4. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

4.1. Grados de complejidad de las tareas.

En las pruebas PISA existen 3 niveles de clasificación de tareas según la demanda cognitiva las mismas. Rosa Caraballo, J.L. Lupiáñez y L. Rico, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en *Diseño y evaluación de tareas para evaluar la competencia matemática*, definen los 3 niveles como sigue:

> *"**Reproducción:** Las preguntas en este nivel requieren que el estudiante demuestre que domina el conocimiento aprendido. Son problemas que les resultan familiares y se resuelven aplicando algoritmos o destrezas técnicas. Incluye los procesos de acceder (recordar, reproducir) e identificar.*
>
> ***Conexión.** Las preguntas en este nivel requieren que el estudiante demuestre que puede establecer relaciones entre distintos dominios matemáticos y que puede integrar información para resolver problemas que no son rutinarios pero que exigen que el estudiante se decida por una de entre varias estrategias de resolución. Incluye los procesos de aplicar, analizar y valorar.*
>
> ***Reflexión.** Las preguntas en este nivel son situaciones poco estructuradas que requieren que el estudiante comprenda, reflexione y use su creatividad para reconocer las matemáticas involucradas en el problema. Se exige que el estudiante analice, interprete y desarrolle sus propios modelos y estrategias y presente argumentos matemáticos, demostraciones y generalizaciones. Incluye los procesos de sintetizar, crear y juzgar. "*

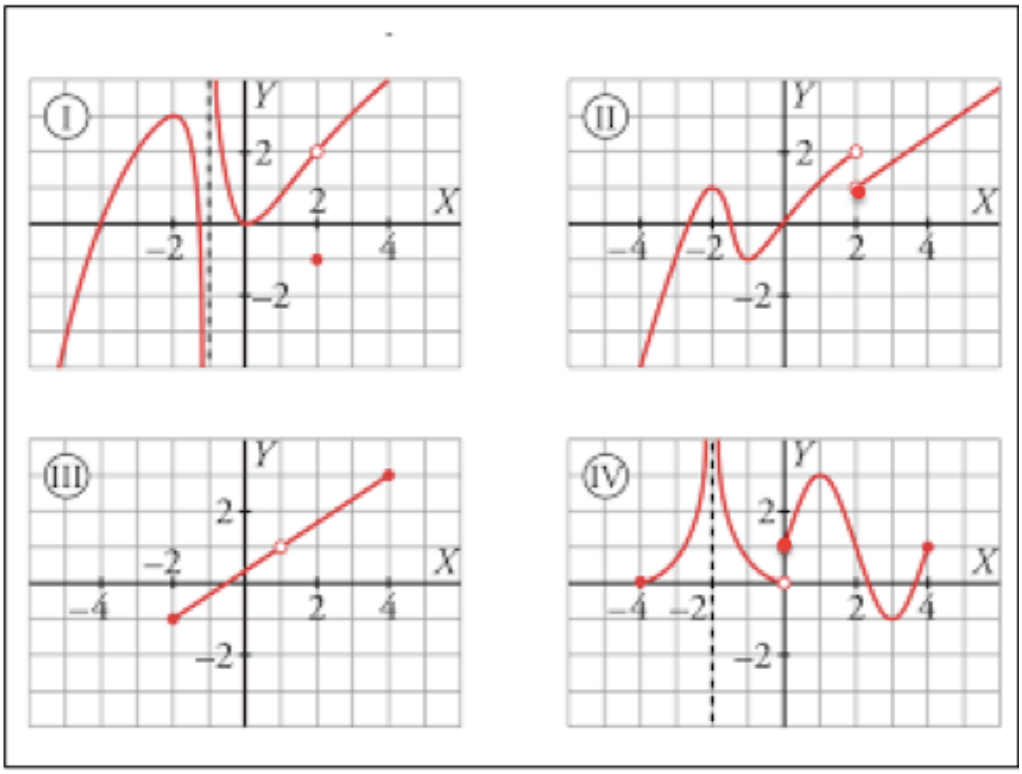
A continuación expongo una tarea para cada uno de los niveles:

<u>TAREA DE REPRODUCCIÓN:</u>

Atendiendo a las 4 gráficas de las siguientes funciones, ¿cuál es el dominio de definición en cada una de ellas?

Teniendo en cuenta los intervalos en los que las funciones están definidas, determina:

a) *Mínimos y máximos relativos.*
b) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
c) *Puntos de discontinuidad y tipo de discontinuidad.*



TAREA DE CONEXIÓN:

Esboza la gráfica de una función con las siguientes características:

a) *En el punto x=6 existe una discontinuidad de salto finito de magnitud 4 unidades siendo* $lim_{x\to 6^+} f(x) = 8$

b) $f(0) = f(10) = 0$

c) *En el punto x=8 la función no es continua, siendo:*

$$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^+} f(x) = 4$$

d) *En el punto x=4:*

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = 6 \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x) = 6 \qquad f(4) = 2$$

e) *La función está definida en el intervalo [0, 10].*

f) $f(2) = f(6) = 4$

TAREA DE REFLEXIÓN

En un aparcamiento público A cobran 3 euros por la primera hora o fracción y 2 por cada hora o fracción siguiente, hasta llegar a un máximo de 13 euros por un día.

a. *Representa gráficamente la función que relaciona el precio de estacionar el coche con el tiempo que permanece en el parking A. Expresa esta función de forma analítica.*

b. *Clasifica los puntos de discontinuidad de esta función y argumenta su significado para alguien que deje su coche en el parking A.*

c. *Si en otro aparcamiento público B la función que relaciona coste con tiempo de aparcamiento es f(x)=2+2x, estudia, calculando los límites adecuados en cada caso, qué parking sería más rentable si:*

- *Vamos a recoger la entrada de un concierto a la tienda de discos y no tardaremos más de una hora.*
- *Vamos a ver el partido Granada CF-FC Barcelona al Nuevo Los Cármenes.*
- *Vamos a hacer las compras de Navidad. Tenemos pensado dejar el coche en el parking por la mañana, irnos de compras, comer, terminar las compras por la tarde y recogerlo al anochecer.*

CRITERIOS:

En cuanto a la tarea de reproducción, se trata de una tarea que el alumno puede resolver a partir de conocimientos previos (primeros apartados) y mediante la puesta en práctica de forma directa de nuevos conceptos introducidos en la unidad (apartado c)).

La tarea de conexión está diseñada con la intención de que el alumnado analice los datos que se le proponen y esboce la gráfica de la función a partir de conocimientos previos (dominio de una función) y conceptos tratados en la unidad (relación límite finito de una función en un punto-continuidad, tipos de discontinuidades).

En la tarea de reflexión se pretende que el alumno sea capaz de modelizar un fenómeno, llevar el problema de la vida cotidiana al mundo matemático, usar las destrezas matemáticas estudiadas en la unidad, interpretar los resultados y extraer conclusiones de forma crítica con respecto a esos resultados.

4.2. Recursos y materiales didácticos.

Aparte de los recursos convencionales como pizarra, cuaderno, libro de texto, relaciones de ejercicios, ordenador y proyector, software de presentaciones gráficas (Powerpoint) y calculadora gráfica o convencional; los materiales y recursos específicos que usaría en esta unidad son:

<u>GEOGEBRA:</u>

GeoGebra es un software matemático interactivo libre para la educación secundaria y universitaria principalmente. GeoGebra está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas.

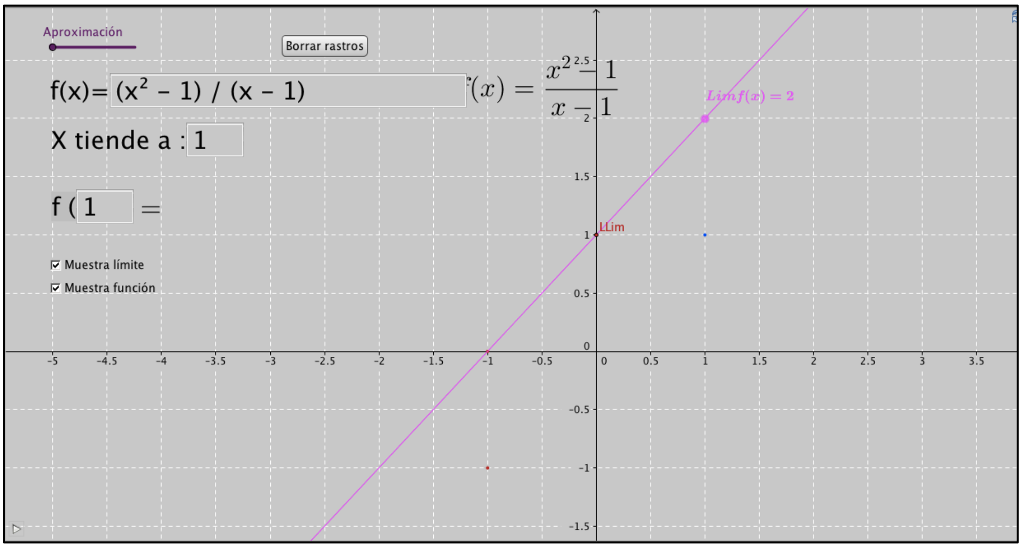
Este instrumento es básicamente un "procesador geométrico" y un "procesador algebraico", es decir, un compendio de matemática con software interactivo que reúne geometría, álgebra y cálculo.

GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo de funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

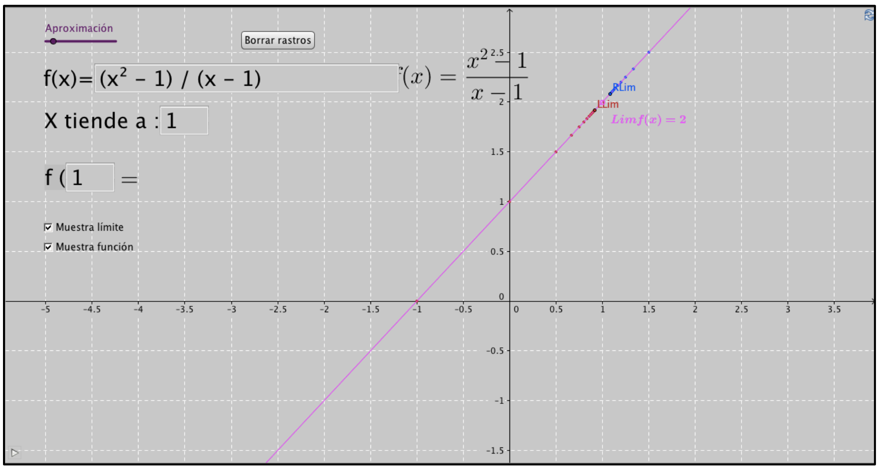
A partir de este software libre, podemos encontrar multitud de applets en la red referentes a los conceptos tratados en esta unidad. Sirvan como ejemplo los dos siguientes.

<u>APPLET LÍMITES CON GEOGEBRA (http://tube.geogebra.org/student/m27526)</u>

En el análisis de contenido, concretamente en el apartado referente a los sistemas de representación, ya se hablaba de este applet. Nos permitirá una vez introducida la expresión analítica de la función, ver la representación gráfica de la misma y evaluarla en cualquier punto, así como obtener el valor del límite en el punto que queramos.

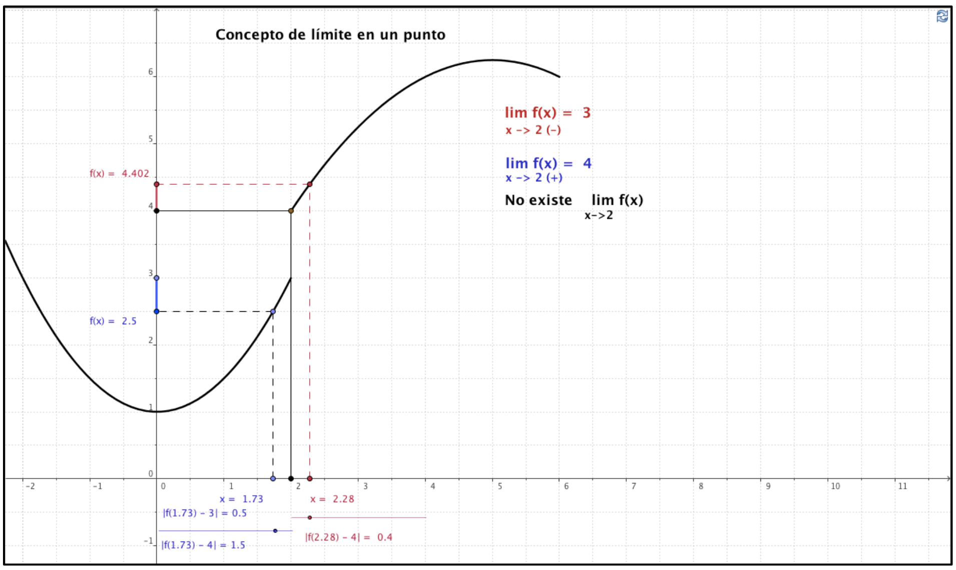


En la imagen se aprecia la representación gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ junto con los valores de f(1) y $\lim_{x \to 1} f(x)$. Además, en la parte superior izquierda de la pantalla, aparece la palabra "aproximación" sobre un barra que representará cada vez mejores aproximaciones de la variable x al punto donde x=1 (ver próxima imagen).



