



Universidad de Granada  
Departamento de Didáctica de la Matemática

**Trabajo de Investigación Tutelada**

---

**FRACCIONAR Y REPARTIR:  
UN ESTUDIO CON MAESTROS EN  
FORMACIÓN INICIAL**

Elena Castro Rodríguez

Granada, 2010



Universidad de Granada  
Departamento de Didáctica de la Matemática

# FRACCIONAR Y REPARTIR: UN ESTUDIO CON MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL

Trabajo de investigación tutelada realizado bajo la dirección del Doctor Luis Rico Romero del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Elena Castro Rodríguez para su aprobación por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Fdo.: Elena Castro Rodríguez

Vº Bº del director

Fdo.: Luis Rico Romero

Este trabajo se realizó en el seno del grupo de investigación Didáctica de la Matemática. *Pensamiento numérico de la Universidad de Granada*, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM193).

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento al director de este trabajo, Dr. Luis Rico Romero, por la dedicación y apoyo que ha brindado a este trabajo.

Asimismo, agradezco a los profesores Maria Fernanda Ayllón, Enrique Castro, Moisés Coriat, Pablo Flores, Juan Godino e Isidoro Segovia por permitirme interrumpir sus clases y cederme su tiempo de docencia.

Por último, a los maestros en formación que han participado en la realización del estudio, sin ellos no hubiese sido posible.

# ÍNDICE

ÍNDICE.....	1
Capítulo 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	3
1.1 Introducción.....	3
1.2 Objetivos del estudio.....	5
Capítulo 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	7
2.1 Antecedentes de la investigación.....	7
2.2 Significado.....	14
2.3 Fenomenología.....	15
2.4 Representaciones.....	18
2.5 Conclusiones.....	20
Capítulo 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.....	23
3.1 Tipo de estudio y descripción general.....	23
3.2 Los sujetos.....	24
3.3 Instrumento.....	25
3.4 Procedimiento de aplicación.....	26
Capítulo 4. ANÁLISIS DE LOS DATOS.....	29
4.1 Tipo de análisis realizado.....	29
4.2 El proceso de análisis inductivo.....	30
4.3 Análisis de las respuestas a la pregunta 1.1.....	32
4.4 Análisis de las respuestas a la pregunta 1.2.....	36
4.5 Análisis conjunto de las respuestas a las preguntas 1.1 y 1.2.....	41
4.6 Análisis de las respuestas a la pregunta 2.1.....	46
4.7 Análisis de las respuestas a la pregunta 2.2.....	51
4.8 Análisis conjunto de las respuestas a las preguntas 2.1 y 2.2.....	57
Capítulo 5. CONCLUSIONES.....	63
5.1 Preguntas 1 y 2.....	64
5.2 Limitaciones de la investigación.....	66
5.3 Sugerencias para investigaciones futuras.....	67
REFERENCIAS.....	69
ANEXO.....	75

Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación

# CAPÍTULO 1

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1 Introducción

Desde hace unas décadas la investigación educativa, tanto a nivel nacional como internacional, ha dirigido su atención hacia la naturaleza del conocimiento requerido por los profesores (Hill, Schilling y Ball, 2004; Shulman, 1986; Wood, 2005). Durante este tiempo han surgido perspectivas teóricas sobre el conocimiento de los profesores que han contribuido a este interés, especialmente los trabajos de Shulman (1987). Su clasificación de los tipos de conocimiento que debe poseer un profesor ha sido de las más difundidas y utilizadas en la investigación sobre el tema. Propuso tres categorías de conocimiento entre las que se encuentra conocimiento de la materia específica (subject matter knowledge), conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular entre otros.

Las categorías de conocimiento anteriores son muy generales y se han propuesto concreciones particulares de cada una de ellas, este es el caso de los organizadores del currículo (Rico, 1997). En el grupo de Investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada se ha desarrollado un tipo especial de conocimiento pedagógico del contenido al que se denomina “organizadores curriculares” (Rico, 1997), como aquellos conocimientos que se adoptan como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de las unidades didácticas. Dentro de esta línea de investigación encontramos trabajos recientes, como los de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009), que asumen una visión funcional de las matemáticas escolares como modo de interpretar y planificar el currículo basada en el Análisis Didáctico. El trabajo que presentamos en esta memoria

se enmarca dentro de esta línea, centrándonos de manera específica en aspectos claves relacionados con los organizadores curriculares.

Un hecho difundido en los ámbitos especializados es la carencia o pobreza de significados de los conceptos matemáticos que se observa en los estudiantes universitarios de las especialidades de magisterio. Para que la formación inicial de los maestros en el área de matemáticas sea eficaz, es importante conocer de antemano cuál es el dominio conceptual que poseen sobre un tópico determinado de matemáticas, cómo lo interpretan, cuál es su nivel de profundidad y las posibles deficiencias o lagunas de su conocimiento en la materia que va a ser objeto de aprendizaje.

Las fracciones son un contenido básico en la etapa de Educación Primaria por lo que los programas de formación inicial de maestros las incluyen como parte del conocimiento del contenido. Parte de la responsabilidad de la enseñanza inicial y el aprendizaje de este campo conceptual recae en los maestros de Educación Primaria cuya preparación profesional demanda un incremento y mejora de sus conocimientos sobre éste tópico matemático. Es por ello que el estudio del conocimiento de los maestros en formación inicial sobre este tema es de gran importancia ya que las fracciones son ciertamente difíciles de aprender y enseñar. Estudios como INCE (2002) ya advirtieron de las deficiencias de nuestros alumnos de primaria y secundaria en este tópico matemático. Aunque ha habido intentos de clarificar el conocimiento de los maestros en formación sobre las fracciones, los estudios disponibles son limitados y se centran principalmente en la división.

Las grandes carencias de los estudiantes para profesor en el tema de fracciones han llevado a investigadores durante décadas a intentar mejorar la comprensión de este tema. Sin embargo, en distintos trabajos sobre el tema (Ball, 1990; Cramer, Post y del Mas, 2002; Jones, 2006; Ma, 1999; Newton, 2008) se pone de manifiesto que las deficiencias en el conocimiento de las fracciones han sido un problema y lo continúan siendo, tanto en los maestros en ejercicio como en los maestros en formación inicial.

¿Por qué las fracciones presentan dificultades para algunos estudiantes y profesores en formación? Vergnaud (1983) argumenta que el desarrollo de las fracciones está



fuertemente relacionado con otros elementos y presentan muchas diferencias con el campo conceptual de los números enteros. Bajo diferentes contextos, las fracciones adquieren diferentes significados, por ejemplo parte-todo, cociente, medida, razón y operador (Behr, Lesh, Post, y Silver, 1983). El conocimiento de estos significados, sus interrelaciones y la capacidad para interpretarlos y utilizarlos como elementos de aprendizaje forman parte del bagaje intelectual que debe poseer un profesor de matemáticas.

Puesto que la investigación sobre fracciones en relación con los tipos de conocimiento del profesor es un campo de trabajo muy amplio, en este estudio nos hemos limitado a realizar una contribución desde un punto de vista empírico acerca del dominio conceptual que tienen los maestros en formación inicial de algunos de los significados de las fracciones, como un conocimiento previo para su abordaje en el aula de magisterio.

La revisión que hemos hecho de la bibliografía sobre fracciones nos ha llevado a la conclusión de que actualmente hay un creciente interés por investigar el conocimiento matemático de los profesores. Esto pone de manifiesto la actualidad de nuestra investigación. Además, mediante el barrido bibliográfico realizado sobre investigaciones en fracciones, podemos afirmar que es una investigación original en cuanto al modo de abordar el contenido tratado.

## **1.2 Objetivos del estudio**

La finalidad principal de este trabajo es describir las ideas, imágenes y conceptos sobre fraccionar y repartir que tienen los maestros en formación inicial de las especialidades de Educación Infantil y de Educación Primaria, cuando inician sus estudios. Para ello, hemos planteado tres objetivos específicos.

1. Construir un cuestionario con el que elicitamos ideas, imágenes y conceptos sobre las nociones “fraccionar” y “repartir”.

## Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación

2. Identificar y categorizar los significados que sobre “fraccionar” y “repartir” sustentan los estudiantes para Maestro de Educación Infantil y Maestro de Educación Primaria, en función del campo conceptual de las fracciones.
- 3 Analizar las relaciones que surgen entre las eventuales categorías establecidas para interpretar la diversidad de significados sobre “fraccionar” y “repartir”, teniendo en cuenta aspectos verbales y gráficos.

## CAPÍTULO 2

# FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La fundamentación teórica del trabajo que incluimos en este capítulo trata cuatro aspectos relacionados con la investigación que hemos realizado. En primer lugar presentamos una revisión bibliográfica en la que se recogen resultados importantes que se han obtenido en estudios previos sobre el tema. No es una revisión exhaustiva, pero sí hemos recogido y seleccionado un conjunto de trabajos por ser investigaciones centradas en el estudio de las fracciones y estar focalizados en la formación inicial de profesores, o bien, trabajos asociados a la formación de profesores centrados en el conocimiento del contenido pedagógico y más concretamente en los organizadores del currículo. En segundo lugar, abordamos de manera sucinta la interpretación que damos a la noción de significado. Dadas la pluralidad de formas de entender este término en la literatura científica, hemos optado por esclarecer y precisar cuál es la que hemos utilizado en este trabajo. El tercer aspecto que abordamos es la fenomenología como organizador del currículo, entendida como herramienta para la planificación curricular, y considerada como parte del conocimiento de contenido pedagógico en la formación inicial de maestros. Por último, tratamos otro organizador, los sistemas de representación y, con ello, completamos los referentes básicos de este trabajo.

### **2.1 Antecedentes de la investigación**

La revisión bibliográfica realizada ha sido elaborada en dos etapas. Primero se ha efectuado una consulta en la base de datos ZDM utilizando como descriptores combinaciones de los términos: *fracción*, *número racional*, *significados*, *fenomenología*, *formación de profesores*, y *conocimiento profesional*. Dada la

especificidad de este estudio, entre todos los trabajos identificados con esos descriptores fueron seleccionadas aquellas investigaciones más significativas para nuestros objetivos. Una segunda etapa de la revisión bibliográfica se llevó a cabo a partir de las principales revistas españolas de educación matemática, Epsilon, Suma, Uno y Enseñanza de las Ciencias para el periodo comprendido desde su nacimiento hasta 2010.

En la revisión de los informes de investigación elaborados por la comunidad PME se revela que, la investigación educativa reciente ha dirigido su atención hacia la cognición del profesor, hacia teorías implícitas de los profesores como campo de investigación para describir, clasificar e interpretar los conocimientos de los profesores, sus procesos cognitivos y la praxis didáctica. Ponte y Chapman (2006) clasifican estos estudios sobre formación de profesores en cuatro categorías principales: conocimiento matemático que tienen los profesores, conocimiento que los profesores tienen sobre la enseñanza de las matemáticas, creencias y concepciones de los profesores, y conocimiento práctico de los profesores.

La mayoría de los estudios realizados sobre formación de profesores durante las últimas décadas, se centran directa o indirectamente, en las dificultades o deficiencias que estos presentan en conceptos o procesos matemáticos particulares. Estos estudios tratan una variedad de temas matemáticos. Entre los que obtienen una mayor atención se encuentran la geometría, la estructura aditiva y multiplicativa, las fracciones y la resolución de problemas.

A continuación enumeramos y describimos algunas de las investigaciones relacionadas con la formación de profesores y su conocimiento sobre el tema de fracciones.

- Ball (1990) analizó mediante un estudio de tipo longitudinal, los conocimientos sobre la división de fracciones que presentan un grupo de 252 profesores de primaria y secundaria en formación inicial. El instrumento utilizado fue un cuestionario, aplicado a todos los sujetos, y una entrevista realizada a una muestra seleccionada. Los resultados mostraron que la comprensión de los

futuros profesores tiende o se limita al uso de reglas en este tipo particular de conocimiento.

- Llinares y Sánchez (1991) estudiaron el conocimiento pedagógico del contenido sobre fracciones que presentan los maestros en formación inicial. Encontraron que muchos de los participantes tenían dificultades para identificar la unidad, representar fracciones y trabajar con fracciones impropias. Además, llegaron a la conclusión de que en la comprensión de los estudiantes de magisterio, influye tanto la presentación que se haga del concepto, como las representaciones que el profesor utiliza en su instrucción.
- Post, Harel, Behr y Lesh (1991) elaboraron un programa de formación de profesores sobre el tema de las fracciones. Mediante la utilización de diversos instrumentos como cuestionarios formados por preguntas cortas y problemas, o entrevistas, analizan las respuestas de los profesores para obtener resultados en los cuales fundamentar su programa. Los resultados obtenidos resaltan las dificultades de los profesores en la resolución de problemas con fracciones y su capacidad limitada para dar explicaciones de los procedimientos utilizados.
- Philippou y Christou (1994) investigaron el conocimiento conceptual y procedimental de las fracciones que presentan los maestros en formación inicial. Mediante el análisis de las respuestas obtenidas en el cuestionario aplicado, se observa que las relaciones entre estos dos conocimientos son escasas. Los autores sugieren que los programas de formación de profesores deben relacionar de forma explícita el conocimiento conceptual y procedimental de las fracciones.
- Pinto y Tall (1996) se centran en las concepciones del número racional que presentan siete profesores en formación inicial de secundaria y primaria. A través de entrevistas, estudian la definición y la imagen del concepto. Los resultados obtenidos muestran que sólo uno de los participantes fue capaz de recordar una definición, mientras que el resto dieron definiciones erróneas. Ninguno utiliza de forma coherente la definición como fuente de significado del concepto de número racional, sino que utilizan imágenes del concepto. Los números enteros y las fracciones se veían a menudo como el "mundo real" del

concepto, mientras que los racionales, si no se identifican con las fracciones, fueron considerados como un tecnicismo.

