



Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN TUTELADO:

**SIGNIFICADOS PUESTOS DE MANIFIESTO POR
ESTUDIANTES DE BACHILLERATO RESPECTO AL
CONCEPTO DE RAZÓN TRIGONOMÉTRICA.
ESTUDIO EXPLORATORIO**

Enrique Martín Fernández

Granada,

Septiembre 2013



Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

**SIGNIFICADOS PUESTOS DE MANIFIESTO POR
ESTUDIANTES DE BACHILLERATO RESPECTO AL
CONCEPTO DE RAZÓN TRIGONOMÉTRICA.
ESTUDIO EXPLORATORIO**

Trabajo de investigación tutelado, realizado bajo la dirección del Doctor Luis Rico Romero del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Enrique Martín Fernández para su aprobación por el Departamento de Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Enrique Martín Fernández

VºBº del director



Fdo. D. Luis Rico Romero

El presente trabajo de investigación tutelado se ha realizado en el seno de la línea de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento numérico* de la Universidad de Granada, desarrollada por el grupo (FQM-193) del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

A la memoria de Josefa, Antonio, Enrique

*A Maria, por quererme y admirarme como
solo las abuelas saben hacer*

*A Dolores y José, mis padres, por estar
conmigo y apoyarme siempre*

*A mis hermanos por estar siempre presentes y
tener confianza ciega en mis posibilidades de
éxito*

*A mis sobrinas por la alegría que me
transmiten*

*A Cecilia, por permanecer a mi lado en
tiempos difíciles*

*A todos los docentes por brindarme su
orientación y conocimientos*

*A todas las personas que me ayudaron a
culminar esta investigación de modo
desinteresado*

*A Dios por regalarme cada día de mi vida y
mostrarme que con paciencia todo es posible*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento al director de este trabajo, D. Luis Rico Romero, por su paciencia, dedicación y por el apoyo que me ha brindado. Agradezco así mismo sus valoraciones, consejos y las orientaciones para la consecución de esta investigación.

Al centro de Educación Secundaria Mar de Poniente (La Línea de la Concepción, Cádiz), y en particular al profesor don Antonio Enríquez Padial por permitir que sus estudiantes participen en este estudio.

Al centro de Educación Secundaria Padre Suárez (Granada), y en particular a la profesora doña Belén Espinosa por su apoyo y colaboración en la realización de esta investigación.

A la paciencia y amabilidad de los estudiantes que han participado en la realización del estudio, porque sin ellos no hubiese sido posible la realización del mismo.

Al Dr. D. Tomás Ortega del Rincón por los comentarios y sugerencias recibidas.

A la disponibilidad y ayuda recibida por parte de los docentes D^a. Elena Castro, Dra. D^a María Consuelo Cañadas, Dra. D^a. Marta Molina, y Dr. D. Enrique Castro.

A los docentes del máster de Didáctica de la Matemática por la valiosa formación que de ellos he recibido.

Por último, muestro mi gratitud a todos aquellos que colaboraron, de alguna forma, a la concreción de este trabajo.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	1
1.1 Introducción.....	1
1.2 Historia de la trigonometría.....	4
1.3 Objetivo de la investigación	5
CAPÍTULO 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	7
2.1 La investigación sobre enseñanza de la trigonometría	7
Investigaciones sobre el análisis histórico de libros de texto de trigonometría	8
Investigaciones sobre técnicas para la enseñanza de trigonometría	9
Investigaciones sobre comprensión de la trigonometría	10
2.2 Antecedentes de nuestra investigación	10
2.3 Representaciones	12
2.4 Significado de un concepto matemático escolar	14
CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO	17
3.1 Tipo de estudio y descripción general	17
3.2 Sujetos, ciclo y nivel curricular	19
3.3 Elaboración del instrumento de recogida de información.....	20
Fase I: Revisión de literatura científica y de libros de texto	21
Fase II: Diseño del estudio piloto.....	21
Fase III: Revisión tras la implementación del estudio piloto	25
Fase IV: Redacción del cuestionario Final y tareas seleccionadas para el análisis.....	27
3.4 Procedimiento de aplicación del instrumento.....	28
Estudio piloto.....	28
Estudio definitivo	29

3.5 Tipo de análisis realizado	30
3.6 Valoración de la investigación	31
Pertinencia	31
Validez.....	31
Objetividad y originalidad.....	32
Rigor y precisión	34
Capacidad para predecir y reproductibilidad.....	34
CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE DATOS.....	35
4.1 El proceso de análisis	35
4.2 Enunciados de las tareas que se analizan	37
4.3 Comparación de los resultados de los dos cuestionarios.....	37
4.4 Análisis de las respuestas a la pregunta 1 del cuestionario A	38
4.5 Análisis de las respuestas a la pregunta 1 del cuestionario B.....	43
4.6 Análisis conjunto de las respuestas a las preguntas nº1 y nº6	46
4.8 Análisis de las respuestas a la pregunta 2 del cuestionario B.....	49
4.9 Análisis conjunto de las producciones a la pregunta nº2.....	50
CAPÍTULO 5. RESULTADOS	51
5.1 Análisis de contenido de las respuestas a la pregunta nº1, cuestionario A	51
Mapa conceptual.....	51
Conceptualización histórica.....	53
5.2 Análisis de contenido de las respuestas a la pregunta nº1, cuestionario B.....	56
Mapa conceptual.....	56
5.3 Análisis conjunto de las preguntas nº1 y nº6 de los cuestionarios A y B.....	58
Mapa conceptual.....	58
Conceptualización histórica.....	60
5.4 Análisis de contenido de la pregunta nº2 de los cuestionarios A y B	61

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES	64
6.1 Logro del primer objetivo específico.....	64
6.2 Logros del segundo objetivo específico	66
6.3 Logros del tercer objetivo específico.....	67
6.4 Análisis cuantitativo del estudio piloto y estudio definitivo	68
6.5 Cuestiones 1 y 6.....	68
6.6 Cuestión 2	70
6.7 Análisis conjunto de las cuestiones 1, 2 y 6	71
6.8 Limitaciones de la investigación	71
6.9 Sugerencias para investigaciones futuras	72
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74

ANEXOS

Anexo I. Historia de la trigonometría

Anexo II. Cuestionarios pilotos implementados

Anexo III. Cuestionario definitivo implementado

Anexo IV: Transcripción de las respuestas abiertas de la cuestión 2 del estudio definitivo

 Cuestionario A

 Cuestionario B

Anexo V: Resultados análisis cuantitativo entre cuestionarios

Anexo VI. Ejemplos de representaciones

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1.. Sujetos participantes en función del estrato y cuestionario en el estudio piloto.....	20
Tabla 3.2.. Sujetos participantes en función del estrato y cuestionario en el estudio definitivo.....	20
Tabla 3.3. Análisis cuantitativo básico del estudio piloto	26
Tabla 4.1. Análisis cuantitativo estudio definitivo	38
Tabla 4.2. Frecuencia del tipo de representaciones en el cuestionario A.....	38
Tabla 4.3. Categorización de las producciones a la cuestión 1 del cuestionario A para el tema circunferencia.....	40
Tabla 4.4. Categorización de las producciones a la cuestión 1, cuestionario A, para el tema triángulo	41
Tabla 4.5. Frecuencia del tipo de representaciones en el cuestionario B	43
Tabla 4.6. Categorización de las producciones a la cuestión 1, cuestionario B, tema circunferencia	45
Tabla 4.7. Categorización de las producciones a la cuestión 1, cuestionario B, del tema triángulo.....	46
Tabla 4.8. Frecuencia del tipo de representaciones en los cuestionarios	46
Tabla 4.9. Frecuencia de temas entre las producciones en el cuestionario A.....	48
Tabla 4.10. Frecuencia de temas entre las producciones en el cuestionario B.....	49
Tabla 4.11. Frecuencia de temas entre las producciones al ítem 2.....	50

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Figura 2.1. Triángulo semántico (término).....	15
Figura 2.2. Triángulo semántico concepto	16
Figura 3.1. Estructura y ciclo del análisis didáctico	33
Figura 5.1. Relación entre las categorías establecidas para la pregunta 1 del cuestionario A	52
Figura 5.2. Estructura conceptual de la medida del ángulo mediante su seno	55
Figura 5.3. Relación entre las categorías establecidas de la pregunta 1 del cuestionario B	577
Figura 5.4. Estructura conceptual de la medida del ángulo mediante su coseno	588
Figura 5.5. Relación entre las categorías para las razones trigonométricas seno y coseno	599
Figura 5.6. Estructura conceptual de la medida del ángulo mediante las razones seno y coseno	61
Figura 5.7. Sentidos localizados a partir de los temas verbales para el ítem 2.....	63

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

La trigonometría es un apasionante tópico de las matemáticas en la escuela secundaria. Es muy abundante en conceptos y contiene no sólo conexiones a diversas otras nociones y estructuras matemáticas (Burch, 1981; Fi, 2003), sino también a otras disciplinas, como la física, la cosmografía, la ingeniería, la navegación,...etc. Una prueba de la importancia de la trigonometría y de sus interrelaciones es lo expresado por The Mathematical Association, “la trigonometría fusiona aritmética, álgebra, geometría y mecánica” (MA, 1950, p. 3). La trigonometría además tiene aplicación práctica en ciencias y tecnología (Army, 1991; Brown, 2005). Hasta el siglo XII, la trigonometría fue usada en el estudio de la astronomía, navegación y topografía. Como señala Mansfield (1972), citado por Palmer (1980), la trigonometría es utilizada en electricidad, electrónica, óptica, biología y en la exploración del espacio. Así, la trigonometría se presenta en multitud de fenómenos, los cuales se pueden clasificar en:

- 1) fenómenos de medida: tanto directa como indirecta de distancias, que se hacen presentes en topografía, cartografía,...etc; medida de ángulos, que se ponen de manifiesto en astronomía, geodesia, navegación,...etc.; cálculo de áreas y volúmenes de figuras resolubles por triangulación, que aparecen en agrimensura, etc,
- 2) fenómenos físicos, dentro de los que podríamos distinguir los de naturaleza periódica: el estudio del oleaje, el cálculo de la fase de impedancias, inductancias en electricidad, y no periódicos, como serían las aplicaciones a cinemática y dinámica, y
- 3) fenómenos interrelacionados con la propia matemática, como pueden ser el estudio de los números complejos.

Este amplio campo de actuación provoca que la trigonometría sea utilizada en todo tipo de situaciones: personales, educativas, laborales, públicas y científicas.

Según The Mathematical Association (1950), citada por Fi (2003, p.13), la trigonometría provee a los estudiantes con el conocimiento matemático necesario para resolver cuestiones matemáticas relevantes y suministra a los estudiantes una coherente visión de las matemáticas. En relación con este aspecto, Gelfand y Saul (2001) afirman que la trigonometría se sitúa en el centro de las matemáticas en la enseñanza secundaria. Por otro lado, Fi (2003) señala que “la principal característica que se puede resaltar a partir de los hallazgos de investigación, es que la trigonometría es un cuerpo de conocimiento coherente, versátil, maleable, y que puede ser abordada desde múltiples perspectivas” (p.14).

Sin embargo, la trigonometría es una parte de las matemáticas que resulta difícil de entender por los estudiantes. Hay muchos factores que podrían estar involucrados (Brown, 2005). Algunos de ellos podrían ser su complejidad, su conexión con numerosos tipos de fenómenos y sus interconexiones con otras disciplinas. En esta dificultad de los alumnos por comprender este tópico podrían influir las diversas vías de entender y representar sus nociones básicas, los modos de aproximación a la misma, nociones como la circunferencia goniométrica, los triángulos rectángulos, o las funciones trigonométricas.

A pesar de todo esto, muy poco ha sido hecho para investigar la complejidad didáctica que subyace en la trigonometría, de este modo Brown (2005) señala que “existe escasa investigación en relación a las ideas intuitivas que los estudiantes poseen sobre el estudio de la trigonometría o sobre los métodos más adecuados para enfocar y estructurar los nuevos conceptos para construir un núcleo sólido de conocimiento” (p. 10). Sin embargo, otros tópicos relacionados con trigonometría si han recibido una mayor atención, como el estudio de la comprensión de las funciones trigonométricas y la historia de la educación de la trigonometría. Ejemplos de dichas investigaciones sobre estos temas son las realizadas por Weber (2005), Dominic (2012), Allen (1977) y Sickle (2011), respectivamente. Además, la necesidad de investigar para facilitar al alumnado la superación de dificultades que se encuentran durante el proceso de enseñanza-

aprendizaje asociadas a las razones trigonométricas, ha llevado a algunos investigadores a realizar propuestas didácticas innovadoras (Blackett y Tall, 1991; Weber, 2005; Kutluka, Furkan y Zengin, 2011). Otras investigaciones en este sentido son las realizadas por Kendal y Stacey (1997), Barnes (1999), Miller (2001) y Searl (1998). No obstante, algunos autores expresan que no existen investigaciones de calidad sobre la comprensión de la trigonometría.

En la línea de mejorar la calidad de la investigación didáctica sobre este tópico se sitúa nuestro trabajo de investigación tutelada, que iniciamos en el Máster para Profesor de Educación Secundaria y Bachillerato con un trabajo consistente en el diseño de una unidad didáctica sobre las razones trigonométricas dirigida a estudiantes de bachillerato (Martín-Fernández, 2011). El actual foco de estudio consiste en explorar la comprensión de los estudiantes de primero de Bachillerato sobre las razones trigonométricas, en particular sobre los conceptos de seno y coseno, mediante análisis de las representaciones gráficas y descripciones verbales manejadas.

La revisión que he hecho de la bibliografía sobre razones trigonométricas me ha llevado a la conclusión de que, actualmente, hay un creciente interés y necesidad por la realización de investigaciones de calidad sobre las razones trigonométricas, y más concretamente sobre su comprensión. Esto pone de manifiesto la actualidad de nuestra investigación. Además, mediante el barrido bibliográfico realizado de investigaciones relacionadas sobre trigonometría, podemos afirmar que es un trabajo de investigación original en cuanto al modo de abordar el contenido tratado. Esperamos que las conclusiones de este trabajo mejoren las fuentes de información, contribuyan al diseño de una propuesta curricular renovada y proporcionen fundamento para realizar una experiencia de aula que sirva para contrastar y/o validar las conjeturas aquí planteadas.

Nos encontramos ante un estudio exploratorio y descriptivo con las siguientes características:

- Un enfoque cualitativo en la identificación, análisis y descripción de términos clave utilizados por los sujetos cuando definen las razones trigonométricas seno y coseno.

- Un enfoque cualitativo en la identificación, análisis y descripción de las representaciones utilizadas por los sujetos en las cuestiones analizadas.

1.2 Historia de la trigonometría

La historia de la trigonometría se puede estudiar desde diversas perspectivas. A continuación vamos a revisar brevemente algunos aspectos que han permitido a la trigonometría ser lo que hoy es: su motivación, la evolución de su definición y su permanencia en el currículo.

Los interrogantes que han ayudado al desarrollo del estudio de la trigonometría han variado a lo largo del tiempo. La trigonometría en sus inicios tiene una íntima relación con las estrellas, pudiéndose considerar que la trigonometría era una astronomía cuantitativa. Esta motivación fundamental, continuó asociada a los cielos hasta la edad media, donde la trigonometría comienza a considerarse como una rama de la matemática. Más tarde, el estudio de la naturaleza, permite su ampliación y su consecuente generalización.

A lo largo de la historia, también la definición de cada una de las nociones que abarca la trigonometría se ha modificado. Así, en sus comienzos, el seno se asoció a la cuerda del arco (segmento), para más tarde relacionarse con la semicuerda. Después, se relacionó el seno, es decir, la semicuerda, con el ángulo (no con el arco) en el triángulo, adquiriendo éste una mayor relevancia. Otras nociones fueron apareciendo, como el coseno, y posteriormente la tangente, esta última asociada al mundo de las sombras, pero siempre relacionadas con segmentos. En el siglo XVII, con el desarrollo de la goniometría, las razones trigonométricas llegan a ser consideradas simplemente números asociados a un ángulo, ordenadas y valores de distintas funciones. Finalmente, también aparece la definición de razón. Son muchas las interpretaciones de las razones trigonométricas a lo largo de la historia, muestra inequívoca de la complejidad que este tópico tiene, de las cuestiones que aborda y del interés que presenta para su proceso de enseñanza y aprendizaje.

La trigonometría forma parte del programa moderno de matemáticas que surgió de la reunión auspiciada por la OECE en Dubrownik en 1960. Quizás, motivado por ello,

la trigonometría ha permanecido en los planes de formación de la LGE de 1970, de la LOGSE de 1990 y de la LOE 2006, formando parte del currículo del siglo XXI. Debido a que la trigonometría ha permanecido en el plan de formación de la enseñanza secundaria estos últimos 50 años, a su importancia histórica y a sus aplicaciones, podemos predecir que formará parte del programa de formación de los estudiantes de secundaria de generaciones futuras. Aún así, es poco el conocimiento basado en investigación que poseemos sobre la enseñanza y el aprendizaje de este tema.

1.3 Objetivo de la investigación

Esta sección establece las preguntas de investigación de este estudio. Las preguntas surgen tanto desde un interés personal, iniciado con la realización del Máster Universitario de formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas en la universidad de Granada, como de la revisión de la literatura relacionada con el tópico trigonometría.

El estudio se propone dar respuesta a los siguientes interrogantes:

¿Cómo expresan los estudiantes gráfica, verbal y simbólicamente sus concepciones intuitivas sobre los conceptos de seno y coseno? ¿Qué tipo de representaciones utilizan para mostrar el seno y el coseno de un ángulo determinado?

¿Qué conceptos y nociones utilizan los estudiantes para describir las razones trigonométricas seno y coseno? ¿Qué usos específicos hacen de estas nociones?

¿Cómo interpretan y responden a tareas vinculadas con dichos conceptos?

El objetivo general que persigue esta investigación es el siguiente:

“Explorar y describir las nociones, representaciones y conceptos que los estudiantes ponen de manifiesto cuando expresan el significado de las razones trigonométricas mediante descripciones verbales, notaciones gráficas y simbólicas y sus relaciones”.

Los objetivos específicos en los que podemos desglosar el objetivo general del estudio son:

1. Diseñar e implementar un instrumento con el cual recoger información en registro verbal, simbólico y gráfico referente a los conceptos de seno y coseno.

2. Identificar categorías para organizar las respuestas que proporcionan los estudiantes al abordar tareas de enunciado verbal y gráfico sobre razones trigonométricas; relacionar entre sí e interpretar las categorías establecidas.
3. Inferir los significados que ponen de manifiesto los estudiantes sobre los conceptos seno y coseno teniendo en cuenta sus respuestas ante las tareas planteadas.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La fundamentación teórica que se incluye en este capítulo trata varios aspectos relacionados con la investigación realizada. En primer lugar, realizamos una revisión bibliográfica y presentamos de modo comprensivo los antecedentes de estudios sobre el tema y de aquellos otros resultados que se consideran significativos acerca de las concepciones intuitivas y de las representaciones de las razones trigonométricas.

Para la realización de la revisión bibliográfica se han utilizado: buscadores de internet como Google y Google scholar, el repositorio Digibug y bases de datos como Dialnet, Teseo, Scopus, Wos y Proquest Dissertations and Thesis. Los términos clave utilizados fueron: trigonometry, trigonometric, trigonometry education, razones, razones trigonométricas y trigonometría.

