



**UNIVERSIDAD
DE GRANADA**

**Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática**

TRABAJO FIN DE MÁSTER

**SIGNIFICADOS QUE LE ATRIBUYEN AL CONCEPTO DE LÍMITE
FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO ESTUDIANTES
UNIVERSITARIOS DE BIOLOGÍA E INGENIERÍA EN
QUÍMICA INDUSTRIAL DE LA UNIVERSIDAD
NACIONAL DE COSTA RICA (UNA)**

Yosenith González Flores

Setiembre, 2018



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática

Curso 2017/2018

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela del doctor D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo y del doctor D. José Antonio Fernández Plaza del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Yosenith González Flores, dentro del Máster Universitario en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Yosenith González Flores

VºBº del tutor

VºBº del cotutor

Fdo.: D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Fdo.: D. Jose Antonio Fernández Plaza

RESUMEN

Se presentan el proceso y los resultados de una investigación cuyo objetivo principal fue analizar el significado que le atribuyen al concepto de límite finito de una función en un punto estudiantes universitarios de Biología e Ingeniería en Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica. La investigación es de tipo cualitativa y de naturaleza descriptiva. Se realizó un estudio de las respuestas brindadas por los 38 estudiantes a unas tareas relacionadas con la definición, las representaciones y los sentidos y modos de uso del concepto de límite.

SUMMARY

The process and the results of a research are presented whose main objective was to analyze the meaning attributed to the concept of finite limit of a function in a point university students of Biology and Engineering in Industrial Chemistry of the National University of Costa Rica. The research is qualitative and descriptive in nature. A study of the answers given by the 38 students to some tasks related to the definition, the representations and the senses and ways of using the limit concept was made.

*A mí esposo por brindarme su apoyo incondicional en todo momento,
sin su motivación y amor no lo hubiese logrado.
¡Este es uno más de nuestros logros!*

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar el más sincero agradecimiento a mi tutor, el Doctor Juan Francisco Ruiz Hidalgo, por todo su apoyo y guía en este proceso, por su dedicación, compromiso y esfuerzo invertido en este trabajo desde su inicio, hasta su culminación. Igualmente agradezco a mi cotutor el Doctor José Antonio Fernández Plaza por sus invaluables sugerencias y aportes.

Agradezco al Director de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, el Máster Randall Hidalgo Mora, a los docentes del I ciclo del 2018 del curso MAT 002 Cálculo 1 y a sus respectivos estudiantes por su colaboración con el estudio.

Por último, pero no menos importante, agradezco a mi esposo por ayudarme en todo momento en este proceso, por su motivación, amor y paciencia.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO I. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	1
1.1 Introducción	1
1.2 Delimitación del problema de investigación	2
1.3 Objetivos de la investigación	3
CAPÍTULO II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	4
2.1 Pensamiento matemático avanzado	4
2.2 Antecedentes	5
2.3 Significado de los conceptos matemáticos escolares	8
2.3.1 Estructura conceptual	9
2.3.2 Sistemas de representación	10
2.3.3 Sentidos y modos de uso	10
CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	12
3.1 Tipo de estudio	12
3.2 Descripción de las fases de la investigación	12
3.3 Selección de los sujetos de investigación	13
3.4 Instrumentos para la recolección de la información	14
3.5 Descripción de las tareas del cuestionario 1	15
3.6 Método para el análisis de la información del cuestionario 1	16
3.7 Descripción de las categorías de las cinco tareas del cuestionario 1	16
CAPÍTULO IV. RESULTADOS	19
4.1 Análisis de la tarea 1	19
4.2 Análisis de la tarea 2	20
4.2.1 Categorías: (1) límite como objeto (L. Obj) y (2) límite como proceso (L. Proc)	21
4.2.2 Categorías: (3) referencia a las variables x e y (R. Var) y (5) coordinación entre las variables x e y (C. Var)	22
4.2.3 Categoría: (4) descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc)	24
4.2.4 Categoría: (6) símbolos matemáticos, notaciones (SyN)	24
4.2.5 Categorías: (7) referencia explícita a un sistemas de representación distinto al numérico o simbólico (SR) y (8) vinculación entre el límite y la imagen (LI)	25
4.2.6 Categorías: (9) términos (Term) y (10) condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)	26
4.2.7 Categoría: (11) propiedades matemáticas (Prop. M)	27
4.2.8 Categoría (13) aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad (Alcan. Y Reb)	28
4.3 Análisis de la tarea 3	28
4.3.1 Categorías: (1) límite como objeto (L. Obj) y (2) límite como proceso (L. Proc)	30
4.3.2 Categorías: (4) descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc) y (12) tabla de valores (T. Val)	31
4.3.3 Categorías: (5) coordinación entre las variables x e y (C. Var) y (11) propiedades matemáticas (Prop. M)	32
4.3.4 Categoría: (6) símbolos matemáticos, notaciones (SyN)	33

ÍNDICE DE CONTENIDO

4.3.5 Categorías: (8) vinculación entre el límite y la imagen (LI) y (10) condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)	34
4.3.6 Categoría (13) aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad (Alcan. Y Reb)	35
4.4 Análisis de la tarea 4	36
4.5 Análisis de la tarea 5	37
CAPÍTULO V. SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES	39
5.1 Síntesis de los resultados	39
5.1.1 Aspectos estructurales objeto/proceso	39
5.1.2 Aspectos estructurales destrezas prácticas de cálculo	40
5.1.3 Sentidos y modos de uso	40
5.2 Síntesis de las categorías modales de las tareas del cuestionario 1 organizadas por carrera	41
5.3 Conclusiones	42
5.4 Aportes de la investigación	44
5.5 Limitaciones de la investigación	45
5.6 Futuras líneas de investigación	45
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	47
ANEXOS	53

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Tipos de representaciones de los sujetos	29
---	----

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Triángulo semántico de un concepto	8
Figura 2. Triángulo semántico de un concepto matemático escolar	9
Figura 3. Representación gráfica, simbólica y verbal	30
Figura 4. Representación del límite como objeto y como proceso	31
Figura 5. Representación de EBM1202	32
Figura 6. Representación de EBM1313	32
Figura 7. Representación de EBM0125	33
Figura 8. Representación de EQM0104	33
Figura 9. Representación de EBH0309	34
Figura 10. Representación de EQH0205	34
Figura 11. Representación de EBM0125	35
Figura 12. Representación de EQH0221	35
Figura 13. Representación de EBM0606	35
Figura 14. Representación de EBH0705	35
Figura 15. Representación de EBH1203	36

CAPÍTULO I. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

La Matemática se considera de gran utilidad en la vida del ser humano como herramienta indispensable en muchos campos. Permite resolver diversos problemas en variados contextos tales como el personal, laboral, científico y social. Por lo tanto, es fundamental para el desarrollo de áreas del conocimiento como las finanzas, las ingenierías, la economía, la computación, la administración, la física, entre otras (Bartle y Sherbert, 2004).

Específicamente, el cálculo diferencial e integral fue descubierto o construido por Newton y Leibniz durante los siglos XVII y XVIII, dando un gran aporte en esa época y destacándose en la actualidad como una herramienta de investigación de problemas científicos. Newton y Leibniz obtuvieron resultados, métodos y aplicaciones de manera intuitiva; un tratamiento más riguroso se desarrolla varias décadas después. Un caso particular es el concepto de límite de una función, que se origina como respuesta teórica a los métodos infinitesimales, (Ruiz, 2003).

La construcción de la noción de límite ha sido muy lenta a lo largo del tiempo, a tal punto que hubo que esperar hasta el siglo XIX, con Weierstrass, para que la frase *tan pequeño como se quiera* obtuviera un rigor matemático que dejara de lado la ambigüedad. Nótese como la epistemología histórica muestra un camino lleno de imprecisiones y problemas, por lo tanto, esta noción matemática debe ser enseñada a través de un análisis profundo que implique esencialmente: la epistemología del concepto, en cuanto a su desarrollo histórico; el profesor a través de sus creencias; y los estudiantes respecto a la evolución de sus concepciones (Contreras y García, 2015).

La relevancia de la noción de límite dentro del currículo, ha generado que sea un tópico de estudio en los cursos básicos de matemática de las carreras universitarias, tal es el caso de las carreras de Biología e Ingeniería en Química Industrial impartidas por la Universidad Nacional de Costa Rica. Los estudiantes de estas carreras deben matricular el curso MAT 002 Cálculo 1, el cual no tiene un enfoque formal, por tanto, la presentación de los conceptos se hace de forma intuitiva, es decir, no se hacen definiciones formales ni demostraciones matemáticas de los resultados. Los contenidos que se estudian son límites, derivadas, aplicaciones de la derivada, integrales y aplicaciones de la integral.

1.2 Delimitación del problema de investigación

La comprensión del concepto de límite no es sencilla, algunos investigadores han manifestado que se observa una reiteración de conflictos cognitivos o dificultades en el aprendizaje de esta noción por los estudiantes (Artigue, 1995; Blázquez y Ortega, 1998; Juter, 2007a; Juter, 2007b; Romero, 1997; Sierpinska, 1987; Tall, 1980; Tall y Vinner, 1981; Vrancken, Gregorini, Engler, Muller, y Hecklein, 2006). Esta complejidad ha generado que desde la Didáctica de la Matemática surjan investigaciones que buscan indagar en distintos aspectos de la comprensión del límite (Estrella, 2015; Fernández-Plaza, 2015; Monaghan, 1991; Sánchez, 2012; Sierra, González, y López, 2000; Swinyard, 2011; Williams, 1991).

Por otra parte, el concepto de límite, la noción de infinito y continuidad de una función, son contenidos prioritarios de las investigaciones sobre pensamiento matemático avanzado (Tall y Vinner, 1981). En el caso de Costa Rica, no se conocen estudios en esta línea, por lo tanto, es de interés generar procesos de investigación.

Por lo expuesto, se espera que esta investigación sirva de base y brinde lineamientos metodológicos para estudios posteriores. Específicamente, este trabajo pretende conocer cuál es el significado que le atribuyen al concepto de límite los estudiantes universitarios, por lo que se plantea el siguiente problema de investigación **¿Cuál es el significado que le atribuyen al concepto de límite finito de una función en un punto estudiantes universitarios de Biología e Ingeniería en Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica?** Además de los aportes a la investigación, se espera que este trabajo sea de utilidad para la mejora de los procesos de enseñanza del curso MAT 002 Cálculo I u otros similares.

1.3 Objetivos de la investigación

Objetivo general

Analizar el significado que le atribuyen al concepto de límite finito de una función en un punto estudiantes universitarios de Biología e Ingeniería en Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica.

Objetivos específicos

O1. Diseñar un instrumento para determinar las concepciones sobre el concepto de límite finito de una función en un punto que tienen los estudiantes de Biología e Ingeniería en Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica.

O2. Describir los aspectos estructurales objeto/proceso, presentes en las definiciones y en las representaciones del concepto de límite finito de una función en un punto, que manifiestan los estudiantes de Biología e Ingeniería en Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica.

O3. Describir los aspectos estructurales destrezas prácticas de cálculo, presentes en las definiciones y en las representaciones del concepto de límite finito de una función en un punto, que manifiestan los estudiantes de Biología e Ingeniería en Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica.

O4. Describir los sentidos y modos de uso sobre el concepto de límite finito de una función en un punto, que atribuyen los estudiantes de Biología e Ingeniería en Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica.

CAPÍTULO II. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este capítulo se exponen de manera breve tres apartados. El primero corresponde a algunos elementos del pensamiento matemático avanzado; el segundo expone investigaciones sobre concepciones intuitivas y lenguaje del cálculo, conflictos cognitivos referentes al concepto de límite y sobre definiciones alternativas del concepto de límite y el estudio de fenómenos asociados. Y el tercero presenta algunas ideas sobre los significados de los contenidos matemáticos escolares.

2.1 Pensamiento matemático avanzado

Este trabajo se ubica dentro de la Didáctica del Análisis Matemático, específicamente en el Pensamiento Matemático Avanzado (AMT por sus siglas en inglés o PMA por sus siglas en español). No hay un consenso sobre lo que se entiende por PMA, sin embargo, si lo hay sobre la dificultad de delimitar la transición entre el pensamiento matemático elemental y el PMA (Azcárate, Camacho y Sierra, 1999; Edwards, Dubinsky y Mc Donald, 2005; Harel y Sowder, 2005; Selden y Selden, 2005; Tall, 1992; Zaskis y Applebaum, 2007).

El PMA surge como un grupo de trabajo en 1985 en el seno del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education), con el propósito de profundizar en las investigaciones cognitivas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de nociones relacionadas con el cálculo infinitesimal. En el PMA destacan procesos cognitivos abstractos como definir, demostrar y formalizar, que, aunque no son procesos exclusivos de las matemáticas superiores, adquieren mayor importancia en tales cursos. En las matemáticas elementales las descripciones se realizan con base en la experiencia, mientras que, en niveles más altos de las matemáticas, las propiedades de los objetos se construyen a partir de definiciones (Azcárate y Camacho, 2003).

En el 13 International Congress on Mathematical Education (ICME 13-2016) se discutió sobre las principales evoluciones de la investigación en el campo de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, con un enfoque particular en los temas de investigación asociados al límite, derivada e integral, con una visión general sobre marcos teóricos utilizados, y evoluciones puntuales abordadas a través de las principales tendencias en el campo. También se brindó una descripción del estado de la instrucción del cálculo tanto desde el punto de vista europeo como americano, y se incluyó una bibliografía ampliada con algunas de las

referencias más importantes sobre este tema (Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces, y Torner, 2016).

2.2 Antecedentes

A continuación, se presentan investigaciones relacionadas con el concepto de límite de una función, organizadas en tres grupos: investigaciones sobre concepciones intuitivas y el lenguaje del cálculo, investigaciones sobre conflictos cognitivos referentes al concepto de límite, y finalmente, investigaciones centradas en la introducción en el aula de definiciones de límite alternativas a la formal y en el estudio de fenómenos asociados.

Investigaciones sobre concepciones intuitivas y el lenguaje del cálculo

Algunas investigaciones sobre las concepciones del límite en estudiantes de secundaria y de universidad evidencian que muchos tienen una noción intuitiva del límite y lo asocian a algo inalcanzable. Para describirlo utilizan términos tales como *tender*, *aproximar*, *alcanzar*, *rebasar* y *límite*. En algunos casos, estos términos son empleados en clase por los profesores, y los estudiantes los usan con un sentido cotidiano que no necesariamente coincide con el significado matemático (Blázquez, 1999; Blázquez, 2000; Estrella, 2015; Fernández-Plaza, 2015; Monaghan, 1991; Williams, 1991). En algunos casos, estas concepciones y los términos empleados por los estudiantes pueden relacionarse con concepciones históricas planteadas por matemáticos tales como D'Alembert que afirmaba que el límite no se puede alcanzar y Cauchy para quien es alcanzable (Sierra, González, y López, 2000). Aunque los estudiantes puedan tener una noción intuitiva y personal sobre el límite, a partir de tales nociones algunos son capaces de reconstruir de manera asistida la definición formal (Swinyard, 2011).

Oehrtman (2009) caracterizó las siguientes metáforas relacionadas con las propiedades que los estudiantes atribuyen al límite de procesos infinitos variados:

- La metáfora *colapso* se percibe cuando identifican la longitud de un segmento con el límite de las áreas de los rectángulos con base dicho segmento cuando las alturas tienden a 0; es decir, la medida k -dimensional del límite geométrico se sustituye por la medida $(k-1)$ -dimensional de dicho límite. Asimismo, en relación con sucesiones de rectángulos cuya área se mantiene constante y geoméricamente convergen a una recta el paso al

límite de las áreas de los rectángulos (la constante) no coincide con el área del límite que es nula.

- La metáfora *aproximación* se aprecia cuando se concibe el límite como el proceso de aproximarlos indefinidamente.
- La metáfora “*cercanía*” se observa cuando conciben al límite como el punto más cercano a los valores de la función alrededor del punto, por ejemplo: uno es el valor más cercano a $0.999\ldots$.
- La metáfora *limitación física*, se percibe cuando los escolares manifiestan que debido al umbral de percepción (desde la escala natural hasta la escala subatómica) el límite se identificará con las aproximaciones, si bien, otros asumen el carácter infinitesimal del proceso, por ejemplo, la distancia entre $0.999\ldots$ y uno, se considera infinitamente pequeña, pero nunca nula.
- Finalmente, se observa la metáfora *infinito como número* se observa cuando los estudiantes tratan al infinito como un número muy grande.

