

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA



**INICIACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA
ESCOLAR A TRAVÉS DE UN MÉTODO GRÁFICO.
UN ESTUDIO DE CASOS**

Trabajo Fin de Máster

Fany Markela González Barrios

Granada, septiembre 2010

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA



**INICIACIÓN A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ÁLGEBRA
ESCOLAR A TRAVÉS DE UN MÉTODO GRÁFICO.
UN ESTUDIO DE CASOS**

Trabajo Fin de Máster en “Didáctica de la Matemática”
Autora: Fany Markela González Barrios
Director: Dr. Francisco Fernández García
Línea de investigación: Pensamiento Numérico y Algebraico
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Fdo. Fany Markela González Barrios

Vº Bº. Tutor: Dr. Francisco Fernández García

Granada, septiembre 2010

Este trabajo ha sido realizado en el Grupo de Investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico”, FQM 193 del PAI (Plan Andaluz de Investigación). Financiado también por la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) en conjunto con el Instituto para el Aprovechamiento de Recursos Humanos (IFARHU) del Gobierno Nacional de Panamá, República de Panamá.

Agradecimientos

- A los ciudadanos de mi país que a través del Gobierno me han facilitado el apoyo económico para el desarrollo de esta tarea.
- A la Universidad de Granada.
- A cada uno de mis profesores del Máster de Didáctica de la Matemática 2009-2010 por su valiosa formación, especialmente, al director de mi investigación, el Dr. Francisco Fernández García, por su gentileza en la guía y orientación que me ha brindado y apoyado en las mejoras de la realización de este trabajo, dedicando su tiempo y esmero.
- A María Victoria Martínez por estar siempre pendiente de mi investigación, facilitando, así, mi trabajo.
- A mis compañeros de Máster por escucharme y darme ánimos para continuar con este trabajo. Gracias, Chile, Puerto Rico, México, España y Panamá.

Dedicatoria

Con mucho orgullo y entusiasmo dedico este trabajo a mis queridas hijas, Natalia y Linda Mora, por haber compartido mi sueño de estudiar en la madre patria, España, y por soportar mis angustias y agobios. La dicha de tenerlas a mi lado ha sido un aliento para seguir en este arduo camino.

Mi familia que, desde la lejanía, han estado allí sin abandonarme ni un instante.
Les quiero.

ÍNDICE:

Introducción	1
Capítulo 1. Problema de investigación.....	3
1.1. Motivación	3
1.2. Objetivos de la Investigación	4
1.2.1. Objetivo general	4
1.2.2. Objetivos específicos	4
1.2.3. Preguntas de investigación.....	4
2.1. Álgebra escolar.....	5
2.2. El álgebra en el currículo de ESO.....	6
2.3. Sistemas de representación y métodos	7
2.3.1. Representaciones y sistemas de representación	7
2.3.2. Método	8
2.4. Resolución de problemas	9
2.5. Método geométrico lineal para la resolución de problemas algebraicos.....	9
Capítulo 3. Metodología.....	11
3.1. Tipo de estudio.....	11
3.2. Metodología para la transcripción de las entrevistas	11
3.2.1. Recogida de datos	11
3.2.1.1. Obtención de los protocolos escritos	12
3.3. Los sujetos de estudio	12
3.3.1. Criterio de selección de los sujetos de estudio.....	13
3.4. Instrumento de recogida de información	13
3.5. Selección de los problemas	14
3.5.1. Problemas presentados a alumnos de ESO	15
3.5.2. Problemas presentados a alumnos de Enseñanza Primaria	16
3.6. Entrevista semiestructurada	16

3.6.1. Secuencia de la entrevista	17
3.6.2. Ficha para el profesorado	18
3.7. Administración del instrumento de recogida de datos.....	22
Capítulo 4. Entrevistas. Transcripciones	23
4.1. Entrevistas seleccionadas.....	23
4.2. Transcripción de las entrevistas seleccionadas.....	23
4.2.1. Entrevista N° 1. Alumno de sexto de Primaria	24
4.2.2. Entrevista N° 2. Alumna de segundo de Secundaria.....	35
4.2.3. Entrevista N° 3. Alumna de tercero de Secundaria	47
Capítulo 5. Conclusiones	67
5.1. Respuesta a las interrogantes iniciales	67
5.2. Cuestiones abiertas	70

Introducción

Presentamos un proyecto que surge en un contexto escolar, últimos cursos de la Educación Primaria y primeros de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), con el que se pretende, por una parte, presentar a los estudiantes un nuevo método, basado en la representación gráfica a través de segmentos, que se pueda utilizar en la resolución de problemas algebraicos lineales (ecuaciones de primer grado), con una o dos incógnitas, con el objeto de que se familiaricen con el mismo y puedan resolver el problema estableciendo las relaciones entre datos e incógnitas a través de segmentos lineales.

Para conocer cómo los estudiantes resuelven los problemas vamos realizar un estudio de caso. Para ello se propone un instrumento de trabajo para que, mediante un protocolo de entrevista, consigamos que el estudiante pueda expresar, interpretar y comentar la problemática que pueda derivarse del uso de este nuevo método, con el fin de conocer mejor el desarrollo de algunas de las competencias necesarias para la resolución de problemas de este tipo.

El instrumento que se administra es una entrevista semiestructurada, a partir de tres problemas seleccionados al efecto, clara, directa, con predominio de frases cortas y expresiones propias de una conversación profesor-estudiante. A través de un protocolo definido de antemano, se han realizado 12 entrevistas de las que, por su extensión, en este informe se han incluido 3 casos de los que nos han parecido más adecuados a los objetivos.

Las entrevistas, individuales, se recogieron en formato de audio en el aula de clase, pero fuera del horario escolar. Las transcripciones se han hecho siguiendo un modelo que recoge, por un lado, la transcripción literal de la interacción profesor-alumno y, por otro, el relato, las interpretaciones y comentarios propios de la investigadora.

Por último, se exponen las conclusiones observadas a lo largo del trabajo, con lo que se trata de dar respuesta a los objetivos propuestos y a las cuestiones planteadas al inicio de este informe.

Capítulo 1. Problema de investigación

El proyecto de fin de Máster que se expone, toma como referencia los trabajos hechos por Fernández (tesis doctoral, 1997), Espinosa (tesis doctoral, 2004) y Martínez (trabajo de investigación tutelada, 2006), en torno al uso de sistemas de representación en la resolución de problemas del álgebra escolar.

1.1. Motivación

En las dos tesis antes mencionadas, la investigación ha estado focalizada en los sujetos, como resolutores de problemas, y los sistemas de representación que utilizan los estudiantes en la resolución de los problemas algebraicos. Martínez (2006), sin embargo, hace un análisis desplazando el centro de interés hacia una metodología, inmersa en los sistemas de representación gráficos, que implica una propuesta de mejora de la enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas de álgebra elemental.

En todos los trabajos mencionados se han utilizado instrumentos de recogida de datos basados en la resolución de problemas, por parte de los estudiantes, en un formato de papel y lápiz. Esto ha supuesto que los datos disponibles han sido sólo los representados sobre el papel, por lo que ha sido necesario ajustarse a esta información e interpretarla, obviando otro tipo de informaciones como los cálculos mentales, las omisiones o la destrucción (borrado) de parte escrita de la resolución.

Faltaba contrastar los datos escritos por los estudiantes con sus razonamientos y justificaciones a la hora de plasmar sobre el papel las relaciones y operaciones en la resolución de los problemas algebraicos.

Para conseguir esta información era necesario entrevistar al estudiante y, mucho mejor, en el mismo momento de la resolución, solicitándole explicaciones, justificaciones, aclaraciones e, incluso, revisiones y ajustes entre lo escrito y lo declarado verbalmente.

Como esta metodología de actuación, en nuestras condiciones, es prácticamente imposible para un grupo numeroso de sujetos, se ha optado por un estudio de casos con 12 entrevistas, en donde se ha administrado un instrumento compuesto por problemas junto con una entrevista paralela, para ir conociendo, de viva voz, los testimonios de los estudiantes acerca de cómo van avanzando y justificando los pasos dados en la resolución de los problemas propuestos.

El problema de investigación que nos planteamos es conocer mejor acerca del conocimiento que ponen en juego los estudiantes cuando utilizan el método gráfico lineal para resolver problemas algebraicos escolares.

1.2. Objetivos de la Investigación

La inquietud respecto del uso de un sistema de representación, nos lleva a plantearnos un objetivo general.

1.2.1. Objetivo general

Conocer cómo los estudiantes resuelven problemas algebraicos escolares a través de un método geométrico lineal, basado en el uso de segmentos.

1.2.2. Objetivos específicos

Entre otras cosas, las técnicas de análisis de las observaciones empíricas nos llevarían a desarrollar los siguientes objetivos específicos de la investigación.

1. Describir las características que definen el MGL para implementarlo en el aula.
2. Diseñar un instrumento que permita familiarizar al estudiante con el nuevo método, logrando que verbalice, poco a poco, lo que esté llevando a cabo.

1.2.3. Preguntas de investigación

Pretendemos, en este informe fin de máster, dar respuesta a algunas preguntas:

1. ¿La utilización del Método Geométrico Lineal facilita la comprensión y el significado en el planteamiento y ejecución de los problemas algebraicos?
2. ¿Cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas algebraicos escolares utilizando el Método Geométrico Lineal (en lo sucesivo MGL), después de haber sido instruidos para ello?
3. ¿Cómo razonan los estudiantes cuando resuelven problemas utilizando este Método Geométrico Lineal?
4. ¿El instrumento para la recogida de datos es adecuado al fin que se pretende?
5. ¿Cómo se puede mejorar el instrumento de recogida de datos?

Para dar respuesta a estas interrogantes se llevará a cabo un estudio de casos, de naturaleza exploratoria, con el fin de obtener observaciones empíricas de las actuaciones, más o menos generalizadas, de los alumnos cuando resuelven problemas mediante el uso del MGL.

Capítulo 2. Marco teórico

Nuestro marco teórico está basado en el marco teórico presentado por Martínez Videla (2006) en su Trabajo de Investigación Tutelada, calificado sobresaliente, que, a su vez, deriva de las tesis doctorales de Fernández (1997) y Espinosa (2005), y que constituye una derivación del trabajo que desarrolla Martínez Videla para su tesis doctoral.

En este informe presentamos algunos trabajos de investigación previos, los que consideramos más relacionados, definiciones de términos básicos, además de delimitar el área de estudio dentro de la que se está trabajando, con el fin de proporcionar, a la vez, las bases sobre las que describir algunos fenómenos que han sido explicados en otras investigaciones.

Veamos los siguientes apartados que contempla nuestro marco teórico:

- Álgebra escolar.
- Álgebra en el currículo de ESO
- Sistemas de representación y métodos
- Resolución de problemas
- Método gráfico lineal de resolución de problemas algebraicos

2.1. Álgebra escolar

Dentro de la Didáctica de la Matemática, el tema del álgebra escolar ha sido un tema de amplio debate en los últimos años, por lo que podemos mencionar las investigaciones realizadas a nivel curricular del álgebra, de algunos autores como son: Kieran y Filloy (1989); Kaput, (1995, 2000 a, 2000 b); Fernández, (1996, 1997 a, 1997 b); Espinosa, (2002, 2004); Molina, (2004), entre otros.

Las publicaciones que presenta el NCTM para la definición del Estándar Álgebra, describe que “*se centra en relaciones entre cantidades, las formas de representación de relaciones matemáticas y el análisis del cambio*” (NCTM, 2000, p.39). En efecto, Kaput (2000 a) nos plantea al respecto, que la imagen tradicional del álgebra, basada en más de un siglo de experiencia de su enseñanza y aprendizaje, se reduce a la simplificación de expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones y el aprendizaje de reglas de manipulación de símbolos, y que el álgebra ha sido enseñada y aprendida como un conjunto de procedimientos desconectado del resto del conocimiento matemático y del mundo real y cercano a los estudiantes.

El aprendizaje del álgebra en el ámbito escolar es un área problemática para la Educación Matemática que merece seguir siendo abordada como avance hacia el futuro de la misma.

2.2. El álgebra en el currículo de ESO

En el nivel educativo nos enfrentamos a un currículo en el que debemos revisar cuáles son los contenidos relevantes en la medida de crecimiento y mejora. No obstante, al hablar de currículo nos referimos a un término genérico que comprende toda actividad de planificar una formación (Stenhouse, 1984; citado en Rico, 1998).

Kaput (1995) define tres dimensiones a tomar en cuenta en una reforma en el currículo de la educación secundaria en cuanto a álgebra se refiere:

- Amplitud de concepciones del álgebra coherentemente implementadas.
- Integración curricular del álgebra con otros contenidos matemáticos.
- Aproximación e implementación de una metodología más activa, explotando particularmente, la relacionada con la tecnología electrónica.

Kieran (2004), por otra parte, nos señala que hay varios puntos de vista para dirigir el núcleo del álgebra a nivel escolar:

- Generalización de patrones numéricos, geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas.
- Resolución de problemas.
- Situaciones prácticas.
- Modelización de fenómenos físicos y matemáticos.

A mediados de los años noventa, Lesley Lee realiza un análisis referente a la pregunta *¿Qué es álgebra?*, el cual es rescatado por Kieran (2004) y cuyo análisis considera al álgebra bajo los siguientes puntos de vista: un tema escolar, la generalización de la matemática, una herramienta, un lenguaje, una cultura, una forma de pensar, una actividad.

El Real Decreto (1345/1991, 3473/2000 y 116/2004), dentro del currículo español, apunta a que la enseñanza de álgebra debe satisfacer las necesidades básicas de los estudiantes, tanto en la actualidad como en la vida futura. Sugiere que los contenidos deben trabajarse de forma intuitiva para buscar poco a poco el rigor matemático.

Lo expuesto en el Decreto, nos confirma la necesidad de formación en el álgebra escolar en la Educación Obligatoria y nos hace ver que tienen una función de instrumento para resolver situaciones problemáticas.

2.3. Sistemas de representación y métodos

En matemática es muy frecuente la utilización de una pluralidad de sistemas de representación, ya que generalmente son utilizados con el fin de materializar ideas mentales, así como el uso de métodos, dentro de los sistemas de representación, para el desarrollo de las relaciones derivadas de las nociones representadas. Vamos, por lo tanto, a presentar un análisis conceptual de ambos.

2.3.1. Representaciones y sistemas de representación

Estos términos han constituido una herramienta de gran utilidad para caracterizar la forma que tienen las personas de conocer, manipular y comunicar conceptos e ideas.

El término *representación* lo define el Diccionario de la Lengua Española, entre otros, como: “3. f. *Figura, imagen o idea que sustituye a la realidad. (...) 7. f. Psicol. Imagen o concepto en que se hace presente a la conciencia un objeto exterior o interior*” (p. 1324).

Por otra parte, Godino (2003), expresa que la representación se ha considerado como un objeto mental o real y también como una relación de correspondencia entre dos objetos, poniendo a uno de ellos en lugar del otro. Muchos estudios se han centrado en la caracterización y relación entre representaciones internas y representaciones externas al sujeto, destacamos los estudios, en el área de la psicología cognitiva, realizados por Kaput, 1992; Duval, 1999 a, 1999 b; Godino, 2003; entre otros.

Nos centramos en las representaciones externas, donde Castro y Castro (1997) las caracterizan como: “*notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes*” (p. 96).

No obstante, tomaremos como definición de sistema de representación la que Fernández (1997 b) define como: “*es un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos dotados de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto*” (p. 73). Es importante subrayar que Fernández (1997 a), en su tesis doctoral, propone una clasificación de los sistemas de representación que utilizan los estudiantes

Capítulo 2. Marco Teórico

cuando resuelven problemas algebraicos elementales en cinco categorías, las cuales fueron replicadas y ratificadas en investigaciones hechas por Espinosa (2004) y Martínez (2006).

Estos cinco sistemas de representación son:

- Ensayo-Error.
- Parte-Todo.
- Gráfico.
- Gráfico-Simbólico.
- Simbólico.

Es de nuestro interés el presentar en este trabajo la definición que da Fernández (1997 a) para el sistema de representación gráfico: *éste se emplea cuando se utiliza un sistema de representación visual (representación física, icónica, geométrica o diagramática), en definitiva un código gráfico, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas del problema, sin ningún otro elemento que podamos considerar simbólico*. Añadiremos que el término *simbólico*, recogido aquí, se indica en su sentido cartesiano (simbolismo alfabético, letras, propio del lenguaje algebraico)

Este sistema es especialmente útil cuando, en los problemas verbales algebraicos, las relaciones que se establecen son lineales y el contexto está formado por objetos en los que los datos e incógnitas son cantidades de magnitudes lineales o componentes lineales de magnitudes vectoriales. Entonces, la representación gráfica suele tender a establecer un isomorfismo entre la magnitud que se relaciona en el texto del problema con la magnitud longitud.

2.3.2. Método

Con el fin de esclarecer en qué sentido y ámbito nos estamos refiriendo, daremos algunas definiciones del concepto de método, veamos.

Entre los varios significados que proporciona el Diccionario de la Lengua Española (2001), tomamos los siguientes: “1. m. *Modo de decir o hacer con orden*”.

“4. m. *Fil. Procedimiento que se sigue en las ciencias para hallar la verdad y enseñarla*”.

2.4. Resolución de problemas

Recogemos lo que aparece en la propia normativa en que se enmarca una de las ocho competencias básicas sobre la enseñanza de las matemáticas: *“los conocimientos matemáticos constituyen pues, un campo idóneo donde ejercitar el pensamiento y la acción, contribuyendo a un desarrollo intelectual y su implicación social. Las propias estructuras de estas nociones, que se potencian cuando se formulan problemas, se piensan estrategias de solución se valoran y revisan resultados, etc. Dotando al aprendizaje matemático de carácter investigador, descubridor y crítico que genera y, a la vez, utiliza esquemas inteligentes”* (Decreto de La Junta de Andalucía 148/2002, p. 143).