- Behr y sus colaboradores (1997) estudiaron la comprensión de profesores en formación sobre el significado de operador de los números racionales. El instrumento utilizado fue la entrevista en la que plantearon tres problemas. Los resultados confirman que los estudiantes utilizan dos subconstructos denominados duplicador/partidor-reductor y amplificador/reductor, como parte del significado de operador del número racional. El segundo subconstructo se presenta con poca frecuencia en sus respuestas, y sólo es utilizado cuando el número racional es conceptualizado como una razón.
- Gairín (1998) elabora e implementa una propuesta didáctica en un grupo de maestros en formación inicial, con la intención de incrementar la comprensión de los números racionales mediante el fortalecimiento de las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal. Los contenidos de la propuesta se agrupan en cinco temas: concreción del modelo, sistemas de representación polinómico unitario, expresiones polinómicas unitarias y fracciones, sistema de representación polinómico decimal y notación decimal. Posteriormente, aplica la metodología de la entrevista a tres estudiantes, con el objetivo de indagar entre las relaciones previas de estos estudiantes y su actuación como profesores. Concluye que cuanto mejor es la comprensión del modelo por parte de los futuros maestros, más eficaces se muestran en la detección y diagnóstico de los errores por parte de los escolares, además de ofrecer razonamientos más sustentados en el mundo de los objetos.
- Nillas (2003) investigó el conocimiento conceptual y procedimental que presentan los profesores en formación con respecto a la división de fracciones. Para ello se llevaron a cabo métodos cualitativos, entrevistas y análisis de las respuestas. Diez profesores respondieron a cinco problemas y cuatro de ellos fueron entrevistados para aclarar las estrategias utilizadas en la resolución de problemas. Los resultados muestran que los profesores utilizan una variedad de estrategias, pero carecen de una comprensión conceptual fuerte sobre la división

de fracciones. Se confirma la necesidad de proporcionar una sólida preparación basada en la enseñanza y el aprendizaje comprensivo de los contenidos matemáticos.

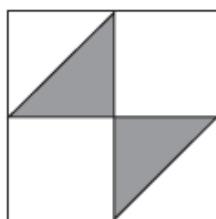
- Jones (2006) estudia el conocimiento y las motivaciones que presentan los estudiantes de magisterio, antes y después de realizar un curso de formación centrado el tema de fracciones. Se aplicó una prueba de evaluación de fracciones y un cuestionario de motivación al principio y al final del programa, y se hicieron observaciones durante sus nueve días de duración. El conocimiento de los estudiantes sobre los conceptos básicos mejoró, al igual que sus habilidades de cálculo y capacidad para resolver problemas. Sin embargo, su tendencia a usar algoritmos de forma errónea no varió tras la aplicación del programa.
- Huang, Liu y Lin (2006) evaluaron el conocimiento sobre fracciones de 47 maestros en formación. Los instrumentos usados fueron un test sobre el conocimiento de fracciones (FKT) y una prueba de resolución de problemas (MPSAS). En los resultados se observa que los profesores tienen un conocimiento procedimental superior al conceptual, pero su conocimiento procedimental de las fracciones tiene una moderada correlación con su capacidad de resolución de problemas.
- Gómez (2007) se fundamenta en los trabajos realizados sobre los organizadores del currículo para conceptualizar un procedimiento ideal que el profesor de matemáticas debería realizar a la hora de diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas, el análisis didáctico. Desarrolla con detalle el análisis cognitivo como parte del análisis didáctico y, describe y caracteriza el desarrollo del conocimiento didáctico de un grupo de profesores en formación de la Universidad de Granada.
- Newton (2008) realizó un programa de formación para mejorar la comprensión que tienen los estudiantes de magisterio en el tema de las fracciones. Este curso estaba dividido en cuatro secciones, teoría básica de números, adición y sustracción, multiplicación y división. Los datos fueron recogidos antes y

## Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación

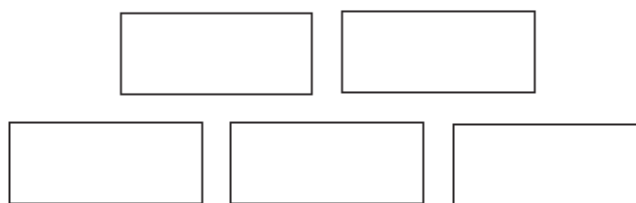
después del curso para poder profundizar en los conocimientos que presentaban los participantes.

Algunos de los problemas utilizados en este estudio fueron:

*¿Qué fracción representa la parte sombreada en este dibujo?*



*Colorea 2/3 de estos rectángulos.*



Los resultados mostraron que al final del curso los participantes habían subsanado muchos de los errores que presentaban de manera especial en los algoritmos, no obstante seguían careciendo de flexibilidad en su conocimiento.

- Wright (2008) se centró en la exploración del conocimiento del contenido especializado (SCK) y el conocimiento de los contenidos y los estudiantes (KCS) en relación con el concepto de fracción a través de cuatro profesores en formación inicial a lo que se les pidió la creación de mapas conceptuales. Los resultados mostraron que los participantes estaban más familiarizados con el significado parte-todo de las fracciones, y menos con otros significados como el de razón, operador, división o como punto en la recta numérica. La interpretación de razón es la que presentó mayor dificultad para los participantes de este estudio.
- Lupiáñez (2009) describe un procedimiento denominado análisis cognitivo que forma parte de otro más amplio, el análisis didáctico, y estudia la competencia



de planificación de las matemáticas escolares en un grupo de profesores de secundaria en formación. Mediante este instrumento los participantes seleccionan, enuncian y describen las capacidades que esperan que desarrollen sus escolares al implementar una unidad didáctica, en particular, para una unidad didáctica sobre el tema de fracciones. Estas capacidades se agrupan según las prioridades en el aprendizaje de cada tema, y los profesores en formación expresan cuáles de esas capacidades contribuyen al desarrollo de una o varias competencias.

- Toluk-Uçar (2009) investigó el efecto de la invención de problemas sobre la comprensión del concepto de fracción en profesores en formación inicial. Los participantes del estudio se encontraban matriculados en dos versiones de un curso de métodos de la universidad de Turquía. En la versión experimental, el planteamiento de problemas se utilizó como estrategia de enseñanza, el otro grupo siguió una metodología de enseñanza tradicional. Los resultados mostraron que la invención de problemas ha tenido un impacto positivo en su conocimiento sobre este tópico matemático. Las creencias y concepciones en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mejoraron en los sujetos pertenecientes a la versión experimental. Algunos de las actividades propuestos fueron:

*Para cada uno de los apartados 1-4, a) calcula la solución, b) plantea un problema, c) dibuja una ilustración que represente el problema, d) explica tu dibujo.*

1.  $(3/4) - (1/2) = ?$

2.  $(1/3) + (1/2) = ?$

3.  $(2/3) / (1/2) = ?$

4.  $(3/4) \times (1/3) = ?$

La revisión que hemos hecho de la bibliografía sobre fracciones y formación inicial de profesores, nos ha llevado a la conclusión de que el conocimiento que se ha obtenido de ellas es limitado. Se han tratado por separado aspectos puntuales como la división, invención de problemas, la relación entre el conocimiento conceptual y el

procedimental, etc., pero hay muchos otros aspectos que no han sido tratados. Concretamente, la función que desempeña la fenomenología en la aprehensión y estructura del conocimiento de las fracciones no se ha tratado de manera explícita de forma empírica.

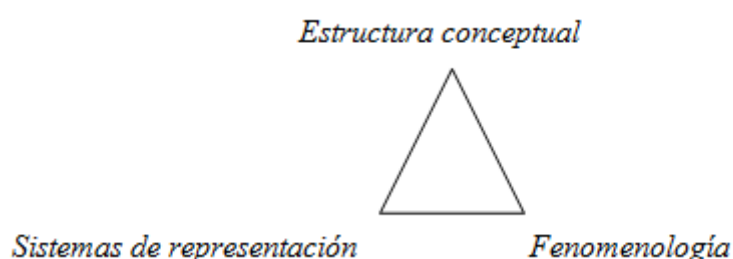
## 2.2 Significado

Uno de los aspectos que se manejan en nuestro estudio es el del significado de un concepto matemático. La noción de significado se utiliza con frecuencia de modo informal en las investigaciones en educación. Este es un tema central y controvertido en filosofía, lógica, semiótica y demás ciencias y tecnologías interesadas en la cognición humana. *El significado es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje* (Ullmann, 1962, p.62). Nuestra preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos, nos ha llevado a incluirlo como parte fundamental en este trabajo, y nos ha conducido a la indagación de su naturaleza aplicado a las fracciones.

Coexisten dos escuelas de pensamiento en la lingüística que abordan la cuestión del significado desde puntos de vista diferentes: la tendencia "analítica" o "referencial", que intenta apresar la esencia del significado resolviéndolo en sus componentes principales, y la tendencia "operacional", que estudia las palabras en acción y se interesa menos por qué es el significado que por cómo opera.

De acuerdo con Kutschera (1979) las teorías del significado pueden agruparse en dos categorías: realistas y pragmáticas. Las teorías realistas (o figurativas) conciben el significado como una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos; en consecuencia, suponen un realismo conceptual. "Según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semántica y pragmática" (Kutschera, 1979; p. 34). Algunos defensores de esta opción son Frege, Carnap y Steinbring.

Frege establece la diferencia entre signo y significado y, dentro de este último, distingue entre sentido y referencia. Estas tres componentes del significado de un concepto matemático se relacionan mediante el triángulo semántico. Dado que el interés del trabajo se centra en un ámbito de la matemática escolar, consideramos útiles las ideas de Frege y Steinbring, interpretadas por Rico y Gómez (Gómez, 2007), y abordamos el significado de las fracciones atendiendo a las tres componentes siguientes: Estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología, que dan expresión en cada caso al sentido, el signo y la referencia del concepto en estudio.



*Figura 2.1.* Las tres componentes de un concepto en matemática escolar

Los análisis previos que se han realizado del uso y significado de las fracciones, muestran que esta noción es de una gran riqueza. Se han realizado distintas interpretaciones del significado de las fracciones en algunos trabajos muy conocidos, como los de Berh et al. (1983), Freudenthal (1983) y Kieren (1976). La multiplicidad de significados del concepto, entre los que se encuentran los de parte-todo, reparto, medida, razón u operador, implica que, a la hora de considerar y analizar las respuestas debemos de recoger la información necesaria, organizarla y seleccionar aquella que se considere relevante.

### **2.3 Fenomenología**

Como hemos reseñado en el esquema del apartado anterior, la fenomenología es una de las componentes de nuestra noción de significado. La reflexión que presentamos en este apartado se fundamenta en los trabajos de Luis Rico y sus colaboradores (Rico, 1992; Rico 1995, 1997, 1998; Rico, Castro, Castro, Coriat, Marín, Puig et al. 1997). Estos investigadores desarrollan una herramienta para la planificación de unidades didácticas

Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación

de matemáticas, los organizadores del currículo, con los que buscan abordar los problemas relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Los organizadores del currículo se describen como aquellas herramientas conceptuales y metodológicas que permiten al profesor recabar, organizar y seleccionar información sobre los múltiples significados de las matemáticas. Entre otros, los autores mencionados, destacan los siguientes organizadores:

- La Historia de la Matemática
- Los Sistemas de Representación
- Los modelos y procesos de modelización matemática
- La Fenomenología
- Las dificultades y errores de los alumnos
- Los Medios, Materiales y Recursos

Con base a la idea de análisis didáctico, Gómez (2007) presenta una estructura que, en algunos casos reformula la propuesta por Rico y, en otros, la extiende. Esta estructura, denominada análisis de contenido establece relaciones entre algunos organizadores y detalla en papel que juegan en el diseño de unidades didácticas:

*El análisis de contenido involucra el conocimiento y manejo de varias herramientas: los sistemas de representación, el análisis fenomenológico y la modelización. Con base en la utilización de estas herramientas es posible construir la estructura conceptual del contenido matemático (que describe ese contenido en términos de esas herramientas) e identificar el tipo de tareas (desde la perspectiva de la resolución de problemas) que es posible realizar con ese contenido matemático. (p. 37)*

Entre estos organizadores se encuentra un referente de nuestro interés, la fenomenología. En el campo de la didáctica, la fenomenología adquiere especial relevancia gracias a Freudenthal (1983), en su obra *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* realiza una minuciosa descripción sobre este particular análisis

de los contenidos matemáticos. Éste método de análisis de los contenidos matemáticos parte de la contraposición entre fenómeno y noumeno. El término noumeno hace referencia a los conceptos o estructuras matemáticas, mientras que el término fenómeno hace referencia al conjunto de fenómenos organizados por una estructura matemática determinada.

Puig (1997) siguiendo a Freudenthal señala que:

*El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. (p.63)*

Ricos y sus colaboradores presentan el organizador fenomenología con un sentido más amplio al que plantea Freudenthal. Segovia y Rico (2001) distinguen entre fenomenología, como una agrupación de fenómenos, y análisis fenomenológico, como la descripción de esos fenómenos y su relación con el concepto, y resaltan que los conceptos también organizan y describen los fenómenos.

Según Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2008) el análisis fenomenológico aporta una técnica para mostrar cuáles son los sentidos con que se utilizan conceptos y estructuras; pone el acento en el uso y aplicación de los conceptos, en los medios y en los modos en que, con ellos, se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a determinados problemas, en definitiva, cuándo contribuyen a la comprensión de ciertos fenómenos.

El análisis fenomenológico propone mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, y que los vinculan con los mundos natural, cultural, social y científico. Y esto con la finalidad de dotar de sentido el aprendizaje de tales conceptos y estructuras. Para ello se ayuda de la reflexión sobre situaciones y contextos, con la cual el profesor en formación inicia el análisis fenomenológico.

Los usos y significados del número racional son de una gran riqueza, encontramos una variedad de situaciones y contextos que contienen la idea de fracción. En la obra de Freudenthal (1983, pp. 133-177) encontramos un capítulo dedicado a las fracciones, en el que distingue tres categorías: la fracción como fracturador, la fracción como comparador y la fracción como operador o relación. La primera agrupa aquellos significados que requieren de algo que es dividido, partido, rajado, cortado, rebanado, roto o coloreado en partes iguales o si se imagina, experimenta o piensa como si lo fuera. En la segunda categoría se consideran las fracciones que sirven para comparar objetos que se separan uno de otro o que se experimenta, imagina o piensa que son separados. La comparación puede ser directa o indirectamente mediante un tercer objeto. Por último, en la medida que el énfasis mental esté en algo dinámico o estático, la fracción aparece en un operador o en una relación; ambos pueden respectivamente actuar sobre objetos y relacionar entre sí objetos.