En segundo lugar, se aborda de manera sucinta y se delimita conceptualmente una cierta interpretación de la noción de representación en educación matemática debido a la gran diversidad de formas de entender dicho término observadas en la literatura científica.

En tercer lugar, precisamos la noción de significado de un concepto matemático que utilizaremos en este estudio, motivada por la pluralidad de modos de interpretar dicha idea observada en la revisión bibliográfica.

2.1 La investigación sobre enseñanza de la trigonometría

Merkel (1982) en su publicación *Trigonometry -forgotten and abused-*, expresaba su preocupación sobre la escasa atención que se le otorgaba en la escuela secundaria a la

trigonometría, de modo que alumnos que llegaban a estudios universitarios tenían grandes lagunas en los conceptos trigonométricos más fundamentales. Aunque la trigonometría es uno de los primeros tópicos que vincula el álgebra, la geometría y el razonamiento gráfico, no se le ha prestado la atención que merece (Weber, 2005).

A continuación se presentan y describen, brevemente, algunas de las investigaciones centradas en los cambios que se han producido en la enseñanza de la trigonometría en los dos últimos siglos.

Investigaciones sobre el análisis histórico de libros de texto de trigonometría

El conocimiento sobre la historia de las matemáticas tiene implicaciones sobre la enseñanza de las matemáticas (Cajori, 1890, pp. 1-3). Más concretamente, una mejor comprensión de la historia de la trigonometría y de la historia de la educación sobre trigonometría ayudará a investigadores de educación matemática y a profesores, y servirá para la consideración, estudio e implementación de futuras acciones.

Allen (1977) analiza los libros de texto sobre trigonometría publicados entre 1890 y 1970 en los Estados Unidos y Canadá en la escuela secundaria, resaltando los cambios en relación al contenido y a las diferentes aproximaciones y tendencias que se consideraron durante ese periodo. Mientras que al comienzo de dicho período, el seno y el coseno eran definidos como proporciones, a mitad del siglo XX, apareció una nueva aproximación en la que el seno y el coseno eran entendidos como coordenadas. Es decir, como señala Allen (1977, p. 23), citado por Sikle (2011), se produjo un cambio de un mayor énfasis geométrico y numérico hasta un enfoque de carácter analítico y funcional.

Sickle (2011) analiza los libros de textos utilizados en las universidades de los Estados Unidos desde 1776 hasta 1900. En ellos se pone de manifiesto que la primera forma de enseñar la trigonometría era usando exclusivamente el “line system”, el cual define los conceptos principales de la trigonometría como segmentos en un círculo (Figura 2.1). Más tarde la trigonometría fue enseñada con el “ratio system”, (Figura 2.2) donde las razones trigonométricas para ángulos entre 0 y 90° eran definidas como proporciones de lados de un triángulo. Smith (1958), citado por Dominic (2011, p.38)

expone que fue Simon Klugel el primero que definió las razones trigonométricas como proporciones.

Investigaciones sobre técnicas para la enseñanza de trigonometría

A continuación enumeramos y describimos algunas de las investigaciones halladas en la revisión de la literatura científica realizada.

Army (1991), investiga una aproximación a la enseñanza de la trigonometría usando situaciones reales y calculadora gráfica en la enseñanza universitaria. Entre sus hallazgos se encuentran que el uso de la calculadora gráfica tenía un efecto positivo en la enseñanza de la trigonometría.

Blackett y Tall (1991) examinan dos grupos de estudiantes con el objetivo de analizar los beneficios del uso de software interactivo con gráficos en trigonometría, el cual debiera facilitar a los estudiantes establecer relaciones numéricas y geométricas. El experimento confirmó la hipótesis según la cual este tratamiento ayudaba al grupo experimental a mejorar sus resultados al compararlos con el grupo de control. Además, mostró que la mejoría era superior en la población femenina que en la masculina.

En otro estudio, Kendal y Stacey (1998) exploran las diferencias entre dos aproximaciones para la introducción de la trigonometría al alumnado, una, la basada en la relación entre longitudes de los lados en un triángulo rectángulo y, otra, la aproximación mediante la circunferencia unidad, en la que el coseno y el seno son definidos como las coordenadas x e y de un punto en la circunferencia goniométrica. Finalmente, sugieren que la trigonometría debe ser introducida mediante el uso de la circunferencia unidad, conectando ésta a la definición como cociente, que sería la que se utilizaría para la solución de triángulos rectángulos.

Thompson (2007) investiga cómo el tomar una situación del mundo real como punto de partida para planificar una unidad didáctica sobre trigonometría, podría favorecer la comprensión de los estudiantes. Además, intenta hallar una aproximación alternativa a dicho contenido.

Bressoud (2010) concentrándose en la dicotomía existente entre la introducción de la trigonometría mediante un triángulo rectángulo o bien mediante la circunferencia

goniométrica, utiliza la historia de la trigonometría para razonar cómo debería ser enseñada. Así, concluye que la introducción de la trigonometría mediante el triángulo rectángulo es un atajo en la enseñanza y aprendizaje de la misma y, como la mayoría de los atajos, tiene sus contraindicaciones.

Zengin, Furkan y Kutluca (2011) determinan los efectos del software de geometría dinámica llamado Geogebra en la comprensión de los estudiantes de trigonometría. Para ello utilizan dos grupos, uno experimental, que se sometió a sesiones con dicho software, y otro de control. Sus hallazgos ponen de manifiesto que existe una clara diferencia a favor del grupo experimental que asistió a sesiones con dicho software. El estudio muestra que una instrucción asistida con dicho software, como suplemento para promover un aprendizaje constructivista, es más efectivo que una simple metodología constructivista.

Investigaciones sobre comprensión de la trigonometría

Weber (2005), investiga la comprensión de los alumnos sobre las funciones trigonométricas tras la aplicación de un paradigma de instrucción experimental basado en la noción de “procept” y el “process-object” de las teorías de aprendizaje de Gray y Tall (1994). Concluye que el grupo experimental desarrolla un entendimiento más profundo de las funciones trigonométricas.

Brown (2005), investiga las nociones que poseen los alumnos al comienzo del aprendizaje de la trigonometría en el plano de coordenadas, describiendo el contenido matemático y las ideas que tienen cuando se encuentran con este tema. Así, crea dos marcos conceptuales para describir tanto el contenido como el modo en que los alumnos comprenden dicho contenido.

2.2 Antecedentes de nuestra investigación

Como señala Davis (2005), citado por Byers (2010), aunque hay bastantes estudios relacionados con la representaciones sobre la enseñanza y aprendizaje sobre fracciones, álgebra y otros tópicos en Educación Matemática, se ha prestado mucha menos atención al uso de las representaciones en trigonometría.

Por otro lado, el estudio de la trigonometría presenta al estudiante diversas representaciones (Weber, 2008, pp. 1-2) que son únicas de este tópico, animando a los estudiantes a relacionarlas y a que éstos alcancen una mayor comprensión del tema. Dentro de los estudios existentes sobre trigonometría, se pueden indicar algunos aspectos referidos a las representaciones que nos podemos encontrar durante la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría. A continuación indico algunos de ellos.

Brown (2005, p. 11) crea dos marcos teóricos sobre cómo se describe el contenido y la forma en que los estudiantes lo entienden, centrándose en el paso del triángulo rectángulo a las coordenadas del plano de las funciones seno y coseno. Además, afirma que la funciones seno y coseno son preferentemente representadas como coordenadas, distancias y cocientes. Más concretamente, como coordenadas de un punto de la circunferencia goniométrica, como distancias horizontales y verticales respecto a unos ejes y, también, como cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo dado un ángulo de referencia (Brown, 2006, p. 237).

Weber (2008, pp. 1-2), utilizando la investigación anteriormente mencionada, afirma que existen dos formas principales en que se representan las funciones trigonométricas: como cociente y como función.

Byers (2010, pp. 1-5) investiga el tratamiento dado a las representaciones trigonométricas en libros de texto de enseñanza secundaria y de universidad. El objetivo era identificar dificultades potenciales en esa etapa de transición. Además, el estudio permitió, a través del análisis de datos, la identificación de seis dominios conceptuales que caracterizan las representaciones de las funciones trigonométricas:

1. Los cocientes trigonométricos
2. La función trigonométrica.
3. La circunferencia unidad.
4. La onda sinusoidal.
5. El vector.
6. El triángulo rectángulo.

2.3 Representaciones

Rico señala que “la noción de representación es un concepto clave en la filosofía del conocimiento, que se ha manejado y sometido a crítica de manera sistemática” (p. 2). La historia de la filosofía muestra la riqueza de sentidos e interpretación que tiene este concepto (Ferrater, 1981; Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1990).

Rico (2009) señala también que:

En la década de los 80 se detecta un empleo sistemático de la noción de representación en Educación Matemática. En estos trabajos, el concepto de representación se toma como equivalente a una señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los sujetos piensan las matemáticas e, incluso, como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas (p. 3).

Hiebert y Carpenter (1992) expresan la existencia de dos tipos de representaciones:

Para pensar sobre ideas matemáticas y comunicarlas necesitamos representarlas de algún modo. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. (...) Para pensar sobre ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente, de manera que permita a la mente operar sobre ellas (p. 66).

Kaput (1987) subraya la dualidad representante-representado:

El concepto de representación da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas. Uno de estos entes se denomina el objeto representante (símbolo o representación), el otro es el objeto representado (concepto), también está implícita cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representantes y el mundo de los objetos representados (p. 23).

Duval (1993) señala la existencia de diversas representaciones de un mismo objeto, y su importancia en la comprensión del mismo:

Una escritura, una notación, un símbolo representan un objeto matemático: un número, una función, un vector (...) Así mismo, los trazos, las figuras representan objetos matemáticos: un segmento, un punto, un círculo (...) Ello quiere decir que los objetos matemáticos no deben ser confundidos jamás con su representación (...) La distinción entre un objeto y su representación es un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas (p. 2)

Varios de los trabajos del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* incluyen nociones muy elaboradas del concepto de representación (Castro, 1994; Bedoya, 2002). Rico (2009) subraya que entiende por representación “todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas” (p.3).

En este trabajo se va a considerar la definición dada por Castro y Castro (1997):

Las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características más relevantes (...). Por representación entendemos cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación.

Para la construcción del instrumento de recogida de datos en nuestra investigación, se han considerado fundamentalmente los sistemas de representación verbal (véanse ítems 2, 4 y 8), simbólico (véanse ítems 3, 5 y 7), y gráfico (véanse ítems 1 y 6) de las nociones trigonométricas seno y coseno.

Finalmente, se quiere subrayar que como señala David (2005), citado por Byers (2010), aunque hay muchas investigaciones sobre las representaciones en diversas áreas

de la Educación matemática, no se ha prestado suficiente atención a cómo los estudiantes usan múltiples representaciones en el aprendizaje de la trigonometría.

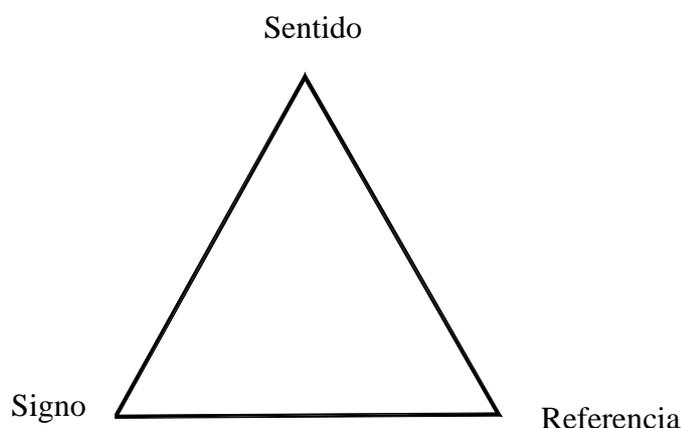
2.4 Significado de un concepto matemático escolar

En esta apartado se presenta la noción de significado que se va a utilizar durante este informe. Para aclarar dicho concepto se revisará a Eco (1990), Frege (1998), Gómez (2007), y Rico (2007).

La noción de significado ha sido tema de debate desde tiempos antiguos. Un ejemplo de ello es que a lo largo de la tradición filosófica, lingüística y semiótica, se han considerado equivalentes a significado todos estos términos: sentido, contenido, significado, significatio, signifié, signified, meaning, bedeutung, denotación, connotación, intención, referencia, sense, sinn, denotatum, significatum (Eco, 1990, p.75). Aristóteles inicia la búsqueda de dicha noción dando a entender que las palabras son los signos de las ideas y las ideas son los signos de las cosas (Rojas, 2010, p. 57). Estas ideas se han moldeado con el transcurso del tiempo e incluso han aparecido distintas escuelas apoyando diversas concepciones de significado. Así Platón, Aristóteles y la escuela estoica ya habían abordado lo que llamamos el triángulo semiótico pero, aunque todos establecían la diferencia entre referencia y significado, no coincidían al caracterizar cada una de las entidades que componían el significado de un término (Eco, 1990, pp. 75-80). Considerando esta dificultad en la definición de significado, Ullman (1976) afirma que “el significado es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje” (p.62).

Frege (1998, pp. 84-111) estableció la diferencia entre signo y significado, y dentro de éste último distinguió entre sentido y referencia. Así, actualizando los primeros triángulos semánticos, la noción de significado vendría esquematizada mediante la siguiente figura.

Figura 2.1

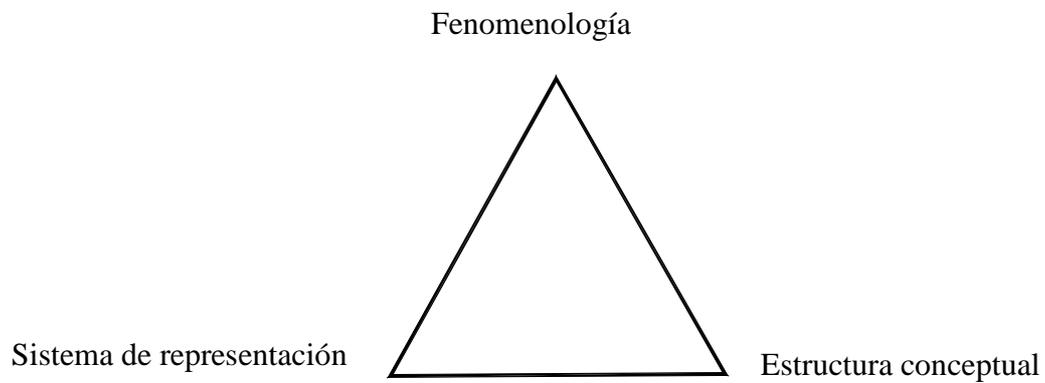
Triángulo semántico concepto

En ella, la referencia viene dada por los aspectos formales que evalúan la veracidad de las proposiciones derivadas del concepto propiamente dicho, el signo es el término o señal mediante el que se expresa, y su sentido es la forma de darse de ese objeto.

El aprendizaje del alumnado va a venir supeditado y guiado por la construcción de significados, los cuales se realizan en su mayoría en clase (Biehler, 2004; Bromme y Steinbring, 1994; Gómez, 2007a). Revisando la discusión de Gómez (2007a, p. 8) sobre el análisis didáctico en la formación inicial de los profesores de matemáticas de secundaria, éste incluye que la construcción de significados por parte de escolares en el aula vendrá determinada por la forma de expresarlos, usarlos, relacionarlos y justificarlos que se establece para una noción o nociones matemáticas.

La propuesta, expuesta por Rico (2007) e incluida por Gómez (2007b), determina el significado de un concepto matemático escolar considerando tres componentes, los cuales vamos a utilizar en esta investigación para abordar el significado de las razones trigonométricas seno y coseno. Dichos componentes se corresponden con la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología. Los sistemas de representación, se asocian a los signos, gráficos y reglas que hacen presente al concepto y lo relacionan con otros; la estructura conceptual, incluye los conceptos y propiedades, los argumentos y proposiciones y los criterios de veracidad que de ellos se derivan; la fenomenología, abarca todos aquellos fenómenos, contextos y situaciones en los que se presenta el concepto o pueden darle sentido. (Ver figura 3.2)

Figura 2.2

Triángulo semántico concepto matemático escolar

Finalmente, no se tiene constancia de la existencia de investigaciones sobre este tópico considerando este enfoque, lo cual hace original e innovador nuestro estudio.

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se presenta y explica el enfoque metodológico utilizado en el presente trabajo. Se caracterizará la investigación, se describirán las características de la muestra de sujetos participantes en el estudio, el proceso de la elaboración de los instrumentos de recogida de datos, el procedimiento de aplicación de los instrumentos, y el procedimiento seguido en el análisis de datos. La descripción del proceso de diseño de los instrumentos de recogida de datos incluye una sesión de trabajo con el Dr. Ortega, de la Universidad de Valladolid, y el desarrollo de un estudio piloto realizado antes del estudio definitivo.

3.1 Tipo de estudio y descripción general

El interés de esta investigación se pone de manifiesto en la revisión bibliográfica realizada. Además, como indica el simposio de la sociedad británica de aprendizaje de matemáticas realizado en marzo de 2010, se observa una escasez de resultados relevantes y de investigaciones de calidad en relación a la trigonometría, más en concreto respecto a su comprensión y entendimiento. Es necesario, por tanto, mayor y mejor información sobre las concepciones e intuiciones que manejan los estudiantes de bachillerato respecto a las razones trigonométricas. En este marco, esta investigación se centra en delimitar, describir y caracterizar los significados puestos de manifiesto por estudiantes españoles de primero de Bachillerato sobre las razones trigonométricas seno y coseno.

La investigación que aquí se presenta posee una naturaleza exploratoria. En primer lugar, el trabajo se considera exploratorio porque se realiza con el objetivo de examinar un tema o problema de investigación poco estudiado, los significados que los alumnos

dan a las razones trigonométricas seno y coseno, del cual se tienen escasos conocimientos y que comprende aspectos que no se han abordado previamente. Esto se hace patente en la revisión de la literatura. En segundo lugar, la perspectiva elegida para la realización de la investigación es innovadora. Se centra en los significados sobre una noción destacada de las matemáticas escolares, con un aparato crítico de análisis derivado del triángulo semántico de Frege.

El estudio se puede considerar también descriptivo. Esto es debido a que se ha planificado con la intención de recoger información para describir y especificar propiedades y características de los distintos significados –cómo lo entienden, utilizan e interpretan- mostrados por los alumnos sobre las razones trigonométricas seno y coseno. Además, ello permitirá recopilar datos sobre la comprensión de los estudiantes con el fin de, en un futuro, diseñar una propuesta de innovación curricular sobre este campo de la matemática escolar, basada en los datos y resultados previamente obtenidos.

El instrumento de recogida de datos consta de dos cuestionarios. Las tareas que se proponen proceden de estudios previos, de cuestiones readaptadas y completadas; también de las reuniones entre el investigador, Enrique Martín Fernández, su tutor Dr. Rico y el consultor, Dr. Ortega, así como del estudio piloto realizado.

La información recogida procede de dos grupos de estudiantes seleccionados intencionalmente, a los que se les proponen dos cuestionarios elaborados por los investigadores de acuerdo con los objetivos de la investigación. No se intenta generalizar resultados a contextos más amplios, sino que se pretende particularizarlos, para profundizar sobre ellos en un contexto determinado.

En relación al análisis de datos llevado a cabo, se realiza una categorización de respuestas, observándose vínculos entre las representaciones verbal y gráfica. A continuación, se analizan las respuestas con un enfoque cualitativo para, finalmente, interpretar conjuntamente los ítems analizados.