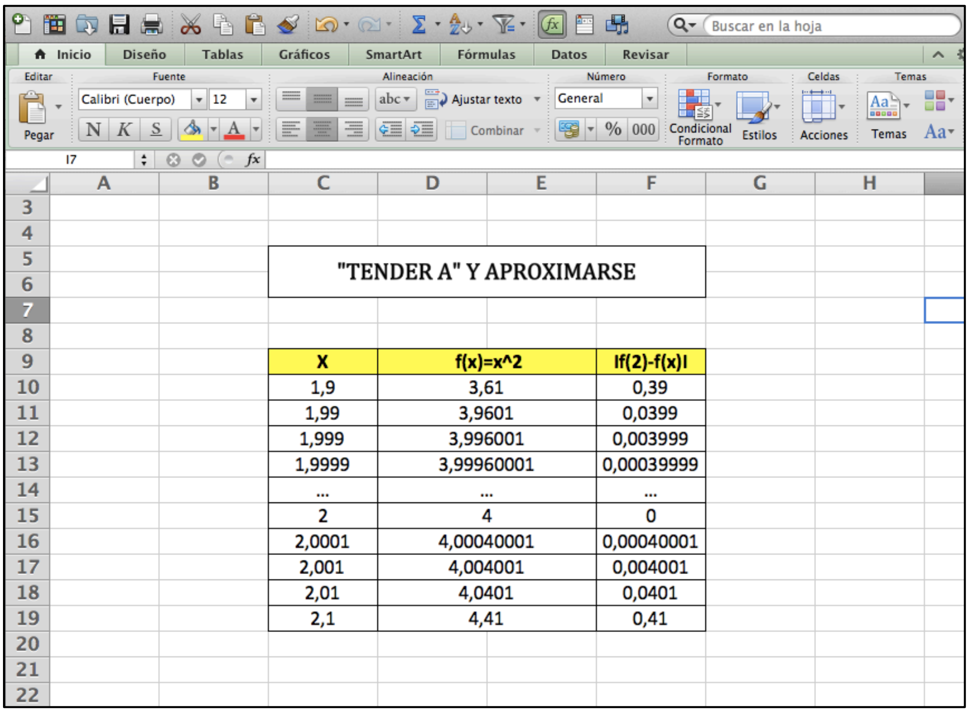
APPLET LÍMITES LATERALES CON GEOGEBRA (http://ftp.vcentenario.org/Joomla/IES/Departamentos/Matematicas/Matematicas/GEOGEBRA/1BachCNS/analise/limite_lateral.html)

Con este applet se puede trabajar la condición necesaria de que coincidan los límites laterales de la función en el punto para que existe el límite de la función en ese punto. En pantalla aparece la representación gráfica de una función f(x) que tiene una discontinuidad de salto en x=2. Con las barras que aparecen en la parte inferior de la pantalla vamos aproximando el valor de x a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, y vemos como al llegar a x=2, los límites laterales no coinciden.



HOJA DE CÁLCULO

La hoja de cálculo se puede usar en la justificación e interpretación del límite finito de una función en punto a partir de una tabla de valores (O4). Se puede presentar una tabla de valores tal y como la que aparece en la imagen relativa a la tarea "Tender a y aproximarse" que se trató anteriormente en el apartado *3.4. Ejemplificación de tareas desde los errores y dificultades previstos*.



"TENDER A" Y APROXIMARSE

X	f(x)=x^2	lf(2)-f(x)l
1,9	3,61	0,39
1,99	3,9601	0,0399
1,999	3,996001	0,003999
1,9999	3,99960001	0,00039999
...	...	...
2	4	0
2,0001	4,00040001	0,00040001
2,001	4,004001	0,004001
2,01	4,0401	0,0401
2,1	4,41	0,41

5. DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA.

5.1. Contenidos específicos de la unidad didáctica.

Esta unidad didáctica va dirigida a alumnos del nivel de 1º de Bachillerato de la rama de Ciencias de la Naturaleza y la Salud. La orden que regula la ordenación y que establece el currículo del bachillerato es la *ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio.* En esta orden, publicada en BOE 147 de 18 de Junio de 2008, los contenidos de mi unidad se engloban dentro del bloque de Análisis bajo el título *"Aproximación al concepto de límite de una función en un punto. Tendencia y continuidad. Estudio de discontinuidades".* En la orden no se especifican conceptos, procedimientos ni actitudes.

En cuanto a la legislación autonómica, es la *ORDEN de 5 de agosto de 2008*, la que desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía. Sólo hace mención a 4 grandes bloques temáticos en Bachillerato:

1. La resolución de problemas.
2. Aprender de y con la Historia de las Matemáticas.
3. Introducción a los métodos y fundamentos matemáticos.
4. Modelización matemática.

Pero de nuevo tampoco se especifican conceptos, procedimientos ni actitudes.

Basándome en el análisis de contenido de la presente unidad didáctica paso a enumerar los términos, conceptos, destrezas y razonamientos, y estrategias fundamentales para el desarrollo de la unidad.

De los términos que introduje en el análisis de contenido, los que creo más relevantes son:

- Continuidad.
- Discontinuidades.
- Tender a un número.
- Límite.
- Indeterminaciones.
- Límites laterales.

Los conceptos:

- Continuidad de una función en punto.
- Función continua.
- Discontinuidad de una función en un punto.
- Discontinuidad evitable.
- Discontinuidad de salto finito.
- Límite finito de una función en un punto.
- Límites laterales.

- Indeterminación 0/0.

Las destrezas y razonamientos que intentaré que los alumnos desarrollen:

- Reconocer y describir fenómenos en los que se intuya el concepto de límite finito de una función en un punto usando términos relacionados.
- Detección de puntos de discontinuidad de una función según su representación gráfica o expresión analítica.
- Diferenciar entre valores a los que se aproxima la función en un punto y el límite en dicho punto.
- Identificación del límite de una función en un punto mediante representación tabular, gráfica o analítica.
- Justificar límites de funciones usando las propiedades de límites respecto a la suma, producto, potencia y composición de funciones ya conocidas.
- Argumentar los límites laterales de una función en un punto mediante una tabla de valores.
- Reconocer la indeterminación 0/0 en el cálculo de límites.

Y las estrategias:

- Reconocimiento de discontinuidades (esenciales o evitable) de una función en un punto.
- Resolución de problemas donde estén involucrados los conceptos de límite y continuidad.
- Construir funciones que satisfagan determinadas condiciones de continuidad.
- Aplicación de técnicas de resolución de la indeterminación 0/0 en el cálculo de límites de una función.

5.2. Secuenciación y organización de las tareas de la Unidad Didáctica. Gestión del aula.

Se desarrollarán 9 sesiones de trabajo en clase con las que se pretenden cubrir los contenidos específicos de esta unidad:

SESIÓN 1. Conocimientos previos. Continuidad de una función en un intervalo. Discontinuidades.

SESIÓN 2. Límite finito de una función en un punto.
  a. Introducción (idea intuitiva).
  b. Interpretación a partir de gráficas y tablas.

SESIÓN 3. Límite finito de una función en un punto.
  a. Definición formal.
  b. Cálculo a partir de la expresión analítica (Indeterminación 0/0)

SESIÓN 4. Límite finito de una función en un punto.
  a. Operaciones con límites.
  b. Introducción a los límites laterales.

SESIÓN 5. Límites laterales.
  a. Identificar límites laterales a partir de una gráfica o tabla de valores.
  b. Cálculo analítico.

SESIÓN 6. Relación límite finito de una función en un punto-continuidad de la función en ese punto.
  a. Aplicación en actividades de determinación de parámetros en funciones continuas definidas a trozos.

SESIÓN 7. Discontinuidades evitable y de salto finito.
  a. Esbozo de gráficas de funciones que cumplan condiciones de continuidad o discontinuidad en puntos de su dominio.

SESIÓN 8. Tareas de ejercitación y síntesis.

SESIÓN 9. Sesión de evaluación.

TAREAS:

Algunos de los tipos de tareas que voy a incluir en la unidad didáctica son:

- Tareas que tienen como fin ayudar a *conocer los aprendizajes previos* realizados por el alumno. Se realizarán al comienzo de la primera sesión con objeto de valorar conocimientos previos sobre funciones que los alumnos deben manejar para abordar la presente unidad: dominio y recorrido, imagen, intervalos de monotonía, máximos y mínimos absolutos y relativos y nociones de representación gráfica de funciones trabajadas en cursos anteriores.

- Tareas para *motivar y de relación con el entorno.* Estas tipo de tareas se trabajan también en las primeras sesiones para tratar de despertar el interés y la curiosidad de los alumnos sobre aquello que van a estudiar. En la tarea diseñada a tal efecto para la 3ª sesión ("Aquiles y la tortuga", Ver epígrafe 5.2), aparte del aspecto motivacional, se intenta que los alumnos sean conscientes del largo proceso histórico que concluyó en la definición formal del concepto de límite.
- Tareas de *elaboración y construcción de significados.* Un ejemplo de tarea de este tipo es el trabajo con el sistema de representación tabular para la idea intuitiva de límite de una función en un punto y límites laterales (Sesiones 2 y 5).
- Tareas de *descontextualización y de aplicación.* Donde el alumno tenga que modelizar fenómenos para posteriormente aplicar conceptos de la unidad y obtener conclusiones en la vida cotidiana. Un ejemplo de este tipo es la tarea de reflexión que se incluye en el análisis de instrucción de esta unidad.
- Tareas de *ejercitación.* Su papel es fundamental a lo largo de toda la unidad didáctica. Serán tareas que los alumnos tendrán que trabajar en clase y en casa para afianzar los nuevos conceptos y destrezas de cada sesión. Como por ejemplo en el caso de la detección y resolución de la indeterminación 0/0.
- Tareas de *síntesis.* Por ejemplo, las tareas relacionadas con el objetivo 11: Aplicar la relación Continuidad-Límite finito de una función en un punto para determinar parámetros en funciones definidas a trozos.

EJEMPLOS DE TAREAS SIGNIFICATIVAS:

TAREA 1 SESIÓN 1: Ver enunciado de la tarea en epígrafe 5.3.

Función de la tarea en el desarrollo de la UD: Ésta es una tarea de "conocimiento de aprendizajes previos" para la Sesión 1. El alumno debe manejar conceptos de dominio y representación de funciones habituales. Además sobre esta misma tarea se pueden trabajar intervalos de monotonía y máximos y mínimos.

TAREA 1 SESIÓN 2: "Aquiles y la tortuga". Ver enunciado de la tarea en epígrafe 5.3.

Función de la tarea en el desarrollo de la UD: Ésta es una tarea del tipo "motivación y relación con el entorno". Se usará en la unidad para la introducción intuitiva del concepto de límite y un primer acercamiento a la expresión "tender a". Además, al estar situada en un contexto histórico, intenta conseguir que el alumno tome consciencia de la importancia del concepto de límite en matemáticas y su desarrollo a lo largo de los siglos hasta llegar a la definición formal del concepto de límite.

5.3. Desarrollo de la secuencia de tareas de la UD.

Como he comentado en el epígrafe 5.2 van a ser 9 las sesiones que compongan la presente Unidad Didáctica. A continuación voy a presentar la planificación de las 8 primeras, dejando la sesión de evaluación para el Anexo I.

Aunque el desarrollo de cada una de las sesiones dependerá de las necesidades del alumnado, una metodología genérica común se ajustaría al siguiente esquema:

DISTRIBUCIÓN DE TIEMPOS	DESCRIPCIÓN
15 min.	Resolución de actividades planteadas la sesión anterior y dudas
15 min.	Introducción de nuevos contenidos (Tarea 1)
15 min.	Introducción de nuevos contenidos (Tarea 2)
15 min.	Realización de ejemplos y/o selección de tareas para comenzar en clase y terminar en casa (Tarea 3)

A ser posible se entregará a los alumnos una copia de la relación de tareas a tratar en la unidad.

SESIÓN 1. Conocimientos previos. Continuidad de una función en un intervalo. Discontinuidades.

