

TRABAJO DE INVESTIGACIÓN TUTELADO

**DOTANDO DE SENTIDO A LAS NOCIONES DE
PERIODO Y FRECUENCIA: UN ESTUDIO
EXPLORATORIO CON ALUMNOS DE BACHILLERATO**

Santiago Díaz González

Granada

Junio 2016

Universidad de Granada

CURSO 2015/2016

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela del doctor D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Santiago Díaz González, dentro del Máster Universitario en Didáctica de la Matemática.



Fdo.: Santiago Díaz González

Vº Bº del tutor



Fdo.: D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS	iii
ÍNDICE DE GRÁFICOS	iv
CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN ..	1
1.1 Introducción	1
1.2 Objetivos de investigación.....	4
CAPÍTULO 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	6
2.1 Antecedentes de nuestra investigación	7
2.2 Análisis conceptual de los términos “periodo” y “frecuencia”.....	10
2.3 Significado de un concepto matemático	14
2.4 El marco teórico de PISA: situaciones y matematización	16
CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO.....	19
3.1 Tipo de estudio. Descripción general	20
3.2 Descripción de los sujetos de estudio	21
3.3 Análisis de ejercicios y actividades del libro de texto que emplean los alumnos	23
3.4 Elaboración del instrumento de recogida de información. Aplicación.....	24
3.5 Tipo de análisis que se ha realizado.....	28
3.6 Valoración de la investigación.....	29

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE DATOS	31
4.1 Preguntas del cuestionario	32
4.2 Análisis de las respuestas a la pregunta 1 del cuestionario.....	33
4.3 Análisis de las respuestas a la pregunta 2 del cuestionario.....	36
4.4 Análisis de las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario.....	40
4.5 Análisis conjunto de las tres preguntas	42
4.6 Análisis de las actividades del libro de texto	48
4.7 Relación entre las respuestas al cuestionario y las actividades del libro de texto.	53
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES	57
5.1 Logros del primer objetivo específico	58
5.2 Logros del segundo objetivo específico.....	59
5.3 Logros del tercer objetivo específico	61
5.4 Logros del cuarto objetivo específico	64
5.5 Limitaciones de la investigación.....	67
5.6 Sugerencias para investigaciones futuras.....	67
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69

ÍNDICE DE TABLAS

4.1 Porcentajes de aparición términos clave (individuales o emparejados) en las respuestas a la pregunta 1	35
4.2 Porcentajes de aparición términos clave (individuales o emparejados) en las respuestas a la pregunta 2	38
4.3 Porcentajes de alumnos que ofrecen ejemplos de cada situación.....	40
4.4 Agrupamientos de los alumnos según rasgos comunes en base a las 3 preguntas del cuestionario	48
4.5 Clasificación de las actividades del libro de texto relacionadas con las nociones de periodo y frecuencia	50
4.6 Porcentajes para parejas de términos clave en actividades relacionadas con el periodo y la frecuencia	51
4.7 Porcentajes de aparición de emparejamientos de términos clave para la noción de periodo en las respuestas a la pregunta 1 del cuestionario y las actividades del libro de texto relacionadas este término	54
4.8 Porcentajes de aparición de emparejamientos de términos clave para la noción de frecuencia en las respuestas a la pregunta 2 del cuestionario y las actividades del libro de texto relacionadas este término	54

ÍNDICE DE GRÁFICOS

2.1 <i>Triángulo semántico de un concepto matemático escolar</i>	15
4.1 <i>Dendrograma del análisis clúster jerárquico</i>	43
4.2 <i>División por grupos dentro del dendrograma</i>	44

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

Los problemas que se plantean al educador matemático son problemas de comprensión y de uso, problemas de significado, no consisten en pruebas y demostraciones. El educador matemático centra su interés en los significados de los conceptos y estructuras de las matemáticas escolares. (Rico, 2012, p.53)

Estas palabras de Rico, en su descripción sobre la tarea del investigador en educación matemática, llevan a considerar la importancia que tiene en este ámbito la reflexión acerca de qué es lo que entiende el profesor cuando está explicando un concepto en el aula y, a su vez, qué es lo que interpreta y asimila el alumno. De esta forma, resulta de especial interés la investigación sobre significados de conceptos y estructuras que pueden ser consideradas como fundamentales, en el sentido de que sirven como punto de partida para que el alumno pueda ser capaz de construir un conocimiento más allá de esos conceptos.

Probablemente, la Trigonometría es uno de los tópicos en matemáticas con mayor potencial en la línea de lo comentado anteriormente (Weber, 2005). En efecto, estamos ante un área en la que encontramos gran abundancia de conceptos, y en la que además encontramos un buen número de conexiones a otras nociones y estructuras matemáticas. En la Trigonometría encontramos esa fusión de aritmética, álgebra y geometría, que hacen que nos encontremos ante un tópico que reviste gran interés. Pero esas conexiones y relaciones no sólo se dan dentro de las propias matemáticas: también

la Trigonometría es de gran utilidad en otras cuestiones de la Física, la Ingeniería, la Navegación, etc. (Koyunkaya, 2016).