Finalmente según la dimensión temporal es un estudio transversal realizado en un momento determinado (León y Montero, 1997, p. 327).

3.2 Sujetos, ciclo y nivel curricular

La población de referencia de este estudio consiste en el conjunto de alumnos de la ciudad de Granada, matriculados en la asignatura de Matemáticas I, especialidad científica tecnológica, del primer año de bachillerato, curso 2012-2013.

La muestra se elige por disponibilidad y la forman 74 estudiantes de primer curso de Bachillerato, con edades comprendidas entre los 16 y 17 años, matriculados durante el curso académico 2012-2013 en la asignatura Matemáticas I mencionada, en el Instituto de Educación Secundaria Padre Suárez (Granada), el cual cuenta con una línea 4 en primero de bachillerato.

Previa a la implementación de los cuestionarios, el equipo investigador se puso en contacto con la jefa del departamento de Matemáticas de dicho Instituto, D^a. Belén Espinosa, para estudiar la viabilidad, las condiciones y la fecha óptima para realizar dicha prueba. Tras consultar con sus compañeros de departamento, éstos autorizaron la implementación del cuestionario a los tres grupos en los que se impartía Matemáticas I.

Por otro lado, es importante tener en consideración que los estudiantes ya habían recibido instrucción previa sobre las nociones de trigonometría durante el curso 2011/2012, durante el cual cursaron en su mayoría, 4º curso de la E.S.O. opción B. En el presente curso 2012/2013, en el momento de la aplicación del cuestionario, los estudiantes habían desarrollado varias sesiones de trabajo sobre trigonometría. Uno de los grupos había finalizado dicha unidad didáctica, a otro le faltaba únicamente realizar la última prueba de evaluación, el examen, y el tercero estaba a punto de finalizar también la unidad didáctica.

Las circunstancias anteriormente mencionadas sobre el estado de la impartición de las enseñanzas sobre trigonometría han podido influir en las respuestas dadas a las preguntas planteadas en el cuestionario. Las concepciones que infiramos del estudio no serán espontáneas e intuitivas ya que tales concepciones estarán mediadas por el libro de texto, por las propias concepciones de los profesores y por el trabajo realizado en clase. La aplicación final del cuestionario vino precedida de una prueba piloto, que se describirá más adelante, cuyos resultados sirvieron para mejorar el cuestionario.

Además, tras una reunión mantenida el día 27 de febrero de 2013, entre el equipo de investigación con el Dr. Ortega, se consideró adecuado realizar una estratificación de la muestra, para conseguir una distribución uniforme de los cuestionarios, obteniendo respuestas lo más representativas posibles. Así, se hicieron grupos en función de las calificaciones de los alumnos. Se consideraron tres grupos: grupo 1, con calificación 0-3; grupo 2, con calificación 3-7 y grupo 3, con calificación 7-10. A cada grupo se le darían aproximadamente el mismo número de cuestionarios A y B. La siguiente tabla recoge la distribución realizada tanto en el estudio piloto como en el estudio definitivo.

Tabla 3.1.

Sujetos participantes en función del estrato y cuestionario en el estudio piloto

Cuestionario	Estratos		
	Estrato 1	Estrato 2	Estrato 3
A	6	5	3
B	5	5	3

Tabla 3.2.

Sujetos participantes en función del estrato y cuestionario en el estudio definitivo

Cuestionario	Estratos		
	Estrato 1	Estrato 2	Estrato 3
A	12	14	11
B	10	17	10

Finalmente, no se registran otras características reseñables que pudieran sesgar los resultados finales de este estudio.

3.3 Elaboración del instrumento de recogida de información

El instrumento de recogida de datos fue un cuestionario de respuesta abierta elaborado expresamente para este estudio en las siguientes fases:

Fase I: Revisión de literatura científica y de libros de texto

En esta fase se realizó una revisión de la literatura científica y de libros de texto para seleccionar un conjunto de actividades relacionadas con las razones trigonométricas seno, coseno y tangente que alcanzaran toda su complejidad.

Los estudios empíricos consultados fueron: Fi (2003), Weber (2005), Brown (2005) y Dominic (2012).

Los libros de texto consultados fueron los siguientes: *Trigonometría* (1998), Ibáñez, Ortega y Piñeiro, editorial Síntesis; *Matemáticas 1* (2010), Proyecto Tesela, Bescós y Pena, Editorial Oxford; *Matemáticas I* (2008), Arias y Maza, editorial Bruño; *Matemáticas 1* (2008), Vizmanos, Hernández, Alcalde, Moreno y Serrano, editorial S.M.

Se seleccionaron 12 actividades originales, entre investigaciones y libros de texto, las cuales se sometieron a un análisis, revisión y filtrado posterior.

Fase II: Diseño del estudio piloto

Adecuación de ítems

Tras seleccionar un grupo de actividades, se llevó a cabo el análisis de cada una de ellas. Este análisis incluía qué información iba a proporcionar cada ítem y qué respuestas eran las esperadas por parte del alumnado. Mediante diversas reuniones con el tutor de este trabajo, las preguntas comenzaron a reducirse en número y a refinarse. De 12 actividades originales, se pasaron a 6.

Reducción del contenido abordado en el estudio

Posteriormente se redujeron los contenidos abordados por el cuestionario. En principio se había considerado que la investigación iba a tratar sobre tres razones trigonométricas: el seno, el coseno y la tangente. Sin embargo, tras debatirlo con el equipo de investigación, y consultar al Dr. Ortega en la reunión de trabajo anteriormente citada mantenida con él, se llegó a la conclusión de que la tangente se debería de abordar con un tratamiento diferente, por lo cual se limitó la investigación a las razones trigonométricas seno y coseno. Esta decisión se apoya en que la tangente se ha

mantenido en el estudio de las sombras y lejos de la trigonometría formal, lo cual ha supuesto una barrera conceptual. Así, por ejemplo, las tablas de la cotangente fueron conocidas como funciones de las “sombras”, donde el argumento es constantemente especificado como una altitud más que como un arco (Van Brummelen, 2009, p. 149-151). Incluso Regiomontano intentó evitarlas en su obra de *De triangulis omnimodis* (Boyer, 1986, pp. 352-353). Claramente, la función tangente ha seguido otro recorrido histórico y conceptual para llegar a nosotros. Otros aspectos que nos ayudaron a tomar esta decisión son sus características como función: su periodo, es π en vez de 2π , la posesión de asíntotas verticales en vez de horizontales,...etc.

Reunión con el consultor, Dr. Ortega. Ampliación del cuestionario.

El equipo de investigación mantuvo una reunión el día 27 de Febrero de 2013 con el Dr. Ortega en relación a esta investigación. El Dr. Ortega hizo una serie de observaciones sobre el trabajo realizado hasta la fecha. A continuación se indican sus valoraciones.

1. Consideró necesaria una discriminación, es decir la diferenciación entre dos objetos, propiedades o ideas. En nuestro caso consiste en la diferenciación entre el seno y el coseno. Basándose en las cuatro categorías de Sierpinska (1999) sobre los actos de comprensión en un contexto matemático, que incluyen la identificación –la percepción de objetos que corresponden a la denominación de un concepto-, la discriminación, la generalización –la extensión del rango de aplicaciones- y la síntesis –aprender relaciones entre dos o más hechos, objetos o propiedades y organizarlos en un todo consistente-, se observó que todos ellos estaban recogidos, excepto la discriminación en los diferentes ítems del cuestionario piloto. Así, se estudiaron distintos tipos de ítem relativos a este acto de comprensión para finalmente, ante diversas opciones de cuestiones, decidirse por la inclusión de la pregunta 6 en el cuestionario piloto, que se implementó en el I.E.S. Mar de Poniente. Este ítem se mantuvo en la posterior aplicación del cuestionario definitivo en I.E.S. Padre Suarez. Más concretamente y en relación a las categorías de Sierpinska, principalmente la identificación se encontraría recogida en las preguntas 1, 2 y 3, y la generalización y síntesis en los ítems 4 y 5.

2. Introducción de preguntas intercaladas referidas al seno y al coseno en el mismo cuestionario. El motivo era la posibilidad de que los ítems referidos al coseno tuviesen mayor dificultad que los del seno o viceversa. Finalmente, no se considero oportuno incluir esta observación en el estudio ya que se consideró más adecuado para solventar este problema la estratificación de la muestra indicada en el punto 3.2.
3. Modificación del ítem 3. El cambio consistiría en modificar el tipo de triángulo –equilátero- utilizado, de modo que se muestre un triángulo obtusángulo. Finalmente se optó en el estudio piloto por realizar las preguntas del cuestionario del seno con un triángulo equilátero y las preguntas del coseno con un triángulo obtusángulo y observar cómo el alumnado se comportaba ante dichas tareas. Además, sugirió el modificar la orientación de dichos triángulos. Esta consideración no se puso en práctica debido a que, fundamentalmente, el estudio no se propone establecer si los alumnos saben o no saben las razones trigonométricas, sino que se intenta conocer lo que entienden o comprenden sobre la noción de razón trigonométrica asociada al seno y coseno.
4. No consideró necesario incluir un cuestionario para los docentes que impartan clases al alumnado, debido al escaso número de profesores y a su limitada representatividad.
5. Necesidad de revisión de otras preguntas.

Organización y particularidades de los cuestionarios del estudio piloto

Finalmente, tras diversas reuniones posteriores, con el tutor del trabajo, se alcanzó un consenso en relación a los cuestionarios del estudio piloto. Durante esas sesiones se observó que la propuesta inicial no cubría o repetía ciertos aspectos que se querían tratar en el cuestionario, por lo que las actividades fueron modificadas, adaptadas y rediseñadas para conseguir abarcar desde una perspectiva nueva, la del análisis didáctico, lo que se entiende por razón trigonométrica seno y razón trigonométrica coseno.

Describimos brevemente las cuestiones incluidas en los cuestionarios del estudio piloto y que se recogen en el anexo II.

Ítem 1. “Haz un dibujo en que se muestre $\text{sen}(30^\circ)$ ”.

En esta cuestión se espera que los sujetos representen el $\text{sen}(30^\circ)$ o el $\text{cos}(30^\circ)$, además de averiguar las preferencias en cuanto a su representación y en cierta medida el grado de comprensión de la razón trigonométrica $\text{sen}(30^\circ)$ y $\text{cos}(30^\circ)$, el cual vendrá dada en función de la representación o del número de ellas utilizadas.

Ítem 2. “Explica verbalmente qué entiendes por $\text{sen}(45^\circ)$ ”.

Esta pregunta se asocia al sistema de representación verbal fundamentalmente. Con ella, se intenta conocer qué interpretan los alumnos por $\text{sen}(45^\circ)$ y $\text{cos}(45^\circ)$, qué preferencias tienen y qué términos clave son los utilizados por el alumnado.

Ítem 3. “Utilizando la figura, indica $\text{sen}(30^\circ)$ ”.

Esta cuestión es diferente en los cuestionarios A y B, ya que aunque el enunciado es igual en ambos cuestionarios, mientras que en el cuestionario B involucra un triángulo acutángulo, en el cuestionario A se trabaja con un triángulo obtusángulo. Con ella se espera que el alumnado indique el seno o coseno del ángulo dado utilizando una figura dada. Así, nos proporcionarán información relativa a la conexión del triángulo y las razones trigonométricas, averiguaremos si el alumnado sabe dibujar las alturas de un triángulo, distinguir sus elementos y en definitiva, si saben calcular las razones trigonométricas seno y coseno de ángulos agudos dado un triángulo acutángulo (cuestionario B), o un triángulo obtusángulo (cuestionario A).

Ítem 4. “Observa en la figura el ángulo de 30° , ¿qué expresa el seno del ángulo?”.

Esta pregunta propone al alumno que generalice la razón trigonométrica. Además, con ella se intenta observar si el alumnado reconoce la adimensionalidad de la razón trigonométrica seno y coseno.

Ítem 5. “Utilizando los datos de la figura, escribe el valor de $\text{sen}(30^\circ)$ ”.

Esta cuestión intenta averiguar si el alumnado conoce la definición de la razón trigonométrica, si distinguen los elementos de un triángulo rectángulo y si alcanzan a averiguar que la razón trigonométrica sólo depende del ángulo.

Ítem 6. “Haz un dibujo que muestre alguna diferencia entre el seno y el coseno de un mismo ángulo”.

Esta tarea se vincula a una de las categorías de comprensión, la discriminación, establecida por Sierpinska (1990). Esta tarea vincula varios sistemas de representación, incluyéndose el gráfico y el simbólico, pidiendo a los sujetos que realicen un dibujo mostrando alguna diferencia entre en seno y el coseno de un mismo ángulo.

De este modo, los cuestionarios a implementar quedaron reducidos a dos, uno referido al seno y otro al coseno, con seis preguntas cada uno y con un total de once preguntas diferentes. (La pregunta 6 es igual en ambos cuestionarios). Éstos se encuentran recogidos en el anexo II.

Fase III: Revisión tras la implementación del estudio piloto

Tras la aplicación y el análisis posterior de los resultados del estudio piloto se consideró la necesidad de modificar algunas preguntas e incluir otras nuevas, enfocadas a algunos aspectos no recogidos en la versión previa.

Nuevas preguntas

La posibilidad de incluir nuevas cuestiones fue sugerida por el tiempo, aproximadamente 30 minutos, que ocupó a los sujetos la terminación del cuestionario del estudio piloto.

Para abarcar los tres componentes que determinan un concepto matemático escolar, se vio la necesidad de introducir un ítem relativo a la fenomenología, asociado a las razones trigonométricas seno y coseno. Además, en la revisión de la literatura realizada en el capítulo 2 de este informe, queda patente la escasa investigación realizada para relacionar las situaciones reales y las razones trigonométricas. De este modo, con la motivación de indagar en los fenómenos, contextos y situaciones en los que se presenta el concepto o pueden darle sentido, se incluyó la pregunta 8.

Además, se introdujo otra cuestión para averiguar la mayor o menor dificultad, del cálculo de la razón trigonométrica, cuando éste se relaciona con un triángulo acutángulo o a un triángulo obtusángulo. La consideración de la inclusión de esta pregunta surge, tras la realización de un análisis cuantitativo básico de las respuestas del estudio piloto, en el cual se obtuvieron los siguientes resultados.

Tabla 3.3

Análisis cuantitativo básico del estudio piloto

Ítem	Análisis cuantitativo básico del estudio piloto			
	Cuestionario A		Cuestionario B	
	Fr	%	Fr	%
1	9	64,29	3	21,43
2	9	64,29	5	35,71
3	2	14,29	2	14,29
4	7	50,00	3	21,43
5	7	50,00	6	42,86
6	10	71,43	5	35,71

Se observa que los porcentajes de las respuestas válidas del cuestionario A (seno) son siempre superiores que las del cuestionario B (coseno), excepto en la pregunta 3. Estos resultados nos llevaron a pensar en la posible mayor dificultad de la pregunta 3 del cuestionario A (seno) que incluía un triángulo obtusángulo, respecto a la pregunta 3 del cuestionario B (coseno) que incluía un triángulo acutángulo. Es decir, llegamos a la conjetura que podría ser más complejo identificar en un triángulo obtusángulo una razón trigonométrica que en un triángulo acutángulo. Así, se consideró que lo más oportuno era incluir en los cuestionarios definitivos dos cuestiones distintas, que son los nuevos ítems 3 y 7, que preguntaran sobre el cálculo de la razón trigonométrica seno y coseno en relación a un triángulo obtusángulo y a uno acutángulo. Se evitó que las cuestiones se situaran en la misma página.

Otras modificaciones

Debido a las preguntas del alumnado durante la realización del cuestionario sobre la pregunta 3, se optó por modificar su enunciado. Se pasó en el ítem 3 de “Utilizando la

figura, indica $\text{sen}(60^\circ)$ ” del cuestionario piloto a “Dibuja e indica en la figura $\text{sen}(60^\circ)$ ”, en el ítem 3 del cuestionario definitivo.

Además, se modificó la distancia de las letras mayúsculas que notaban los vértices en la figuras del cuestionario piloto. Éstas se acercaron a los dibujos ante algunas dudas surgidas en el alumnado durante la implementación del cuestionario piloto.

Fase IV: Redacción del cuestionario Final y tareas seleccionadas para el análisis

Finalmente la batería de tareas quedó reducida a 15 cuestiones a distribuir entre las dos opciones, A y B, del cuestionario. Cada cuestionario consta de 8 ítems, una de las cuales, la sexta, es la misma para ambos. A continuación se describen brevemente las actividades que se han elegido para esta investigación y que están incluidas en el Anexo III:

Ítem 1. En esta cuestión se espera que los sujetos representen el $\text{sen}(30^\circ)$ o el $\text{cos}(30^\circ)$, además de averiguar las preferencias en cuanto a sus modos de representación y, en cierta medida, el grado de comprensión de la razón trigonométrica $\text{sen}(30^\circ)$ y $\text{cos}(30^\circ)$, el cual vendrá dado en función de la representación o del número de ellas utilizadas.

Ítem 2. Esta pregunta se asocia a la explicación o sistema de representación verbal, fundamentalmente.

Ítem 6. Esta tarea se vincula a una de las categorías de comprensión, la discriminación, establecida por Sierpiska (1990). Esta tarea vincula varios sistemas de representación, incluyéndose el gráfico y el simbólico, pidiendo a los sujetos que realicen un dibujo mostrando alguna diferencia entre el seno y el coseno de un mismo ángulo.

El resto de las actividades que se incluyen en los dos cuestionarios que se sitúan en el anexo III de este estudio, no serán analizadas en este informe, debido tanto a la extensión obligatoria de esta memoria como a la amplitud de la información recogida. Los datos obtenidos en el resto de las preguntas se analizarán en próximos estudios y servirán para dar continuidad a esta investigación.

3.4 Procedimiento de aplicación del instrumento

Para la realización de esta investigación se han implementado cuatro cuestionarios. Dos de los cuestionarios se han aplicado en un estudio piloto con una muestra de 27 estudiantes, y tras analizar, depurar y ampliar las preguntas propuestas, se diseñaron e implementaron los otros dos, sobre una muestra de 74 sujetos.

Cada cuestionario consta de un cuadernillo de 8 hojas (dos páginas A3 dobladas y grapadas) en las que se incluía la siguiente información (se adjunta en el Anexo II el cuestionario del estudio piloto y en el anexo III el del estudio definitivo):

- Datos del grupo de investigación e identificación de la institución que realiza el estudio, presentación del objetivo del mismo, solicitud de ayuda, instrucciones y agradecimientos al encuestado.
- Datos de identificación del alumnado: edad, nombre, centro y curso.
- Cuestiones abiertas consecutivas distribuidas a lo largo de 4 hojas en dos cuestionarios.

Estudio piloto

El procedimiento de aplicación del cuestionario piloto fue el siguiente:

La implementación del instrumento se llevó a cabo el 2 de abril de 2013 en el rango horario de 12:00-13:00 (4ª hora), en el I.E.S. Mar de Poniente de La Línea de la Concepción (Cádiz), en su clase habitual. Los alumnos separaron sus mesas y se sentaron en formación de examen. El reparto y la recogida de los cuestionarios se realizaron por parte del docente. El motivo fue conseguir una estratificación en función de las calificaciones del alumnado. Así se establecieron tres estratos en función de su rendimiento (10-7, 7-3, 3-0). Los cuestionarios A y B se colocaron en las mesas de manera alternada, siendo necesario en ocasiones cambiar la posición del algún alumno. Por otro lado el profesor había explicado a los estudiantes el día anterior que se iba a implementar una prueba. En la sesión de aplicación del instrumento sólo se les informó de las instrucciones para su cumplimentación, para lo cual se leyeron en voz alta las

mismas tras la repartición de los cuestionarios y se les animó a que las respondieran lo mejor y más claro posible.