Los estudiantes pueden utilizar la noción de límite de forma intuitiva o cada vez más formal. En este sentido, Sánchez (2012) propuso criterios para decidir si un usuario de una definición de límite finito de una función en un punto utiliza el pensamiento matemático elemental o avanzado.

Investigaciones sobre conflictos cognitivos referentes al concepto de límite

La transición entre la definición informal y formal del límite puede generar muchos conflictos en los estudiantes. Específicamente, se pueden trasladar propiedades implícitas de la noción informal a la formal tales como considerar al límite como un proceso dinámico y no con un número (Tall, 1980; Tall y Vinner, 1981).

Existen dificultades asociadas a la noción de límite como la resistencia a aceptar la notación decimal periódica cuando el periodo es nueve para un número entero, y a aceptar la no existencia del límite, lo que genera asignaciones incorrectas para su valor. Asimismo, se presentan conflictos como la incomprensión de que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto, la incorrecta interpretación de los límites laterales, las manipulaciones algebraicas erróneas de las leyes de las funciones, el asumir que el cálculo del límite es siempre por sustitución y las dificultades para pasar de un sistema de representación a otro

(Blázquez y Ortega, 1998; Romero, 1997; Vrancken, Gregorini, Engler, Muller, y Hecklein, 2006).

Algunas de las concepciones de los estudiantes respecto al límite de procesos infinitos tienen su origen en obstáculos epistemológicos tales como *el carácter definido o indefinido* del límite según el cual consideran que éste se puede calcular de forma precisa o solo se pueden brindar aproximaciones; la *actitud finitista* según lo cual se niega el infinito o se considera que lo infinito no está acotado o la *actitud infinitista* que admiten el carácter infinito tanto en procesos no acotados como en acotados y finalmente las posturas *empiricistas* que sostienen que todo procedimiento matemático es una construcción temporal y personal (un algoritmo), y asumen únicamente la existencia del infinito potencial o las posturas *discursivas* que tienen en cuenta, procedimientos de “paso al límite” ya establecidos (Sierpinski, 1987).

Investigaciones centradas en la introducción en el aula de definiciones de límite alternativas a la formal y en el estudio de fenómenos asociados

Algunas definiciones del concepto de límite en el ámbito escolar pueden ser informales y, por tanto, presentar indicios de imprecisión y subjetividad, en otros casos, pueden ser formales y rigurosas, con un nivel mayor de abstracción, por tal razón, no tan apropiadas para los estudiantes de secundaria y de los primeros cursos universitarios (Blázquez, Gatica y Ortega, 2009; Blázquez, Ortega, Gatica, S y Benegas, 2006).

Existen propuestas alternativas a las definiciones informales y formales tradicionales del concepto de límite que superen los vicios de imprecisión y subjetividad en el caso de las informales y los excesos de rigor en las formales. En este sentido, Blázquez y Ortega (2002) presentaron una definición rigurosa, con menos formalismo y más dinámica para los estudiantes: *el límite de una función f en $x = a$ es L , si para cualquier aproximación K de L ($K \neq L$), existe un entorno reducido de a , tal que las imágenes de todos sus puntos, están más próximas a L que K .* Blázquez, Ortega, Gatica, S y Benegas (2006) contrastaron con estudiantes de ingeniería la conceptualización métrica de límite, dada por Weierstrass, con la conceptualización dada anteriormente por Blázquez y Ortega (2002). Determinaron que los estudiantes comprendieron mejor la última, quizás porque es menos abstracta, es fácil de recordar y es más simple para aplicar.

Por su parte, Bokhari y Yushau (2006) reestructuraron la definición usual de límite (ε, δ) e introdujeron una definición alternativa denominada *Local (L, e) -aproximación de una función de una variable*.

Por otro lado, la definición de límite permite observar la presencia de fenómenos de aproximación. Dichos fenómenos se han delimitado en el currículo mediante el estudio de libros de texto, en las producciones de los estudiantes y profesores de matemáticas en formación inicial, asimismo, tales fenómenos se han relacionado con sistemas de representación y el PMA (Claros, 2010; Claros, Sánchez, y Coriat, 2007). Algunos de los fenómenos vinculados al concepto de límite son los conceptos de asíntota horizontal, derivada e integral (Jiménez, 2017; Kidron, 2011; Serrano, 2017; Vargas, 2017).

2.3 Significado de los conceptos matemáticos escolares

En esta investigación se asume el significado de un concepto introducido por Frege a finales del siglo XIX. Dicho autor establece la diferencia entre signo y significado, y a su vez en el significado discrimina entre referencia y sentido, de esta manera introduce la noción de triángulo semántico mediante el *signo o término* con el que se expresa, gráficos y notaciones que lo representan; por su *referencia* o concepto propiamente y la estructura lógica en la que se inserta; y por su *sentido o modo* en que vienen dados los objetos que caen bajo el concepto, o modos de uso con que puede ser entendido, aplicado e interpretado (Rico, 2012; Rico, 2016a; Rico, 2016b). La relación entre estos se representa en la figura 1.

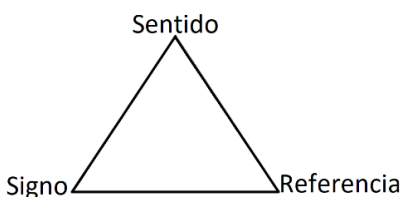


Figura 1. Triángulo semántico de un concepto

Este trabajo iniciado por Frege ha sido adaptado y desarrollado para significados de conceptos y contenidos de las matemáticas escolares (Rico, 2012; Rico, 2013; Rico, 2016a, Rico, 2016b), valorando para su análisis tres componentes: estructura conceptual, sistemas de representación, y los sentidos y modos de uso. La relación entre estas tres nociones se representa en la figura 2.

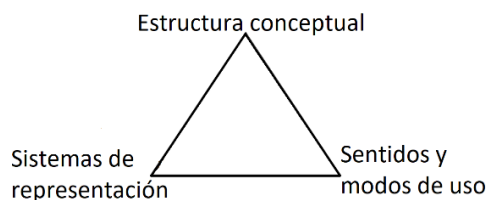


Figura 2. Triángulo semántico de un concepto matemático escolar

Así, conocer el significado de un concepto matemático implica saber “su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, relaciones y propiedades y sus modos de uso, interpretación y aplicación a la resolución de problemas” (Rico, 2016a, p. 94). A continuación, se detallan las tres componentes del significado de un contenido matemático escolar.

2.3.1 Estructura conceptual

Comprende los conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos y proposiciones que se obtienen y sus criterios de veracidad, vinculados con un contenido matemático, junto con la estructura formal que proporciona referencia a los contenidos utilizados (Rico, 2012; Rico y Fernández-Cano, 2013). La estructura conceptual se caracteriza por tres componentes: campo conceptual, campo procedimental y campo actitudinal. En esta investigación, se consideraron solamente las dos primeras por razones de tiempo. A continuación, se hace una breve descripción de ellas.

El *campo conceptual* es el conjunto de conceptos y relaciones que refieren a un contenido matemático. Se distinguen tres niveles de conocimientos: (a) *los hechos* que se componen de términos, notaciones, convenios y resultados; (b) *los conceptos* que describen una regularidad de un conjunto de hechos y (c) *las estructuras conceptuales* que corresponde a un conjunto de conceptos y transformaciones relacionados entre sí (Rico, 1997; Fernández-Plaza, 2016),

Para establecer la estructura conceptual relacionada con la noción de límite finito de una función en un punto, se pueden considerar distintos niveles, entre ellos el nivel *algebraico* y el nivel *topológico*. El nivel *algebraico* comprende la noción de función real de variable real, esta estructura destaca los hechos y destrezas relacionados con la variable independiente, la variable dependiente y la regla de correspondencia, entre otros aspectos. Y el nivel *topológico* cuyo foco es el conjunto $\mathbb{R}$ y en cualquiera de sus subconjuntos. Para lo que se considera su estructura topológico-métrica que, en el nivel de bachillerato, la topología no viene

establecida por un sistema fundamental de vecindario arbitrario, sino que la establece la métrica, dada por la distancia usual en $\mathbb{R}$, valor absoluto de la diferencia, cuyos vecindarios básicos son los intervalos abiertos centrados en un punto, de radio positivo no nulo (Fernández-Plaza, 2015).

2.3.2 Sistemas de representación

Las representaciones aluden a los signos, notaciones simbólicas o gráficas para cada noción matemática que expresan los conceptos y procedimientos, así como sus relaciones, características y propiedades. Se pueden considerar dos grupos de sistemas de representación: las *simbólicas* que incluyen símbolos alfanuméricos, y las *gráficas* que aluden a figuras. (Castro y Castro, 1997; Lupiáñez, 2016). Para el concepto de límite en este trabajo se consideran las representaciones (a) *verbales* que refieren al uso del lenguaje escrito para referir a conceptos, procedimientos y propiedades; (b) *gráficas* que hace referencia al uso de figuras en el plano cartesiano; (c) *simbólica* que refiere al uso de números, símbolos matemáticos y del abecedario en una organización no tabular y (d) *tabular* que refiere al uso de símbolos alfanuméricos organizados en una tabla. Fernández-Plaza (2015) organizó los sistemas de representación para el concepto de límite finito de una función en un punto como *verbal, numérico, simbólico y gráfico*.

2.3.3 Sentidos y modos de uso

Los sentidos y modos de uso de los conceptos matemáticos hacen referencia a las diversas situaciones a las que responde, a los problemas que resuelve y los fenómenos que organiza lo que permite complementar sus significados (Ruiz-Hidalgo, 2016). En este trabajo se considera relevante tres elementos: (a) *los términos y modos de uso* que son palabras que sintetizan la definición de un concepto matemático para brindarle sentido, corresponden a distintas interpretaciones del mismo; (b) *los contextos matemáticos* que están relacionados con las funciones y las cuestiones a las que responden los conceptos matemáticos y (c) *las situaciones* que corresponden a las circunstancias o condiciones en las que se aplica y trabaja el concepto matemático. Se consideran cuatro situaciones, que son las personales, laborales (y educativas), sociales y científicas.

Para esclarecer un poco más la diferencia entre estos tres componentes, consideremos el concepto de *límite finito de una función real de variable real en un punto*. Algunos de los

términos usuales para esta noción son aproximación o tendencia, el contexto usual en el que se utiliza es para conocer el comportamiento de las imágenes de una función alrededor de un punto, y normalmente se aplica en situaciones científicas y laborales. Estas tres componentes dan origen a uno de los sentidos de la noción del concepto de límite, que es el sentido métrico.

Se pueden establecer tres sentidos o modos de uso escolares relacionados con la noción de límite finito de una sucesión o de una función en un punto. Un primer sentido lo denominamos de *convergencia o dinámico*, se manifiesta a través de los términos “tender” y “aproximar”; un segundo sentido se denomina *estático o de valor de la función* se observa cuando el límite de una función en un punto se obtiene mediante la evaluación de la función en dicho punto; y finalmente, un tercer sentido es el de *restricción*, el límite en ejemplos concretos presenta la peculiaridad de no ser rebasable, expresable con los términos “no exceder”, “no sobrepasar”, entre otros (Fernández-Plaza, 2015).

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Este capítulo se presenta en siete apartados. En el primero se indica el tipo de estudio, en el segundo se describen las dos fases de la investigación, en el tercero se indica cómo se realizó la selección de los sujetos, en el cuarto se describen los cuatro instrumentos empleados en la recolección de la información, en el quinto se detallan las cinco tareas del primer instrumento, en el sexto se puntualiza en el método con el que se analizó la información obtenida con el primer instrumento y en el séptimo se describen las categorías de las cinco tareas planteadas en el primer instrumento.

3.1 Tipo de estudio

El estudio realizado es cualitativo, cuyo alcance es exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Es exploratorio pues no existen antecedentes de estudios similares en Costa Rica y descriptivo debido a que se pretende determinar los significados que le atribuyen al concepto de límite finito de una función en un punto los estudiantes universitarios de las carreras de Biología e Ingeniería en Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica, sin emitir juicios de valor.

3.2 Descripción de las fases de la investigación

Esta investigación se llevó a cabo en dos fases con estudiantes del curso MAT 002 Cálculo I que se impartió durante el primer ciclo de 2018 en 15 grupos de 35 estudiantes en promedio en la Universidad Nacional de Costa Rica. Se contó con la autorización del Director de la Escuela de Matemática de la universidad mencionada y la anuencia de los 12 docentes de los grupos.

En la fase 1 se aplicaron dos cuestionarios, el primero (ver anexo 1) fue administrado a 421 estudiantes que asistieron a clases durante la última semana de febrero y la primera de marzo del año 2018 y el segundo (ver anexo 2) se aplicó a los 12 docentes de los respectivos grupos, tres de ellos tenían dos grupos a cargo. En la fase 2 se aplicó un tercer cuestionario (ver anexo 3) a 256 estudiantes del curso que asistieron a clases durante la primera y la segunda semana de mayo del mismo año y el cuarto (ver anexo 4) se aplicó a los 12 docentes de cada uno de los grupos.

En el caso de los cuestionarios 1 y 2 se contó con 20 minutos para completarlo y 40 minutos para los cuestionarios 3 y 4. Durante la aplicación, los estudiantes se mantuvieron en la misma posición en la que estaban originalmente durante la clase, se les brindó las instrucciones generales y procedieron a completarlo sin ninguna situación particular. De manera simultánea los docentes completaron el cuestionario correspondiente.

Los estudiantes que completaron los cuestionarios 1 y 3 estaban matriculados en las carreras de Biología, Diplomado en Cartografía Digital, Enseñanza de las Ciencias, Licenciatura en Economía, Licenciatura en Administración, Enseñanza de la Matemática, Comercio y Negocio Internacionales, Ingeniería en Química Industrial, Ingeniería en Gestión Ambiental, Ingeniería en Sistemas de Información, Ingeniería en Ciencias Forestales, Ingeniería en Topografía, Catastro y Geodesia, e Ingeniería en Bioprocesos (ver anexos 5 y 6).

3.3 Selección de los sujetos de investigación (muestra)

Debido a la gran cantidad de estudiantes que completaron los cuestionarios 1 y 3, 421 en la fase 1 y 256 en la fase 2, se decidió hacer una selección de los sujetos de la investigación que permitiera en un tiempo razonable lograr el análisis deseado de los significados atribuidos al concepto de límite finito de una función en un punto.

Para ello, en primer lugar, se observaron a los 256 estudiantes que completaron el cuestionario 3 de la fase 2, separados por la carrera matriculada y el sexo. En segundo lugar, se observó la distribución de los estudiantes por sexo para ver uniformidad y en tercer lugar la forma en la que estaban distribuidos los estudiantes de cada carrera en los 15 grupos.

Se determinó que en las carreras de Biología e Ingeniería en Química Industrial existía la misma cantidad de hombres y de mujeres, que en todos los grupos salvo el 11, 14 y el 15 había presencia de al menos un estudiante de alguna de estas dos carreras. Por tal razón, se seleccionaron como sujetos de investigación a estos estudiantes, es decir, 16 de Biología y 22 de Ingeniería en Química Industrial, para un total de 38 sujetos. Adicionalmente, se consideró interesante el hecho de que una fuese una ciencia natural y la otra una ingeniería.

El objetivo de la selección descrita anteriormente era que los sujetos de investigación fueran los mismos de las fases 1 y 2 lo cual permitiría observar la evolución en sus concepciones acerca de la noción del límite. Sin embargo, por limitaciones de tiempo se decidió que lo más viable era analizar solo el cuestionario 1. Dado que ya se había realizado la selección de los

sujetos con los criterios descritos, se decidió mantenerlos como sujetos de investigación, lo que permitiría en un futuro realizar análisis posteriores.

Los estudiantes de la carrera de Biología deben aprobar el curso de MAT 001 Matemática General como requisito para matricular el curso MAT 002 Cálculo I, en el caso de los estudiantes de Ingeniería en Química Industrial no hacen ningún curso de matemática previo. Los estudiantes de ambas carreras no tienen ninguna formación previa en el tema de límites, debido a que este tema no se estudia en la educación secundaria de Costa Rica ni en el curso MAT 001 Matemática General que aborda los contenidos de álgebra básica, ecuaciones e inecuaciones lineales, elementos básicos de geometría analítica, funciones reales de variable real y trigonometría básica.