1. **Contenidos y objetivos:**

Conceptos básicos: Concepto de función. Dominio. Máximos y mínimos relativos y absolutos. Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Representación gráfica de funciones.
Contextos y situaciones: Científico y laboral.
Sistemas de representación utilizados: Verbal, simbólico y gráfico.
Capacidades a desarrollar:

- Determinar el dominio de una función.
- Reconocer la representación gráfica de funciones elementales.
- Determinar máximos y mínimos absolutos y relativos.
- Determinar intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Distinguir si la representación gráfica de una relación entre dos conjuntos es una función o no.
- Determinar si una función es continua en un intervalo a partir de su gráfica.
- Distinguir discontinuidades a partir de la gráfica de una función.

Expectativas que orientan la planificación de la sesión:
Esta sesión tiene un doble objetivo. El primero repasar conceptos relativos a funciones dados en cursos anteriores y que serán necesarios para la comprensión de las siguientes sesiones; y el segundo, que el alumno reconozca discontinuidades y se plantee cómo se puede justificar lo que ocurre en estos puntos.

2. Relación de la sesión con las anteriores y posteriores:

Al ser la primera sesión no enlaza con sesiones anteriores pero sí con conceptos trabajados en cursos anteriores. Además se introducen las discontinuidades de forma gráfica y la necesidad de la aparición de un nuevo concepto, el de límite.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1. Duración aproximada 20 min.

<u>Intervención del profesor:</u> Recordar el concepto de función, elementos y representación gráfica y posteriormente proponer la tarea. Tras la misma se plantearán al grupo preguntas sobre intervalos de crecimiento, decrecimiento y máximos y mínimos.

Halla analíticamente el dominio de definición de las siguientes funciones y posteriormente empareja cada una con su representación gráfica:

a) $f(x) = \frac{2x^2-3}{5}$

b) $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^2+2x+1}$

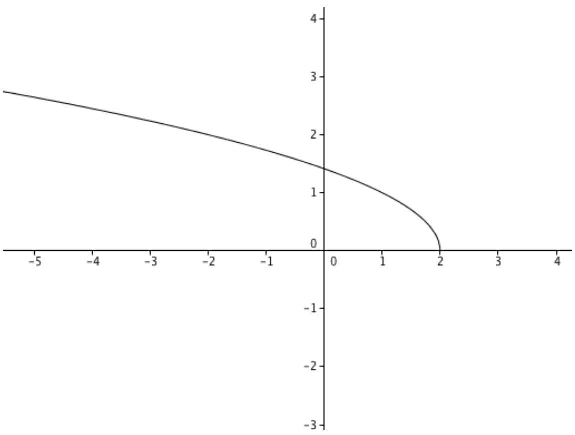
c) $f(x) = \frac{2x^2-3}{x^2+1}$

d) $f(x) = \sqrt{-x+2}$

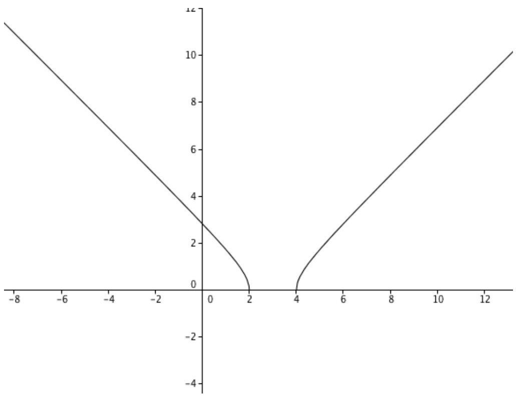
e) $f(x) = \sqrt{x^2-6x+8}$

f) $f(x) = ln\frac{x}{x^2+1}$

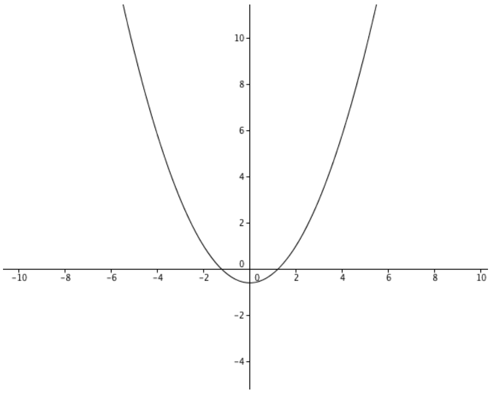
I.



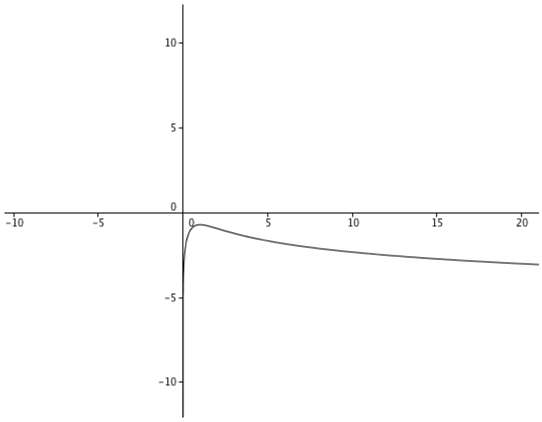
II.



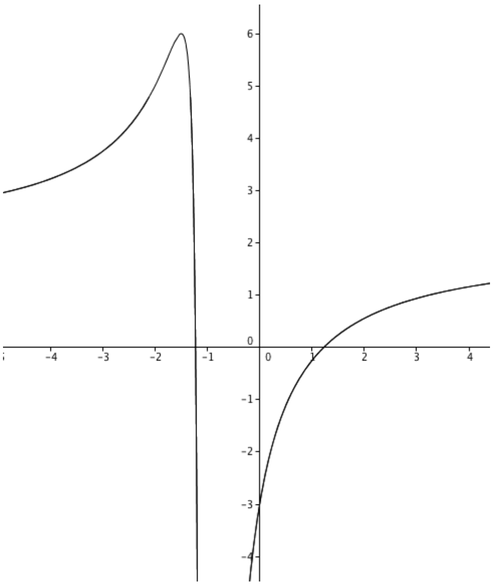
III.



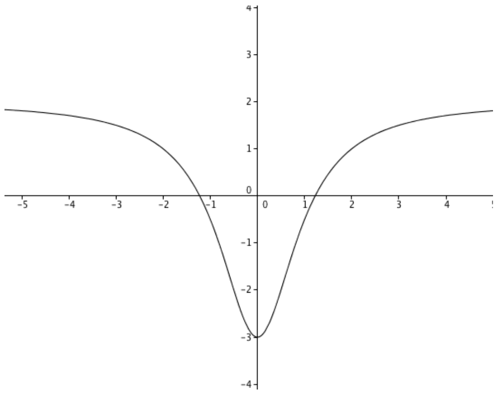
IV.



V.



VI.



Intención del profesor al realizar la tarea: Comprobar que los alumnos poseen los conocimientos previos básicos en cuanto a funciones e introducir las discontinuidades de forma gráfica.

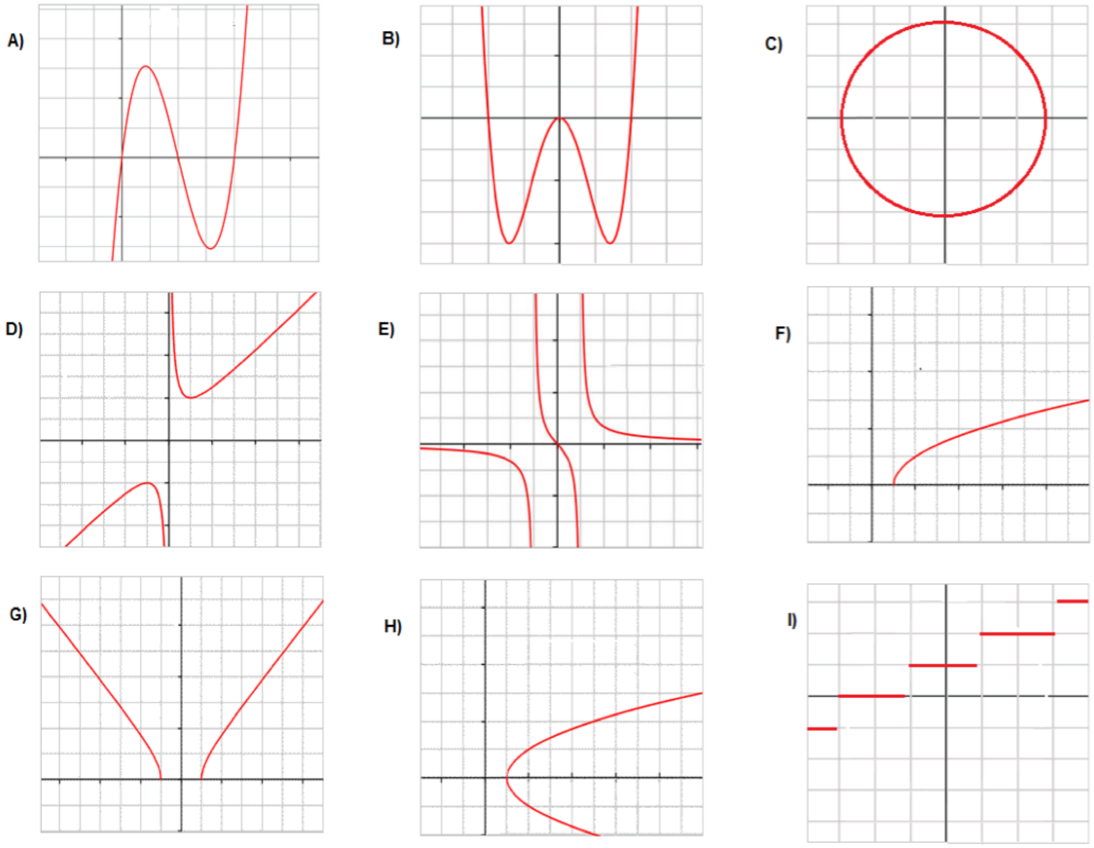
Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: El profesor deja tiempo para que los alumnos trabajen individualmente los 3 primeros apartados y posteriormente los 3 últimos.

TAREA 2. Duración aproximada 20 min.

Intervención del profesor: Incidir en el concepto de función que se recordó de forma previa a la tarea 1. Continuidad de una función en un intervalo a partir de su gráfica. Tras la corrección de la tarea el profesor hará preguntas sobre las discontinuidades que aparecen.

Justifica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones continuas en el intervalo en el que aparecen representadas.



Intención del profesor al realizar la tarea: Comprobar que los alumnos poseen los conocimientos previos básicos en cuanto a funciones e introducir las discontinuidades de forma gráfica.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: El profesor deja tiempo para que los alumnos trabajen la tarea.

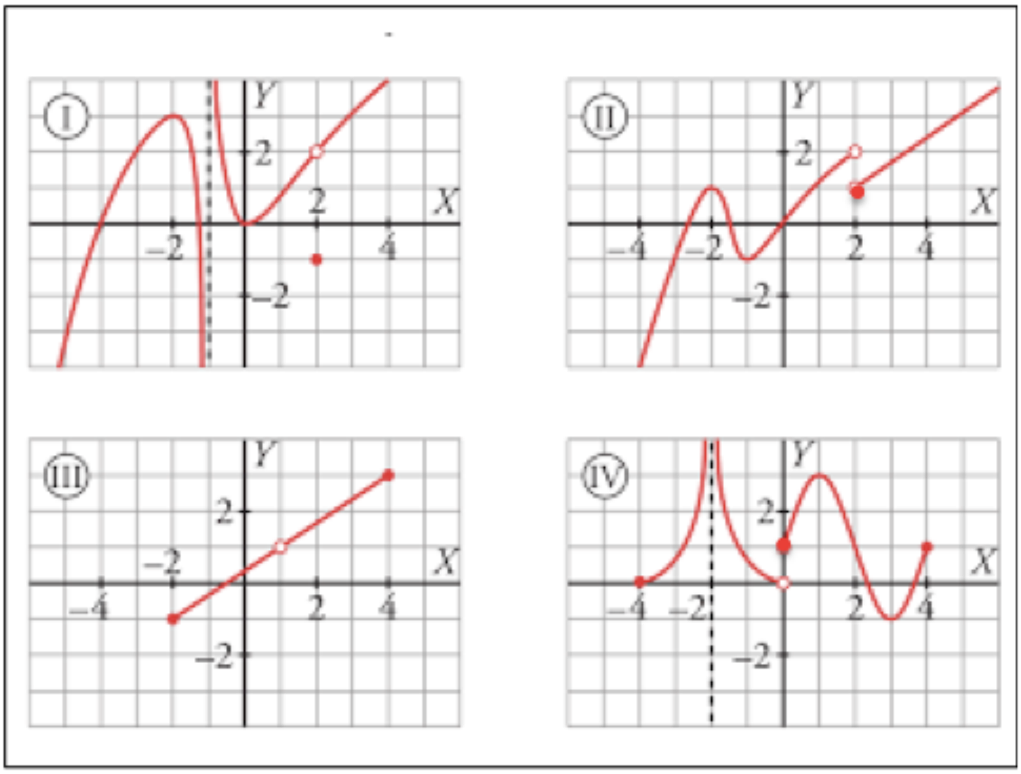
TAREA 3. Duración aproximada 20 min.