La versatilidad de la Trigonometría hace que ésta sea una herramienta para dotar a los estudiantes de una serie de herramientas que les permita resolver problemas de cierta relevancia, además de darles una visión amplia y coherente de las matemáticas (Fi, 2003). Las situaciones en las que se puede hacer uso de las nociones y las estructuras trigonométricas son múltiples: personales, educativas, laborales, científicas... (Martín, 2013). Precisamente, las pruebas PISA hacen uso de estas situaciones a la hora de elaborar sus informes (OECD, 2013), lo cual nos hace pensar que estas situaciones pueden ser una buena referencia a la hora de interpretar los significados que dan los alumnos a las nociones, además de servir de fundamento teórico que nos permita estudiar en qué medida los alumnos se ven influenciados por esas situaciones en su aprendizaje (Rico, 2006), bien por los contenidos de sus libros de texto o por las explicaciones de sus profesores.

Con todo, la Trigonometría es un tópico de las matemáticas que presenta grandes dificultades para algunos alumnos. Brown (2005) señala que esa versatilidad de la Trigonometría puede ser precisamente uno de los motivos. En efecto, cuando el alumno se enfrenta a unos conceptos tan amplios y que requieren de gran capacidad de abstracción y de relación puede que se vea superado. Además, en pocos tópicos escolares se da esta riqueza de contenido y de facetas que se encuentra aquí. De esta forma, en Trigonometría hablamos de circunferencia goniométrica, relaciones entre catetos de triángulos rectángulos, unidades de medida de ángulos que a su vez son longitudes...

Sin embargo, resulta llamativo que esta riqueza y estas dificultades haya llamado tan poco la atención de los investigadores (Weber, 2005). La presencia de estudios que buscan explicar y proponer soluciones a la complejidad didáctica de la Trigonometría es significativamente menor que en otros tópicos matemáticos. Brown (2005) indica que “existe escasa investigación en relación a las ideas intuitivas que los estudiantes poseen sobre el estudio de la trigonometría o sobre los métodos más adecuados para enfocar y estructurar los nuevos conceptos para construir un núcleo sólido de conocimiento” (p. 10). A pesar de todo, en los últimos años esta escasez de investigaciones en este tópico se ha visto paliada por algunos estudios que pretenden arrojar algo de luz acerca de qué entienden los estudiantes sobre distintos conceptos de la Trigonometría (Martín, 2013;

Moore, 2013, Koyunkaya, 2016), sobre el impacto que tiene el uso de medios tecnológicos en su enseñanza y aprendizaje (Montiel, 2005; Tavera y Villa-Ochoa, 2013), sobre análisis de libros de texto (Tavera, 2011), etc. Estos ejemplos, como parte de la revisión bibliográfica que hemos realizado en esta investigación, nos lleva a poder aseverar el creciente interés existente alrededor de estas cuestiones.

Comenzábamos estas líneas enfatizando la afirmación de Rico (2012) acerca del significado y comprensión de los conceptos matemáticos escolares. Muchos de los trabajos citados anteriormente pretendían arrojar algo de luz acerca de la forma en que los estudiantes comprenden las nociones básicas de la Trigonometría: seno y coseno, ángulos, medidas... Nos parece que estos trabajos pueden ser un buen punto de apoyo para seguir profundizando en estas cuestiones, e ir un paso más allá e intentar explicar la forma en que el alumno entiende otros conceptos más complejos y más profundos de este tópico, como son “periodo” y “frecuencia”. En efecto, estos conceptos constituyen piezas clave a la hora de aplicar las estructuras trigonométricas en otros campos (Shama, 1998), lo que los convierte en elementos clave de la componente de sentido de la Trigonometría.

Es por ello que, en la línea de mejorar la calidad de la investigación didáctica sobre la Trigonometría, pretendemos situar este trabajo de investigación tutelado, que iniciamos en el marco de Máster en Didáctica de las Matemáticas con un estudio exploratorio acerca del sentido con que estudiantes de Bachillerato se expresan sobre las nociones de “periodo” y “frecuencia”. El hecho de centrarnos en estos dos términos, así como la forma de abordar el análisis de los significados (a través de elementos de sentido, esto es de lo que expresa el propio alumno y a través de cómo se presentan en las actividades del libro de texto que emplean los alumnos de la muestra), constituyen los elementos que dotan de originalidad a este trabajo de investigación.

Este estudio exploratorio es además descriptivo, y en él hemos empleado un enfoque basado en los siguientes puntos:

- Enfoque cualitativo en la identificación, análisis y descripción de términos clave utilizados por los sujetos cuando definen las nociones de periodo y frecuencia.
- Enfoque cualitativo en la identificación, análisis y descripción de términos clave presentes en las actividades del libro de texto en los que aparecen las nociones de periodo y frecuencia.

