# UNIDAD DIDÁCTICA:

# LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. CONTINUIDAD

*Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas*

*Especialidad de Matemáticas*

*UNIVERSIDAD DE GRANADA*
*CURSO 2012-2013*

**Este trabajo fin de máster ha sido elaborado por:**
**D. Manuel Estrella Colomo.**

**Bajo la supervisión de D. Luis Rico Romero**

# Índice

# 0. Introducción

La presente unidad didáctica se presenta como Trabajo de Fin de Máster en el Máster de Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, en la especialidad de Matemáticas, impartido en la Universidad de Granada durante el curso 2012-2013.

El título de la unidad es: "Límite Finito de una Función en un Punto. Continuidad" y los epígrafes que contempla son los siguientes:

1. Fundamentación teórica de la unidad didáctica, en el que se hace referencia a leyes, decretos y órdenes que regulan la función educativa tanto a nivel estatal como autonómico.
2. Análisis de contenido, comenzando con el desarrollo histórico del concepto de límite desde los matemáticos griegos hasta el s. XIX. Se analizarán los contenidos desde el punto de vista conceptual y procedimental, los distintos sistemas de representación que aparecerán en el transcurso de la unidad y los fenómenos a los que los contenidos pueden dar respuesta.
3. Análisis cognitivo, en el que se fijan tanto los focos y objetivos de la unidad como los errores y dificultades en los que los alumnos pueden incurrir. Además, se ejemplifican algunas tareas desde objetivos y competencias y desde los citados errores y dificultades.
4. Análisis de instrucción, en el que se estudian los distintos grados de complejidad de las tareas atendiendo a la clasificación de PISA incluyendo ejemplos. Se enumeran recursos y materiales didácticos que se pueden usar en el desarrollo de la unidad.
5. Desarrollo de la unidad didáctica, que contiene los objetivos específicos de la unidad, su secuenciación mediante sesiones y la organización de tareas dentro de las mismas.
6. Evaluación de aprendizajes de la unidad didáctica, que comprende la evaluación inicial, la evaluación formativa y la evaluación sumativa.
7. Atención a la diversidad, en el que se destaca la necesidad de proponer tareas de refuerzo y ampliación y ejemplos de las mismas.
8. Bibliografía, donde se enumeran los documentos y recursos consultados para la realización de este TFM.

Y por último, los anexos:

ANEXO 1. Modelo de evaluación de la unidad didáctica.
ANEXO 2. Análisis de una tarea de la unidad didáctica mediante los indicadores usuales.

## 1. Fundamentación teórica de la unidad didáctica

La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación es la actual ley orgánica estatal que regula las enseñanzas educativas en España en diferentes tramos de edades, vigente desde el curso académico 2006/07. En ella se define el currículo como "el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en ella" (LOE, Título preliminar, Capítulo III, Artículo 6, punto primero).

La planificación del currículo escolar se hace desde 2 niveles distintos: primero a nivel político y administrativo desde el estado y las comunidades autónomas; y segundo a nivel profesional desde la administración educativa y los docentes.

Los elementos básicos que integran el currículo sobre los que tomaré decisiones previas en la programación de la enseñanza son:

1. Objetivos y competencias básicas: Metas de progresiva dificultad que se marcan a los alumnos en función de su nivel de conocimientos matemáticos y capacidades para su uso en contexto, en función de los resultados del aprendizaje que se debe esperar de ellos.

2. Contenidos: Elementos conceptuales y culturales que se van a enseñar: conceptos, procedimientos y actitudes.

3. Metodología: Modelos de enseñanza, enfoques prácticos, actividades y tareas concretas que se van a realizar.

4. Evaluación: Procesos, criterios e instrumentos previstos para la valoración de los resultados obtenidos, en relación con la consecución de los objetivos y de la adquisición de las competencias básicas.

Existen tres niveles de concreción curricular caracterizados por las tomas de decisiones sobre los elementos básicos del currículo:

1. Aspectos básicos del currículo y enseñanzas mínimas. Es el primer nivel de concreción. Corresponde a los poderes legislativos y de gobierno del estado. Dado que las comunidades autónomas tienen competencias plenas en materia educativa, corresponde en Andalucía, por tanto, al parlamento andaluz, que elabora las leyes educativas básicas y a la administración educativa andaluza que las desarrolla mediante decretos y normas.

2. Proyecto educativo. Es el segundo nivel de concreción. Corresponde al centro escolar, a su profesorado organizado en equipos educativos y departamentos didácticos, y al alumnado y las familias que tienen representación en los órganos colegiados de control y gobierno del centro.

3. Programación de aula. Es el tercer nivel de concreción. Corresponde al docente elaborar la programación de aula y las unidades didácticas que la integran.

Un currículo, como plan formativo y como elemento que relaciona la organización y legislación educativas con la actividad docente del profesor, ha de atender a cuatro cuestiones centrales (L. Rico, 1997):

1. ¿Qué formación? ¿Con cuál conocimiento?
2. Esa formación, ¿para qué? ¿Qué aprendizaje persigue?
3. ¿Cómo llevar a cabo la formación ?
4. ¿Cuánta fue la formación? ¿Qué resultados se obtuvieron?

Cuestiones que darán lugar a una diferenciación en cuatro dimensiones interconectadas entre sí: dimensión cultural y conceptual, dimensión cognitiva, dimensión ética o formativa y dimensión social.

Esta unidad didáctica está estructurada atendiendo a la teoría del análisis didáctico y en relación con las distintas dimensiones del currículo, diferenciando cuatro análisis distintos: análisis de contenido (dimensión conceptual), análisis cognitivo (dimensión cognitiva), análisis de instrucción (dimensión formativa) y análisis de la evaluación (dimensión social).

# 2. Análisis de contenido.

## 2.1. Evolución histórica del concepto de límite.

### Introducción.

El concepto de límite no es un concepto aislado, sino que aparece en Matemáticas ligado a otros conceptos como el infinito, la resolución de ciertos problemas geométricos o la convergencia de series, entre otros.

Su dificultad radica en que no es un concepto intuitivo. Además, aunque en estos momentos el Análisis se apoya en el concepto de límite, esto no fue así hasta tiempos recientes. Reflexionando y refinando ciertos conceptos es como se llegó al concepto de límite como lo conocemos en la actualidad.

Para llegar a comprender el concepto de límite vamos a pasar por las diferentes fases históricas que lo contemplan:

- Etapa clásica. Matemáticos griegos (s. V a.C.).
- Revolución científica (s. XVI a XVIII).
    - Newton y Leibnitz.
- Fundamentación del análisis infinitesimal (segunda mitad del s. XVIII).
- Aritmetización del análisis (s. XIX)

En la siguiente página puede observarse un esquema cronológico a modo de introducción en el que aparecen los matemáticos que estudiaron e influyeron en el concepto de límite a lo largo de la historia y sus enfoques, motivaciones y/o principales aportaciones.

s V a.C.

| Nombre | Zenón | Hipócrates | Eudoxo | Aristóteles | Arquímedes | Herón |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Nac-Muerte** | 490-430 aC | 470-410 aC | 390-337 aC | 384-322 aC | 287-212 aC | Siglo I aC |
| **Logros** | Aporías, paradojas | Primero en áreas con curvas | Cálculo de áreas y volúmenes | Filósofo, lógico y científico | Matemático, físico, ingeniero, inventor... | Científico e inventor |
| **Relación con límite** | Paradojas | Cuadratura del círculo | Método de exhaución | "Argumento del tercer hombre" | Desarrollo del método de exhaución | "La métrica" |

s XVI a XVII

| Kepler | Cavalieri |
|---|---|
| 1571-1630 | 1598-1647 |
| Leyes de movimiento de planetas | Teoría de los indivisibles |
| Método de los infinitésimos | Cálculo de volúmenes y áreas |

**FUNDAMENTACIÓN ANÁLISIS INFINITESIMAL**

**2ª mitad s. XVIII**

| Nombre | Fermat | Barrow | Newton | Leibnitz |
|---|---|---|---|---|
| **Nac-Muerte** | 1601-1665 | 1630-1677 | 1648-1727 | 1646-1716 |
| **Logros** | Gran jurista y matemático | Teólogo, profesor y matemático | Físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático | Reconocido como "El último genio universal" |
| **Relación con límite** | Máximos/mínimos y tangente | Cálculo de tangentes Teorema Fundamental del Cálculo | Teoría de las fluxiones | Notación. Disputa con Newton |

| Euler | D´Alembert | Lagrange |
|---|---|---|
| 1707-1783 | 1717-1783 | 1736-1813 |
| Terminología y notación matemática | L'Encyclopédie | Teorema del valor medio |
| Integración Newton y Leibnitz en Ánalisis | Una definición de límite | Series de potencias para evitar límites |

**ARITMETIZACIÓN DEL ANÁLISIS**
**s. XIX**

| Nombre | Cauchy | Bolzano | Weierstrass |
|---|---|---|---|
| **Nac-Muerte** | 1789-1857 | 1781-1848 | 1815-1897 |
| **Logros** | Pone bases del Ánalisis matemático | Teoremas de Bolzano y Bolz./Weiers. | "Padre del análisis moderno" |
| **Relación con límite** | Una definición de límite e infinitésimo | Definición de continuidad apoyándose en la de límite | Definición de límite |

## Matemática griega (s. V a.c.)

En la matemática griega no se puede considerar la noción de límite funcional puesto que no existía el concepto de función. Sin embargo, al resolver problemas relativos al cálculo de áreas se producen ciertos procesos iterados que constituyen un primer germen de este concepto. Los intentos por resolver el problema de la cuadratura del círculo o la necesidad de herramientas para formular unas paradojas son esos primeros gérmenes.

### Zenón de Elea (490-430 a.C.)

Filósofo griego nacido en Elea. Probablemente no fue tan prolífico ni destacado en su tiempo como el resto de matemáticos que aparecen en esta introducción histórica, sin embargo sus famosas paradojas me van a permitir diseñar tareas de introducción del concepto de límite para la segunda sesión que ocupa la unidad didáctica (ver enunciado en el *Anexo II).* Estas paradojas provienen del estudio del movimiento y del tratamiento del tiempo y el espacio como fenómenos discretos, continuo-discreto o discreto-continuo respectivamente.

