (V1), descomponer el triedro trirectángulo, completar los cubos truncados que se obtienen, percibir que los infinitos cubos cubren una parte de la mitad del cubo grande y que la suma de sus áreas es un tercio del área del cuadrado grande. La coordinación de las acciones da como resultado que obtengan la relación 1:6 entre el triedro y el cubo, todo este proceso está en consonancia con el distintivo que hace Freiman sobre los estudiantes con talento matemático, refiriéndose a su capacidad para situar la esencia de los problemas, construyendo los nexos necesarios para concluir su resolución. Los estudiantes pusieron en juego sus habilidades visuales cuando trabajaron con el proceso infinito de truncamientos para hallar el volumen del triedro trirectángulo.

En la fase inicial de comparación entraron en contacto con las figuras, para apreciar los elementos que las componen. Es decir realizaron una percepción visual de los objetos físicos tridimensionales. El material manipulativo empleado durante la sesión jugó un papel importante, especialmente fue de utilidad para observar que los poliedros en estudio se componen a su vez de otros poliedros que están relacionados entre sí, es decir establecieron relaciones entre las partes al observar que cada pieza se compone de pirámides y tetraedros con lo cual pudieron comparar cantidades de volumen. Percibieron las diferentes vistas de cada pieza así como su forma. Dieron importancia a la relación existente entre las formas de las caras de las piezas las cuales están ligadas a cuadrados, triángulos equiláteros, trapecios, identificando cuales de ellas se debían hacer visibles. Dibujaron los desarrollos planos de algunas pirámides. Los estudiantes fueron muy hábiles en el empleo de estos materiales, hallaron en algunas piezas simetrías respecto a un plano ya que al cortarlas por este se obtienen dos figuras iguales de volumen la mitad de la original. Realizaron composiciones de poliedros de lados dobles y triples lo cual entre otras cosa les permitió establecer semejanzas entre estos.

Distinguieron que piezas debían colocar en las capas inferior, intermedia y superior de los poliedros dados, decidiendo como encajarlas entre sí (V3).

Además de establecer comparaciones entre volúmenes, también relacionaron longitudes de segmentos en el cubo. La única medida indirecta se realizó para determinar la longitud de la arista del cubo en relación a la arista del tetraedro, la cual corresponde a la diagonal de la cara del cubo. Se les sugirió que apreciaran que con la diagonal de un cuadrado se construye un cuadrado de área doble del anterior, pero muchos alumnos llegaron a obtener la longitud de la diagonal de la cara del cubo mediante el teorema de Pitágoras. (V3). Pasaron del juego a la búsqueda de relaciones geométricas (V1 y V3). Lo anterior da prueba de la competencia de los estudiantes para pensar de forma flexible y creativa y de su habilidad para establecer relaciones como asevera Miller.

Se trabajó con el rellenado de pirámides para no tener que trabajar la medida indirecta cuando ello implica trabajar con los teoremas del baricentro, la mediana etc. (V2 y V3) En este planteamiento seguimos la línea de Vergnaud quien contempla dos aspectos del volumen, a saber el unidimensional cuando se mide volúmenes empleando volúmenes, es decir el empleo de unidades de la misma naturaleza para hallar su medida, y el bidimensional en el que se emplean otras dimensiones para medirlo.

El estudio permite observar el camino que los estudiantes con talento recorren en el proceso de captación del concepto de volumen como una cualidad diferente de otras magnitudes., valorando además las diferencias entre las áreas básicas las cuales dependen de la forma de la base. Aplican la propiedad de proporcionalidad entre el volumen y el peso de dos figuras que están hechas del mismo material (V2) (Saiz, 2003, Potari y Spiliotopolou, 1996)