Al hacer mención sobre el término de competencias, debemos esclarecer su significado, puesto que existen diferentes acepciones. En este caso, se refiere a las competencias como procesos que deben activarse para conectar el mundo real, donde surgen los problemas, con las matemáticas y resolver entonces la cuestión planteada. (Rico, 2006).

Dentro de los estudios que se centran en la resolución de problemas podemos mencionar el realizado por Pólya (1945/1965), en el que elabora un modelo del proceso de resolución de problemas dividido en cuatro fases: comprender el problema, concebir un plan, ejecución de un plan y visión retrospectiva. La finalidad de Pólya era la de hacer uso de estas etapas o ideas para motivar, en el alumno, el deseo de resolver problemas a la vez que le permita, de forma detallada, revisar cada punto del problema.

Entiéndase por “problema” como el planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos (RAE, vigésima segunda edición). Por otro lado, Puig (1996) describe cómo se ha trabajado para diferenciar lo que es un problema de lo que es un ejercicio, es decir, un ejercicio es algo que hay que resolver de forma rutinaria; utilizando algoritmos para ello. (RAE, vigésima segunda edición).

2.5. Método geométrico lineal para la resolución de problemas algebraicos

Utilizaremos este método en cuestión, presentado anteriormente por Martínez (2006) en su Trabajo de Investigación Tutelada, que se basa en la utilización de segmentos lineales para representar las cantidades de magnitudes, conocidas y desconocidas, y sus relaciones.

Tomamos este método como estudio fundamentado en:

Capítulo 2. Marco Teórico

- Un segmento permite representar variables discretas y variables continuas, por lo que se amplía el ámbito numérico al que se pueden referir los problemas con los que se va a trabajar.
- Es de fácil manipulación, no exige una especial destreza motora de parte de quien lo utiliza y tampoco requiere instrumentos específicos como regla, compás, etc., para ser trazado.
- Constituye una forma de representación muy utilizada en problemas relacionados en el campo de la física, como problemas de trayectorias, velocidades, longitudes, etc.
- Permite trabajar las variables, tanto en relaciones proporcionales como en relaciones no proporcionales.
- Teniendo en cuenta que el conjunto de segmentos lineales del plano tiene una estructura algebraica de espacio vectorial, las operaciones aditivas entre segmentos, nos van a permitir establecer las relaciones lineales entre cantidades conocidas y desconocidas. (Martínez, 2006).

En efecto, a través de la historia ha existido el uso de representaciones de cantidades de manera gráfica, como lo realizado por Horak y Horak (1981), que se basan en la consideración que hacían los griegos de los números, a modo de segmentos de recta, para proponer demostraciones geométricas de identidades algebraicas.

Con todo lo expuesto anteriormente, y tomando en cuenta el fundamento de dicho método, definimos el método geométrico lineal en los siguientes términos:

Método Geométrico Lineal: Consideraremos que se utiliza este método, en la resolución de problemas algebraicos, cuando se establecen, a través de segmentos de recta, las relaciones lineales entre los datos y las incógnitas contenidas en el enunciado del problema mediante segmentos de recta, en donde las incógnitas están representadas por trazos o partes de esos segmentos. Es decir, se representa una (o más) cantidad desconocida utilizando un segmento cualquiera y, posteriormente, se describen gráficamente las relaciones contenidas en el enunciado a partir de dicho segmento y mediante la definición de la unidad (explícita o implícitamente) usando un segmento determinado, de manera tal que se puedan representar cantidades conocidas (datos). La resolución del problema pasa por determinar la longitud del segmento que representa a la cantidad desconocida. (Martínez, Fernández y Flores (2009)).

Capítulo 3. Metodología

3.1. Tipo de estudio

En toda investigación es necesario utilizar técnicas según las distintas facetas del estudio y dependiendo de la cuestión particular abordada en las mismas. El diseño de este informe es eminentemente descriptivo, se ha realizado un *estudio de casos* con técnicas de tipo cualitativo. A pesar de las críticas a los estudios de casos, Bromley (1986) defiende este tipo de estudios por su fuerza, tanto si trata de obtener fundadas intuiciones, como para refutar una teoría.

El estudio de casos mediante entrevistas va a permitir caracterizar de forma más rigurosa y completa las dificultades, conflictos y grado de comprensión logrado por los sujetos de estudio.

Puesto que el estudio cualitativo se hace con una muestra de tamaño reducido, su carácter es exploratorio. No obstante *“los estudios exploratorios se efectúan, normalmente, cuando el objetivo es examinar un tema o problema poco estudiado, del cual se tienen muchas dudas o no se ha abordado antes”* (Danhke, 1989; citado por Hernández Sampieri y otros, 2003, p. 115).

Sin embargo, cabe destacar que este informe de investigación pretende ser una primera aproximación al planteamiento inicial que hemos de abordar, en donde trataremos de conocer mejor cómo los estudiantes aplican el MGL en la resolución de los problemas algebraicos que se plantean en la ESO.

3.2. Metodología para la transcripción de las entrevistas

Una de las partes principales de este informe ha sido la transcripción de las entrevistas realizadas por profesores a estudiantes, dentro del estudio de casos que tratamos.

Un grupo de profesores seleccionados ha realizado unas entrevistas a una muestra intencionada de alumnos de últimos cursos de Primaria y primeros de Secundaria, de acuerdo a un instrumento construido para esta experiencia. Estas entrevistas se han grabado en audio.

3.2.1. Recogida de datos

Para la recogida de datos ha sido necesario hacer las transcripciones correspondientes a formato papel, por lo que es de suma importancia conseguir una buena transcripción, tanto en

lo textual como en lo anímico que dejan traslucir los tonos y los comentarios de los que intervienen en la entrevista. Por lo que consideramos que la metodología que se utilice en las transcripciones debe ser la más idónea a los propósitos del trabajo.

3.2.1.1. Obtención de los protocolos escritos

En nuestro caso hemos seguido la metodología utilizada en la tesis doctoral “*La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*”, leída en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia en junio de 2010 por el Dr. David Arnau Vera, y dirigida por el Dr. Puig.

Para ello hemos tenido en cuenta “*segmentar el protocolo oral y trasladar lo que los resolutores dicen y hacen al lenguaje escrito*” (Puig 1996, p. 74).

Se necesitó utilizar un criterio que permitiera segmentar el continuo que se observa en el protocolo de audio. Por lo que hemos llamado ítem a cada uno de estos segmentos de protocolo, intentando ser fieles al discurso de ambos (profesor-alumno), aunque suponga incluir proposiciones mal formadas, a la vez que hemos tratado de respetar la entonación que los participantes dan a las frases. Los puntos suspensivos se emplean, dentro de la transcripción, para indicar una interrupción en el discurso, un final impreciso, una duda o una rectificación inmediata a lo que acaba de decir.

Para presentar el protocolo escrito de forma más clara, y siguiendo la metodología indicada, hemos realizado lo siguiente:

- Presentamos el texto transcrito dividido en dos columnas
- En la columna de la derecha aparecen los fragmentos del protocolo escrito
- En la columna izquierda aparece descrito el proceso de resolución de los problemas, además de algunas explicaciones posibles a las actuaciones de los alumnos.

3.3. Los sujetos de estudio

En este informe de investigación, se pretende hacer un estudio de casos con el propósito de observar la actuación de niños españoles en la resolución de problemas del álgebra escolar cuando utilizan el MGL.

Capítulo 3. Metodología

Se describe una experiencia de aula con 12 estudiantes de ambos sexos, entre 10 y 14 años de edad, desde 5° de Primaria hasta 3° de Educación Secundaria Obligatoria de algunos colegios e institutos de la ciudad de Granada. Se seleccionaron 12 estudiantes en total, por considerar que con ese número de estudiantes es suficiente para realizar el estudio.

3.3.1. Criterio de selección de los sujetos de estudio

La muestra intencionada obedece a:

- Colegios e Institutos de la ciudad de Granada en la que estuviesen realizando prácticas profesores de la Pasantía de Chile, realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática en el período septiembre – diciembre de 2009.
- Estudiantes de los cursos escolares, entre los últimos de educación básica y los primeros de educación secundaria obligatoria, en los que estaban de prácticas los profesores chilenos.
- Estudiantes con desempeño académico bueno en la asignatura de matemáticas.

Se trata de un muestreo a propósito o intencional, no probabilístico, ya que la elección de los sujetos es según el criterio del investigador.

3.4. Instrumento de recogida de información

Para realizar este estudio se ha construido un instrumento con el objetivo de estudiar los comportamientos de los estudiantes cuando resuelven los problemas de álgebra escolar a través del MGL.

3.4.1. Proceso de construcción del instrumento de recogida de información

Este instrumento consta de dos partes:

- 1- Un conjunto de tres problemas, con unas características adecuadas al estudio, y seleccionados de entre un grupo de problemas planteados en una investigación anterior.
- 2- Una entrevista semiestructurada para seguimiento del proceso de resolución de los problemas por parte del estudiante.

3.5. Selección de los problemas

Para este estudio de casos, se utilizaron tres problemas diferenciando si se dirigían a estudiantes de Primaria o estudiantes de Secundaria. Los problemas propuestos se han seleccionado de las fichas de trabajo de aula presentadas por Martínez, Fernández y Flores (2009). Estas fichas se han experimentado en varios centros de Primaria (en los últimos niveles) y Secundaria (en los primeros niveles), en los cursos de tres profesores que han colaborado en la experiencia, a una muestra intencionada de más de 100 estudiantes. Actualmente se están estudiando los resultados producidos.

Los tres problemas elegidos, tanto para Primaria como para Secundaria, son de gran sencillez y parecidos enunciados, sólo cambian en el valor de las cantidades. Fueron tomados de los libros de textos escolares de matemáticas que se utilizan en los centros escolares de Granada. Libros de 5º y 6º de primaria y libros de 1º, 2º y 3º de la enseñanza secundaria obligatoria (ESO).

La introducción del MGL se debe hacer de tal manera que permita al estudiante sistematizar los procedimientos de solución de cada uno de los tipos de problemas presentados, precisando las fases de resolución de los mismos. De este modo resulta conveniente solicitar a los alumnos cómo procedieron en la resolución del problema utilizando el MGL, donde las ideas básicas radican en:

- Determinar la incógnita
- Representar, con segmentos, los datos del problema
- Plantear las relaciones entre datos e incógnita
- Comparar y operar las relaciones halladas
- Obtener el resultado

El primer problema, de cada caso, se toma como modelo introductorio de los otros dos, pues su lenguaje es parecido al ejemplo que ha desarrollado previamente el profesor.

El segundo problema da origen a una fracción y los estudiantes deben de proceder a la conversión de la fracción en segmentos, lo que plantea algunas preguntas.

- ¿Tiene este problema características similares al anterior?

Capítulo 3. Metodología

- ¿Cómo lo puedo representar con segmentos?
- ¿Cómo procede para encontrar la solución?

De ahí que el problema fuera escogido para observar cómo actúan los alumnos ante la necesidad de modificar el planteamiento del problema aplicando el MGL.

El tercer problema contiene el planteamiento del mismo mediante el MGL. Lo que se le pide al estudiante es completar, a partir de ese planteamiento, la resolución del problema.

El orden en el que se ofrecieron los problemas responde a una planificación predeterminada, situándolos de tal forma que:

- El primer problema fuese sencillo y parecido al ejemplo explicado previamente.
- El segundo problema no sólo tuviese números enteros, sino que aparecieran las fracciones, aumentando, por lo tanto, su dificultad.
- El tercer problema, además de tener su propia representación, incluye valores en porcentajes. Para el caso de Primaria se mantenía el valor dado en forma de fracción, pero aumentando un poco la dificultad del problema anterior.

Cabe destacar que se tuvo en cuenta la variedad, en cuanto a la formulación, de los enunciados en cada problema propuesto, que la situación problemática fuera accesible para el nivel intelectual del estudiante y que, a la vez, le fuesen atractivos y realistas en el contexto.

A continuación veamos los problemas escogidos para este estudio.

3.5.1. Problemas presentados a alumnos de ESO

1. *Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?*
2. *Un alumno dedica, todos los días, las partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?*

3. En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?

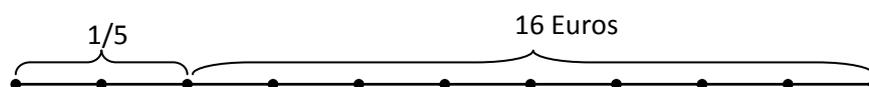


3.5.2. Problemas presentados a alumnos de Enseñanza Primaria

1. Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

2. Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{3}{10}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?

3. En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados en $\frac{1}{5}$ de su precio original y cuestan 16 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?



3.6. Entrevista semiestructurada

Para la observación de la forma de actuación de los estudiantes en la resolución de problemas algebraicos, es necesario el uso de técnicas o instrumentos de investigación. En nuestro caso se usó un protocolo de entrevista semiestructurada, diseñada por el Dr. Fernández y la estudiante de doctorado Martínez, compuesta por preguntas directas y cortas, utilizando un lenguaje sencillo, de forma que la respuesta pueda ser breve, precisa y con libertad de transmitir emociones e inquietudes desde el punto de vista personal de cada alumno.

Capítulo 3. Metodología

Este tipo de entrevista trata de establecer cuestiones y preguntas que permiten varias direcciones hacia alternativas previamente definidas. El entrevistador debe de saber conducir hacia esas posibles alternativas de respuesta siguiendo el protocolo prefijado (Bisquerra, 1989).

Los autores de este protocolo de entrevista tomaron en cuenta, además, ciertos aspectos para su elaboración como:

1. El contexto en el que se va a realizar.
2. ¿A quién se le va a aplicar?
3. ¿Quién la va a aplicar?
4. ¿Cómo la van a aplicar? Y la finalidad de la misma.

La entrevista se ha estructurado mediante un organigrama que permite al entrevistador (profesor o profesora) interactuar sobre las tareas que le va a proponer al entrevistado (alumno o alumna), en función de sus actuaciones. La estructura y secuencias didácticas están representadas en los distintos organigramas que figuran en el capítulo cuarto de la tesis doctoral de Fernández (1997).

3.6.1. Secuencia de la entrevista

El desarrollo de la entrevista para el estudio de casos con un estudiante, siguiendo el organigrama antes mencionado, se preparó siguiendo algunos pasos:

- Si el alumno tiene una actuación satisfactoria al resolver el primer problema que se propone, mediante el MGL, se le presenta un problema del siguiente nivel, que tiene mayor dificultad.
- Si al resolver el primer problema tiene una actuación no satisfactoria, se le propone volver al paso uno y repetir el proceso. Pero si de nuevo tiene dificultades al resolver, se le propone que resuelva el problema de la forma que quiera.
- Si el alumno resuelve bien el problema sin utilizar el MGL, se le pide comparar esta resolución con la actuación anterior, en la que usaba segmentos, y que trate de explicar los obstáculos que le han impedido la primera resolución. En caso de no resolver bien por ninguno de los métodos, simplemente se da por terminado el proceso.

- Finalmente, se propone un tercer problema en el que se le facilita al alumnado el planteamiento correcto, expresado mediante el MGL, y se sigue una secuencia similar a la descrita en los apartados anteriores.

En resumen, la secuencia didáctica de la entrevista se estructura de manera que permita avanzar en un sentido u otro, dependiendo de las competencias de cada alumno en particular.

3.6.2. Ficha para el profesorado

A continuación proponemos un ejercicio de observación de cómo utilizan el MGL estudiantes de últimos cursos de Primaria y primeros cursos de Secundaria en la resolución de problemas de álgebra elemental.

El objetivo es observar cómo los estudiantes utilizan el método para representar y resolver un problema, prestando particular interés en la forma de representar y los conflictos que dicho proceso conlleva, es decir, en el proceso de resolución, más que en el resultado que obtengan.

El trabajo que proponemos consta de 3 partes:

1) Resolver un problema en conjunto (profesorado-alumnado) utilizando el MGL. Discutir la resolución del problema paso a paso, con el fin de familiarizar al estudiante con el método a utilizar.

2) Proponer un problema para que el alumno lo resuelva utilizando el MGL. A medida que el estudiante va avanzando en la resolución, plantear preguntas con el fin de que el estudiante verbalice el procedimiento que esté llevando a cabo.

3) Proponer un problema, dado el planteamiento utilizando el MGL, para que el alumno complete la resolución. Discutir con el estudiante respecto de si entiende el planteamiento propuesto y que en dicho caso lo utilice para completar la resolución. En caso contrario, recomendarle que proponga otro planteamiento que le permita resolver el problema.

Parte 1: Resolver un problema junto con el alumno

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39. ¿De qué número se trata?

Si el número buscado lo representamos con el siguiente segmento:



Capítulo 3. Metodología

- a) ¿Cómo se representa el número multiplicado por 7?
- b) ¿Cómo se representa la cantidad anterior cuando la aumentamos en 4 unidades?
- c) ¿De qué forma puedes indicar que el dibujo anterior equivale a 39?
- d) ¿Qué información nueva puedes obtener a partir del planteamiento anterior?
- e) ¿Puedes determinar el número buscado? ¿Cómo?

Parte 2: Proponer un problema para que el alumno lo resuelva utilizando el MGL

Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?