Intervención del profesor: El profesor planteará esta tarea para comenzarla en clase y terminarla en casa si fuera necesario. Mientras que los alumnos trabajan la tarea, va resolviendo dudas de forma individual. Si detecta alguna dificultad o error común a varios alumnos, tratará de abordarlo con toda la clase.

Atendiendo a las 4 gráficas de las siguientes funciones, ¿cuál es el dominio de definición en cada una de ellas?

Teniendo en cuenta los intervalos en los que las funciones están definidas, determina:

a) *Mínimos y máximos relativos.*
b) *Intervalos de crecimiento y decrecimiento.*
c) *Puntos de discontinuidad y tipo de discontinuidad.*



Intención del profesor al realizar la tarea: Ejercitar conceptos repasados en las tareas 1 y 2 relativos a funciones y la continuidad de una función en un intervalo y discontinuidades a partir de la gráfica de una función.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

SESIÓN 2. Límite finito de una función en un punto.

a. Introducción (idea intuitiva).
b. Interpretación a partir de gráficas y tablas.

1. Contenidos y objetivos:

Conceptos básicos: Idea intuitiva de límite. Términos relacionados con el concepto de límite (aproximarse, "tender a", alcanzar, rebasar).
Contextos y situaciones: Científico y laboral.
Sistemas de representación utilizados: Verbal, simbólico, gráfico y tabular.
Capacidades a desarrollar:

- Reconocer y describir fenómenos en los que se intuya el concepto de límite finito de una función en un punto usando términos relacionados.
- Diferenciar entre valores a los que se aproxima la función en el entorno de un punto y el límite en dicho punto.
- Identificación del límite de una función en un punto mediante representación tabular o gráfica.

Expectativas que orientan la planificación de la sesión:
Las expectativas que orientan la planificación de esta sesión son varias:

- Que el alumno perciba la idea intuitiva del concepto de límite y constate su importancia en las matemáticas a partir de la indagación histórica.
- Evitar que los alumnos cometan errores que han percibido investigadores en torno al concepto de límite.

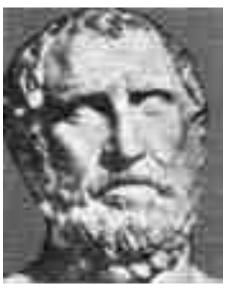
2. Relación de la sesión con las anteriores y posteriores:

En la sesión anterior se han recordado aprendizajes previos necesarios para abordar las siguientes sesiones y se ha tratado la continuidad a partir de la representación gráfica de funciones conocidas. Esta sesión trata la idea intuitiva de límite y prepara al alumno para la aparición de la definición formal del concepto de límite en la sesión 3.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: Plantea la tarea y hace una breve introducción histórica del concepto de límite, desde los matemáticos griegos hasta la definición formal del concepto de límite. Si quedara tiempo al final de la clase, podría proyectar alguno de los fragmentos de películas en los que se hace mención a Zenón y sus paradojas (Ver análisis de esta tarea en Anexo II).



Zenón de Elea (490 a.C. - 430 a.C.) fue un filósofo griego discípulo de Parménides (uno de los filósofos griegos más importantes de la época y de los más señalados en la escuela eleática) y, según varios escritores, enseñó en Atenas durante algún tiempo.

Era costumbre suya mostrar lo absurdo de algunas creencias y frecuentemente se valía de paradojas (expresión o situación que parece absurda y sin embargo es razonable), en las que viene a decir que todo movimiento es un engaño.

En una de sus paradojas, Zenón eligió al guerrero Aquiles, héroe en la guerra de Troya y famoso por sus grandes cualidades físicas. No en vano era conocido como "Aquiles el de los pies ligeros", ya que se le consideraba el más veloz de los hombres.

Una tortuga un tanto fanfarrona, retó al troyano Aquiles en una carrera de 1 km. Aquiles, confiado de su velocidad, que estimó el doble de la del animal, permitió a la tortuga partir desde la posición intermedia de la distancia total de la carrera.

a) *Sin realizar ningún cálculo, ¿crees que Aquiles alcanza a la tortuga? ¿La rebasa?*

b) *En el momento en que Aquiles llega a la posición de partida de la tortuga (Po), ¿hasta dónde ha avanzado ésta? Representa la posición de ambos en la siguiente recta.*

c) *Si llamamos a esa nueva posición de la tortuga P1, ¿dónde se encuentra ésta cuando Aquiles llega a P1? Realiza una tabla con las posiciones de Aquiles cuando la tortuga se encuentra en Po, P1… y así hasta P7.*

	Posición de la tortuga (metros)	*Posición de Aquiles (metros)*
Po	***500***	***0***
P1		***500***
P2		
P3		
P4		
P5		
P6		
P7		

d) *Crea una nueva columna con la distancia que separa a ambos en cada posición.*

	Posición de la tortuga (metros)	*Posición de Aquiles (metros)*	*Distancia entre ambos (metros)*
Po	*500*	*0*	*500*
P1		*500*	
P2			
P3			
P4			
P5			
P6			
P7			

Define con tus propias palabras qué ocurre con la distancia que separa a Aquiles y la tortuga en la meta.

e) *Busca información sobre otros matemáticos que trataran el concepto de límite a lo largo de la historia. ¿Durante cuántos siglos se ha estudiado el mismo?*

<u>Intención del profesor al realizar la tarea:</u> Que los alumnos se acerquen al concepto de límite de una manera intuitiva, entiendan la complejidad del mismo a partir de su desarrollo histórico y se familiaricen con la expresión "tender a".

<u>Material/Recursos:</u> Proyector y ordenador (opcionales).

<u>Gestión del aula/Intervención de alumnos:</u> Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo. El apartado e) se trabajará en casa.

TAREA 2. Duración aproximada 15 min.

<u>Intervención del profesor:</u> Plantea la tarea y deja tiempo para que los alumnos la vayan trabajando apartado por apartado.

Vamos a trabajar sobre la función $f(x)=x^2$.

c) *Rellena la siguiente tabla:*

x	$f(x)$
1,9	3,61
1,99	
1,999	
1,9999	
…	
2	4

iv. *¿Dirías que se va aproximando la función a 5 cuando x se acerca a 2?*

v. *¿A qué otros valores se aproxima la función cuando la variable tiende a 2?*

vi. *¿Cuál de las anteriores aproximaciones dirías que es "mejor"? Utiliza la expresión "tender a" para tratar de explicar la "mejor aproximación posible".*

d) *Rellena esta tabla y utiliza las expresiones aproximarse y tender a para definir lo que ocurre de forma análoga a lo hecho en el apartado anterior.*

x	$f(x)$
2,1	4,41
2,01	
2,001	
2,0001	
…	
2	4

<u>Intención del profesor al realizar la tarea:</u> Que los alumnos justifiquen e interpreten el valor del límite finito de una función en un punto a partir de una tabla de valores y que usen correctamente los términos aproximarse y "tender a". Realizar un primer acercamiento a los límites laterales que se verán con profundidad en la Sesión 5.

<u>Material/Recursos:</u> Ninguno específico.

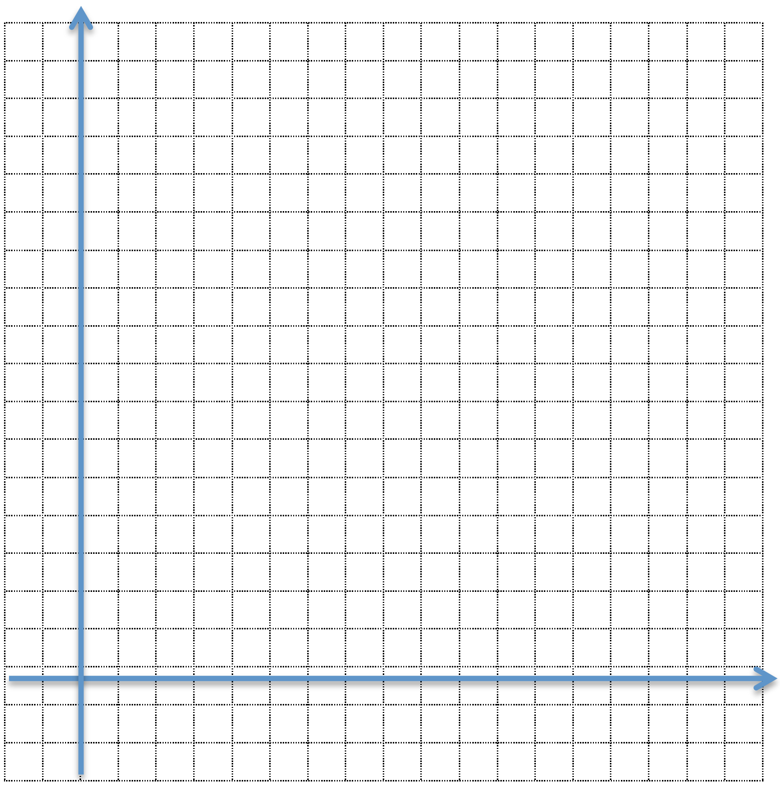
<u>Gestión del aula/Intervención de alumnos:</u> Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 3. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: Plantea la tarea y deja tiempo para que los alumnos la trabajen en clase y casa.

f) *El término límite se usa para describir lo que ocurre con las imágenes cuando los valores de la variable x se aproximan al valor x_0. Es decir* ***el valor al que tienden las imágenes cuando los originales tienden a x_0****. ¿Cuál es el límite de la función $f(x)=x^2$ cuando la x tiende a 2?*

g) *Representa la gráfica de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo [0, 3].*



NOTA: Para el eje "x" la escala sería 1 segmento de cuadrícula=0,2 unidades.

Para el eje "y" la escala sería 1 segmento de cuadrícula =0,5 unidades.

h) *Teniendo en cuenta el resultado del apartado c):*

iii. *¿Alcanza la función el valor del límite para x=2?*

iv. *¿Lo rebasa?*

i) *Identifica los máximos y mínimos de la función para ese intervalo.*

j) *Busca en un diccionario los significados de la palabra límite y diferéncialos con las connotaciones que le hemos dado a este mismo término en estas actividades.*

Intención del profesor al realizar la tarea: Evitar que los alumnos incurran en el error de comparar el límite finito de una función en un punto con un máximo relativo. Que comprueben que la función puede alcanzar el valor del límite y rebasarlo.

Material/Recursos: Ninguno específico, aunque en la puesta en común de la solución al comienzo de la Sesión 3 se podría usar ordenador para proyectar la representación gráfica de la función (apartado b)).

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo. El apartado e), junto con lo que no haya dado tiempo de esta tarea, se realizará en casa.

SESIÓN 3. Límite finito de una función en un punto.

a. Definición formal.
b. Cálculo a partir de la expresión analítica (Indeterminación 0/0)

1. Contenidos y objetivos:

Conceptos básicos: Definición formal del concepto de límite. Límite finito de una función en un punto. Indeterminación 0/0.
Contextos y situaciones: Científico y laboral.
Sistemas de representación utilizados: Verbal, simbólico, gráfico, tecnológico y tabular.
Capacidades a desarrollar:

- Explicar y ejemplificar la definición formal del concepto de límite.
- Calcular el límite finito de una función en un punto a partir de su expresión analítica.
- Identificar y resolver la indeterminación 0/0.

Expectativas que orientan la planificación de la sesión:
Con esta sesión se trabaja la definición rigurosa del concepto de límite que hasta ahora se había tratado de manera intuitiva. Se pasa al cálculo de límite finito de una función en un punto a partir de la gráfica de la función o de su expresión analítica, prestando especial atención a los casos en que aparece la indeterminación 0/0.