El rellenado de las pirámides a partir de piezas conformadas por pirámides y tetraedros, les lleva a situaciones de comparación más precisas como la obtención y justificación de las relaciones 1:2 entre T y P. y 1:6 entre la pirámide trirectángula y el cubo (V1). Cuando encuentran el volumen de la pirámide trirectángula por “descomposición” lo que hacen es obtener la relación existente entre las cantidades de volumen, de esta pirámide con el tetraedro. La comparación la hacen a partir de la proporcionalidad, esta acción la han realizado de manera amplia como un paso previo a la medida que no se llega a efectuar. En esta comparación, están haciendo uso de una relación indirecta, basada en el principio de Cavalieri (V2). En todo el proceso las comparaciones fueron muy valiosas. En el desarrollo de estas tareas verificamos la declaración de Miller en cuanto a la capacidad que presentan para establecer relaciones entre objetos matemáticos y resolver problemas de manera flexible y creativa.

Hasta finalizar las actividades, no se hacen mediciones, lo que se hace es comparar cantidades de volumen, por tanto no hay aplicación de medida directa en ningún momento, ya que no se ha definido una unidad de medida.

El trabajo que presentamos emplea el concepto de volumen considerado como lugar que ocupa el cuerpo tridimensional. No hemos aludido a las unidades de volumen (rellenado por la unidad), ni al desplazamiento (Sáiz, 2003, Potari & Spiliotopoulou, 1996). Apreciamos que estos alumnos manejan la idea de conservación del volumen, por descomposición y recomposición, aunque no hemos tenido la oportunidad de comparar con otras magnitudes, salvo el peso, cómo lo hizo un grupo de estudiantes.

Posibles líneas abiertas.

Es preciso tener en cuenta que en este estudio no hemos empleado un proceso de utilización de unidades de medida. Convendría que en futuras investigaciones se abordará este aspecto específico.

Está pendiente completar este proceso de razonamiento mediante la introducción de las etapas de medición que den mayor sentido de la medida (Moreno et al., 2015), examinando qué tipo de deformaciones permite encajar las unidades de volumen, generalmente cúbicas, en pirámide.

Trabajar las habilidades de visualización utilizando material manipulativo conformado por varios puzles es una posible línea abierta. Para ello sugerimos incluir entre otros aquellos puzles elaborados con materiales transparentes que permiten observar la composición del interior de las piezas, las posiciones relativas de rectas y planos. A través de la construcción y composición de figuras se potencia la percepción de la posición en el espacio, la discriminación visual y la memoria visual entre otro

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Blanco, R., Rios, C. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 49-60). Santiago de Chile: Orealc-UNESCO.

Enochs, L.G. y Gabel, D. (1984). Preservice Elementary Teachers' Conceptions of Volume. *School Science and Mathematics, 84*(8), 670-690.

Flores, P. (2006). Una pirámide rellena de…pirámides. En Flores, P., Ruiz, F. y De la Fuente, M. (Eds.), *Geometría para el siglo XXI* (pp. 221–247). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y SAEM Thales.

Flores, P., Ramírez, R. y Rodríguez, M. (2014). *Volumen del tetraedro*. Seminario ESTALMAT, Barcelona.

García, J. (s.f.). *Arquimat. El Juego de las matemáticas y la construcción*. Creaciones didácticas Nardil.

González-López, M.J. y Flores, P. (2001). Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las Matemáticas: el caso del volumen. *Educación Matemática, XIII*(1), 94-106.

Grupo Beta (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Síntesis.

Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Madrid, Síntesis

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México D.F.: Mc Graw Hill.

Moreno, F., Gil, F. y Montoro, A.B. (2015). Sentido de la medida**.** En Flores, P. y Rico, L. (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación* Primaria (147-168), Madrid, Pirámide.

Munarriz, B. (1992). Técnicas y métodos en Investigación cualitativa. En Muñoz, J.M. y Abalde, E. (Eds.), *Metodología educativa I* (pp. 101-116). Bilbao: Universidad del País Vasco.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, Virginia, NCTM

NCTM (2001). *Principios y estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Granada, Proyecto Sur, SAEM THALES.