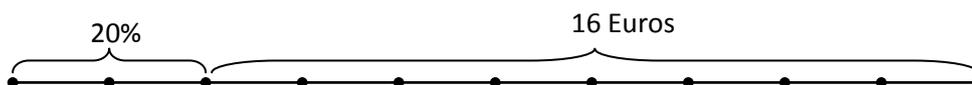
Preguntas clave en la resolución	
1) ¿Qué debes determinar? 2) Representa esa cantidad utilizando un segmento. 3) ¿Por qué utilizas un segmento de ese tamaño? ¿por qué no más grande o más pequeño? 4) ¿Cuánto crees que vale el segmento total? 5) ¿Qué información del enunciado, representarías sobre el segmento y cómo lo harías? 6) ¿Tienes la información necesaria para determinar la cantidad que debes determinar? 7) ¿Cómo la puedes determinar? Continuar cuestionando respecto de qué información necesita y cómo la va determinando, paso a paso. 8) Compara el resultado que obtuviste con lo que habías estimado inicialmente, ¿habías hecho una buena aproximación?	
a) Si la aproximación fue buena: 9a) ¿En qué te habías fijado para dar esa cantidad aproximada? Si llega a la solución correcta, fin del proceso.	b) Si la aproximación no fue buena: 9b) ¿En qué se diferencian? 10b) ¿Cómo explicas esa diferencia? Si llega a la solución correcta, fin del proceso.
Si no llega la solución correcta:	Si no llega la solución correcta:

10a) Volver al paso 1. Repetir el proceso.		11b) Volver al paso 1. Repetir el proceso.	
Si llega a la solución correcta, fin del proceso.		Si llega a la solución correcta, fin del proceso.	
Si no llega la solución correcta: 11a) Resuelve el problema de la forma que quieras.		Si no llega la solución correcta: 12b) Resuelve el problema de la forma que quieras.	
Resuelve bien: 12a.1) Compara tu resolución con la anterior (en la que usabas segmentos) e identifica el error que cometiste en la primera parte.	No resuelve bien: 12a.2) Fin del proceso.	Resuelve bien: 13b.1) Compara tu resolución con la anterior (en la que usabas segmentos) e identifica el error que cometiste en la primera parte.	No resuelve bien: 13b.2) Fin del proceso.

Parte 3: Proponer un problema, dado el planteamiento utilizando el MGL, para que el alumno complete la resolución.

Se presenta el siguiente problema al estudiante, se le pide que lo lea y que posteriormente estudie el planteamiento que se ha realizado utilizando el MGL.

En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 16 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?



Preguntas clave para en la resolución	
1) ¿Comprendes el planteamiento que se ha hecho utilizando segmentos?	
a) Si la respuesta es Sí:	b) Si la respuesta es No:
2a) ¿Qué cantidad debes determinar? (que la señale en el dibujo).	2b) Plantea tú el problema utilizando éste tipo de dibujos (segmentos).
3a) ¿Cuánto crees que es dicha cantidad?	3b) ¿Qué cantidad es la que debes determinar?

Capítulo 3. Metodología

<p>4a) ¿Tienes la información necesaria para determinarla?</p> <p>5a) ¿Cómo la puedes determinar?</p> <p>Continuar cuestionando respecto de qué información necesita y cómo la va determinando, paso a paso.</p> <p>6a) Compara el resultado que obtuviste con lo que habías estimado inicialmente, ¿habías hecho una buena aproximación?</p>		<p>4b) ¿Por qué utilizas un segmento de ese tamaño? (por qué no más grande o más pequeño).</p> <p>5b) ¿Cuánto crees que vale el segmento total?</p> <p>6b) ¿Cómo representas, utilizando el segmento anterior, que “los pantalones están rebajados en un 20% y cuestan 16 euros”?</p> <p>7b) ¿Necesitas más información para continuar? ¿Qué información? ¿Cómo la obtienes?</p> <p>Continuar cuestionando respecto de qué información necesita y cómo la va determinando, paso a paso.</p> <p>8b) Compara el resultado que obtuviste con lo que habías estimado inicialmente, ¿habías hecho una buena aproximación?</p>	
<p>a.1) Si la aproximación fue buena:</p> <p>7a.1) ¿En qué te habías fijado para dar esa cantidad aproximada?</p>	<p>a.2) Si la aproximación fue no buena:</p> <p>7a.2) ¿En qué se diferencian? ¿Cómo explicas esa diferencia?</p>	<p>b.1) Si la aproximación fue buena:</p> <p>9b.1) ¿En qué te habías fijado para dar esa cantidad aproximada?</p>	<p>b.2) Si la aproximación fue no buena:</p> <p>9b.2) ¿En qué se diferencian? ¿Cómo explicas esa diferencia?</p>
<p>Si llega a la solución correcta, fin del proceso.</p>		<p>Si llega a la solución correcta, fin del proceso.</p>	
<p>Si no llega la solución correcta:</p> <p>8a) Volver al paso 2a). Repetir el proceso.</p> <p>Si llega a la solución correcta, fin del proceso.</p>		<p>Si no llega la solución correcta:</p> <p>10b) Volver al paso 2b). Repetir el proceso.</p> <p>Si llega a la solución correcta, fin del proceso.</p>	
<p>Si no llega la solución correcta:</p> <p>9a) Ir a la pregunta 2b. Intentar resolver utilizando un planteamiento dado por el alumno (seguir protocolo desde 2b a 9b).</p> <p>Si llega a la solución correcta, fin del proceso.</p>		<p>Si no llega la solución correcta:</p> <p>11b) Resuelve el problema de la forma que quieras.</p>	
<p>Si no llega la solución correcta:</p> <p>10a) Resuelve el problema de la forma que quieras.</p>		<p>Resuelve bien:</p> <p>12b.1) Compara tu resolución con la</p>	<p>No resuelve bien:</p> <p>12b.2) Fin del proceso.</p>

<p>Resuelve bien: 11a.1) Compara tu resolución con la anterior (en la que usabas segmentos) e identifica el error que cometiste en la primera parte.</p>	<p>No resuelve bien: 11a.2) Fin del proceso.</p>	<p>anterior (en la que usabas segmentos) e identifica el error que cometiste en la primera parte.</p>	
---	---	---	--

3.7. Administración del instrumento de recogida de datos

Para aplicar el instrumento de recogida de datos se estableció un protocolo de actuación que se expuso a los profesores participantes en varias sesiones conjuntas, en las que se trató de aclarar y consensuar las actuaciones y qué hacer cuando se presentaran situaciones imprevistas. Este protocolo se puede resumir en los siguientes apartados:

- El MGL fue presentado a un grupo de profesores de matemáticas que formaban parte del Programa de Pasantías del Ministerio de Educación de Chile, realizado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en el período de septiembre – diciembre de 2009. Al grupo de profesores chilenos, que se prestan voluntariamente a esta experiencia, se les explicó, con detalle, el protocolo de actuación y los objetivos de trabajo, presentando esta acción como una interacción *profesor-alumno*.
- Para su aplicación, este protocolo se desarrolló en horario normal, dentro del período de prácticas de los profesores chilenos en centros de enseñanza. Los estudiantes (uno o dos por grupo) a los que se les aplicó, de forma individual, el instrumento de evaluación, eran seleccionados por los profesores naturales del curso de entre los que tenían buenos rendimientos en matemáticas. Esto fue realizado en el mes de noviembre de 2009.

Los datos del protocolo fueron grabados en audio para evidenciar el hecho. Las características y datos generales de cada uno de los casos se pueden ver en la parte superior de cada entrevista, lo que se llama actuación de lápiz y papel.

Capítulo 4. Entrevistas. Transcripciones

4.1. Entrevistas seleccionadas

Para el estudio de casos se realizaron 12 entrevistas, las mismas que se han transcrito según la metodología indicada. Por su extensión, estas transcripciones exceden con mucho el formato de este informe. Por lo tanto, se han seleccionado 3 casos, uno de Primaria y dos de Secundaria, que nos parecen los más interesantes para presentar en este trabajo.

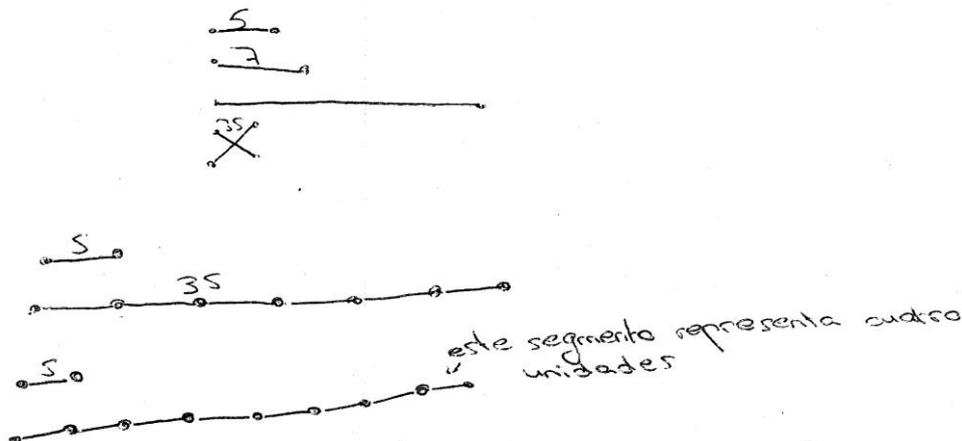
Para esta selección se han tomando en cuenta, básicamente, cuatro aspectos:

- Que se siguiera el protocolo de entrevista y el uso del MGL.
- Que estuviera completa la entrevista en el audio, es decir, que apareciera la resolución de los tres problemas en cada caso.
- Que estuvieran presente la participación de alumnos tanto de Primaria como de Secundaria.
- Que la actuación de los alumnos, al responder al protocolo, tuviese alguna característica interesante, es decir, alguna estrategia, relacionada con el tema de la resolución de problemas algebraicos escolares, que destacase dentro del conjunto.

4.2. Transcripción de las entrevistas seleccionadas

4.2.1. Entrevista N° 1. Alumno de sexto de Primaria

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39.
¿De qué número se trata?



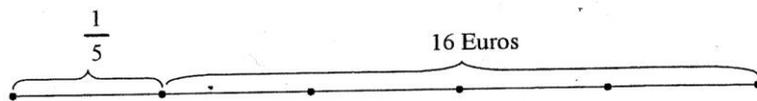
Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{3}{10}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemáticas?

Estos segmentos indican el tiempo que dedica a matemáticas?

Cada segmento serían diez minutos

Para repasar todas las materias necesitará 100 minutos y para repasar matemáticas necesitará 30 minutos.

En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados en $\frac{1}{5}$ de su precio original y cuestan 16 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?



Cada quinto equivale a 4 euros.
Antes de que se rebajara el pantalón, estaba 20 e.

Capítulo 4. Entrevistas. Transcripciones

Tras una breve práctica resolviendo problemas utilizando segmentos (ítem 1), y luego de leer el alumno el primer problema en voz alta (ítems 2 y 4), la profesora (ítems 3, 5, 7, 9 y 11) le pide hacer un dibujo del segmento y que, a la vez, vaya diciendo lo que va haciendo en el papel; por lo que el alumno (ítems 6, 8, 10 y 12) dibuja un pequeño segmento y dice que ese segmento significa un cinco y luego debajo hace otro segmento más grande que el primero y le coloca el número siete, puesto que hay que multiplicarlo por siete. Dibuja otro segmento más grande que los anteriores y éste dice ser el resultado de la multiplicación que es el treinta y cinco, es decir, ha dibujado tres segmentos de diferentes tamaños, uno debajo del otro, señalando el valor de cada uno.

La profesora (ítems 13 y 15) al ver que representó sólo la respuesta, quiere que el alumno represente

1. P: Ahora que recordamos qué es segmento, lo que significa y... hicimos cuatro veces segmentos. Vas a volver a leer el problema.

2. A: Si multiplicamos un número...

3. P: Y lo vas a representar con segmentos.

4. A: Por siete y le sumamos cuatro unidades obtenemos el número treinta y nueve, ¿De qué número se trata? Pues ...

5. P: Y ahora vas a dibujarme, vas diciendo lo que me vas haciendo, ya, lo mismo que intentaste entender.

6. A: Este segmento, significa cinco.

7. P: Ya.

8. A: Entonces, si es un número multiplicado por siete, habrá que hacer.... cinco, uno, cinco, dos...

9. P: Vaya hablando, no más, lo que va haciendo. Muy bien.

10. A: Y ahora esto significa el cinco por siete.

11. P: Muy bien, ya, escriba, no más, lo que usted dice ahí, esto representa entonces, todo lo que representa. Ya, ya.

12. A: Entonces, esto representaría ahora treinta y cinco.

13. P: Ya, ah, pero, tú, me estás representando, ahora, la respuesta, yo quiero que me representes, tú, ¿Cómo lo representaste?

14. A: Ah, lo encontré, porque, como...

15. P: Pero, dibújalo.

Capítulo 4. Entrevistas. Transcripciones

todos los datos que da el enunciado para saber cómo lo hizo para dar con la respuesta, le pide representar y dibujar todo el proceso. El alumno (ítems 14, 16, 18, 20 y 22) sabe la respuesta en su mente, pero le es difícil seguir lo que la profesora le sugiere hacer con los segmentos, empezando a tener dudas al respecto.

Al notar esto, la profesora (ítems 17, 19, 21 y 23) le guía con preguntas que le brindan cierta información, que le permita hacer el dibujo, es decir, que represente la cantidades que aparecen en el enunciado, recordándole que hay que aumentarle cuatro unidades y cómo haría para representar eso utilizando los segmentos antes mostrados como ejemplo.

El alumno (ítems 24, 26 y 28) va captando la idea y dibuja un segmento, pero menor, que le representa esas cuatro unidades que hay que agregar o aumentar. Dibuja un segmento y le agrega, expresando con palabras “este segmento representa cuatro unidades”. La profesora (ítems 25, 27, 29 y 31), luego de insistir con dicha representación, le pide que le

16. A: Pues, como este segmento decía que eran cinco y decía...

17. P: Dice, mira si multiplicamos un número, porque todavía, no sé cuál es el número, por siete ¿Cómo representas eso? Un número, un número, es ese segmento que tienes ahí.

18. A: Sí.

19.P: Ese es un número que yo quiero representar multiplicado por siete. ¿Cómo lo haces?

20. A: Ese número, ese segmento, se hará.

21. P: Ah, vamos, hazlo.

22. A: Pues, el segmento...

23. P: Ya, ahí tienes una cantidad ¿No es cierto? Un número multiplicado por siete. Ahora aumentale cuatro unidades.

24. A: ¿Cuatro unidades?

25. P: Sí. Cuando le aumentamos ¿Cómo lo represento, ahora, si le aumentas cuatro unidades?

26. A: Pues, como segmento, pero menor.

27. P: ¿Menor? Aumentalo en cuatro unidades. Ya. Hazlo, dibújalo.

28. A: Pues para que varíe sería un segmento, pero que en vez de que representara cinco, este segmento, eh... El último segmento que representase cuatro unidades.

29. P: Ya, ya, ahora ya lo representaste ¿Qué, crees, qué, forma puedes indicar, que el dibujo anterior equivale a treinta y nueve? Ya lo pusiste, ahí, correcto ¿De qué forma se nos va a

diga de qué manera haría para indicar que uno de los segmentos que tiene dibujados representa el todo, es decir el número treinta y nueve, de forma que quede más claro, pues no se distingue cuál segmento corresponde a dicho valor. Además le pregunta que si, con la información que tiene, podría determinar el número que se le pide en el enunciado del problema.

El alumno (ítems 30 y 32) se confunde un poco entre el segmento que señaló como el todo y el valor que debe determinar, olvidando, momentáneamente, lo que se pide buscar; pero al corregirle en forma de pregunta, la profesora (ítem 33) le cuestiona sobre si ése es, verdaderamente, el número que debe determinar. Entonces, el alumno (ítem 34) recapacita diciendo cuál es ese número y cómo obtuvo ese resultado. La profesora (ítem 35) vuelve a insistir y le hace la pregunta sobre cuál es el número a determinar, a lo que el alumno (ítem 36) responde, da un resultado de forma segura y justifica el por qué de ese resultado. Por lo que la profesora (ítem 37) si más que

poder obtener, a partir de este problema? Ahora, ¿Qué observación o información tienes aquí? Mira lo que dibujaste. ¿Qué representa de ahí hasta ésto?

30. A: Treinta y nueve.

31. P: Mira, ¿Puedes determinar el número que buscas ahora?

32. A: El número que busco es treinta y nueve.

33. P: ¿El número que buscas es treinta y nueve?

34. A: Bueno, cinco, es un número que multiplicado por siete, dé, y sumándole cuatro unidades dé treinta y nueve, y yo, y ese segmento que representa ese número, yo diría que es cinco, porque cinco por siete son treinta y cinco, y más cuatro, treinta y nueve.

35. P: Ya, entonces el número buscado, ¿cuál es?

36. A: El cinco, un número que multiplicado por siete y sumándole cuatro, de treinta y nueve.

37. P: Ya, ok, gracias ¿Vamos a la otra? Ya.

38. A: Eh. Un alumno dedica todos los días, las tres partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas, y los setenta minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemáticas? Eh. ¿Te lo leo de nuevo?

39. P: No, si tú lo entendiste, un momento. Si no lo entendiste lo lees de nuevo. ¿Qué debes de determinar ahí?

40. A: Que un alumno dedica todos los días a

decir, le da las gracias y de inmediato pasan al siguiente problema.

Una vez que el alumno (ítem 38) lee en voz alta el segundo problema, la profesora (ítem 39) le dice que no es necesario volver a leerlo, una vez haya entendido lo que hay que determinar, a la vez que le pide (ítems 41 y 43) que, utilizando segmentos, represente la cantidad a determinar. El alumno (ítems 40, 42 y 44) luego de decir lo que debe determinar, se muestra un tanto confundido sobre lo que tiene que hacer, pero luego le viene la idea de cómo hacerlo y dibuja primero tres segmentos, indicando que es el tiempo que dedica a estudiar matemáticas. Después dibuja otro segmento, debajo del anterior, dividiéndolo en diez segmentos pequeños, indicando que es el tiempo que pasa estudiando las demás materias, incluyendo las matemáticas. La profesora (ítems 45, 47 y 49) le pregunta sobre el tamaño de los segmentos, es decir, del por qué utilizó ese tamaño. Además le pide que le diga cuánto valdrían los diez segmentos en total.

estudiar tres décimas partes de su tiempo estudiando matemáticas ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemáticas?