El docente asistió junto al investigador durante la implementación del cuestionario. No hubo incidencias de relevancia durante la sesión de trabajo y el investigador resolvió las dudas que surgieron, intentando en todo momento reducir la información facilitada al alumnado para, de este modo, controlar el posible sesgo que se pudiera producir en el posterior análisis de los datos. El número total de sujetos que participaron en el estudio piloto fueron 27, cumplimentándose catorce cuestionarios del tipo A y trece del tipo B, los cuales fueron recogidos por el docente de los pupitres de los alumnos. El investigador mostró su agradecimiento a los alumnos por su colaboración y, de modo especial, al profesor titular, D. Antonio Enríquez Padial por su apoyo y colaboración en la realización de este estudio.

Estudio definitivo

El procedimiento de aplicación de los cuestionarios fue el siguiente:

La implementación del instrumento se llevó a cabo el 19 de abril de 2013 en las clases B y C y el 23 de abril de 2013 en la clase A, en el rango horario de 9:15-10:45 (2º hora), 10:45-11:45 (3º hora) y de 12:45-13:45 (5ª hora) respectivamente, en el I.E.S. Padre Suárez de Granada, en su aula y horario habituales. En función de la clase y según la disponibilidad de espacio, los alumnos separaron sus mesas, sentándose en formación de examen. El reparto de los cuestionarios se realizó por parte del docente y del investigador por filas de modo que al lado de un alumno con el cuestionario A no hubiese otro con el mismo tipo de cuestionario. Además, se buscaba una cierta estratificación, para lo cual el profesor al terminar la sesión indicaba en el examen, en función de la nota media del alumno, la categoría donde se encontraba. Así se diseñaron tres estratos en función de su rendimiento (10-7, 7-3, 3-0). Por otro lado, en general, los docentes habían advertido a su alumnado el día anterior que iban a realizar una prueba. En la sesión de aplicación del instrumento sólo se informó de las instrucciones para su cumplimentación, para lo cual se leyeron en voz alta las mismas tras el reparto de los cuestionarios y se les animó a que trabajaran lo mejor y más claro posible.

El docente acompañó al investigador durante la implementación del cuestionario. No hubo incidencias de relevancia durante la sesión de trabajo y el investigador resolvió las dudas que surgieron, intentando en todo momento reducir la información facilitada al alumnado para, de este modo, controlar el posible sesgo que se pudiera producir en el posterior análisis de los datos. Los cuestionarios se recogieron de las mesas de los alumnos; 37 cuestionarios del tipo A y otros 37 del tipo B. El investigador mostró su agradecimiento a los alumnos por su colaboración y a los profesores titulares, y de modo especial a D^a. Belén Espinosa por su apoyo y colaboración en la realización de este estudio.

3.5 Tipo de análisis realizado

El análisis que se ha realizado a las producciones es de tipo cualitativo. En él se ha procedido a realizar una codificación, en la que se consideran segmentos o unidades simples de contenido que identifican hechos, conceptos y destrezas, a partir de los cuales se inducen categorías mediante su análisis y comparación.

El análisis cualitativo de los datos que llevamos a cabo consiste en un proceso inductivo, en el cual las categorías, relaciones y modelos aparecen a partir de los datos. Este proceso es cíclico en la medida que forma parte de todas las etapas de la investigación (McMillan y Schumacher, 2005, p. 478).

El método de procesamiento y revisión de la información que se lleva a cabo en este estudio es un análisis de contenido, el cual se realiza mediante la descomposición de las respuestas en sus unidades más simples, a partir de las cuales se sintetizan de modo sistemático unos temas y se identifican unas categorías (Rico, 2013, pp. 16-17). Como ejemplo de análisis similar al que voy a realizar destaco el realizado por Castro-Rodríguez (2010), relativo a los términos, ideas, imágenes, hechos y conceptos que sobre fraccionar y repartir tienen los maestros en formación inicial de las especialidades de Educación Infantil y de Educación Primaria.

El análisis tiene lugar en cuatro etapas: en la primera, se van a organizar los datos en temas; en la segunda, los temas se desarrollan en categorías; en la tercera, analizamos

estas categorías: semejanzas, diferencias, vinculaciones,...etc; y finalmente en la cuarta, interpretamos los datos mediante las categorías y mostramos los resultados inferidos.

3.6 Valoración de la investigación

Motivado por la preocupación de realizar una investigación de calidad, en esta sección vamos a considerar la calidad científica de este trabajo en función de una serie de criterios.

Pertinencia

Vamos a responder principalmente a dos preguntas ¿Para qué sirve? ¿Para quién es útil? Esta investigación como la mayoría de las investigaciones en didáctica de la matemática trata de mejorar el aprendizaje y la enseñanza de la matemática (Kilpatrick, 1998, pp. 20-22). Así permitirá la adaptación y el uso de algunos de sus aspectos. Entre ellos podríamos indicar por ejemplo el incentivar el uso de vocabulario más preciso a la hora de impartir este tópico, el modificar el modo en que el profesorado imparte su docencia, y el servir de base para futuras investigaciones.

Además, haciendo mención a Schoenfeld (1991) “buena parte de la disciplina aplicada (...) no interesa directamente a los usuarios de dicha disciplina (...) lo importante es que el trabajo básico realizado como fundamento de aplicación sea de máxima calidad” (p.274).

Validez

Distinguimos dos tipos de validez, la interna, que se refiere al grado de seguridad con el que podemos establecer las interpretaciones que hacemos en la investigación, y la externa, que se asocia al poder de generalización de los resultados obtenidos (León y Montero, 1997, pp. 122-125).

En el caso de la validez interna, ésta se ha cuidado tanto mediante el diálogo y reflexión durante el diseño de los ítems, como con la discusión posterior de los resultados entre los investigadores que han participado en el estudio.

Respecto a la validez externa, y dentro de la limitación, al haber escogido una muestra intencional, ésta queda parcialmente cubierta por la revisión de los estudios previos y por el procedimiento de selección de cuestiones adecuadas a nuestro estudio. Además, es necesario recordar que con el estudio se intenta particularizar los resultados para profundizar sobre ellos en un contexto determinado.

Objetividad y originalidad

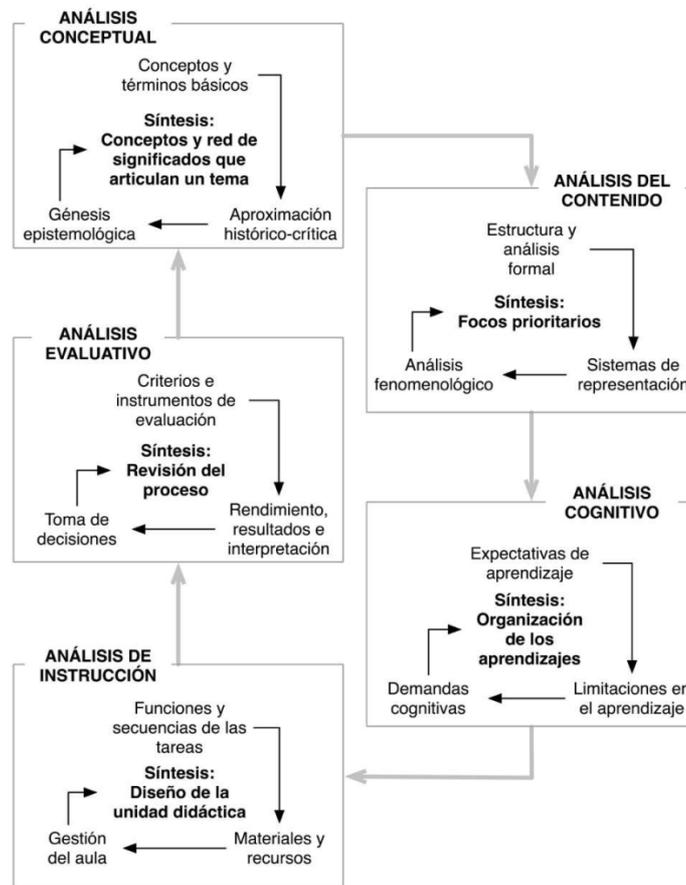
Aunque conseguir una objetividad total es imposible, en este trabajo se intenta alcanzar dicha meta mediante diálogo interno en el grupo de investigación. Aunque existe un margen de subjetividad, se ha intentado que sea mínimo.

Respecto a la originalidad, como se ha dicho previamente, el modo de abordar el contenido tratado es innovador, al considerar el estudio desde el punto de vista del análisis didáctico. Rico (2013) indica que

El análisis didáctico es un método de investigación propio de la Didáctica de la matemática, que se sustenta en la historia, en la propia matemática, en la filosofía del conocimiento y de la educación, que utiliza técnicas y métodos del análisis conceptual y del análisis de contenido (p.19).

Figura 3.1

Estructura y ciclo del análisis didáctico



Este estudio utiliza el método de procesamiento y revisión de la información del análisis de contenido, en el cual se realiza la descomposición de las respuestas en sus unidades más simples, para lo que se utiliza de modo sistemático la determinación de temas y la identificación de categorías. Durante este análisis se ha prestado mucha atención a la polisemia de significados de los términos que se han utilizado en la identificación de categorías, subcategorías y criterios. Además, la aproximación histórica ha sido punto de apoyo para la interpretación de la información obtenida de los datos, lo que muestra una profunda preocupación por el análisis conceptual. Finalmente, entre las futuras líneas de investigación nos encontraremos la continuación del ciclo del análisis didáctico, utilizando los resultados obtenidos para realizar una práctica de enseñanza.

Rigor y precisión

Se considera que esta investigación posee estas características porque durante su realización, además de seguir un proceso de diseño y análisis previamente establecido, se han anticipado posibles problemas del estudio definitivo mediante un estudio piloto, que ha servido para evitar posibles malentendidos de los alumnos durante la respuesta al cuestionario. Así, algunas de las preguntas del mismo fueron modificadas, consiguiendo una más fácil comprensión por parte del alumno de lo que se requería en la pregunta. Además, se ha intentado entender y expresar con la máxima exactitud lo observado y las conclusiones a las que se han llegado, para lo cual este informe ha sido revisado y sometido a debate entre el equipo de investigación.

Capacidad para predecir y reproductibilidad

Esta investigación también se caracteriza porque permite predecir, dentro de ciertos límites, las respuestas posibles ante preguntas relacionadas con las nociones de las razones trigonométricas seno y coseno del alumnado de Matemáticas I del primer curso de Bachillerato.

Finalmente, en este informe se exponen los procedimientos implementados para que otra persona pueda, en su caso, reproducir y replicar este estudio. Todos los cuestionarios con las respuestas de los estudiantes han sido escaneados y puestos a disposición del director de esta investigación. Quisiera destacar que se dará publicidad a las conclusiones para que puedan ser debatidas y conocidas por otros investigadores del campo.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS

Tras la implementación del instrumento, y con la ayuda del docente se procedió a identificar mediante un código todos y cada uno de los cuestionarios recogidos. Se trata de un código alfanumérico que consta de 8 casillas; las tres primeras corresponden a las iniciales del nombre, primer y segundo apellido del alumno; la cuarta casilla se refiere al número de estrato al que pertenece el alumno: grupo 1 (7-10), grupo 2 (3-7) y grupo 3 (0-3); la quinta casilla identifica el tipo de cuestionario, A o B, en función de que se trate del cuestionario referido al seno o al coseno respectivamente; la sexta casilla se asocia a la clase a la que pertenece el alumno, A, B o C y finalmente en las dos últimas casillas se identifica el orden de cada alumno dentro de su grupo, desde 01 hasta 10.

Con el fin de organizar la información recogida en las preguntas de respuesta abierta del cuestionario para su posterior análisis, se procedió al vaciado de todas las producciones de los estudiantes, transcribiendo o escaneando la respuesta literal proporcionada en cada caso, como se ejemplifica en el Anexo IV.

Se recogieron tanto los registros verbales como los dibujos de los sujetos, no obstante, tales dibujos no se encuentran recogidos en el citado anexo.

Una vez volcados los datos, se procedió a realizar el análisis de las cuestiones 1, 2 y 6. El análisis que se ha realizado es de tipo cualitativo.

4.1 El proceso de análisis

En primer lugar se realizará una primera lectura y observación cuidadosa de las producciones de los alumnos para identificar y recoger todas aquellas expresiones, representaciones, ideas y conceptos relevantes que se presentan en las mismas. De este

modo, surgen de manera natural y sistemática unos primeros temas en las producciones de los estudiantes, que identifican las unidades de información, con las que se reducen y organizan la diversidad de respuestas obtenidas. En el caso de las cuestiones 1 y 6, relativas a la representación de las razones trigonométricas que estudiamos, los temas observados en las respuestas consisten en los tipos de figuras: circunferencia, triángulo, ángulo y función trigonométrica. Respecto a la pregunta 2, sobre qué entienden los alumnos por razón trigonométrica seno o coseno, los temas encontrados en las descripciones verbales son: cociente, valor, segmento, medida y herramienta.

El establecimiento de los temas se llevó a cabo inicialmente detectando las ideas centrales que se presentaban las producciones obtenidas del estudio definitivo. Una vez enunciados los temas, las respuestas del estudio piloto permitieron perfilar y validar por saturación la adecuación del sistema establecido.

Por otro lado, en una segunda fase de análisis, organizamos los temas en categorías y subcategorías, las cuales se construyen, observando y comparando las distintas respuestas en cada uno de los temas y las propiedades relevantes que expresaban, identificando semejanzas y diferencias entre ellas (Coleman y Unrau, 2005; Baptista, Fernández y Sampieri, 2010, p. 448). Las unidades simples se analizan en términos de significado, y los nombres de las categorías y de las clasificaciones deben ser precisos evitando generar equívocos. En esta fase también se recuperarán ejemplos (Coffey y Atkinson, 1996; Baptista, Fernández y Sampieri, 2010). Quiero hacer mención que Coleman y Unrau (2005) sugieren que el porcentaje de respuestas incluidas en la categoría miscelánea, “otras”, nunca debe superar el 10% respecto al total de los datos recabados. En caso contrario, se debería de revisar de nuevo la categorización y las producciones de los alumnos. Una vez establecidas las categorías que organizan las producciones de los estudiantes del estudio definitivo, también se aplicaron al estudio piloto, y se ubicaron sus datos dentro de las categorías establecidas.

En un tercer nivel, pasamos del análisis del dato concreto al análisis de la categoría. Se identifican semejanzas y diferencias entre ellas y se buscan posibles relaciones de vinculación o de subordinación entre categorías. El objetivo es obtener patrones que muestren la estructura de las respuestas e interpreten los temas y las categorías

previamente establecidas. Mediante este proceso, se reduce la complejidad de los datos iniciales al determinar las unidades de análisis y caracterizarlas, según las categorías inferidas.

Tras este tercer nivel de análisis se lleva a cabo la interpretación de los datos mediante su descripción, la presencia de cada categoría y sus relaciones. Así, teniendo en cuenta esos temas, categorías y relaciones, desarrollamos interpretaciones que muestran los resultados, para lo cual nos podemos auxiliar de mapas conceptuales, matrices, y otros medios. (Baptista, Fernández y Sampieri, 2010, pp. 464- 470).

4.2 Enunciados de las tareas que se analizan

Los enunciados de las tareas que se analizan son los que siguen.

En relación al cuestionario A, las preguntas analizadas son las siguientes:

- Ítem 1. “Haz un dibujo en que se muestre $\text{sen}(30^\circ)$ ”.
- Ítem 2. “Explica verbalmente qué entiendes por $\text{sen}(45^\circ)$ ”.
- Ítem 6. “Haz un dibujo en que se muestre alguna diferencia entre el seno y el coseno de un mismo ángulo”.

Respecto al cuestionario B, las preguntas a analizar son las siguientes:

- Ítem 1. “Haz un dibujo en que se muestre $\text{cos}(30^\circ)$ ”.
- Ítem 2. “Explica verbalmente qué entiendes por $\text{cos}(45^\circ)$ ”.
- Ítem 6. “Haz un dibujo en que se muestre alguna diferencia entre el seno y el coseno de un mismo ángulo”.

4.3 Comparación de los resultados de los dos cuestionarios

Consideramos los resultados finales para la totalidad de las preguntas en los dos cuestionarios del estudio definitivo. La evaluación de las respuestas correctas en cada uno de los cuestionarios está motivada por la posibilidad de que una de las dos razones trigonométricas estudiadas tuviese mayor dificultad que la otra, por motivo de su

rendimiento. Así, en general, aunque los rendimientos son algo inferiores en el coseno que en el seno, tras un análisis de varianza (anexo V), se observan que estas diferencias no son significativas entre pares de preguntas, salvo en el caso de las preguntas nº2 y nº8. En términos generales podemos asumir que la razón trigonométrica seno, que estudia el cuestionario A, no tiene una mayor dificultad que la razón trigonométrica coseno, que estudia el cuestionario B.

Tabla 4.1

Análisis cuantitativo estudio definitivo

Ítem	Análisis cuantitativo estudio definitivo			
	Cuestionario A		Cuestionario B	
	Fr	%	Fr	%
1	19	51,35	14	37,84
2	22	59,46	14	37,84
3	19	51,35	18	48,65
4	9	24,32	8	21,62
5	29	78,38	28	75,68
6	23	62,16	19	51,35
7	17	45,95	16	43,24
8	29	78,38	24	64,86

4.4 Análisis de las respuestas a la pregunta 1 del cuestionario A

En este caso, los temas principales que se encuentran en las respuestas lo forman la circunferencia y el triángulo, como puede observarse en la tabla que se presenta a continuación.

Tabla 4.2

Frecuencia del tipo de representaciones en el cuestionario A

Ítem	Circunferencia		Triángulo		Blanco	
	Fr	%	Fr	%	Fr	%
1	23	56,10	15	36,59	3	7,31

Partiendo de estos temas establecemos una serie de categorías y subcategorías. Para ello comparamos las producciones, examinando sus propiedades, semejanzas y diferencias, obteniendo unidades de análisis con significado.

Producciones y categorías del tema “circunferencia”

Al organizar los datos relativos al tema “circunferencia” se encontraron tres unidades de análisis: los ejes, el radio y el diámetro. A partir de ellas se identificaron las subcategorías: “ejes” y “segmentos”, para después determinar la categoría “elementos de división de la circunferencia”.

Posteriormente, se determinó otra unidad de análisis, “el ángulo”, a partir de la cual se reconocieron tres subcategorías: “ángulo central”, “ángulo interior de un triángulo” y “punto en una circunferencia y un segmento”, que nos permitieron identificar una segunda categoría para la circunferencia: “modo de indicar el ángulo”.

A continuación, se analizaron las distintas interpretaciones que el alumnado daba a las razones trigonométricas. Las subcategorías obtenidas son: “cociente”, -siempre mediante cociente de cateto partido hipotenusa-, “longitud” y “coordenada cartesiana”. A partir de dichas interpretaciones, se obtuvo la categoría “modo de indicar el valor de la razón trigonométrica”. Por último, distinguimos aspectos sintácticos referidos a las unidades de análisis como son la forma en que eran señalizados cada uno de ellos.