- Una interpretación conjunta de los dos enfoques anteriores, mediante los ejemplos de aplicación de las nociones tratadas que puedan ofrecer los alumnos.

1.2 Objetivos de investigación

Las preguntas de investigación que surgen de todo lo anterior se pueden resumir en las siguientes:

¿Cómo expresan los estudiantes de forma verbal y gráfica sus concepciones intuitivas sobre las nociones de periodo y frecuencia?

¿Qué conceptos y nociones utilizan los estudiantes para describir estos términos?
¿En qué contextos y situaciones hacen uso de estas nociones?

¿En qué contextos y situaciones el libro de texto que emplean los alumnos las actividades en las que el alumno debe hacer uso de los conceptos de periodo y frecuencia?

De esta manera, planteamos el siguiente objetivo general para nuestra investigación:

“Explorar y describir las nociones, representaciones y conceptos que los estudiantes ponen de manifiesto cuando expresan el significado de los términos periodo y frecuencia mediante descripciones verbales y ejemplos personales”.

Este objetivo general lo podemos desglosar en los siguientes objetivos específicos:

OE1. Establecer la forma más adecuada de recoger información en registro verbal en un grupo de alumnos de 1º de Bachillerato sobre los términos periodo y frecuencia.

OE2. Establecer e identificar categorías para organizar la forma en que ese grupo de alumnos expresan verbalmente sus nociones sobre los conceptos de periodo y frecuencia, organizando esas expresiones a partir de las categorías establecidas y las relaciones existentes entre ellas, en base al análisis conceptual de estos términos.

OE3. Establecer diferentes perfiles de alumnos en función de sus respuestas y de las categorías previamente establecidas, partiendo de los significados que ponen de manifiesto los estudiantes sobre las nociones de periodo y de frecuencia.

OE4. Identificar categorías en las actividades presentes en el libro de texto empleado por los alumnos que hagan uso de las nociones de periodo y frecuencia; clasificarlas, relacionarlas entre sí e interpretarlas, a fin de determinar si las expresiones verbales de los alumnos responden a esas categorías.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Se expondrán en las siguientes páginas las ideas centrales que conforman el marco teórico en el que se desarrolla nuestra investigación. De esta manera, comenzaremos realizando una revisión bibliográfica de los antecedentes de la investigación, presentando de manera comprensiva y no exhaustiva los resultados considerados como más significativos que guardan una relación más o menos directa con nuestro problema de investigación: concepto de razón trigonométrica, medidas de ángulos, técnicas para la enseñanza de la Trigonometría e impacto del uso de medios tecnológicos en el aprendizaje, dificultades en la enseñanza del concepto de periodicidad, etc.

En segundo lugar procederemos a realizar un análisis conceptual de los términos “periodo” y “frecuencia”. Este análisis conceptual constituirá la base sobre la que estructuraremos el estudio de las respuestas de los estudiantes obtenidas en el instrumento de recogida de información, además de servirnos como referencia en el análisis de las actividades de su libro de texto.

A continuación, nos proponemos hacer una precisión de la noción de significado de un concepto matemático que utilizaremos en nuestra investigación, debido, una vez más, a la pluralidad existente en la literatura en las formas de interpretar esta idea.

Por último, haremos un breve comentario acerca del marco teórico en el que se encuadra la clasificación que hemos hecho de las actividades del libro de texto, de acuerdo a las directrices PISA (OECD, 2013).

2.1 Antecedentes de nuestra investigación

Weber (2005), en su publicación *Student's understanding of trigonometric functions* destaca la importancia de la Trigonometría como uno de los primeros tópicos en el aprendizaje de las matemáticas que es capaz de vincular álgebra, geometría y razonamiento gráfico. Por otra parte, no es menos cierto que el dominio de la Trigonometría constituye un requisito imprescindible para diversas cuestiones relacionadas con la física, la ingeniería o la arquitectura.

Sin embargo, basta un rápido vistazo a las últimas reformas educativas para constatar que, al menos en nuestro país, apenas se concede importancia a esta parte de las Matemáticas. En efecto, no es hasta el cuarto curso de la E.S.O. cuando se introducen por primera vez cuestiones relacionadas con Trigonometría, para profundizar un poco en ellas en el primer curso del Bachillerato en las ramas científicas. Este contraste entre la importancia de este tópico y su escasa presencia no es nuevo, ni se restringe a nuestro país. Ya en 1989, el organismo estadounidense NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) destacan la importancia de la Trigonometría para los escolares, a la vez que recomiendan que se incluya y se trate con mayor profundidad en los planes de estudios, recomendación que repiten en el año 2000 (NCTM, 1989; NCTM, 2000).

La literatura relacionada con este tópico no es tan extensa como cabría esperar (Brown, 2006). Estamos ante una cuestión en la que, por el momento, las investigaciones se centran principalmente en las técnicas que favorecen la mejor asimilación de los conceptos relacionados con la trigonometría. Por ello, en los siguientes párrafos pretendemos hacer una breve revisión de las principales aportaciones en este campo.