41. P: Ya, ya ¿Y qué debemos determinar entonces? Representa esa cantidad utilizando un segmento. Ya.

42. A: ¿La cantidad, eso?

43. P: Um...

44. A: Tres décimas serían, sería esto, entre, un momento, sería, esto entre, sería... Este segmento representa lo que pasa estudiando matemáticas, y éste y estos varios segmentos, representarían el tiempo que pasa estudiando todas las materias, incluyendo matemáticas.

45. P: Ya, y cada segmento, ya, ok. ¿Por qué utilizaste un segmento de este tamaño?

46. A: Ah... Pues, porque un segmento representa una décima, y entonces, pues he hecho este segmento de un tamaño, porque equivaldría a diez segmentos del que representaría una décima.

47. P: ¿Diez segmentos, representan una décima?

48. A: No, una décima parte de lo que, tres décimas partes de lo que pasa la tarde estudiando, pues es matemáticas, y las otras siete restantes es lo que pasa estudiando las otras materias.

49. P: Ya. ¿Cuánto crees, tú, que valen estos diez segmentos en total?

50. A: Eh... ¿Éste? Um... cien minutos serían, ¿no?

El alumno (ítems 46, 48 y 50) explica de forma clara el por qué de hacer el tamaño de los segmentos, puesto que él pensó que había que partirlos en diez y de esos tomar los tres décimos. Sobre el valor total del segmento, después de unos instantes de reflexión, dice ser cien minutos. La profesora (ítem 51), además de eso, le pide ahora que le diga el valor de cada segmento y que escriba lo que va diciendo. El alumno (ítem 52) a modo de justificación, relata el porqué del valor de cada segmento, lo que le lleva a contestar dos de las interrogantes del problema y una vez las responde, la profesora le interrumpe (ítem 53) para cuestionarle sobre cuánto equivale en ese caso, un décimo.

El alumno responde (ítem 54) que cada segmento valdría diez minutos a lo que la profesora (ítems 55 y 57) le pregunta que, según lo que él ha dicho, cuál sería la respuesta, es decir, el tiempo que necesita para repasar todas las materias. Estando un poco confuso (ítem 56) sobre

51. P: ¿Cien minutos? O sea, que cada parte de esos segmentos, ¿Cuánto valen? Anda escríbelo lo que estás diciendo, debajo del segmento.

52. A: Pues... en cada segmento equivaldría a diez minutos... Serían cien minutos, porque como, aquí, dice que en la que pasa tres décimas partes de su tiempo estudiando matemáticas y los setenta minutos restantes se pasa estudiando las otras materias, pero y si le quitaran... entonces tres décimas equivaldrían como cada segmento. Eh... aquí me dice que ¿Cuánto tiempo pasa estudiando las materias?, pues yo diría que setenta minutos y ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemáticas? Pues, treinta, porque un décimo vale, equivaldría en este caso a cien minutos, entonces tres décimas...

53. P: A ver, un décimo equivaldría a...

54. A: Diez minutos.

55. P: Ajá, ya, a diez minutos dijiste a cien, ya, pero sí que estaba para allá. Entonces cada diez minutos, entonces, ¿Cuál sería la respuesta?

56. A: ¿A la primera pregunta?

57. P: Entonces, es decir ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias?

58. A: Pues, sesenta minutos.
Bueno, ¿Incluyendo matemáticas?

59. P: Ya.

60. A: Si matemáticas está incluido...

61. P: Ya.

62. A: Entonces, serían, cien minutos.

cuál sería la respuesta, si incluía el tiempo que dedicaba a estudiar matemáticas, el alumno responde (ítem 58) que serían setenta minutos, y si las matemáticas están incluidas (ítems 60 y 62), serían los cien minutos. Sabiendo esto, la profesora (ítems 59, 61 y 63) le pregunta sobre cuánto tiempo dedica a las matemáticas, para asegurarse de que ha comprendido el problema y está seguro en sus respuestas.

La profesora le pide (ítems 65, 67, 69, 71 y 73) que diga lo que significa cada cosa que ha dibujado, además de dar la respuesta al problema. El alumno (ítems 64, 66, 68, 70 y 72) le responde que lo ha puesto allí; pero aún siendo así, la profesora vuelve y le dice que lo escriba en el papel con frases completas.

63. P: Ya, ¿Y Cuánto pasa estudiando matemáticas?

64. A: Treinta minutos.

65. P: Treinta minutos, ya, a ver, ya, indica entonces, aquí, eso. Indícame, eso ¿Qué significa lo que pusiste allí?, los palitos.

66. A: ¿Los segmentos? Pues cada segmento significa...

67. P: Escríbelo, ahí, bajito para que la persona que lo vea después, ponle bajito, ahí.

68. A: Aquí ya lo he puesto, cada segmento serían... del segmento.

69. P: A raíz que estamos en el problema dos, vamos a concluir la respuesta con Jorge, de Jorge.

70. A: Para repasar todas las materias necesitará cien minutos, y para repasar matemáticas necesitará treinta minutos, porque la... porque diez décimas representan cien minutos y entonces eh..., y entonces tres décimas que es lo que ocupa en matemáticas representarán treinta minutos.

71. P: Um..., ya, ok. Por favor, Jorge, indícame esto que dibujaste primero, ¿qué significa?

72. A: Eh... el tiempo que dedica a matemáticas.

73. P: Ya, ponlo ahí el tiempo que dedica a matemáticas, porque solo no dice nada, el tiempo que dedica a matemáticas.

Ya. ¿Vamos al otro problema? Éste es el último. Vamos entramos en el problema tres ¿Lo lees? Ahora, mira, el problema que vamos a hacer, ahora, está representado. Así que

Luego de presentarle el tercer problema, en el cual aparece los segmentos dibujados y tras la lectura del mismo (ítem 74) el alumno se apresura a interpretar y decir que, según el dibujo, un quinto equivale a dieciséis euros.

A manera de corrección, la profesora (ítem 75) le repite lo dicho, como para que recapacite y pueda comprender el problema. El alumno (ítem 76) repasa en voz alta lo que dice el problema y se da cuenta de qué hay que determinar en realidad. De ahí que la profesora (ítems 77 y 79) le pregunta si ha comprendido el planteamiento del problema, a través de los segmentos que aparecen dibujados, es decir, lo que significa todo el dibujo.

El alumno (ítems 78 y 80), mientras que señala el segmento, dice que son las rebajas que se han hecho, que es un quinto. La profesora (ítems 81, 83, 85, 87, 89, 91 y 93), al ver que le contesta correctamente a la pregunta de cuál es la rebaja, le sigue preguntando sobre cuánto cuesta el pantalón y qué cantidad es la que debe determinar.

El alumno (ítems 82, 84, 86, 88, 90,

vamos a leerlo con calma.

74. A: Problema tres: En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un, en un quinto de su precio original, y cuesta dieciséis euros: ¿Cuánto valdrían antes de efectuarse el descuento? Pues aquí sale que en este dibujo representa que un quinto, que un quinto, son dieciséis euros.

75. P: A ver, ¿Un quinto, son dieciséis euros?

76. A: Aquí en la pregunta dice que ahora cuestan..., que los rebajaron...que están rebajados un quinto, y ahora cuestan dieciséis euros. Ahora habría que hallar pues lo que valen, lo que valdrían antes los pantalones.

77. P: Ya, exactamente, lo que valían antes los pantalones. Entonces ¿comprendes el planteamiento que se ha hecho utilizando los segmentos? El planteamiento, ¿Todo eso, lo entiendes? ¿Qué crees tú que representa eso, este planteamiento?

78. A: ¿Éste?

79. P: Sí, completo, ¿Qué significa?

80. A: Eh... Las rebajas que han hecho.

81. P: ¿Cuál es la rebaja?

82. A: Un quinto.

83. P: Muy bien, y ¿Cuánto cuesta ahora el pantalón?

84. A: Dieciséis euros.

85. P: Y, ¿Cómo?...Ya ¿Qué cantidad debe determinar?

Capítulo 4. Entrevistas. Transcripciones

92 y 94) contesta a cada una de la preguntas, poniendo de manifiesto que entiende lo que ocurre en el problema, va explicando y justificando sus respuestas de forma clara y segura, hasta llegar a decirle la profesora que todo el segmento representa el precio del pantalón.

La profesora, entonces, le pregunta (ítems 95, 97 y 99) cómo haría para saber lo que le rebajaron en dinero.

El alumno (ítems 96, 98, 100 y 102) comienza a dudar un poco para dar la respuesta, al tiempo que va, poco a poco, reflexionando sobre la operación que tiene que realizar; después da la respuesta esperada. De ahí que la profesora (ítems 101,103 y 105) trate de que le diga por qué sabe que es esa la respuesta, es decir, cómo lo hizo.

86. A: Eh... lo que valen antes de efectuarse las rebajas.

87. P: Muy bien. Ahí, eso sí. Y ¿Cuánto crees que es dicha cantidad?

88. A: ¿Dicha cantidad? Pues, eh, serían... habrá que sumarle a dieciséis euros cuatro quintos, y...

89. P: ¿Por qué cuatro quintos?

90. A: Porque es lo que rebajaron los pantalones, efectuaron las rebajas un quinto, pues le quedarían... para, habría que sumarle un quinto, cuatro quintos, para que serían, para que quedase el precio que había antes de ejecutarse las rebajas.

91. P: Ya, pero fíjate en el dibujo ¿A qué corresponden entonces, todos los segmentos que están ahí?

92. A: ¿Todos?

93. P: Sí.

94. A: Al precio del pantalón.

95. P: Al precio del pantalón anterior, y entonces ¿Cómo determinar, cuánto es lo que le rebajaron?

96. A: Pues, a el... a... a este...

97. P: Ya.

98. A: ¿Restarle?

99. P: Ya ¿Pero cuánto?

100. A: Eh... pues, aquí pone que son dieciséis euros.

El alumno (ítems 104 y 106) responde justificando su respuesta, con lo que la profesora (ítem 107) se manifiesta muy satisfecha pues se supone que el alumno ha comprendido el método, a la vez que le pide que escriba lo dicho debajo del segmento para que quede evidencias de lo hecho, y le interesa saber sobre la respuesta rápida que dio anteriormente acerca del precio del pantalón y el alumno (ítem 108) aclara cómo lo hizo, lo asoció con una raíz cuadrada, concepto que le habían explicado el día anterior.

La profesora (ítems 109 y 111), asombrada por la forma tan audaz de encontrar la respuesta, le felicita. El alumno (ítem 110) le pregunta si coloca la solución en el papel y la profesora, sin más, le dice que lo escriba en el papel.

Aquí queda plasmado que se utilizó en todo momento el MGL.

Una duda que no fue aclarada al

101. P: Ya.

102. A: Eh... pues entonces, se quedaría en, en veinte euros.

103. P: ¿Por qué?

104. A: Porque, eh, aquí le faltarían cuatro quintos ¿No?

105. P: Ajá, en cada quinto...

106. A: Cada quinto equivale a cuatro euros, ¿No?

107. P: Muy bien. Póngalo, porfis, debajito ahí, pero ahí debajo del segmento, no más. Jorge, cuando me dijiste, al tiro, veinte ¿En qué te fijaste para, para eso?

108. A: Pues... que faltaban cuatro quintos para que se efectuara la rebaja y... mentalmente, más o menos, como ayer me explicaron la raíz cuadrada de dieciséis, que era cuatro, entonces le sumé dieciséis más cuatro y daba veinte euros.

109. P: Ah, excelente, muy bien, muy bien. Excelente, terminaste de verle y colocaste ahí.

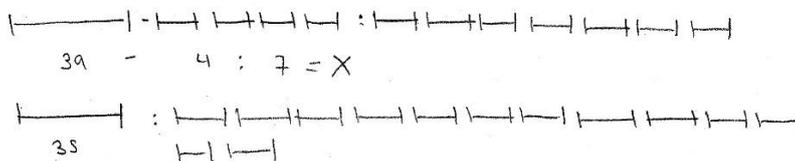
110. A: Ahora pongo lo que equivale el pantalón antes.

111. P: Sí, sí, escribe la respuesta correcta y estamos listos.

principio, en el primer problema, es que el alumno sabía la respuesta, que era cinco, y la profesora no le preguntó en ningún momento cómo supo que era cinco si en el enunciado no aparecía ese valor. Además, se puede apreciar que los cálculos que realiza el alumno, en su mayoría, son mentales, es decir, en el papel no queda evidencia de ningún cálculo auxiliar para la resolución del problema.

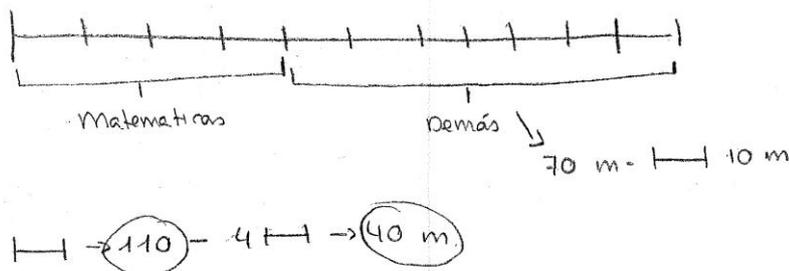
4.2.2. Entrevista N° 2. Alumna de segundo de Secundaria

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39.
¿De qué número se trata?

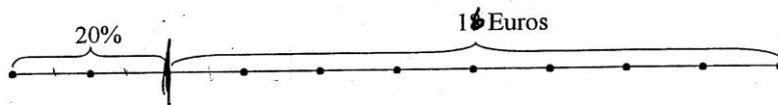


S: El número que buscamos es 5.

Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?



En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 16 Euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?



$$16 \text{ €} - 8 \text{ €} \rightarrow 2 \rightarrow 16 \quad 16 + 4 = 20 \text{ €}$$

$$20\% - 2 \text{ €} \rightarrow 2 \rightarrow 4$$

Cada segmento vale 2 €.

S: Los pantalones valían antes 20 €.

Tras la presentación personal de la profesora y alumna (ítems 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10), la profesora (ítem 11) le presenta el problema, a la vez que le pide que lo lea. La alumna (ítem 12) lee el problema en voz alta y la profesora (ítem 13) le recuerda acerca de la pequeña introducción del MGL que habían hecho antes de iniciar la sesión y le pregunta qué es lo que habría que buscar.

La alumna (ítem 14) le dice claramente cuál es el planteamiento del problema.

No obstante, la profesora (ítem 15) le propone representar ese número con segmentos como lo habían

1. P: Lunes, hoy es día ...
2. A: Veinte tres.
3. P: Ya, y ¿Cómo te llamas?
4. A: Ana.
5. P: Te voy a solicitar que escribas, solamente, tu primer nombre.
6. A: Vale.
7. P: Ya, tu edad, si te acuerdas con meses, mejor.
8. A: Vale.
9. P: Y en qué curso estás.
10. A: También la letra.
11. P: Sí, puede ser. A ti, se te plantea un problema, dice lo siguiente... ¿Lo quieres leer tú?
12. A: Si multiplicamos un número por siete y le sumamos cuatro unidades obtenemos el número treinta y nueve ¿De qué número se trata?
13. P: Ya, ahora, nosotros hicimos una pequeña introducción entonces, desde esa perspectiva, yo, te voy a preguntar ¿Qué estás buscando, tú?
14. A: Estoy buscando el número que al multiplicarlo por siete y sumarle cuatro unidades de treinta y nueve.
15. P: Ya, entonces según lo planteado anteriormente ¿Cómo partirías, tú, este problema? ¿Cómo harías el dibujo? Ya ¿Cómo representarías ese número?

hecho en la introducción del método nuevo. La alumna (ítem 16) responde que al número dado en el ejercicio se le restarían cuatro unidades, a la vez que dibuja en el folio un segmento al que le coloca, debajo, el número treinta y nueve. Posteriormente, al lado de ese segmento le coloca el signo menos (-), dibujando a su derecha cuatro segmentos más pequeños, separados uno del otro. Después coloca dos puntos (:) para continuar dibujando siete segmentos más, uno al lado del otro de igual forma que los cuatro primeros. Todo eso lo hace sin decir palabra alguna, por lo que la profesora (ítems 17, 19, 21 y 23) le recomienda que converse lo que va haciendo, para que quede registrado en el audio. La alumna (ítems 18, 20, 22, 24 y 26) explica, con detalles, lo que va haciendo y la operación que tiene que realizar para dar con el resultado, a la vez que escribe algo similar a una ecuación. Entonces, la profesora interviene (ítem 25) y le sugiere continuar con el uso de los segmentos, que es el método que se le ha enseñado y al cual se debe ceñir, y olvidarse del uso de los números que ha escrito antes. Una

16. A: Pues, a un número que es treinta y nueve le restaría cuatro.

17. P: Ya, tú tienes que conversarme en la medida que puedas, porque como no se ve, la imagen...

18. A: Y, a ese número que me diese lo dividiría entre siete.

19. P: Ya, dime lo que hiciste.

20. A: A un número que sería el treinta y nueve.

21. P: Este segmento.

22. A: Sí.

23. P: Ya.

24. A: Le restaría cuatro para obtener un número que al dividirlo entre siete me diese el número que estoy buscando.

25. P: Ya, lo que yo te voy a sugerir ésto que está aquí perfecto para nosotros si tú por favor podrías seguir con esta temática que está aquí arriba, ya que corresponde a los segmentos que es lo que a nosotros nos interesa para el estudio.