3.4 Instrumentos para la recolección de la información

El cuestionario 1 fue un cuestionario semántico que se aplicó iniciando la instrucción del tema de límites. “Los cuestionarios semánticos recogen palabras, términos, símbolos, gráficas, descripciones, explicaciones y otras notas que expresan y representan un modo de apropiación por cada sujeto del concepto considerado” (Martín, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2016, p. 56). Se pretendía que, mediante preguntas de respuesta abierta, los estudiantes evidenciara la forma que tenían de entender la noción de límite, sus representaciones y sus aplicaciones. El cuestionario 2 fue una adaptación en cuanto a las instrucciones del cuestionario 1.

El cuestionario 3 constaba de las mismas tareas del cuestionario 1 y unas tareas adicionales de desempeño para identificar a través de preguntas de respuesta abierta si los estudiantes mostraban evolución o cambios en las concepciones del concepto de límite de una función, así como determinar si hacían un vínculo del concepto de límite con los conceptos de continuidad y derivación. El cuestionario 4 fue una adaptación del cuestionario 3 en donde se consideraron únicamente las tareas de desempeño.

El propósito de los cuestionarios 2 y 4 aplicados a los docentes de los grupos era observar la relación que podría existir entre el significado que expresan los estudiantes para el concepto de límite con brindada por el profesor.

Los instrumentos se realizaron con base en el marco de triángulo semántico para un significado de un contenido matemático escolar, que atiende tres dimensiones: los sistemas

de representación, la estructura conceptual y el sentido (Rico, 2012) y con base en los estudios previos de Fernández-Plaza (2011); Vargas (2017); Parameswaran (2007); Bezuidenhout (2001), Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013). Para concretar las tareas de los instrumentos se realizaron cinco reuniones con el tutor y cotutor en las que se discutió la pertinencia de cada una. Posteriormente, se realizó una reunión con dos profesores de la cátedra del curso MAT 002 Cálculo I que lo han impartido por más de 10 ocasiones, para que realizaran una valoración de los instrumentos lo que permitió mejorar la redacción y determinar el momento más oportuno para la aplicación.

3.5 Descripción de las tareas del cuestionario 1

Como se mencionó en el apartado 3.3 sobre la selección de los sujetos de la investigación, en este trabajo solo se analizó el cuestionario 1, por tal razón, en este apartado se describe cada una de sus tareas. En el anexo 7 se presenta la descripción de las tareas del cuestionario 3. Las tareas de los cuestionarios 2 y 4 están contenidas en los cuestionarios 1 y 3. El cuestionario 1 constaba de dos actividades, la primera tenía cuatro tareas y la segunda una. En adelante, la tarea 1 de la actividad 2, se considera como la tarea 5 de dicho cuestionario.

En la *tarea 1* denominada *definición del límite* se solicitó a los estudiantes que escribieran la definición que les había dado su profesor, se les sugirió que la transcribieran de su cuaderno para que fuera lo más fiel posible. En la *tarea 2* llamada *interpretación de la definición* se solicitó a los estudiantes una explicación con sus propias palabras el significado de la definición de límite considera en la tarea 1, se pretendía conocer en términos generales como entendían dicho concepto y los aspectos o características que resaltan. En la *tarea 3* denominada *representaciones* se les solicitó que realizaran dibujos, esquemas, figuras o lo que consideraran pertinente para representar la definición de límite de la tarea 1, el objetivo era conocer a través de una o varias formas, como representaban dicha definición. En la *tarea 4* llamada *aplicaciones* se les pidió que mencionaran algunas aplicaciones que podrían tener los límites, la pregunta era abierta y, por tanto, podían indicar aplicaciones en diferentes áreas o contextos no necesariamente matemáticos. Finalmente, en la *tarea 5* llamada *significado de la palabra límite fuera de la matemática* se les indicó que escribieran otros significados, fuera del matemático, de la palabra límite, para esto podían usar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que consideraran necesario. Con esta tarea se pretendía conocer cuáles eran

los significados que le atribuían los estudiantes a la palabra límite fuera del contexto matemático.

3.6 Método para el análisis de la información del cuestionario 1

Para analizar la información del cuestionario 1 se utilizó el análisis de contenido, que permite la codificación, la categorización (creación de categorías significativas en las que se pueden ubicar las unidades de análisis - palabras, frases, oraciones), la comparación (categorías y creación de vínculos entre ellas) y la conclusión - extraer conclusiones teóricas de las unidades de análisis en instrumentos de respuesta abierta (Cohen, Manion, y Morrison, 2007).

En este estudio, el análisis de contenido favoreció la descripción del significado que dan los sujetos de investigación al concepto de límite, al interpretar las respuestas dadas a cada una de las tareas del cuestionario 1. Para ello, se hizo una transcripción de todas las respuestas de los sujetos quienes fueron codificados de la siguiente manera: la letra *E* para indicar que era un estudiante, la letra *B* si era de Biología o *Q* si era de Ingeniería en Química Industrial, la letra *H* si era un hombre o *M* si era mujer, cuatro dígitos en donde los dos primeros indicaban el número del grupo y los dos segundos indicaban el número del cuestionario. Por ejemplo, el código *EBM1202* se refiere a un sujeto, estudiante de Biología, mujer, matriculada en el grupo 12 del curso MAT 002 Cálculo 1, cuyo cuestionario es el número 02. Una vez realizada la codificación, se analizaron cada una de las cinco tareas por separado. La creación de categorías se realizó de dos formas: una deductiva mediante el uso de investigaciones referidas en los antecedentes y otra inductiva mediante los resultados obtenidos del análisis del cuestionario 1.

3.7 Descripción de las categorías de las cinco tareas del cuestionario 1

En la tarea 1 se establecieron de manera inductiva tres categorías: (1) *presencia de la definición* que refiere a si el estudiante escribió la definición de límite, (2) *completitud de la definición* cuando el estudiante escribe una definición que considera todos los elementos necesarios para el concepto de límite y (3) *formalidad matemática de la definición* cuando el estudiante escribe una definición para el concepto de límite en términos de $\varepsilon - \delta$, como por ejemplo: *se dice que el límite de una función f en un punto a es L si y sólo si*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left[0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \right].$$

En las tareas 2 y 3 se establecieron de manera inductiva y deductiva 13 categorías que fueron exhaustivas, es decir, fueron suficientes para analizar las respuestas de los sujetos de investigación y en algunos casos no son excluyentes. En el caso de las deductivas se utilizaron las planteadas por Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico, y Castro (2013). Estas categorías se engloban en dos grupos: *las categorías de aspecto estructural objeto/proceso* que refieren a las consideraciones generales realizadas por los estudiantes sobre el concepto de límite como objeto, como proceso o bien, una interpretación dual y las *categorías de aspecto estructural destrezas prácticas de cálculo* que hacen referencia a las formas que tienen los escolares de interpretar los procesos infinitos formales a través de técnicas finitas de determinación del valor del límite, basadas en la continuidad y en las propiedades algebraicas del concepto de límite.

Se tienen nueve categorías de aspecto estructural objeto/proceso: (1) *límite como objeto (L.Obj)* cuando los estudiantes establecen distintas referencias para el objeto límite como un número, un valor, un lugar, un punto, una región, un hueco, etc.; (2) *límite como proceso (L.Proc)* cuando los estudiantes establecen distintas referencias para el proceso límite como aproximar, tender, acercar o acercarse mucho; (3) *referencia a las variables x e y (R.Var)* cuando los estudiantes llaman preimagen, imagen, valor de x , valor de y , valor independiente, valor dependiente, números en x , números en y , punto en x , y punto en y ; (4) *descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc)* cuando los estudiantes sólo se refieren a la variable x o solo a la variable y ; (5) *coordinación entre las variables x e y (C.Var)* cuando los estudiantes evidencian convergencia de y en relación con la convergencia de x , a donde se aproximan las imágenes cuando x se aproxima al punto; (6) *símbolos matemáticos, notaciones (SyN)* cuando los estudiantes usan símbolos matemáticos y notaciones; (7) *referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico (SR)* cuando usan términos para el objeto/proceso límite relacionados con un sistema de representación diferente al numérico o simbólico; (8) *vinculación entre límite e imagen (LI)* cuando el estudiante atribuye al límite un valor de imagen se observa una *identificación* (de manera general), una *conexión* (en casos particulares) o bien una *independencia* entre dicho límite y el valor imagen de la función y (9) *términos (Term)*

cuando el estudiante usa las palabras cercano, próximo, valores cercanos, valores próximos en relación con la función al punto se observa una *posición relativa*; y otros que son los términos que no informan nada o no tienen sentido matemático, los que se descartan.

Se tienen cuatro categorías de aspecto estructural destrezas prácticas de cálculo: (10) *condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)* cuando los estudiantes expresan que los procesos de cálculo del límite, bien por la izquierda o bien por la derecha, deben dar el mismo resultado; (11) *propiedades matemáticas (Prop.M)* cuando los estudiantes hacen referencia a propiedades, o nociones que son verdaderas en la matemática; (12) *tabla de valores (T.Val)* cuando los estudiantes expresan acciones similares a “dar valores a x ” y sus respectivas imágenes y (13) *aspectos estructurales alcanzabilidad y rebasabilidad (Alcanz. y Reb)* cuando los estudiantes expresan en sus definiciones la posibilidad o no de alcanzar o rebasar el límite.

En la tarea 2 ningún estudiante evidenció en su respuesta la categoría tabla de valores, y en la tarea 3, ningún estudiante mostró en su respuesta, las categorías: referencia a las variables x e y , referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico, y términos.

En la tarea 4 se establecieron de manera inductiva 10 categorías que refieren a los términos que los sujetos emplearon en esta tarea, a saber: (1) estadísticas, (2) astronomía, (3) ingeniería, (4) física, (5) arquitectura, (6) economía, (7) gráficas matemáticas, (8) convergencia de una función, (9) concepto de derivada y; (10) industria y medicina.

Finalmente, en la tarea 5 se establecieron de manera inductiva ocho categorías: (1) *frontera* que refiere a la delimitación entre dos nociones, o situaciones; (2) *barrera* hace referencia a que no se puede avanzar más a partir de algún objeto; (3) *no alcanzable-no rebasable* que alude a un aspecto que no se puede superar, tocar, atravesar, o sobrepasar; (4) *alcanzable* que refiere a una noción accesible o tangible; (5) *valor extremo* que refiere al punto máximo en el que se puede obtener algún aspecto o llegar en algún ámbito; (6) *impedimento* que alude a la incapacidad de realizar alguna acción o actividad por diversos factores; (7) *hueco* que refiere al corte o espacio vacío una gráfica de una función y (8) *fin* que alude a la noción de final.

CAPÍTULO IV. RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados de cada una de las cinco tareas del cuestionario 1 de la primera fase. Los sujetos de investigación eran 16 estudiantes de Biología y 22 estudiantes de Ingeniería en Química Industrial, para un total de 38. Para el análisis de cada tarea, se organizó la información por totalidad de sujetos, por su sexo y por la carrera en la que estaban matriculados.

4.1 Análisis de la tarea 1

Esta tarea se llama *definición del límite*. En ella se solicitó a los estudiantes que escribieran la definición que les había dado su profesor, preferiblemente, transcribiéndola de su cuaderno, de manera que fuera lo más fiel posible. Para su análisis se consideraron tres categorías: (1) *presencia de la definición*, (2) *completitud de la definición* y (3) *formalidad matemática de la definición*.

En este caso, de los 38 sujetos de investigación se tiene que 22 (el 58%) escribieron una definición completa e informal dada por el profesor, un estudiante la escribió incompleta e informal, 15 estudiantes (el 39%) no anotaron ninguna definición y ningún estudiante transcribió una definición formal. No hay mayores diferencias por sexo de los sujetos, con respecto a los que transcribieron la definición brindada por su profesor, ya que de los 23 estudiantes que lo hicieron, 11 son hombres y 12 son mujeres.

De los 16 estudiantes de Biología, seis de ellos (el 38%) transcribieron la definición que les dio su profesor, de forma completa e informal, y diez de ellos (el 62%) no reprodujeron una definición dada por su profesor; es decir, la mayoría de los estudiantes de Biología no reprodujo tal definición. Lo contrario ocurrió con los estudiantes de Ingeniería en Química Industrial, pues de los 22, 17 (el 77%) escribieron la definición brindada por su profesor, de manera informal y completa, con excepción de uno de ellos que lo hizo de forma incompleta; y solo 5 estudiantes (el 23%) no la transcribieron; esto es, que la mayoría de los estudiantes de Ingeniería en Química Industrial transcribió la definición brindada por su profesor. A modo de ejemplo, se presentan las definiciones escritas por dos sujetos de investigación.

EBM0125: Sean f una función de variable real, $a, L \in \mathbb{R}$. Se dice que el límite de f en a es L si y solo si cada vez que las preimágenes de f son cercanas a a , entonces

las correspondientes imágenes son cercanas a L . Simbólicamente se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

EQH0505: Límite es el punto en $f(x)$ cuando “ x tiende a c ” es igual a L si a medida que los valores de x se aproximan a c ya sea por la derecha o por la izquierda los valores de $f(x)$ se aproximan a L .

Nótese que ambos sujetos transcribieron la definición de límite de una función en un punto que les dio su profesor, de forma completa e informal. Sin embargo, el sujeto EBM0125 fue más detallado en la misma, ya que hizo referencia a una función real de variable real, a preimágenes e imágenes, aspectos que no se evidenciaron en la definición que escribió EQH0505.

4.2 Análisis de la tarea 2

La tarea 2 denominada *interpretación de la definición* pretendía que los estudiantes explicaran con sus palabras el significado de la definición de límite planteada en la tarea 1. El objetivo era determinar de qué forma entendían el concepto y cuáles aspectos o características resaltaban. Para su análisis se consideraron 12 de las 13 categorías indicadas en el apartado 3.7. Puntualmente, se utilizaron las nueve categorías del grupo llamado aspecto estructural objeto/proceso: (1) *límite como objeto (L.Obj)*, (2) *límite como proceso (L.Proc)*, (3) *referencia a las variables x e y (R.Var)*, (4) *descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc)*, (5) *coordinación entre las variables x e y (C.Var)*, (6) *símbolos matemáticos, notaciones (SyN)*, (7) *referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico (SR)*, (8) *vinculación entre límite e imagen (LI)* y (9) *términos (Term)*. Asimismo, se emplearon tres de las cuatro categorías del grupo llamado aspecto estructural destrezas prácticas de cálculo: (10) *condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)*, (11) *propiedades matemáticas (Prop.M)* y (13) *aspectos estructurales alcanzabilidad y rebasabilidad (Alcanz. y Reb)*. Note que la categoría (12) *tabla de valores (T.Val)* no fue considerada. Las respuestas de los sujetos de investigación a esta tarea se pudieron ubicar en al menos una de las categorías mencionadas, pero no en todas; exceptuando a un sujeto que no aportó información relevante para esta tarea.

4.2.1 Categorías: (1) límite como objeto (L. Obj) y (2) límite como proceso (L. Proc)

De los 38 estudiantes, 8 (el 21%) describieron el límite solo como objeto, 9 (el 24%) lo describieron solo como proceso y 20 (el 53%) lo describieron como objeto y proceso. Luego, se desprende que, de los 38 estudiantes, 28 (el 74%) señalaron el límite como un objeto y 29 (el 76%) lo distinguieron como un proceso.

Entre las respuestas más usuales de los sujetos para la categoría (1) *límite como objeto*, sobresalen las palabras *número*, *valor*, *lugar*, *punto*, *región* y *hueco* para referirse al límite, y para la categoría (2) *límite como proceso*, destacan las palabras *tender*, *aproximarse* y *acercarse* para referirse a la variables independiente o dependiente; en algunas ocasiones usaban la misma palabra para referirse a dichas variables, y en otras, hacían combinaciones dos a dos de las tres palabras mencionadas. Por ejemplo: usan *tender* para la variable independiente y la variable dependiente, así como, la palabra *aproximar* para referirse a la variable independiente y *acercar* para la variable dependiente. A modo de ejemplo, se presentan las definiciones escritas por seis sujetos de investigación.

EQM0532: Son los huecos que hay en un gráfico, se estudia el alrededor de los puntos y porque la gráfica funciona de esa manera.

EBH0705: El número al que tiende una función cuando sustituyo valores en una variable específica.