## 2.4 Representaciones

La segunda dimensión del esquema (Figura 2.1) que hemos atendido en este trabajo son las representaciones, que son un organizador del currículo en el enfoque propuesto por Rico (1997). Una manera de plasmar y comunicar las ideas es mediante las representaciones, y las matemáticas no son ajenas a este hecho, pues nos ofrecen un amplio repertorio de representaciones que nos permiten expresar los conceptos con un mayor potencial de comunicación y operatividad.

Las reflexiones que se han realizado sobre las representaciones son numerosas y en algún caso clásicas (Hiebert y Carpenter, 1982; Janvier, 1987). En el grupo de investigación Pensamiento Numérico se ha abordado también el tema. Así, en este trabajo utilizaremos la definición de Castro y Castro (1997) en la que señalan que:

*Las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características más relevantes. ... Por representación entendemos cualquier modo de hacer presente un objeto,*

*concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación.*

Cada sistema de representación pone de manifiesto y destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa; también permite entender y trabajar algunas de sus propiedades. Los sistemas de representación contribuyen a la comprensión de los conceptos matemáticos y constituyen un importante objeto de estudio en educación matemática.

Como indica Rico (2009), son muchos los investigadores que han puesto de manifiesto la necesidad, de utilizar distintas representaciones de un mismo concepto para captar su complejidad. Los sistemas de representación son limitados, necesitan unos de otros, porque unos muestran distintos aspectos del concepto con mayor o menor claridad.

En Matemáticas, los conceptos requieren necesariamente algún modo de representación que permita mostrar adecuadamente y con cierta simplicidad el concepto y sus propiedades, así como las posibles operaciones y transformaciones a las que puede someterse posteriormente. En este sentido, algunos conceptos pueden adoptar diversas formas de representación, tal es el caso del concepto de fracción.

Existen varios campos o sistemas de representación para las fracciones. Destacaremos cinco modalidades de representación: simbólica, numeral, verbal, gráfica y la que suministran los materiales manipulativos. Vamos a comentar las principales características de cada uno de los sistemas de representación:

- Simbólico. Dentro de esta modalidad de representación consideramos:
  - El símbolo  $Q$  de los números racionales.
  - El símbolo  $a/b$ , que es utilizado en el campo del Álgebra.
  - Los símbolos presentes en otras culturas (Babilonios, Egipcios, Griegos...)
- Simbólico-numérico. Numéricamente podemos representar una misma fracción:
  - Notación usual  $\frac{1}{2}$ .

Decimal 0.5.

Porcentaje 50%.

Sistema sexagesimal (Horario) 12:15:30.

Equivalencia  $\frac{1}{2}=2/4$ .

Número mixto  $3/2=1+1/2$ .

- Sistema de representación verbal. Vinculado al sistema de representación numérico está el verbal, en el que las reglas del lenguaje organizan y condicionan la representación de los números racionales, un medio, un tercio, dos quintos... En este caso, nuestro lenguaje impone normas y reglas para representar números.
- Sistema de representación gráfico. Dentro de esta modalidad de sistema de representación destacan los modelos:
  - Discreto
  - Continuo: modelo de recta numérica, modelo lineal y modelo de áreas.

## 2.5 Conclusiones

A modo de conclusiones de este capítulo resaltamos los siguientes aspectos:

- Son numerosas las investigaciones realizadas en relación con las fracciones y la formación inicial de profesorado, además existen algunos intentos por proponer y ensayar cursos o programas de formación que mejoren el conocimiento sobre este tópico matemático.
- Desde los primeros estudios revisados hemos observado la gran atención que han recibido algunos temas como el de equivalencia u operaciones entre otros, desde una dimensión más procedimental que conceptual.
- La mayoría de los resultados de las investigaciones muestran que los profesores en formación no poseen el conocimiento suficiente sobre las fracciones, especialmente en las representaciones e interpretaciones del concepto.



- En relación con la metodología, la mayoría de las investigaciones consultadas y referenciadas utilizan el cuestionario y la entrevista como instrumento de recogida de información. De forma puntual se usa la investigación-acción así como programas de instrucción/formación para los participantes en el estudio.
- Aspectos como la fenomenología o las representaciones y su conexión con la fenomenología no se han investigado en relación con el conocimiento profesional de los profesores en formación. A nuestro juicio merecen ser estudiadas como dos componentes relevantes del significado de fracción.



## CAPÍTULO 3

# DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

### 3.1 Tipo de estudio y descripción general

Como hemos indicado en el planteamiento del problema, la formación inicial de los maestros contempla que los estudiantes para profesor sean capaces de identificar, entender e interpretar los múltiples significados de las fracciones. Presentar durante el proceso de formación de futuros profesores un solo significado no es garantía para el aprendizaje del concepto, de su complejidad, de sus interpretaciones y de las conexiones entre ellas. Por tanto, para nuestro tema de estudio se debe seguir un proceso instruccional sustentado en la estructura conceptual, en las diversas representaciones, interpretaciones y contextos de las fracciones de manera que facilite su conocimiento global. Para llevarlo a cabo es conveniente conocer el punto de partida de los estudiantes, sus nociones básicas, los conocimientos y destrezas sobre el tema y así actuar en consecuencia, orientando las intuiciones, corrigiendo errores o completando lagunas de estos conocimientos. Concretamente, como hemos expresado en el apartado 1.2 de esta memoria, la meta que nos hemos propuesto es explorar los significados y representaciones que los maestros en formación inicial presentan sobre las nociones de *fraccionar y repartir*.

El estudio con el que queremos alcanzar este objetivo se imbrica en la línea de investigación de Formación de Profesores, dentro del Grupo de Investigación *Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico* (<http://fqm193.ugr.es/>), del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía, con sede en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Desde un punto de vista metodológico, lo situamos en el campo de la metodología descriptiva, basado en el método de encuesta con la utilización de un cuestionario como instrumento para la recogida de datos. Se trata de un estudio de tipo exploratorio, realizado durante el curso académico 2009-2010. Con este trabajo nos proponemos reunir datos e identificar, desde un punto de vista empírico, qué dominio conceptual tienen los maestros en el comienzo de su formación inicial sobre algunos de los significados de las fracciones que, de algún modo, permitan explicitar una posible organización de ideas y detectar sus nociones implícitas en relación con este tema.

Una característica destacada es el empleo de un enfoque inductivo en el análisis de las respuestas, con el que tratamos de describir, analizar y organizar los diferentes conceptos e ilustraciones sobre la idea de fraccionar y repartir que los 358 estudiantes de magisterio de la Universidad de Granada, participantes en el estudio, aportaron en respuesta a las preguntas planteadas. El diseño sigue, en líneas generales, el esquema propuesto por McMillan y Schumacher (2005, p.496).

El análisis realizado ha contemplado la categorización de respuestas y ha hecho emerger relaciones entre los distintos modelos verbal y gráfico presentes en las producciones de los participantes.

### **3.2 Los sujetos**

Uno de los requisitos previos en el diseño de este estudio es la especificación de la población a quien se dirige la investigación. En este caso la población objeto de estudio está constituida por el conjunto de alumnos matriculados en la asignatura *Matemáticas y su Didáctica* del primer año de las diplomaturas de Educación Infantil y Educación Primaria, curso 2009-2010, que se imparten en la Facultad de Ciencias de la Educación y en la Escuela Ave María de la Universidad de Granada.

Aunque la población de referencia es la indicada, nos hemos centrado en una subpoblación de la anterior, ya que nos hemos limitado a trabajar con alumnos matriculados en las asignaturas impartidas por el departamento Didáctica de la

Matemática y cuyos profesores hubieran prestado su consentimiento para aplicar la encuesta.

La muestra seleccionada ha sido intencional, con un tamaño final de 358 estudiantes de primer curso de magisterio en las especialidades mencionadas. De los sujetos participantes, 195 están matriculados en Educación Infantil de los cuales 108 pertenecen a la Facultad de Ciencias de la Educación y 87 a la Escuela Ave María. El cuestionario se aplicó en el contexto de la asignatura mencionada, correspondiente al área de Didáctica de la Matemática. Los 163 sujetos restantes corresponden a alumnos matriculados en Educación Primaria, 117 pertenecientes a la Facultad de Ciencias de la Educación y 46 a la escuela.

Tabla 3.1

*Sujetos participantes*

	Ed. Infantil	Ed. Primaria	Total
Facultad de Ciencias de la Educación	108	117	225
Escuela Ave María	87	46	133
Total	195	163	358

### 3.3 Instrumento

El instrumento utilizado en el estudio para recoger información es un cuestionario de respuesta abierta que hemos elaborado expresamente para este estudio. Las cuestiones se han formulado con el objetivo de poner de manifiesto los significados, representaciones, situaciones y contextos que los maestros en formación inicial tienen en relación con el tema objeto de estudio. Para construirlo nos hemos enfrentado a las tareas de selección del contenido y los significados de las fracciones que abordaríamos

con él. En la estructura y redacción de las preguntas se han tenido en cuenta una serie de criterios con el fin de diferenciar las preguntas relativas a las cuestiones de fraccionar y repartir, descripción de situaciones e invención de problemas. Finalmente, las preguntas responden a la siguiente estructura:

- La pregunta 1 la forman dos cuestiones relativas a fraccionar, donde se pide explicar verbalmente que se entiende por fraccionar y realizar un dibujo que muestre qué es fraccionar.
- La pregunta 2 la forman dos cuestiones relativas a repartir, siguiendo el mismo esquema de la pregunta 1, se pide explicar verbalmente que se entiende por repartir y realizar un dibujo que muestre qué es repartir.
- La pregunta 3 se refiere a la descripción de situaciones a partir de 3 ilustraciones relativas a fraccionar y repartir.
- Las preguntas 4 y 5 requieren la invención de problemas sobre fraccionar y repartir, respectivamente.

El cuestionario creado, que aparece en el Anexo X, responde al siguiente esquema:

- Datos de identificación de la institución que realiza el estudio, presentación del objetivo del mismo, solicitud de ayuda y agradecimientos al encuestado.
- Datos estadísticos de identificación: sexo, edad, titulación y facultad del encuestado.
- Cinco cuestiones consecutivas que son ítems de respuesta abierta.

### **3.4 Procedimiento de aplicación**

Con respecto a la forma de aplicación y a las condiciones para su administración, el cuestionario se aplicó en el horario y en el aula asignados a la asignatura correspondiente al área Didáctica de la Matemática. El tiempo para su realización fue libre, no hubo tope máximo, pero en ningún caso ha resultado inferior a 20 minutos ni superior a una hora. Dentro del aula, la aplicación ha sido individualizada a excepción

de un caso en el que el sujeto entrevistado era ciego, por lo que necesitó la ayuda de un compañero para su realización. Con respecto a la presentación cada participante recibe un cuadernillo compuesto por 4 hojas. La primera hoja recoge la presentación e identificación mientras que las posteriores hojas presentan una pregunta por cada cara.

El cuestionario se aplicó durante el segundo cuatrimestre del curso 2009-2010, y se recogieron 358 cuestionarios. El número de respuestas obtenidas consideramos que resulta suficiente para su posterior análisis.



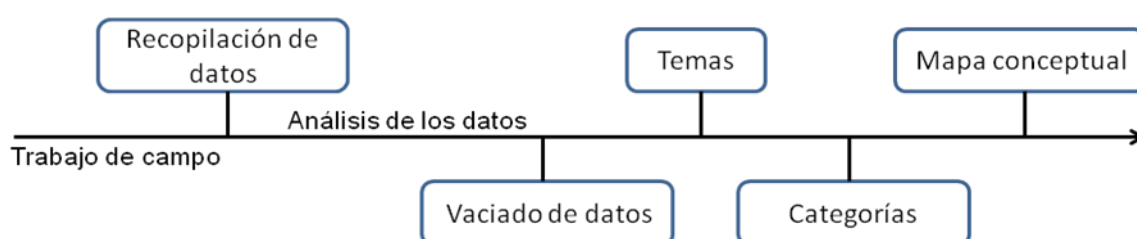


## CAPÍTULO 4

# ANÁLISIS DE LOS DATOS

### 4.1 Tipo de análisis realizado

Los datos recogidos con el cuestionario, los hemos sometido a un análisis de carácter cualitativo. Este análisis de datos se ha llevado a cabo mediante un proceso inductivo en el que hemos identificado una serie de temas en función de los cuales hemos realizado una organización de los datos en categorías y una identificación de modelos (relaciones) entre categorías (McMillan y Schumacher, 2005). Este esquema general se encuentra reflejado en la Figura 4.1. Las categorías y los modelos surgen en nuestro análisis a partir de los datos mediante un proceso sistemático de selección, categorización, comparación, síntesis e interpretación que describiremos con detalle en el apartado siguiente.



*Figura 4.1.* Organigrama de la estructura global del proceso seguido en el análisis de los datos

## 4.2 El proceso de análisis inductivo

Tras el trabajo de campo con la aplicación del cuestionario, hemos realizado un vaciado de todos los enunciados e ilustraciones producidos por los estudiantes de magisterio participantes en el estudio.

Las preguntas de la encuesta cuyas respuestas se someten a análisis en este estudio son:

1. ¿Qué es fraccionar?
  - 1.1 Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar
  - 1.2 Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar
2. ¿Qué es repartir?
  - 2.1 Explica verbalmente qué entiendes por repartir
  - 2.2 Haz un dibujo que muestre qué es repartir

En una primera etapa cada una de las respuestas a estas preguntas fueron copiadas literalmente en una tabla con dos columnas. En la primera columna se introduce el código de identificación del cuestionario y en la segunda el enunciado o ilustración. Si dos o más respuestas coinciden literalmente, exceptuando sinónimos u orden en la expresión, se contabilizaran en una misma casilla como respuestas iguales. En el caso de los dibujos procedimos de igual manera salvo en el tratamiento de la respuesta. Se eliminaron los textos que acompañaban a los dibujos y se realizó una representación icónica y simplificada de cada una de las ilustraciones, de manera que debían coincidir en estructura, forma y figura para poder contabilizarlas como iguales.

Una vez finalizado el vaciado, para poder interpretar los datos es necesario organizarlos. Las fuentes utilizadas para clasificarlos y sistematizarlos fueron:

- Conocimientos previos sobre fracciones.
- Las propias respuestas dadas por los estudiantes.

Nuestro objetivo en las sucesivas etapas del análisis es el desarrollo de un sistema mediante un grupo de ideas, conceptos y términos clave que permitan organizar las respuestas obtenidas en cada pregunta.