Olmo, M.A., Moreno, M.F. y Gil, F. (1989). *Superficie y Volumen*. Madrid: Síntesis.

Osorio, E. (2009). *La matemática recreativa, un área de intervención educativa con niños con altas capacidades intelectuales*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.

Potari, D. y Spiliotopoulou, V. (1996) Children´s Approaches to the Concept of Volume. *Science Education 80*(3), 341-360.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tésis doctoral. Universidad de Granada.

Saiz, M. (2002). Primary teachers' conceptions about the concept of volume: The case of volume measurable objects. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty, and J. T. Zilliox (Eds*)*, *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 95 –102). Honolulu, Hawaii: PME.

Sáiz, M. (2003). Algunos objetos mentales relacionados con el concepto de volumen de maestros de primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 8*(18), 447-478.

Sáiz, M. (2005). Transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del volumen. Documento de trabajo de la autora. Disponible en: http://es.scribd.com/doc/52362622/Una-discusion-sobre-el-concepto-matematico-de-volumen-con-fines-didacticos.

Sáiz, M. (2007). *El Volumen ¿Por dónde empezar?* Recuperado en www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf

Salto, C. (2013). *Sentido espacial en un juego de espejos*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.

Segovia, I., Castro, E. y Flores, P. (1996). El área de un rectángulo. *Revista UNO*, 10, 63-77.

ANEXOS

Anexo 1. Formulario.

Durante el desarrollo de la sesión se entregó un formulario por estudiante consistente en 5 actividades, comenzando por examinar y justificar la relación entre los volúmenes de T y P, construyendo composiciones con los puzles para que precisar la relación “el volumen de P es el doble de T”. Posteriormente se pidió dibujar el tetraedro dentro del cubo y examinar el volumen del Ttr, para terminar pidiendo la fórmula que permite calcular el volumen de tetraedro en función de la longitud de su arista y la obtención de un tetrabrick en forma de tetraedro regular.

Sesión: 11 Fecha: 18/1/2014 Título: FÓRMULAS. Volumen de PIRÁMIDE

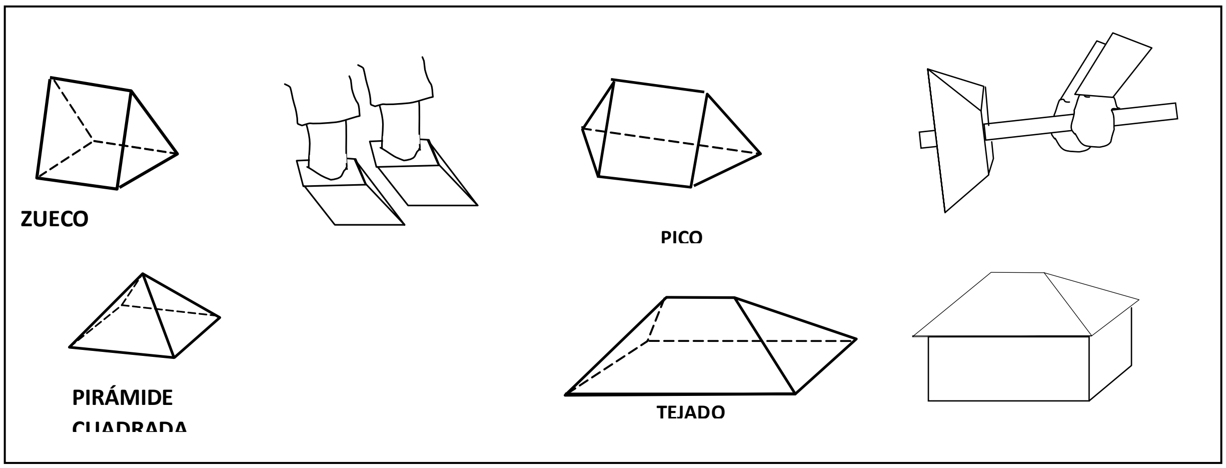
Objetivo: Razonar visualmente. Comprender el concepto de volumen y la fórmula de volumen de pirámide.