EBH0309: para una función real de variable real, cuando se vayan acercando los números a una preimagen, se van acercando a una imagen, esta imagen es el límite si es la misma cuando se acerca tanto por derecha como por izquierda de la preimagen.

EQH0205: significa que cuando x se aproxima a un valor simultáneamente se acerca a un valor de $f(x)$ sin nunca tocar dicho valor.

EBM0606: El límite de una función es el lugar por donde esta no pasa (en la gráfica). Para que este exista es necesario que los límites laterales se acerquen a un número en común.

EQM0213: Cuando en una función x se acerca a un número y no da ese número, el límite de esa función es ese mismo número.

Los sujetos EQM0532 y EBH0705 refirieron al límite como objeto pues utilizaban los términos *hueco* y *número* respectivamente. Los sujetos EBH0309, EQH0205 y EQM0213

refirieron al límite como proceso, en el caso del primero utilizó la palabra *acercar* para las variables independiente y dependiente, el segundo usó la palabra *aproximar* para la variable independiente y *acercar* para la dependiente y el tercero usó la palabra *acercar* solo para la variable independiente. Además, los sujetos EBM0606 y EQM0213 aludieron al límite como objeto y proceso, el primero empleó las palabras *lugar* y *acercar* y el segundo mencionó los términos *número* y *acercar*.

Por otra parte, de los 8 sujetos que describieron al límite solo como objeto, 3 son hombres y 5 son mujeres; de los 9 que describieron al límite solo como proceso, hay 5 hombres y 4 mujeres y de los 20 que los describieron como objeto y proceso, 10 son hombres y 10 son mujeres. Por lo tanto, de los 28 que describieron al límite como objeto, 13 son hombres y 15 son mujeres, de los 29 que mencionaron al límite como proceso, 15 son hombres y 14 son mujeres.

De los 16 estudiantes de Biología, 3 (el 19%) refirieron al límite solo como objeto, 3 (el 19%) lo hicieron solo como proceso y 9 (el 56%) refirieron al límite como objeto y como proceso. Luego 12 (el 75%) hicieron referencia al límite como un objeto y 12 (el 75%) hicieron referencia al límite como un proceso (el 75%). De los 22 estudiantes de Ingeniería en Química Industrial, 5 (el 23%) aludieron al límite solo como objeto, 6 (el 27%) lo hicieron solo como proceso y 11 (el 50%) aludieron al límite como objeto y como proceso. Por lo tanto, 16 (el 73%) manifestaron al límite como un objeto y 17 (el 77%) lo hicieron como un proceso.

4.2.2 Categorías: (3) referencia a las variables x e y (R. Var) y (5) coordinación entre las variables x e y (C. Var)

De los 38 sujetos, 2 (el 5%) distinguieron en su definición solo la categoría denominada referencia a las variables x e y , 4 (el 11%) evidenciaron solo la coordinación entre las variables x e y y 8 (el 21%) evidenciaron en su definición ambas categorías. De esta manera, 10 (el 26%) refirieron en su definición a las variables x e y y 12 (el 32%) resaltaron coordinación entre ambas variables.

Entre las respuestas más usuales de los sujetos para la categoría (3) *referencia a las variables x e y* , resaltan los términos *y punto en x* , *preimagen*, *valor de x* , *números en x* , para

referirse a la variable independiente. Asimismo, los términos *punto en y*, *imagen*, *valor de y*, *números en y* para la variable dependiente. Por otra parte, para la categoría (5) *coordinación entre las variables x e y* los sujetos no evidenciaron respuestas típicas. A modo de ejemplo, se presentan las definiciones escritas por seis sujetos de investigación.

EBH0619: El límite es una tendencia hacia un número sin que este esté incluido. Es el acercamiento de la imagen a un número.

EQM0807: El límite de una función es cuando tanto por la derecha como por la izquierda de x se acerca a un determinado punto en y . Es una proximidad.

EBH0705: El número al que tiende una función cuando sustituyo valores en una variable específica.

EQM0104: Quiere decir que en una función cada vez que los puntos se van acercando a a obligatoriamente debería estar acercándose a L .

EBH0309: Para una función real de variable real, cuando se vayan acercando los números a una preimagen, se van acercando a una imagen, esta imagen es el límite si es la misma cuando se acerca tanto por derecha como por izquierda de la preimagen.

EQH0221: El límite de la función es el valor que toma la y al acercarse la x por la izquierda y la derecha en la recta.

Los sujetos EBH0619 y EQM0807 aludieron a la categoría *referencia a las variables x e y* en el uso de los términos *imagen* y *punto en y*, respectivamente. Por su parte, los sujetos EBH0705 y EQM0104, evidenciaron la categoría *coordinación entre las variables x e y* al evidenciar en su definición la convergencia de y en relación con la convergencia de x . Finalmente, los sujetos EBH0309 y EQH0221 manifestaron la presencia de las dos categorías pues el primero aludió a la variable independiente como *preimagen* y a la variable dependiente como *imagen* y el segundo solo aludió a la variable dependiente como *valor que toma la y*, pero ambos mostraron *coordinación entre las variables x e y* en su definición.

Además, los 2 sujetos que manifestaron la categoría *referencia a las variables x e y* son hombres. De los cuatro que manifestaron únicamente la categoría *coordinación entre las variables x e y*, 2 son hombres y 2 son mujeres, de los 8 sujetos que evidenciaron ambas categorías, 4 son hombres y 4 son mujeres. Por lo tanto, de los 10 sujetos que manifestaron

la referencia a las variables x e y 6 son hombres y 4 son mujeres y de los 12 que evidenciaron *la coordinación entre las variables x e y* , 6 son hombres y 6 son mujeres.

De los 16 estudiantes de Biología, 1 (el 6%) solo aludió a la categoría de referencia a las variables x e y , 1 (el 6%) solo manifestó la categoría de coordinación entre ambas variables, y 2 (el 13%) refirieron a ambas categorías. Luego, se tiene que 3 (el 19%) aludieron a la categoría referencia a las variables x e y , 3 (el 19%) evidenciaron la categoría de coordinación entre ambas variables. De los 22 estudiantes de Ingeniería en Química Industrial, 1 (el 5 %) solo se refirió a la categoría de referencia a las variables x e y , 3 (el 14%) solo evidenciaron la categoría de coordinación entre ambas variables y 6 (el 27%) destacaron ambas categorías. Por lo tanto, 7 (el 32%) se refirieron a las variables x e y , y 9 (el 41%) evidenciaron la coordinación entre ambas variables.

4.2.3 Categoría: (4) descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc)

De los 38 sujetos de investigación, solo 6 (el 16%) que pertenecen a Biología, mostraron en la definición de límite la presencia de esta categoría. Además, 3 son hombres y 3 son mujeres. A modo de ejemplo, se presentan las definiciones escritas por dos sujetos de investigación.

EBH0619: El límite es una tendencia hacia un número sin que este esté incluido. Es el acercamiento de la imagen a un número.

EBM1020: Cuando existe una función y esta gráficamente tiende al acercarse a un valor en el eje x tanto acercándose por ambos lados, toma un valor en el eje x .

Nótese que el sujeto EBH0619 en su definición hizo referencia solo a la variable dependiente y el sujeto EBM1020 solo se refirió a la variable independiente.

4.2.4 Categoría: (6) símbolos matemáticos, notaciones (SyN)

De los 38 estudiantes, 13 (el 34%) evidenciaron esta categoría en la definición de límite en donde, 6 son hombres y 7 son mujeres. De los 16 de Biología, 2 (el 13%) mostraron la categoría y de los 22 de Ingeniería en Química Industrial, 11 (el 50%) la evidenciaron.

Los símbolos más usuales que usaban los sujetos son: f para referirse a una función, a para indicar el número al que tienden las preimágenes, L para hacer referencia al número al que

tienden las imágenes, x para referirse a las preimágenes, $y, f(x)$ para referirse a las imágenes, y algunos ejemplos numéricos para aludir a preimágenes e imágenes particulares. En menor medida, se encuentran los símbolos $\frac{0}{0}$ para aludir a que en matemáticas no se puede dividir por cero, eje x para referirse al eje de las abscisas, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$ para hacer referencia a la definición de límite de una función. Algunas definiciones donde los sujetos evidenciaban tal simbología son las siguientes.

EBM0125: El límite de f en a es L , solo cuando si al aproximarse a a por derecha y por izquierda se obtiene el resultado de que las imágenes de a en y tienden a L .

EQH0205: Significa que cuando x se aproxima a un valor simultáneamente se acerca a un valor de $f(x)$ sin nunca tocar dicho valor.

En este caso, el sujeto EBM0125 usó simbología matemática para referirse a la función, al número al que tienden las preimágenes y al número al que tienden las imágenes y el sujeto EQH0205 la usó para referirse a las preimágenes e imágenes de la función.

4.2.5 Categorías: (7) referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico (SR) y (8) vinculación entre límite e imagen (LI)

De los 38 sujetos de investigación, 6 (el 16%), refirieron a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico de los cuales 2 son hombres y 4 son mujeres. Además, 7 (el 18%), mostraron la vinculación del límite con la imagen, de los cuales 4 son hombres y 3 son mujeres. De los 16 de Biología, 2 (el 13%) evidenciaron en la definición de límite un sistema de representación diferente al numérico o simbólico, 3 (el 19%) vinculaban el límite con la imagen. De los 22 de Ingeniería en Química Industrial, 4 (el 18%) manifestaron un sistema de representación diferente al numérico o simbólico, 4 (el 18%) establecieron el vínculo del límite con la imagen.

La respuesta típica de los sujetos en la definición de límite para la categoría referencia explícita a un sistema de representación diferente al numérico o simbólico, fue aludir al sistema de representación gráfico de una función; y en cuanto a la categoría vinculación del límite con la imagen, se evidenciaron los procesos de identificación y de conexión, más no

el de independencia. A continuación, se destacan algunas respuestas de los sujetos para ambas categorías.

EBM1020: Cuando existe una función y esta gráficamente tiende al acercarse a un valor en el eje x tanto acercándose por ambos lados, toma un valor en el eje x .

EQH0505: El límite es el punto en una gráfica al que tiende la función tanto por la izquierda como por la derecha.

EBH0705: El número al que tiende una función cuando sustituyo valores en una variable específica.

EQH0221: El límite de la función es el valor que toma la y al acercarse la x por la izquierda y la derecha en la recta.

Se observa como los sujetos EBM1020 y EQH0505 emplearon términos relacionados con el sistema de representación gráfico de una función. Por otra parte, el sujeto EBH070 vinculó el límite con la imagen, específicamente en un proceso de *conexión*, pues hizo alusión a casos particulares, cuando manifestó que es sustituyendo valores en una variable específica; en el caso del sujeto EQH0221, también vinculó el límite con la imagen, pero en un proceso de *identificación*, debido a que lo hizo de manera general.

4.2.6 Categorías: (9) términos (Term) y (10) condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)

De los 38 estudiantes, 13 (el 34%) evidenciaron la categoría términos, en donde 5 son hombres y 8 son mujeres. Además, 12 (el 32%) expresaron condiciones de lateralidad y doble convergencia, donde 8 son hombres y 4 son mujeres. Los sujetos eran diferentes para ambas categorías, con excepción de uno, que manifestó las dos. De los 16 de Biología, 8 (el 50%) evidenciaron la categoría términos y 4 (el 25%) manifestaron condiciones de lateralidad y doble convergencia. De los 22 de Ingeniería en Química Industrial, 5 (el 23%) mostraron la categoría términos y 8 (el 36%) evidenciaron condiciones de lateralidad y doble convergencia.

Las frases más usuales de los sujetos en donde evidenciaron la subcategoría posición relativa de la categoría términos son: *cerca de un punto*, *acercar a un valor*, *alrededor de un punto*, *acercar a una función*, *punto al que se acerca*, *valor máximo o más próximo al punto*, *valores*

cercanos, números cercanos. Dichas frases hacían referencia a tres términos usuales: *alrededor, cerca y proximidad* para aludir a diferentes aspectos en la definición de límite.

En cuanto a la categoría de condiciones de lateralidad y doble convergencia la frase más común de los sujetos fue: *el valor que toma la y al acercarse la x por la izquierda y la derecha*. En menor medida se presentó la frase: *para que el límite exista es necesario que los límites laterales se acerquen a un número en común*. A continuación, se distinguen algunos sujetos que evidencian ambas categorías.

EBH1203: Analizar lo que hay alrededor de un punto, no nos interesa como tal ese punto, solo lo que lo rodea.

EQM0518: Es cuando una función en su gráfica se acerca a un punto, pero nunca lo toca. Son valores cercanos a un punto en específico.

EBM0606: El límite de una función es el lugar por donde esta no pasa (en la gráfica). Para que este exista es necesario que los límites laterales se acerquen a un número en común.

EQM0807: Es cuando tanto por la derecha como por la izquierda de x las y se acercan o aproximan a un determinado punto.

Nótese como los sujetos EBH1203 y EQM0518 usaron términos de posición relativa, como *alrededor* de un punto, *acerca* a un punto, valores *cercanos* a un punto; mientras que, los sujetos EBM0606 y EQM0807 evidenciaron condiciones de lateralidad y doble convergencia.

4.2.7 Categoría: (11) propiedades matemáticas (Prop.M)

De los 38 sujetos de investigación, 3 (el 8%), destacaron propiedades matemáticas. Además, 1 es hombre y 2 son mujeres, 2 (el 13%) son de los 16 Biología y 1 (el 5%) es de los 22 Ingeniería en Química industrial. A continuación, se presentan las definiciones de los tres sujetos que evidenciaron esta categoría.

EBM1322: Es un número al que tiende una función. Hay límites infinitos.

EBM1312: Tendencia de una variable a tomar un valor definido. Se busca llegar a un valor definido, de manera que se evite el resultado $\frac{0}{0}$.

EQH0207: El concepto general de límite que se tiene (límites de regiones, límites de velocidad, etc), puede extenderse al campo matemático. Para ello analicemos las siguientes sucesiones de números: I. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ II. $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \dots$ Puede observarse que cada número de las sucesiones es cada vez más cercano a cero lo que significa que el límite de las sucesiones es 0 . (cero).

El sujeto EBM1322 indicó en la definición, que hay límites infinitos, el sujeto EBM1312 aludió a que en matemáticas no se puede dividir por cero, y el sujeto EQH0207 hizo referencia a las sucesiones.

4.2.8 Categoría: (13) aspectos estructurales alcanzabilidad y rebasabilidad (Alcanz. Y Reb)

De los 38 estudiantes, 8 (el 21%) mostraron aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad. Además, 3 son hombres y 5 son mujeres; 1 (el 6%) de los 16 de Biología y 7 (el 32%) de los 22 de Ingeniería en Química industrial. Las frases más usuales para esta categoría a la que aludían los sujetos son *nunca lo toca, nunca lo llega a pasar, no pasarse de un valor, no va a ser el resultado, no da el número y hasta donde llega*. A modo de ejemplo, se presentan definiciones de dos sujetos.

EQH0205: Significa que cuando x se aproxima a un valor simultáneamente se acerca a un valor de $f(x)$ sin nunca tocar dicho valor.

EQM0216: Lo que sucede cerca de un punto, pero no exactamente en el punto. Un límite permite encontrar lo que pasa en un punto, más no exactamente en él, y solo se le permite acercarse a cierto valor, no pasarse de él.

Se destaca que el sujeto EQH0205 hizo referencia a aspectos de no alcanzabilidad, pues indicó que las imágenes nunca van tocar un valor, mientras que el sujeto EQM0216, refirió a nociones de no rebasabilidad, pues indicó que el límite no se debe pasar de cierto valor.

4.3 Análisis de la tarea 3

En esta tarea 3 llamada *representaciones* se les pidió a los sujetos de investigación que hicieran dibujos, esquemas, figuras o aquello que consideraran adecuado para representar la definición del límite que se solicitó en la tarea 1. El propósito era conocer la forma en la que representaban tal definición.