Podemos comenzar esta revisión destacando los numerosos autores que hacen referencia a las dificultades que encuentran no sólo los estudiantes, sino también los profesores, cuando se trata con conceptos trigonométricos. Así, tanto Weber, Knott y Evitts (2008) como Moore (2013) destacan la escasa comprensión mostrada por estudiantes y profesores acerca de cuestiones trigonométricas fundamentales tales como ángulos, medida de ángulos o la circunferencia goniométrica. Por su parte, Koyunkaya (2016) señala que estas dificultades también se encuentran en estudiantes de cursos superiores. A propósito de estas dificultades en la comprensión de los conceptos

básicos, Thomson (2007) concluye que si los estudiantes son capaces de asimilarlos adecuadamente podrán entender conceptos más avanzados en este tópico, cosa que difícilmente podrán hacer si la adquisición de esos conceptos no se hace de forma significativa.

Precisamente, y refiriéndose a un nivel más avanzado de complejidad en los conceptos que se manejan, Martín (2013) y Montiel (2005) se refieren en sus investigaciones a las dificultades existentes en los alumnos a la hora de establecer relaciones entre las definiciones y las imágenes conceptuales en las razones trigonométricas seno y coseno.

El razonamiento cuantitativo y variacional es, según Tavera y Villa-Ochoa (2013) y Moore (2013) pieza clave a la hora de establecer las relaciones entre medidas de ángulos en la circunferencia y funciones trigonométricas. Moore (2013) concluye que para que los estudiantes conceptualicen de forma más profunda tanto las razones como las funciones trigonométricas es muy conveniente comenzar la enseñanza dando una base sólida acerca del concepto de ángulo y de sus medidas. En este sentido, la propuesta de Thompson (2007) para favorecer la comprensión de los alumnos va en la línea de tomar una situación cotidiana como punto de partida para planificar una unidad didáctica en Trigonometría.

En cuanto a las diferentes técnicas para la enseñanza de la trigonometría, Kendal y Stacey (1998) defienden en su investigación que la mejor manera de asimilar los contenidos es comenzando por la enseñanza de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Weber (2005) es de diferente opinión, pues señala que es preferible comenzar enseñando las razones trigonométricas en el contexto de la circunferencia unitaria, para después trasladarlas al triángulo rectángulo. Weber concluye que, de esta forma, los estudiantes son capaces de identificar el valor de la razón de un ángulo como una coordenada en el plano cartesiano, lo cual les permite hacer mejores estimaciones de esos valores al aplicarlas en otros contextos.

Tomando como referencia los resultados ya mencionados de Kendal y Stacey por un lado, y los de Weber por otro, algunos autores desarrollan sus investigaciones acerca de cómo el uso de medios tecnológicos puede ayudar a la enseñanza y al aprendizaje de la Trigonometría. Uno de los primeros en hacerlo es Army (1991), quien desarrolla una aproximación a la enseñanza de este tópico por medio de situaciones

reales y uso de calculadoras gráficas con estudiantes universitarios, concluyendo que el uso de este medio favorecía la comprensión de los estudiantes. Más recientemente, Zengin, Furkan y Kutluca (2011) desarrollan su investigación bajo la hipótesis de que el uso del software GeoGebra podría tener efectos positivos en la asimilación de los conceptos al utilizarlo como complemento en una enseñanza de tipo constructivista, hipótesis que se ve confirmada en su investigación. En esa misma línea, y ya en lengua hispana, encontramos las investigaciones de Joglar (2013) y Tavera (2013), quienes coinciden al concluir que los entornos en los que se hace uso de software de geometría dinámica favorecen la comprensión de los alumnos.

Concluyendo la revisión de antecedentes, nos centramos ahora en estudios en los que se trate de forma más específica los conceptos que abordamos en nuestra investigación: periodo y frecuencia. En los trabajos que se han citado en los párrafos precedentes, las investigaciones se centraban en las relaciones de ángulos y sus correspondientes razones trigonométricas, ya fuera en la circunferencia unitaria, o bien en el triángulo rectángulo. Si, tal y como hemos señalado antes, el tópico que enmarca nuestra investigación no ha recibido suficiente atención en la literatura, los conceptos de periodo y frecuencia que abordamos aquí encuentran aún menos eco en investigaciones relacionadas con la Trigonometría.

Así, resulta de gran interés la investigación de Van Dormollen (2003) sobre las múltiples facetas que presenta la definición del término “periodo”, atendiendo al sentido lógico o pedagógico en que ésta se pueda presentar a los estudiantes. También cabría destacar la investigación de Shama (1998) sobre la comprensión de la periodicidad en los estudiantes. En este trabajo, el autor concluye que los errores en la comprensión del término se deben principalmente a que se interpreta un fenómeno periódico exclusivamente como resultado de un proceso. Otros autores se centran en el análisis de las actividades que se pueden realizar en el aula para enseñar el concepto de periodicidad. Ese es el caso de Kahan, Cooper y Bethea (2003), quienes concluyen que siempre es preferible introducir estos conceptos en contextos de situaciones de la vida real, para después proceder a la generalización matemática.