Se le ha considerado el primero en utilizar la demostración llamada ad absurdum (reducción al absurdo). Este procedimiento lo lleva a cabo mediante sus aporías.

Los razonamientos de Zenón constituyen el testimonio más antiguo que se conserva del pensamiento infinitesimal desarrollado muchos siglos después en la aplicación del cálculo infinitesimal que nacerá de la mano de Leibnitz y Newton en 1666. No obstante, Zenón era ajeno a toda posible matematización, presentando una conceptualización de tal estilo como un instrumento necesario para poder formular sus paradojas.

### Hipócrates de Chíos (470-410 a.C.)

Matemático, geómetra y astrónomo griego. Fue el primero en calcular áreas de regiones delimitadas por segmentos curvilíneos no rectos, en relación con el problema de la cuadratura del círculo. Para ello se valió del teorema que afirma que «la razón entre el área de dos círculos es la misma que la razón entre el cuadrado de sus radios».

### Eudoxo de Cnido (390-337 a.C.)

Filósofo, astrónomo, matemático y médico griego, pupilo de Platón. Eudoxo demostró que el volumen de una pirámide es la tercera parte del de un prisma de su misma base y altura; y que el volumen de un cono es la tercera parte del de un cilindro de su misma base y altura. Para demostrarlo elaboró el llamado método de exhaución, antecedente del cálculo integral, para calcular áreas y volúmenes.

Consiste esencialmente en acotar la cantidad que se quiere calcular entre dos series de magnitudes que convergen hacia ella, una por exceso y otra por defecto. Ambas cotas se comparan bien con la cantidad estudiada, directamente, bien con las cotas correspondientes a un problema análogo y ya resuelto. Esta comparación se realiza por un doble proceso de reducción al absurdo. Es decir, conocida mediante un proceso previo intuitivo, mecánico o de cualquier otro tipo, la equivalencia entre dos magnitudes A y B, de las cuales una de ellas también es conocida, el método de exhaución lo que hace es demostrar la equivalencia. Y para ello, se prueba en primer lugar que es absurdo suponer que A es mayor que B; en segundo lugar se prueba que suponer que B es mayor que A también es absurdo; de donde se debe deducir que A y B son equivalentes; sin embargo el proceso no es constructivo y requiere para cada problema un planteamiento y resolución particulares. Este método sigue una técnica geométrica que permite demostrar los resultados sin hacer llamadas al infinito; como es bien conocido, los griegos manifestaron una gran reticencia a trabajar con el infinito y prohibieron su uso en los razonamientos matemáticos. Como señala Cornu (1983), aunque el método de exhaución está bastante próximo a la noción de límite no se puede decir que los griegos tuviesen el concepto de límite; es la geometría y en particular el problema de los cálculos de áreas lo que ha permitido la puesta a punto de una noción (la exhaución) a la que se puede considerar un ancestro de la noción de límite.

El método fue utilizado magistralmente por Arquímedes. El trabajo de ambos como precursores del cálculo fue únicamente superado en sofisticación y rigor matemático por Newton y Leibnitz.

## Aristóteles (384-322 a.C.)

Fue un filósofo, lógico y científico de la Antigua Grecia cuyas ideas han ejercido una enorme influencia sobre la historia intelectual de Occidente por más de dos milenios. Aristóteles fue discípulo de Platón y de otros pensadores (como Eudoxo) durante los veinte años que estuvo en la Academia de Atenas, donde trabaja con las nociones de infinito potencial e infinito actual en su metafísica.

## Arquímedes (287-212 a.C.)

Matemático griego, físico, ingeniero, inventor y astrónomo, considerado uno de los científicos más importantes de la antigüedad clásica. Usó el método de exhaución para calcular el área bajo el arco de una parábola con el sumatorio de una serie infinita. Y también para aproximar el valor del número π. Para ello, dibujó un polígono regular inscrito y otro circunscrito a una misma circunferencia, de manera que la longitud de la circunferencia y el área del círculo quedan acotadas por esos mismos valores de los perímetros y las áreas de los dos polígonos. A medida que se incrementa el número de lados del polígono la diferencia se acorta, y se obtiene una aproximación más exacta, la diferencia queda “exhausta”. Partiendo de polígonos de 96 lados cada uno, Arquímedes calculó que el valor de π debía encontrarse entre 3+10/71 (aproximadamente 3,1408) y 3+1/7 (aproximadamente 3,1429), lo cual es consistente con el valor real de π.

### Herón de Alejandría (siglo I d. C.)

Matemático helenístico que destacó como ingeniero en su ciudad natal, Alejandría. Este griego es considerado uno de los científicos e inventores más grandes de la antigüedad. Como matemático, escribió "La Métrica", obra en la que estudia las áreas de las superficies y los volúmenes de los cuerpos.

## Revolución científica (s. XVI a XVIII)

Algunos de los problemas que surgen en esta época son los siguientes:

- Encontrar los límites de elementos geométricos (secantes a una curva que pasan por un punto fijo a la curva, polígonos inscritos en un círculo, etc.).

- Medir las magnitudes y los elementos "diferenciales" asociados a las curvas y superficies (tangentes, radios de curvatura, asíntotas, máximos y mínimos).

- Calcular las formas indeterminadas.

- Evaluar el orden de las magnitudes de sumas parciales de series divergentes o de restos de series convergentes.

A resolver estos problemas, en los que está implícito el concepto de límite, se dedican los matemáticos en estos 3 siglos.

### Johannes Kepler (1571-1630)

Figura clave en la revolución científica, astrónomo y matemático alemán, fundamentalmente conocido por sus leyes sobre el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol.

Desarrolló el que se conoce como *método de los infinitésimos de Kepler*, que utilizaba para resolver problemas de medidas de volúmenes o áreas como los que aparecen en *Nova stereometria doliolum vinatorum* (1615). La base del método consiste en pensar que todos los cuerpos se descomponen en infinitas partes, infinitamente pequeñas, de áreas o volúmenes conocidos. Galileo utilizará un método semejante para mostrar que el área encerrada bajo la curva tiempo-velocidad es el espacio.

### Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

Jesuita y matemático italiano. Fue alumno de Galileo Galilei y el primero en introducir en Italia el cálculo logarítmico, pero debe su celebridad a su teoría de los «indivisibles», que expuso en *Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota* (1635). Esta teoría estudia las magnitudes geométricas como compuestas de un número infinito de elementos, o indivisibles, que son los últimos términos de la descomposición que se puede hacer. La medida de las longitudes, de las superficies y de los volúmenes se convierte en una suma de infinidad de indivisibles: es el principio del cálculo de una integral definida, aunque sin la noción rigurosa moderna de paso al límite. Por esto puede ser considerado como uno de los precursores del análisis infinitesimal moderno. El *Principio de Cavalieri* se fundamenta en esta teoría.

## Pierre de Fermat (1601-1665)

Jurista y matemático francés apodado por Eric Temple Bell con el sobrenombre de «príncipe de los aficionados». Fermat fue junto con René Descartes uno de los principales matemáticos de la primera mitad del siglo XVII.

Fermat dispone de su *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum (Método para determinar máximos y mínimos y trazar tangentes a líneas curvas)*, que le permite resolver este tipos de problemas de manera muy general. Su enfoque se basa en dos hechos:

- En un máximo o mínimo la tangente a la curva es paralela al eje de abscisas (en lenguaje actual) y en consecuencia el valor de la función en ese punto ha de ser único (con relación a sus vecinos).

- Los valores cercanos al extremo han de ser alcanzados como mínimo dos veces por la función, un poco antes del extremo y un poco después. Comparando pues el valor de la función en el extremo, f(a), con un valor muy cercano, f(a+e), donde e es una cantidad muy pequeña, esos valores han de ser prácticamente iguales. De este proceso, que Fermat denomina *Adigualación*, se obtiene una ecuación que, una vez eliminado el valor e por ser despreciable, permite calcular a.

De hecho Fermat llega a la ecuación que hoy en día escribimos como f´(x)=0. Por eso se le considera también precursor del cálculo diferencial aunque su proceso de adigualación está algo lejos de las ideas de límite que más tarde entraran en escena.

En este sentido, máximos y mínimos, mantiene controversias con Descartes, teniendo siempre de intermediario a Marin Marsenne, un sacerdote de la época interesado en las matemáticas y que mantuvo correspondencia con personalidades tan ilustres como los citados Fermat y Descartes, Galileo Galilei, Giovanni Doni o Constantijn Huygens.

Con Descartes la controversia pasa del cálculo de máximos y mínimos al estudio de la tangente a una parábola. Fermat envía a Mersenne en 1637 una memoria que se titula *Sobre las tangentes a las líneas curvas* donde parece plantear un método para calcular tangentes en un punto de cualquier curva, si bien sólo lo utiliza con la parábola. En un intento de clarificar dicho método, Descartes crea el suyo propio según la carta que envía a Mersenne en Mayo de 1638 y, así, considera que la curva y su tangente en un punto coinciden en un entorno pequeño de dicho punto. Lo que pretende es dibujar la recta tangente en el punto P=(x, f(x)) y, para ello, calcula la subtangente utilizando un criterio de semejanza de triángulos. En la práctica, para obtener los segmentos necesarios se consideraba f(x+E)-f(x), se dividía por E y se tomaba E=0, lo que equivale a hallar el límite funcional en la abscisa del punto P.

## Isaac Barrow (1630-1677)

Teólogo, profesor y matemático inglés al que históricamente se le ha dado menos mérito en su papel en el desarrollo del cálculo moderno. En concreto, en su trabajo respecto a la tangente, Barrow es famoso por haber sido el primero en calcular las tangentes en la curva de Kappa. Isaac Newton fue su discípulo.

Su método es muy semejante al de Fermat, pero en él aparecen dos incrementos e y a, que equivalen a los Δx y Δy actuales.