Para su análisis se consideraron 10 de las 13 categorías indicadas en el apartado 3.7. Específicamente, se utilizaron seis categorías de las nueve categorías del grupo llamado aspecto estructural objeto/proceso: (1) *límite como objeto (L.Obj)*, (2) *límite como proceso (L.Proc)*, (4) *descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc)*, (5) *coordinación entre las variables x e y (C.Var)*, (6) *símbolos matemáticos, notaciones (SyN)* y (8) *vinculación entre límite e imagen (LI)*. Asimismo, se emplearon las cuatro categorías del grupo llamado aspecto estructural destrezas prácticas de cálculo: (10) *condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)*, (11) *propiedades matemáticas (Prop.M)*, (12) *tabla de valores (T.Val)* y (13) *aspectos estructurales alcanzabilidad y rebasabilidad (Alcanz. y Reb)*. Nótese que las categoría (3) *referencia a las variables x e y (R.Var)*, (7) *referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico (SR)* y (9) *términos (Term)* no fueron consideradas. Las respuestas de los sujetos de investigación a esta tarea se pudieron ubicar en al menos una de las categorías mencionadas, pero no en todas; exceptuando a siete sujetos que no aportaron información relevante para esta tarea.

Tipos de representaciones que evidenciaron los sujetos de investigación para el concepto de límite

Las representaciones utilizadas por los estudiantes en esta tarea fueron las gráficas (G), simbólicas (S), tabulares (T), verbales (V) o las combinaciones de ellas.

Tabla 1

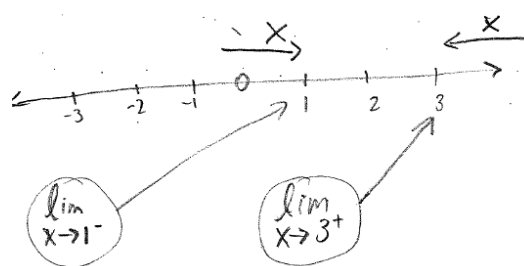
Tipos de representaciones de los sujetos

Carrera	Sexo	Tipos de Representaciones										
		G	S	T	V	G-S	G-T	T-S	T-G-S	G-S-V	S.P	S.T
Biología	H	3		1		2				1	7	15
	M	3		1		1	1	1	1		8	
Química	H	6				3	1				10	21
	M	8				2	1				11	
Suma		20	0	2	0	8	3	1	1	1	36	36

Nota: H, M, S.P y S.T, significan, respectivamente, hombre, mujer, suma parcial y suma total.

Se observa en la tabla 1, de los 38 sujetos, 36 (el 95%) realizaron una representación para el concepto de límite de una función, 17 son hombres y 19 son mujeres, 15 (el 94%) de los 16 de Biología, y 21 (el 95%) de los 22 de Ingeniería en Química Industrial.

En cuanto a los tipos de representaciones, en la tabla 1 se tiene que de los 38 sujetos: 20 (el 53%) evidenciaron solo la representación gráfica y 33 (el 87%) la evidenciaron con alguna otra representación; 2 (el 5 %) anotaron solo la representación tabular y 7 (el 18%) la evidenciaron con alguna otra. Ningún estudiante anotó únicamente la representación simbólica o verbal, pero si las usaron junto con otras representaciones, 11 (el 29%) escribieron una representación simbólica y 1 (el 3%) escribió una representación verbal. Por lo tanto, 22 (el 58%) usaron solo un tipo de representación y 14 (el 37%) usaron al menos dos tipos. A modo de ejemplo, el sujeto EBH0701, usó tres tipos de representaciones: gráfica, simbólica y verbal como se muestra.



$\therefore x$ tiende o tiene como tendencia, un valor próximo al punto para que la función no se indefina.

Figura 3. Representación gráfica, simbólica y verbal.

4.3.1 Categorías: (1) límite como objeto (L. Obj) y (2) límite como proceso (L. Proc)

De los 38 sujetos de investigación, 3 (el 8%) mostraron en la representación, al límite solo como un objeto, 14 (el 37%) lo distinguieron solo como un proceso, y 2 (el 5%) de las dos maneras. Además, 5 (el 13%) lo señalaron como objeto, 4 hombres y una mujer; y 16 (el 42%) lo señalaron como proceso, 6 hombres y 10 mujeres. De los 16 de Biología, 1 (el 6%) lo evidenció como objeto y 7 (el 44%) lo mostraron como proceso. De los 22 de Ingeniería en Química Industrial, 4 (el 18%) lo exhibieron como objeto y 9 (el 41%) como proceso.

Entre las representaciones más usuales de los sujetos para la categoría límite como objeto, sobresalen las nociones de *salto*, *hueco*, y *valor*. Para la categoría límite como proceso destacan las nociones de *aproximar*, *tender* y *acercar*, que se externalizan mediante flechas o líneas alrededor de la variable independiente o dependiente tanto de modo general, como en casos particulares. En algunas ocasiones los sujetos también recurrieron de manera explícita a las palabras *tender* o *acercar* para referirse a la variable independiente o dependiente, y a

la simbología de *tender* ($\rightarrow$) para la variable independiente y dependiente, en la representación simbólica. A modo de ejemplo, se muestra la representación del sujeto EQM0227.

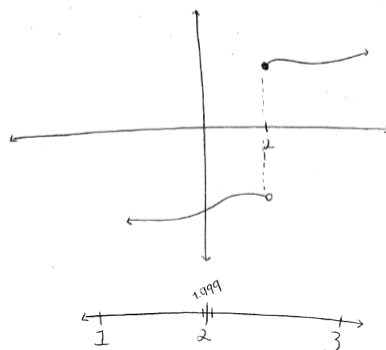


Figura 4. Representación del límite como objeto y proceso.

El sujeto EQM0227 en su representación, aludió al límite como objeto, con la noción de salto y como proceso, mediante la noción de aproximación para la variable independiente.

4.3.2 Categorías: (4) descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc) y (12) tabla de valores (T. Val)

De los 38 estudiantes, 6 (el 16 %) mostraban en la representación descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función, 2 son hombres y 4 son mujeres, 5 (el 13%) hicieron una tabla de valores, 2 son hombres y tres son mujeres. De los 16 de Biología, 3 (el 19%) exhibían en la representación descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función y 3 (el 19%) hicieron una tabla de valores. De los 22 de Ingeniería en Química Industrial, 3 (el 14%) mostraron en la representación descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función y 2 (el 9%) evidenciaron una tabla de valores.

En las representaciones de los sujetos para la categoría descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función, hicieron referencia solo a la variable independiente, de modo general y en casos particulares. Para la categoría tabla de valores, sobresalen en las representaciones, los sujetos que brindaron el criterio de asociación de una función en particular y dieron valores para las preimágenes y sus respectivas imágenes. A modo de ejemplo, se muestra las representaciones de los sujetos EBM1202 y EBM1313.

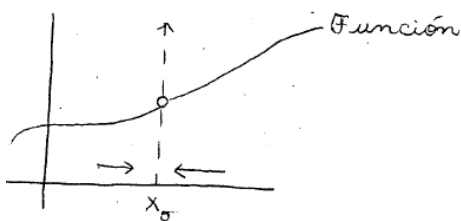


Figura 5. Representación de EBM1202.

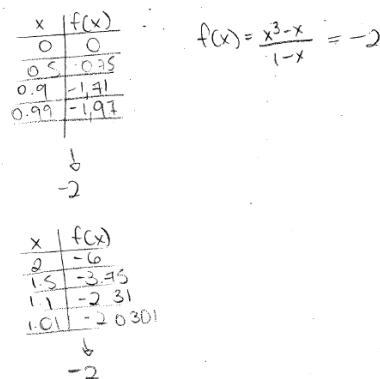


Figura 6. Representación de EBM1313.

El sujeto EBM1202 mostró en su representación, descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función, pues solo aludió a la variable independiente de forma genérica. El sujeto EBM1313 evidenció en su representación una tabla de valores y el criterio de la función.

4.3.3 Categorías: (5) coordinación entre las variables x e y (C. Var) y (11) propiedades matemáticas (Prop. M)

De los 38 estudiantes, 7 (el 18%) evidenciaron en sus representaciones solo coordinación entre las variables x e y , 2 son hombres y 5 son mujeres; 7 (el 18%) solo propiedades matemáticas, 5 son hombres y 2 son mujeres y 8 (el 21%) ambas categorías, 3 son hombres y 5 son mujeres. Luego, 15 (el 39%) mostraron coordinación entre las variables x e y ; y 15 (el 39%) evidenciaron propiedades matemáticas.

De los 16 de Biología, 2 (el 13%) manifestaron en sus representaciones solo coordinación entre las variables x e y , 5 (el 31%) solo propiedades matemáticas y 4 (el 25%) ambas categorías. Así, 6 (el 38%) exhibieron coordinación entre las variables x e y ; y 9 (el 56%) propiedades matemáticas. De los 22 de Ingeniería en Química industrial, 5 (el 23%) solo coordinación entre las variables x e y , 2 (el 9%) solo propiedades matemáticas y 4 (el 18%) ambas categorías. Luego, 9 (el 41 %) exhibieron coordinación entre las variables x e y ; y 6 (el 27%) propiedades matemáticas.

Entre las representaciones más usuales de los sujetos para la categoría coordinación entre las variables x e y , se destaca convergencia de las imágenes con respecto a las preimágenes, la relación entre la variable independiente con la dependiente en ejemplos concretos; estas representaciones eran tabulares y gráficas. Para la categoría propiedades matemáticas, sobresalen las nociones de vecindario, asíntotas, límites infinitos, límite como una constante y límite como salto. A modo de ejemplo, se muestra las representaciones de los sujetos EBM0125 y EQM0104.

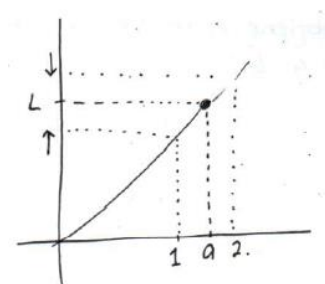


Figura 7. Representación de EBM0125.

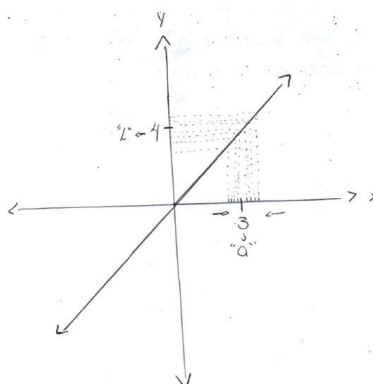


Figura 8. Representación de EQM0104.

Los sujetos EBM0125 y EQM0104 aludieron en las representaciones a las dos categorías; muestran convergencia entre las variables x e y ; y la noción de vecindario que refiere a una propiedad matemática.

4.3.4 Categoría: (6) símbolos matemáticos y notaciones (SyN)

De los 38 sujetos de investigación, 29 (el 76%) mostraron en sus representaciones la categoría símbolos matemáticos y notaciones, 13 son hombres y 16 son mujeres. De los 16 de Biología, 12 (el 75%), exhibieron dicha categoría y de los 22 de Ingeniería en Química Industrial, 17 (el 77%).

Los símbolos matemáticos y notaciones más usados por los estudiantes fueron $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ donde a, L y $f(x)$ son ejemplos concretos, a o b para referirse al valor que tienen las preimágenes, L o b para indicar el valor al que tienden las imágenes, x para referirse a las preimágenes, y o $f(x)$ para aludir imágenes, $f(x)$ para referirse a la función, y en el algunos casos también brindaron un criterio de asociación para la función. Finalmente, usaron los números para aludir a casos particulares de preimágenes e imágenes u otras

nociones matemáticas. A modo de ejemplo, se muestra las representaciones de los sujetos EBH0309 y EQH0205.

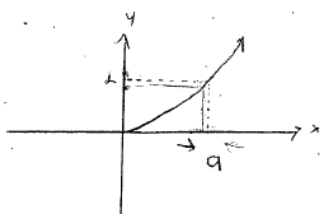


Figura 9. Representación de EBH0309.

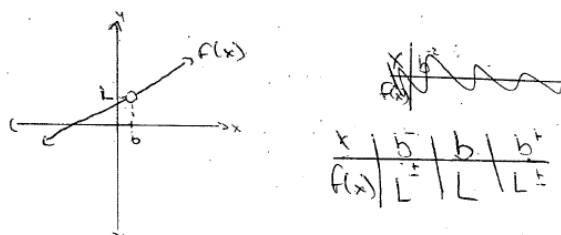


Figura 10. Representación de EQH0205.

Nótese como el sujeto EBH0309 usó el símbolo a para aludir al número a las que tienden las preimágenes de la función, y L para referir el número al que se aproximan las imágenes. Por su parte, el sujeto EQH0205 usó el símbolo b para referir al número a las que tienden las preimágenes de la función, y también L para indicar el número al que se aproximan las imágenes, e indica con $f(x)$ la función, además de una tabla de valores genérica.

4.3.5 Categorías: (8) vinculación entre límite e imagen (LI) y (10) condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC)

De los 38 estudiantes, 8 (el 21%) mostraron en sus representaciones solo la categoría vinculación entre el límite y la imagen, 8 (el 21%) solo la categoría condiciones de lateralidad y doble convergencia y 3 (el 8%) evidenciaron las dos. Por lo tanto, 11 (el 29%) evidenciaron la vinculación entre el límite y la imagen y 11 (el 29%) condiciones de lateralidad y doble convergencia, en ambos casos, 5 son hombres y 6 mujeres.

De los 16 de Biología, 2 (el 13%) evidenciaron en sus representaciones la vinculación entre el límite e imagen, 7 (el 44%) mostraron condiciones de lateralidad y doble convergencia. De los 22 de Ingeniería en Química Industrial, 9 (el 41 %) exhibieron la vinculación entre el límite e imagen, 4 (el 18%) mostraron condiciones de lateralidad y doble convergencia.

Para la categoría vinculación entre límite e imagen, las subcategorías más usuales de los sujetos fueron *la independencia* entre el límite y la imagen, y en menor medida la *identificación* y la *conexión* entre el límite e imagen. Para la categoría condiciones de lateralidad y doble convergencia, se tiene que en la representación gráfica sobresalían las flechas alrededor de un número para indicar que, por la izquierda y la derecha el límite debía ser el mismo; y en la representación tabular resalta la asignación de valores cercanos a un

número por su izquierda y por su derecha, para verificar que sus imágenes tienden al mismo resultado. A modo de ejemplo, se muestra las representaciones de los sujetos EBM0125 y EQH0221.

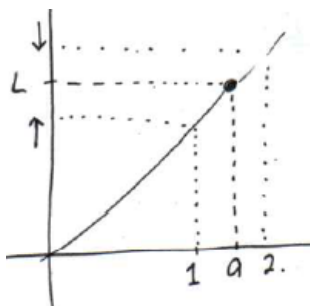


Figura 11. Representación de EBM0125.

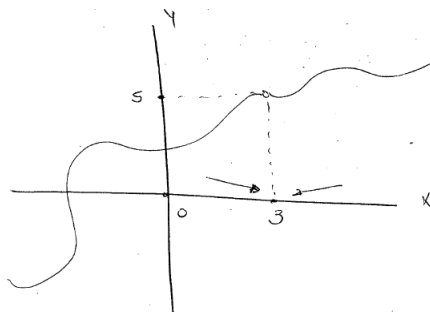


Figura 12. Representación de EQH0221.

Los sujetos EBM0125 y EQH0221 mostraron ambas categorías en la representación. El sujeto EBM0125 evidenció vinculación entre límite e imagen, puntualmente una *identificación* debido a que asignó valor de imagen al límite de manera general, además mediante flechas, indicó que por la izquierda y por la derecha las imágenes debían acercarse a un mismo valor. El sujeto EQH0221 exhibió vinculación entre el límite e imagen, pero con la noción de *independencia* pues no asignó valor de imagen al límite, a su vez, mediante flechas, indicó que por la izquierda y por la derecha de tres el límite debía ser el mismo.

4.3.6 Categoría: (13) aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad (Alcanz. Y Reb)

De los 38 sujetos de investigación, 3 (el 8%) evidenciaron en la representación, aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad, de los cuales 2 son hombres y 1 es mujer y todos son de Biología. A continuación, se muestran las representaciones de los tres sujetos.

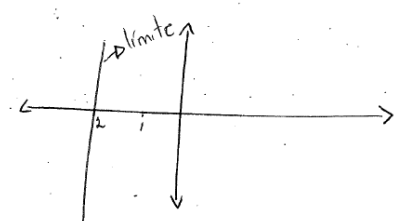


Figura 13. Representación de EBM0606.