En una segunda etapa, escogemos un grupo de datos y los revisamos para obtener una visión del conjunto. A medida que vamos leyendo, es claro determinar que muchos de los enunciados son variantes de una misma idea. Detectamos así unos conceptos prioritarios o temas que rigen casi la totalidad de las respuestas obtenidas. De esta manera organizamos los datos según unos temas que contengan una “porción de significado”. Estos temas o unidades de significado representan un conjunto de datos mediante una idea común a todos ellos. En el caso de las preguntas 1.1 y 2.1 los distintos temas están formados por el verbo principal que da significado al enunciado propuesto. En el caso de las preguntas 1.2 y 2.2 los temas lo forman el tipo de magnitud utilizada en la ilustración: continua, discreta o mixta (compuesta por una representación discreta y otra continua)

Posteriormente, en la tercera fase del análisis, perfeccionamos nuestro sistema de organización desarrollando los temas como categorías. Convertir estos temas en categorías con subcategorías obliga a pensar de forma más abstracta. Entre los dos tipos de categorías utilizadas por los investigadores en el análisis cualitativo: categorías etic (representan las perspectivas del exterior de la situación, los conceptos del investigador y las explicaciones científicas) y categorías emic (representan perspectivas del interior, como términos, acciones y explicaciones que son distintas del lugar o de la gente), utilizamos estas últimas. Nuestro objetivo consiste en representar la situación desde la perspectiva de los futuros maestros, es por ello que estas categorías son las idóneas para nuestro trabajo. Haciendo una revisión de las respuestas agrupadas en cada tema, se observan distintos niveles según el grado de precisión del enunciado. Atendiendo al significado del enunciado completo se estableció que, según el grado de especificación de la respuesta y la complejidad de la acción descrita, se forman unos matices comunes que dan lugar a las categorías y subcategorías. Éstas tienen que representar de la forma más precisa posible el significado de todas las respuestas a las que contiene. Las subcategorías, en el caso de las preguntas 1.1 y 2.1, se formaron en base en los distintos

tipos de complementos directos del verbo, es decir, los sustantivos sobre los cuales recae directamente la acción del verbo principal. En el caso de las subcategorías de las preguntas 1.2 y 2.2 en las que se requiere dibujar los conceptos, nos basamos en la secuencia de imágenes utilizada, y en las que se observan su carácter estático o dinámico con varios niveles según haya una, dos o tres figuras representadas, acompañadas o no de dibujos de personas.

Finalmente, nuestro objetivo en la última etapa es la elaboración de una estructura conceptual que permita ubicar cualquier respuesta en una de las categorías establecidas. Esta clasificación, en base al contenido y la semántica de las respuestas, debe poner de manifiesto los diferentes conceptos que aparecen en las repuestas; así como las relaciones, en caso de que existan, entre ellos.

El establecimiento de las categorías y subcategorías se llevó inicialmente a cabo con dos tercios de las respuestas obtenidas. Una vez enunciadas las categorías, el tercio de respuestas restante permitió perfilar y validar por saturación la adecuación del sistema establecido.

A través de este análisis se establece una clasificación, que proporciona una organización de los datos de la encuesta que detallamos en el siguiente apartado.

### **4.3 Análisis de las respuestas a la pregunta 1.1**

Una primera aproximación a las respuestas de la pregunta 1.1 en base a los verbos de acción de los enunciados, nos proporciona varios temas. Las categorías y subcategorías desarrolladas a partir de los temas principales: “Dividir”, “Partir” y “Repartir”, son:

#### **1. DIVIDIR**

Dividir

Dividir en partes

Dividir en partes y coger

Dividir en partes iguales

Dividir en partes iguales y coger

## 2. PARTIR

Partir

Partir en partes iguales

## 3. REPARTIR

Repartir

Repartir equitativamente

## 4. COMBINACIONES

Dividir + partir

Dividir + repartir

Partir + repartir

## 5. OTROS

Entre las tres categorías principales encontradas en el conjunto de datos, dividir tiene una mayor frecuencia en las respuestas y, a su vez, tiene un mayor número de subcategorías. El término dividir aparece en el 77,1% de las respuestas, y se muestra con 7 variantes. Los temas partir y repartir tienen un menor peso en las respuestas de los alumnos.

Tabla 4.1

*Pregunta 1.1. Subcategorías*

	Recuento	Porcentajes
Dividir	27	7,6%
Dividir en partes	78	22,0%
Dividir en partes iguales	113	31,8%
Dividir en partes y coger	15	4,2%

Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación

	Recuento	Porcentajes
Dividir en partes iguales y coger	16	4,5%
Partir	17	4,8%
Partir en partes iguales	4	1,1%
Repartir	15	4,2%
Repartir equitativamente	11	3,1%
Dividir y partir	13	3,7%
Dividir y repartir	25	7,0%
Partir y repartir	2	0,6%
Otros	19	5,4%
Total	355	100%

Según los datos obtenidos, la idea de fracción está asociada principalmente a la idea de dividir, siguiendo una secuencia progresiva de subcategorías según la precisión de las respuestas. Las categorías partir y repartir presentan también otra secuencia progresiva pero más corta que en el caso anterior. Estas categorías y subcategorías dan lugar a un sistema de cinco niveles como se muestra en el mapa conceptual de la Figura 4.2.

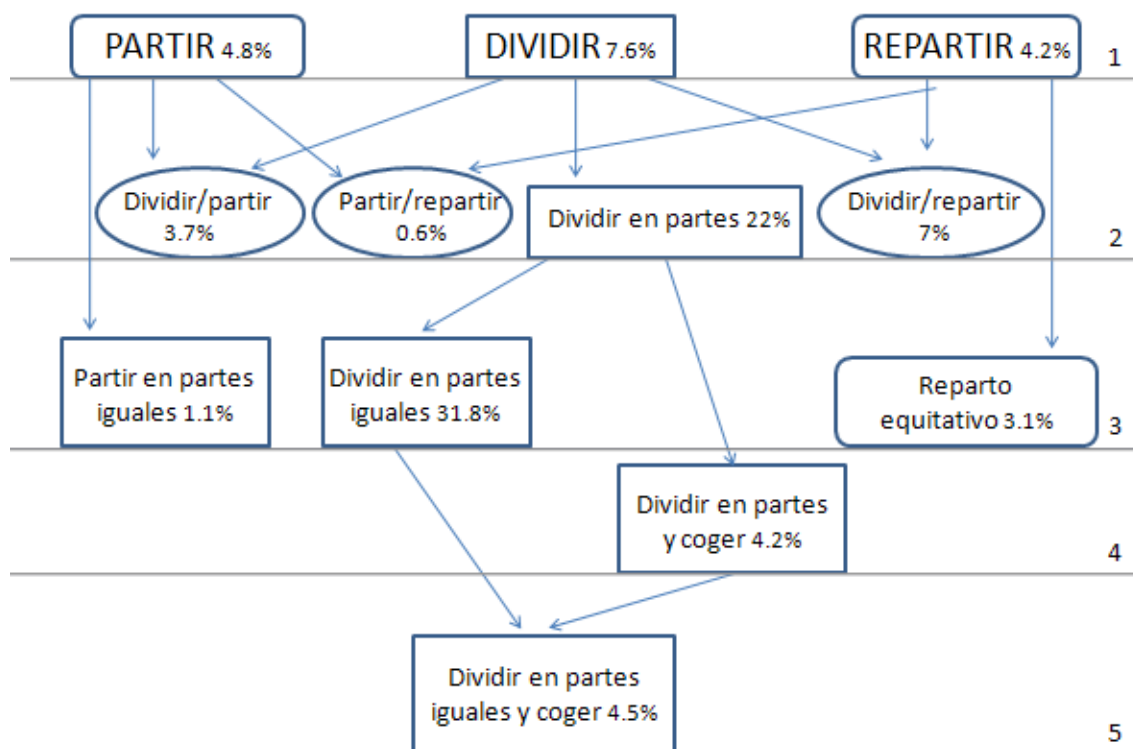


Figura 4.2. Mapa conceptual de fraccionar

El primer nivel está caracterizado por el término genérico y está formado por los tres verbos “Dividir”, “Repartir” y “Partir”. Este tipo de respuesta es una significación imprecisa donde fraccionar se presenta como una acción, mediante un verbo único equivalente.

El segundo nivel, lo establecen las posibles combinaciones de estos tres verbos tomadas de dos en dos: “Dividir y partir”, “Dividir y repartir”, “Partir y repartir” y “Dividir en partes”. En este caso también hay una significación imprecisa mediante una acción, pero con la presencia de dos verbos que permiten cualificar la acción ya que produce “partes” y hace el papel de complemento indirecto. Cabe destacar que no se ha encontrado ninguna respuesta con los tres verbos simultáneamente.

Un tercer nivel liderado por la idea de igualdad lo forman “Dividir en partes iguales” y “Reparto equitativo”. En ese caso fraccionar es el resultado de una acción equitativa donde se describe cómo son las partes.

El cuarto nivel determinado por la idea de coger, lo integra “Dividir en partes y coger”. En este nivel se acaban las respuestas a la pregunta directa, pues se añade conocimiento al considerar la acción de fraccionar más el resultado. La fracción es el objeto resultado de dos acciones sucesivas, no se detalla cómo son las partes, pero sí qué se hace con ellas.

Por último, la idea más elaborada y resultante de las anteriores: “Dividir en partes iguales y coger”, forma la significación más precisa. En este caso la fracción es considerada como objeto del resultado de dos acciones equitativas y sucesivas donde se detalla cómo son las partes y qué se hace con ellas.

En el siguiente apartado veremos cómo se visualizan estas ideas y si lo hacen de manera única, es decir ¿qué tipo de ilustraciones de las respuestas a la pregunta 1.2 se corresponden con las respuestas a la pregunta 1.1?

#### **4.4 Análisis de las respuestas a la pregunta 1.2**

En el caso de la pregunta 1.2 “Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar”, los temas lo forman el tipo de magnitud utilizada en la ilustración: continua, discreta o mixta (compuesta por una representación discreta y otra continua). Basándonos en estos temas, para perfeccionar el sistema de clasificación desarrollamos una serie de categorías y subcategorías. El criterio seguido para esta clasificación, es el tipo de figura y el número de figuras presentes en la ilustración, pudiendo presentarse divididas y/o divididas y sombreadas, y acompañadas o no de dibujos de personas.

A través de los criterios descritos para esta pregunta, en la que se propone realizar un dibujo que muestre qué es fraccionar, obtenemos las siguientes categorías y subcategorías:

##### **1. CONTINUO**

Lineal

Área:

Rectángulo

Círculo



## Rectángulo y círculo

2. DISCRETO

3. CONTINUO Y DISCRETO

Tabla 5.2

*Pregunta 1.2. Categorías*

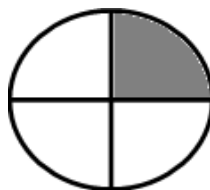
Categorías	Porcentajes
Continuo – lineal	0.5%
Continuo – área	98%
Discreto	1%
Continuo y discreto	0.5%
Total	100%

En la categoría área se concentra el 98% de las respuestas. Debido a esto, cada una de sus subcategorías: rectángulo, círculo y rectángulo y círculo, ha sido dividida en ocho apartados:

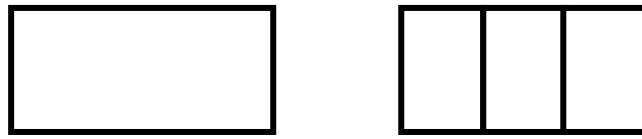
1. Una figura dividida (18.2%)



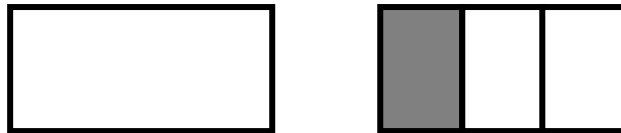
2. Una figura dividida y una parte coloreada (49.4%)



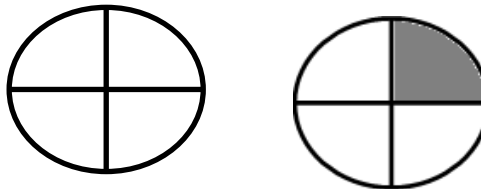
3. Una figura + una figura dividida (11.6%)



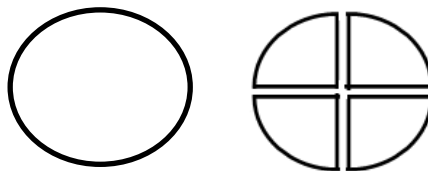
4. Una figura + una figura dividida y una parte coloreada (1.7%)



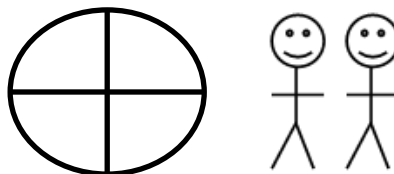
5. Una figura dividida + una figura dividida y una parte coloreada (4%)



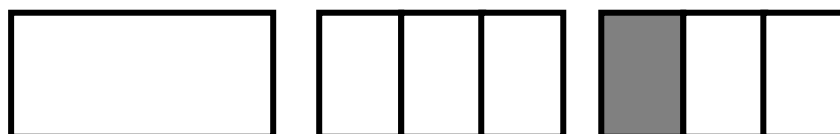
6. Una figura + una figura dividida con partes separadas (6.3%)



7. Una figura dividida + personas (1%)



8. Una figura + una figura dividida + una figura dividida y una parte coloreada (0.9%)



Según esta clasificación de las ilustraciones realizadas, podemos establecer tres niveles atendiendo al número de figuras presentes en las respuestas. Un primer nivel lo forman representaciones con una única figura, ya sea un círculo o un rectángulo, que se presentan divididos en partes iguales o divididos y una parte coloreada (apartados 1 y 2). Un segundo nivel lo constituyen secuencias de representaciones formadas por dos círculos, dos rectángulos o una de estas figuras más un dibujo de personas (apartados 3, 4, 5, 6 y 7). Por último, el tercer nivel lo compone una secuencia formada por tres figuras, rectángulos o círculos, distintos entre sí (apartado 8). Estos tres niveles se encuentran íntimamente relacionados con los establecidos en la pregunta 1.1, ya que responden a las secuencias progresivas que se formaban entre dividir, dividir en partes y dividir en partes y tomar. En la Figura 3 vemos cada una de las representaciones ordenadas por niveles, y las relaciones entre las ideas básicas de la pregunta anterior con estas ilustraciones.