Barrow es considerado el precursor del Teorema Fundamental del Cálculo, de hecho sus resultados se pueden tratar como una versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo actual.

Como hemos visto, la mecánica, la física, la óptica o la astronomía necesitan de estos métodos que al mismo tiempo serán los precursores del cálculo infinitesimal. El álgebra aportó las herramientas necesarias para que algunos de estos métodos se desarrollaran, destacando el método de las coordenadas, que facilitó el estudio de las curvas. Sin embargo, estos métodos funcionaban de forma separada y no se tenía conciencia de su generalidad; faltaba algo que les armonizara y además les diera ese carácter de universalidad. Faltaba el concepto de límite.

## Isaac Newton (1648-1727)

Físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés. Newton comparte con Leibnitz el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física. También contribuyó en otras áreas de la matemática, desarrollando el teorema del binomio y las fórmulas de Newton-Cotes. Es, a menudo, calificado como el científico más grande de todos los tiempos, y su obra, como la culminación de la revolución científica. El matemático y físico Joseph Louis Lagrange (1736–1813), dijo que "Newton fue el más grande genio que ha existido y también el más afortunado dado que sólo se puede encontrar una vez un sistema que rija el mundo."

En 1669 su mentor, Isaac Barrow, renunció a su Cátedra Lucasiana de matemática, puesto en el que Newton le sucedería hasta 1696. El mismo año envió a John Collins, por medio de Barrow, su "*Analysis per aequationes número terminorum infinitos*". Para Newton, este manuscrito representa la introducción a un potente método general, que desarrollaría más tarde: su cálculo diferencial e integral.

Posteriormente propone el método de las fluxiones, expuesto en la obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (publicada en 1736), donde se estudian las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo denominadas fluentes. Todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo. Después se introducen las velocidades de la corriente de los fluentes, que se denominan fluxiones.

La teoría de fluxiones resuelve dos problemas: la determinación de la relación entre fluxiones, conocidas la relación entre fluentes y el recíproco, dada la relación entre fluxiones, encontrar las fluentes. Para resolver estos problemas aplicó sendos métodos basados en el uso de cantidades infinitamente pequeñas.

En 1704 en su obra *Tractatus quadratura curvarum*, explicita el método de las "razones primeras y últimas", en la que el incremento de la variable se "desvanece", lo que supone la explicitación de una idea de límite un tanto metafísica.

En su obra *Principia Mathematica* "aclara" el concepto de límite:

*"Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales".*

Newton fue respetado durante toda su vida como ningún otro científico, y prueba de ello fueron los diversos cargos con que se le honró: en 1689 fue elegido miembro del Parlamento, en 1696 se le encargó la custodia de la Casa de la Moneda, en 1703 se le nombró presidente de la Royal Society y finalmente en 1705 recibió el título de Sir de manos de la Reina Ana.

La gran obra de Newton culminaba la revolución científica iniciada por Nicolás Copérnico (1473-1543) e inauguraba un período de confianza sin límites en la razón, extensible a todos los campos del conocimiento.

## Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716)

Filósofo, lógico, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán. Fue uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII, y se le reconoce como "El último genio universal".

De hecho, el filósofo francés Diderot afirmó: "Cuando uno compara sus talentos con los de Leibnitz, se tiene la tentación de tirar todos sus libros e ir a morir silenciosamente en la oscuridad de algún rincón olvidado." Sin embargo, no todos en su tiempo le reconocieron del mismo modo.

La invención del cálculo infinitesimal es atribuida tanto a Leibnitz como a Newton. De acuerdo con los cuadernos de Leibnitz, el 11 de noviembre de 1675 tuvo lugar un acontecimiento fundamental, ese día empleó por primera vez el cálculo integral para encontrar el área bajo la curva de una función y=f(x). Leibnitz introdujo varias notaciones usadas en la actualidad como, por ejemplo, el signo "integral" $\int$, que representa una S alargada, derivado del latín "summa", y la letra "d" para referirse a los "diferenciales", del latín "differentia". Esta ingeniosa y sugerente notación para el cálculo es probablemente su legado matemático más perdurable. Leibnitz no publicó nada acerca de su *Calculus* hasta 1684. La regla del producto del cálculo diferencial es aún denominada "regla de Leibnitz para la derivación de un producto". Además, el teorema que dice cuándo y cómo diferenciar bajo el símbolo integral, se llama la "regla de Leibnitz para la derivación de una integral".

Desde 1711 hasta su muerte, la vida de Leibnitz estuvo emponzoñada con una larga disputa con John Keill, Newton y otros sobre si había inventado el cálculo independientemente de Newton, o si meramente había inventado otra notación para las ideas de Newton.

Leibnitz pasó entonces el resto de su vida tratando de demostrar que no había plagiado las ideas de Newton.

La concepción que subyace en esta etapa es una concepción geométrica de límite puesto que se trabaja en problemas de índole geométrica. La noción de límite en realidad se encuentra implícita, y se ve una evolución de su estatus, pasando de ser una noción que ni siquiera se explicita como útil a ser, con los infinitésimos y las razones primeras y últimas de Newton, una herramienta para resolver problemas.

Ahora bien, esta idea de límite como aproximación sin más no basta. Por una parte, la aproximación tiene que ser indefinida, es decir, tiene que existir la posibilidad de tomar aproximaciones cada vez mejores, cosa que se consigue en todos los métodos revisados, pero hasta Newton esta posibilidad no se plasma claramente en el hecho de que los objetos se han de aproximar "más que cualquier diferencia dada", lo cual implica que el límite debe ser la mejor de todas las aproximaciones posibles.

## Fundamentación del análisis infinitesimal (2ª mitad s. XVIII)

Utilizando infinitésimos pequeños y grandes, que surgen de la teoría de las razones primeras y últimas de Newton, los matemáticos de la época obtienen solución para muchos de sus problemas. La dificultad más importante para el desarrollo del análisis infinitesimal era la necesidad de extender las operaciones del análisis a un mayor número de funciones, para lo que se requería una idea clara de dependencia funcional y, para ello, fue necesario investigar el significado del concepto de función y sus manipulaciones algebraicas. Los matemáticos del siglo XVIII, que se preocuparon de la fundamentación del análisis, buscaban eliminar lagunas y clarificar los matices místicos, no se dieron cuenta de la necesidad del concepto de límite.

### Leonhard Euler (1707-1783)

Fue un matemático y físico suizo. Se trata del principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos.

Euler toma como punto de partida el cálculo diferencial de Leibnitz y el método de fluxiones de Newton y los integra en una rama más general de las matemáticas, que, desde entonces, se llama Análisis y se ocupa del estudio de los procesos infinitos. Se plantea la regularidad de las funciones, introduciendo la función continua como sumas, productos y composiciones de funciones elementales

Introdujo gran parte de la moderna terminología y notación matemática.

### Jean le Rond D'Alembert (1717-1783)

Fue un matemático, filósofo y enciclopedista francés, uno de los máximos exponentes del movimiento ilustrado. Es célebre por crear, junto a Diderot, *L'Encyclopédie* y por su labor en el campo de las matemáticas, relativo a las ecuaciones diferenciales y a las derivadas parciales.

Crea la teoría de los límites al modificar el método de las primeras y últimas razones de Newton. En el tomo IX de la Encyclopédie, D´Alembert escribe la siguiente definición de límite:

*"Se dice que una cantidad es límite de otra cantidad, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más que cualquier cantidad dada por pequeña que se la pueda suponer, sin que, no obstante la cantidad que se aproxima pueda jamás sobrepasar a la cantidad a la que se aproxima; de manera que la diferencia entre una tal cantidad y su límite sea absolutamente inasignable."*

En esta definición las variables son monótonas y el límite unilateral, es decir, la magnitud que se aproxima no le puede superar, y así, aunque la aproximación es objetiva no se puede tener un control completo de la misma.

Su obra maestra fue el Tratado de dinámica, donde enunció el teorema que lleva su nombre (*principio de d'Alembert*). El *Teorema Fundamental del Álgebra* recibe en algunos países de Europa el nombre de *teorema de d'Alembert - Gauss*, dado que d'Alembert fue el primero en dar una prueba casi completa sobre dicho teorema.

### Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Fue un matemático, físico y astrónomo italiano que después vivió en Prusia y Francia. Lagrange demostró el teorema del valor medio, desarrolló la mecánica Lagrangiana y tuvo una importante contribución en astronomía.

Trabajó con desarrollos de funciones en series de potencias Los resultados conseguidos le hicieron creer que se podían evitar los límites y continuó haciendo desarrollos en series de potencias, sin darse cuenta de que la convergencia de las mismas necesitaba del concepto de límite.

## Aritmetización del análisis (s. XIX)

A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX las obras de un gran número de matemáticos ya reflejaban la necesidad objetiva de construcción de la teoría de límites como base del análisis matemático y una reconstrucción radical de este último.

Tres factores fueron determinantes en este sentido:

- La clarificación del concepto de función.

- La aparición de nuevos problemas matemáticos y físicos.

- La evolución de la enseñanza de las matemáticas, que tras la Revolución Francesa pasa a ser una disciplina obligatoria en la Escuela Normal Superior y en la Politécnica. Los matemáticos se ven obligados a enseñar análisis matemático y, por tanto, tienen que apoyarse en unas bases rigurosas.

### Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Fue un matemático francés pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

Cauchy es el que pone las bases del Análisis Matemático. Rechazó el planteamiento de Lagrange basado en el desarrollo en series de potencias del Teorema de Taylor, tomando en cambio como fundamental el concepto de límite de D'Alembert, aunque dándole un carácter aritmético lo hace más preciso. Prescindiendo tanto de la geometría como de los infinitésimos y de las velocidades de cambio, formula Cauchy la siguiente definición de límite:

*"Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo de manera que terminan de diferir de él tan poco como queramos este último valor se llama el límite de todos los demás."*

Además enuncia la definición de infinitésimo como lo consideramos actualmente, es decir como una función cuyo límite es cero, superando de este modo la consideración que se hacía entonces de infinitésimo como un número constante muy pequeño:

*"Diremos que una variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de manera que converge hacia límite cero."*

Sin embargo, la noción de límite en Cauchy no está definitivamente afinada ya que se confunde con la noción de punto de acumulación.