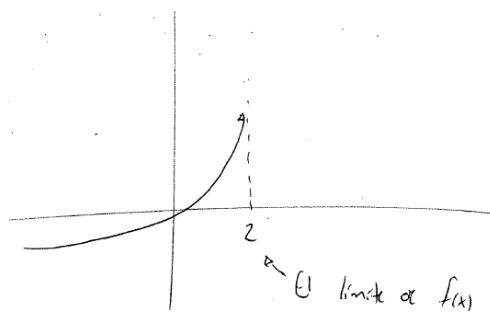
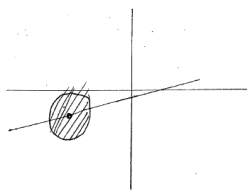


Figura 14. Representación de EBH0705.



/// = ese sería el límite, la zona que nos interesa

Figura 15. Representación de EBH1203.

Los tres sujetos establecieron una acotación, e indicaron el límite como barrera que no se sobrepasa. En el caso de los sujetos EBM0606 y EBH0705 la barrera fue representada mediante una línea mientras que el sujeto EBH1203 la representó mediante un círculo.

4.4 Análisis de la tarea 4

En esta tarea llamada *aplicaciones* se les solicitó a los sujetos que brindaran algunas aplicaciones de los límites en diferentes áreas no necesariamente matemáticas. Para el análisis de la información se consideran 10 categorías que aluden a los términos indicados por los sujetos tales como: (1) estadísticas, (2) astronomía, (3) ingeniería, (4) física, (5) arquitectura, (6) economía, (7) gráficas matemáticas, (8) convergencia de una función, (9) concepto de derivada y; (10) industria y medicina. Hubo estudiantes que manifestaron más de una aplicación.

Se resalta que 13 sujetos de 38 (el 34%) indicaron aplicaciones. De esos 13, siete son hombres y seis son mujeres, por lo que no hay mayor diferencia por sexo. Además, 23 estudiantes de 38 (el 61%) externaron información irrelevante para la tarea, y dos estudiantes de 38 (el 5%) no conocían aplicaciones.

Para Biología se tiene que 6 estudiantes de 16 (el 38%) anotaron aplicaciones y, por lo tanto, 10 estudiantes de 16 (el 62%) no lo hicieron. En el caso de Ingeniería en Química Industrial, 7 estudiantes de 22 (el 32%) brindaron aplicaciones y, por ende 15 estudiantes de 22 (el 68%) no lo hicieron.

Específicamente, de los 38 sujetos, 4 de ellos indicaron como aplicaciones, gráficas matemáticas, 3 de ellos estadísticas y 2 de ellos economía. Cada una de las aplicaciones denominadas astronomía, ingeniería, física, arquitectura, convergencia de una función, concepto de derivada, industria y medicina, fueron mencionadas una vez por un sujeto, no

necesariamente el mismo. Nótese como las aplicaciones que brindaron los sujetos para el límite son muy generales, y no enfatizaron elementos específicos de cómo se aplica el límite. A modo de ejemplo, se presentan las aplicaciones escritas por cuatro sujetos de investigación.

EBH0706: Pueden ser un elemento importante para la ingeniería ya que esta requiere de cálculos exactos o lo más próximos o aproximados posibles.

EBM0927: Para estadísticas o gráficas matemáticas.

EQH0221: Para determinar el punto de convergencia de una función, para comprobar y aplicar el concepto de derivada de una función dada.

EQH0201: Los límites (al igual que el cálculo en sí) son parte fundamental de casi todo lo que nos rodea. Se pueden usar en las industrias, para crear máquinas muy funcionales.

Se puede observar en los ejemplos anteriores la generalidad de las aplicaciones mencionadas.

4.5 Análisis de la tarea 5

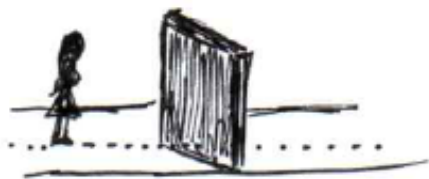
En esta tarea denominada *significado de la palabra límite fuera de la matemática* se les pidió a los sujetos de investigación que propusieran otros significados de la palabra límite en contextos no matemáticos. Para ello, podían ejemplificar, realizar dibujos o cualquier otra forma de expresión que consideraran pertinente, el objetivo de esta tarea era determinar significados alternativos para la palabra límite. Para su análisis se consideraron ocho categorías: (1) *frontera*, (2) *barrera*, (3) *no alcanzable-no rebasable*, (4) *alcanzable*, (5) *valor extremo*, (6) *impedimento*, (7) *hueco* y (8) *fin*. Hubo estudiantes que manifestaron más de un significado.

Se resalta que 37 sujetos de 38 (el 97%) brindaron otro significado del límite fuera de la matemática, 19 son hombres y 18 son mujeres, por lo que no hay gran diferencia por sexo. Solo un sujeto de los 38, de Biología, no brindó información relevante para la tarea.

Puntualmente, 16 sujetos de 38 (el 42%) aludieron al límite como barrera, 11 sujetos de 38 (el 29%), refirieron al límite como valor extremo, 9 sujetos de 38 (el 24%) mencionaron el límite como frontera, 5 sujetos de 38 (el 13%) citaron el límite como una noción no alcanzable o no rebasable, 4 sujetos de 38 (el 11%) como un impedimento, 3 de 38 (el 8%) hicieron referencia al límite como la noción de fin, y un sujeto de 38 (el 3%) aludió al límite como una noción alcanzable, al igual que un sujeto de 38 (el 3%) lo indicó como la noción

de hueco. A modo de ejemplo, se presentan significados para la palabra límite fuera de las matemáticas escritos por cuatro sujetos de investigación.

EBM0125: El límite se asemeja a una barrera, un punto donde puede llegar, pero ya no puede avanzar a más de ahí.



EBH1203: Algo que está cerca de otra cosa, pero sin llegar a tocarlo o atravesarlo.

EQH0228: Un tope. Algo que no nos permite seguir. Algo que demarca una división.

EQM0213: Fuera de matemática, la palabra límite significa el borde de un lugar o objeto. También puede referirse al punto final o extremo de una situación. Por ejemplo, “Jenny se comportó tan mal que llegó a mi límite”.

Nótese que los significados descritos corresponden la noción de barrera, la noción de no alcanzabilidad, la noción de barrera y frontera, y la noción de valor extremo, respectivamente.

CAPÍTULO V. SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Este capítulo se compone de seis apartados. En el primero, se realiza una síntesis de los resultados que se presentaron en el capítulo IV organizada en tres elementos: *los aspectos estructurales objeto/proceso, los aspectos estructurales destrezas prácticas de cálculo, y los sentidos y modos de uso*. En el segundo, se presenta una síntesis de las categorías modales de las tareas del cuestionario 1 organizadas por carrera, en el tercero, se detallan las conclusiones obtenidas en esta investigación, en el cuarto, algunos aportes de la investigación, en el quinto, las imitaciones presentadas y en el sexto, futuras líneas de investigación que se consideran a partir de este trabajo.

5.1 Síntesis de los resultados

Los resultados de esta investigación descritos en el capítulo IV, fueron obtenidos de la aplicación del cuestionario 1 (ver anexo 1) a 38 sujetos de las carreras de Biología e Ingeniería en Química Industrial. Su elaboración respondió a lo planteado en el objetivo 1 de este trabajo.

La tarea 1 tuvo un rol importante para la consecución de las tareas 2, 3 4 y 5 del cuestionario 1. Concretamente, se tuvo que de los 38 sujetos de investigación 22 (el 58%) escribieron una definición completa e informal dada por el profesor, un estudiante la escribió incompleta e informal, 15 estudiantes (el 39%) no anotaron ninguna definición y ningún estudiante transcribió una definición formal.

5.1.1 Aspectos estructurales objeto/proceso

Los aspectos estructurales objeto/proceso responden al objetivo 2 de la investigación. Están presentes en las definiciones brindadas por los sujetos para la tarea 2, y en las representaciones que manifestaron en la tarea 3. Responden a la estructura conceptual y los sistemas de representación descritos en el marco teórico.

En la tarea 2 se tiene que para la definición del límite finito de una función en un punto, de los 38 estudiantes: 28 (el 74%) señalaron el límite como un *objeto*; 29 (el 76%) distinguieron el límite como un *proceso*; 10 (el 26%) refirieron en su definición a las *variables x e y* ; 6 (el 16%) resaltaron *descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función*; 12 (el 32%) resaltaron *coordinación entre ambas variables*; 13 (el 34%)

evidenciaron *símbolos matemáticos y notaciones*; 6 (el 16%), refirieron a un *sistema de representación distinto al numérico o simbólico*; 7 (el 18%), mostraron la *vinculación del límite con la imagen*; y 13 (el 34%) evidenciaron la categoría *términos*.

En la tarea 3 para la representación del límite finito de una función en un punto, de los 38 sujetos: 5 (el 13%) señalaron el límite como un *objeto*; 16 (el 42%) distinguieron el límite como un *proceso*; 6 (el 16 %) mostraron *descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función*; 15 (el 39%) resaltaron *coordinación entre ambas variables*; 29 (el 76%) evidenciaron *símbolos matemáticos y notaciones*; y 11 (el 29%) mostraron la *vinculación del límite con la imagen*.

5.1.2 Aspectos estructurales destrezas prácticas de cálculo

Los aspectos estructurales destrezas prácticas de cálculo responden al objetivo 3 de la investigación. Están presentes en las definiciones brindadas por los sujetos para la tarea 2, y en las representaciones que manifestaron en la tarea 3. Además, hacen referencia a la estructura conceptual y a los sistemas de representación descritos en el marco teórico.

En la tarea 2 se tiene que, para la definición del límite finito de una función en un punto, de los 38 estudiantes: 12 (el 32%) expresaron *condiciones de lateralidad y doble convergencia*, 3 (el 8%), destacaron *propiedades matemáticas*, y 8 (el 21%) mostraron *aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad*.

En la tarea 3 para la representación del límite finito de una función en un punto, de los 38 sujetos: 11 (el 29%) mostraron *condiciones de lateralidad y doble convergencia*, 15 (el 39%) evidenciaron *propiedades matemáticas*, 5 (el 13%) hicieron una *tabla de valores*, y 3 (el 8%) evidenciaron en la representación, *aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad*.

5.1.3 Sentidos y modos de uso

Los sentidos y modos de uso del concepto de límite responden al objetivo 4 del trabajo. Se observan en las definiciones brindadas por los sujetos para las tareas 4 y 5. Están en concordancia con los sentidos y modos de uso descritos en el marco teórico.

En la tarea 4 sobre las aplicaciones del límite, de los 38 estudiantes: solo 13 sujetos (el 34%) indicaron aplicaciones. Específicamente, 4 indicaron como aplicaciones *gráficas matemáticas*, 3 *estadísticas* y 2 *economía*. Las aplicaciones denominadas *astronomía*,

ingeniería, física, arquitectura, convergencia de una función, concepto de derivada, industria y medicina fueron mencionadas una vez por un sujeto, no necesariamente el mismo.

En la tarea 5 para los significados de la palabra límite fuera de la matemática de los 38 sujetos: 37 (el 97%) brindaron otro significado del límite fuera de la matemática. Puntualmente, 16 (el 42%) aludieron al límite como *barrera*, 11 (el 29%), refirieron al límite como *valor extremo*, 9 (el 24%) mencionaron el límite como *frontera*, 5 (el 13%) citaron el límite como una noción *no alcanzable o no rebasable*, 4 (el 11%) como un *impedimento*, 3 (el 8%) hicieron referencia al límite como la noción de *fin*, y 1 (el 3%) aludió al límite como una noción *alcanzable*, al igual que 1 (el 3%) lo indicó como la noción de *hueco*.

5.2 Síntesis de las categorías modales de las tareas del cuestionario 1 organizadas por carrera

En la *tarea 1*, la mayoría de los estudiantes de Biología no reprodujo una definición de límite finito de una función en un punto, mientras que la mayoría de los estudiantes de Ingeniería en Química Industrial si lo hizo.

En la *tarea 2* sobre la definición de límite, la mayoría de los estudiantes de Biología lo consideró como objeto y proceso, la mitad utilizó términos de posición relativa y la gran mayoría no evidenció el uso de símbolos matemáticos y notaciones. Asimismo, la mitad de los estudiantes de Ingeniería en Química Industrial lo consideró como objeto y proceso, una minoría usó términos de posición relativa y la mitad evidenció el uso de símbolos matemáticos y notaciones en la definición de límite.

En la *tarea 3* sobre las representaciones asociadas al concepto de límite, la mayoría de estudiantes de Biología evidenció el uso de símbolos matemáticos, notaciones y propiedades matemáticas, muy pocos evidenciaron al límite como proceso, coordinación entre las variables dependiente e independiente y; vinculación entre el límite y la imagen. Asimismo, la mayoría de estudiantes de Ingeniería en Química Industrial evidenció el uso de símbolos matemáticos y notaciones, la minoría evidenció propiedades matemáticas y cerca de la mitad mostró al límite como proceso, coordinación entre las variables dependiente e independiente y; vinculación entre el límite y la imagen en sus representaciones.

En la *tarea 4* la gran mayoría de estudiantes de Biología y de Ingeniería en Química Industrial no informó sobre aplicaciones de los límites y los que lo hicieron, no precisaron cómo.

Finalmente, en la *tarea 5* la mayoría de estudiantes de Biología y de Ingeniería en Química Industrial indicó significados del límite fuera de la matemática, en el caso de los primeros, los significados más señalados fueron frontera y barrera; en el caso de los segundos, valor extremo y barrera.

5.3 Conclusiones

El propósito de este estudio fue indagar el significado que le atribuían al concepto de límite finito de una función en un punto estudiantes universitarios de Biología e Ingeniería en Química Industrial de la Universidad Nacional de Costa Rica, para esto se establecieron 4 objetivos específicos, que se lograron de manera exitosa.

El objetivo 1 que se planteó fue elaborar un cuestionario para determinar las concepciones que le atribuían al concepto de límite los sujetos. El cuestionario 1 que se diseñó e implementó, cumplió de manera satisfactoria este primer objetivo, su estructura permitió conocer la forma en la que los sujetos entendían la definición y otras nociones del límite.

Los objetivos 2 y 3 pretendían una descripción de los aspectos estructurales *objeto/proceso* y *destrezas prácticas de cálculo* presentes en las definiciones y en las representaciones del concepto de límite. Estos objetivos se atendieron en las tareas 1, 2 y 3. La mayoría de los sujetos escribieron una definición completa e informal brindada por el profesor y ninguno anotó una definición formal. Se aclara que ninguno de los objetivos del curso MAT002 Cálculo 1 pretendían un enfoque formal del mismo.

Se resalta la concepción dual objeto/proceso que atribuyeron los estudiantes al límite pues aproximadamente tres cuartas partes de los sujetos lo señalaron como objeto o como proceso en la definición, mientras que en las representaciones disminuyó un poco la presencia de esta noción dual, pero se inclinaron más hacia la noción del límite como proceso. En menor medida se evidencia el uso de símbolos matemáticos, notaciones, términos de posición relativa, y la referencia a las variables independiente y dependiente en la definición de límite, prácticamente por cada tres estudiantes uno resaltaba estas nociones. En una proporción similar, los sujetos destacaban tanto en la definición como en la representación, coordinación entre las variables x e y .

Las representaciones que utilizaban los estudiantes para la noción de límite eran las gráficas, simbólicas, tabulares, verbales o las combinaciones de ellas, la mayoría de ellos usó la

gráfica; en ella sobresalía el uso de símbolos matemáticos y notaciones, cerca de 3 de 4 sujetos los usaban, y aproximadamente de cada 3 estudiantes 1 mostró vinculación del límite con la imagen.

Asimismo, se destaca que alrededor de la tercera parte los sujetos expresaron condiciones de lateralidad y doble convergencia, en la definición y en la representación del límite. Las propiedades matemáticas las evidenciaron más de la tercera parte de los sujetos en las representaciones, sin embargo, en las definiciones casi no se evidenciaron. Finalmente, un poco más de una quinta parte de los sujetos mostraron en la definición *aspectos estructurales de alcanzabilidad y rebasabilidad*, noción que casi no se evidenció en las representaciones.

El objetivo 4, pretendía una descripción de los sentidos y modos de uso para el concepto de límite. Se tiene que cerca de la tercera parte de los sujetos indicaron aplicaciones para los límites, algunas de las aplicaciones que más mencionaron fueron gráficas matemáticas, estadísticas y economía, nótese como tales aplicaciones eran muy generales, y no enfatizaban como se aplica el límite. Los significados que atribuían al límite fuera de la matemática fueron mayoritariamente *barrera, valor extremo, frontera, noción no alcanzable o no rebasable*, y en menor medida, *impedimento, fin, alcanzable y hueco*.