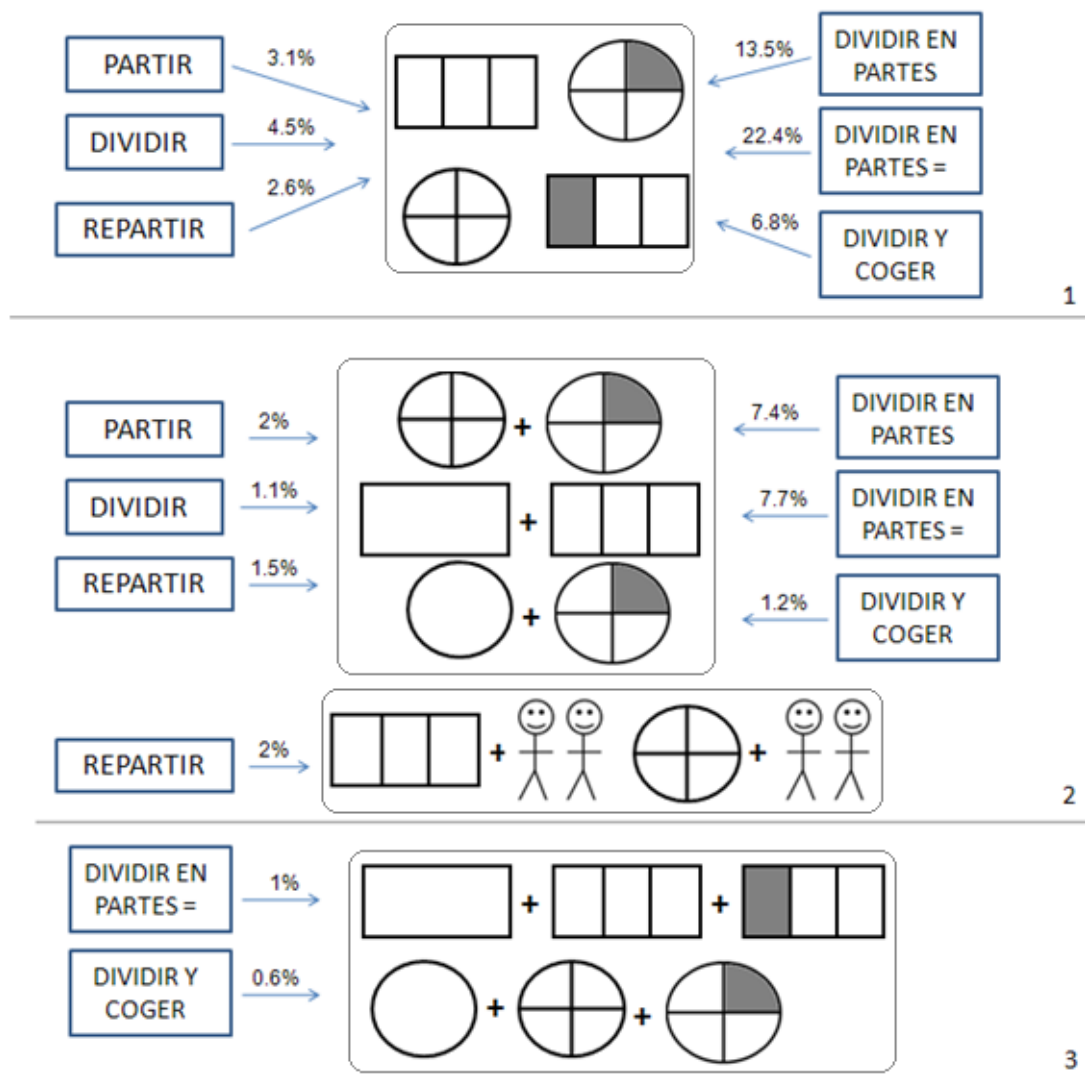


Figura 4.3. Relaciones entre fraccionar y sus representaciones

Como adelantábamos anteriormente, cada una de estas ideas, a excepción de repartir, no se visualizan de manera única si no que están presentes en dos o tres niveles, 1 y 2 ó 1, 2 y 3. Es natural que respuestas menos elaboradas, como dividir, dividir en partes, partir o repartir correspondan a los niveles 1 y 2; mientras que las respuestas más completas, dividir en partes iguales y coger, necesiten de una ilustración con un mayor número de figuras que las anteriores, por ello está presente en los tres niveles.

#### **4.5 Análisis conjunto de las respuestas a las preguntas 1.1 y 1.2**

Una vez estudiadas las respuestas por separado a las preguntas 1.1 y 1.2, pretendemos en este apartado analizar la independencia o asociación entre las respuestas a estas dos preguntas. Para ello hemos construido una primera tabla de contingencia en la que las subcategorías que hemos detectado en una y otra pregunta actúan como filas y columnas. Posteriormente realizamos una segunda tabla donde agrupamos ciertas subcategorías que se han presentado con poca frecuencia para poder realizar un test de independencia Chi-cuadrado. Estas tablas de contingencia tienen dos objetivos fundamentales:

1. Organizar la información.
2. Analizar si existe alguna relación de independencia o asociación entre los niveles de las variables cualitativas objeto de estudio. El hecho de que dos variables sean independientes significa que los valores de una de ellas no están influidos por el nivel que adopte la otra.

A continuación se muestra la tabla de contingencia correspondiente a las subcategorías obtenidas para las respuestas de las preguntas 1.1 y 1.2.

Tabla 4.3

Tabla de contingencia subcategorías 1.1 (columnas) y 1.2 (filas)

	1. dividir/partir/repartir	2. dividir en partes/div. y part./div. y repart./part. y repart	3. div. en partes =/part. en partes =/repart. en partes =	4. dividir en partes y coger	5. dividir en partes iguales y coger	6. otros	Total
1. figura dividida	14 (4%)	24 (6.8%)	24 (6.8%)	2 (0.6%)	0 (0%)	0 (0%)	64 (18.2%)
2. figura dividida y sombreada	23 (6.5%)	48 (13.6%)	64 (18.2%)	12 (3.4%)	12 (3.4%)	15 (4.3%)	174 (49.4%)
3. figura + fig dividida	2 (0.6%)	18 (5.1%)	21 (6%)	0 (0%)	0 (0%)	0 (0%)	41 (11.6%)
4. figura + figura dividida y sombreada	2 (0.6%)	1 (1.3%)	2 (0.6%)	1 (0.3%)	0 (0%)	0 (0%)	6 (1.7%)
5. figura dividida + figura dividida y sombreada	2 (0.6%)	4 (1.1%)	5 (1.4%)	0 (0%)	3 (0.9%)	0 (0%)	14 (4%)
6. figura + partes separadas	5 (1.4%)	11 (3.1%)	4 (1.1%)	0 (0%)	0 (0%)	2 (0.6%)	22 (6.3%)
7. fig. + fig. dividida + fig. dividida y sombrada	0 (0%)	0 (0%)	1 (1.3%)	0 (0%)	2 (0.6%)	0 (0%)	3 (0.9%)
8. otros	10 (2.8%)	11 (3.0%)	5 (1.4%)	0 (0%)	0 (0%)	2 (0.6%)	28 (8%)
Total	58 (16.6%)	117 (33.2%)	126 (35.8%)	15 (4.3%)	17 (4.8%)	19 (5.4%)	352 (100%)

En la tabla 4.3 se observa que algunas categorías se presentan conjuntamente con una frecuencia relativamente alta. Así ocurre con la subcategoría 3 de la pregunta 1.1 (dividir en partes iguales) y la subcategoría 2 de la pregunta 1.2 (figura dividida y sombreada) que se presentan conjuntamente con una frecuencia del 18,2% del total de respuestas. Pero también hay un número elevado de celdas con una frecuencia nula. Esto es un inconveniente para poder contrastar la hipótesis nula de independencia entre las dos variables (respuestas de la pregunta 1.1 y respuestas de la pregunta 1.2), por ello hemos unido algunas subcategorías que presentan poca frecuencia en una sola subcategoría. Con esta operación se cumple uno de los requisitos para aplicar el test Chi-cuadrado de Pearson, el que los valores esperados de al menos el 80% de las celdas en una tabla de contingencia sean mayores de 5. La tabla 4 muestra la tabla de contingencia resultante después del reagrupamiento.

Tabla 4.4

*Tabla de contingencia subcategorías agrupadas 1.1 y 1.2*

	dividir/partir/repartir	dividir en partes/div. y part./div. y repart./part. y repart	div. en partes =/part. en partes =/repart. en partes =	otros	Total
figura dividida	21	55	49	2	127
figura dividida y sombreada	25	62	78	15	180
figura dividida + figura dividida y sombreada	2	4	11	0	17
otros	10	11	5	2	28
Total	58	132	143	19	352

A esta tabla de contingencia le hemos aplicado el test de la Chi-cuadrado para detectar si hay independencia entre las dos variables nominales que representan las subcategorías detectadas en las respuestas a las preguntas 1.1 y 1.2, o bien si existe asociación entre ellas.

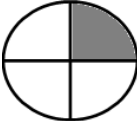
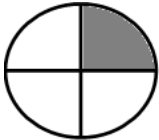


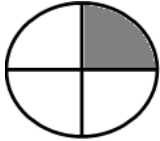
El valor de la chi-cuadrado ( $\chi^2=23.591$ ) tiene un nivel de significación de 0,005 ( $<0,05$ ), por lo cual se rechaza la hipótesis nula de independencia y aceptamos que las respuestas a la pregunta 1.1 están relacionadas con las respuestas a la pregunta 1.2.

#### *Asociaciones más frecuentes*


Detectada la asociación significativa entre las variables 1.1 y 1.2, vamos a destacar cuales son las parejas de subcategorías más frecuentes que, en cierta medida son las causantes de esa asociación. Si observamos la tabla 3, vemos que hay casillas con un porcentaje de respuestas muy superior a otras. La tabla 6 resume la presencia conjunta de las subcategorías y su porcentaje de aparición en los sujetos de la muestra.

Tabla 4.5

*Asociaciones más frecuentes entre las subcategorías de las respuestas a las preguntas 1.1 y 1.2*

% del total	Subcategorías de las respuestas a la pregunta 1.1	Subcategorías de las respuestas a la pregunta 1.2
18.2%	3.Dividir en partes iguales/ partir en partes iguales/ repartir en partes iguales	2.Figura dividida y sombreada 
13.6%	2.Dividir en partes/ dividir y partir/ dividir y repartir/ partir y repartir	2.Figura dividida y sombreada 
6.8%	3.Dividir en partes iguales/ partir en partes iguales/ repartir en partes iguales	1.Figura dividida 
6.8%	2.Dividir en partes/ dividir y partir/ dividir y repartir/ partir y repartir	1.Figura dividida 
6.5%	1.Dividir/ partir/ repartir	2.Figura dividida y sombreada 



% del total	Subcategorías de las respuestas a la pregunta 1.1	Subcategorías de las respuestas a la pregunta 1.2
6%	3.Dividir en partes iguales/ partir en partes iguales/ repartir en partes iguales	3.Figura + figura dividida 

En algunos de estos casos es interesante estudiar cada una de estas subcategorías como variables dicotómicas (ausencia y presencia de dicha subcategoría en la respuesta) y realizar sus correspondientes tablas 2x2 de contingencia.

Tabla 4.6

*Tabla de contingencia para las subcategorías dividir en partes iguales y figura dividida y sombreada.*

			Dividir en partes iguales/partir en partes iguales/repartir en partes iguales		Total
			ausencia	presencia	
Figura dividida y sombreada	ausencia	Recuento	119	63	182
		% del total	33,2%	17,6%	50,8%
	presencia	Recuento	115	61	176
		% del total	32,1%	17,0%	49,2%
Total		Recuento	234	124	358
		% del total	65,4%	34,6%	100,0%

Si nos fijamos en la columna correspondiente a la presencia de la subcategoría dividir en partes iguales, destaca que la mitad de sujetos que responden a la pregunta 1.1 con este tipo de respuesta, responden a la pregunta 1.2 con una figura dividida y sombreada.

Tabla 4.7

*Tabla de contingencia para la subcategorías dividir en partes iguales y figura + figura dividida*

			Dividir en partes iguales/partir en partes iguales/repartir en partes iguales		Total
			Ausencia	Presencia	
Figura + figura dividida	Ausencia	Recuento	214	103	317
		% del total	59,8%	28,8%	88,5%
	Presencia	Recuento	20	21	41
		% del total	5,6%	5,9%	11,5%
Total		Recuento	234	124	358
		% del total	65,4%	34,6%	100,0%

En la tabla 4.7, al centrarnos en la fila de presencia de la subcategoría figura + figura dividida se observa que más de la mitad de sujetos (51.2%) que responden a la pregunta 1.2 con este tipo de ilustración, responden con la subcategoría dividir en partes iguales/partir en partes iguales/repartir en partes iguales en la pregunta 1.1.

#### **4.6 Análisis de las respuestas a la pregunta 2.1**

De manera similar a la pregunta 1.1 encontramos para las respuestas a esta pregunta una clasificación por temas, según la semántica de los verbos principales de los enunciados. Se compone de tres grupos, el primero lo forman los sinónimos de repartir, el segundo los términos relacionados con fraccionar y el tercero los términos afines a relacionar.

Las categorías desarrolladas a partir de los temas las forman los verbos que se encuentran asociados a cada uno según su significado: dar, asignar y distribuir corresponden al primer tema; dividir, fraccionar y partir, al segundo.

##### **1. SINÓNIMOS DE REPARTIR**

Dar

Dar equitativamente

Dar equitativamente o no

Asignar

Asignar equitativamente

Asignar equitativamente o no

Distribuir

Distribuir equitativamente

Distribuir equitativamente o no

## 2. TÉRMINOS RELACIONADOS CON FRACCIONAR

Dividir

Dividir en partes iguales

Dividir en partes iguales o no

Fraccionar

Fraccionar en partes iguales

Fraccionar en partes iguales o no

Partir

Partir en partes iguales

Partir en partes iguales o no

## 3. SINÓNIMOS + TÉRMINOS RELACIONADO CON FRACCIONAR

Dividir/fraccionar + dar/distribuir

Dividir/fraccionar + dar/distribuir en partes iguales

Dividir/fraccionar + dar/distribuir en partes iguales o no

## 4. RELACIONAR

## 5. OTROS

Según los resultados el tema formado por los sinónimos de repartir tiene una presencia mayoritaria en las respuestas, seguida por los términos relacionados con fraccionar y combinaciones de ambas.