2.2 Análisis conceptual de los términos “periodo” y “frecuencia”

Siguiendo con la fundamentación teórica, consideramos imprescindible realizar un análisis conceptual de los conceptos de “periodo” y “frecuencia” que permita contrastar el uso matemático de estos términos con su uso cotidiano (Rico, 2001). Debido al carácter de esta investigación, este análisis conceptual nos será de utilidad para interpretar las concepciones puestas de manifiesto por los sujetos participantes en el estudio. Más concretamente, podemos desglosar los motivos próximos que nos llevan a hacer esta afirmación:

- En primer lugar, se ha observado en la literatura analizada que estos conceptos aparecen en numerosas ocasiones. En efecto, al avanzar en la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, es necesario introducir diversas cuestiones relacionadas con la periodicidad (paso de razones trigonométricas y funciones periódicas) y, como consecuencia de esto, estudiar a qué nos referimos en este contexto al hablar de frecuencia.
- Por otra parte, estos dos términos aparecen explícitamente en dos de las preguntas del instrumento de recogida de datos.
- Un tercer motivo que nos lleva a considerar la importancia de este análisis conceptual son las diferentes interpretaciones que se pueden dar a estos conceptos: interpretaciones técnicas por una parte (definiciones dadas por el profesor, o las recogidas en los libros de texto, por ejemplo) o interpretaciones personales por otra.
- Además, es necesario tener presente la noción de significado que manejamos en esta investigación, pues, en el contexto en el que esta se lleva a cabo, tanto el término “periodo” como el término “frecuencia” puede referirse a parte de las propiedades y modos de uso específicos de la trigonometría.
- Por último, es necesario que fijemos un marco concreto que acote la interpretación de los usos y significados que los estudiantes que participan en nuestro estudio han puesto de manifiesto.

En su modelo cognitivo, Vinner (1983) afirma que la dupla *imagen conceptual–definición conceptual* puede dar pie a que el sujeto haga un uso técnico más o menos riguroso de los conceptos que maneja, o bien que los describan en términos personales e informales en función de las interpretaciones que hagan de los mismos, pudiendo, en algún caso, prevalecer estas últimas. Precisamente por esto consideramos como hecho

positivo que los alumnos objeto de este estudio recibieran instrucción previa en cuestiones de trigonometría, y que además el cuestionario se les aplicara unas semanas después de terminar el tiempo previsto por el profesor al estudio de este tema. De esta manera, pensamos, es posible obtener mayor riqueza en las respuestas, de cara a que, en el posterior análisis de los datos, podamos determinar con mayor fiabilidad hasta qué punto esas concepciones personales se ajustan al significado de los términos.

Para estudiar las distintas acepciones de los términos a analizar, utilizaremos por una parte el DRAE (Diccionario de la Real Academia Española) de la RAE (2014) y el Diccionario del Uso del Español María Moliner en su edición de 2012. Por otra parte, para obtener los significados aplicados a la trigonometría, también hemos buscado las definiciones de estos dos términos que ofrece la Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales en la cuarta edición de su Vocabulario Científico y Técnico (2013), así como las acepciones científicas de estos términos en el diccionario online de Oxford.

Análisis conceptual del término “periodo”

Del DRAE (2014) tomamos las acepciones del término similares a las que se manejan en un contexto matemático informal:

1. m. Tiempo que algo tarda en volver al estado o posición que tenía al principio. (...)
5. m. Fís. Tiempo que tarda un fenómeno periódico en recorrer todas sus fases, como el que emplea un péndulo en su movimiento de vaivén, la Tierra en su movimiento alrededor del Sol, etc. (...)
7. m. Mat. Cifra o grupo de cifras que se repiten indefinidamente, después del cociente entero, en las divisiones inexactas.

De la voz correspondiente en María Moliner (2012) extraemos lo siguiente:

2. Tiempo que tarda en producirse o pasar por todas sus fases un ciclo completo de cualquier fenómeno (...).
6. MAT. Cifra o grupo de cifras que se repiten indefinidamente en el cociente en las divisiones inexactas.

Por su parte, en el Vocabulario Científico y Técnico de la RACEFN (2013) encontramos las siguientes acepciones:

1. Mat. Bloque de cifras que se repiten indefinidamente en la expresión decimal de un número racional.
2. Mat. Valor que, sumado a cualquier otro valor de la variable independiente, no altera el valor de la función, es decir, $f(x+p)=f(x)$ para cualquier x , siendo p el período. La función f se dice que es periódica de período p , eligiéndose como período el menor de los valores p que cumplen esa condición.
3. Fís. Intervalo de tiempo fijo transcurrido entre pares de situaciones definidas en un sistema físico, de modo que en ellas los valores correspondientes de alguna magnitud estén en relación constante. Cuando esta relación es la unidad, el fenómeno se denomina periódico.