26. A: Vale.

27. P: Entonces, yo, te planteo o te desafío a que resuelvas, pero sin considerar esta situación que es numérica, si no, ésta que tú me planteaste en la partida. ¿Tú qué dijiste acá?

28. A: Un número treinta y nueve.

29. P: Que es un segmento, tú, dibujaste un segmento.

vez comprendido por parte de la alumna (ítem 26) lo dicho o sugerido, la profesora (ítem 27) dice plantearle un desafío, que consiste en resolver el problema sin la parte numérica, o sea como lo había planteado en un principio, con segmentos (ítem 29). A la vez, le señala el dibujo preguntándole qué había hecho (ítems 31, 33 y 35). La alumna responde (ítems 28, 30, 32, 34 y 36) que a ese número más grande le restaría los cuatro segmentos, luego lo dividiría entre los siete segmentos. Ahí interviene la profesora (ítem 37) y le cuestiona sobre cómo resolver eso que dice hacer.

La alumna (ítem 38) le responde que como la resta le dio el total de treinta y cinco, dibujaría un segmento y por lo tanto en el (ítem 40) dice dividirlo en siete segmentos. Estando de acuerdo con el planteamiento realizado, la profesora (ítems 39 y 41) le pregunta qué es lo que va a hacer con esos segmentos dibujados.

La alumna (ítem 42) manifiesta que tiene que hallar un número que, al multiplicarlo por los siete

30. A: Sí.

31. P: A ver dime ¿Qué hiciste?

32. A: Treinta y nueve menos cuatro segmentos.

33. P: Ya.

34. A: Entre.

35. P: Lo dividiste.

36. A: Siete segmentos.

37. P: Ya, a ver ¿Cómo harías esto? ¿Cómo resolverías esto?

38. A: Treinta y nueve menos cuatro que serían treinta y cinco, representaría en un segmento el número treinta y cinco.

39. P: Ya, sí.

40. A: Y lo dividiría entre siete segmentos.

41. P: Ya, tú dibujaste un segmento que representó treinta y cinco y lo estás dividiendo entre siete segmentos que son exactamente iguales. Ya, y ahora que haces tú con esos segmentos.

42. A: Pues, hallar un número que al multiplicarlo por estos siete segmentos me dé treinta y cinco.

43. P: Ya, y ése ¿Qué número es, según tú?

44. A: Cinco.

45. P: Cinco, a ver.

46. A: Sería, cinco por siete treinta y cinco. Entonces, si ponemos cuatro veces, cuatro

segmentos que tiene dibujados, le dé el treinta y cinco. La profesora (ítem 43) le sigue preguntando sobre cuál es ese número, a lo que la alumna (ítem 44) responde claramente que se trata del número cinco.

A manera de verificar si se ha comprendido, la profesora (ítem 45) le dice de forma sutil del porqué del número cinco, o sea cómo surge ese valor y la alumna (ítem 46) justifica su respuesta de forma clara y satisfactoria para la profesora (ítems 47, 49 y 51), que le pide que escriba la respuesta, la cual le parece un tanto interesante pues la alumna (ítems 48, 50 y 52) escribe una “ese” (s) para indicar que es la solución y coloca con palabras “el número que buscamos es 5”.

Luego de finalizar el primer problema, la profesora (ítem 53) le aclara que ese problema fue guiado para que, entre ambas, llegaran a la respuesta utilizando el nuevo método; además le explica, sobre el uso de los segmentos, que pueden ser juntos o separados, según su conveniencia, pero que para el segundo problema no le va a poder

segmentos más, me daría treinta y cinco. Que es el número que le hemos restado cuatro a treinta y nueve.

47. P: Entonces, tú por favor escribe tu respuesta acá. El número.

48. A: El número que buscamos...

49. P: Ya me parece interesante.

50. A: Es cinco.

51. P: El número que buscamos es...

52. A: Cinco.

53. P: Esto fue una prueba guiada, fue entre ambas, lo que yo te planteaba en la partida está bien. También puedes elegir la otra técnica que tú habías planteado, que era de que los segmentos podían ir juntos y no también separados. Hay veces que resulta un poco más conveniente ahí, tú, ves perfecto muy bien lo que tú hiciste, ahí. Este es el problema número dos, en el problema número dos, lamentablemente, yo, no te voy a poder ayudar mucho, sin embargo igual que en el de antes como lo hiciste en tu primera fase queremos que seas muy conversadora, que tú digas lo que estás graficando o haciendo y por qué, y en la medida que yo pueda te voy a ir preguntando si tú no socializas mucho con nosotros.

54. A: Vale.

55. P: A ver, tú, lee, tú el problema.

56. A: Un alumno dedica todos los días las cuatro onceavas partes de su tiempo a repasar matemáticas y los setenta minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar las demás materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemáticas?

ayudar demasiado, por lo que le pide que exprese con palabras todo lo que vaya haciendo y que ella se limitará a hacerle ciertas preguntas según lo vea necesario.

La alumna (ítem 54) comprende lo dicho y la profesora (ítems 55 y 57) le pide leer el problema y le pregunta qué es lo se pide buscar. La alumna (ítems 56 y 58), luego de leer el problema en voz alta, responde claramente lo que tiene que determinar, según el planteamiento del problema. La profesora (ítems 59, 61 y 63), al insinuarle que le están haciendo dos preguntas, le pide que represente una primero con segmentos para que le sea más fácil.

La alumna (ítems 60, 62 y 64) comprende que son dos preguntas que debe determinar, y que puede hacer la representación con segmentos. Explica que haría un segmento y lo partiría en once partes y, de esas once, tomaría cuatro de ellas. Al mismo tiempo va dibujando en el papel lo que ha dicho. La profesora (ítem 65), a modo de aclaración, le pregunta sobre esas cuatro partes que ha tomado, a qué las dedica, a lo que

57. P: Yo te voy a preguntar una cosa ¿Qué te están preguntando aquí?

58. A: Pues, cuánto tiempo necesita para repasar todas las demás materias y cuánto tiempo estudia matemáticas.

59. P: O sea, te están preguntando.

60. A: Dos cosas.

61. P: Dos cosas correcto. Tú puedes representar las dos cosas que te están pidiendo, primero enfoquémonos en una pregunta, no es cierto. En un segmento, sí, ya. Sí ¿Puedes?

62. A: Sí, puedo.

63. P: Ya, entonces, a ver.

64. A: Pues, yo pondría un segmento partido en once partes, en cuatro partes iguales y de ahí cogería cuatro partes que son las cuartas partes de su tiempo.

65. P: Y esa cuarta parte de su tiempo ¿Para qué las va a dedicar?

66. A: Matemáticas.

67. P: Ya.

68. A: Y los setenta minutos restantes que serian siete partes del segmento partido once lo dedica a las demás materias.

69. P: Ya, si quieres, yo, te sugiero que coloques esto que colocaste, aquí, en palabras. O sea, eso era, como tu idea está perfecta, pero está un poquito abstracta, puede ayudar.

70. A: Vale.

la alumna (ítems 66 y 68) responde, brevemente, que ese el tiempo que dedica a estudiar matemáticas, y que los setenta minutos que restan, que serían las otras siete partes del segmento, es lo que dedica a las demás materias. Satisfecha con la respuesta, la profesora (ítems 67, 69 y 71) le sugiere que coloque debajo de los cuatro segmentos la palabra “matemáticas” y al resto le coloque “demás”, además de cuestionarle sobre el tamaño de los segmentos. La alumna (ítems 70 y 72) hace lo sugerido con los segmentos y responde que al hacer los segmentos más grandes, ella los puede ver mejor y le resulta más fácil.

Entonces, la profesora (ítems 73, 75 y 77), curiosa en saber, le pregunta que, si cuando ella hizo el segmento ya sabía que se trataba de una fracción, y que iba a estar partido en once y que, por eso, lo había elegido grande. A todo esto, la alumna (ítems 74, 76 y 78) responde de forma afirmativa a cada cuestión expuesta.

Al percatarse de que había comprendido lo anteriormente

71. P: Ya, así no me vuelves a preguntar o se te olvida, no sé. Ya ahora para la resolución, ¿Por qué usaste segmentos de este tamaño? Así de grande, porque para ti, era práctico.

72. A: Porque al ser grande, las partes, al no estar tan juntas, me resulta más fácil.

73. P: O sea, cuando, tú, partiste esto viste que era una fracción.

74. A: Sí.

75. P: Y que va a estar partido en once.

76. A: Sí.

77. P: Ah, ya, por esto lo elegiste así de grande.

78. A: Sí.

79. P: Correcto, ¿Cuánto crees tú que vale todo ese segmento grande?

80. A: En cuánto...

81. P: Este, ¿Podrías hacer una estimación?

82. A: No sé, así, en minutos.

83. P: Sí.

84. A: Pues, si siete partes de este segmento de once valen setenta minutos, las otras cuatro valdrán diez minutos, pues ciento diez minutos más o menos. Aproximadamente dos horas.

85. P: Ya, a ver entonces, yo, ahora te desafío a que si esa estimación que tú hiciste es correcta, pero con un uso más bien de los datos que a ti se te plantea, en los segmentos, correcto.

86. A: Vale, pues si la parte que le dedica a las demás materias que son siete onceavos son

expresado, la profesora (ítems 79 y 81) le dice que está correcto, pero sigue preguntando sobre cuánto sería para ella el valor de todo el segmento, señalándoselo en el folio, es decir, le sugiere hacer una estimación, un valor aproximado.

La duda manifestada por la alumna (ítems 80 y 82) es, posiblemente, un reflejo de la falta de uso del nuevo método pero, al saber que puede dar valor estimado, hace mentalmente los cálculos, lo que le permite decir (ítem 84) el valor de los segmentos en minutos y, por consiguiente, dar el valor exacto y luego da un valor aproximado en horas.

La profesora (ítems 83 y 85) le sugiere que todo lo dicho y hecho mentalmente que lo plantee con segmentos, tal y como se había hecho en el ejercicio anterior. Sin embargo, la alumna (ítem 86) vuelve y dice lo mismo que había hecho para dar la respuesta, pero ahora marca los cuatro segmentos con el número cuarenta y le agrega la letra eme (m), de minutos, y al resto los marca con el número setenta agregándole la letra eme “m” (minutos). Es decir que habla, piensa y escribe de forma tan clara

setenta minutos cada parte del segmento sería diez minutos. Entonces, si tenemos once sería ciento diez minutos y a matemáticas dedica cuatro segmentos, que serían cuarenta minutos.

87. P: Tú, eres una niña brillante.

88. A: Sí.

89. P: Qué bueno que lo sabes y en tu casa te habían planteado eso, en tu casa.

90. A: Sí, también.

91. P: Que bueno, bien, yo, creo que esta parte hasta porque, tú, has respondido a ver respondiste ambas.

92. A: Sí, cuánto tiempo necesita todas las materias sería once partes de diez minutos que serían ciento diez minutos.

93. P: Ya, para todas las materias.

94. A: Y ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemáticas? serían cuatro partes del segmento de once que serían cuarenta minutos estudiando matemáticas.

95. P: Ya, muy bien, ahora vamos a la última parte. Eso es colócale a tu hoja tu nombre, tu edad y tu curso eso solamente para identificarlo por motivo de etapas. Bien vamos a la última parte, ya acá hay una corrección y cuando tu leas es dieciséis colócalo aquí haz la corrección es dieciséis y no es dieciocho, ya bien. Entonces coloca tu nombre, tu edad y tu curso. Yo te voy a pedir que por favor realices la lectura del problema que aquí se te plantea.

96. A: En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno, Luis observa unos pantalones que están rebajados un veinte por ciento y cuestan dieciséis euros. ¿Cuánto valían antes de

y segura de su respuesta que la profesora (ítem 87) manifiesta estar maravillada por esa brillantez que demuestra la alumna, por lo que le pregunta si en casa (ítem 89) le habían dicho que es un niña brillante, es decir, inteligente; la alumna (ítems 88 y 90), sin reparo alguno, contesta de forma afirmativa. A continuación, ambas, profesora y alumna (ítems 91, 92, 93 y 94), a modo de repaso, dan la respuesta a las dos preguntas planteadas para dar por finalizado el segundo problema.

En definitiva, la alumna resuelve correctamente el problema utilizando el MGL.

En el ítem 95, la profesora se dedica a darle las instrucciones del tercer problema, indicándole que hay un error en uno de los valores del problema, por lo que le pide corregir, ya que en lugar del número dieciocho debe decir dieciséis; una vez hecha la corrección y la lectura del problema por parte de la alumna (ítem 96), la profesora (ítems 97 y 99) le pregunta acerca de si ha comprendido lo que tiene expresado en el dibujo con lo

efectuarse el descuento?

97. P: ¿Tú comprendes el planteamiento que se te ha hecho, entiendes esto?

98. A: Sí.

99. P: Ya, y, tú, crees que este segmento representa la situación que se te plantea.

100. A: Sí, porque aquí se te representa en un segmento los dieciséis euros y en el segmento que está al lado se representa el veinte por ciento que se le ha rebajado.

101. P: Ya, ¿Qué cantidad debes determinar?

102. A: El veinte por ciento.

103. P: Eso, correcto.

104. A: Los dos segmentos que están dentro de ese veinte por ciento serían dos.

105. P: Ya, correcto, entonces vuelve a leer y a ver si le encuentras sentido a eso.

106. A: En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno, Luis observa unos pantalones que están rebajados un veinte por ciento y cuestan dieciséis euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento? Pues según este segmento veo que dieciséis euros que son lo que cuestan ahora.

107. P: Ya.

108. A: Y le ha sumado el veinte por ciento que hay dos segmentos.

109. P: Ya.

110. A: Y dentro de los dieciséis euros hay ocho segmentos.

planteado en el problema.

La alumna (ítems 98 y 100) dice comprender el planteamiento, además de justificar, sin duda alguna, los valores de los segmentos ya marcados, es decir, que manifiesta tenerlo claro. Ante esta seguridad, que observa, la profesora (ítem 101) le cuestiona acerca de lo que debe determinar, según el problema. La alumna (ítem 102) responde que debe determinar el porcentaje, ya que es lo que no sabe a cuánto equivale en euros y observa (ítem 104) que hay dos segmentos dentro del veinte por ciento.

Apoyando lo dicho, la profesora (ítems 103 y 105) luego de animarle diciéndole que está correcto, le sugiere volver a leer el problema para ver si le encuentra sentido a lo dicho. La alumna (ítem 106) vuelve a leer el problema con la intención de relacionar lo expresado con lo que aparece dibujado en el problema. De acuerdo con el planteamiento, la alumna (ítems 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120, 122 y 124) va replanteando el problema,

111. P: Ya.

112. A: Y del veinte por ciento hay dos.

113. P: Ya correcto, entonces ¿Para qué te podría servir esto?

114. A: Pues, yo creo que cada segmento representa dos, porque hay ocho segmentos y son dieciséis euros, por lo cual es la mitad de segmentos que de euros. Entonces del veinte por ciento hay dos que serían cuatro.

115. P: Ya.

116. A: Entonces, yo entiendo que valían antes veinte euros y cuando se le ha quitado el veinte por ciento se ha quedado en dieciséis.

117. P: Ya, entonces tú podrías escribir esa situación.

118. A: Sí, que en el segmento que pone dieciséis euros hay ocho segmentos, que cada uno valdría dos y el segmento que pone veinte por ciento hay dos segmentos que cada uno valdría dos. Entonces, habría cuatro euros y en el dieciséis habría dieciséis, entonces a los dieciséis euros se le suma el veinte por ciento que sería cuatro y nos da veinte euros. Que es lo que creo que costaban los pantalones antes.

119. P: ¿Por qué dices que es lo que crees?

120. A: Porque no estoy segura, porque la gráfica me lo muestra bien, porque aquí hay ocho segmentos y hay dieciséis euros, entonces creo que serían dos euros cada segmento.

121. P: Bien, pero en todo caso yo te digo que está correcto lo que pasa que quizás acá faltó éso ahí ¿No es cierto?

Capítulo 4. Entrevistas. Transcripciones

detallando cada paso, a la vez que se ayuda escribiendo ciertos números, haciendo pequeñas sumas y marcando el valor de cada segmento; aunque en algunas ocasiones le aparece la duda sobre algún valor; la profesora (ítems 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123 y 125) se encarga de guiarla y sacarla de esas dudas con ciertas preguntas y afirmaciones que le permiten a la alumna (ítem 126) dar la respuesta expresada. Una vez dada la respuesta, la profesora (ítem 127) le recuerda indicar el valor de cada segmento.

La alumna (ítem 128) lo escribe con palabras. Entonces, la profesora (ítem 129) le felicita y le dice que si tiene algo que decir al respecto. La alumna manifiesta (ítems 130 y 132) que esperaba que fueran más difíciles, pero que no lo habían sido, puesto que creía que era una prueba. La profesora (ítems 131 y 133) luego de preguntarle si creía que era una prueba, le aclara que se trata de una investigación, agradeciéndole infinitamente por haberla conocido y de ver lo talentosa que es.

122. A: Sí.

123. P: En marcar más, esa es tu duda.

124. A: Sí.

125. P: Tú lo hiciste, correcto, porque averiguaste el valor de cada uno, pero quizás lo que faltó destacar que todo ésto era dieciséis, se te pedían el veinte por ciento y los dieciséis euros. Si bien has sido una niña genial, agradezco infinitamente tu disposición y la de tus papás. Escribe, tú, por favor.

126. A: Los pantalones valían antes veinte euros.

127. P: Bien, indica el valor de cada segmento, por favor, por si puedes por escrito. Para que quede un registro de toda la...