Finalmente, los criterios utilizados para establecer diferentes categorías y subcategorías en el tema “circunferencia” son la identificación y la señalización de los elementos presentes para la división de la circunferencia, el modo de indicar el ángulo y el modo de indicar el valor de la razón trigonométrica, tal y como queda sintetizado en la tabla 4.3.

Tabla 4.3

Categorización de las producciones a la cuestión 1 del cuestionario A para el tema circunferencia

Circunferencia			
Categorías	Identificación		Señalización
Elementos de división de la circunferencia	Ejes		Con señalización X-Y
	Segmentos	Diámetros	Sin señalización
		Radios Radios y diámetros	
Modo de indicar el ángulo	Ángulo central		Se indica amplitud
	Ángulo interior de un triángulo		Se indica o no la amplitud
	Un punto en una circunferencia y un segmento		
Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica	Cociente	Cateto/ hipotenusa	Indicación interna: Color, subrayado y segmento Indicación externa: Flecha, corchete, segmento auxiliar y cota
	Coordenada cartesiana		
	Longitud		

Producciones y categorías del tema “triángulo”

En relación al tema “triángulo”, se identificaron como subcategorías: “triángulo rectángulo” y “triángulo no rectángulo”. A partir de ellas, se obtuvo como categoría el “tipo de triángulo utilizado”.

Análogamente se analizaron las interpretaciones que los alumnos daban a las razones trigonométricas. Las subcategorías que se reconocieron fueron: “cociente”, - siempre mediante cateto opuesto partido hipotenusa o razón de lados-, “longitud” y “ángulo interior”. Finalmente se identificó la categoría “modo de indicar el valor de la

razón trigonométrica”. También, se distinguieron aspectos sintácticos referidos a las unidades de análisis como son la forma en que eran señalizados cada uno de ellos.

Finalmente, los criterios utilizados para establecer diferentes categorías en el tema del triángulo son la identificación o la señalización del tipo de triángulo y el modo de indicar el valor de la razón trigonométrica, tal y como queda sintetizado en la tabla 4.4.

Tabla 4.4

Categorización de las producciones a la cuestión 1, cuestionario A, para el tema triángulo

Categorías	Triángulo		
	Identificación		Señalización
Tipo de triángulo	Rectángulo		Con o sin el símbolo del ángulo recto
	No rectángulo		
Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica	Cociente	Cateto opuesto /hipotenusa	Mediante vértices
		Lados	Mediante lados
	Longitud	Cateto	Indicación interna: Color, subrayado y segmento
		Ángulo interior	Indicación externa: Flecha, corchete, segmento auxiliar y cota

Definiciones empleadas para temas, categorías y criterios

Para establecer los diferentes temas, categorías y subcategorías, se consideraron definiciones provenientes del diccionario de Vocabulario Científico y Técnico de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y del diccionario de la Real Academia Española, con el objetivo de precisarlas. Entre las definiciones que se utilizaron se incluyen:

1. *Señalar. Poner o estampar señal en una cosa para darla a conocer o distinguirla de otra, o para acordarse después de algo.*
2. *Indicar. Mostrar o significar algo con indicios y señales.*

3. *Eje. Recta del plano o del espacio que, por su dirección o por su posición central, sirve de referencia a los puntos de ese plano o espacio, o bien a una figura o a una transformación.*
4. *Segmento o intervalo. Conjunto de todos los puntos de una recta comprendidos entre dos de ellos, llamados extremos del segmento. Suele decirse segmento cerrado o abierto, según que se incluyan o no los extremos. RAE. Segmento. Parte de una recta comprendida entre dos puntos.*
5. *Diámetro. Segmento rectilíneo que une dos puntos de una circunferencia o esfera y que pasa por el centro de la misma. Longitud de dicho segmento.*
6. *Radio (RAE). Segmento lineal que une el centro del círculo con la circunferencia. Buscar en el de ciencias exactas*
7. *Ángulo. Figura constituida por dos semirrectas que tiene común el origen.*
8. *Ángulo central. Ángulo que tiene su vértice en el centro de una circunferencia.*
9. *Ángulo interior (RAE). El formado por los lados contiguos de un polígono, hacia el interior de este. Angulo interior del triángulo. El formado por los lados contiguos del triángulo, hacia el interior de éste.*
10. *Ordenada. Coordenada cartesiana de un punto del plano, medida sobre el eje de ordenadas o sobre la paralela a él trazada desde el punto. Si no tenemos ejes, no podríamos considerarla como ordenada.*
11. *Vértice. Punto donde concurren varias rectas, lados o generatrices, de algunas figuras geométricas, como haces, polígonos, poliedros, conos, etc.*
12. *Vértice (RAE). Punto en que concurren los dos lados de un ángulo*
13. *Distancia (RAE). Longitud del segmento de recta comprendido entre dos puntos del espacio. Longitud del segmento de recta comprendido entre un punto y el pie de la perpendicular trazada desde él a una recta o a un plano*

- 14. *Cociente. Resultado que se obtiene al dividir una cantidad por otra, y que expresa cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo.*
- 15. *Razón. Cociente de dos números o, en general, de dos cantidades comparables entre sí.*
- 16. *Proporción. Igualdad de dos razones.*
- 17. *Lado. Cada una de las dos líneas que forman un ángulo. Cada una de las líneas que forman o limitan un polígono.*
- 18. *Cateto. Cada uno de los dos lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.*
- 19. *Altura (RAE). En una figura plana o en un sólido, distancia entre un lado o cara y el vértice o el punto más alejado en la dirección perpendicular. Recta o segmento sobre el cual se mide esa distancia.*

4.5 Análisis de las respuestas a la pregunta 1 del cuestionario B

Análogamente al apartado anterior, los temas principales lo forman la circunferencia y el triángulo, cuyos datos globales se resumen en la tabla que se presenta a continuación.

Tabla 4.5

Frecuencia del tipo de representaciones en el cuestionario B

Ítem	Circunferencia		Triángulo		Blanco	
	Fr	%	Fr	%	Fr	%
1	27	65,85	12	29,27	2	4,88

De igual modo que en el apartado 4.4, partiendo de estos temas se desarrollan una serie de categorías y subcategorías.

Producciones y categorías del tema “circunferencia”

Las categorías obtenidas para el tema “circunferencia” coinciden con las de la pregunta 1 del cuestionario A para dicho tema.

Desde un punto de vista semántico las categorías y subcategorías que se identificaron fueron:

1. “Elementos para la división de la circunferencia”: “Ejes” y “segmentos”.
2. “Modo de indicar el ángulo”: “ángulo central”, “ángulo interior de un triángulo”.
3. “Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica”: “cociente”, “longitud”, “coordenada cartesiana”

Se observa que no aparece la subcategoría “punto en una circunferencia y un segmento” en “modo de indicar el ángulo”.

Desde un punto de vista sintáctico, en estas producciones no se encuentra ninguna respuesta en la que se señalicen los ejes, algo que si ocurre en las producciones del cuestionario A.

Tabla 4.6

Categorización de las producciones a la cuestión 1, cuestionario B, tema circunferencia

Circunferencia		
Categorías	Identificación	Señalización
	Ejes	Sin señalización
Elementos de división de la circunferencia	Segmentos	Diámetros Radios Radios y diámetros
Modo de indicar el ángulo	Ángulo central	Se indica la amplitud
	Ángulo interior de un triángulo	Se indica o no la amplitud
Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica	Cociente	Indicación interna: Color, subrayado.
	Coordenada cartesiana Longitud	Indicación externa: Flecha, corchete, segmento auxiliar y cota

Producciones y categorías del tema “triángulo”

Análogamente, las categorías y subcategorías desarrolladas para el tema “triángulo” desde un punto de vista semántico son las siguientes:

1. “Tipo de triángulo”: “triángulo rectángulo” y “triángulo no rectángulo”.
2. “Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica”: “cociente”, “longitud”, “ángulo interior”.

Se observa una total similitud con las ya obtenidas para el seno, excepto que encontramos la opción de que la razón trigonométrica puede venir dada por el lado de un triángulo no rectángulo.

Desde un punto de vista sintáctico, la única diferencia que aparece es que el cociente sólo se expresa mediante lados (a, b, c), mientras que en el cuestionario A se utilizan lados y vértices.

Tabla 4.7

Categorización de las producciones a la cuestión 1, cuestionario B, del tema triángulo

Categorías	Triángulo		
	Identificación		Señalización
Tipo de triángulo	Rectángulo		Con o sin el símbolo del ángulo recto
	No rectángulo		
Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica	Cociente	Cateto contiguo /hipotenusa	Mediante lados
		Lados	
	Longitud	Cateto	Indicación interna: Color, subrayado y segmento
		Lado	
Ángulo interior		Indicación externa: Flecha, corchete, segmento auxiliar y cota	

4.6 Análisis conjunto de las respuestas a las preguntas n°1 y n°6

Las frecuencias del tipo de representaciones por cuestionario e ítem fueron las siguientes:

Tabla 4.8

Frecuencia de temas para las representaciones en las respuestas

Ítem	Triángulo		Circunferencia		Blanco		Función trigonométrica	
	Fr	%	Fr	%	Fr	%	Fr	%
1	27	32,93	50	60,98	5	6,10	0	0
6	34	41,46	42	51,22	6	6,09	1	1,22

Partiendo de los análisis anteriores, y considerando de manera conjunta las respuestas a las preguntas 1 y 6 de ambos cuestionarios se han obtenido una serie de temas, categorías y subcategorías. Los temas considerados para representar “la razón trigonométrica seno de un ángulo” y “la razón trigonométrica coseno de un ángulo” son “la circunferencia” y “el triángulo”; incidental y singularmente surgen otros dos temas distintos, de cuya presencia dejamos constancia: “el ángulo” y “la función trigonométrica”.

En resumen, las categorías y subcategorías desde un punto de vista semántico resultantes al unificar las obtenidas para el tema “circunferencia” en los cuestionarios A y B son las siguientes (anexo VII, tabla A.1):

- “Elementos para la división de la circunferencia”: “Ejes” y “segmentos”.
- “Modo de indicar el ángulo”: “ángulo central”, “ángulo interior de un triángulo” y “punto en una circunferencia y un segmento”.
- “Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica”: “cociente”, “longitud”, “coordenada cartesiana”.

Análogamente, desde un punto de vista sintáctico se distinguieron las siguientes categorías y subcategorías:

- “Elementos de división de la circunferencia”: “ejes”, -con o sin señalización-.
- “Modo de indicar el valor del ángulo”: “ángulo central”, -se indica amplitud-, “ángulo interior de un triángulo”, -se indica o no la amplitud-.
- “Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica”: mediante indicaciones externas e internas

Para el tema “triángulo”, las categorías y subcategorías identificadas desde un punto de vista semántico fueron las siguientes (anexo VII, tabla A.2):

- “Tipo de triángulo”: “Triángulo rectángulo” y “triángulo no rectángulo”.
- “Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica”: “cociente”, “longitud”, “ángulo interior”.

Desde un punto de vista sintáctico, se obtuvieron las siguientes categorías y subcategorías:

- “Tipo de triángulo”: Con o sin señalización del ángulo recto.
- “Modo de indicar el valor de la razón trigonométrica”: “Mediante vértices”, “Mediante lados” y mediante indicaciones externas e internas.

De los dos últimos temas, “función trigonométrica” y “ángulo”, no se obtuvieron categorías ni subcategorías porque las producciones de los mismos se limitaron a una producción en cada caso.

La totalidad de repuestas proporcionadas por los alumnos a las preguntas 1 y 6 de los cuestionarios quedan caracterizadas por los dos temas señalados y por el sistema de categorías y subcategorías que hemos descrito.

4.7 Análisis de las respuestas a la pregunta 2 del cuestionario A

La primera aproximación a las producciones de este ítem, fue la localización de términos clave, que se realizó en base a las propias respuestas de los alumnos, las cuales proporcionaron varios temas principales. El proceso de localización de términos clave se realizó de manera exhaustiva. Los temas principales fueron: “cociente”, “valor”, “segmento” y “herramienta”, cada uno de los cuales atribuye un sentido distinto para $\text{sen}(45^\circ)$. Es necesario mencionar que la producción de un mismo alumno puede presentar varios temas, debido a que en algunos casos está formada por varias respuestas.

La frecuencia de cada uno de los temas se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 4.9

Frecuencia de temas entre las producciones en el cuestionario A

Temas	Frecuencia y porcentajes	
	Fr	%
Razón	25	52,08
Valor	10	20,83
Segmento	9	18,75
Herramienta	2	4,17

Según los datos obtenidos la noción de seno de un ángulo se entiende como cociente o razón, fundamentalmente. Se han observado diferentes modos de expresar el cociente: mediante una fórmula, mediante formas del verbo dividir: “divide”, “división”, “dividido”-, mediante formas del verbo partir, “partido”, y mediante “entre”. El tema de valor se ha considerado cuando se incluye: el valor propiamente dicho, por ejemplo: “0,7”, “ $\sqrt{2/2}$ ” y cuando se indica que el valor es un número o cuando se indica que es un “valor”. En relación a “segmento”, éste se considera cuando se habla de lados, catetos, “altura” y “base”. Finalmente existen dos respuestas que muestran la utilidad de la razón trigonométrica, por lo que se ha considerado un último tema, “herramienta”.

4.8 Análisis de las respuestas a la pregunta 2 del cuestionario B

Con los mismos criterios anteriores, incluimos la frecuencia de los temas relacionados con la pregunta nº 2 del cuestionario B. En ella aparece un nuevo tema, la medida.

Tabla 4.10

Frecuencia de temas entre las producciones en el cuestionario B

Temas	Frecuencia y porcentajes	
	Fr	%
Razón	19	40,43
Valor	6	12,77
Segmento	12	25,53
Medida	6	12,77

También en este caso los datos muestran que la razón trigonométrica coseno se interpreta, principalmente, como un cociente de dos longitudes. Respecto al nuevo tema, medida, éste surge en expresiones como “la mitad del radio”, en las cuales se indican la unidad (radio) y la medida (mitad).

4.9 Análisis conjunto de las producciones a la pregunta n°2

Considerando conjuntamente las producciones relativas a la explicación verbal de qué se entiende por $\text{sen}(45^\circ)$ y por $\text{cos}(45^\circ)$, se presentan 5 temas donde se ubican la totalidad de las respuestas: razón, valor, segmento, medida y herramienta.

Tabla 4.11

Frecuencia de temas entre las producciones al ítem 2

Temas	Frecuencia y porcentajes	
	Fr	%
Razón	44	46,32
Valor	16	16,84
Segmento	21	22,11
Medida	6	6,32
Herramienta	2	2,11

La totalidad de repuestas proporcionadas por los alumnos a la pregunta 2 de los cuestionarios quedan caracterizadas por los temas descritos.

De los datos se infiere que los conceptos de seno y coseno se interpretan principalmente como una razón.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

En este capítulo se muestran resultados alcanzados relativos a los significados puestos de manifiesto por un grupo de estudiantes de bachillerato sobre los conceptos de seno y coseno de un ángulo. Estos significados muestran los sistemas de representación utilizados para ambas nociones, describen las explicaciones verbales aportadas y los sentidos establecidos. Proceden del análisis conceptual y de contenido, efectuado sobre el total de las respuestas obtenidas de las preguntas relativas a las representaciones gráficas y verbales de las razones trigonométricas seno y coseno de un ángulo, llevadas a cabo en este estudio, correspondientes a los ítems, 1, 2 y 6 de los cuestionarios A y B.

5.1 Análisis de contenido de las respuestas a la pregunta nº1, cuestionario A

Mapa conceptual

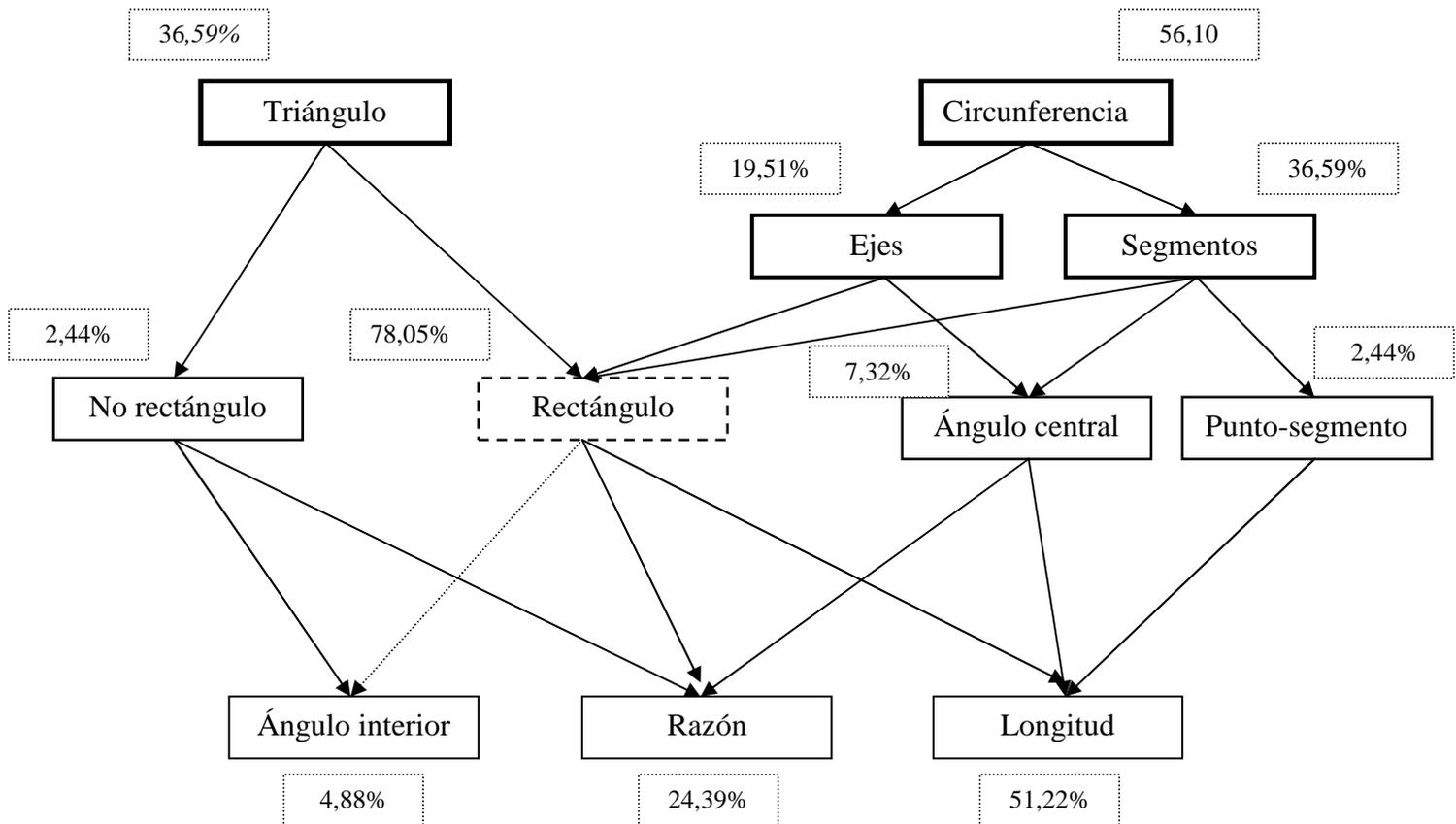
Establecidas las categorías y subcategorías que organizan las representaciones proporcionadas a la pregunta “Haz un dibujo en que se muestre $\text{sen}(30^\circ)$ ”, se observaron sus relaciones y vinculaciones, obteniéndose un mapa conceptual que se muestra en la figura 5.1.