2. Relación de la sesión con las anteriores y posteriores:

En la sesión anterior se ha visto el concepto de límite de una forma intuitiva, preparando al alumno para la definición formal que se da en esta sesión. En la siguiente se seguirá con las actividades de cálculo de límites que se introducen en esta sesión.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, corrigiendo apartado por apartado, dando pasos partiendo de un caso particular hacia la definición formal. Se recomienda usar el applet de la web:

http://www.disfrutalasmatematicas.com/calculo/limites-formal.html

Para la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

a) *Rellena estas 2 tablas de forma análoga a las de la tarea 2 de la Sesión 2 para determinar a qué valor tiende f(x) cuando x tiende a 1.*

x	*f(x)*
0,9	*1,9*
0,99	
0,999	
0,9999	

x	*f(x)*
1,1	*2,1*
1,01	
1,001	
1,0001	

b) *En la tarea 3 de la sesión anterior llegamos a la conclusión de que el límite de la función* $g(x) = x^2$ *cuando x tiende a 2 era igual a 4. Simbólicamente esto se expresa:*

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

Expresa de esta misma forma el resultado que has obtenido en el apartado anterior.

c) *Añade estas columnas a las tablas del apartado a):*

x	*f(x)*	$\lvert x-1 \rvert$	$\lvert f(x)-2 \rvert$
0,9	*1,9*	*0,1*	*0,1*
0,99			
0,999			
0,9999			

x	*f(x)*	$\lvert x-1 \rvert$	$\lvert f(x)-2 \rvert$
1,1	*2,1*	*0,1*	*0,1*
1,01			
1,001			
1,0001			

Como vemos, cuanto más cerca está la x de 1, más cerca estará f(x) de 2, tanto si se acerca por exceso como por defecto. Es decir, usando el valor absoluto, cuanto "más pequeño" es $|x-1|$*, "más pequeño" se hace* $|f(x)-2|$.

d) *Para traducir este "más pequeño" a lenguaje matemático se consideran dos valores* δ *y* $\varepsilon > 0$ *tales que:*

$$|x-1| < \delta$$
$$|f(x)-2| < \varepsilon$$

Nos hemos ido acercando poco a poco a la definición formal del concepto de límite:

Definición. El límite de la función f cuando x se aproxima a ***a*** es igual a **L**,

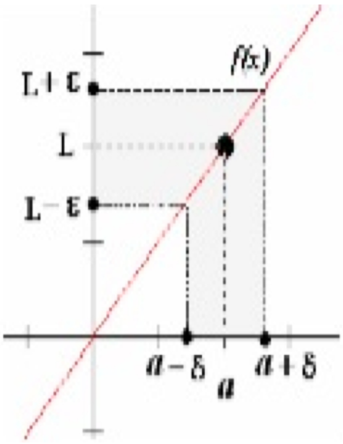
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

para todo x (en el dominio de f) que satisface la desigualdad

$$0 < |x - a| < \delta.$$



Aplica esta definición al caso particular planteado en el apartado a).

e) *Demuestra, usando la definición formal del concepto de límite, que:*

$$\lim_{x \to 3}(2x+4) = 10$$

<u>Intención del profesor al realizar la tarea:</u> Que el alumno se vaya acercando gradualmente a la definición formal del concepto de límite.

<u>Material/Recursos:</u> Ordenador y proyector para recurrir al applet de la web http://www.disfrutalasmatematicas.com/calculo/limites-formal.html.

<u>Gestión del aula/Intervención de alumnos:</u> Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 2. Duración aproximada 15 min.

<u>Intervención del profesor:</u> Plantea la tarea y deja tiempo para que los alumnos la vayan trabajando apartado por apartado. Cuando se presenta la primera indeterminación 0/0 va dando pautas para su resolución.

Calcula los siguientes límites:

a) $lim_{x\to 2}\, x^2$

b) $lim_{x\to 2}\frac{5x}{x-3}$

c) $lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

d) $lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10}$

e) $lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3+2x^2-3x}$

f) $lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+1}{x^2+2}$

g) $lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

h) $lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

i) $lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

j) $lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{x^6-x^2}$

<u>Intención del profesor al realizar la tarea:</u> Que el alumno calcule límites finitos de funciones polinómicas y racionales, tanto con polinomios como con radicales, de manera directa o resolviendo la indeterminación 0/0.

<u>Material/Recursos:</u> Ninguno específico.

<u>Gestión del aula/Intervención de alumnos:</u> Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 3. Duración aproximada 15 min.

<u>Intervención del profesor:</u> Plantea la tarea para comenzarla en clase y acabarla en casa.

i. *Aplica la definición formal del concepto de límite para demostrar:*

a) $lim_{x\to 2}(3x-2)=4$

b) $lim_{x\to 1}\frac{x+3}{2}=2$

ii. *Calcula los siguientes límites:*

a) $lim_{x\to 2}\, x^3$

b) $lim_{x\to 1}\frac{5x-1}{x-3}$

c) $lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

d) $lim_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-x^2-x+1}$

e) $lim_{x\to 1}\frac{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}{x^4-2x^3+2x^2-1}$

f) $lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

g) $lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{2-\sqrt{8-x}}$

h) $lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno practique lo trabajado durante esta tercera sesión.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo y acaban lo que les quede en casa.

SESIÓN 4. Límite finito de una función en un punto.

a. Operaciones con límites.
b. Introducción a los límites laterales.

1. Contenidos y objetivos:

Conceptos básicos: Límite finito de una función en un punto. Operaciones con límites.
Contextos y situaciones: Científico y laboral.
Sistemas de representación utilizados: Verbal, simbólico, gráfico y tabular.
Capacidades a desarrollar:

- Justificar límites de funciones usando las propiedades de límites respecto a la suma, producto, potencia y composición de funciones ya conocidas.

Expectativas que orientan la planificación de la sesión:
Que el alumno no sólo conozca las operaciones con límites sino que sea capaz de ponerlas en práctica en tareas de aplicación.

2. Relación de la sesión con las anteriores y posteriores:

En la sesión anterior, se ha tratado de una forma más rigurosa el concepto de límite finito de una función en un punto y se ha calculado a partir de la expresión analítica. En esta se introducen las operaciones con límites y sus aplicaciones, para centrarnos en la próxima sesión en los límites laterales.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, corrigiendo apartado por apartado.

En esta tarea vamos a usar las propiedades de los límites, suponiendo que existen:

$$lim_{x\to c} f(x) \ y \ lim_{x\to c} g(x):$$

Suma o diferencia	$\boldsymbol{lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = lim_{x\to c} f(x) \pm lim_{x\to c} g(x)}$***, excepto si:*** • $\boldsymbol{lim_{x\to c} f(x) = +\infty}$ ***y*** $\boldsymbol{lim_{x\to c} g(x) = -\infty}$ ***o viceversa***
Múltiplo	$\boldsymbol{\lim_{x\to c}[kf(x)] = k[\lim_{x\to c} f(x)]}$ ***, k un número real***
Producto	$\boldsymbol{lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = [lim_{x\to c} f(x)][lim_{x\to c} g(x)]}$***, excepto si:*** • $\boldsymbol{lim_{x\to c} f(x) = 0}$ ***y*** $\boldsymbol{lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty}$ ***o viceversa***
Cociente	$\boldsymbol{lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{lim_{x\to c} f(x)}{lim_{x\to c} g(x)}}$***, si*** $\boldsymbol{lim_{x\to c} g(x) \neq 0}$***, excepto si:*** • $\boldsymbol{lim_{x\to c} f(x) = lim_{x\to c} g(x) = 0}$ • $\boldsymbol{lim_{x\to c} f(x) = lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty}$
Potencia	$\boldsymbol{lim_{x\to c}[f(x)]^{g(x)} = [lim_{x\to c} f(x)]^{lim_{x\to c} g(x)}}$ ***, excepto si:*** • $\boldsymbol{lim_{x\to c} f(x) = lim_{x\to c} g(x) = 0}$ • $\boldsymbol{lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty}$ ***y*** $\boldsymbol{lim_{x\to c} g(x) = 0}$ • $\boldsymbol{lim_{x\to c} f(x) = 1}$ ***y*** $\boldsymbol{lim_{x\to c} g(x) = \pm\infty}$
Composición	***Si*** $\boldsymbol{lim_{x\to c} g(x) = L_0}$ ***y*** $\boldsymbol{lim_{x\to L_0} f(x) = L}$***, entonces*** $\boldsymbol{lim_{x\to c} f(g(x)) = L}$

Calcula, justificando las propiedades que estás usando, los siguientes límites:

a) $lim_{x\to 2}(5x^2 - 3x - 6)$

b) $lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2}$

c) $lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x-2}$

d) $\lim_{x\to 0}(x^2 + e^x)$

e) $\lim_{x\to 0}(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$

<u>Intención del profesor al realizar la tarea:</u> Que el alumno conozca las propiedades de límites y las aplique.

<u>Material/Recursos:</u> Ninguno específico.

<u>Gestión del aula/Intervención de alumnos:</u> Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 2. Duración aproximada 15 min.

<u>Intervención del profesor:</u> El profesor plantea esta actividad que se corregirá en la pizarra una vez acabada completamente.

Supongamos la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \; si \; x < 2 \\ -4 \; si \; x = 2 \\ -x + 3 \; si \; x > 2 \end{cases}$$

Responde a estas cuestiones:

a) *Representa la función en el intervalo [-3,6].*
b) *Dominio de definición.*
c) *Máximos y mínimos.*
d) *¿Cuál es la imagen de la función para x=2?*
e) *Determina mediante la construcción de 2 tablas el límite de la función en x=2 (Ver tareas 1 de la Sesión 3 o 2 de la Sesión 2).*

Intención del profesor al realizar la tarea: Repaso de conceptos que se han ido trabajando en cursos anteriores y al principio de esta unidad. Al finalizar la tarea el profesor introducirá los límites laterales de una función en un punto y la condición para que exista el límite de la función en ese punto.

Material/Recursos: Papel milimetrado para realizar la representación gráfica.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 3. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad para que los alumnos la comiencen en clase mientras que él va resolviendo dudas y observando posibles errores comunes a varios alumnos para comentarlos con toda la clase si fuera necesario.

Calcula, justificando las propiedades que estás usando, los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2}(x^3 - 2x)$
b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+2}{x-1}$
c) $\lim_{x\to 1}\sqrt[4]{\frac{1}{x+15}}$
d) $\lim_{x\to 1} 5x\ln x$
e) $\lim_{x\to 2} cos(\frac{\pi x^2}{12})$

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno practique lo que se ha trabajado en la sesión acerca de las propiedades de límites.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo y terminan la actividad en casa.

SESIÓN 5. Límites laterales.

a. Identificar límites laterales a partir de una gráfica o tabla de valores.
b. Cálculo analítico.

1. Contenidos y objetivos:

Conceptos básicos: Límites laterales. Límite finito de una función en un punto.
Contextos y situaciones: Científico y laboral.
Sistemas de representación utilizados: Verbal, simbólico, gráfico y tabular.
Capacidades a desarrollar:

- Argumentar la existencia y calcular el valor de los límites laterales de una función en un punto mediante una tabla de valores.
- Argumentar la existencia y calcular el valor de los límites laterales de una función en un punto mediante la gráfica de una función.
- Cálculo de límites laterales a partir de la expresión analítica.
- Justificar la existencia de límite finito de una función en un punto a partir de los límites laterales.

Expectativas que orientan la planificación de la sesión:
Que el alumno concrete la idea intuitiva de límite lateral que se ha ido introduciendo durante la unidad (Sesiones 2 y 4) y que relacione la existencia de límite finito de una función en un punto con los límites laterales.

2. Relación de la sesión con las anteriores y posteriores:

En la sesión anterior se ha diseñado una tarea, concretamente la número 2, en la que el profesor tiene la oportunidad de explicar la relación entre existencia de límite finito de una función en un punto y la de sus límites laterales. En la próximas sesiones necesitamos partir de esta relación ya que: en la 6ª se dará un paso más y se relacionará el concepto de límite con el de continuidad y en la 7ª se definirán las discontinuidades de salto finito y evitables de manera más rigurosa.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, dejando tiempo para trabarla y corrigiendo apartado por apartado.

Consideramos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \; si \; x < 2 \\ 4 \; si \; x > 2 \end{cases}$

a) *Represéntala y determina gráficamente el límite de la función cuando x tiende a 2 por la izquierda y por la derecha. ¿Cuál es el límite de la función cuando x tiende a 2?*

b) *Elabora dos tablas: una para ver como se comporta la función cuando la x va tomando valores cada vez "más próximos" a 2 por defecto, y otra para* *ver como se comporta la función cuando la x va tomando valores cada vez "más próximos" a 2 por exceso. ¿Coinciden los límites laterales y el límite de la función cuando x tiende a 2 con lo obtenido en el apartado anterior?*

c) *De forma simbólica los límites laterales de una función en un punto c se expresan:*

$$lim_{x\to c^-} f(x) \ y \ lim_{x\to c^+} f(x)$$

Calcula de forma analítica los límites laterales de la función cuando x tiende a 2 usando la notación correcta.