Una de las concepciones del límite que manifestaron los sujetos de investigación fue la del límite como noción inalcanzable, esta concepción también la valida Williams (1991), pues fue una de las concepciones que manifestaron como verdadera los estudiantes de su estudio.

En la estructura conceptual Fernández-Plaza (2015) detectó un nivel de análisis *algebraico* para la noción de límite, correspondiente a la noción de función real de variable real, que destaca los hechos y destrezas relacionados con la variable independiente, la variable dependiente y la regla de correspondencia. Este mismo nivel de análisis *algebraico* se evidencia en las definiciones que externaron los sujetos de esta investigación, pues eran intuitivas en términos de la variable independiente y dependiente en la mayoría de las ocasiones. Un segundo nivel que percibe Fernández-Plaza (2015) es el nivel de análisis *topológico*, sin embargo, en este estudio no se detectó.

Fernández-Plaza (2015) resaltó en su estudio dos estructuras conceptuales que se emplean “transversales” para enfatizar propiedades del concepto de límite en ejemplos puntuales que usualmente se generalizan de manera adecuada por los estudiantes, dichas estructuras son

bornológica que alude a la propiedad de rebasabilidad o no del límite a través de términos como “limitar”, “rebasar”, “sobrepasar” o “superar”; *relacional de igualdad* que refiere a la propiedad de alcanzabilidad o no del límite, usando términos como “tocar”, “llegar”, o “llegar a tocar”. Estas dos estructuras conceptuales “transversales” se evidenciaron en algunos sujetos al realizar la tarea 5 de esta investigación.

Fernández-Plaza (2015) indicó que los sistemas de representación del concepto de límite se clasifican como verbal, numérico, simbólico y gráfico. En este trabajo se clasificaron en verbal, simbólico, gráfico y tabular y no coinciden exactamente con los indicados por Fernández-Plaza (2015) debido a la forma en que se definieron. Puntualmente, en el simbólico se considera el numérico del profesor Fernández-Plaza (2015) y también se consideró el tabular como uno diferente al simbólico.

En cuanto a los sentidos y fenómenos asociados al concepto de límite, Fernández-Plaza (2015) estableció tres sentidos (1) de *convergencia o dinámico*, que se expresa mediante los términos “tender” y “aproximar”, (2) *estático* o de *valor de la función*, que se contempla cuando el límite de una función en un punto se obtiene mediante la evaluación de la función en dicho punto y (3) de *restricción*, el límite en ejemplos concretos presenta la peculiaridad de no ser rebasable, o bien de no ser alcanzable. En este trabajo solo se observó el sentido de *convergencia* y el sentido de *restricción*, en las tareas 2 y 3. Fernández-Plaza (2015), identificó dos tipos de fenómenos para el concepto de límite, de *existencia* que responden a una mayor variedad de comportamientos de una función en un entorno reducido del punto, se representan a través de salto de la función en el punto, comportamiento lateral asintótico, oscilación en el punto; y de *no existencia*, que a su vez se representan mediante sistemas de notaciones discretas o continuas. En este estudio se aprecia en las representaciones que brindaron los sujetos, el fenómeno de existencia, específicamente el de salto de la función en el punto y comportamiento lateral; y el de no existencia, también se evidencia en las representaciones.

5.4 Aportes de la investigación

Los estudios realizados hasta la fecha en Didáctica de la Matemática, sobre la noción de límite una función, mostraron la necesidad de ahondar en esta temática. Los resultados obtenidos, refuerzan algunas de las conclusiones obtenidas en otros trabajos; por ejemplo, el

de Fernández-Plaza (2015) como se detalló anteriormente. Si bien es cierto, estos estudios son similares, la diferencia radica en que esta investigación por ser un trabajo fin de máster tiene un carácter más limitado, se realizó con estudiantes universitarios en Costa Rica, mientras que el de Fernández-Plaza (2015) es un estudio más amplio pues fue una investigación doctoral que se realizó con estudiantes de Bachillerato en España.

El conocer el significado que le atribuyen estudiantes al concepto de límite finito de una función en un punto, permite examinar la forma en la que comprenden dicho concepto; lo que posibilita entender y analizar algunos problemas que podrían surgir de sus concepciones.

En algunas investigaciones previas consultadas en este trabajo, se evidencian conflictos cognitivos que presentan los estudiantes en cuanto al estudio de límites, no obstante, ahora se conocen aspectos que pueden estar propiciando estas dificultades. De este modo, el aporte principal de este estudio en cuanto a la docencia, consiste en la generación de un conocimiento práctico que se espera pueda ser útil en la toma de decisiones oportunas y adecuadas en la formación de estudiantes que matriculan el curso de MAT 002 Cálculo I. Asimismo, en cuanto a la investigación, se aportan lineamientos metodológicos, instrumentos y categorías de análisis para describir el significado atribuido a la noción de límite, que pueden ser utilizados en futuras investigaciones relacionadas con este tema.

5.5 Limitaciones de la investigación

La principal limitación fue el tiempo. Por esta razón solo se consideró el cuestionario 1 de la fase 1. De haber contado con un periodo mayor de investigación se hubiese podido realizar el análisis de la información de los restantes tres cuestionarios y por ende tener mayores datos y un análisis más profundo sobre los sujetos de investigación.

5.6 Futuras líneas de investigación

Como se mencionó en el apartado 5.4 por limitaciones de tiempo no se realizaron otras fases en la investigación. Dichas fases podrían generar investigaciones interesantes para profundizar en el análisis de los significados que atribuyen los estudiantes al concepto de límite finito de una función en un punto. Específicamente se sugieren las siguientes líneas de investigación: (1) indagar el vínculo entre las concepciones de los profesores y la de sus estudiantes, (2) estudiar si hay evolución de las concepciones del límite conforme avanza la

instrucción y (3) plantear tareas de desempeño para analizar los razonamientos que evidencian.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Azcárate, C. y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X (2), 135- 149.
- Azcárate, C., Camacho M. y Sierra M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: Investigación en didáctica del análisis. En Ortega del Rincón, T. (Coord.) *Actas del III Simposio de la SEIEM*. Valladolid.
- Bartle, R., y Sherbert, D. (2004). *Introducción al análisis matemático de una variable*. México: Limusa.
- Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: Some conceptions of first-year students. *International journal of mathematical education in science and technology*, 32(4), 487-500.
- Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. En T. Ortega (Ed.), *Investigación en Educación Matemática III* (pp. 167-184). Valladolid, España: SEIEM.
- Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales*. Tesis doctoral no publicada. Valladolid, España: Universidad de Valladolid.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula*, 10, 119-135.
- Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO*, 30, 67-82.
- Blázquez, S., Gatica, N., y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME*, 12(1), 145- 168.
- Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(2), 189-209.

- Bokhari, M. A. & Yushau, B. (2006). Local (L,e)-approximation of a function of single variable: an alternative way to define limit. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37(5), 515-526.
- Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. y Torner, G. (2016). *Teaching and learning of calculus*. Springer.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico, L. (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA*, 1(3), 125-137.
- Claros, F. J. (2010). *Límite finito de sucesiones: Fenómenos que organiza*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (sixth edition). London: Routledge.
- Contreras, A. y García, M. (2015). Investigaciones sobre límites. En M. Camacho-Machín, M. González y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del Análisis Matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM*. La Laguna, España: Universidad de La Laguna, servicio de publicaciones.
- Edwards, B.S., Dubinsky, Ed. & McDonald, M.A. (2005). *Advanced Mathematical Thinking. Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 15-25.
- Estrella, M. (2015). *significados escolares de la noción de tendencia de una función en un punto. perfiles y singularidades*. (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España.
- Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio*. (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.
- Fernández-Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

- Fernández-Plaza, J. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 103–118). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, 7(3), 117-130.
- Harel, G. & Sowder L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical thinking and learning*, 7(1), 27-50.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta edición). México: McGraw Hill.
- Jiménez, A. (2017). *Significados de la derivada en las pruebas de evaluación de bachillerato para el acceso a la universidad*. (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España.
- Juter, K. (2007a). *Students' Concept Development of Limits. Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*, Working group 14, 2320-2329.
- Juter, K. (2007b). Students' Conceptions of Limits: High Achievers versus Low Achievers. *The Montana Mathematics Enthusiast (TMME)*, 4(1), 53-65.
- Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(6), 1261-1279.
- Lupiáñez, J. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 119–137). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Martín, E., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de Las Ciencias*, 34(3), 51–71.
- Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, 11(3), 20-24.

- Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(4), 396-426.
- Parameswaran, R. (2007). On understanding the notion of limits and infinitesimal quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(2), 193-216.
- Rico, L. (1997). La educación matemática en la enseñanza secundaria. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M.M. (Eds.) *Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria*. (pp. 15-38). Madrid: ice - Horsori.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (1), 39-63.
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (33), 11–27.
- Rico, L. (2016a). Matemática y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85–100). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Rico, L. (2016b). Significados de los contenidos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 153–174). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis Didáctico y metodología de investigación. En L. Rico., J. Lupiañez. y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. (pp.1-22). Granada: Comares, S.L.
- Romero, I. (1997). *La introducción del número real en educación secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Granada, España: Comares.
- Ruiz, A. (2003). *Historia y filosofía de las matemáticas*. San José, Costa Rica: EUNED.

- Ruiz-Hidalgo, J. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139–151). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Ruiz-Hidalgo, J.F. y Fernández-Plaza, J.A. (2013). Análisis de tareas de cálculo de límites en un punto en las que intervienen identidades notables, En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp.127-134). Granada, España: Editorial Comares.
- Sánchez, M. (2012). *Límite finito de una función: Fenómenos que organiza*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Selden A. & Selden J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 1-13.
- Serrano, J. (2017). *Estudio comparativo de manuales universitarios de cálculo sobre el cálculo integral*. (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada, España.
- Sierra, M., González, M. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(1), 71-85.
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371-397.
- Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike, *The Journal of Mathematical Behavior*, 7(4), 765-790.
- Tall D. O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170-176). Berkeley, CA: PME.
- Tall, D.O. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. in Grouws D.A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan, New York, 495- 511.

- Tall, D & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Vargas, M. (2017). *Significado que le atribuyen los futuros profesores al concepto de derivada de una función en un punto*. (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.
- Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Hecklein, M. (2006). Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. *Revista PREMISA*, 8(29), 9-19.
- Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for research in Mathematics Education*, 22(3), 219-236.
- Zaskis, R. & Applebaum M. (2007). Advancing mathematical thinking: Looking back at one problem. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)*. Working group 14, 2389-2397

ANEXOS

ANEXO 1: CUESTIONARIO 1 PARA ESTUDIANTES FASE 1



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Se ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información sobre los conceptos de límites de funciones reales de variable real.

No es un examen. Es una exploración inicial para que revisar algunos conocimientos sobre el tema de “Límite de una función” en este curso.

Contéstelo de forma individual, con creatividad e interés.

- Responda a cada actividad en los lugares facilitados para ello.
- Si se equivoca no borre, sino tacha la respuesta con una raya o escríbala entre paréntesis. Esto es necesario para analizar sus respuestas.

Muchas gracias de antemano.

Nombre y apellidos: _____

Edad: _____

Sexo: _____

Carrera matriculada por la que lleva este curso: _____

Nombre del colegio del que es egresado: _____

Indique la modalidad del colegio del que es egresado (público, privado, científico, u otro): _____

Ha aprobado cursos de matemática en la Universidad Nacional o en alguna otra universidad (pública o privada), o en alguna otra modalidad (ejemplo MATEM): _____

En caso afirmativo escriba todos los cursos que ha aprobado: _____

Actividad N°1

1. Escriba la definición de **límite de una función en un punto** que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).

2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

Actividad N°2

1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

ANEXO 2: CUESTIONARIO 2 PARA PROFESORES FASE 1



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Se ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límites de funciones reales de variable real en la Universidad para una investigación como parte de las obligaciones del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en España.

La información obtenida será tratada de manera confidencial sin evidenciar casos particulares.

Muchas gracias de antemano.

Nombre y apellidos:

Mayor grado académico alcanzado:

Área de especialización en la que obtuvo el mayor grado académico:

Universidad en la que obtuvo el mayor grado académico:

Años de experiencia como profesor universitario: _____

Cantidad de veces que ha impartido el curso de cálculo I en la Universidad Nacional o en cualquier otra universidad: _____

Actividad N°1

1. Escriba la definición de **límite de una función en un punto** que le ha dado sus estudiantes de Cálculo I.

2. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.

3. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, es decir, lo que considere necesario, para representar la definición de límite planteada en la **pregunta 1**.

4. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites?

Actividad N°2

1. Además del significado matemático de la palabra **límite** que ha estudiado en clase ¿qué otro significado tiene dicha palabra para usted fuera de la matemática? Puede utilizar ejemplos, dibujos, definiciones o lo que considere necesario.

ANEXO 3: CUESTIONARIO 3 PARA ESTUDIANTES FASE 2



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Se ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información sobre sus conocimientos del concepto de límites de funciones reales de variable real.

No es un examen. Es una exploración inicial para revisar algunos conocimientos sobre el tema de “Límite de una función” en este curso.

Contéstelo de forma individual, con creatividad e interés.

- Responda a cada actividad en los lugares facilitados para ello.
- Si se equivoca no borre, sino tache la respuesta con una raya o escríbala entre paréntesis. Esto es necesario para analizar sus respuestas.

Muchas gracias de antemano.

Nombre y apellidos: _____

Edad: _____

Sexo: _____

Carrera matriculada por la que lleva este curso: _____

Nombre del colegio del que es egresado: _____

Indique la modalidad del colegio del que es egresado (público, privado, científico, u otro):

Ha aprobado cursos de matemática en la Universidad Nacional o en alguna otra universidad (pública o privada), o en alguna otra modalidad (ejemplo MATEM): _____

En caso afirmativo escriba todos los cursos que ha aprobado: _____

Actividad N°1

1. Sobre la definición de límite de una función en un punto.
 - a. Escriba la definición de límite que le ha dado su profesor (sugerencia: puede revisar su cuaderno).
 - b. Explique con sus propias palabras qué significa la definición anterior.
 - c. Utilice uno o varios dibujos, esquemas o figuras, si lo considera necesario, para representar la definición de límite planteada en el **apartado a**.

2. ¿Qué aplicaciones considera que pueden tener los límites? ¿Qué tipo de problemas se pueden resolver usando límites?