Sin lugar a dudas la definición de Cauchy para el límite era mucho más avanzada que las anteriores, pero en ella había expresiones como *aproximarse indefinidamente* o *diferir de él tan poco como queramos*, que son imprecisas.

## Bernard Bolzano (1781-1848)

Fue un matemático, lógico, filósofo y teólogo bohemio que escribió en alemán y que realizó importantes contribuciones a las matemáticas y a la Teoría del conocimiento.

En matemáticas, se le conoce por el teorema de Bolzano, así como por el teorema de Bolzano-Weierstrass, que esbozó como lema de otro trabajo en 1817, y décadas después habría de desarrollar Karl Weierstrass.

Bolzano da una definición de continuidad basada en la de límite. De hecho la obra de Bolzano se desarrolla de forma paralela a la de Cauchy, basada en la misma idea de límite.

## Karl Weierstrass (1815-1897)

Matemático alemán que se suele citar como el «padre del análisis moderno». Contribuyó con notoriedad a la aritmetización del análisis, dando una definición satisfactoria de número real y otra del concepto de límite.

Weierstrass criticó la expresión "la variable se acerca a un límite" puesto que, según él, esto sugiere tiempo y movimiento, y dio una formulación métrica, puramente estática, definición bastante cercana a la que se utiliza hoy en día. Esta definición, que aparece en la obra de su discípulo Heine Elemente, es la siguiente:

"Si, dado cualquier $\varepsilon$, existe un $n_0$, tal que para $0<n_0<n$, la diferencia $f(x_0 \pm n)-L$ es menor en valor absoluto que $\varepsilon$, entonces se dice que L es el límite de f(x) para $x=x_0$".

La noción de límite es ya, en esta etapa, una noción matemática que sirve como soporte a otras como la continuidad, la derivada y la integral, hecho que ha contribuido a un uso universalizado de la misma. Sin embargo, esta definición, que evoluciona desde la concepción dinámica de Cauchy a una concepción estática, no es el final de un largo proceso evolutivo, ya que en el siglo XX surgen concepciones de tipo topológico, ligadas a la generalización de los conceptos del cálculo a conjuntos no necesariamente numéricos, lo que constituye otra etapa en el desarrollo del concepto.

Todo el esfuerzo realizado en más de dos milenios permite presentar la siguiente definición:

*"Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se escribe*

*(se lee límite de f(x) cuando x tiende a a es L), si cuando x tiende a a, siendo distinto de a, sus imágenes, f(x), tienden a L."*

Esta es la famosa definición ε,δ que desconcierta a la mayoría de los que tratan de estudiarla y sobre todo si es la primera vez que lo intentan. De hecho, como hemos repasado, la humanidad empezó a lidiar con el concepto de límite, sin ser capaz de explicitarlo, desde Eudoxo hasta el siglo XIX, donde llegó a lo que ahora se conoce como límite.

### 2.2. Estructura conceptual.

#### Listado de contenidos relacionados con límites y continuidad.

Función. Dominio. Imagen. Intervalo cerrado. Intervalo abierto. Continuidad. Discontinuidad. Tipos de discontinuidad (1ª especie, 2ª especie, evitable). Límite finito de una función en un punto. Límite infinito de una función en un punto. Límites en más y menos infinito. Límites laterales. Sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes. Límite de una sucesión. Número e. Indeterminación. Asíntotas horizontal, vertical y oblicua. Rama parabólica. Alcanzar. Rebasar. Tender a un número, tender a infinito. Aproximarse.

#### Campo conceptual.

En lo que sigue no voy a considerar límites en el infinito ni límite infinito de una función en un punto.

HECHOS:

Términos:

Sucesión.

Sucesiones convergentes, divergentes y oscilantes.

Límite de una sucesión.

Función, tipos de funciones, dominio, recorrido.

Tender a un número, tender a infinito (convergencia).

Límite.

Indeterminación.

Continuidad.

Discontinuidad.

Notaciones:

Función e imagen: $f(x), f(a)$

Sucesiones: $a_n$

Límite de una sucesión: $lim\ (a_n)$

Límite de una función en un punto: $lim_{x \to 6} f(x)$

Límite de una función en más o menos infinito: $lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

Límite lateral por la izquierda o por la derecha: $lim_{x \to 1^{\pm}} f(x)$

Indeterminaciones: 0/0, k/0, ∞/∞,…

Número e

Convenios:

En una representación grafica, la $x$ corresponde con el eje de abscisas y la $y$ el de ordenadas.

Cualquier número, distinto de 0, elevado a 0 vale 1.

La continuidad de una función se estudia en puntos del dominio, fuera de los mismos sólo se estudian los límites laterales.

Resultados:

El límite de una función, si existe, es único.

Si los límites laterales de una función en un punto, no coinciden, entre sí o con la imagen del punto, entonces la función no es continua en ese punto.

Cualquier función polinómica (f(x)=mx^n+…) es continua en todo $\mathbb{R}$

Propiedades de las operaciones con funciones continuas.

El límite de una función constante en un punto es la misma constante.

El límite de la función identidad en un punto es el valor de la función en ese punto.

CONCEPTOS:

Límite de una función en un punto.

Límite de una función en el infinito.

Indeterminaciones.

Límite lateral.

Asíntotas vertical, horizontal y oblicua.

Ramas infinitas.

Continuidad.

Función continua.

Tipos de discontinuidades (1ª especie, 2ª especie, evitable).

ESTRUCTURAS:

Espacio vectorial de las funciones continuas reales $\mathbb{C}(\mathbb{R})$

Espacio vectorial de las funciones continuas en un intervalo $\mathbb{C}([a,b])$

## Campo procedimental.

DESTREZAS:

Cálculo de la imagen de una función en un punto del dominio; cálculo del intervalo imagen.

Cálculo de la anti-imagen de un valor del recorrido; cálculo de la imagen inversa de un intervalo.

Cálculo del límite de una sucesión.

Detección de puntos de discontinuidad de una función según su representación gráfica.

RAZONAMIENTOS:

Identificación del límite de una función en un punto o en el infinito mediante representación tabular o gráfica.

Justificar que para una función el límite coincide o no con el valor de la función en ese punto.

Justificar límites de funciones usando las propiedades de límites respecto a la suma, producto y composición de funciones ya conocidas.

Diferenciar entre valores a los que se aproxima la función en un punto y el límite en dicho punto.

Argumentar los límites laterales de una función en un punto mediante una tabla de valores.

Reconocer las indeterminaciones en el cálculo de límites.

ESTRATEGIAS:

Aplicación de técnicas de resolución de indeterminaciones en el cálculo de límites de una función.

Reconocimiento de discontinuidades (esenciales o evitable) de una función en un punto.

Resolución de problemas donde estén involucrados los conceptos de límite y continuidad.

Construir funciones que satisfagan determinadas condiciones de continuidad.

## Mapa conceptual.

A continuación, expongo un mapa conceptual del bloque temático correspondiente a "Límites y Continuidad" para 1º de Bachillerato. La unidad de sucesiones no es imprescindible pero sí es recomendable para una mejor comprensión de los conceptos que se incluyen en las unidades de Límite y Continuidad. Por su extensión, no es posible abarcar en una unidad didáctica todo este bloque (Figura 1).

Mi unidad se va a centrar en el "Límite finito de una función en un punto" y la parte de continuidad íntimamente relacionada con ésta (Figura 2):

Concretamente, el mapa conceptual de mi unidad didáctica sería (Figura 3):