128. A: Cada segmento vale dos euros.

129. P: Eso, perfecto, muy bien, muchísimas gracias. Quieres decir algo.

130. A: No, que han sido fáciles, yo esperaba más difícil.

131. P: Ah ¿Tú crees que era como una prueba?

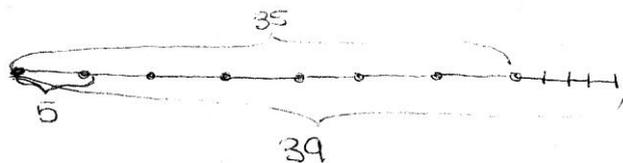
132. A: Sí.

133. P: Esto es para una investigación y por eso te digo que se agradece infinitamente sobre todo la posibilidad de haberte conocido y de ver lo talentosa que eres.

De hecho, la alumna se nota que es una chica muy talentosa y brillante en matemáticas, pues manifestaba comprensión del problema con sólo leerlo, a la vez que no le surgieron apenas dudas a la hora de conectar lo expresado en palabras al dibujo de los segmentos, considerando, además, la valiosa ayuda y orientación de la profesora. Evidentemente no mostró la necesidad del uso de las ecuaciones como método para resolver los problemas, sino que se aplicó con éxito, de forma significativa, el MGL en la resolución de los problemas de álgebra escolar.

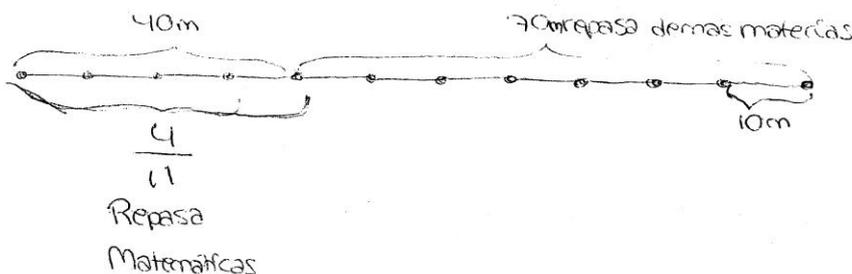
4.2.3. Entrevista N° 3. Alumna de tercero de Secundaria

Si multiplicamos un número por 7 y le sumamos 4 unidades obtenemos el número 39.
¿De qué número se trata?



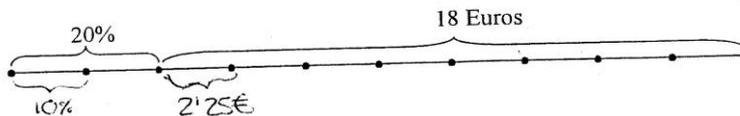
De 5

Un alumno dedica, todos los días, las $\frac{4}{11}$ partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemática?



Pasaría estudiando todas las materias 110 min.
" " matemáticas 40 min.

En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?



$$22.5 - 10 = 12.5 \text{ €}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ - 20 \\ \hline 40 \\ 10 \end{array}$$

Iniciando con la presentación, la profesora (ítem 1) propone la resolución de problemas a través del método geométrico lineal. Tras leer el enunciado, la alumna (ítem 2) piensa un poco. La profesora (ítems 3 y 5) le recuerda que lo tiene que hacer de forma diferente, y que a lo mejor se le vino una equis (x) a la cabeza, por lo que la conduce a realizar el ejercicio utilizando segmentos que le llamarán equis (x), es decir, la incógnita.

La alumna (ítem 4) dibuja un segmento mientras escucha con atención a la profesora, que le pregunta ¿Cómo podría representar el número multiplicado por siete? La alumna (ítem 6) sabe que se trata de una multiplicación, pero no sabe con certeza qué hacer en ese caso. La profesora (ítem 7) le reitera que no puede utilizar números, sin que parezca importarle a la alumna (ítem 8), que dice la ecuación que ella haría. La profesora (ítem 9) le acepta lo dicho, pero le recuerda que la equis (x), o sea la incógnita, no es una letra sino un segmento y que si tiene dos veces un número, cómo lo representaría.

1. P: Soy la profesora Isabel... y estoy con Altea de 14 años, que está cursando tercero de ESO, le vamos a proponer la resolución de problemas con un método más bien geométrico. Ella conoce los métodos algebraicos, pero le vamos a proponer esta otra metodología, está súper contenta de poder participar y dice que va a poner todo de su parte. Así que a ver, leamos el primer problema.

2. A: Si multiplicamos un número por siete y le sumamos cuatro unidades obtenemos el número treinta y nueve ¿De qué número se trata?

3. P: La propuesta es hacerlo de una manera diferente a lo mejor como, tú, lo estas pensando con una ecuación.

4. A: Sí.

5. P: Entonces, inmediatamente lo pensaste así, se te vino una equis (x) a la mente. Ya, entonces plantea lo siguiente, hagámoslo juntas. Supongamos que el número que buscamos en vez de llamarlo equis (x) lo designamos como segmento, esto es la incógnita. En vez de una letra es un segmento. Ya, entonces ¿Cómo representaríamos el número multiplicado por siete? Porque el enunciado dice si multiplicamos un número por siete, esa es la incógnita. ¿Cómo podríamos representar el número multiplicado por siete?

6. A: Siete por este segmento, pero...

7. P: Ya, pero no podemos usar números, ¿Cómo lo harías algebraicamente?

8. A: La ecuación que yo haría es siete equis, más cuatro igual a treinta y nueve.

La alumna contesta (ítem 10) que multiplicando ese número por él mismo. Interviene la profesora (ítems 11 y 13) corrigiéndole lo que sería una suma de ese número y no una multiplicación, guiándola a que si son siete veces cómo lo representaría en segmentos, o sea, cuántas veces. La alumna (ítems 12 y 14) le responde que poniendo otros tantos, que en ese caso sería siete. Como la profesora percibe que la respuesta está correcta, le pide (ítem 15) que lo escriba al mismo tiempo. La alumna (ítem 16) divide al segmento en siete puntos, aparentemente de igual tamaño, y la profesora (ítem 17) le indica que, como son segmentos, para diferenciarlos debe colocar una llave grande encima de estos siete puntos del segmento, con lo que todo eso (ítem 19) representaría siete veces. Además la profesora le pregunta cómo haría si se quisiera agregar cuatro unidades, recordando que las unidades no son lo mismo que cuatro veces el número, y le pide que le diga de qué tamaño serían esas unidades. La alumna (ítems 18, 20 y 22) luego de estar de acuerdo a seguir las indicaciones

9. P: Ya, entonces sería siete equis, la incógnita no es una letra, es un segmento. Ahora cuando tú tienes dos veces un número tú lo representas dos equis, sí, pero eso matemáticamente ¿Qué significa? Dos veces, por ejemplo, si te digo tengo dos veces veinte euros.

10. A: Veinte por veinte.

11. P: Veinte más veinte, entonces si éste es una vez el número ¿Cómo lo represento siete veces? ¿Se te ocurre?

12. A: Poniendo otros tantos segmentos.

13. P: ¿Cuántas veces lo vas a poner?

14. A: Siete.

15. P: Siete a ver, si lo escribimos aquí. Ya ¿Eso sería verdad?

16. A: Sí.

17. P: Como son segmentos para que se note la diferencia lo vamos a poner de esta manera. Ya, unido.

18. A: Vale.

19. P: Y todo esto serían los siete, si multiplicamos un número por siete recordemos que este segmento es un número y ahí está escrito, está representado siete veces. Después dice y le sumamos cuatro unidades ¿Cómo podríamos hacer eso?, usando este mismo sistema. Cuatro unidades no son cuatro veces el número, sabemos la unidad ¿De qué tamaño es?

20. A: De éste.

21. P: ¿Y si lo hacemos así?

22. A: Ah, vale, sí.

dadas, le señala en el folio, cierto tamaño y la profesora (ítems 21, 23 y 25) le corrige y le plantea hacerlo de forma que se note la diferencia, haciéndole ver que todo el segmento resultante equivale a treinta y nueve. Además, le dice que lo represente de la misma manera que lo había hecho antes. Con esta ayuda verbal, la alumna (ítems 24, 26 y 28), luego de una breve reflexión, parece estar entendiendo y dice que está claro, pero la profesora (ítems 27, 29 y 31) le cuestiona acerca de cómo calcularía y cómo representaría ese número buscado. La alumna (ítem 30) dice que no se puede calcular porque no se sabe cuál es el número, estando claro (ítem 32) que se trata la incógnita. Entonces, la profesora (ítems 33, 35 y 37), buscando la manera de guiarla hacia el valor de la incógnita, le cuestiona sobre cuánto valdrían los siete segmentos, tratando de que razone al respecto. La alumna (ítems 34, 36 y 38) se nota confundida, sin dar una respuesta concreta. No obstante, la profesora (ítems 39 y 41) le comenta primero sobre qué operación debe usar cuando se trata de quitar y luego le lleva a encontrar el resultado de la

23. P: Porque el número no sabemos cuántas unidades tiene, pero lo hicimos de este tamaño y después le decimos y le sumamos cuatro unidades. Y todo esto dice obtenemos el número treinta y nueve. ¿Qué podríamos hacer ahí? Porque tú antes me has dicho igual, pero esto hay un igual ¿Y si lo represento así?

24. A: Sí.

25. P: ¿Sería lo mismo, no?

26. A: Sí, claro.

27. P: Sí y la pregunta es después ¿De qué número se trata? Ahí está representado geoméricamente.

28. A: Sí.

29. P: ¿Y cómo lo podríamos calcular?

30. A: Eso no puedes, porque si no lo sabes.

31. P: ¿Es una incógnita?

32. A: Sí.

33. P: Y estas cuatro unidades y esto no sabemos cuántas unidades tiene, entonces ¿Cómo lo podemos hacer? ¿Alguna idea, alguna estrategia?

34. A: Pues, no sé.

35. P: Si todo es treinta y nueve y aquí hay cuatro se te ocurre ¿Cuánto vale esto, lo que te estoy indicando, los siete segmentos se te ocurre?

36. A: Si esto vale treinta y nueve y esto vale cuatro...

operación realizada. La alumna (ítems 40 y 42) halla el valor que le piden determinar. Una vez dicha la respuesta, la profesora (ítems 43 y 45) quiere que lo dibuje, que represente la cantidad que dijo sobre el segmento antes trazado.

La alumna (ítems 44 y 46) dice que se trata de multiplicar siete por cinco y es entonces cuando coloca el número resultante de esa multiplicación sobre la llave y separa los siete segmentos de los demás. La profesora (ítem 47) le recuerda que no se ha respondido a la pregunta del ejercicio y busca la manera que la alumna (ítem 48) diga la respuesta, al mismo tiempo que señala una llave en uno de los segmentos y le coloca el número debajo.

Para comprobar que sabe y ha comprendido, la profesora (ítems 49 y 51) le interroga sobre el cómo sabía el resultado, a la vez quiere que le diga cuál es el número encontrado y la alumna (ítems 50 y 52) responde, sin dudar, cómo lo hizo y que la respuesta, en ese caso, era el número cinco.

37. P: Entonces, hasta aquí ¿Se te ocurre cuánto puede medir? ¿Los ves? No, mira siete veces el segmento más cuatro da treinta y nueve. Siete veces más cuatro da treinta y nueve, pero hasta aquí tengo siete veces y más los cuatro da treinta y nueve. Entonces si no tengo los cuatro ¿Cuánto medirían estos siete segmentos?

38. A: Siete, es que éso es la incógnita.

39. P: Los siete segmentos ¿Cuánto valen los siete si es que no tuvieses ésos cuatro? sólo, éstos cuatro se los quito. ¿Qué operatoria usas para quitar?

40. A: Resta.

41. P: Restar, entonces todo vale treinta y nueve y le quito cuatro ¿Cuánto queda?

42. A: Treinta y cinco.

43. P: Treinta y cinco ¿Cómo lo puedo representar en este dibujo? ¿Qué treinta y cinco?

44. A: Siete por cinco.

45. P: No, pero, aquí yo te represento treinta y nueve de ésta manera. ¿Cómo lo represento aquí que ésto es treinta y cinco?

46. A: Pues, haciendo eso así y poniendo igual.

47. P: Hasta ahí muy bien. Y todavía no respondemos la pregunta, la pregunta ¿De qué número se trata? Si quiero responder ¿De qué número se trata? tengo que encontrar el valor de un segmento, pero aquí tengo siete segmentos iguales que suman treinta y cinco. Entonces ¿Cuánto valdrá un segmento? Si tengo siete que suman treinta y cinco uno de ellos...

Una vez culminado el ejercicio, resuelto a través del método geométrico lineal, la profesora (ítems 53, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73 y 75) pregunta qué le pareció este nuevo método, que lo represente y vaya diciendo cómo lo hace.

La alumna (ítems 54 y 56) se queda sin palabras, luego de escuchar a la profesora (ítem 55) que menciona la frase “es rara”, acepta diciendo que sí le parece un poco raro lo que está haciendo, hasta el momento, con el uso del nuevo método. Seguidamente, la alumna (ítems 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72 y 74) empieza a representar con un dibujo todo lo dicho, es decir le suma las unidades, les da el valor de cada segmento hasta quedar de la forma más clara para ellas.

48. A: Valdría cinco.

49. P: ¿Cómo sabes?

50. A: Porque siete por cinco son treinta y cinco.

51. P: Entonces, ¿De qué número se trata?

52. A: De cinco.

53. P: Cinco, ¿Qué te pareció esta idea?

54. A: Es un poco...

55. P: ¿Es rara?

56. A: Sí.

57. P: A ver, si lo hacemos, acá, en tu hoja. A ver, si lo puedes representar me lo vas explicando y lo representas. A ver esto está súper bien porque a mí cuando esto me lo presentaron la primera vez las equis (x), la verdad no me las podía sacar de la cabeza, me costó mucho y tú, como que diste súper rápido. ¿Qué estás haciendo ahí?

58. A: Estoy representando el segmento siete veces.

59. P: Ya siete veces y ahí estaría de nuevo. ¿Qué haces ahora?

60. A: Sumándole las cuatro unidades.

61. P: Las cuatro unidades. ¿Y todo eso?

62. A: Todo eso te da treinta y nueve.

63. P: Muy bien, y luego el razonamiento que hiciste...

64. A: ¿Qué?

Una vez termina de dibujarlo y explicarlo, la profesora (ítems 77, 79 y 81) le vuelve a preguntar que cómo le ha parecido el método, una vez que lo ha repetido y verbalizado. Además le pregunta si logró comprenderlo y si es lo que suele hacer, de forma común, para resolver un problema.

La alumna (ítems 76, 78, 80, 82 y 84) responde que no es lo que habitualmente hace, pero se entiende una vez explicado. La profesora (ítems 83, 85 y 87), luego de aclararle que una vez explicado el nuevo método, sería fácil comprenderlo y satisfecha de haber logrado el objetivo, le dice que pase al otro problema y que lo lea.

65. P: ¿Qué razonamiento haces ahora? que me vayas verbalizando.

66. A: Le quitas las cuatro unidades entonces se te quedaría en siete, los siete segmentos que son treinta y cinco.

67. P: Muy bien.

68. A: Si le quitas cuatro, treinta y cinco. Y entonces como siete por cinco son treinta y cinco, pues ya sabes lo que vale cada segmento.

69. P: Cada segmento, entonces un segmento, cómo lo represento ahí. Ya, ¿Podríamos responder la pregunta? Aquí abajo dice ¿De qué número se trata? ¿Cómo responden ustedes?

70. A: De cinco.

71. P: Ah, si no más pones el número es...

72. A: Hombre, si queremos sí, pero...

73. P: No es obligación, ya.

74. A: Lo que sí es obligatorio, cuando tenemos unidades ponerlas.

75. P: Ya.

76. A: Eso sí.

77. P: ¿Qué te pareció? Ahora que lo repetiste y lo verbalizaste.

78. A: Así.

79. P: ¿Se entiende, se comprende?

80. A: Se entiende.

A la alumna se le nota que está muy animada al contestar las preguntas (ítems 86 y 88) y lee el segundo problema en voz alta. De inmediato, la profesora (ítem 89) le pregunta sobre qué es lo que debe determinar. La alumna (ítem 90) responde claramente lo que debe buscar. La profesora (ítems 91, 93, 95, 97 y 99) pregunta que cómo representaría esa cantidad utilizando los segmentos, recordándole el método utilizado en el ejercicio anterior. También le recuerda las partes en que lo va a dividir, instando a que lo dibuje, y le pregunta sobre si el tamaño elegido para el segmento dibujado lo hizo por alguna razón especial. La alumna (ítems 92, 94, 96 y 98) explica, a la vez que dibuja el segmento, que debe partirlo en once, sin tomar en cuenta el tamaño

81. P: ¿No es lo que habitualmente haces?

82. A: No.

83. P: Pero, cuando te lo explican lo comprendes.

84. A: Sí.

85. P: Ya, veamos otro.

86. A: Vale.

87. P: Veamos éste, lo lees.

88. A: Vale. Un alumno dedica todos los días las cuatro onceavas partes de su tiempo a repasar matemáticas y los setenta minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las demás materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemáticas?

89. P: Ya, que debes de determinar ahí. ¿Qué tienes que encontrar?

90. A: El tiempo que necesita para las materias y ¿Cuánto pasa estudiando matemáticas?

91. P: Ya ¿Y podemos representar esa cantidad representando un segmento? Pensando en el método anterior.

92. A: Sí. Puedes poner las cuatro onceavas partes...

93. P: ¿Cómo se representa eso en un segmento? Cuatro onceavas partes. Si tienes un segmento y tienes que representar cuatro partes de un total de once ¿Cómo lo haces?

94. A: Pues, poniendo uno partido de once, uno así y luego poner los once.

95. P: Sí, está bien, lo hacemos, claro.

Capítulo 4. Entrevistas. Transcripciones

de los once segmentos pequeños (ítem 100). La profesora (ítems 101 y 103), luego de ver el dibujo, le pregunta el por qué lo dibuja igual que el anterior y si el largo del segmento está representando algo. La alumna (ítem 102 y 104) responde que no significa nada, que simplemente lo hizo así. La profesora (ítem 105) en el afán de descubrir qué representa cada cosa dibujada, le señala una parte en el segmento para saber cuánto sería esa parte y la alumna (ítem 106), marcando con una llave sobre cuatro segmentos de los once ya dibujados, dice que son cuatro onceavos.