Como ya constatamos, predominan aquellas representaciones que se basan en el tema “circunferencia”. Sin embargo, igual que ocurrió históricamente, la circunferencia en muchas producciones tiene un mero carácter auxiliar, es decir, el triángulo rectángulo acapara todo el protagonismo puesto que centra la representación solicitada. El triángulo rectángulo, aunque no sea necesario para identificar el seno del ángulo, aparece en la mayoría de representaciones, y el alumno se centra en sus elementos para definir la razón trigonométrica. Es por ello que, como indicamos, el triángulo rectángulo acapara el 78,05% de las producciones. No obstante, aunque el triángulo rectángulo aparezca en

la mayoría de las representaciones, en el 51,22% de todas las producciones el alumnado interpreta el seno de un ángulo como longitud y no como cociente, asociándola por tanto al “line system”.

Figura 5.1

Relación entre las categorías establecidas para la pregunta 1 del cuestionario A



Para la realización de este mapa conceptual se han considerado una serie de niveles, que incluyen las categorías y subcategorías que hemos obtenido de las respuestas a esta pregunta. Los niveles expresan nuestra interpretación de la secuencia de contenidos utilizados para obtener la representación solicitada, en orden creciente de complejidad. En un primer nivel, se indican los temas generales identificados al comienzo del análisis de contenido, que eran la circunferencia y el triángulo, y que proporcionan una primera visión de conjunto de toda la información recogida. Un segundo nivel surge de comparar las distintas representaciones, observando sus diferencias y semejanzas, incluyendo en el caso de la circunferencia los elementos geométricos que se utilizan

para dividirla, ejes y segmentos. Cabe destacar que todas las producciones relacionadas con el tema “circunferencia” quedan incluidas en estas dos subcategorías. En un tercer nivel se recoge un nuevo paso en la secuencia de representación que, para el tema “circunferencia”, es el modo de indicar el ángulo en la circunferencia inicialmente dibujada. Nos estamos refiriendo al ángulo interior de un triángulo rectángulo, al ángulo central y al punto-segmento. En este nivel, siendo rigurosos, han aparecido otras opciones para representarlo, como son el sector circular y el sector circular de lado indefinido, que hemos considerado incluidas dentro del ángulo central. Si examinamos el tema “triángulo”, situamos en este nivel la distinción entre triángulo rectángulo y no rectángulo.

Finalmente, identificamos un cuarto nivel, el cual incluye los sentidos o interpretaciones que los alumnos hacen del seno de un ángulo: ángulo interior, razón y longitud. Resaltar que únicamente se puede llegar a interpretar el seno de un ángulo como ángulo interior si se parte del triángulo, motivo por el cual dicha conexión se muestra discontinua.

Este mapa ubica todas las representaciones realizadas por los alumnos, según las principales secuencias de contenidos con las que se han construido. Se muestran así distintos sentidos del seno de un ángulo considerados por el alumnado, en función de los contenidos en que sustentan su representación. En el Anexo VI hay una selección de ejemplos que ejemplifican los distintos temas, categorías, subcategorías y sentidos enumerados en la descripción de las figuras 5.1 y 5.2.

Conceptualización histórica

Finalmente, como contribución del análisis conceptual al análisis de contenido, se optó por trabajar con el organizador Historia de la matemática para interpretar la información recogida en un nuevo mapa conceptual (figura 5.2) sobre el uso del seno en la medida de ángulos. Reconocemos que el desarrollo histórico es útil para determinar el origen de algunas nociones, comparar diferentes sistemas de representación, localizar problemas básicos, (Furingueti, 2007) y establecer mapas conceptuales que permitan alcanzar una mayor comprensión de las nociones involucradas.

Para ello consideramos el problema original por el cual surge la trigonometría: “Dado un arco de ángulo encuentra la longitud de la cuerda que conecta los puntos finales del arco” (Van Brummelen, 2009, p. 41). Históricamente de la búsqueda de la cuerda se pasó a hallar la semicuerda (India) aunque todavía asociada al arco para, más tarde, relacionarla con la mitad del arco (Aryabhata). El Almagesto de Abu’l Wafa es el primer texto donde están juntas las seis modernas razones trigonométricas definidas en un diagrama con $R=1$ (Van Brummelen, 2009, pp. 155-156). Más tarde, Rheticus relaciona las razones trigonométricas directamente con los ángulos en el triángulo como lo hacemos hoy, más que con arcos de círculo, centrándose directamente en los lados del triángulo y dando a la circunferencia un carácter subordinado. François Viète da a la trigonometría una perspectiva analítica y es considerado por ello el padre de la goniometría. Finalmente, Simon Klugel es considerado como el primer autor que contempla como cociente cada una de las razones trigonométricas.

Estas dos vías, utilizadas históricamente en la medición de ángulos, la circunferencia y el triángulo, las ponen de manifiesto los alumnos en los modos de tratar la trigonometría, y que están relacionadas, con las formas de enseñar y entender la misma, el “ratio system” y el “line system”, como muestra la figura 5.2.

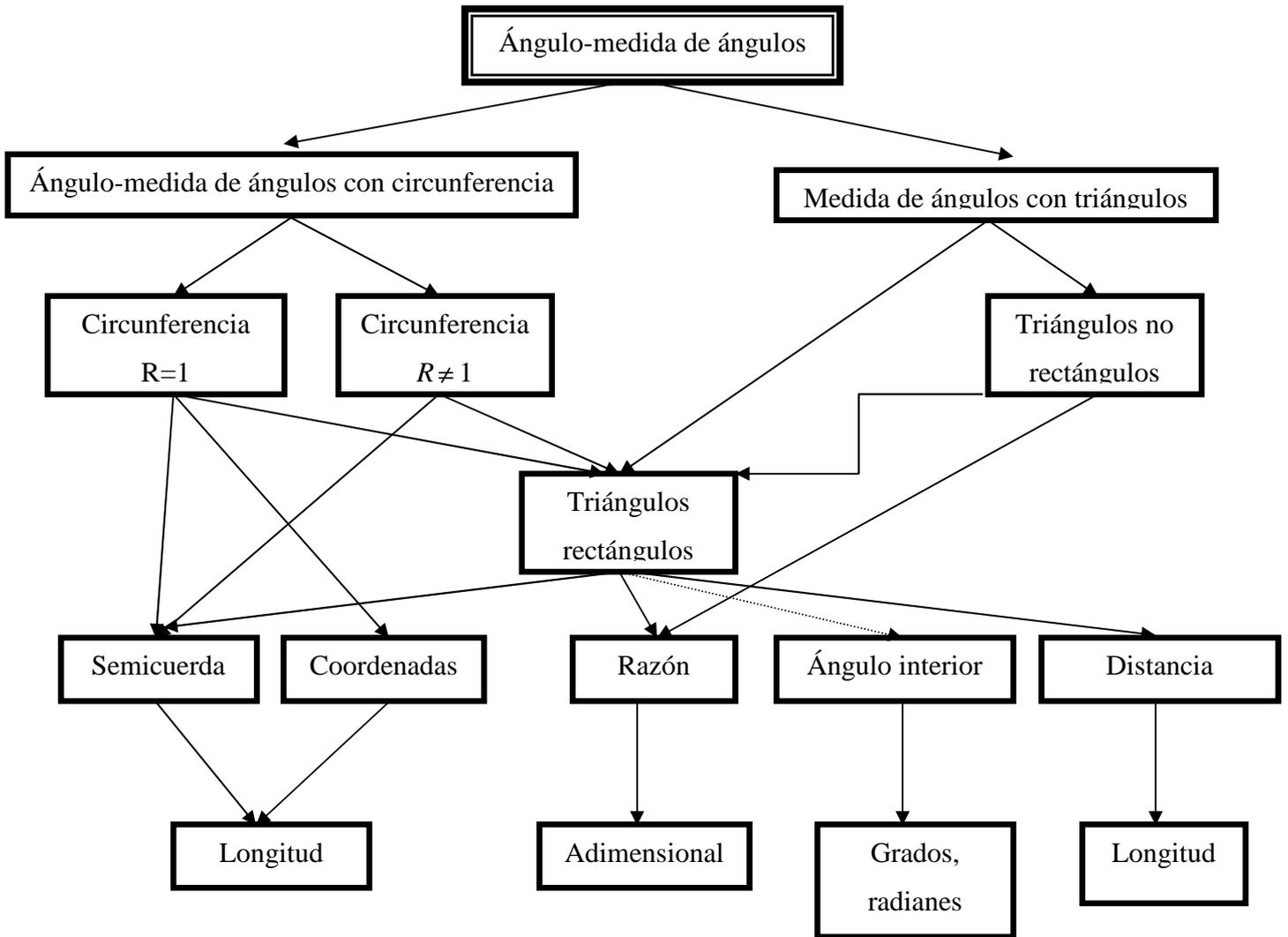
En un segundo nivel aparece la subdivisión de los triángulos en rectángulos y no rectángulos y la subdivisión de la circunferencia, en circunferencia goniométrica (Abu’l Wafa fue el primero en utilizarla) y en la circunferencia de radio R . Es necesario recordar que Hiparco y Ptolomeo empezaron utilizando circunferencias de radio 60 unidades, el cual se fue aumentando para obtener mayor precisión en los cálculos. A partir de aquí y considerando sólo la circunferencia, encontramos los dos tipos de medidas del ángulo, mediante la longitud del segmento de la semicuerda, para el caso del seno, y mediante la consideración de sus coordenadas en una circunferencia goniométrica.

En relación al triángulo, éste puede ser rectángulo y no rectángulo. En el caso de triángulo no rectángulo se convertiría en triángulo rectángulo. Entre las interpretaciones válidas para el seno aparece la de razón, dada por Simon Klugel. Otras interpretaciones con origen en el triángulo y consideradas errores de comprensión son, la identificación

de la razón seno con el ángulo interior y con una distancia en un triángulo rectángulo de hipotenusa diferente de uno.

Figura 5.2

Estructura conceptual de la medida del ángulo mediante su seno



5.2 Análisis de contenido de las respuestas a la pregunta n°1, cuestionario B

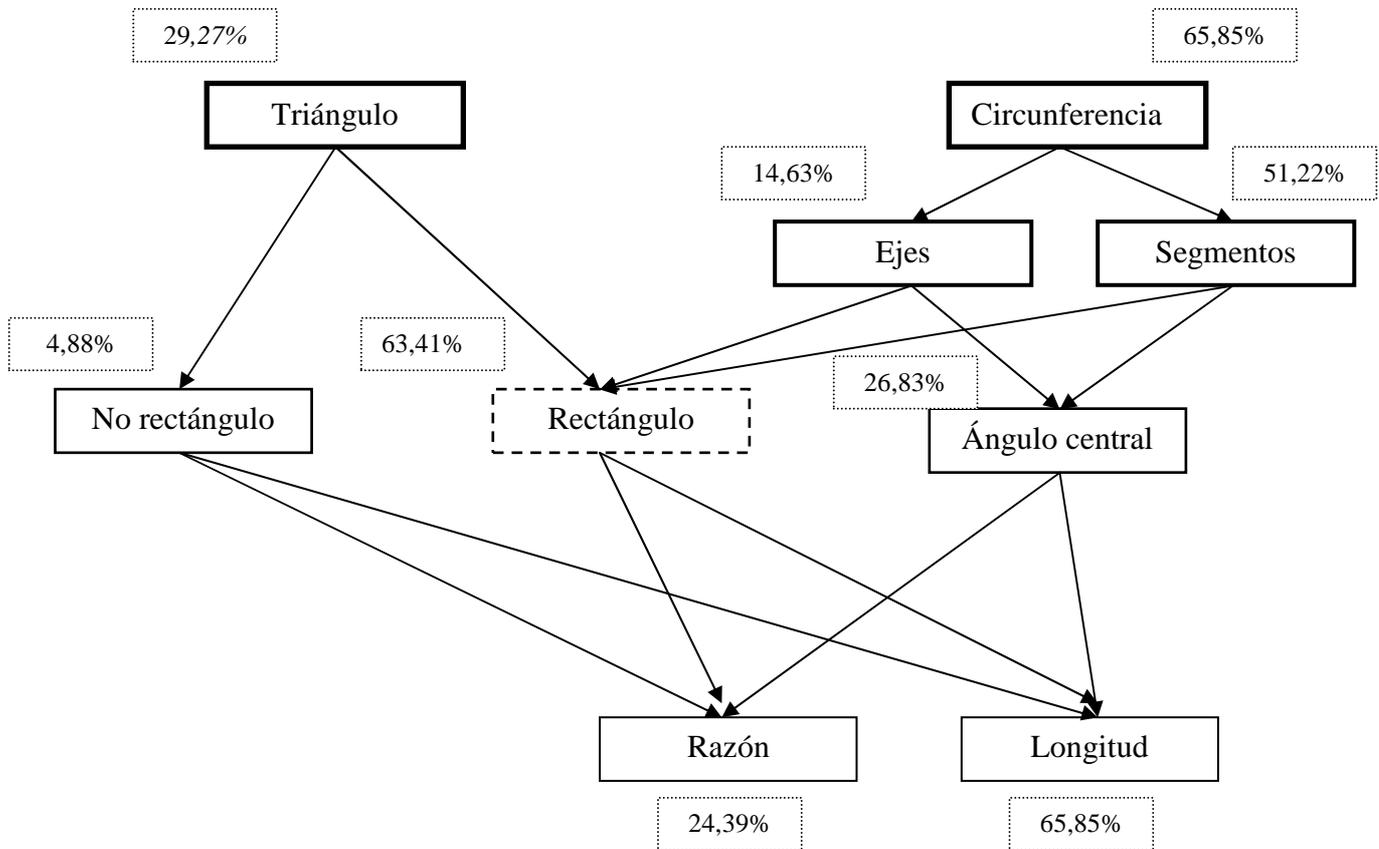
Mapa conceptual

Una vez establecidas las categorías que organizan las respuestas a la pregunta: “Haz un dibujo en que se muestre $\cos(30^\circ)$ ”, se observaron las relaciones y vinculaciones entre las mismas, obteniéndose el mapa conceptual representado en la figura 5.3

De modo análogo al seno, se observa un predominio de las representaciones en las cuales aparece el tema “circunferencia”, siendo el porcentaje ligeramente superior en este caso (65,85%-51,22%). Además, para el coseno la circunferencia sigue teniendo un carácter subordinado en muchos casos, motivo por el cual el triángulo rectángulo se presenta en el 63,41% de las respuestas. Además, se observa que no aparece la interpretación del ángulo interior ni la opción punto de la circunferencia-segmento en ninguna de las producciones de los alumnos.

Figura 5.3

Relación entre las categorías establecidas para la pregunta 1 del cuestionario B



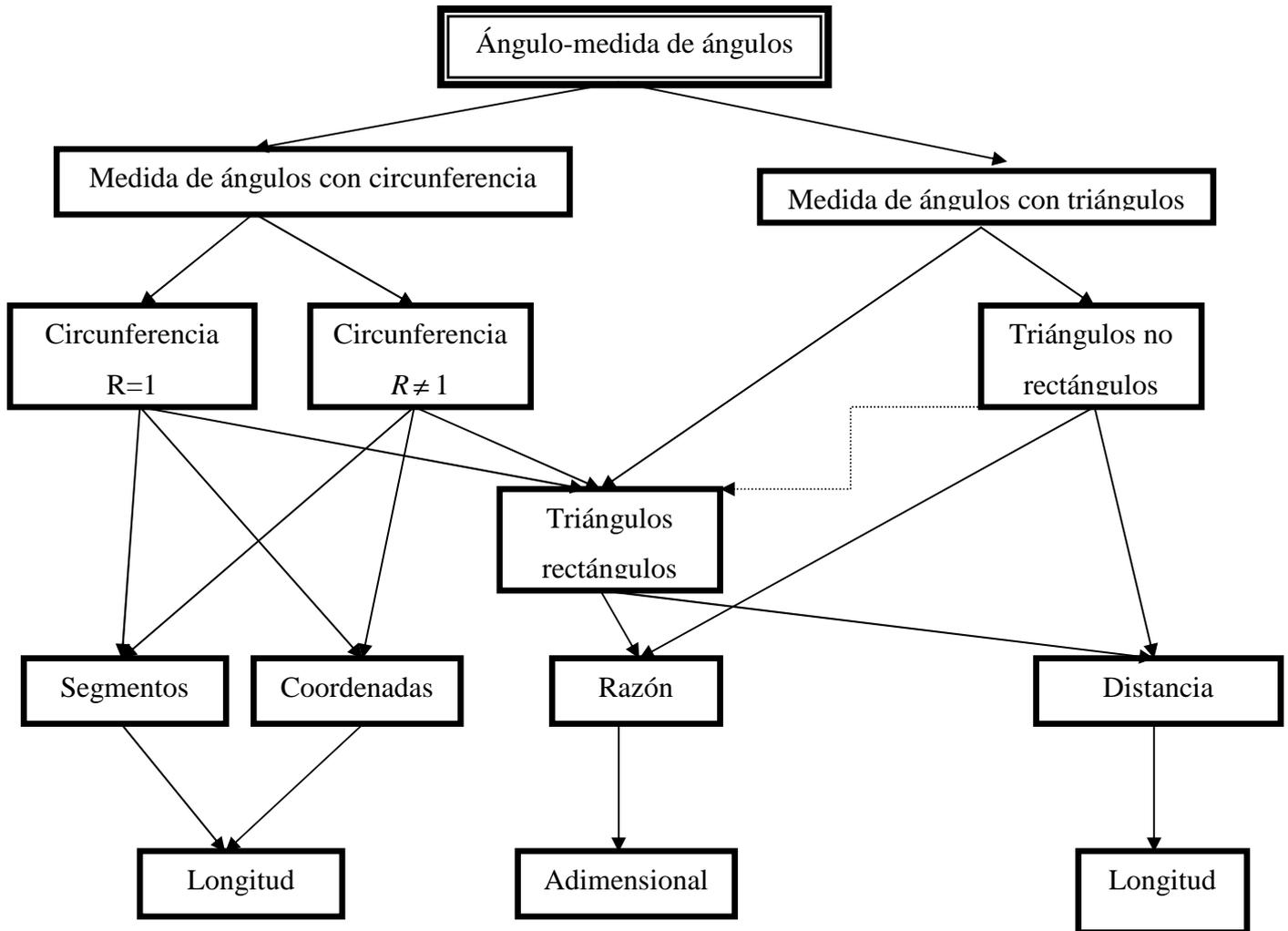
Nuevamente, este mapa ubica todas las representaciones realizadas por los alumnos para el coseno de un ángulo, en función de las principales secuencias de contenidos con las que se han construido. Se muestran así los distintos sentidos considerados por el alumnado en función de los contenidos que sustentan su representación.

Conceptualización histórica

Finalmente, se sintetiza toda la información relacionada con la medida del ángulo y con la representación del coseno en un mapa conceptual más amplio (figura 5.4), que incluye el organizador Historia de la matemática. En este caso no hemos encontrado alumnos que interpreten el coseno como un ángulo. Aparece otra opción al interpretar los alumnos el coseno en una circunferencia de $R \neq 1$ como coordenadas de puntos de la misma. Se muestran de nuevo por parte de los alumnos los dos modos de aproximar la trigonometría, razón (“ratio system”) y longitud (“line system”).