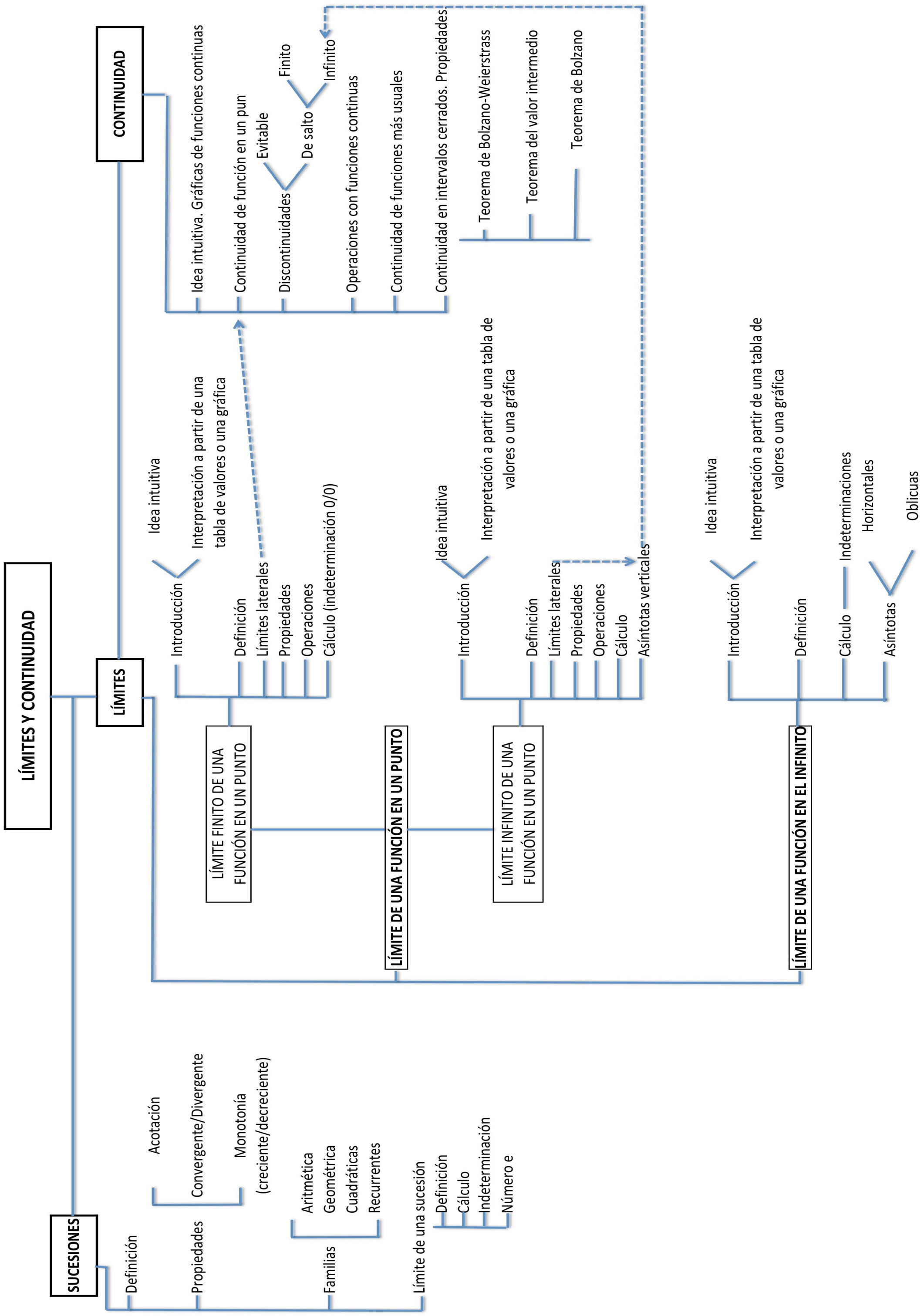



Figura 1. Mapa conceptual del bloque temático "Límite y Continuidad de Funciones"

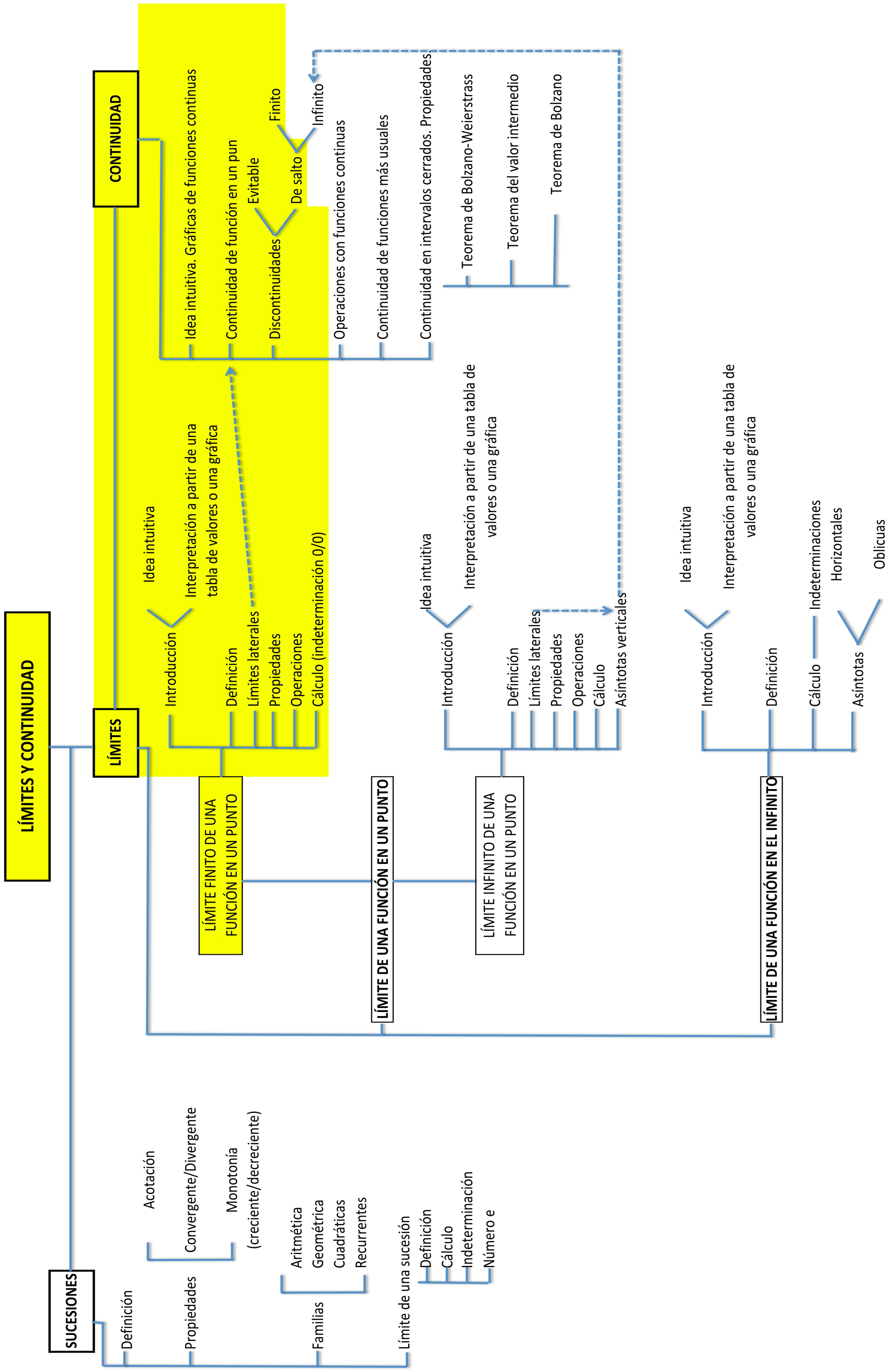



Figura 2. Foco “Límite finito de una función en un punto y continuidad”

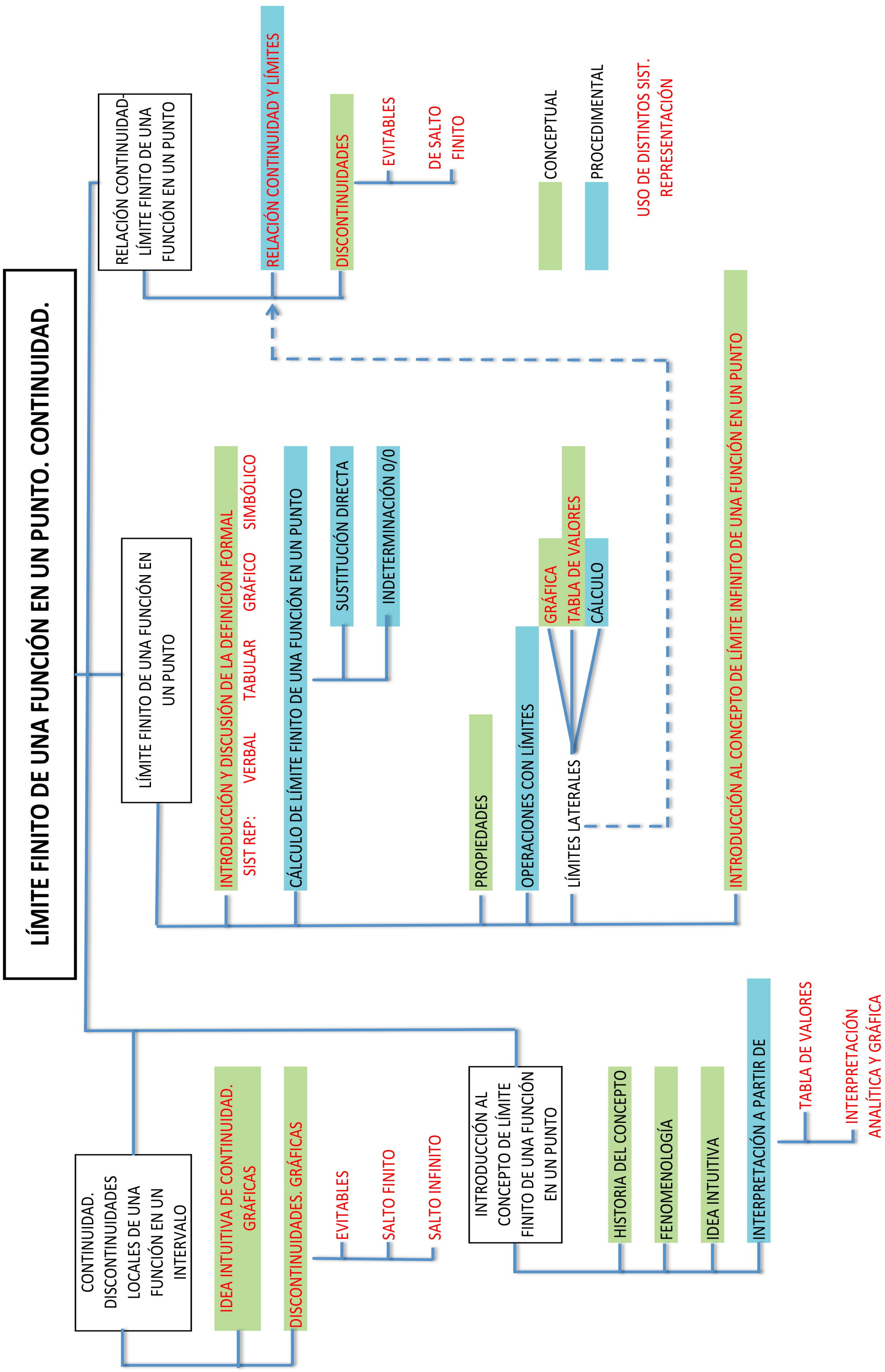



Figura 3. Mapa conceptual específico de la unidad didáctica

## 2.3. Sistemas de representación.

En el desarrollo de la unidad didáctica voy a utilizar los siguientes sistemas de representación:

### Simbólico:

Se dice que se está usando el sistema de representación simbólico cuando se utiliza el lenguaje algebraico. Se presenta cuando se utiliza un lenguaje abstracto, usualmente alfabético. Algunos ejemplos en mi unidad serán:

- f(x)=x^3-4x+8.

  Ó cualquier expresión de una función o de su imagen como f(2)=8.