En Oxford (2016), las acepciones resultantes del término inglés “*period*” son las siguientes:

1. A length or portion of time. (...)
2. [Physics] The interval of time between successive occurrences of the same state in an oscillatory or cyclic phenomenon, such as a mechanical vibration, an alternating current, a variable star, or an electromagnetic wave.
 - 2.1 [Astronomy] The time taken by a celestial object to rotate about its axis, or to make one circuit of its orbit.
 - 2.2 [Mathematics] The interval between successive equal values of a periodic function.

Las acepciones no incluidas de algunas fuentes hacen referencia a este término en su modalidad histórica (periodo de tiempo) o biológica. Hemos querido destacar estas, pues son las que se aplican mayoritariamente en el contexto de la educación matemática. En estas definiciones cabe destacar el énfasis que muchas de ellas hacen en el término “tiempo”. Pensamos que hacer énfasis en este término puede llevar a reducir el sentido del concepto que estamos tratando: si el estudiante solo asocia el periodo en un contexto temporal puede existir un conflicto, por ejemplo, a la hora de identificar y definir el bloque de cifras que se repite en un número decimal periódico; o bien, cuando trate con una función periódica cuya variable independiente mida otra magnitud diferente del tiempo, pueden existir dificultades para identificar el periodo. Los

conflictos aquí descritos afectarían pues a la imagen conceptual de los estudiantes (Tall y Vinner, 1981). En este sentido, pensamos que la definición de la Real Academia de Ciencias es la más completa, y será la que tengamos como referencia a la hora de analizar las concepciones que manifiesten los alumnos.

Análisis conceptual del término “frecuencia”

Acerca de este término, del DRAE (2014) extraemos las siguientes acepciones:

1. f. Repetición mayor o menor de un acto o de un suceso.
2. f. Número de veces que se repite un proceso periódico por unidad de tiempo.
3. f. Estad. Número de elementos comprendidos dentro de un intervalo en una distribución determinada.

En María Moliner (2012) encontramos las siguientes definiciones de interés para el contexto en el que trabajamos este concepto:

2. Número de veces que ocurre cierta cosa en cierto intervalo de tiempo.
3. FIS. Número de ciclos por unidad de tiempo que se producen en un movimiento periódico

La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (2013) da la siguiente definición:

Magnitud que mide el número de repeticiones por unidad de tiempo de cualquier fenómeno o suceso periódico.

La búsqueda del término “*frequency*” en Oxford (2016) nos da las siguientes definiciones:

- 1 [MASS NOUN] The rate at which something occurs over a particular period of time or in a given sample.
 - 1.1 The fact or state of being frequent or happening often.
- 2 The rate per second of a vibration constituting a wave, either in a material (as in sound waves), or in an electromagnetic field (as in radio waves and light)
 - 2.1 The particular waveband at which radio signals are broadcast or transmitted.

En este caso observamos cómo todas las definiciones guardan mucha similitud entre ellas. Casi todas vuelven a hacer énfasis en el “tiempo”, relacionando directamente

frecuencia con velocidad (en cuanto al cociente entre el espacio recorrido entre el tiempo transcurrido). Consideramos que la primera acepción de Oxford (2016) puede ser la más adecuada, pues es la única que especifica con claridad que la magnitud de referencia no ha de ser el tiempo: el ritmo al que algo ocurre en un periodo de tiempo particular o en una muestra dada.

De este análisis conceptual podemos sacar dos conclusiones. En primer lugar, en el término “periodo” prevalece la definición física del mismo, haciendo que este término se identifique con un intervalo de tiempo. La definición matemática alcanza una generalización mayor, pues, además de permitir el uso de este concepto en decimales periódicos, también consigue no restringir el concepto a una cuestión puramente temporal. Para el segundo término analizado, la conclusión es similar: la interpretación mayoritaria será equivalente a la de velocidad, en su sentido físico de cociente entre espacio recorrido entre tiempo transcurrido. Por eso, preferiremos asociarla más bien con los términos “ritmo” o “tasa”, que, de nuevo, consiguen que este término no quede restringido únicamente al aspecto espacio-temporal. Esa asociación del término frecuencia con el concepto “ritmo” da además una idea de suceso cíclico, que responde a un patrón que se repite una y otra vez.

2.3 Significado de un concepto matemático

Procedemos ahora a presentar el significado de un concepto matemático que utilizaremos en nuestra investigación. Para ello, haremos una revisión del análisis que Rico (2012) realiza sobre esta cuestión en Frege (1998), centrado en las nociones de signo, sentido y referencia.

El análisis de Frege comienza con la distinción de signo y significado, para después, dentro del significado, distinguir a su vez entre sentido y referencia. Así, en un enunciado la referencia vendrá a ser la veracidad o falsedad de la misma, mientras que el sentido será el pensamiento expresado. Más concretamente, podemos detallar la terna signo – sentido – referencia de la siguiente manera:

- Signo, entendido como los símbolos (signos) que expresan un concepto matemático.