Figura 5.4

Estructura conceptual de la medida del ángulo mediante su coseno



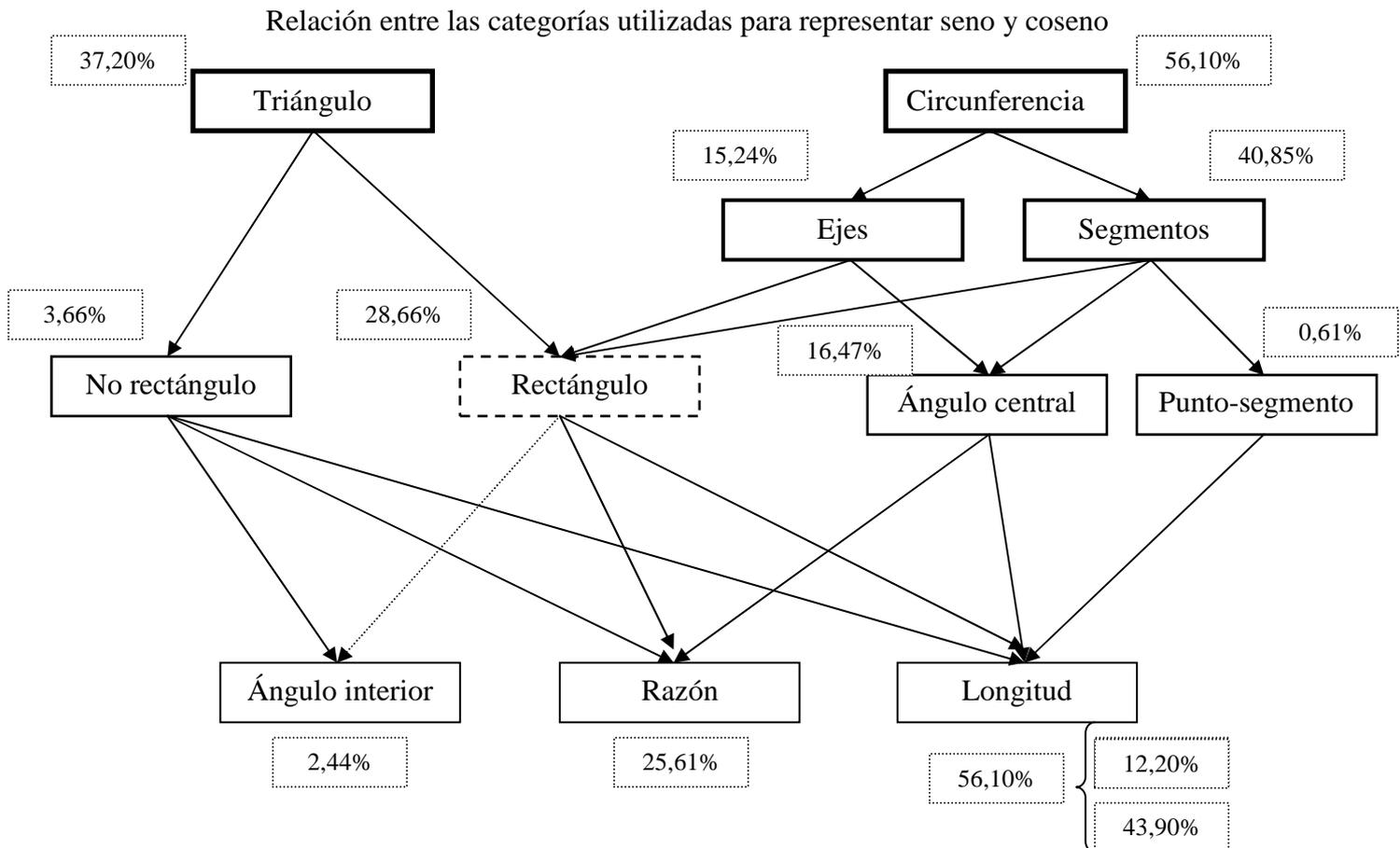
5.3 Análisis conjunto de las preguntas nº1 y nº6 de los cuestionarios A y B

Mapa conceptual

Una vez consideradas conjuntamente las categorías se observaron relaciones y vinculaciones entre ellas, que recogemos en la figura 5.5. Se observa un predominio de las representaciones en las cuales aparece la circunferencia. Así, el 56,10% de todas las producciones tienen como tema “la circunferencia”. Más concretamente, en el 43,90% de todas las producciones, la interpretación del alumnado está relacionada con el “line system”, es decir es una longitud que proviene directamente del tema circunferencia.

Sin embargo, igual que ocurrió históricamente, la circunferencia en muchas producciones tiene un mero carácter auxiliar. En el caso de estudio, del 25,61% total de los alumnos que entienden que es una razón trigonométrica, el 21,96% de ellos proviene de la circunferencia goniométrica.

Figura 5.5



El primer nivel está caracterizado por los temas considerados en la primera visión de conjunto, eliminadas como ya se ha dicho, las opciones de función trigonométrica y del ángulo porque su presencia ha sido incidental.

El segundo nivel viene representado por los elementos que se utilizan para dividir la circunferencia, ejes y segmentos. Cabe destacar que todas las producciones relacionadas con la circunferencia quedan incluidas en estas dos subcategorías.

En el tercer nivel se recogen las formas de indicar el ángulo en la circunferencia goniométrica y/o tipo de triángulo: triángulo no rectángulo, triángulo rectángulo –en el

caso de la circunferencia nos referimos a ángulo interior de un triángulo rectángulo-, ángulo central y punto de una circunferencia-segmento..

Finalmente, encontramos un cuarto nivel en el cual se incluyen las interpretaciones de los alumnos a las razones trigonométricas seno y coseno: ángulo interior, razón y longitud. Es necesario mencionar que únicamente se puede llegar a interpretar la razón trigonométrica como ángulo interior si se parte del triángulo, motivo por el cual se ha representado discontinua dicha conexión.

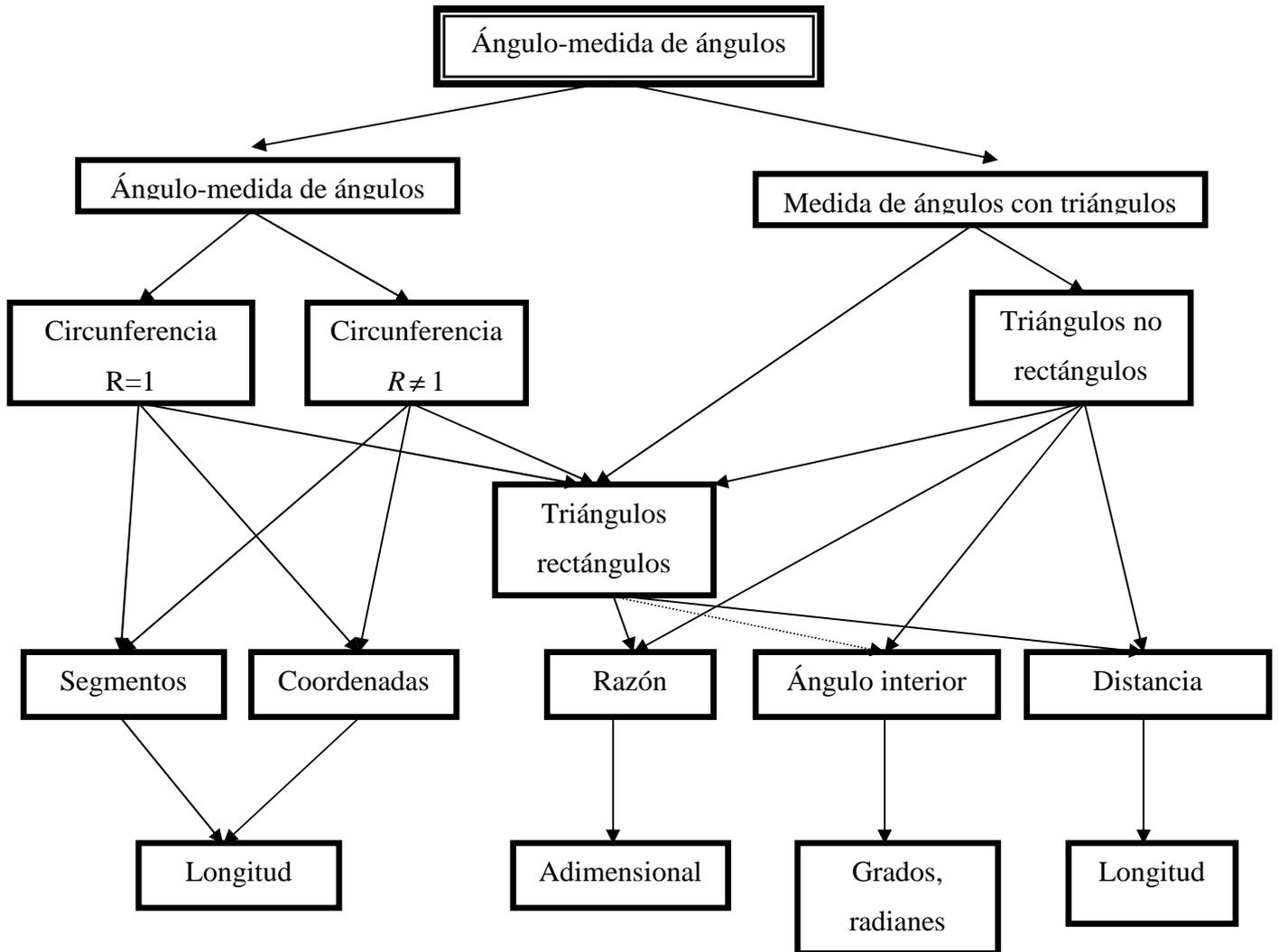
Conceptualización histórica

En este nuevo mapa contemplamos el organizador Historia de la matemática conjuntamente para la medida de un ángulo mediante su seno o coseno. Esta figura es síntesis de las figuras 5.2 y 5.4.

Este mapa permite ubicar todas las representaciones elaboradas por los alumnos, en función de las principales secuencias de elementos con los que se han construido y teniendo en cuenta las interpretaciones del alumnado.

Figura 5.6

Estructura conceptual de la medida de un ángulo mediante su seno y su coseno



5.4 Análisis de contenido de la pregunta nº2 de los cuestionarios A y B

A continuación elaboramos un mapa conceptual (figura 5.7) que relaciona los temas localizados en las respuestas a estas dos preguntas con los contenidos escogidos para explicar la razón trigonométrica, según los casos. Estas relaciones permiten identificar diferentes sentidos utilizados por los estudiantes. Establecemos así una semántica a partir de las respuestas a la segunda pregunta de los cuestionarios A y B, con indicación de las particularidades de cada uno de ellos.

Cuando hemos analizado las producciones de los estudiantes en los apartados 4.7, 4.8 y 4.9 resultantes de las preguntas 2.A y 2.B, relativas a la descripción verbal del seno y coseno de un ángulo, hemos identificado los siguientes temas: “medida”, “razón”, “valor”, “segmento”, “herramienta”, cuyas frecuencias se recogen en la tabla 4.11.

Para cada uno de estos temas los alumnos han escogido diferentes contenidos, conceptuales, -hechos y conceptos-, de los ya establecidos en las preguntas 1 y 6. Así, la observación muestra que en el tema “razón” se manejan tres contenidos para explicarla: mediante la circunferencia, por medio del triángulo rectángulo y mediante el triángulo no rectángulo. Semánticamente distinguimos tres sentidos diferentes del tema “razón”, un sentido de cociente, propiamente dicho, y otros dos que añaden una mayor precisión a la producción que son el de razón trigonométrica y el de proporción. Estos dos últimos se presentan minoritariamente y siempre relacionados con el triángulo rectángulo.

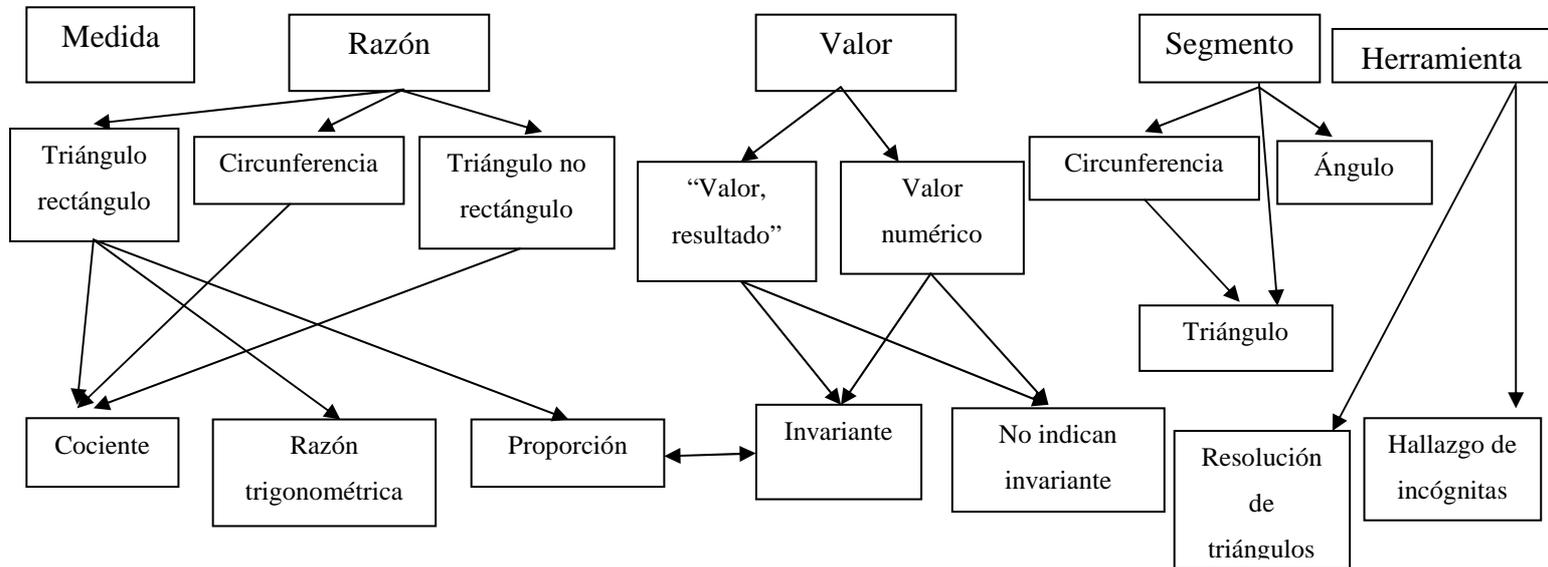
En relación al tema “valor” identificamos dos formas de expresarlo: mediante el valor numérico y mediante el vocablo “valor” o “resultado”. Además, se manifiestan dos sentidos relacionados con este tema, los cuales especifican, o no, si el valor “es siempre el mismo”. La doble flecha entre invariante y proporción es debida a que cuando se indica que el valor es invariante se justifica con la proporcionalidad o viceversa.

Respecto al tema “segmento”, se indican los diferentes hechos que se utilizan para expresarlo: el ángulo, la circunferencia y el triángulo rectángulo. En todas las ocasiones que se refieren a la circunferencia la asocian a algún elemento del triángulo: lado, cateto, altura, base, etc.

Finalmente, el tema “herramienta” se incluye porque hay alumnos que consideran las razones trigonométricas como una técnica para algo, resaltando que también tienen carácter procedimental, lo cual aporta nuevos sentidos, que se resumen en la figura 5.7.

Figura 5.7

Sentidos localizados a partir de los temas verbales para el ítem 2



Algunas diferencias encontradas entre los temas y sentidos de las dos razones trigonométricas, seno y coseno, son las siguientes.

1. En el coseno aparece el tema medida, que no se muestra en el seno.
2. La interpretación del coseno como razón también está asociada a la circunferencia. En el seno no se presenta dicha relación.
3. La flecha entre proporción e invariante, para el coseno, indica que cuando se expresa que es una proporción, inmediatamente se añade que es invariante. Para el caso del seno ocurre al contrario.
4. Para el coseno no se relaciona el sentido de invariante con la indicación de “valor, resultado”, algo que si ocurre en el seno. La categoría “valor, resultado” en el seno es considerado siempre un valor invariante.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En este capítulo se incluyen las conclusiones del estudio, alcanzadas tras el análisis de las respuestas del alumnado a las cuestiones 1, 2 y 6 de los cuestionarios A y B.

El objetivo que nos propusimos era:

“Explorar y describir las nociones, representaciones y conceptos que los estudiantes de primer curso de Bachillerato ponen de manifiesto cuando expresan el significado de las razones trigonométricas mediante descripciones verbales, notaciones gráficas y simbólicas y sus relaciones.”

En general, como vamos a resumir, se han cubierto estas expectativas. La información recogida se muestra más que suficiente para realizar un amplio análisis sobre los significados básicos de los tópicos que se tratan: las razones trigonométricas seno y coseno de un ángulo, que tienen los estudiantes de estos niveles educativos.

El objetivo general del estudio lo desglosamos según tres objetivos específicos, cuyos logros pasamos a comentar.

6.1 Logro del primer objetivo específico

El primer objetivo específico consistió en:

- Diseñar e implementar un instrumento con el cual recoger información en registro verbal, simbólico y gráfico referente a los conceptos de seno y coseno.

Para lograr este primer objetivo se llevó a cabo, en una primera fase, una amplia revisión bibliográfica -histórica, de contenido e investigadora- mediante la cual se recogió información útil para el diseño y construcción del instrumento con el cual

llevamos a cabo el estudio. Nos propusimos recoger información relevante sobre las nociones básicas de la trigonometría, sus definiciones, interpretaciones y usos, para lo cual llevamos a cabo una serie de trabajos mediante los cuales logramos información suficiente para cumplir el objetivo.

Así, en el capítulo 1 presentamos un balance de la revisión sobre historia de la trigonometría, recogido más extensamente en el Anexo I. En el capítulo 2 hemos sintetizado una revisión de investigaciones sobre la enseñanza de la trigonometría. Los campos preferentemente abordados han sido: estudios sobre análisis histórico de libros de texto de trigonometría; investigaciones sobre técnicas para la enseñanza de la trigonometría; e investigaciones sobre comprensión de la trigonometría. Estos documentos han ayudado a delimitar el estudio, proporcionando focos de interés para su abordaje y aportando antecedentes.

En el capítulo 2 hemos expuesto también los fundamentos teóricos del estudio. Así, en el apartado 2.3 hemos presentado nuestra noción de sistema de representación, que hemos sometido a revisión crítica mediante contraste con otras interpretaciones. En el apartado 2.4 hemos introducido la noción de significado de un concepto matemático escolar, clave en este estudio y que ha guiado el método seguido en los análisis conceptual y de contenido que hemos aplicado en este estudio. Aunque nos basamos en el método general del análisis didáctico, el trabajo realizado hace aportaciones originales a esta metodología de investigación al abordar el estudio de un tema de las matemáticas escolares, como es la trigonometría, no estudiado desde esta perspectiva hasta el momento.

Una vez redactado el cuestionario y con el propósito de validarlo, hemos llevado a cabo una aplicación piloto del instrumento diseñado para la fase empírica del trabajo de investigación. Tras esta aplicación se apreció la necesidad de ampliar el cuestionario y modificar, parcialmente, los enunciados de algunas preguntas para alcanzar los objetivos propuestos. Tras su validación por parte del equipo de investigación, se llevó a cabo su aplicación definitiva.