- $lim_{x\to 2^{\pm}} f(x)$

  Para expresar límites de una función en un punto por la derecha o por la izquierda, es decir, límites laterales. Del mismo modo sucederá con el límite de una función en un punto.

- $\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 /\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$

  Ésta será probablemente la representación simbólica más difícil de asimilar para los alumnos. Se trata de la representación asociada a la definición formal del concepto de límite.

### Verbal:

Éste sistema de representación se manifiesta en la expresión oral o escrita de resultados con el lenguaje usual. La importancia de este sistema de representación radica en que muchos de los términos específicos que son necesarios en esta unidad no han sido usados con anterioridad por los alumnos o se han usado con otras acepciones. Esto es algo que según los resultados de investigaciones como la realizada por Fernández Plaza, Ruiz Hidalgo y Rico en 2012 puede inducir a errores. En esta investigación se corrobora algo que previamente ya habían tratado Cornu (1991) y Monaghan (1991), quienes detectan la idea persistente que tienen los estudiantes de límite como valor no rebasable o incluso no alcanzable. Los investigadores lo asocian con un uso coloquial de los términos "límite" y "tender".

Concretamente, algunos ejemplos de expresión verbal usados en la unidad son:

- El límite de la función cuando la variable tiende a dos es cero.

- El límite de la función cuando la variable tiende a dos por la izquierda es dos.

- El límite de la función cuando la variable tiende a dos por la derecha es cero.

- La función no es continua en el punto en que la variable es dos.

- En el punto en que la variable es dos la función tiene una discontinuidad de salto finito.

### Tecnológico:

Hoy en día existen multitud de recursos en la red en forma de *applets* con los que el alumno puede interactuar y trabajar los conceptos de límite finito de una función en un punto y continuidad con las nuevas tecnologías.

Además, será imprescindible para seguir el desarrollo de la unidad el uso de calculadoras científicas. También se puede trabajar con programas informáticos como Mathematica, Derive, Geogebra, Octave o incluso con hojas de cálculo.

Como ejemplo de *applets* relacionadas:

- http://tube.geogebra.org/student/m27526

  En este applet se puede introducir cualquier función, pedirle la imagen para cualquier x y el límite de la misma en un punto, así como los límites laterales de forma gráfica. Además tiene una animación en la que se pueden observar gráficamente aproximaciones cada vez "mejores" tanto por la izquierda como por la derecha.

  Esta applet la voy a usar más adelante, en el análisis cognitivo.

- http://www.geogebratube.org/student/m6483.

  En la que se pueden seleccionar las gráficas de distintas funciones sobre las que se van pidiendo diferentes límites.

- http://www.geogebratube.org/student/m14701.

  En la que el alumno se puede ir desplazando sobre el trazo de la función variando el valor de x mientras que va viendo como cambian los valores para los límites laterales y límite en el punto. Especialmente útil para relacionar límite finito de una función en un punto con límites laterales y continuidad.

## Tabular:

El sistema tabular será muy utilizado en la introducción de la unidad. Se trata de presentar en una tabla distintos valores de x cada vez más próximos a uno concreto y sus imágenes.

Por ejemplo, para $f(x) = x^2$:

| x | f(x) |
|---|---|
| 1,9 | 3,61 |
| 1,99 | 3,9601 |
| 1,999 | 3,996001 |
| ... | ... |
| ↓ | ↓ |
| 2 | 4 |
| x | f(x) |
| 2,1 | 4.41 |
| 2,01 | 4,0401 |
| 2,001 | 4,004001 |
| ... | ... |
| ↓ | ↓ |
| 2 | 4 |

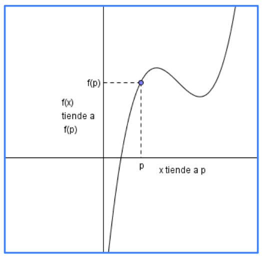
## Gráfico:

Utiliza los recursos usuales de representación gráfica de funciones en diagrama cartesiano, destacando el punto donde se va a evaluar el límite.

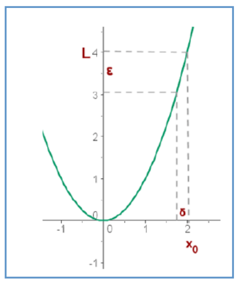
Aparte de ser de mucha utilidad en la idea intuitiva de límite de una función en un punto, también será muy usado en toda la unidad, ya que estará presente en varios de los objetivos didácticos a lo largo de la misma.

Algunos casos serían:

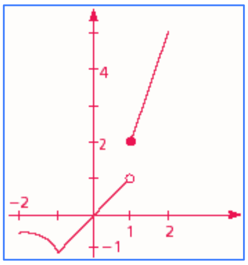
- Interpretar el concepto de límite finito de una función en un punto a partir de la gráfica:




- Definición formal del concepto de límite finito de una función en un punto.

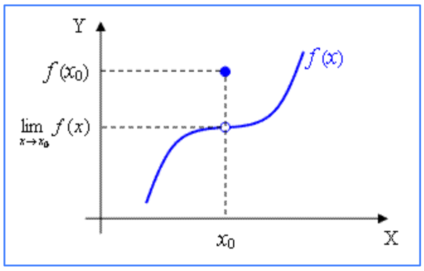


- Distinguir límites laterales a partir de la gráfica de una función.




- Esbozar la gráfica de una función teniendo en cuenta una serie de condiciones dadas, entre ellas varios límites en un punto, límites laterales y/o discontinuidades.

- Distinguir si una función es continua o no a partir de su gráfica e identificar las discontinuidades si las hubiera.



## 2.4. Fenomenología y modelización.

Si leemos cualquier libro de texto de 1º de Bachillerato de Matemáticas, lo más probable es que en el tema o los temas dedicados a límites, tanto a límites en un punto como a límites en el infinito, la mayor parte de las tareas que aparezcan comiencen por "Halla", "Calcula", "Resuelve", "Comprueba" o como mucho "Estudia", refiriéndose a la continuidad de una función. En éste tipo de tareas se trata de poner en práctica una metodología previamente tratada en clase (el alumno reproduce) y carecen de un contexto relevante para el estudiante. No obstante, las considero necesarias y en la presente unidad, lógicamente, habrá actividades de esta clase. Pero en este punto dedicado a la fenomenología me gustaría destacar otro tipo de tareas, cuyo contexto sea más cercano o atractivo para aquel que se plante delante de ellas con la intención de resolverlas.

A continuación expongo situaciones (según marco PISA) y ejemplos de fenómenos que pueden ser usados para generar tareas en esta unidad:

### Situación personal:

- Relación entre la temperatura de un alimento al sacarlo del horno/microondas o frigorífico y el tiempo transcurrido a medida que tiende a la temperatura ambiente.
- Coste de envío de un paquete según su peso.
- Tarifas de telefonía móvil y/o internet.

### Situación educativo/laboral:

- Historia del concepto de límite (paradojas de Zenón).
- Evolución de un trabajador desde que comienza a trabajar hasta que se especializa.
- Relación entre el radio de un balón y el volumen de aire que contiene. Se puede considerar que explota al llegar a cierto valor del radio.
- Construcción de una plaza en torno a una superficie determinada.

### Situación pública:

- Aproximación del precio del petróleo que se prevé en un determinado tiempo.
- Depreciación del valor de un coche en el tiempo.
- Estimación del valor aproximado de una vivienda según su superficie.
- Estudiar como variará el censo de una población.
- Cálculo del importe por aparcar en un parking cuya tarifa es una función definida a trozos. Tarificación compañía eléctrica.

**Situación científica:**

- Estudio de especies en peligro de extinción.
- Desaparición de un medicamento en el organismo.
- Estudio de la evolución de comunidades de bacterias.
- Datación de fósiles mediante el método del Carbono 14

En cuanto a la modelización, dando al alumno la función que describe el fenómeno, lo único que consigo es que realice una actividad de reproducción en la que he convertido un contexto que podría suscitar cierto interés, en un contexto irrelevante. Intentaré, en la medida de lo posible, que el estudiante sea capaz de modelizar el fenómeno para posteriormente aplicar los conocimientos de límites de una función en un punto y continuidad para resolver el problema.

Sirvan como ejemplos:

> *La Federación de caza de cierto estado introduce 50 ciervos en una determinada región. Se cree que el número de ciervos crecerá siguiendo el modelo:*
>
> $$N(t) = \frac{10(5+3t)}{1+0{,}04t}$$
>
> *donde t es el tiempo en años.*
>
> **a)** *Calcule el número de animales que habrá luego de 5 y 10 años.*
> **b)** *¿A qué valor tenderá la población cuando t tiende a infinito?*

Como vemos, en este caso el enunciado del problema da la función que modeliza el fenómeno, con lo cual la tarea queda reducida al cálculo de 2 imágenes y un límite para la función: $f(x) = \frac{10(5+3x)}{1+0{,}04x}$.

# 3. ANÁLISIS COGNITIVO

## 3.1. Expectativas de aprendizaje.

Según el mapa conceptual que he incluido en el apartado anterior, los focos de contenido en los que me centraré en la presente unidad didáctica son:

I. Continuidad. Discontinuidades locales de una función en un intervalo.
II. Introducción al concepto de límite finito de una función en un punto.
III. Límite finito de una función en un punto.
IV. Relación Continuidad-Límite finito de una función en un punto.

Estos focos marcan prioridades sobre el aprendizaje para los estudiantes, que paso a concretar en los enunciados de:

**I. Continuidad. Discontinuidades locales de una función en un intervalo.**

O1. Distinguir si una función es continua en un intervalo a partir de su gráfica.

O2. Distinguir diferentes tipos de discontinuidades a partir de la gráfica de una función.

**II. Introducción al concepto de límite finito de una función en un punto.**

O3. Reconocer y describir fenómenos en los que se intuya el concepto de límite finito de una función en un punto usando términos relacionados.

O4. Justificar e interpretar el valor del límite finito de una función en un punto a partir de una tabla de valores.

O5. Justificar e interpretar el valor del límite finito de una función en un punto a partir de una gráfica.