La profesora (ítems 107 y 109) le hace varias preguntas a la vez, con la finalidad de llevarla a que comprenda la resolución del problema utilizando el MGL, por lo que la alumna (ítems 108 y 110), prestando atención a las preguntas al mismo tiempo que dibuja en su folio, le que representa cada parte del segmento grande.

A continuación, la profesora (ítem 111) le dice que está muy bien lo que está haciendo y le sugiere el uso de las comillas para designar

96. A: Vale.

97. P: ¿Cuántos segmentos vas a hacer?

98. A: Once.

99. P: Once, ya, ¿el segmento lo usaste de ese tamaño por alguna razón en especial?

100. A: No.

101. P: Porque lo pintamos igual que el anterior.

102. A: No, porque lo hice así.

103. P: Ya, pero no está representando nada, el largo del segmento.

104. A: No.

105. P: ¿Y eso sería cuánto?

106. A: Las cuatro onceavas partes.

107. P: Tienes alguna idea, todavía no lo hemos resuelto. ¿Te imaginas, tienes alguna idea de cuánto va a ser el tiempo total? ¿Te lo imaginas con los datos que tienes? ¿No? ¿Y el tamaño de un segmento, tampoco? Una idea de ¿Cuánto tiempo puede ser? Si acaso un setenta que dice por ahí. Setenta minutos restantes. ¿Cómo podríamos representar ese dato? A ver hemos representado las cuatro onceavas partes de su tiempo en estudiar matemáticas. Ésto representa... sería bueno escribir ahí.

108. A: Sí.

109. P: Que éso es matemáticas. Y luego dice y los setenta minutos restantes a las demás materias. ¿Cómo?...

los minutos. La alumna (ítem 112) dice poner una eme (m), para representar los minutos, en lo que falta del segmento, y coloca efectivamente, en número, los setenta minutos agregándole la frase: “repasa demás materias”.

La profesora (ítem 113) le recuerda las preguntas del enunciado, en busca de la respuesta del mismo, a la vez que le indica que con ese enunciado que tiene allí representado, debe buscar la respuesta. La alumna (ítem 114), confundida un poco, dice que con una equis (x) lo intentaría saber. La profesora (ítem 115) le replica, interrumpiéndole, que ya no es equis (x), que ahora esa equis (x) es un segmento, que es otra forma, y le pregunta (ítem 117) si se puede determinar con la información que se tiene.

La alumna (ítems 116 y 118) queriendo continuar con la resolución utilizando el método, supone que sí se puede encontrar la respuesta con la información dada en el problema, pero duda y le regresa la pregunta. La profesora (ítem 119) le indica que ella es quién hace las preguntas. Entonces le pregunta cuántos segmentos le

110. A: Así.

111. P: Muy bien, entonces tú vas a marcar todo lo que resta con setenta minutos. ¿Usas una comilla para designar minutos, o no?

112. A: Pongo una eme (m).

113. P: Ah, ya, setenta minutos. Y luego dice ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las demás materias? Y ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemáticas? ¿Qué podemos hacer? Ahí tenemos el enunciado representado. Ahora con esta representación hay que buscar la respuesta.

114. A: Es que... a ver, con la equis (x), más o menos lo intentaría saber.

115. P: Pero, aquí la equis (x) cambió a segmento, es otra forma.

116. A: Entonces...

117. P: ¿Se puede determinar, o no? ¿Tenemos la información necesaria para determinarlo?

118. A: Supongo que sí... ¿O no?

119. P: Yo te estoy preguntando y me empiezas a preguntar a mí. ¿Cuántos segmentos quedaron aquí?

120. A: ¿Aquí?

121. P: En los setenta minutos.

122. A: Uno, dos, tres... uno... siete...

123. P: ¿Siete?

quedaron, mientras señala el dibujo. La alumna (ítem 120) pregunta para asegurarse que a cuál parte del segmento se refiere la profesora (ítem 121) y los cuenta uno a uno (ítem 122) hasta llegar al número siete, afirmando (ítems 124 y 126) que las siete onceavas partes son setenta minutos, que es lo utilizado para repasar las demás materias.

Después, la profesora (ítems 123, 125 y 127), además de darle pistas sobre el problema para que razone y encuentre la respuesta, le pregunta sobre a cuántos minutos equivale cada segmento. La alumna (ítem 128) duda si podría hacerlo o no y dice no saber. Al ver la duda que existe, la profesora (ítem 129) le dice que lo vuelva a mirar, es decir, a volver a leer el problema para ver si será posible saber cuánto vale un segmento con la información dada en el ejercicio. La alumna (ítem 130) responde que para saber cuánto vale cada segmento habría que dividirlo. La profesora (ítem 131) le pregunta con qué vamos a dividir.

La alumna (ítem 132) se nota confundida y, al responder, no sabe si dividir setenta entre once o siete entre once. La profesora (ítem 133),

124. A: Sí. Las siete onceavas partes son setenta minutos que lo utilizaría para repasar las demás materias.

125. P: Pero, aquí hay siete segmentos que equivalen a setenta minutos.

126. A: Sí.

127. P: Podemos sacar de ahí cuánto vale cada segmento por ejemplo, tal vez. Siete segmentos equivalen a setenta minutos. ¿Puedes determinar cuántos minutos equivalen a un segmento?

128. A: Podría hacerlo, pero... así no sé.

129. P: No, mirémoslo otra vez. Mira no da primero una información de que cuatro onceavas parte representa matemáticas, tú lo tienes muy bien representado y luego todo lo que queda que son siete segmentos equivalen a setenta minutos. Entonces la pregunta es con esta información de que tengo siete segmentos, que en total todos esos segmentos suman setenta minutos ¿Será posible saber cuánto vale un segmento?

130. A: Dividiéndolo.

131. P: ¿De cuánto? ¿Qué cosa, con qué cosa, qué vamos a dividir?

132. A: Setenta, siete partido de once.

133. P: Setenta dividido de.

134. A: Siete partido de once.

135. P: A ver, volvamos al ejercicio anterior. Miremos este esquema, cuando nosotros teníamos acá que quedaban siete segmentos, verdad y esos siete segmentos sumaban treinta y cinco. ¿Cómo hiciste para que la respuesta

Capítulo 4. Entrevistas. Transcripciones

a manera de ayuda le replica “setenta dividido de...”, pero la alumna (ítem 134) no capta la ayuda y afirma ser siete partido once veces.

Al notar dicha confusión, la profesora (ítems 135, 137 y 139) se encarga de recordarle el proceso realizado en el ejercicio anterior y la alumna (ítems 136, 138 y 140) responde a medida que recuerda lo hecho en el ejercicio anterior para encontrar la respuesta. Entonces, le viene a la mente que para encontrar la respuesta en este ejercicio sólo debe dividir setenta entre siete. La profesora (ítems 141, 143 y 145) le pide que explique el por qué de su respuesta y que diga cuántos minutos equivalen a cada segmento, conduciéndola a que lo represente. La alumna (ítems 142, 144 y 146) explica que divide entre los siete segmentos que quedan y que el valor de cada segmento sería diez minutos, que ha marcado en el segmento con una pequeña llave, comprobando que, en verdad, sabía el valor de los segmentos en minutos.

De forma seguida, la profesora (ítems 147 y 149) le dice que, como

diera cinco?

136. A: Dividir treinta y cinco entre siete.

137. P: Porque había siete segmentos para repartirle el treinta y cinco.

138. A: Ah, vale.

139. P: Entonces, acá.

140. A: Setenta entre siete.

141. P: ¿Por qué? Explícamelo.

142. A: Entre siete segmentos que quedan.

143. P: Entonces, tenemos setenta minutos y tenemos que repartirlo entre siete segmentos y entonces ¿Cuántos minutos equivalen a cada segmento?

144. A: Diez minutos.

145. P: A diez minutos. Si lo representamos en uno, diez minutos, ¿Vez que sabías?

146. A: Sí

147. P: Ya, diez minutos, entonces la pregunta es por ejemplo, ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemáticas? ¿Cómo lo podríamos saber?

148. A: Pues, si hay cuatro segmentos y sabes que cada uno vale diez, cuatro por diez...

149. P: Y eso es...

150. A: Cuarenta.

151. P: Entonces, son cuarenta minutos. ¿Lo entiendes?

ya sabe cuánto vale cada segmento, sólo bastaría resolver las preguntas del ejercicio. La alumna (ítems 148 y 150) da una rápida explicación de la operación realizada y, de inmediato, dice la respuesta a una de las preguntas del ejercicio. La profesora (ítem 151) le vuelve a repetir la respuesta y le pregunta si lo ha entendido. La alumna (ítem 152) responde de forma positiva, agregando que el método es más fácil. De inmediato, la profesora (ítem 153), aprovechando que ya conoce una de las respuestas, le pregunta sobre la interrogante que hace falta y la alumna (ítem 154) muy confiada de su razonamiento, explica que se deben sumar los dos resultados anteriores para que le pueda dar el total del tiempo, en minutos, que necesita para repasar todas las materias. La profesora (ítems 155 y 157) le interrumpe para que le diga, en números, cuánto es, y la alumna (ítem 156) suma mentalmente y dice ser ciento diez minutos, lo que escribe luego en el folio (ítem 158). Entonces, la profesora (ítems 159 y 161) le pide que lea lo que está escribiendo y que responda a la otra pregunta, una vez respondida la primera. La

152. A: Sí, es verdad, es más fácil.

153. P: Y la otra pregunta ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias?

154. A: Pues, si sabes que los cuatro onceavos son cuarenta minutos y todo lo demás son setenta, pues tendrías que sumar setenta más cuarenta.

155. P: ¿Y eso es?

156. A: Ciento diez minutos.

157. P: Ciento diez minutos. ¿Qué estás escribiendo?

158. A: El resultado.

159. P: Lo lees, para que quede grabado.

160. A: Vale. Pasaría estudiando todas las demás materias ciento diez minutos.

161. P: Ya y podemos responder la otra ¿Cuánto tiempo pasará estudiando matemáticas?

162. A: Pasaría estudiando matemáticas, cuarenta minutos.

163. P: Muy bien, ¿Qué te pareció este problema?

164. A: Más fácil de lo que pensaba.

165. P: Ah, te estabas complicando. Que ya lo habías hecho parecido en el primer ejercicio. Pero las equis(x), todavía no se te van de la cabeza. Mira leamos éste, también hay que poner el nombre. ¿Puedes leer el problema?

166. A: En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno, Luis observa unos pantalones que

Capítulo 4. Entrevistas. Transcripciones

alumna, (ítems 160 y 162) responde de forma correcta las dos preguntas planteadas en el ejercicio, a la vez que escribe en el folio.

La profesora (ítem 163) le dice lo bien que lo ha hecho y le pregunta cómo le pareció el problema. La alumna (ítem 164) le responde “que es más fácil de lo que pensaba”. La profesora (ítem 165), a manera de comentario, le dice que ya lo había hecho de forma parecida en el primer problema, pero como tiene muy arraigada la incógnita, equis (x), en su cabeza, parecía complicado pero no lo era.

Pasan de inmediato al tercer problema, en donde la alumna (ítem 166) lee en voz alta, con la observación de la profesora (ítem 167) de que ese problema ya tiene hecho el planteamiento geométrico. La profesora se asegura de que la alumna (ítem 168) comprende el problema y le pide (ítem 169) que le explique lo que ya ha hecho. La alumna (ítem 170) parece comprender el dibujo que aparece en el ejercicio, dado que lo explica de forma clara y da un resultado (ítem 172) sobre el valor de los segmentos, suponiendo que es diez

están rebajados un veinte por ciento y cuestan dieciocho euros ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?

167. P: ¿Se comprende el planteamiento que está... esto... hecho aquí en forma geométrica?

168. A: Vale, sí.

169. P: Sí, a ver, ¿Qué has hecho me lo puedes explicar?

170. A: Te vienen todos los segmentos y se supone que todos los segmentos es lo que cuesta en total. Y si dice que se han rebajado en un veinte por ciento serían dos segmentos.

171. P: Dos segmentos ¿De cuánto?

172. A: Diez segmentos.

173. P: Y, ¿Por qué será diez el total?

174. A: Pues, no lo sé.

175. P: Porque hay dos segmentos que representa el veinte por ciento. Lo que queda lo que pago en porcentaje ¿Lo tienes claro, cuánto pago en porcentaje por el pantalón?

176. A: El ochenta por ciento.

177. P: El ochenta por ciento. Entonces estos dos segmentos representan el veinte...

178. A: Ah, claro, los otros ocho segmentos representan...

179. P: El ochenta. O sea, cada segmento está representando ¿Qué porcentaje?

180. A: El diez por ciento.

181. P: El diez por ciento, sí. Si te imaginas, así

el valor de cada uno. La profesora (ítems 171 y 173) interviene con la interrogante del porqué de su respuesta, contestando rápidamente (ítem 174) que no lo sabe. La profesora (ítems 175, 177 y 179) la lleva, con sus preguntas, a generar poco a poco un razonamiento que la alumna (ítems 176, 178 y 180) va verbalizando, hasta llegar a una respuesta que, en seguida, la profesora (ítems 181 y 183) le cuestiona, pidiéndole que dé un valor estimado del precio del pantalón antes del descuento.

La alumna (ítems 182 y 184) piensa unos instantes, respondiendo a que no puede ser mucho más de diecinueve. Interviene la profesora (ítems 185 y 187) para hacer referencia al valor estimado, produciéndole una duda al decirle que ese valor estimado puede ser menos del valor dado en el ejercicio, puesto que antes el pantalón valía más caro. Con lo que la alumna responde (ítem 186) de forma afirmativa, aceptando que ese valor no puede ser menor que el dado.

La profesora (ítems 189 y 191) le sigue preguntando si ella cree que,

mirando ¿Cuánto puede ser el valor del pantalón, antes del descuento? Así al ojo no más ¿Se te ocurre un número?

182. A: Regular.

183. P: Veamos, tienes un número con el descuento paga dieciocho euros. Entonces ¿Cuánto crees tú que sería el valor del pantalón antes de que le hicieran el descuento?

184. A: No mucho más de diecinueve.

185. P: ¿Cómo diecinueve? Ya, pero puede ser menos de dieciocho.

186. A: Menos... ¿No?

187. P: No, porque antes valía más caro. Tú dices más y ese más podría ser unos diecinueve, dices tú.

188. A: Sí.

189. P: ¿Crees que ahí está la información necesaria para determinar la respuesta?

190. A: Yo creo que sí.

191. P: A ver, veamos ¿Cómo lo puedes determinar? ¿Qué se te ocurre hacer?

192. A: Los dieciocho euros son el ochenta por ciento.

193. P: ¿Qué estás pensando? No estoy entendiendo nada ¿Dime qué estás pensando?

194. A: Multiplicarlo ¿No?

195. P: ¿Cómo que multiplicarlo?

196. A: Dieciocho por ocho.

Capítulo 4. Entrevistas. Transcripciones

con esa información, se puede determinar la respuesta y de cómo lo haría. La alumna (ítems 188, 190 y 192) cree que con esa información puede determinar la respuesta, pues dice que esos dieciocho euros serían el ochenta por ciento. Pero la profesora (ítem 193) parece confundida y le hace la pregunta sobre qué hace y en qué piensa. Luego de esta actitud por parte de la profesora, la alumna (ítems 194, 196, 198 y 200) igualmente se muestra un tanto confundida, pues dice que hay que multiplicar, por lo que le va a resultar un número muy grande. Se confunde al recordar que se ha estado trabajando con la equis (x), de tal forma que llega a cambiar de operación (ítem 202), pensando en dividir.

La profesora (ítems 195, 197, 199 y 201) no deja de guiarla y de recordarle constantemente (ítem 203) lo que tiene que determinar y lo que debe de buscar primero. Allí vuelve la alumna (ítem 204) señalando, en el dibujo anterior, claramente lo que debe determinar. La profesora (ítems 205, 207, 209, 211, 213, 215, 217 y 219) le crea una dificultad al preguntarle sobre

197. P: Ya.

198. A: Es una cosa grande...

199. P: ¿No te parece conocido ésto, como que ya lo hemos trabajado?

200. A: Sí, con la equis (x).

201. P: No digo parecido en relación a los dos anteriores.

202. A: Sí, lo que pasa es que, si lo divides se queda más chico.

203. P: A ver, pero ¿Qué es lo que tenemos que determinar, qué necesito encontrar primero?

204. A: Cuánto dinero es ésto, el veinte por ciento.

205. P: Cuánto es el veinte por ciento, pero para saber cuánto es el veinte por ciento ¿qué parte de la representación necesito saber? A ver indícame.

206. A: De estos dos.

207. P: De la representación que estás mirando.

208. A: Toda.

209. P: Pero, yo, no puedo tener el resultado así inmediatamente. Por ejemplo cuando tienes equis (x) ¿Tú encuentras al tirón la respuesta al ejercicio?

210. A: No, hay que buscarla.

211. P: Te encuentras un valor de equis (x) que representa algo más pequeño y de ahí ya sigues. Entonces, yo, aquí tengo que encontrar no todo el segmento grande ¿Qué tengo que encontrar? ¿El valor de qué?

qué parte de la representación es la que necesita saber. Se genera, aparentemente, un conflicto en la alumna (ítems 206, 208, 210, 212, 214, 216 y 218) aunque se nota tranquila y contesta a cada pregunta que le hace la profesora (ítem 221), pero llega un momento en que llega a mostrarse (ítem 220) un poco confundida. Hace un alto, recuerda lo que había hecho en el ejercicio anterior y busca apoyarse en ello (ítem 222) para superar la dificultad encontrada.