Tabla 4.8

*Pregunta 2.1. Subcategorías*

	Recuento	Porcentaje
Sinónimo de repartir	95	26,9%
Sinónimo + equitativamente	63	17,8%
Sinónimo equitativamente o no	28	7,9%
Dividir/fraccionar/partir	47	13,3%
Dividir/fraccionar/partir en partes =	24	6,8%
Dividir/fraccionar/partir en partes = o no	14	4,0%
Dividir/fraccionar + dar/distribuir	20	5,7%
Dividir/fraccionar + dar/distribuir en partes =	17	4,8%
Dividir/fraccionar + dar/distribuir en partes = o no	8	2,3%

	Recuento	Porcentaje
Relacionar	18	5.2%
Otros	19	5,3%
Total	353	100%

Al igual que en la primera pregunta, cada categoría presenta una secuencia progresiva según la precisión de las respuestas. Aunque pueden parecer similares, en este caso no están presentes las categorías “... en partes”, ni “... en partes y coger”; y aparece uno nuevo “... partes iguales o no”, lo que quiere decir que en el concepto de repartir está presente la noción de reparto equitativo y reparto no equitativo, mientras que en el concepto de fraccionar no tiene cabida la desigualdad de partes. Este sistema dicotómico con ocho categorías lo hemos representado a través del mapa conceptual de la Figura 4.4.

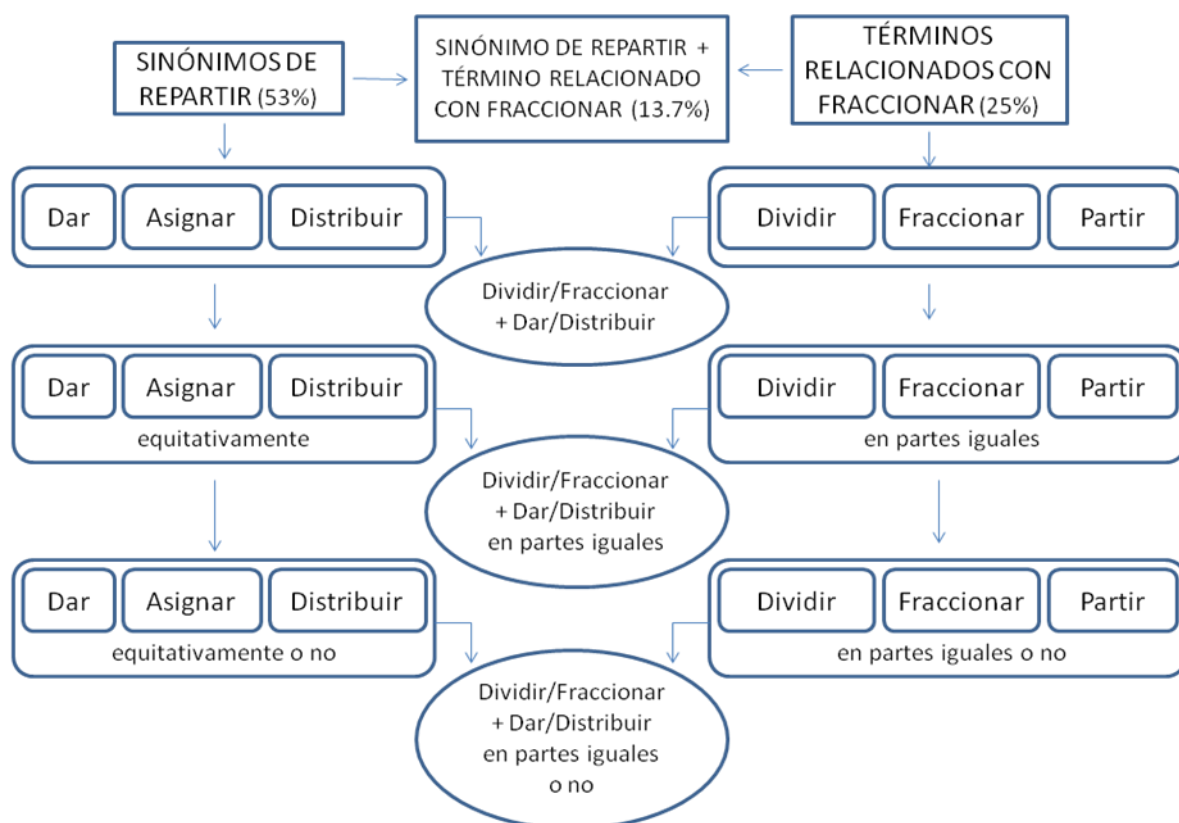


Figura 4.4. Mapa conceptual de repartir

Como vemos en el mapa conceptual, los dos grupos de respuestas mayoritarias están relacionados a través de un tercero que los une. Existe una secuencia progresiva de tres niveles según la precisión de la respuesta:

- El primero se encuentra determinado por un verbo, sinónimo de repartir o fraccionar, o por dos verbos uno de cada uno de los grupos anteriores. La idea de repartir se constituye como una acción.
- El segundo nivel está determinado por la idea de equidad, la idea de repartir se vuelve más precisa añadiendo a la acción la igualdad entre las partes. La idea de repartir se amplía a una acción equitativa.
- Por último, el tercer nivel está caracterizado por la idea de igualdad o desigualdad entre las partes a repartir o fraccionar. La idea de repartir adquiere su significado más completo mediante una acción la cual puede ser equitativa o no.

#### 4.7 Análisis de las respuestas a la pregunta 2.2

Como en la primera pregunta, vamos a ver cómo se visualizan las principales ideas que rigen el concepto de repartir a partir de las ilustraciones propuestas por los participantes en el estudio.

El sistema de categorías obtenido para esta pregunta coincide con el de la pregunta 1.2:

1. CONTINUO
  - Lineal
  - Área:
    - Rectángulo
    - Círculo
    - Rectángulo y círculo
2. DISCRETO
3. CONTINUO Y DISCRETO

Tabla 4.9

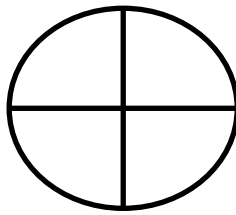
*Pregunta 2.2. Categorías*

Categorías	Porcentajes
Continuo - lineal	0%
Continuo - área	21.7%
Discreto	74.2%
Continuo y discreto	1.3%
Otros	3.7%
Total	100%

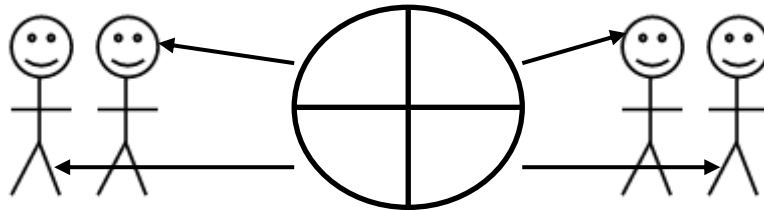
En este caso, el tema discreto es el mayoritaria con un 73.5% de las respuestas, seguida de área con un 21.5% de respuestas, es por ello que ha sido necesario establecer categorías en ambos casos.

Para el caso continuo, las subcategorías de la categoría área presentan cuatro apartados:

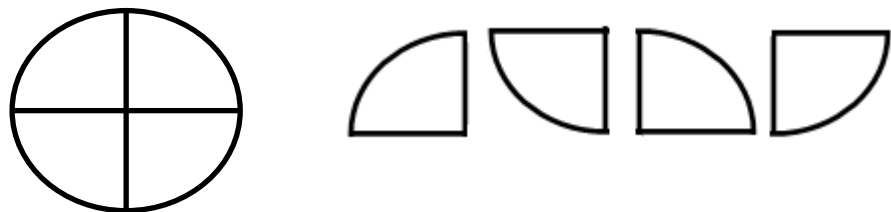
1. Una figura dividida (4.3%)



2. Una figura dividida + personas (6.3%)

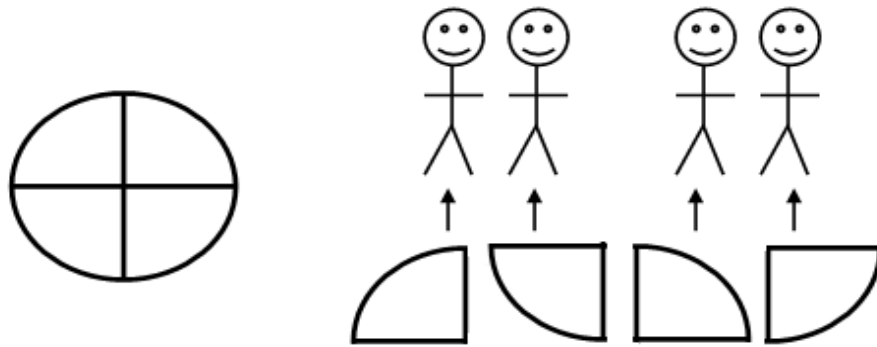


3. Una figura dividida + partes separadas (4.6%)



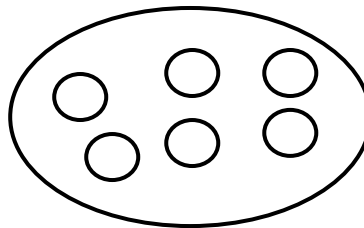


4. Una figura dividida + partes separadas + personas (4.9%)

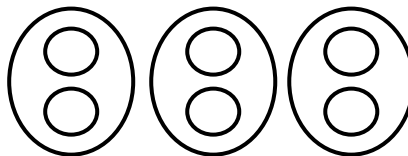


Para el caso del tema discreto las categorías son:

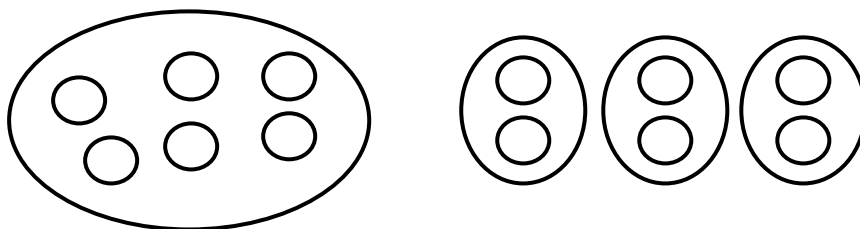
1. Conjunto total (1.4%)



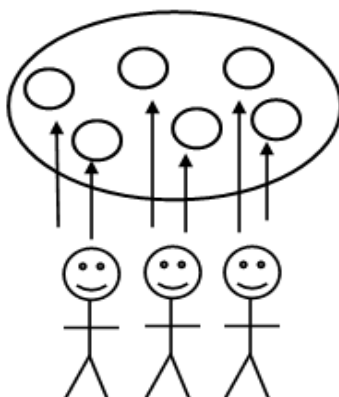
2. Conjunto dividido (2.6%)



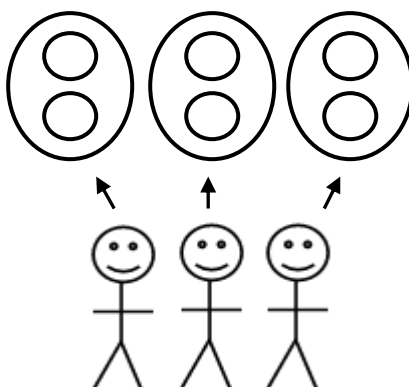
3. Conjunto total + conjunto dividido (18.7%)



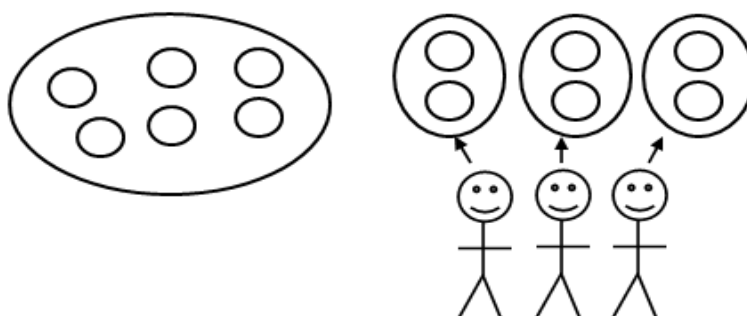
4. Conjunto total + personas (13.8%)



5. Conjunto dividido + personas (11.5%)



6. Conjunto total + conjunto dividido + personas (29.1%)



Al igual que en la primera pregunta las ilustraciones conforman tres niveles según el número de figuras presentes. En el caso nuevo de los dibujos discretos, el primer nivel lo forma un conjunto discreto, o un conjunto discreto dividido (apartados 1 y 2); el segundo esta constituido por las posibles combinaciones tomadas de dos en dos de un conjunto discreto, un conjunto discreto dividido y una representación de personas

(apartados 3, 4, 5); por último, el tercer nivel está formado únicamente por la unión de las tres imágenes anteriores (apartado 6).

Todas estas ilustraciones componen las distintas maneras de representar cada una de las ideas descritas en el apartado anterior. En las Figura 5 y 6 se muestran las relaciones existentes entre las tres categorías principales del concepto de repartir y las representaciones continuas y discretas respetivamente.