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno concrete el concepto de límite lateral que se había ido introduciendo durante la unidad.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 2. Duración aproximada 10 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, dejando tiempo para trabajarla y corrigiendo apartado por apartado.

A partir de la función $f(x) = \begin{cases} 4 \ si \ x < 3 \\ 2x+1 \ si \ x > 3 \end{cases}$

a) *Halla de forma analítica:*

$lim_{x\to 3^-} f(x) \ y \ lim_{x\to 3^+} f(x)$

b) *¿Existe* $lim_{x\to 3} f(x)$*?*

c) *Representa la función.*

d) *¿Cambiaría alguna respuesta en los dos primeros apartados si sustituimos* $x < 3$ *por* $x \leq 3$ *en la definición de f(x)?*

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno practique lo introducido en la tarea anterior y compruebe que límite es lo que ocurre en el entorno del punto y no en el punto.

Material/Recursos: Ninguno específico.

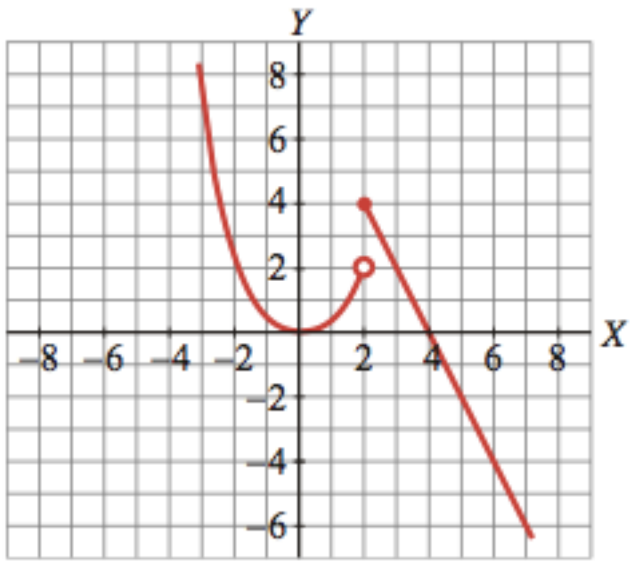
Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 3. Duración aproximada 10 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, dejando tiempo para trabajarla y corrigiendo apartado por apartado.

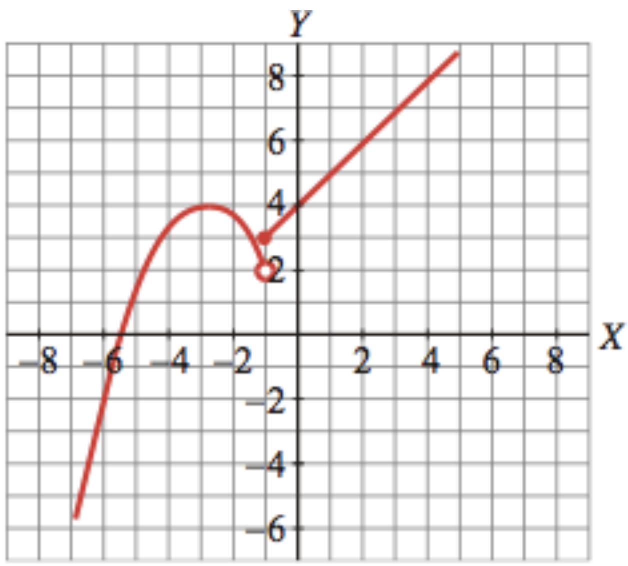
Resuelve los siguientes apartados:

a) Para la gráfica:



Calcula: $lim_{x\to 2^-} f(x)$ $lim_{x\to 2^+} f(x)$ $lim_{x\to 2} f(x)$ $lim_{x\to 0} f(x)$

b) Para la gráfica:



Calcula: $lim_{x\to -1^-} f(x)$ $lim_{x\to -1^+} f(x)$ $lim_{x\to -1} f(x)$ $lim_{x\to 0} f(x)$

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno practique lo trabajado en tareas anteriores.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 4. Duración aproximada 10 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, dejando tiempo para trabajarla en clase y terminarla en casa.

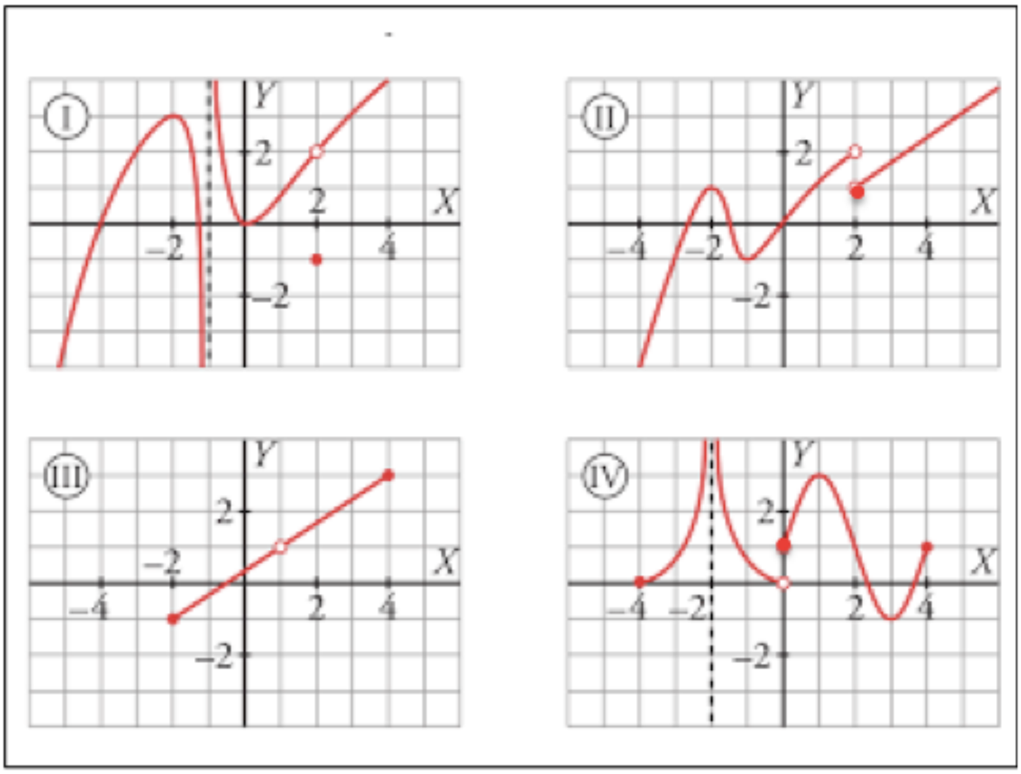
a) *Para* $f(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x < -1 \\ x^2 \; si - 1 \leq x \leq 1 \\ 2 \; si \; x \geq 1 \end{cases}$ *resuelve:*

i. *Límite laterales en x=1 y x=-1.*

ii. *Límites de la función en dichos puntos.*

iii. *Representa la función.*

b) *Determina a partir de las gráficas estos límites:*



i. *Para I:* $lim_{x \to 2^-} f(x)$ $lim_{x \to 2^+} f(x)$ $lim_{x \to 2} f(x)$ $lim_{x \to 0} f(x)$

ii. *Para II:* $lim_{x \to 2^-} f(x)$ $lim_{x \to 2^+} f(x)$ $lim_{x \to 2} f(x)$ $lim_{x \to -4} f(x)$

iii. *Para III:* $lim_{x \to 1^-} f(x)$ $lim_{x \to 1^+} f(x)$ $lim_{x \to 1} f(x)$ $lim_{x \to -2} f(x)$

iv. *Para IV:* $lim_{x \to 0^-} f(x)$ $lim_{x \to 0^+} f(x)$ $lim_{x \to 0} f(x)$ $lim_{x \to 3} f(x)$

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno ejercite los contenidos trabajados en la sesión.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo y acaban la tarea en casa.

SESIÓN 6. Relación límite finito de una función en un punto-continuidad de la función en ese punto.

a. Aplicación en actividades de determinación de parámetros en funciones continuas definidas a trozos.

1. Contenidos y objetivos:

Conceptos básicos: Límites laterales. Límite finito de una función en un punto. Continuidad de una función en un punto.
Contextos y situaciones: Científico y laboral.
Sistemas de representación utilizados: Verbal y simbólico.
Capacidades a desarrollar:

- Establecer analíticamente cuándo una función es continua en un punto.
- Resolución de problemas donde estén involucrados los conceptos de límite y continuidad.

Expectativas que orientan la planificación de la sesión:
Que el alumno sea capaz de establecer la relación entre el límite finito de una función en un punto y la continuidad en ese mismo punto y sea capaz de ponerla en práctica en problemas de aplicación.

2. Relación de la sesión con las anteriores y posteriores:

En la sesión anterior, se ha impuesto la condición necesaria entre los límites laterales de un función en un punto para que exista límite de la función en dicho punto. En ésta se establecerá relación entre límite de la función en el punto y continuidad en dicho punto, con lo cual se puede establecer una tercera relación entre los límites laterales de una función en un punto y la continuidad en dicho punto. Además, en la próxima sesión se trabajará con puntos donde no existe continuidad, concretamente con las discontinuidades de salto finito y evitable.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, dejando tiempo para trabarla y va corrigiendo apartado por apartado.

a) *Se dice que una función es continua en un punto x=c si se cumplen estas 3 condiciones:*

   I. *Tiene límite finito cuando x tiende a c:* $lim_{x \to c} f(x) = L$

   II. *Está definida en x=c:* $\exists\, f(c)$

   III. *El límite de la función en el punto coincide con la imagen de la función en dicho punto:* $lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

   Observa que la igualdad final resume las 3 condiciones puesto que si se da igualdad es porque existen los 2 miembros de ésta.

   Resume estas 3 condiciones en otra, de forma que aparezcan en la expresión los límites laterales de la función en el punto.

b) *Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:*

   i. $f(x) = \begin{cases} x+1 \; si \; x < 2 \\ 2x-1 \; si \; x \geq 2 \end{cases}$

   ii. $f(x) = \begin{cases} x^2-1 \; si \; x \leq 0 \\ 2x-3 \; si \; x > 0 \end{cases}$

   iii. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \; si \; x < 1 \\ \sqrt{x+1} \; si \; x \geq 1 \end{cases}$

   iv. $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^x+1} \; si \; x \leq 0 \\ x^2+1 \; si \; x > 0 \end{cases}$

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno imponga la condición necesaria para que la función sea continua en el punto.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 2. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, dejando tiempo para trabarla y va corrigiendo apartado por apartado.

Calcula el valor de a para que la función sea:

a) *Continua para todo* $\mathbb{R}$*:*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 \; si \; x \leq 1 \\ 3-ax^2 \; si \; x > 1 \end{cases}$$

b) *Continua en* $[0,+\infty)$*:*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax} \;\; si \; 0 \leq x \leq 8 \\ \dfrac{x^2-32}{x-4} \; si \; x > 8 \end{cases}$$

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno ponga en práctica lo trabajado en esta sesión para resolver problemas con parámetros.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 3. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, dejando tiempo para trabajarla en clase y terminarla en casa.

a) *Dada la función f(x), determina el valor de a para que la función sea continua en x=3.*

$$f(x) = \begin{cases} a \;\; si \; x = 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x-3} \; si \; x \neq 3 \end{cases}$$

b) *Dada la función f(x), determina los valores de a y b para que la función sea continua.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \; si \; x < 0 \\ ax+b \; si \; 0 \leq x < 1 \\ 2 \; si \; x \geq 1 \end{cases}$$

c) *Dada la función f(x), determina el valor de a para que la función sea continua.*

$$f(x) = \begin{cases} -1 \;\; si\ x = 0 \\ \dfrac{ax^4 - 3x^3}{7x^5 + 3x^3} \;\; si\ x \neq 0 \end{cases}$$

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno ponga en práctica lo trabajado en esta sesión y en sesiones anteriores (indeterminación 0/0) para resolver problemas con parámetros.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo y acaban la tarea en casa.

SESIÓN 7. Discontinuidades evitable y de salto finito.

a. Esbozo de gráficas de funciones que cumplan condiciones de continuidad o discontinuidad en puntos de su dominio.

1. Contenidos y objetivos:

Conceptos básicos: Continuidad de una función en un punto. Discontinuidad evitable. Discontinuidad de salto finito.
Contextos y situaciones: Científico y laboral. Pública.
Sistemas de representación utilizados: Verbal, gráfico y simbólico.
Capacidades a desarrollar:

- Clasificar discontinuidades evitables y de salto finito de una función dada.
- Construir funciones que satisfagan determinadas condiciones de continuidad.

Expectativas que orientan la planificación de la sesión:
Que el alumno sea capaz de diferenciar las diferentes discontinuidades que pueden aparecer cuando se trabaja con límite finito de una función en un punto y de construir funciones con condiciones de continuidad y discontinuidad.