**III. Límite finito de una función en un punto.**

O6. Explicar y ejemplificar la definición formal del concepto de límite finito de una función en un punto.

O7. Calcular el límite finito de una función en un punto cuando la función viene dada por su representación gráfica o simbólica.

O8. Conocer y usar las operaciones con límites (suma, producto, cociente, potencia y raíz) para calcular otros límites.

O9. Identificar los límites laterales a partir de una tabla de valores o una gráfica.

## IV. Relación Continuidad-Límite finito de una función en un punto.

O10. Establecer analíticamente cuándo una función es continua en un punto (relación límites-continuidad).

O11. Aplicar la relación Continuidad-Límite finito de una función en un punto para determinar parámetros en funciones definidas a trozos.

O12. Clasificar discontinuidades evitables y de salto finito en una función dada.

O13. Esbozar la gráfica de una función que cumpla condiciones de continuidad o discontinuidad en determinados puntos de su dominio.

A continuación se muestran los objetivos agrupados por focos y relacionados con las competencias PISA, donde:

RA= Razonar y Argumentar, M= Matematizar, RP= Resolución de Problemas,
R= Representar, LS= Lenguaje Simbólico, C= Comunicar y HM=Herramientas Matemáticas.

| I. Continuidad. Discontinuidades locales de una función en un intervalo. | RA | M | RP | R | LS | C | HM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O1. Distinguir si una función es continua en un intervalo a partir de su gráfica | X | | | X | | | X |
| O2. Distinguir diferentes tipos de discontinuidades a partir de la gráfica de una función. | X | | | X | | | X |
| | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 |

| II. Introducción al concepto de límite finito de una función en un punto. | RA | M | RP | R | LS | C | HM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O3. Reconocer y describir fenómenos en los que se intuya el concepto de límite finito de una función en un punto usando términos relacionados. | X | X | | X | | X | |
| O4. Justificar e interpretar el valor del límite finito de una función en un punto a partir de una tabla de valores. | X | | | | X | X | X |
| O5. Justificar e interpretar el valor del límite finito de una función en un punto a partir de una gráfica. | X | | | X | | X | X |
| | 3 | 1 | 0 | 2 | 1 | 3 | 2 |

| III.Límite finito de una función en un punto. | RA | M | RP | R | LS | C | HM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O6. Explicar y ejemplificar la definición formal del concepto de límite finito de una función en un punto. | X | X | | X | X | X | |
| O7. Calcular el límite finito de una función en un punto cuando la función viene dada por su representación gráfica o simbólica. | | | | X | X | X | X |
| O8. Conocer y usar las operaciones con límites (suma, producto, cociente, potencia y raíz) para calcular otros límites. | | | X | | X | X | |
| O9. Identificar los límites laterales a partir de una tabla de valores o una gráfica. | X | | | X | X | X | X |
| | 2 | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 | 2 |

| **IV. Relación Continuidad-Límite finito de una función en un punto.** | RA | M | RP | R | LS | C | HM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| O10. Establecer analíticamente cuándo una función es continua en un punto (relación límites-continuidad). | X | | | X | X | | X |
| O11. Aplicar la relación Continuidad-Límite finito de una función en un punto para determinar parámetros en funciones definidas a trozos. | | X | | X | X | | X |
| O12. Clasificar discontinuidades evitables y de salto finito en una función dada. | X | | | | X | X | |
| O13. Esbozar la gráfica de una función que cumpla condiciones de continuidad o discontinuidad en determinados puntos de su dominio. | X | X | X | X | | | X |
| | **3** | **2** | **1** | **3** | **3** | **1** | **3** |

En la siguiente tabla se muestra un recuento general de la aportación de los objetivos al logro de las competencias PISA.

| | RA | M | RP | R | LS | C | HM |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Continuidad. Discontinuidades locales de una función en un intervalo.** | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 |
| **Introducción al concepto de límite finito de una función en un punto.** | 3 | 1 | 0 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| **Límite finito de una función en un punto.** | 2 | 1 | 1 | 3 | 4 | 4 | 2 |
| **Relación Continuidad-Límite finito de una función en un punto.** | 3 | 2 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 |
| | **10** | **4** | **2** | **10** | **8** | **8** | **9** |

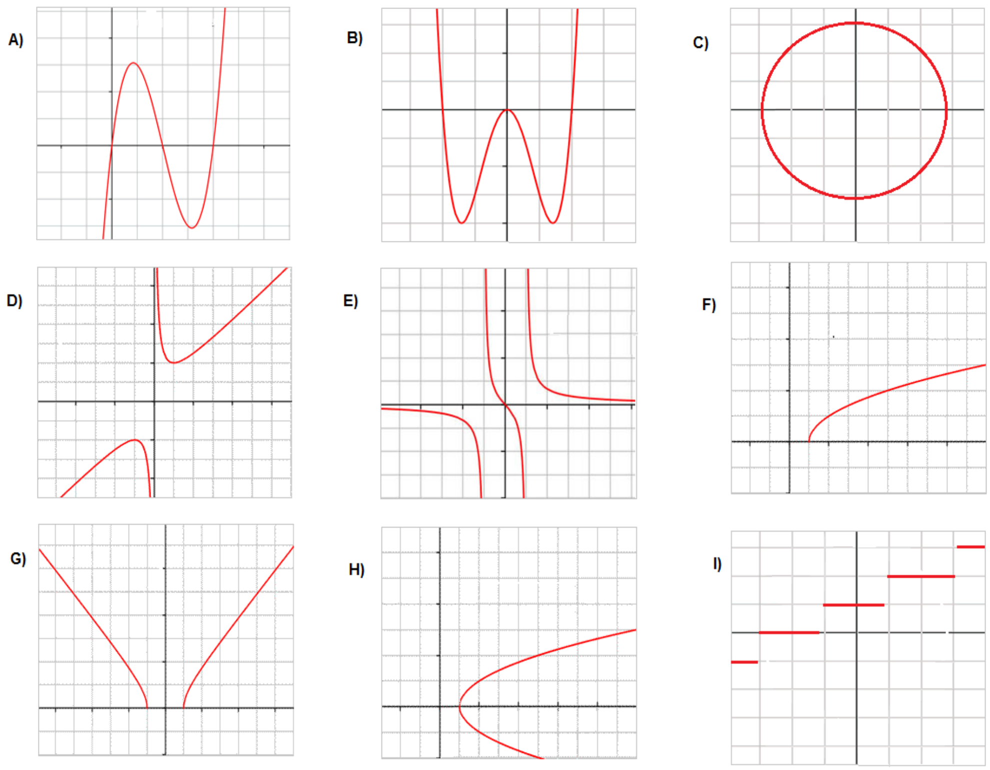
Como vemos en la tabla, las competencias que se encuentran en más focos son Razonar y Argumentar, Representar, Herramientas Matemáticas, Comunicar y Lenguaje Simbólico. Las que menos aparecen son Matematizar y Resolución de Problemas. Esto no quiere decir que no se vayan a trabajar en la unidad, la intención es que haya uniformidad en el desarrollo de todas y cada una de las competencias.

## 3.2. Ejemplificación de tareas desde objetivos y competencias.

Voy a seleccionar 2 objetivos de la unidad a partir de los cuales selecciono unas tareas con el propósito de desarrollar las competencias PISA que se señalan en cada una de ellas:

- O1. Distinguir si una función es continua en un intervalo a partir de su gráfica.

<u>TAREA 1:</u> Justifica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a funciones continuas en el intervalo en el que aparecen representadas.




Además, con esta tarea, se trata de contribuir al desarrollo de las competencias PISA Razonar y Argumentar (RA) y Comunicar (C).

- O11. Aplicar la relación Continuidad-Límite finito de una función en un punto para determinar parámetros en funciones definidas a trozos.

TAREA 2: Calcula y justifica el valor de *a* para que las siguientes funciones sean continuas en x=1.

a) $f(x) = \begin{cases} x+1 \; si \; x \leq 1 \\ 4 - ax^2 \; si \; x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} \; si \; x \neq 1 \\ a \; si \; x = 1 \end{cases}$

i. Para éste último apartado, usa el applet que encontrarás en la web: http://tube.geogebra.org/student/m27526 y representa la función:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

ii. Explica que sucede con la imagen de la función en x=1 y compáralo con el resultado del apartado b).

iii. Da la expresión de una función cuya gráfica sea la recta y= x+2 pero no esté definida en x=2.

iv. A partir de esta última expresión, crea una función definida a trozos que salve la discontinuidad, de forma análoga al enunciado del apartado b).

Además, con esta tarea, se trata de contribuir al desarrollo de las competencias PISA Razonar y Argumentar (RA), Lenguaje Simbólico (LS), Comunicar (C) y Herramienta Matemática (HM).

### 3.3. Errores y dificultades previsibles en el desarrollo de la Unidad Didáctica.

Para el estudio de los errores de la presente unidad he tenido la oportunidad de acceder a los resultados de las investigaciones que D. José Antonio Fernández Plaza está realizando como investigador no doctor en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

A continuación expongo algunos de los errores que desde sus estudios se han detectado en alumnos de bachillerato referentes al concepto de límite finito de una función en un punto:

| RESUMEN DE RESULTADOS | DESCRIPCIÓN DEL ERROR O DIFICULTAD |
|---|---|
| 1. Vinculación entre límite de una función en un punto y el valor hacia el que tiende la variable. | En caso de no existir límite ni imagen los sujetos consideran x tiende a a como límite. |
| 2. Proceso vs algoritmo algebraico. | Conocer el algoritmo del cálculo del límite de una función en un punto no quiere decir que se comprenda el proceso infinito que ello implica. |
| 3. Persistencia de idea de límite como valor no alcanzable ni rebasable | El límite se equipara a un máximo o mínimo relativo. |
| 4. Conflictos con la precisión arbitraria de aproximación al límite. | Distinguir entre tender a y aproximarse (prestar atención a la arbitrariedad en la aproximación). |
| 5. Conflictos con carácter exacto o indefinido de límite. | “Definido no significa que la función lo alcance”. |

A continuación presento unas tablas con dificultades y errores para cada uno de los objetivos definidos al comienzo de este análisis cognitivo. Subrayados aparecen los errores previstos a partir de las investigaciones de Fernández Plaza (2011-2013).