Contenidos: Volumen. Significado de las fórmulas de las pirámides. Papel de las fórmulas en Matemáticas.

Actividad 1: Analizar el volumen del **T**etraedro regular y la **P**irámide cuadrangular de caras triángulos equiláteros. Estudiar cuál tiene mayor volumen, buscar razones. Escribir a continuación las relaciones encontradas.

Puzle de Pirámide: Para poder compararlas mejor vamos a formar **T** y **P** más grandes. Emplearemos el Puzle de Pirámides.

<u>Actividad 2 a</u>: Identifica y analiza las piezas que componen el Puzle de PIRÁMIDES (Pirámide, Zueco, Tejado, Pico).



<u>Actividad 2 b</u>: Forma **T**etraedros de lado doble y triple, Pirámides de lado doble y triple, utilizando el puzle de pirámides. Compara estas figuras, completando lo obtenido en la actividad 1, para estudiar la relación entre los volúmenes de **T** y **P**.

Identifica qué **P**irámides cuadradas y **T**etraedros forman cada pieza del puzle

Pico = Pirámide =

Tejado = Zueco =

Escribe a continuación, de manera justificada, todos los resultados obtenidos sobre los volúmenes del **T**etraedro y la **P**irámide.

<u>Actividad 3</u>.-

a) Identificar un Tetraedro dentro de un cubo. Dibujar el Tetraedro en el cubo.

b) Identificar qué figuras se forman al incluir el Tetraedro dentro del cubo. Indicar cuántas caras tienen, qué son esas caras, qué relación tienen con los datos del cubo.

c) Determina el volumen de las figuras en que queda descompuesto el cubo, en **T** y **P**. Obtén el volumen del Tetraedro trirectángulo ($\mathbf{T_{tr}}$) en relación al volumen del cubo.

Escribe las conclusiones sobre el volumen del **T**etraedro y la **P**irámide, obtenidas de su relación con el cubo.

<u>Actividad 4</u>.- Calcula los volúmenes de **T**etraedros y **P**irámides de lados dados. Obtén reglas generales.

Arista tetraedro		10 cm		L_T	
Arista Cubo	10cm		L_C		
Volumen Cubo					
Volumen Tetraedro					½ litro

<u>Actividad 5</u>. Obtener en parejas, un tetrabrick de forma de **T**etraedro regular, con un volumen interior de ½ litro.

Anexo 2. Cantidad de poliedros unidad para construir poliedros de lado n.

Para complementar el proceso que conlleva a precisar la relación "el volumen de P es el doble de T", además de la actividad 1 se propone la actividad dos, donde se pide construir poliedros dobles y triples, lo cual les permitiría confirmar su hipótesis de partida de que el volumen de P es mayor que el de T. Para lo cual es útil analizar la cantidad de pirámides y tetraedros unidad, necesarios para componer los poliedros semejantes de lado n veces el lado del triángulo equilátero. En 1ª tabla 15 aparecen las cantidades de tetraedros y pirámides de arista el lado del triángulo equilátero, empleadas para ello.

Tabla 15: Relaciones entre volúmenes de P_i y T_i[3]

Lado	Tetraedro		Pirámide		Observaciones
	Tetraedros	Pirámides	Tetraedros	Pirámides	
1	1	0	0	1	
2	4	2	4	6	P_2-T_2=$6P_1$
3	11	8	16	18	P_3-T_3=$5T_1$+$10P_1$
4	24	12	40	43	
5	45	40	80	84	

Entre otras cosas en la categoría 6 apreciamos que los alumnos se percatan de que, aunque 6P es el triple de 2P, como en P_2 y T_2 hay también 4T, P_2 no triple de T_2. En el

[3] La notación P_i y T_i corresponde a las pirámides y tetraedros de lado i.