- Fenomenología: la forma o modo en que vienen dados los objetos que caen bajo el concepto. Esos modos vienen determinados por las relaciones u operaciones que caracterizan la estructura de la cual el concepto forma parte.
- Referencia: el concepto al que se refiere, atendiendo a su veracidad o falsedad.

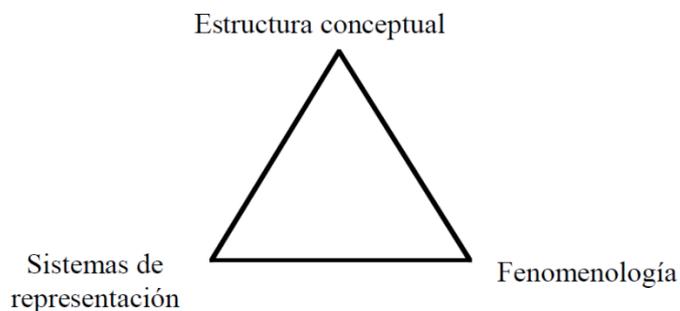
De esta forma, es posible actualizar el triángulo semántico de un concepto desde una perspectiva formal, quedando en la base del triángulo tanto el signo como el concepto, mientras que el objeto se situaría en el vértice. Según Rico (2012):

El triángulo semántico viene dado por el signo o término con el que se expresa, por su referencia o concepto propiamente tal, y por su sentido o modo en que vienen dados los objetos que caen bajo el concepto. (p. 52)

En el contexto de la educación matemática, cabría una concreción de este triángulo semántico. Así, en el caso del significado de un concepto matemático escolar podríamos seguir el siguiente esquema, fruto de la propuesta de Rico de combinar la teoría semántica de Frege con la fenomenología de Freudenthal:

Gráfico 2.1

Triángulo semántico de un concepto matemático escolar



El significado de un concepto matemático escolar vendría pues determinado por los sistemas de representación (mencionados más arriba), la estructura conceptual (conceptos y propiedades) y los sentidos (o modos de uso, con que puede ser entendido, aplicado e interpretado).

En este contexto, para nuestra investigación cobra especial relevancia el *sentido*, que vendría a ser el modo en que los objetos que están bajo el concepto vienen dados, la forma de usarlos o entenderlos. Esas formas de uso expresan las relaciones que dan sentido al concepto. Pueden proceder de alguna experiencia personal, en cuyo caso

reflejarían fenómenos procedentes del mundo físico, natural o social. Pero también podrían proceder de diferentes conexiones, más abstractas, al establecer relaciones en un concepto matemático. De esta forma, se logra dotar de sentido a un concepto matemático escolar cuando se entienden diferentes formas de usarlo, se aplica en variedad de situaciones, se comprenden los tipos de problemas que resuelve, se dominan los términos propios del concepto y se conocen los fenómenos que organiza (Ruiz-Hidalgo, 2016).

Estas ideas sintetizan de alguna manera un cambio de paradigma que se está dando en educación matemática, al proponer la superación de la dupla imagen conceptual – definición conceptual de Vinner (1983). En efecto, introducir las nociones de fenómeno didáctico y sistema de representación conlleva un enriquecimiento de la relación entre la definición y su representación o imagen. No se trata por lo tanto de medir el grado de adquisición de un concepto simplemente por el manejo de una definición formal, del cual se podrán ir deduciendo sus propiedades mediante su representación en los sistemas adecuados, sino de construir el conocimiento desde una perspectiva mucho más amplia y rica, mediante sus relaciones con otras áreas, ya sean físicas, naturales o sociales.

Dentro de este discurso, las ideas sobre el significado que manifiestan los estudiantes las denominaremos concepciones personales, esto es,

Las descripciones que proporcionan un sujeto de parte o toda su imagen conceptual asociada a un concepto dado, no necesariamente evocada o activada por una definición. En la práctica por concepción personal, entendemos la interpretación fundada de lo que el sujeto comunica sobre su imagen conceptual, independientemente de que el mensaje transmitido por el sujeto pueda ser incompleto o defectuoso. (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro, 2013, p. 119).

2.4 El marco teórico de PISA: situaciones y matematización

La noción de significado de un concepto matemático escolar que acabamos de abordar nos hace pensar en la importancia de tener en cuenta el marco en el que se desarrolla el aprendizaje del alumno. En este sentido, en OECD (2013) encontramos diversos elementos que refuerzan la estructura triangular anterior. En efecto, el modelo

funcional que propone PISA para el aprendizaje de las matemáticas establece la realización de unas tareas contextualizadas y el manejo de una serie de herramientas conceptuales (Rico, 2006).