2. Relación de la sesión con las anteriores y posteriores:

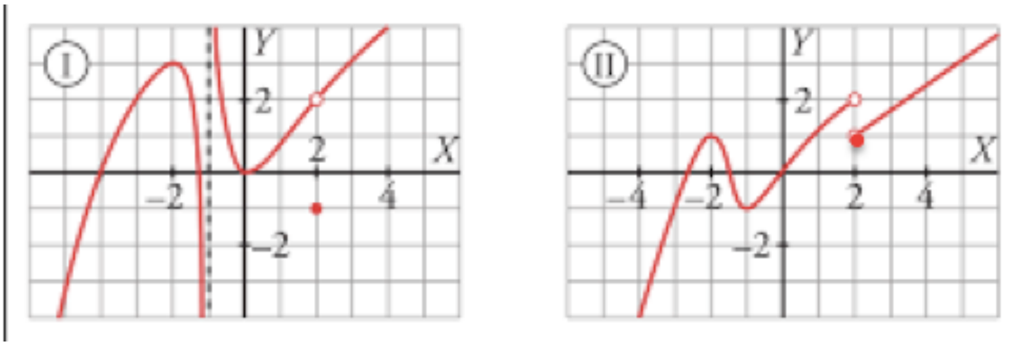
En la sesión anterior, se ha trabajado la relación entre el límite finito de una función en un punto y la continuidad de la función en ese mismo punto. Ahora veremos 2 posibles discontinuidades que aparecen cuando no hay continuidad en un punto, siempre que trabajemos con límite finito de una función en un punto. La siguiente sesión será de resolución de tareas de los contenidos trabajados en estas 7 sesiones.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, tras haber introducido los nuevos conceptos, va dejando tiempo para trabajarla y va corrigiendo apartado por apartado.

A continuación presentamos 2 gráficas de funciones que presentan una discontinuidad de salto finito y una evitable respectivamente:



a) *¿Qué gráfica presenta cada una de las discontinuidades y en qué punto de su dominio?*

b) *Teniendo en cuenta los límites que para estas 2 gráficas hallaste en la tarea 4 de la sesión 5, ¿qué condiciones, tanto de límites como de imagen de la función en el punto, se tienen que dar para que existan cada uno de los 2 tipos de discontinuidades?*

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno trabaje con la discontinuidad de salto finito y la evitable y que sea capaz de determinar las condiciones tanto de límites como de imagen de la función se tienen que dar en el punto.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 2. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, dejando tiempo para trabarla y va corrigiendo apartado por apartado.

Esboza la gráfica de una función que cumpla los siguientes requisitos:

- *Dominio*= $[-5,5]-\{-3\}$
- $lim_{x\to -3} f(x)$=*5*
- *En x=-1 presenta una discontinuidad de salto finito, tal que* $lim_{x\to -1^-} f(x)$=$lim_{x\to 1^+} f(x)+4$
- *La gráfica de la función pasa por el origen de coordenadas.*
- *En x=3 la función presenta una discontinuidad evitable tal que* $lim_{x\to 3^-} f(x)$=$lim_{x\to 3^+} f(x)$=*5*

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno aplique aprendizajes previos de otras sesiones de esta unidad y nuevos conceptos vistos en esta sesión para esbozar gráficas de funciones con determinadas condiciones.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 3. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, dejando tiempo para trabarla en clase y terminarla en casa.

En un aparcamiento público A cobran 3 euros por la primera hora o fracción y 2 por cada hora o fracción siguiente, hasta llegar a un máximo de 13 euros por un día.

d. *Representa gráficamente la función que relaciona el precio de estacionar el coche con el tiempo que permanece en el parking A. Expresa esta función de forma analítica.*

e. *Clasifica los puntos de discontinuidad de esta función y argumenta su significado para alguien que deje su coche en el parking A.*

f. *Si en otro aparcamiento público B la función que relaciona coste con tiempo de aparcamiento es f(x)=2+2x, estudia, calculando los límites adecuados en cada caso, qué parking sería más rentable si:*

- *Vamos a recoger la entrada de un concierto a la tienda de discos y no tardaremos más de una hora.*
- *Vamos a ver el partido Granada CF-FC Barcelona al Nuevo Los Cármenes.*
- *Vamos a hacer las compras de Navidad. Tenemos pensado dejar el coche en el parking por la mañana, irnos de compras, comer, terminar las compras por la tarde y recogerlo al anochecer.*

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno sea capaz de modelizar un fenómeno, usar las destrezas matemáticas estudiadas en la sesión, interpretar los resultados y extraer conclusiones de forma crítica con respecto a esos resultados.

Material/Recursos: Ninguno específico.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo en clase y terminan la tarea en casa.

Tareas de ejercitación y síntesis.

1. Contenidos y objetivos:

Conceptos básicos: Repaso de los contenidos vistos en las sesiones anteriores.
Contextos y situaciones: Científico y laboral.
Sistemas de representación utilizados: Verbal, gráfico, tecnológico y simbólico.
Capacidades a desarrollar:

- Repaso de las capacidades trabajadas en las sesiones anteriores.

Expectativas que orientan la planificación de la sesión:
Que el alumno realice tareas de ejercitación y síntesis previas a la sesión de evaluación.

2. Relación de la sesión con las anteriores y posteriores:

Esta es una sesión que trata de repasar mediante la realización de tareas el mayor número posible de contenidos tratados en las sesiones anteriores de cara a la siguiente sesión que es la evaluación.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, va dejando tiempo para trabarla y va corrigiendo los apartados donde los alumnos presenten dudas.

Calcula y representa las funciones:

a) $lim_{x\to 3} f(x),\ si\ f(x) = \begin{cases} x-1\ si\ x<3 \\ 4\ si\ x=3 \\ 5-x\ si\ x>3 \end{cases}$

b) $lim_{x\to 2} f(x),\ si\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4x+4}{x-2}\ si\ x\neq 2 \\ 3\ si\ x=2 \end{cases}$

c) *Clasifica las discontinuidades.*

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno ponga en práctica destrezas trabajadas en las últimas sesiones.

Material/Recursos: Papel milimetrado, aunque no es imprescindible.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 2. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, va dejando tiempo para trabarla y va corrigiendo los apartados donde los alumnos presenten dudas.

Calcula y justifica el valor de a para que las siguientes funciones sean continuas en x=1.

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 \; si \; x \leq 1 \\ 4 - ax^2 \; si \; x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} \; si \; x \neq 1 \\ a \; si \; x = 1 \end{cases}$

v. *Para éste último apartado, usa el applet que encontrarás en la web: http://tube.geogebra.org/student/m27526 y representa la función:*

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

vi. *Explica que sucede con la imagen de la función en x=1 y compáralo con el resultado del apartado b).*

vii. *Da la expresión de una función cuya gráfica sea la recta y= x+2 pero no esté definida en x=2.*

A partir de esta última expresión, crea una función definida a trozos que salve la discontinuidad, de forma análoga al enunciado del apartado b).

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno trabaje las destrezas introducidas en la sesión 6 (relación continuidad-límite finito de la función en un punto) y las de la sesión 4 (resolución de indeterminación 0/0) de forma conjunta.

Material/Recursos: Ordenador y proyector.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

TAREA 3. Duración aproximada 15 min.

Intervención del profesor: El profesor plantea la actividad, va dejando tiempo para trabajarla y va corrigiendo los apartados donde los alumnos presenten dudas.
Esboza la gráfica de una función con las siguientes características:

g) *En el punto x=6 existe una discontinuidad de salto finito de magnitud 4 unidades siendo* $lim_{x \to 6^+} f(x) = 8$

h) $f(0) = f(10) = 0$

i) *En el punto x=8 la función no es continua, siendo:*

$$\lim_{x \to 8^-} f(x) = \lim_{x \to 8^+} f(x) = 4$$

j) *En el punto x=4:*

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 6 \qquad \lim_{x \to 4^+} f(x) = 6 \qquad f(4) = 2$$

k) *La función está definida en el intervalo [0, 10].*

$$f(2) = f(6) = 4$$

Intención del profesor al realizar la tarea: Que el alumno organice toda la información que se le da y esboce la gráfica de la función con estas condiciones basadas en contenidos de sesiones anteriores.

Material/Recursos: Papel milimetrado, aunque no es imprescindible.

Gestión del aula/Intervención de alumnos: Los alumnos trabajan de forma individual permitiendo el diálogo entre compañeros en un ambiente de trabajo.

6. EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES DE LA UD

Criterios de evaluación

Al finalizar la presente unidad didáctica se espera que el alumno:

CE01. Distinga si una función es continua en un intervalo a partir de su gráfica.

CE02. Distinga diferentes tipos de discontinuidades a partir de la gráfica de una función.

CE03. Reconozca y describa fenómenos en los que se intuya el concepto de límite finito en un punto usando términos relacionados.

CE04. Justifique e interprete el concepto de límite finito en un punto a partir de una tabla de valores o una gráfica.

CE05. Explique y ejemplifique la definición formal del concepto de límite finito de una función en un punto.

CE06. Calcule el límite finito de una función en un punto cuando la función venga dada por su representación gráfica o simbólica.

CE07. Conozca y use las operaciones con límites (suma, producto, cociente, potencia y raíz), para calcular otros límites.

CE08. Identifique los límites laterales a partir de una tabla de valores o una gráfica.

CE09. Establezca analíticamente cuándo una función es continua en un punto y lo aplique para determinar parámetros en funciones definidas a trozos.

CE010. Clasifique discontinuidades evitable y de salto finito en una función dada.

CE011. Esboce la gráfica de una función que cumpla condiciones de continuidad o discontinuidad en determinados puntos de su dominio.

Instrumentos de evaluación

- Comportamiento: se valorará de forma positiva el respeto hacia los compañeros y hacia el profesor así como la predisposición a ayudar al compañero en las tareas propuestas para ser realizadas en clase.
- Participación en clase: ya sea presentándose voluntario a las correcciones en la pizarra o planteando dudas que denoten que se han trabajado las tareas propuestas.

- Cuaderno de clase: se tendrán en cuenta la claridad y la calidad en cuanto a la toma de apuntes.
- Tareas diarias: demostrar que se han trabajado las tareas que se van proponiendo en cada una de las sesiones.
- Prueba escrita: La calificación de la prueba que tendrá lugar en la sesión 9 será el instrumento de evaluación de mayor peso en el global.

<u>Ponderación de los instrumentos de evaluación:</u>

- Prueba escrita: 90%.
- Comportamiento, participación, cuaderno y tareas: hasta un 10%.

En el anexo I de la presente Unidad Didáctica adjunto un modelo de evaluación de aprendizajes.

7. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Durante la presente Unidad Didáctica he propuesto tareas que tratan de atender a los diferentes ritmos de aprendizaje de los alumnos. A pesar de esto, se dispondrá de:

- Relación de tareas de refuerzo, para que aquellos alumnos que tienen dificultades de aprendizaje puedan superar la evaluación.
- Relación de tareas de ampliación, para aquellos alumnos cuyo ritmo de aprendizaje les permite profundizar en los contenidos y ampliar sus conocimientos sobre la Unidad Didáctica.

A continuación propongo dos ejemplos de tareas para esta unidad, una de refuerzo y otra de ampliación.

TAREA DE REFUERZO

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1}(3x^2 - 5x + 7)$

b) $\lim_{x\to 0}(-25x^2 + 47x + 5)$

c) $\lim_{x\to 2}(x^3 + x^2 + 6)$

d) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x+1}$

e) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}$

f) $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1}$

g) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x-4}$

h) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x-4}$

i) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}$

TAREA DE AMPLIACIÓN

Trabaja con el applet que encontrarás en el siguiente link:

http://www.geogebratube.org/student/m14701

Determina el dominio de f(x) y rellena la siguiente tabla:

c	$\lim_{x\to c^-} f(x)$	$\lim_{x\to c^+} f(x)$	$\lim_{x\to c} f(x)$	f(c)

8. BIBLIOGRAFÍA

LIBROS

COLERA, J.; GARCÍA, M.; OLIVEIRA M.J. (2002). *Matemáticas I*, Editorial Anaya.

ABELLANAS, L.; MARTÍNEZ-MEDIANO, J.M.; MARTÍNEZ, C. (1996). *Matemáticas I*, Editorial Mc Graw Hill.

ARTÍCULOS

SIERRA, M.; GONZÁLEZ, M.T.; LÓPEZ, C (1997): *Aproximación a las concepciones de los alumnos de COU sobre el límite funcional.* Actas del IV Congreso Regional (Castellano-Leonés) de Educación Matemática. Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas, 181-187. Valladolid.