6.2 Logro del segundo objetivo específico

El segundo objetivo específico consistió en:

- Identificar categorías para organizar las respuestas que proporcionan los estudiantes al abordar tareas de enunciado verbal y gráfico sobre razones trigonométricas; relacionar entre sí e interpretar las categorías establecidas.

Para el logro de este objetivo, se procedió al vaciado de todas las producciones de los estudiantes, seguido de un análisis cualitativo de las mismas, basado en un análisis conceptual y de contenido de las producciones del alumnado.

Así, en el apartado 3.5, se presentan las características del análisis de datos realizado, el cual se ha llevado a cabo en el capítulo 4. El método de procesamiento de información es un análisis de contenido, el cual se realiza en cuatro etapas: en la primera, se descomponen las producciones en sus unidades más simples lo que permite organizar los datos en temas; en la segunda, los temas se desarrollan en categorías y subcategorías; en la tercera, se analizan estas categorías: semejanzas, diferencias y vinculaciones, para encontrar patrones que muestren la estructura de las respuestas; y finalmente, en la cuarta etapa se interpretan los datos mediante la descripción y presencia de cada categoría. Este análisis nos ha permitido hallar una serie de categorías, subcategorías y relaciones entre las mismas que nos manifiestan la riqueza y complejidad de este tópico. Los resultados de este sistema de clasificación fueron revisados y refinados por el equipo de investigación. Nuevamente se muestra la validez del análisis conceptual y de contenido como método para el estudio de los significados de conceptos de la matemática escolar, y en general como método específico de investigación educativa. Finalmente, la caracterización de los temas y categorías establecidos aporta al profesor conocimientos para diseñar unidades didácticas.

En el capítulo 5, se relacionan e interpretan las categorías anteriormente establecidas, continuando con el análisis de contenido efectuado sobre el total de las repuestas obtenidas.

6.3 Logro del tercer objetivo específico

El tercer objetivo específico consistió en:

- Inferir los significados que ponen de manifiesto los estudiantes sobre los conceptos de seno y coseno teniendo en cuenta sus respuestas ante las tareas planteadas.

Para el logro de este objetivo se utilizaron los análisis conceptual y de contenido (significados de los conceptos), efectuados sobre el total de las respuestas obtenidas, de las preguntas relativas a las representaciones gráficas y verbales de las razones trigonométricas seno y coseno de un ángulo.

En el capítulo 5 se han incluido los resultados alcanzados relativos a los significados puestos de manifiesto por un grupo de estudiantes de bachillerato sobre los conceptos de seno y coseno de un ángulo. Con ello se ha dado cumplimiento a nuestro propósito de describir la gama de significados que pone de manifiesto los estudiantes del concepto de razón trigonométrica.

Además, se confirman algunos significados documentados por investigaciones anteriores, tales como su interpretación como cociente y función (Weber, 2005); coordenadas de un punto de la circunferencia goniométrica; como distancias horizontales y verticales respecto a unos ejes; y, también, como cocientes entre los lados de un triángulo rectángulo (Brown, 2006). Sin embargo, detectamos nuevos significados como son los de: medida, valor numérico y herramienta. Además, surgen otras interpretaciones para las razones trigonométricas seno y coseno, producto de una inadecuada comprensión de los conceptos: ángulo, ángulo interior de un triángulo, cociente entre lados de un triángulo no rectángulo y distancias horizontales y verticales respecto a segmentos.

El análisis ha puesto de manifiesto que los alumnos manejan una amplia gama de representaciones y consideran una diversidad de sentidos no triviales para estas dos nociones, los cuales expresan la pluralidad de significados –estructuras, representaciones y fenómenos- con los que estos estudiantes abordan e interpretan las nociones básicas de la trigonometría del plano.

6.4 Análisis cuantitativo del estudio piloto y estudio definitivo

- No se han obtenido evidencias para sostener una supuesta mayor dificultad en la identificación de la razón trigonométrica seno, o de la razón trigonométrica coseno, cuando el ángulo se presenta en un triángulo obtusángulo que cuando se presenta en un triángulo equilátero. Aunque los rendimientos son algo inferiores en el triángulo obtusángulo, estas diferencias no son significativas.
- A partir de los rendimientos de los alumnos en este estudio, podemos afirmar que las nociones trigonométricas de coseno y seno muestran tienen una dificultad similar para el alumnado. Al realizar un análisis de varianza, se observan que las diferencias entre pares de preguntas de los cuestionarios no son significativas, a excepción de las preguntas nº2 y nº8.
- Aunque no se ha avanzado en el análisis del resto de las preguntas de los dos cuestionarios, se observa que por lo general el alumnado domina el cálculo de las razones trigonométricas seno y coseno en un triángulo rectángulo (pregunta 5, cuestionario A, 78,38%; pregunta 5, cuestionario B, 75,68%).
- Observando los resultados de la pregunta 4 de ambos cuestionarios, interpretamos un escaso conocimiento de la adimensionalidad de las razones trigonométricas por parte de los sujetos del estudio.

6.5 Cuestiones 1 y 6

Hemos observado las siguientes prácticas, usos, errores y dificultades:

- Preferencia por la representación como longitud del seno y coseno de un ángulo (56,10%).
- Diversidad de interpretaciones para el seno y coseno de un ángulo, como son: ángulo (sólo coseno), ángulo interior de un triángulo, razón entre los lados de un triángulo, y una longitud (ordenada de una función trigonométrica, coordenada cartesiana y distancia -lados de un triángulo y segmentos-).

- Predominio de representaciones en las cuales se utiliza una circunferencia (56,10%).
- Los alumnos muestran una comprensión deficiente de la circunferencia goniométrica; los estudiantes dibujan la circunferencia sin indicar el valor de su radio, lo cual les lleva a incurrir en errores. Esto indica, además, que los alumnos carecen de conocimiento sobre el rango de posibles valores del seno o coseno de un ángulo.
- Se pone de manifiesto el carácter accidental de la circunferencia en la mayor parte de las representaciones. En general, aunque se parte de la circunferencia (56,10%), en más de la mitad de los casos el alumno recurre al triángulo rectángulo para identificar sus razones trigonométricas.
- Los alumnos muestran escaso conocimiento sobre la razón trigonométrica como coordenada. En la mayoría de las producciones relacionadas con la circunferencia (56,10%), sus elementos de división son segmentos (40,85%). Además, se manifiesta una incorrecta definición de los ejes de coordenadas por parte del alumnado, al utilizar segmentos en vez de rectas.
- Los estudiantes conectan por lo general las razones trigonométricas con el triángulo rectángulo. De la mayoría de los sujetos que optaron por la representación basada en el triángulo (37,20%), solamente un 3,66% relacionaron las razones trigonométricas con triángulos no rectángulos.
- Incorrecta conexión entre el sistema “line system” y el “ratio system”. En la mayor parte de las producciones el alumnado utiliza una circunferencia de radio $R \neq 1$ para indicar el seno y el coseno, los cuales identifica con segmentos, obviando que en este caso tales valores vendrían dados mediante una razón.
- El número de respuestas en blanco es muy bajo (6,10% en la pregunta nº1 y nº6), por lo que se puede concluir que el alumnado se encuentra familiarizado con dichas nociones.
- Los estudiantes muestran destreza en la representación de ángulos en la circunferencia. Los estudiantes no encuentran problemas en dibujar los ángulos

que aparecen en el cuestionario, sólo se observa un error de este tipo -3AA04 (1)-.

- El mapa conceptual sobre la medida del ángulo mediante el seno muestra una síntesis importante de las nociones básicas implicadas en este concepto, que aporta nuevas ideas para el desarrollo del currículo y para la enseñanza de la trigonometría. Este mapa conceptual permite ubicar las producciones de los estudiantes, dando información sobre sus errores y prácticas habituales.

6.6 Cuestión 2

- La mayoría de los participantes describen verbalmente las razones trigonométricas seno y coseno como cociente (46,32%). Más de la mitad de las producciones asociadas a esta interpretación se relacionan con palabras derivadas del verbo dividir.
- Los sujetos interpretan verbalmente el seno y coseno de un ángulo como razón o cociente, valor, segmento, medida y herramienta.
- El alumnado no identifica las razones trigonométricas con la noción de proporción. La idea de proporción aparece de modo incidental tanto en el seno como en el coseno. Este aspecto se muestra también en el análisis cuantitativo del estudio definitivo y del estudio piloto, en el que los porcentajes de los ítems nº4 referidos a este aspecto fueron muy bajos.
- Se pone de manifiesto nuevamente una incorrecta conexión entre los sistemas “line system” y “ratio system”. Aunque las nociones trigonométricas de seno y coseno como segmentos están asociadas al “line system” y deberían surgir únicamente del tema circunferencia, también surgen del tema triángulo.
- Escasa conexión por parte del alumnado de la trigonometría con el mundo real. Es mínimo el número de sujetos que reconocen el carácter procedimental de la razón trigonométrica y expresan la idea de que la razón trigonométrica es una técnica.

- Los sujetos tienen un conocimiento práctico del rango de valores del seno y coseno de los ángulos 30° , 45° y 60° . En ningún caso los valores dados por el alumnado han sido superiores o inferiores a uno.

6.7 Análisis conjunto de las cuestiones 1, 2 y 6

- Los alumnos interpretan el seno y coseno de un ángulo como: ángulo (sólo coseno), ángulo interior de un triángulo, razón entre lados de un triángulo (dentro de la cual se pueden considerar dos niveles de distinta complejidad semántica: razón trigonométrica y proporción), longitud (ordenada de una función trigonométrica, coordenada cartesiana y distancia -lados de un triángulo y segmentos-), medida, valor y como herramienta.
- El alumnado expresa verbalmente, de forma mayoritaria, que el seno y el coseno de un ángulo son cocientes (46,32%), mientras que la representación gráfica preferente se hace mediante una longitud (56,10%).
- El alumnado no ha relacionado el seno o el coseno de un ángulo con los valores de una función trigonométrica. Sólo aparece un caso en que se relaciona el seno con la ordenada de la función sinusoidal.

6.8 Limitaciones de la investigación

La muestra seleccionada ha sido intencional. Los participantes han sido elegidos en función de la disponibilidad de los centros y de los docentes, y contando con la aceptación de los alumnos. Los sujetos cursan primer curso de Bachillerato en el I.E.S. Mar de Poniente de la Línea de la Concepción y en el I.E.S. Padre Suárez de Granada. Debido a la elección no aleatoria de los mismos, la validez externa acota el alcance de nuestros hallazgos a dichos centros docentes.

El estudio es exploratorio y tiene interés por la escasez de investigaciones sobre este tópico. No se pretenden generalizar los resultados sino obtener evidencias sobre modos de entender las razones trigonométricas seno y coseno.

No se ha controlado cual es la aproximación utilizada por los docentes sobre este tópico, preferentemente, es decir, si fue el “ratio system” o el triángulo rectángulo, lo cual supone otra limitación del estudio.

6.9 Sugerencias para investigaciones futuras

Las limitaciones enumeradas nos orientan hacia nuevas líneas de investigación. Así, entre las investigaciones que nos proponemos abordar en el futuro se encuentra completar el análisis del resto de las preguntas del cuestionario y revisar los resultados e interpretaciones ya realizados para abarcar los diferentes componentes del significado de esta noción de las matemáticas escolares.

Además, conviene establecer, mediante el análisis didáctico de los libros de texto utilizados en clase, la estructura conceptual en que se sustentan estos conocimientos así como los fenómenos vinculados a los mismos. Igualmente, tiene interés precisar la comprensión del alumnado sobre estas nociones, para lo cual resultará conveniente aplicar el cuestionario a una muestra más amplia y representativa de alumnos y centros docentes; también es de nuestro interés implementar el cuestionario a grupos de alumnos que hayan seguido aproximaciones diferentes a estas nociones. Igualmente es de interés utilizar los resultados obtenidos para poner en práctica planificaciones distintas, que aborden vías distintas de representación.

Sería conveniente indagar, con un número mayor de sujetos, las diferencias entre los significados del seno y del coseno, junto con las diferencias en dificultad de un concepto respecto del otro.

Desde otro planteamiento, tiene interés investigar el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico de los profesores sobre este tópico. Destacamos el análisis de tareas, secuencias de tareas y organización docente utilizadas en la planificación e implementación de la enseñanza de la trigonometría, junto con el uso de recursos y de la tecnología en el aula.

Finalmente, otra línea de investigación es el estudio de la tangente. Como hemos indicado debe de tener un tratamiento diferente al seno y al coseno, aún por realizar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., Serrano, E. y Vizmanos, J.R. (2008). *Matemáticas I*. Boadilla del Monte, España: S.M.
- Allen, H. D. (1977). *The teaching of trigonometry in the United States and Canada: A consideration of elementary course content and approach and of factors influencing change, 1890-1970*. Unpublished doctoral dissertation, Rutgers University, New Brunswick, NJ.
- Army, P. D. (1991). *An approach to teaching college course in trigonometry using applications and a graphing calculator*. Unpublished doctoral dissertation, Rutgers University, New Brunswick, NJ.
- Barnes, J. A. (1999). Creative writing in trigonometry. *Mathematics Teacher*, 92, 6, 498–503.
- Bedoya, E. (2002). *Formación Inicial de Profesores de Matemáticas: Enseñanza de Funciones, Sistemas de Representación y Calculadoras Gráficas*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.
- Bescós, E, y Peña, Z. (2010). *Matemáticas I. Proyecto Tesela*. San Fernando de Henares, España: Oxford University Press.
- Biehler, R. (2004). Reconstruction of Meaning as a Didactical Task: The Concept of Function as an Example. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 61–81). Dordrecht: Kluwer.
- Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

- Bressoud, D. (2010). Historical reflections on teaching trigonometry. *Mathematics Teacher*, 104, 2, 106–112.
- Bromme, R., & Steinbring, H. (1994). Interactive development of subject matter in the Mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 217–248.
- Brown, S. A. (2005). *The trigonometric connections: Students' understanding of sine and cosine*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois.
- Burch Warren, J. (1981). *The development, interview testing, and generalization of a theory based model of conceptual structures for solving routine trigonometry problems*. Unpublished doctoral dissertation, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.
- Byers, P. (2010). Investigating trigonometric representations in the transition to college mathematics. *College Quarterly*, 13, 2, 1–10.
- Cajori, F. (1985). *A history of mathematics* (4ª ed.). New York, NY: Chelsea publishing company.
- Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.
- Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95–124). Barcelona: Horsori.
- Castro-Rodríguez, E. (2010). *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación inicial*. Memorial final del Máster en Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada
- Coffey, A., y Atkinson, P. (1996). *Making sense of qualitative data: Complementary research strategies*. Thousand Oaks, CA: Sage.

- Coleman, H., & Unrau, Y. A. (2005). *Social work: Research and evaluation. Quantitative and qualitative approaches*. (R. M. Grinnell y Y. A. Unrau, Eds.) (7ª ed.). Nueva York, NY: Oxford University Press.
- Dominic, J. M. (2012). *A study of student understanding of the sine function through representations and the process and object perspectives*. Unpublished doctoral dissertation, The Ohio University, Ohio, OH.
- Duval, R. (1993). Semiosis y noesis. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa* (pp. 118–144). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Eco, U. (1990). *Semiótica y filosofía del lenguaje*. Barcelona: Lumen.
- Ferrater, J. (1981). *Diccionario de Filosofía*. Madrid: Alianza Editorial.
- Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. Unpublished doctoral dissertation, University of Iowa, Iowa, IA.
- Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de Semántica y Lógica* (pp. 84–111). Madrid: Tecnos.
- Furingueti, F (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 2, 131-143.
- Furkan, H., Kutluka, T., Zengin, Y. (2011). The effect of dynamic mathematics software Geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Social and Behavioral Sciences*, 31, 183–187.
- Gelfand, I. M. y Saul, M. (2001). *Trigonometry*. New York, NY: Birkhäuser.

- Gómez, P. (2007a). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada, España.
- Gómez, P. (2007b). *El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de secundaria*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada
- Hiebert, J. (1992). Learning and teaching with understanding. En T. Carpenter (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65–97). New York, NY: MacMillan Publishing Company.
- Ibañes, M., Ortega, T., y Piñeiro, M. (1998). *Trigonometría*. Madrid: Síntesis.
- Kaput, J. J. (1987). Representations systems and mathematics. En C. Javier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19–26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kendal, M., y Stacey, K. (1997). Teaching trigonometry. *Vinculum*, 34, 1, 1–8.
- Kilpatrick, J. (1997). Valoración de la investigación en didáctica de las matemáticas: más allá del valor aparente. En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (pp. 17–31). Bogotá: Una empresa docente.
- Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.
- León, O. G., y Montero, I. (1997). *Diseño de investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill.
- Mansfield, R. M. (1972). *Trigonometry with applications*. Belmont, MS: Wadsworth.
- Maor, E. (1998). *Trigonometric delights*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Markel, D. (1982). Trigonometry -Forgotten and Abused? *School Science and Mathematics*, 82, 7, 548–551.
- Martín F. A., Rey J. M. y Reyes, M. (2008). *Matemáticas I*. Madrid: Bruño

- Martín-Fernández, E. (2011). *Unidad didáctica: Trigonometría*. Documento no publicado. Universidad de Granada: Granada
- Mathematics Association of England. (1950). *The teaching of trigonometry in schools: A report prepared for the Mathematical Association*. London: G. Bell y Sons, Ltd.
- McMillan, J. H., y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa* (5ª edición). Madrid: Pearson Addison Wesley.
- Miller, S. (2001). Understanding transformations of periodic functions through art. *Mathematics Teacher*, 94, 8, 632–635.
- N. Blanckett, & Tall, D. O. (1991). Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. En Furinguetti, F. (Ed), *Proceedings of the 15th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 144–151). Assisi, Italy: PME.
- Palmer, M. E. (1980). *Trigonometry instruction: An aptitude treatment interaction study*. Unpublished doctoral dissertation, The Ohio University, Ohio, OH.
- Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (1990). *Vocabulario científico y técnico*. Madrid: Espasa-Calpe.
- Rico, L. (2007). *Sistemas de significados de un concepto en las Matemáticas Escolares*. Documento no publicado. Universidad de Granada: Granada.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4, 1, 1–14.
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista iberoamericana de educación matemática. Unión*, 33, 11–27.

- Sampieri, R., Fernández, C., y Baptista, M. P. (2010). *Metodología de investigación* (5ª edición). Mexico: McGraw-Hill.
- Schoenfeld, A. H. (1991). On pure and applied research in mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 10, 263–276.
- Searl, J. (1998). Practical activities. *Mathematics in school*, 27, 2, 30–31.
- Sickle, J. V. (2011). A history of trigonometry Education in the United States 1776-1990. Unpublished doctoral dissertation, Columbia University, Nueva York, NY.
- Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10, 3, 24–36.
- Smith, D. E. (1958). *History of mathematics. General survey of the history of elementary*. New York, NY: Dover.
- Thompson, K. (2007). *Student's understanding of trigonometry enhanced through the use of a real world problem: improving the instructional sequence*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois, IL.
- Ulmann, S. (1976). *Semiótica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar.
- Van Brummelem, G. (2009). *The mathematics of the Heaven and the Earth. The early history of trigonometry*. Princeton, NY: Princeton University Press.
- Watson, A. (2010). Working group on trigonometry: meeting 5. En Joubert, M. (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* (Vol. 30, 2). Nottingham y Leicester, Reino Unido: University Nottingham and Leicester

Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 102, 2, 144–147.

Weber, K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics Teacher*, 102, 2, 144–147.