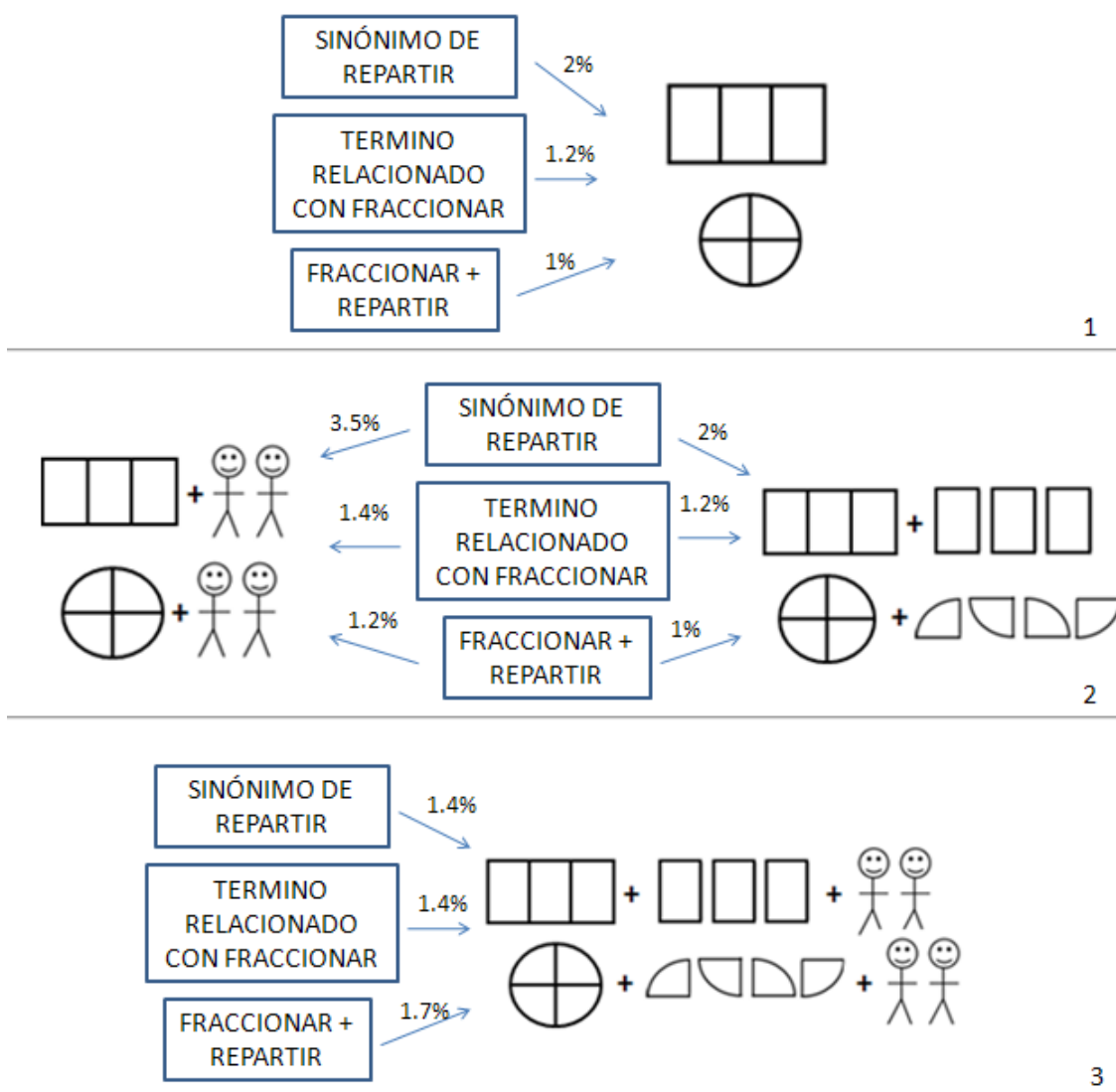


Figura 5. Relaciones entre repartir y sus representaciones continuas

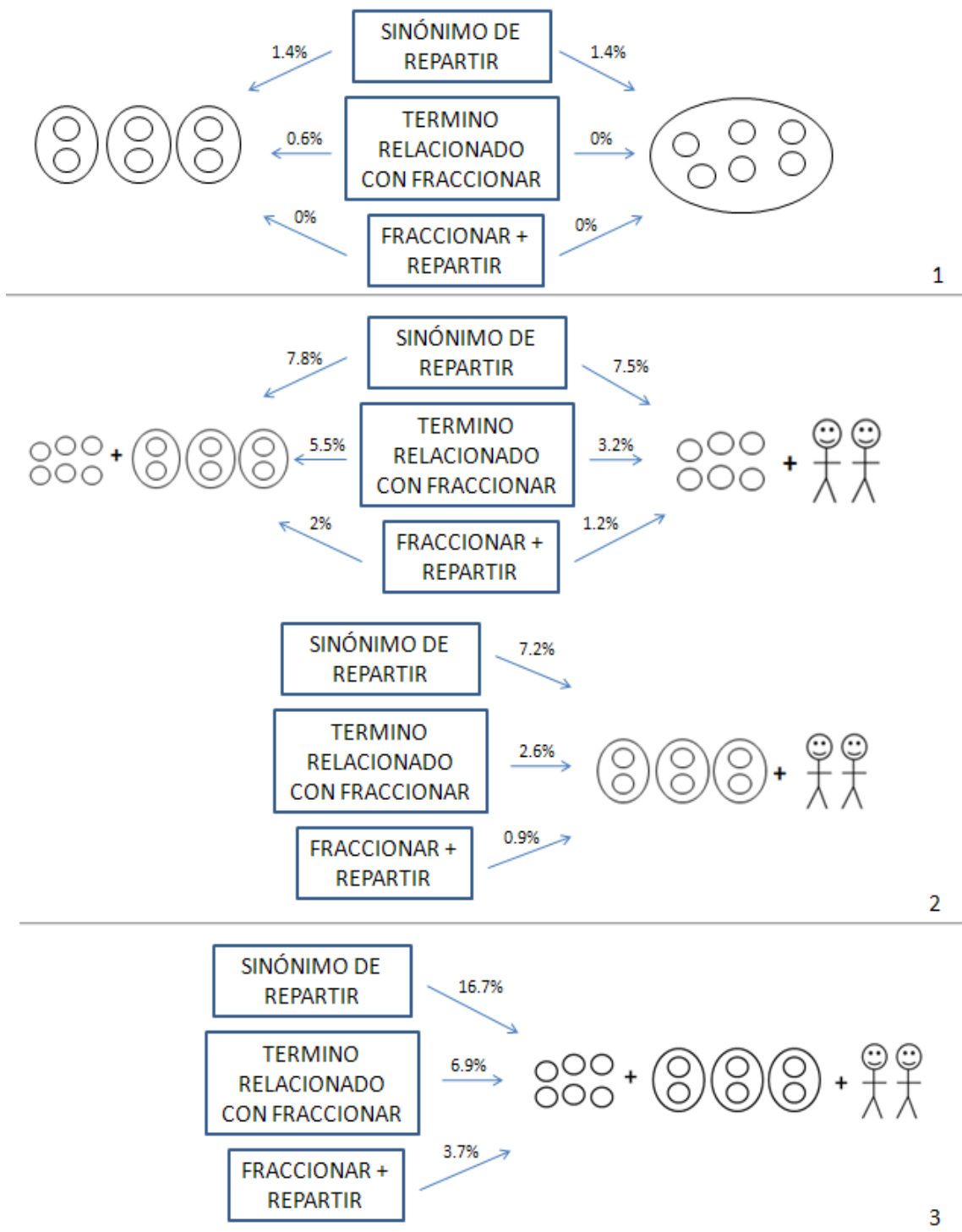


Figura 4.6. Relaciones entre repartir y sus representaciones discretas

Como se observa en las figuras anteriores, la principal diferencia entre ambas es que en las ilustraciones continuas no se representa la figura inicial, si no que siempre se

presenta de manera dividida. En el caso de las ilustraciones discretas, un mayor número de representaciones son las que contienen el conjunto inicial el cual será repartido.

Las principales diferencias con las ilustraciones de la pregunta 1.2 referente a fraccionar son que, a excepción de un par de casos aislados no hay ilustraciones discretas ni dibujos de personas en esta primera pregunta, mientras que en las correspondientes a repartir tienen una presencia mayoritaria.

#### 4.8 Análisis conjunto de las respuestas a las preguntas 2.1 y 2.2

Una vez estudiadas por separado las respuestas a las preguntas 2.1 y 2.2, pretendemos analizar la independencia o asociación entre las respuestas a estas dos preguntas. Como en el apartado 4.5, hemos construido una primera tabla de contingencia en la que las subcategorías que hemos detectado en una y otra pregunta actúan como filas y columnas. Posteriormente realizamos una segunda tabla donde agrupamos ciertas subcategorías que presentan poca frecuencia, para poder realizar un test de independencia Chi-cuadrado.

A continuación se muestra la tabla de contingencia correspondiente a las subcategorías obtenidas para las respuestas de las preguntas 1.1 y 1.2.

Tabla 4.10

*Tabla de contingencia para las subcategorías de las respuestas a las preguntas 2.1 y 2.2*

	1. Sinónimos de repartir	2.Dividir/fraccionar /partir	3.Dividir/fraccionar + dar/distribuir	4.Otros	
Figura dividida	7(2%)	4(1.2%)	3(0.9%)	1(0.3%)	15 (4.3%)
Figura dividida+ personas	12(3.5%)	5(1.4%)	4(1.2%)	1(0.3%)	22(6.3%)
Figura dividida + partes separadas	7(2%)	4(1.2%)	3(0.9%)	2(0.6%)	16 (4.6%)
Figura dividida + partes separadas + personas	5(1.4%)	5(1.4%)	6(1.7%)	1(0.3%)	17(4.9%)
Conjunto total	5 (1.4%)	0 (0%)	0(0%)	0(0%)	5(1.4%)

Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación

	1. Sinónimos de repartir	2.Dividir/fraccionar /partir	3.Dividir/fraccionar + dar/distribuir	4.Otros	
Conjunto dividido	5 (1.4%)	2(0.6%)	0(0%)	2(0.6%)	9(2.6%)
Conjunto total + dividido	27(7.8%)	19(5.5%)	7(2%)	12(3.5%)	65(18.7%)
Conjunto total + personas	26(7.5%)	11(3.2%)	4(1.2%)	7(2%)	48(13.8%)
Conjunto dividido + personas	25(7.2%)	9(2.6%)	3(0.9%)	3(0.9%)	40(11.5%)
Conjunto total + conjunto dividido + personas	58(16.7%)	24(6.9%)	13(3.7%)	6(1.7%)	101(29.1%)
Otros	6(1.7%)	1(0.3%)	1(0.3%)	1(0.3%)	9(2.6%)
Total	183(52.7%)	84(24.2%)	44(12.7%)	36(10.4%)	347(100%)

En la tabla 4.10 se observa que algunas categorías se presentan conjuntamente con una frecuencia relativamente alta. No obstante, también hay un número elevado de celdas con una frecuencia nula. Como ya comentamos anteriormente, esto es un inconveniente para poder contrastar la hipótesis nula de independencia entre las dos variables (respuestas de la pregunta 2.1 y respuestas de la pregunta 2.2), por ello hemos unido algunas subcategorías que presentan poca frecuencia en una sola subcategoría. La tabla 4.11 muestra la tabla de contingencia resultante después del reagrupamiento.

Tabla 4.11

*Tabla de contingencia subcategorías agrupadas 2.1 y 2.2*

	Sinónimos de repartir	Dividir/fraccionar/ partir	Dividir/fraccionar + dar/distribuir	Otros	
Figura	14	8	6	3	31
Figura + personas	17	10	10	2	39
Conjunto	37	21	7	14	79
Conjunto + personas	109	44	20	16	189
Otros	6	1	1	1	9
Total	183	84	44	36	347

A esta tabla de contingencia le hemos aplicado el test de la Chi-cuadrado para detectar si hay independencia o asociación entre las dos variables nominales que representan las subcategorías detectadas en las respuestas a las preguntas 2.1 y 2.2.

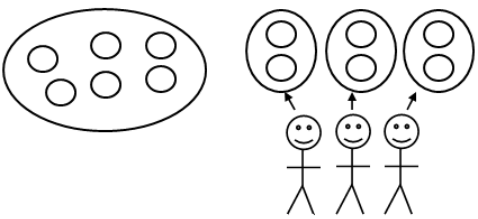
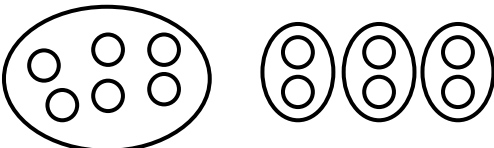
El valor de la Chi-cuadrado ( $\chi^2=17.303$ ) tiene un nivel de significación de 0,139 ( $>0,05$ ), por lo cual se acepta la hipótesis nula de independencia, es decir no existe evidencia estadística de asociación entre ambas variables.

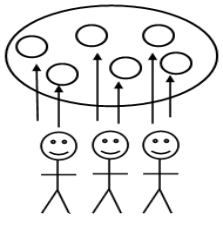
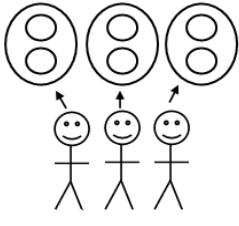
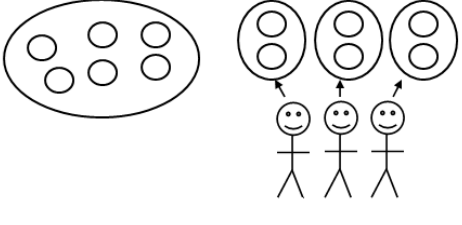
*Asociaciones más frecuentes*

Realizado el contraste de independencia, vamos a destacar cuales son las parejas de subcategorías más frecuentes. Si observamos la tabla 4.10, vemos que hay casillas con un porcentaje de respuestas muy superior a otras. La tabla 12 resume la presencia conjunta de las subcategorías y su porcentaje de aparición en los sujetos de la muestra.

Tabla 4.12

*Asociaciones más frecuentes*

% del total	Subcategorías de las respuestas a la pregunta 2.1	Subcategorías de las respuestas a la pregunta 2.2
16.7%	1.Sinónimos de repartir	10.Conjunto total + conjunto dividido + personas 
7.8%	1.Sinónimos de repartir	7.Conjunto total + conjunto dividido 

% del total	Subcategorías de las respuestas a la pregunta 2.1	Subcategorías de las respuestas a la pregunta 2.2
7.5%	1.Sinónimos de repartir	<p>8.Conjunto total + personas</p> 
7.2%	1.Sinónimos de repartir	<p>9.Conjunto dividido + personas</p> 
6.9%	2.Dividir/fraccionar/partir	<p>10.Conjunto total + conjunto dividido + personas</p> 

Para algunos de estos casos es interesante estudiar las tablas de contingencia resultantes al tomar las subcategorías como variables dicotómicas (ausencia y presencia de respuestas).



Tabla 4.13

*Tabla de contingencia para las subcategorías sinónimos de repartir y conjunto total + conjunto dividido + personas*

			Sinónimos de repartir		Total
			Ausencia	Presencia	
Conjunto total + conjunto dividido + personas	Ausencia	Recuento	121	125	246
		% del total	34,9%	36,0%	70,9%
	Presencia	Recuento	43	58	101
		% del total	12,4%	16,7%	29,1%
Total		Recuento	164	183	347
		% del total	47,3%	52,7%	100,0%

En la tabla 4.13, encontramos en la fila correspondiente a la presencia de la subcategoría conjunto total + conjunto dividido + personas, que más de la mitad de los sujetos (57.5%) que responden con estas ilustraciones, han respondido previamente a la pregunta 2.1 mediante un sinónimo de repartir.