SIERRA, M.; GONZÁLEZ, M.T.; LÓPEZ, C. (1996): *Análisis de los conceptos del límite y continuidad en los libros de texto de Bachillerato*. Comunicación breve ICME, 8. Sevilla: ICME 8, 268.

J. L. FERRANTE, J. (2009): *Una introducción al concepto de limite (dos mil años en un renglón)*. Facultad Regional General Pacheco. Universidad Tecnológica Nacional de Buenos Aires.

BLÁZQUEZ, S. Y ORTEGA, T. (2002): *Nueva definición de límite funcional.* UNO. Vol. 30, pp. 67-82. Graó. ISSN: 1133-9853. Barcelona.

FERNÁNDEZ-PLAZA, J.A.; RUIZ-HIDALGO, J.F.; RICO, L.; CASTRO, E. (2013): *Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto*. "PNA" , vol.7, 117-130.

SEGOVIA, I.; RICO; L. (2001). *Unidades didácticas. Organizadores del currículo*. En E. CASTRO (Edt.) Didáctica de la matemática en la Educación Primaria, pp. 83-103. Editorial Síntesis. Madrid.

ÓRDENES

ORDEN ESD/1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato y ORDEN de 5 de agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía.

OTROS TFM DE LA UGR

FERNÁNDEZ PLAZA, J.A. (2010). *Unidad didáctica: Límite y continuidad de funciones.* Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Esp: Matemáticas). Universidad de Granada, curso 2009-2010.

RODRÍGUEZ BETHENCOURT, N. C. (2012). *Unidad didáctica: Funciones*. Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Esp: Matemáticas). Universidad de Granada, curso 2011-2012.

REFERENCIAS WEB

www.aulademate.com

www.amolasmates.es

www.vitutor.com

http://recursostic.educacion.es

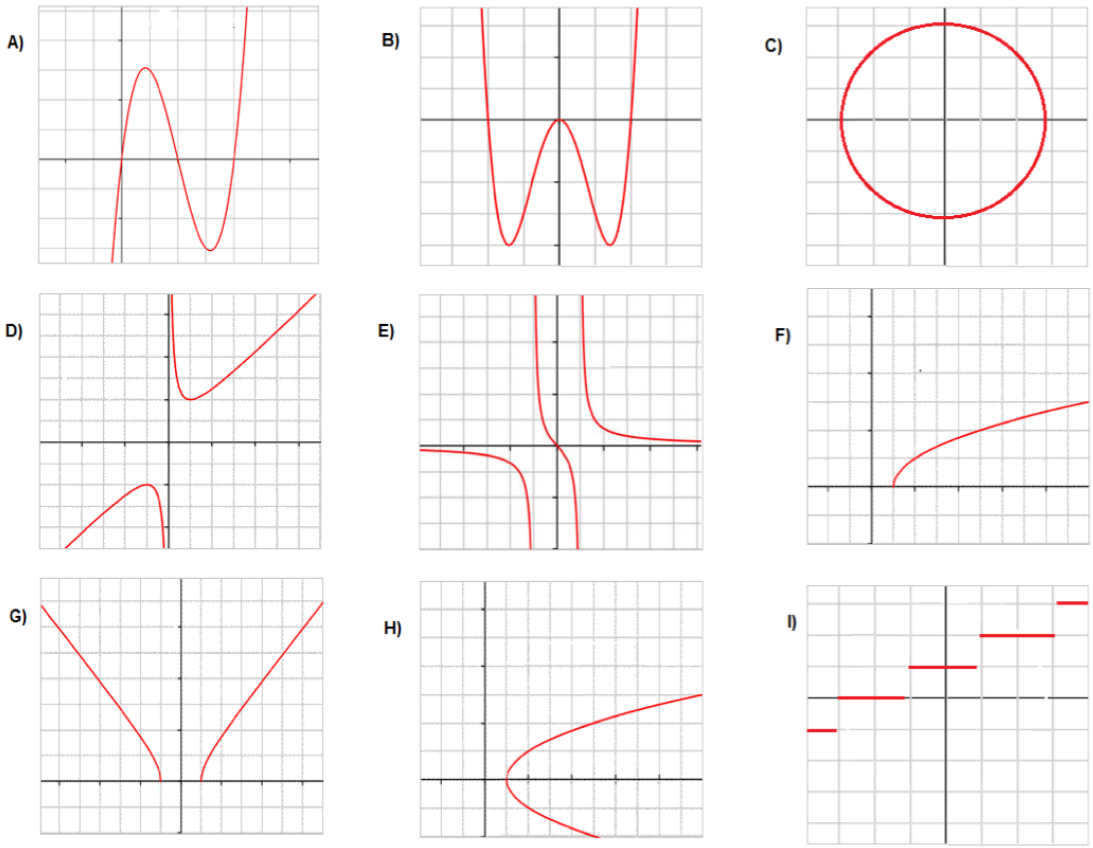
ANEXOS

ANEXO I. MODELO DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Evaluación inicial

En la sesión 1 de la presente unidad didáctica se han planteado tareas para que los alumnos recuerden los aprendizajes previos necesarios para abordar las siguientes sesiones. Una tarea de evaluación inicial sería la siguiente (Sesión 1 Tarea 2):

Justifica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones continuas en el intervalo en el que aparecen representadas.



Evaluación formativa:

Tras estas tareas de evaluación inicial, las siguientes sesiones se centran en tareas mediantes las cuales el profesor puede ir comprobando en qué medida se van cumpliendo los objetivos y se van desarrollando las competencias previstas. Un ejemplo de tarea útil para la evaluación formativa sería la siguiente (Sesión 6 Tarea 3):

d) *Dada la función f(x), determina el valor de a para que la función sea continua en x=3.*

$$f(x) = \begin{cases} a \ \ si \ x = 3 \\ \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \ \ si \ x \neq 3 \end{cases}$$

e) *Dada la función f(x), determina los valores de a y b para que la función sea continua.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ si \ x < 0 \\ ax + b \ si \ 0 \leq x < 1 \\ 2 \ si \ x \geq 1 \end{cases}$$

f) *Dada la función f(x), determina el valor de a para que la función sea continua.*

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ \ si \ x = 0 \\ \dfrac{ax^4 - 3x^3}{7x^5 + 3x^3} \ si \ x \neq 0 \end{cases}$$

Con esta tarea se puede valorar si el alumno ha desarrollado las destrezas trabajadas en sesiones anteriores, como la resolución de indeterminación 0/0.

Evaluación sumativa:

La Sesión 9 consistirá en una prueba escrita que permitirá valorar los aprendizajes del alumno en cuanto a la unidad, de forma que se pueda calificar con una nota el proceso de enseñanza-aprendizaje. Eso sí, teniendo en cuenta las ponderaciones que se han abordado previamente en este mismo anexo. A continuación presento un ejemplo de evaluación sumativa:

1. *[2 puntos] Representa la siguiente función y razona si es o no continua en los puntos que se indican:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ si \ x < 2 \\ x + 3 \ si \ x \geq 2 \end{cases} \quad \textit{en 0, 2 y 3}$$

Si hubiese alguna discontinuidad, especifica de qué tipo de discontinuidad se trata.

2. *[2 puntos] Calcula los valores de a y b para que la siguiente función sea continua:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + 1} \ si \ x < 0 \\ ax + b \ si \ 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 \ si \ x > 3 \end{cases}$$

3. *[2 puntos] Calcula los siguientes límites:*

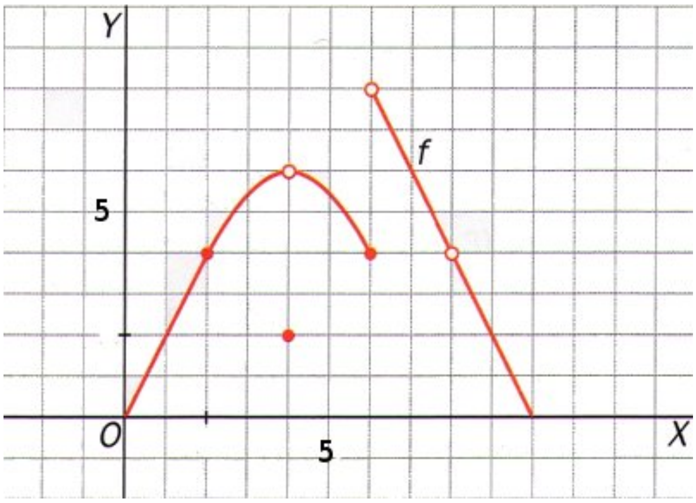
a) $lim_{x \to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

b) $lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

c) $lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

d) $lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

4. *[2 puntos] Dada la gráfica de la función f(x), determina y <u>justifica</u>:*



a) $lim_{x\to 2} f(x)$

b) $lim_{x\to 0^-} f(x)$

c) $lim_{x\to 0^+} f(x)$

d) $lim_{x\to 4} f(x)$

e) *f(4)*

f) *f(8)*

g) $lim_{x\to 6^-} f(x)$

h) $lim_{x\to 6^+} f(x)$

5. *[2 puntos] Una empresa se dedica a realizar montajes en cadena y detecta que el número de montajes realizados por un trabajador que lleva dos semanas en la empresa depende de los días que lleva trabajando según la función* $M(t) = \frac{30t}{t+4}$

a) *¿Cuántos montajes realizó el primer día? ¿Cuántos realizará el día vigésimo?*

b) *En el contrato figura una clausula mediante la cual, aproximadamente a los 30 días de experiencia, el trabajador debe hacer 30 montajes al día o será despedido. ¿Tiene futuro el trabajador en la empresa?*

c) *Representa la función para esos primeros 30 días de entrenamiento.*

ANEXO II. ANÁLISIS DE UNA TAREA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA MEDIANTE LOS INDICADORES USUALES.

Zenón de Elea (490 a.C. - 430 a.C.) fue un filósofo griego discípulo de Parménides (uno de los filósofos griegos más importantes de la época y de los más señalados en la escuela eleática) y, según varios escritores, enseñó en Atenas durante algún tiempo.

Era costumbre suya mostrar lo absurdo de algunas creencias y frecuentemente se valía de paradojas (expresión o situación que parece absurda y sin embargo es razonable), en las que viene a decir que todo movimiento es un engaño.

En una de sus paradojas, Zenón eligió al guerrero Aquiles, héroe en la guerra de Troya y famoso por sus grandes cualidades físicas. No en vano era conocido como "Aquiles el de los pies ligeros", ya que se le consideraba el más veloz de los hombres.

Una tortuga un tanto fanfarrona, retó al troyano Aquiles en una carrera de 1 km. Aquiles, confiado de su velocidad, que estimó el doble de la del animal, permitió a la tortuga partir desde la posición intermedia de la distancia total de la carrera.

a) *Sin realizar ningún cálculo, ¿crees que Aquiles alcanza a la tortuga? ¿La rebasa?*

b) *En el momento en que Aquiles llega a la posición de partida de la tortuga (Po), ¿hasta dónde ha avanzado ésta? Representa la posición de ambos en la siguiente recta.*

c) *Si llamamos a esa nueva posición de la tortuga P1, ¿dónde se encuentra ésta cuando Aquiles llega a P1? Realiza una tabla con las posiciones de Aquiles cuando la tortuga se encuentra en Po, P1… y así hasta P7.*

	Posición de la tortuga (metros)	*Posición de Aquiles (metros)*
Po	*500*	*0*
P1		*500*
P2		
P3		
P4		
P5		
P6		
P7		

d) Crea una nueva columna con la distancia que separa a ambos en cada posición.

	Posición de la tortuga (metros)	*Posición de Aquiles (metros)*	*Distancia entre ambos (metros)*
Po	*500*	*0*	*500*
P1		*500*	
P2			
P3			
P4			
P5			
P6			
P7			

Define con tus propias palabras qué ocurre con la distancia que separa a Aquiles y la tortuga en la meta.

e) Busca información sobre otros matemáticos que trataran el concepto de límite a lo largo de la historia. ¿Durante cuántos siglos se ha estudiado el mismo?

Objetivos	O3. Reconocer y describir fenómenos en los que se intuya el concepto de límite finito de una función en un punto usando términos relacionados.
Contenidos	Límite finito de una función en un punto (idea intuitiva) (C)
Sistemas de representación	Verbal, tabular y gráfico.
Situación/Contexto	Científico-histórico.
Competencias	RA, M, RP, C, R y HM.
Complejidad	Reproducción-Conexión.
Comentarios	Si hubiese tiempo se podrían exponer los videos de estos enlaces, ambos tratan paradojas de Zenón en el cine: http://www.youtube.com/watch?v=5UwSjC5rab0 http://www.youtube.com/watch?v=DhksUYuMqQU