FOCO 1: Continuidad. Discontinuidades locales de una función en un intervalo.

| OBJETIVOS | DIFICULTAD | ERROR |
|---|---|---|
| O1. Distinguir si una función es continua en un intervalo a partir de su gráfica. | • Diferenciar funciones continuas a partir de su gráfica. | • Pasar por alto las discontinuidades. |
| O2. Distinguir diferentes tipos de discontinuidades a partir de la gráfica de una función. | • Diferenciar los distintos tipos de discontinuidades. | • Confundir un tipo de discontinuidad con otro. |

FOCO 2: Introducción al concepto de límite finito de una función en un punto.

| OBJETIVOS | DIFICULTAD | ERROR |
|---|---|---|
| O3. Reconocer y describir fenómenos en los que se intuya el concepto de límite finito de una función en un punto usando términos relacionados. | • Encontrar fenómenos relacionados con el concepto de límite finito en un punto.<br>• Diferenciar los términos asociados con el concepto de límite finito en un punto.<br>• Conocer el algoritmo de cálculo no quiere decir que se comprenda el proceso infinito que ello implica (R2). | • Dar ejemplos de fenómenos que nada tienen que ver con el concepto de límite finito de una función en un punto. |
| O4. Justificar e interpretar el valor de límite finito de una función en un punto a partir de una tabla de valores. | • Saber interpretar los datos dados.<br>• Entender que límite es lo que ocurre en el entorno del punto y no en el punto. | • No percibir la tendencia de las imágenes cuando la variable independiente se aproxima a determinado valor.<br>• Tomar como límite el valor de la tabla o gráfica en ese punto.<br>• Confundir el límite por la derecha con el límite por la izquierda. |

| | | |
|---|---|---|
| | | • Conflictos con la precisión arbitraria de aproximación al límite (R4). |
| O5. Justificar e interpretar el valor de límite finito de una función en un punto a partir de una gráfica. | • Distinguir gráficamente el límite finito en un punto y la imagen de una función en ese mismo punto.<br>• Comprender el significado de la expresión "x tiende a".<br>• Persistencia de la idea de límite como valor no alcanzable ni rebasable (R3 y R5). | • Asociar la imagen de una función en un punto con el límite de esa función en ese punto. (R1)<br>• Equiparar el límite a un máximo o mínimo relativo (R3 y R5). |

FOCO 3: Límite finito de una función en un punto.

| OBJETIVOS | DIFICULTAD | ERROR |
|---|---|---|
| O6. Explicar y ejemplificar la definición formal del concepto de límite finito de una función en un punto. | • Comprender el lenguaje simbólico del concepto de límite finito en un punto. | • Errores al interpretar la notación en la definición formal del concepto de límite finito de una función en un punto.<br>• Confundir términos del concepto: tender a, aproximarse, alcanzar... |
| O7. Calcular el límite finito de una función en un punto cuando la función viene dada por su representación gráfica o simbólica. | • Comprender que el cálculo del límite en un punto no se realiza siempre por sustitución directa.<br>• Hallar la factorización necesaria para resolver la indeterminación 0/0. | • Sustituir directamente de forma sistemática en todos los casos.<br>• Asociar la imagen de una función en un punto con el límite de esa función en ese punto. (R1)<br>• Errores de tipo algebraico.<br>• Errores al factorizar para resolver |

| | | |
|---|---|---|
| | | indeterminación del tipo 0/0. |
| O8. Conocer y usar las operaciones con límites (suma, producto, cociente, potencia y raíz) para calcular otros límites. | • Manejar las propiedades para poder aplicarlas en el cálculo de límites. | • Uso incorrecto de las propiedades.<br>• Errores de tipo algebraico. |
| O9. Identificar los límites laterales a partir de una tabla de valores o una gráfica. | • Diferenciar límite lateral por la izquierda y por la derecha.<br>• Saber interpretar los datos o la gráfica.<br>• Dificultades para pasar de un sistema de representación a otro. | • Confundir el límite por la derecha con el límite por la izquierda. |

FOCO 4: Relación Continuidad-Límite finito de una función en un punto.

| OBJETIVOS | DIFICULTAD | ERROR |
|---|---|---|
| O10. Establecer analíticamente cuándo una función es continua en un punto (relación límites-continuidad). | • Conocer la relación límite finito de una función en un punto-Continuidad. | • Considerar de forma sistemática que no existe límite de una función en un punto si hay una discontinuidad en ese mismo punto. |
| O11. Aplicar la relación Continuidad-Límite finito de una función en un punto para determinar parámetros en funciones definidas a trozos. | • Conocer y aplicar correctamente la relación límite finito de una función en un punto-Continuidad. | • Errores de tipo algebraico. |
| O12. Clasificar discontinuidades evitables y de salto finito en una función dada. | • Conocer los tipos de discontinuidades. | • Confundir distintos tipos de discontinuidades. |
| O13. Esbozar la gráfica de una función que cumpla condiciones de continuidad o discontinuidad en determinados puntos de su dominio. | • Saber representar las condiciones dadas.<br>• Diferenciar las variables dependiente e independiente. | • Representar gráficos que no sean funciones.<br>• Confundir las variables dependiente e independiente. |

## 3.4. Ejemplificación de tareas desde los errores y dificultades previstos.

En este epígrafe voy a presentar tareas diseñadas para tratar errores y dificultades que he destacado en el epígrafe anterior.

TAREA 1: TENDER A Y APROXIMARSE

Vamos a trabajar sobre la función $f(x)=x^2$.

a) Rellena la siguiente tabla:

| x | f(x) |
|---|---|
| 1,9 | 3,61 |
| 1,99 | |
| 1,999 | |
| 1,9999 | |
| ... | |
| 2 | 4 |

i. ¿Dirías que se va aproximando la función a 5 cuando x se acerca a 2?

ii. ¿A qué otros valores se aproxima la función cuando la variable tiende a 2?

iii. ¿Cuál de las anteriores aproximaciones dirías que es "mejor"? Utiliza la expresión "tender a" para tratar de explicar la "mejor aproximación posible".

b) Rellena esta tabla y utiliza las expresiones aproximarse y tender a para definir lo que ocurre de forma análoga a lo hecho en el apartado anterior.

| x | f(x) |
|---|---|
| 2,1 | 4,41 |
| 2,01 | |
| 2,001 | |
| 2,0001 | |
| ... | |
| 2 | 4 |

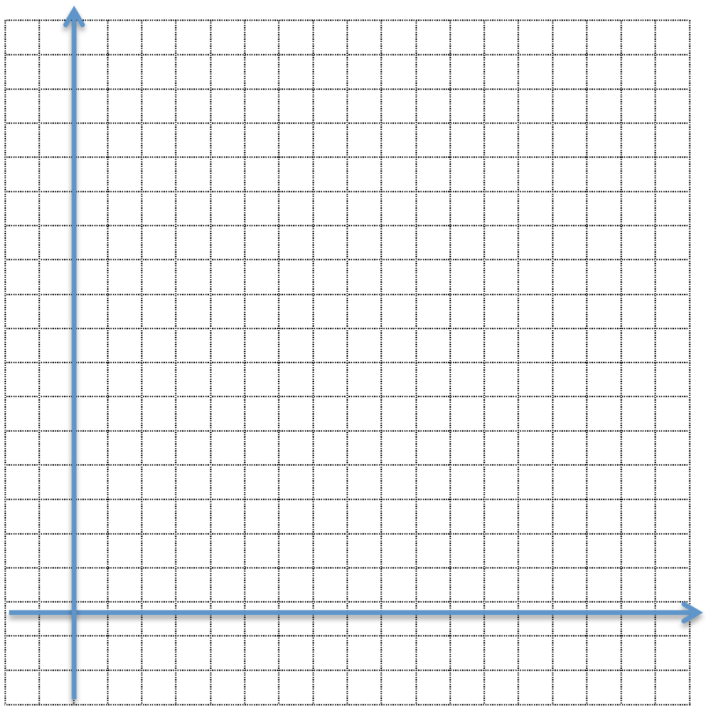
**Errores y dificultades asociados a la tarea 1:**

- No percibir la tendencia de las imágenes cuando la variable independiente se aproxima a determinado valor.
- No usar correctamente los términos tender a y aproximarse.
- <u>Conflictos con la precisión arbitraria de aproximación al límite (R4).</u>

<u>TAREA 2: ALCANZABILIDAD Y REBASABILIDAD</u>

a) El término límite se usa para describir lo que ocurre con las imágenes cuando los valores de la variable x se aproximan al valor $x_0$. Es decir **el valor al que <u>tienden</u> las imágenes cuando los originales tienden a $x_0$**. ¿Cuál es el límite de la función $f(x)=x^2$ cuando la x tiende a 2?

b) Representa la gráfica de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo [0, 3].



NOTA: Para el eje "x" la escala sería 1 segmento de cuadrícula=0,2 unidades.

Para el eje "y" la escala sería 1 segmento de cuadrícula =0,5 unidades.

c) Teniendo en cuenta el resultado del apartado c):

   i. ¿Alcanza la función el valor del límite para x=2?

ii. ¿Lo rebasa?

d) Identifica los máximos y mínimos de la función para ese intervalo.

e) Busca en un diccionario los significados de la palabra límite y diferéncialos con las connotaciones que le hemos dado a este mismo término en estas actividades.

### Errores y dificultades asociados a la tarea 2:

- Entender que límite es lo que ocurre en el entorno del punto y no en el punto.
- Persistencia de la idea de límite como valor no alcanzable ni rebasable (R3 y R5).
- Equiparar el límite a un máximo o mínimo relativo (R3 y R5).
- Confundir el eje de ordenadas y el eje de abscisas.
- Representar gráficos que no sean funciones.
- Confundir las variables dependiente e independiente.