Tabla 4.14

*Tabla de contingencia para las subcategorías sinónimos de repartir y conjunto total + personas*

			Sinónimos de repartir		Total
			Ausencia	Presencia	
Conjunto total + personas	Ausencia	Recuento	142	157	299
		% del total	40,9%	45,2%	86,2%
	Presencia	Recuento	22	26	48
		% del total	6,3%	7,5%	13,8%
Total		Recuento	164	183	347
		% del total	47,3%	52,7%	100,0%

En primer lugar destaca un porcentaje muy bajo de sujetos (14%) que responden conjuntamente con un sinónimo de repartir y una ilustración de conjunto total +

Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación

personas. Sin embargo, al fijarnos en los resultados de la tabla por filas, se observa que más de la mitad (54%) de participantes que responden con dicha ilustración han respondido con un sinónimo de repartir en la pregunta 2.1.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES

En este apartado se recogen las principales conclusiones obtenidas a partir de los resultados del análisis realizado, se ponen de manifiesto las limitaciones de la investigación y se perfilan sugerencias de continuidad para el estudio.

Al comienzo del estudio nos propusimos realizar, con carácter general, una aproximación a las ideas y significados sobre fraccionar y repartir que utilizan los futuros maestros en el primer curso de su formación inicial como profesores. En una primera fase, nuestro propósito fue la construcción de un instrumento que permitiese identificar los conocimientos y nociones de los futuros maestros, es decir, las definiciones, interpretaciones y usos sobre una serie de aspectos básicos de las fracciones. Tras su diseño, redacción y validación, se lleva a cabo la puesta en práctica del cuestionario. El propósito central del estudio culmina con la segunda fase, en la que tratamos de establecer los conocimientos: ideas, conceptos y relaciones respecto a las nociones de fraccionar y repartir.

En general, la información recogida mediante el proceso descrito ha superado las expectativas iniciales. A través de una serie de preguntas sencillas, hemos realizado un acercamiento a aquellos significados que contemplan los maestros en formación inicial sobre fraccionar y repartir. El análisis nos ha revelado que los maestros en formación inicial consideran una pluralidad de significados no triviales para estos conceptos y que, además, se aprecian niveles complejidad en ellos.

## 5.1 Preguntas 1 y 2

De las respuestas a la primera pregunta ¿qué es fraccionar? hemos obtenido las siguientes conclusiones:

- Con respecto a la pregunta 1.1 en la que se pide explicar verbalmente qué entienden por fraccionar, los estudiantes de magisterio identifican este concepto de forma mayoritaria (80%) con la idea de dividir, esta respuesta se presenta acompañada o no por las ideas de partir o repartir.
- En la pregunta 1.2. en las que se pide a los participantes que hagan un dibujo que muestre qué es fraccionar, las ilustraciones producidas se encuadran en su mayoría (98%) dentro de la magnitud superficie. Otros tipos de magnitudes como las lineales y discretas o las representaciones simbólicas tienen una escasa presencia con un porcentaje conjunto del 2%.
- Predominan las ilustraciones con un único icono, círculo o rectángulo (67,6%), que permite expresar indistintamente las ideas de dividir/partir/repartir (16%), dividir/partir/repartir en partes (33%) y dividir/partir/repartir en partes iguales (35%). Dichas ilustraciones son simples y unívocas y no es necesario el dinamismo mediante una secuencia de iconos. La complejidad de dichos iconos contribuye a identificar la igualdad de las partes.
- Aunque en las respuestas verbales expresan de forma mayoritaria la idea de dividir como principal significado de fraccionar, a la hora de representarlo gráficamente lo hacen mediante una figura dividida con una parte coloreada, reflejo de uno de los significados más comunes de las fracciones, el de parte-todo.
- El análisis conjunto de las respuestas verbales y gráficas de la primera pregunta, dio lugar a corroborar una conjetura desarrollada con el análisis inductivo: la existencia de asociación entre ambos sistemas de categorías de respuestas. Los maestros en formación encuentran relación entre los significados de dividir y parte-todo de las fracciones, pues responden con uno de ellos según el tipo de pregunta verbal o gráfica a la que se enfrenten.

- Cabe destacar también que sólo 3 de los 358 sujetos entrevistados han dejado la pregunta 1.1 en blanco, y 4 para la pregunta 1.2. Por tanto, los maestros en formación inicial se encuentran familiarizados y capacitados para contestar a estas preguntas, aunque de forma limitada, ciñéndose a unos significados muy concretos y a una única magnitud en las representaciones.

Con respecto a la segunda pregunta ¿qué es repartir? encontramos:

- Existe una mayor complejidad en las respuestas que en la pregunta anterior. Su categorización ha necesitado más niveles que la primera pregunta y su representación se suele ilustrar con 2 o 3 iconos (>60%), las cuales en su mayor parte incluyen dibujos estilizados de personajes.
- Para la pregunta 2.1 en la que se pide explicar verbalmente qué es repartir, la mayoría de los participantes expresan la idea de repartir cómo un concepto propio, mediante una nueva definición, sin estar relacionada con la definición de fraccionar. No obstante hay un grupo de participantes (36,9%) que identifican como similares ambos conceptos.
- Fraccionar, ya sea explícitamente o implícitamente mediante su representación gráfica, implica en todos los casos la fragmentación de un objeto con igualdad entre las partes. Por el contrario, en esta pregunta el reparto es distinguido explícitamente como equitativo o no equitativo, llegando en muchos casos a afirmarse que ésta es la principal diferencia con la pregunta anterior.
- Con respecto a las respuestas de la pregunta 2.2 en la que se pide realizar un dibujo que muestre qué es repartir, existe una mayor variedad de representaciones en las respuestas que en la pregunta 1.2. No existe una única magnitud preferente en las ilustraciones como ocurría en la pregunta 1.2 con las representaciones de superficie; esta magnitud (21,7%) se queda en segundo lugar, siendo prioritarias las representaciones discretas (74,2%).
- El análisis conjunto de las respuestas verbales y gráficas de esta pregunta, dio como resultado que no existe evidencia estadística de asociación entre dichas

respuestas. No obstante, existen asociaciones muy frecuentes entre las respuestas verbales y gráficas a esta pregunta.

De esta manera hemos dado cumplimiento a la primera parte de nuestro propósito estableciendo de manera fundada el estado sobre ideas, imágenes y conceptos relativos a fraccionar y repartir que tienen los futuros maestros en formación. Queda de manifiesto que estas dos nociones expresan significados distintos del concepto en estudio: tanto en los signos con que se representan las nociones como en el sentido verbal y conceptual que transmiten son distintas, se delimitan y reconocen diferencias. Falta por estudiar si también es posible establecer distinciones en las referencias usadas por los profesores en formación para las nociones en estudio. Se amplía así nuestro campo de trabajo y se abre una nueva etapa en la investigación sobre la cognición de los maestros en el campo de la fracciones.

Estimamos que los logros más destacables de este estudio han sido el sistema de categorías y los mapas conceptuales establecidos para las respuestas a las preguntas 1 y 2 del cuestionario, así como el procedimiento para su determinación. Las categorías proporcionan las diferentes interpretaciones y significados con que los sujetos encuestados expresan sus conocimientos y ponen de manifiesto la riqueza y complejidad del sistema de ideas que sustentan dichos conocimientos respecto a las fracciones.

## **5.2 Limitaciones de la investigación**

La muestra de sujetos seleccionada ha sido intencional. Han participado voluntariamente alumnos de primer curso de las especialidades de Maestro de Educación Primaria y de Educación Infantil que, en el año académico 2009-2010, estudian en la Facultad de Ciencias de la Educación y en la Escuela Universitaria de Magisterio Ave María de la Universidad de Granada. Esto limita la generalización de nuestros resultados a otras especialidades o universidades. La recolección de datos mediante un muestreo tipo puntual, frente a otro de tipo longitudinal, que recogiera los datos al comienzo y final del curso, limitan los análisis y las conclusiones de nuestros hallazgos.

Aunque hemos creado y aplicado un cuestionario con cinco preguntas, los resultados que hemos recogido en este estudio, se limitan al análisis de las dos primeras preguntas (1.1, 1.2, 2.1 y 2.2).

### **5.3 Sugerencias para investigaciones futuras**

Las limitaciones señaladas marcan las sugerencias para futuros trabajos. Así mismo, se hace necesario realizar estudios complementarios en los que se explore el conocimiento conceptual de los alumnos, maestros o profesores en formación, en un tema complejo como es el de los significados y usos de las fracciones. Otro aspecto a tratar en el futuro es el análisis conjunto del cuestionario, centrado en la fenomenología y la invención de problemas de fracciones, ya que este tema tiene escasa presencia en la investigación en educación matemática.

Por último, creemos que se han obtenido pautas de actuación metodológica para, en próximas investigaciones, ponerlas en práctica en el análisis del conocimiento de los futuros maestros en este y en otros temas relacionados.

Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación



## REFERENCIAS

- Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.
- Behr, M. J., Lesh, R. Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-number concept. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). New York: Academy Press.
- Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296–333), New York: Macmillan.
- Behr, M. J., Khoury, H. A., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary teachers' strategies on a rational-number-as operator task. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), 48-69.
- Carpenter, T.P., Fennema, E., & Romberg T.A. (Eds.). *Rational numbers: An integration of research*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.
- Castro E. y Castro En. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 127-174). Barcelona: Hosorsi.
- Cramer, K., Post, T. R., & del Mas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with

Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación

the effects of using the Rational Number Project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111-144.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza, España.

Gairín, J. M. (2001). Números Racionales. En L. Rico (Coord.), *El Número agente integrador del conocimiento* (pp.99-123). Madrid: Ministerio de Educación Cultura y Deporte.

Gairín, J. M. (2003-2004). Estudiantes para maestros: Reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos. *Contextos Educativos*, 6-7, 235-260.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España. Disponible en:  
<http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/16582056.pdf>. (1-Agosto-2010).

Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.

Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal*, 105, 11–30.

Huang, T., Liu, S. & Lin, C. (2006). Preservice teachers' mathematical knowledge of fractions. *Research in Higher Education Journal*. Disponible en:

<http://aabri.com/manuscripts/09253.pdf> (5-Junio-2010).

INCE (2002). *Sistema Estatal de Indicadores de la Educación 2002*. Madrid: MEC.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Jones, K. K. (2006). *Beyond a relational understanding of fractions: elements of instruction that contribute to preservice teachers' knowledge and motivation*. Unpublished doctoral dissertation. University of Maryland, USA.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. London: NFER-NELSON.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus: ERIC-SMEAC.

Kutschera, F. von (1979). *Filosofía del lenguaje*. Madrid: Gredos. [Sprachphilosophie. Vilhem Fink Verlag, München, 1979]

Llinarez, S. y Sánchez, V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Llinarez, S. y Sánchez, V. (1991). The knowledge about unity in fraction tasks of prospective elementary teachers. *Proceedings of the XV PME*. Assisi: University Assisi.

Lupiáñez, J.L. (2009). *Expectativas de Aprendizaje y Planificación Curricular en un Programa de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España. Disponible en: <http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/18504188.pdf>. (1-Junio-2010)

Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understandings of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

McMillan, J. H., & Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa* (5 ed.). Madrid: Pearson Addison Wesley.

Newton, K. J. (2008). An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions. *American Educational Research Journal*, 45. Disponible en: <http://aer.sagepub.com/cgi/content/abstract/45/4/1080> (9-Junio-2010)

Nillas, L. (2003). Division of Fractions: Preservice Teachers' Understanding and Use of Problem Solving Strategies. *The Mathematics Educator*, 7(2), 96 – 113.

Philippou, G. & Christou, C. (1994). Prospective elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of fractions. *Proceedings of the XVIII PME*. Lisboa: University of Lisboa.

Pinto, M. & Tall, D. (1996). Students teachers' conceptions of the rational number. *Proceedings of the XX PME*. Valencia: Universidad de Valencia.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers knowledge and practices. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense.

Post, T. R., Harel, G., Behr, M. J., & Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. En E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177–198). Albany: State University of New York Press.

- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Hosorsi.
- Rico, L. (1992). *Proyecto docente*. Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (1992). Evaluación del sistema educativo español: El caso de las matemáticas. *SUMA*, 10, 15-24.
- Rico, L. (1995). *Conocimiento numérico y formación del profesorado*. Granada: Servicio de publicaciones de la Universidad de Granada.
- Rico, L. (Coord.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los número naturales. *SUMA*, 58, 7-23.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA 4(1) pp. 1-14. (Documento presentado inicialmente en el IV Simposio de la SEIEM, 2000. Huelva: Universidad de Huelva).*
- Rico, L. et al (1984). Estudio del número fraccionario en el 6º nivel de E.G.B., *Epsilon*, 2, 3-24.
- Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Rersearcher*, 15, 4-14.

Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.

Toluk-Uçar (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education*, 25, 166-175.

Ullmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academy Press.

Wood, T. (2005). Understanding mathematics teaching: Where we began and where we are going. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 193-195.

Wright, K. B. (2008). *Assessing ec-4 preservice teachers' mathematics knowledge for teaching fractions concepts*. Unpublished doctoral dissertation. University of Texas, USA.

ANEXO  
CUESTIONARIO

--	--	--	--	--	--

## Cuestionario 1



El grupo de Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información acerca de ciertos aspectos de interés relacionados con las fracciones.

No es un examen sobre fracciones. Es una encuesta que estudia los usos cotidianos de las fracciones y los repartos.

Se ruega que lo contestes de forma individual, con creatividad e interés.

Muchas gracias de antemano.

**Sexo:** <sub>1</sub> Hombre  
<sub>2</sub> Mujer

**Edad:**

**Titulación:** \_\_\_\_\_

**Facultad:** \_\_\_\_\_



## ACTIVIDAD 1. ¿Qué es fraccionar?

Explica verbalmente qué entiendes por fraccionar.

Haz un dibujo que muestre qué es fraccionar.

## ACTIVIDAD 2. ¿Qué es repartir?

Explica verbalmente qué entiendes por repartir.

Haz un dibujo que muestre qué es repartir.