Actividad N°2

2. Sea g una función real de variable real tal que $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 2^{-1000} & \text{si } 0 \leq x \leq 2^{-1000} \\ x & \text{si } x > 2^{-1000} \end{cases}$.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

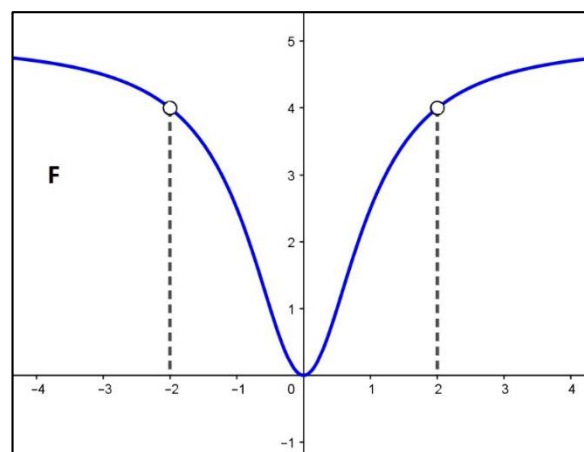
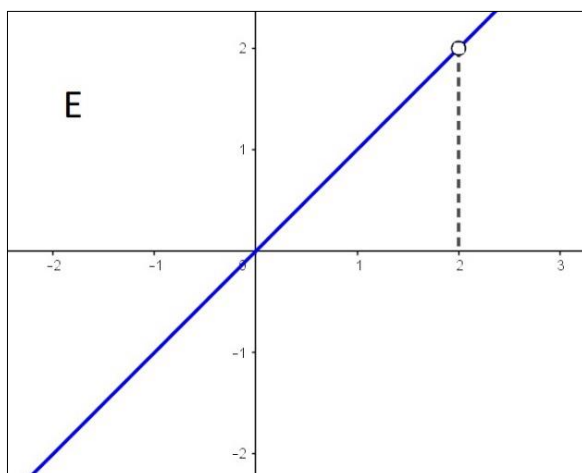
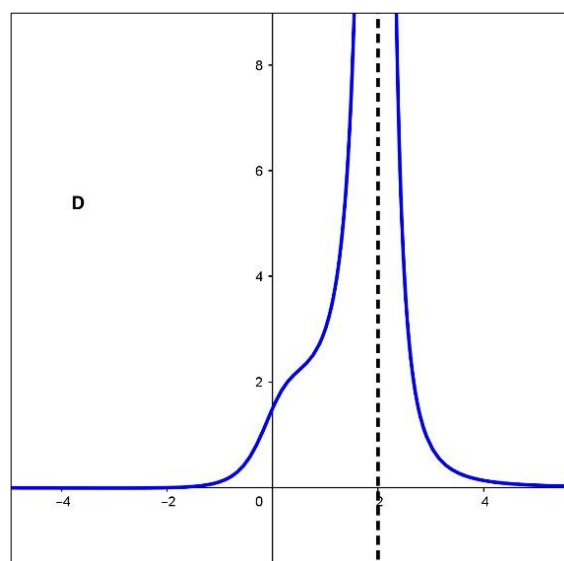
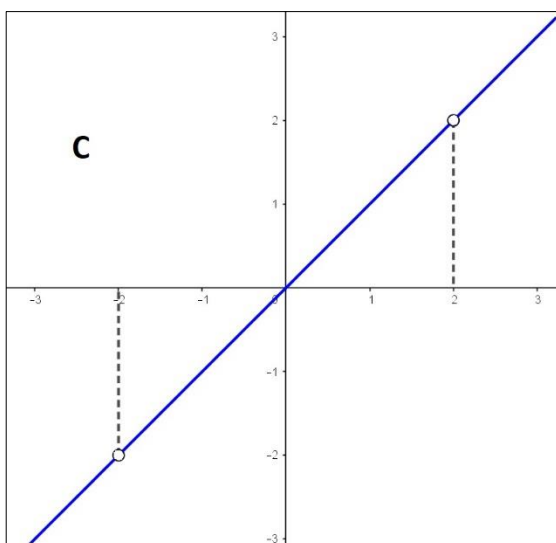
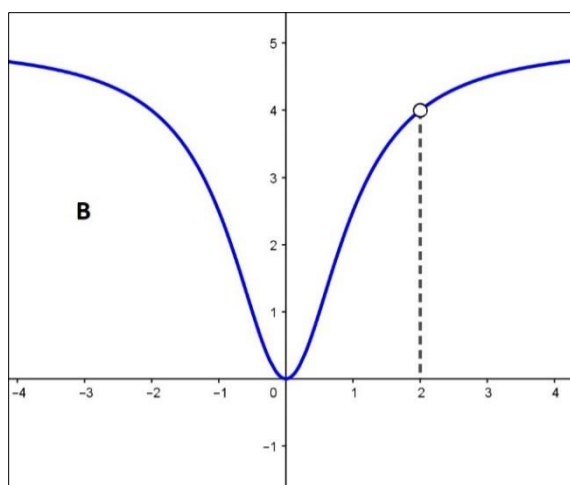
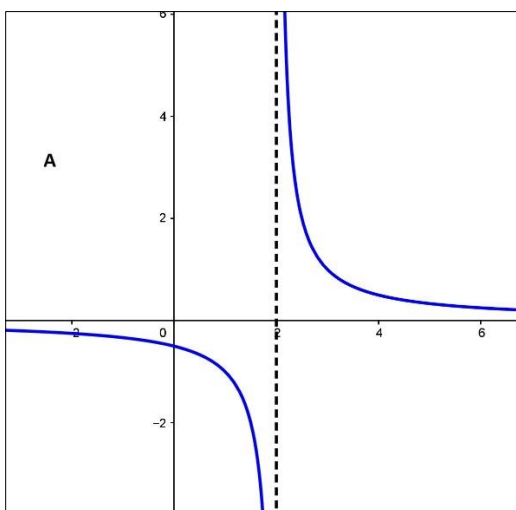
3. Sea f una función real de variable real tal que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Encierre con un círculo la letra de las proposiciones que considere verdaderas (puede encerrar más de una si lo considera necesario). Si no considera ninguna verdadera, encierre con un círculo la proposición f.
- a. f es continua en el punto $x = 2$.
 - b. f está definida en $x = 2$.
 - c. $f(2) = 3$.
 - d. $\lim_{h \rightarrow 0} [f(2+h) - 3] = 0$.
 - e. $f'(2)$ existe.
 - f. Ninguna de las proposiciones mencionadas es verdadera.

4. Considere la siguiente expresión $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3x^2 - 12}{(x - 2)^3 (2x^2 + 1)} \right]$.

a. Calcule el límite anterior.

b. Identifique la gráfica de la función con una de las representaciones dadas en la plantilla de gráficas que se encuentra en la página 6. Justifique su elección.

Plantilla de gráficas



ANEXO 4: CUESTIONARIO 4 PARA PROFESORES FASE 2



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Se ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite de funciones reales de variable real en la Universidad para una investigación como parte de las obligaciones del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en España.

La información obtenida será tratada de manera confidencial sin evidenciar casos particulares.

Muchas gracias de antemano.

Nombre y apellidos:

Mayor grado académico alcanzado:

Área de especialización en la que obtuvo el mayor grado académico:

Universidad en la que obtuvo el mayor grado académico:

Años de experiencia como profesor universitario: _____

Cantidad de veces que ha impartido el curso de cálculo I en la Universidad Nacional o en cualquier otra universidad: _____

Actividad N°1

1. Sea g una función real de variable real tal que $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 2^{-1000} & \text{si } 0 \leq x \leq 2^{-1000} \\ x & \text{si } x > 2^{-1000} \end{cases}$.

Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

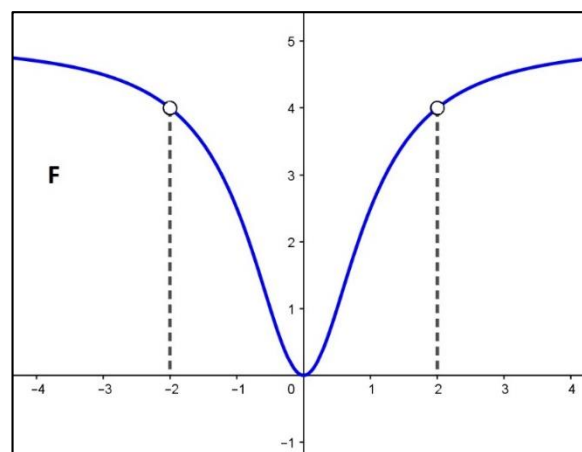
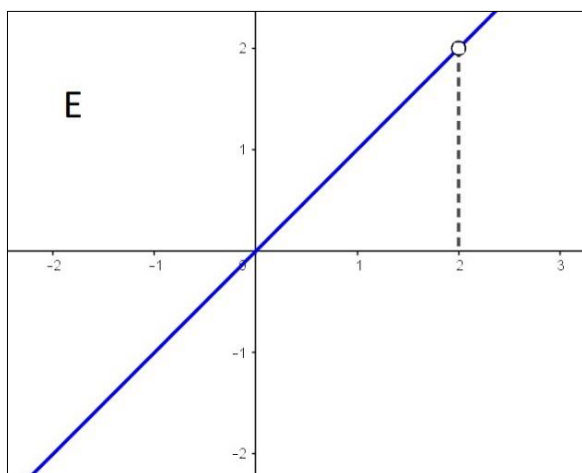
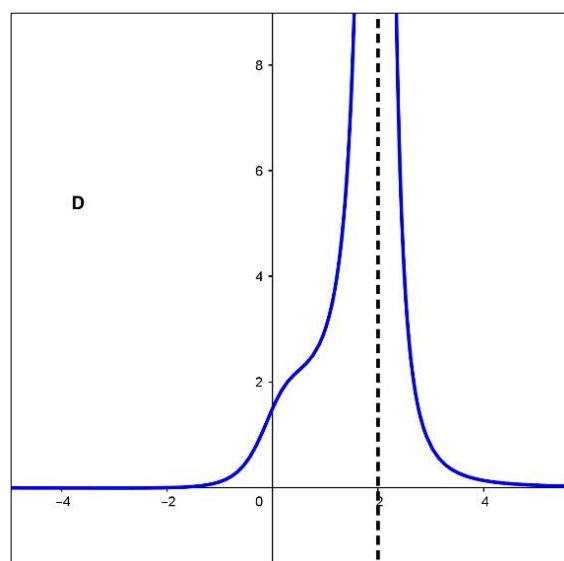
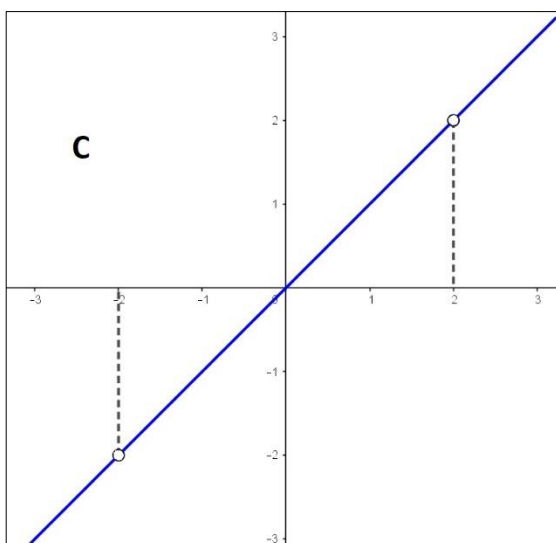
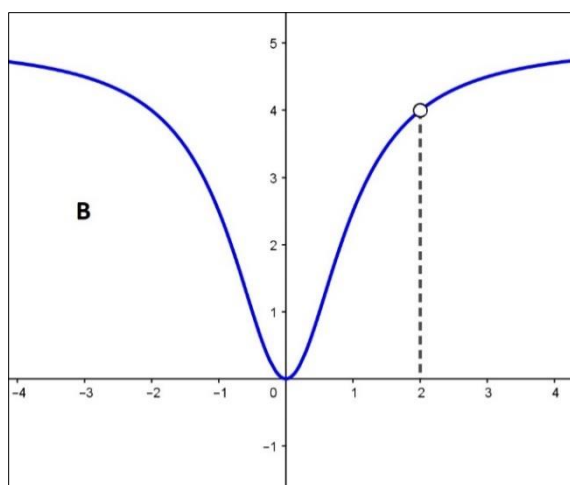
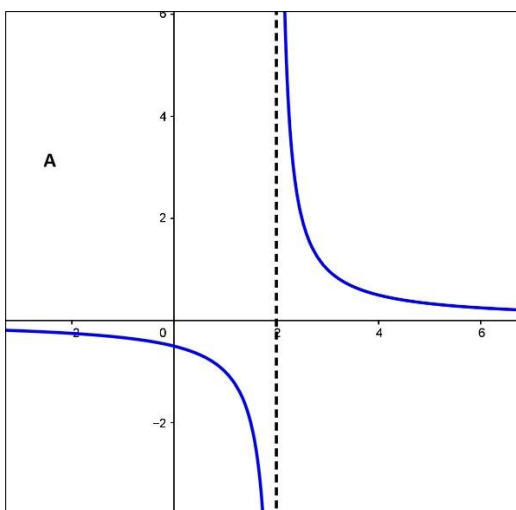
2. Sea f una función real de variable real tal que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$. Encierre con un círculo la letra de las proposiciones que considere verdaderas (puede encerrar más de una si lo considera necesario). Si no considera ninguna verdadera, encierre con un círculo la proposición f.
- g. f es continua en el punto $x = 2$.
 - h. f está definida en $x = 2$.
 - i. $f(2) = 3$.
 - j. $\lim_{h \rightarrow 0} [f(2+h) - 3] = 0$.
 - k. $f'(2)$ existe.
 - l. Ninguna de las proposiciones mencionadas es verdadera.

3. Considere la siguiente expresión $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{3x^2 - 12}{(x - 2)^3 (2x^2 + 1)} \right]$.

c. Calcule el límite anterior.

d. Identifique la gráfica de la función con una de las representaciones dadas en la plantilla de gráficas que se encuentra en la página 4. Justifique su elección.

Plantilla de gráficas



**ANEXO 5: NÚMERO DE ESTUDIANTES POR CARRERA EN LA QUE SE
ENCUENTRAN MATRICULADOS EN EL I CICLO 2018, SEPARADOS POR
SEXO, FASE 1.**

Tabla A

Número de estudiantes por carrera, separados por sexo, fase 1.

Carrera de Grado	Hombres	Mujeres	Cantidad de estudiantes
Biología	14	18	32
Cartografía digital	0	1	1
Enseñanza de las Ciencias	9	19	28
Economía	30	18	48
Administración	2	0	2
Enseñanza de la Matemática	3	0	3
Comercio y negocios Internacionales	1	0	1
Ingeniería en Química Industrial	17	13	30
Ingeniería en Gestión Ambiental	4	9	13
Ingeniería en sistemas de Información	134	34	168
Ingeniería en Ciencias Forestales	6	10	16
Ingeniería en Topografía, Catastro y Geodesia	35	12	47
Ingeniería en Bioprocesos Industriales	9	23	32

**ANEXO 6: NÚMERO DE ESTUDIANTES POR CARRERA EN LA QUE SE
ENCUENTRAN MATRICULADOS EN EL I CICLO 2018, SEPARADOS POR
SEXO, FASE 2.**

Tabla B

Número de estudiantes por carrera, separados por sexo, fase 2.

Carrera de Grado	Hombres	Mujeres	Cantidad de estudiantes
Biología	8	8	16
Cartografía digital	1	0	1
Enseñanza de las Ciencias	3	12	15
Economía	15	7	22
Administración	0	0	0
Enseñanza de la Matemática	2	0	2
Comercio y negocios Internacionales	0	0	0
Ingeniería en Química Industrial	11	11	22
Ingeniería en Gestión Ambiental	3	7	10
Ingeniería en sistemas de Información	83	20	103
Ingeniería en Ciencias Forestales	4	8	12
Ingeniería en Topografía, Catastro y Geodesia	16	11	27
Ingeniería en Bioprocesos Industriales	6	20	26

**ANEXO 7: DESCRIPCIÓN DE LAS TAREAS DEL CUESTIONARIO 3,
EVOLUCIÓN DE CONCEPCIONES Y DESEMPEÑO.**

Actividad N°1

Tareas 1 y 2

La tarea 1 del cuestionario 3, correspondía a las tareas 1, 2 y 3 del cuestionario 1, y la tarea 2 del cuestionario 3 correspondía a la tarea 4 del cuestionario 1 junto con la pregunta ¿qué tipo de problemas se pueden resolver usando límites?

El objetivo de estas dos tareas era conocer si con el avance de la instrucción del concepto de límite, pasando por el concepto de derivada y de aplicaciones de la derivada (problemas de razones de cambio, de optimización, regla de L'Hopital y graficación de funciones reales de variable real), los estudiantes cambiaban o ampliaban sus concepciones sobre la definición de límite, sus representaciones y sus aplicaciones.

Actividad N°2

Tarea 1: Cálculo de un límite de una función a trozos

En esta tarea se les pedía a los estudiantes que calcularan el límite de una función real de variable real “a trozos”. Con esta tarea se pretendía conocer en términos generales el desempeño de los estudiantes en el cálculo de límites, con esta particularidad de la función.

Tarea 2: Límite - continuidad y derivabilidad

En esta tarea se les planteó a los estudiantes la siguiente afirmación “sea f una función real de variable real tal que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ ”. Luego, se les brindaron varias proposiciones que vinculaban el concepto de límite con el de continuidad y el de derivabilidad. Ellos debían encerrar en un círculo las que consideraban verdaderas. El objetivo de esta tarea era conocer el conocimiento conceptual que tienen los estudiantes del concepto de límite, el vínculo de este concepto con el de continuidad, y la relación entre continuidad y derivabilidad de una función.

Tarea 3: Identificación de la gráfica de una función a partir del límite

Esta tarea tenía dos apartados. En el *apartado a* se les solicitaba a los estudiantes que calcularan un límite de una función real de variable real, y en el *apartado b* se les pedía que justificaran a partir de unas gráficas de funciones dadas, cuál era la gráfica de la función a la que le habían calculado el límite. El objetivo de esta tarea era que los estudiantes calcularan

el límite de una función real de variable real en un punto que no está en su dominio, y que utilicen esta información para valorar la existencia de asíntotas verticales, e identificar la representación gráfica de la función.