La profesora (ítems 223, 225, 227, 229, 231 y 233) va guiando a la alumna hacia la respuesta con preguntas que le permitan hacer la corrección entre el proceso que se llevó a cabo en el ejercicio anterior, y el proceso que debe seguir para culminar el presente ejercicio. Preguntándole sobre qué es lo que van a encontrar una vez resuelvan el problema número tres.

212. A: Del veinte por ciento.

213. P: Del veinte por ciento, pero ¿El veinte por ciento está representado, con qué?

214. A: Con dos segmentos.

215. P: Entonces, voy a obtener inmediatamente dos segmentos el valor de los segmentos inmediatamente u obtengo el valor de un segmento.

216. A: Ah, bueno tengo el valor de un segmento.

217. P: Cuando uno resuelve estos ejercicios encuentra inmediatamente el valor de los dos segmentos o encuentra el valor de un segmento.

218. A: Inmediatamente el que te viene es de dos segmentos.

219. P: De dos segmentos. Ya y cuando lo hicimos anteriormente encontramos cuatro segmentos al tiro o siete segmentos inmediatamente.

220. A: A ver, que me estoy liando. Nosotros primero lo tuvimos que representar según los datos que nos daban y los datos que nos daban en éste era siete y en éste era cuatro.

221. P: Pero, por ejemplo, en el segundo ¿Qué fue lo que encontramos cuando ya teníamos la representación? ¿Qué fue lo primero que pudimos encontrar?

222. A: cuatro onceavos.

223. P: Sí. Nosotros lo representamos todo, pusimos todos los datos.

224. A: Ah, vale.

Capítulo 4. Entrevistas. Transcripciones

La alumna (ítems 224, 226, 228 y 230) se deja llevar por lo que la profesora le ha dicho hasta el momento manifestando siempre que lo que se va a encontrar es el valor de un segmento. Y es en el (ítem 232) cuando indica que ya está resuelto, interpreta el dibujo y realiza una división que le da el valor de uno de los segmentos. Luego en el (ítems 234) dice multiplicar ese valor por todos los segmentos para que dé el resultado total.

Luego de felicitarla, la profesora (ítem 235) le pregunta que si era difícil. La alumna (ítem 236) expresa que uno siempre se complica en lo mismo. Una vez resueltas todas las preguntas, la profesora (ítem 237) le pide que lo haga en el folio. La alumna (ítem 238) encuentra el valor exacto de

225. P: ¿Qué fue lo primero que encontramos?

226. A: Los diez minutos, un segmento.

227. P: Porque lo demás fue representar lo que encontramos fue un segmento, pero, acá, también encontramos... fue...

228. A: Un segmento.

229. P: Un segmento, ¿Qué crees ahora en el problema tres, qué vamos a encontrar, qué vayamos a encontrar primero? Aquí están representados los datos.

230. A: Un segmento.

231. P: Un segmento ¿Cómo podemos hacer para encontrar el valor de un segmento? Y donde tenemos un número es la parte que representa los dieciocho euros.

232. A: Ah, ya está, que si aquí son dieciocho euros y esto está dividido en ocho, tú lo divides y te va a dar la cantidad de uno.

233. P: De uno, ya.

234. A: Entonces, tú lo multiplicas por todos los segmentos que tienes y te da el resultado total.

235. P: Muy bien ¿Era difícil?

236. A: Que va, si es que siempre me atranco en lo mismo.

237. P: Puede hacerlo, ahí, en la hoja. Porque yo no me lo sé en la mente.

238. A: Dos con veinticinco vale un segmento.

239. P: Ya, dos coma veinticinco euros.

cada uno de los segmentos marcados con dieciocho euros. La profesora (ítems 239, 241, 243, 245, 247 y 249) le ofrece algunos comentarios para que reflexione sobre el problema una vez resuelto y que lo compare con la estimación que había dado en un principio, contándole algunos ejemplos comunes de la vida cotidiana, para que los tenga en cuenta al momento que los requiera.

La alumna (ítems 240, 242, 244, 246, 248 y 250) dice hacer una multiplicación que le da el valor del pantalón antes de la rebaja, llegando a la conclusión de que costaba más de lo que ella había estimado de hecho le resulta muy poco la rebaja y prefiere una rebaja del treinta, cuarenta o cincuenta por ciento para cuando lo necesite.

Por último, la profesora (ítems 251, 253 y 255) le pregunta que cómo le había parecido el ejercicio, si prefiere el uso de este método o el de buscar equis (x), además de manifestarle qué tan rápido captó la idea del nuevo método, a lo que la alumna (ítems 252 y 254) contesta que, en verdad, son fáciles y que si le hubiesen dado a elegir entre encontrar la equis (x) y este

240. A: Entonces, tú, ahora multiplicas, dos coma veinticinco por diez y te da veintidós coma cinco que costaba antes el pantalón.

241. P: Era veintidós con cinco y tú creías que el pantalón constaba...

242. A: Diecinueve.

243. P: diecinueve, ¿Qué paso?

244. A: Que costaba más de diecinueve.

245. P: Más, sí y ¿Por qué se puede deber esa diferencia?

246. A: Porque no era mucho más.

247. P: Porque tú pensaste que veinte era poca nada más que veinte por ciento era poquito. O sea si, tú, estás en una tienda y hay un pantalón que te gusta y está en oferta ¿Qué porcentaje debería tener ese pantalón para que tú digas ah... está súper barato, me lo compro?

248. A: Un cuarenta y cincuenta por ciento.

249. P: Ah, eso sí es alto un cuarenta por ciento, o sea si te damos un treinta...

250. A: Un treinta, bueno, también.

251. P: Pero, veinte no dices, ah, todavía no está muy barato. ¿Y qué te pareció ahora este ejercicio?

252. A: Sí, en verdad son fáciles, lo haces así lo vas representando y luego lo ves y dices, sí es muy fácil.

253. P: ¿Pero, prefieres las equis (x) o prefieres ésto? Si te hubiesen enseñado así desde un principio, te hubiera sido más fácil que con las

método, se quedaría con el uso del método.

La alumna mostró dificultades a la hora de conectar el uso de los segmentos con lo ya aprendido, es decir, con la utilización de las ecuaciones, pero la profesora sigue muy bien la entrevista y el uso del método hasta el final. A la alumna le fue de gran ayuda la forma en que fue guiada a encontrar, no sólo la respuesta, sino a aplicar el MGL, por lo que, al final, dice preferir su uso por ser más fácil.

equis (x).

254. A: Para, mí, seguramente que sí. Si me lo enseñado desde un principio y me dan a elegir entre esto y la equis (x), seguramente, yo, hubiera acabado escogiendo esto.

255. P: Sí, te parece que rápidamente pudiste captar la idea.

Capítulo 5. Conclusiones

A través del estudio de casos realizado, pretendemos dar respuesta a nuestras preguntas formuladas en un principio y cuya finalidad será mostrar que, tras la enseñanza, los estudiantes son capaces de utilizar el MGL para resolver problemas de álgebra escolar. Es conveniente tener presente que las conclusiones que presentamos sólo serán tomadas en cuenta para los sujetos que participaron en el estudio, aclarando que no pretendemos generalizar los hechos ni las observaciones encontradas.

5.1. Respuesta a las interrogantes iniciales

Recordemos las preguntas a las que este estudio pretende dar respuesta:

1. *La utilización del MGL ¿facilita la comprensión y el significado en el planteamiento y ejecución de los problemas algebraicos?*

El uso del MGL implica el dibujar segmentos en los que se opera con lo desconocido de forma similar que con el uso de ecuaciones y observamos que todos los estudiantes fueron capaces de hacerlo.

Recordemos que los estudiantes no deciden la representación matemática a utilizar. Sin embargo, cuando se usa este nuevo método no es con la intención de restringir su conocimiento, sino el de tratar de que adquieran mayor habilidad al momento de resolver cualquier tipo de problemas algebraicos, es decir de problemas que pueden ser resueltos utilizando ecuaciones de primer grado con una o dos incógnitas.

Si bien es cierto que, en el dibujo, los segmentos no tienen una medida determinada para representar los valores que aparecen en el planteamiento del problema, es probable producir modificaciones e invenciones en esa representación, lo que permite que encontremos segmentos de distintos tamaños sin importar el valor dado. Es decir, el sujeto toma la decisión sobre el tamaño del segmento al momento de expresar la cantidad o valor.

En definitiva el permitir que surja, en el sujeto, de manera espontánea, el dibujo, diseño y forma del segmento, pone de manifiesto las potencialidades y destrezas que están inmersas en cada sujeto cuando utilizan el MGL, lo que hace que la resolución del

Capítulo 5. Conclusiones

problema adquiriera mayor significado para el estudiante y, en consecuencia, la mejor comprensión de todo el proceso de resolución.

2. *¿Cuáles son las actuaciones de los estudiantes cuando resuelven problemas algebraicos escolares utilizando el Método Geométrico Lineal (en lo sucesivo MGL), después de haber sido instruidos para ello?*

Podemos observar que los estudiantes muestran una marcada tendencia a evitar el uso del MGL por no ser el método que, habitualmente, toman como planteamiento de un problema algebraico. Además de notarse la dificultad que tienen al dibujar los segmentos y la inseguridad que muestran al hacer dicho planteamiento puesto que, aún teniendo clara la respuesta en su mente, no sabían si estaba bien o mal.

La participación constante y la posible influencia que ejercía la profesora, les motiva a continuar con el uso del MGL; de lo contrario, intentarían resolver el problema ayudándose con el uso de las ecuaciones para, después, traducirlo al MGL. Con estos intentos se les pudo provocar una dificultad para desencadenar la resolución del problema. En general estas actuaciones se pueden considerar cooperadoras, cosa que ha sido común ante este nuevo método.

Es un logro poder clasificar al alumnado como un buen resolutor de problemas con el método que nos ocupa, teniendo en cuenta factores tales como la presencia de profesorado diferente al habitual, trabajando a solas con él y sabiendo que se está haciendo una grabación del proceso de aprendizaje. Todo ello, como implica un proceso de adaptación novedosa hacia el entorno, nos induce a suponer que hay variables indeterminadas en lo referente a la resolución de los problemas del álgebra escolar.

3. *¿Cómo razonan los estudiantes cuando resuelven problemas utilizando este Método Geométrico Lineal?*

Encontramos situaciones en las que los estudiantes manifiestan sus dudas e inquietudes durante la resolución de los problemas y, una vez culminan el proceso, hacen la observación de que este método es mejor que el conocido en otros cursos anteriores. Lo que no podemos asegurar es que sea del todo cierto pues, el hecho de que los estudiantes conozcan que su comentario será grabado en audio, implica una restricción para conocer

su verdadera forma de pensar, sin descartar que, por el momento, es probable que lo expresado sea lo correcto. Sin embargo, cuando repasan la resolución del problema realizada mediante el MGL, expresan su comprensión del método y son capaces hacer un seguimiento razonado de las distintas fases de la resolución, llegando a comprender mejor todo el proceso.

4. ¿El instrumento para la recogida de datos es adecuado al fin que se pretende?

Una de las intenciones de nuestra investigación es observar en qué grado ha sido útil el instrumento y en qué grado se ha seguido el protocolo propuesto. Recordemos que sólo hemos presentado tres casos, por lo que la conclusión sobre este aspecto se refiere a lo observado en estos tres casos.

De la transcripción se observa que la entrevista se siguió en los tres ejemplos presentados, pues su estructura permitía al alumno expresar sus ideas y comentarios sin restricciones. En estos casos se puede observar la interacción profesor-alumno y la obtención, mediante la entrevista, de las justificaciones del alumno a su actuación. No obstante, teniendo en cuenta la cantidad de ejemplos presentes en este estudio no podemos asegurar que el instrumento pueda ser generalizado a otros casos y a otras circunstancias.

5. ¿Cómo se puede mejorar el instrumento de recogida de datos?

Al no controlarse el tiempo en las entrevistas, se observa que unas se alargan más que otras ya que el entrevistador debía intentar, por todos los medios, que el alumno continuara por el camino de la resolución de problemas a través del nuevo método. La falta de experiencia de la entrevistadora, en cuanto al uso del instrumento y del nuevo método, ha supuesto un sesgo en la entrevista, en el sentido de no saber a ciencia cierta si había comprendido las instrucciones dadas previamente.

En efecto, su actuación debería haber sido más participativa que en una clase controlada, y dejar que el alumno tomara sus propias decisiones sin dirigirlo, y que pareciera un diálogo para que salieran a la luz los fenómenos que se pretendían. Sin embargo, ha sido positivo el hecho de mantener al alumno-alumna con ánimo de seguir la entrevista, evitando que el cansancio influyera en sus actitudes y respuestas.

Por lo tanto, habría que controlar mejor el protocolo de administración del instrumento, tanto en la preparación previa del entrevistador (profesor o profesora), como en el tiempo de aplicación.

5.2. Cuestiones abiertas

Este trabajo tiene varios caminos por los que ampliar la investigación iniciada, es decir, pensamos que se puede avanzar en estudios posteriores, entre otras, en alguna de las siguientes líneas:

- Analizar resultados, en términos de competencias, de los estudiantes desde la perspectiva del uso del nuevo método.
- Analizar los datos que se puedan extraer del estudio de casos, mediante técnicas estadísticas que permitan relacionar las variables asociadas a las respuestas de los alumnos, y proponer las primeras conjeturas en cuanto a la forma de razonar de los alumnos cuando utilizan el MGL para resolver los problemas algebraicos escolares.
- Realizar un estudio cualitativo de tipo interpretativo, basado en el análisis de tareas, sometido a un cuestionario o entrevista.
- Observar la influencia que ejerce el instrumento presentado, en las respuestas inmediatas de los alumnos.
- Afinar el instrumento de recogida de datos, tanto en los problemas propuestos como en la entrevista semiestructurada, según las dificultades encontradas en su administración.
- Analizar, diagnosticar y realizar un seguimiento de las situaciones de aprendizaje, que se podría complementar con la creación de un grupo control y un grupo experimental, lo que permitiría comprobar si se mejora la comprensión y resultados en la resolución de problemas algebraicos escolares utilizando el MGL.

Referencias bibliográficas

- Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa. Guía práctica*. Barcelona: Ediciones Ceac.
- Bromley, D.B. (1986). *The case-study method in psychology and relate disciplines*. Chichester, UK: John Wiley & Sons.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico, L. (Ed.), *La Educación matemática en la Enseñanza Secundaria*, pp. 95 - 122. Barcelona: HORSORI.
- Decreto de la Junta de Andalucía 148/ 2002, pp. 143.
- Duval, R. (1999 a). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for learning*. Documento presentado en el 21th encuentro anual de North American Charpter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Cuernavaca, México (Eric Document Reproduction service N°. ED 466 379).
- Duval, R. (1999 b). *Semiosis y pensamiento humano*. Traducido al español por Vega, M. Colombia: Universidad del Valle.
- Espinosa, E. (2002). *Aplicación de un instrumento de evaluación de álgebra elemental. Réplica de la tesis del Dr. Fernández García*. Trabajo de investigación tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Espinosa, E. (2004). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Fernández, F. (1996). El paso de la aritmética al álgebra: una propuesta didáctica. *Aula pensamiento numérico*, 50, pp. 17- 21.
- Fernández, F. (1997 a). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Fernández, F. (1997 b). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. Implicaciones para la enseñanza del lenguaje simbólico algebraico. *Revista UNO*, 14, pp. 75 – 91.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. On line. [<http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>].
- Hernández Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill.

Referencias bibliográficas

- Horak, V. y Horak, W. (1981). *Geometric Proofs of algebraic identities*. *Mathematics Teacher*, 74(3), pp. 212 – 216.
- Kaput, J. (1992). *Technology and Mathematics Education*. En Grows, D. (Ed.), *Handbook of Research on mathematics teaching and learning*. New York: Mac Millan.
- Kaput, J. (1995). *A research base supporting long term algebra reform?* Documento presentado en el encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, (ERIC Document Reproduction Service No. ED 389 539).
- Kaput, J. (2000 a). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Documento presentado en el encuentro anual de North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 662).
- Kaput, J. (2000 b). *Transforming algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by “algebrafying” the K - 12 Curriculum*. Documento del National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. Washington, DC, (ERIC Document Reproduction Service No. ED 441 664).
- Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En Stacey, Chick y Kendal (Eds.). *The future of the teaching and learning of algebra*, pp. 35 – 44. Netherland: Kluwer Academic Publishers.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del algebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), pp 229 – 240.
- Martínez, M., Fernández, F. Y Flores, P. (2009). Resolución de problemas de álgebra a través del modelo geométrico lineal (MGL). Fichas de trabajo para el aula. *Actas XIV Jornadas JAEM (s/p)*. Girona: FEEMCAT.
- Molina, M. (2004). *Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de 3º grado*. Trabajo de investigación tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press. (Cómo plantear y resolver problemas (1986). México: Trillas).
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- Real Academia Española de la Lengua. (2001). Diccionario de la lengua española. Madrid. Espasa. www.rae.es
- Real Decreto 1631/2006, del 29 de diciembre, por el cual se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín Oficial del Estado (BOE) de 5 de enero de 2007, 5, 677 – 773. (<http://www.boe.es/boe/dias/2007/01/05/pdfs/A00677-00773.pdf>)

Referencias bibliográficas

Rico, L. (1998). Los organizadores del currículo de matemática. En Rico, L. (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, pp. 39 - 35. Barcelona: HORSORI.

Rico, L. (2006). Marco Teórico de Evaluación en PISA *sobre matemáticas y resolución de problemas*. Revista de Educación MEC, extraordinario 2006, pp. 275-294.

Referencias bibliográficas