Los problemas contextualizados son para PISA una forma de “reflejar una amplia gama de situaciones en las que el individuo encuentra oportunidades matemáticas” (p. 8). Rico (2006) señala que, en el marco teórico PISA, el proceso de hacer matemáticas precisa de dos fases: matematización horizontal y matematización vertical. En la primera fase el alumno debe identificar las matemáticas que pueden ayudarle con ese problema en concreto, representar el problema de forma diferente, buscar y encontrar patrones... En síntesis, en esta fase el alumno ha de ser capaz de traducir la actividad a la que se enfrenta a un lenguaje matemático. Es sólo después de esto cuando llega la segunda fase: en la matematización vertical el alumno ha de dar uso a esos conceptos y estructuras matemáticas que ha encontrado en la primera fase, a través del uso de diferentes sistemas de representación, de la argumentación, del empleo del lenguaje simbólico o formal, la generalización, etc.

Por todo esto, parte importante a la hora de interpretar los significados que el alumno otorga a un concepto es precisamente estudiar los contextos y las situaciones en los que identifica esos términos. Por otra parte, también resulta interesante el estudio de los contextos y de las situaciones de las actividades con las que el alumno consolida y practica los conceptos aprendidos. En gran medida le servirán para ir enriqueciendo paulatinamente los conceptos que trata, de forma que pueda establecer relaciones entre el significado de esos conceptos y las situaciones en las que los aplica (Shama, 1998). Es por ello que en nuestra investigación hacemos uso de esta doble vertiente de análisis: pretendemos observar no sólo lo que expresan los estudiantes, sino también determinar cuáles han sido los contextos y las situaciones de partida con las que han dado sentido a esas nociones.

Por último, es necesario tener en cuenta el grado de dificultad de las tareas propuestas en los libros de texto. De nuevo, los estándares PISA ofrecen una serie de criterios para determinar la complejidad de una tarea determinada. De esta forma, se determina que una tarea será más o menos compleja atendiendo a las competencias que tenga que poner en práctica el alumno: comunicación, matematización, representación, razonamiento, estrategias, empleo de símbolos y uso de otras herramientas (OECD, 2013). Se dice entonces que una tarea será más compleja en función del número de

competencias que el alumno tenga que poner en práctica a la hora de realizarla, suponiendo que, a mayor dificultad y riqueza de un concepto matemático, mayor grado de complejidad tendrán las tareas en que se haga uso de ese concepto, es decir, mayor número de competencias diferentes tendrá que poner en juego.

CAPÍTULO 3

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo presentaremos y desarrollaremos el enfoque metodológico empleado en nuestra investigación.

Así, procederemos a caracterizar y describir el tipo de estudio a realizar, además de explicar las características de los sujetos que han participado en el estudio: nivel de estudios, contexto académico, etc. También se describirá tanto el proceso de elaboración del instrumento de recogida de información como el método empleado para el análisis de las actividades del libro de texto, detallando en ambos casos el procedimiento que se ha seguido en el análisis de los datos.

Concluiremos esta sección con una breve valoración de la investigación, atendiendo a cuestiones tales como sus limitaciones o su validez interna y externa.

3.1 Tipo de estudio. Descripción general

En la revisión de la bibliografía realizada anteriormente ya se ha destacado el interés de la investigación. Efectivamente, la poca presencia que tienen las concepciones escolares de diversas cuestiones relacionadas con la periodicidad de las funciones trigonométricas y su aplicación sugiere que es necesario obtener más información sobre el significado que otorgan los alumnos a estos conceptos. Es por ello que en la presente investigación lo que se pretende es caracterizar esos significados, atendiendo especialmente a la forma que los alumnos tienen de usar y referenciar esos conceptos.

La investigación que aquí se presenta es un estudio exploratorio (León y Montero, 1997). Una primera razón que justifica este tipo de estudio es, precisamente, que este tema de investigación ha sido poco estudiado en alumnos españoles. También en esta investigación se abordan algunos puntos que no han sido tratados en otras investigaciones anteriores: las situaciones en las que los alumnos hacen uso de los conceptos estudiados, la aproximación al concepto de solución periódica infinita, etc. En segundo lugar, hemos encuadrado la investigación en un marco teórico centrado en los significados de conceptos relevantes en las matemáticas escolares. El análisis que aquí se hace tiene su raíz en el triángulo semántico de Frege, como se mostrará tanto en el proceso seguido para el diseño del instrumento de recogida de información y en el análisis de las actividades de los libros de texto como en la forma de analizar los datos. Otra razón a favor de la naturaleza exploratoria de esta investigación es que la planificación de ésta se ha hecho con la intención de recoger información sobre la comprensión de los estudiantes a fin de facilitar el diseño de una propuesta didáctica basada en datos y evidencias empíricas sobre este campo de la matemática escolar. Por último, se trata de un estudio de naturaleza semántica que aborda el modo en que los estudiantes entienden, utilizan e interpretan determinadas nociones y conceptos.

Esta última razón también nos lleva a afirmar que este estudio, además de exploratorio, tiene un carácter descriptivo. En efecto, con los datos obtenidos se pretende describir la forma en que los estudiantes adquieren, entienden usan e interpretan las nociones y los conceptos analizados (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

La obtención de datos se obtiene por una doble vía: por una parte, se analizan y clasifican los ejercicios y problemas relacionados con los términos objeto de estudio en

el libro de texto que emplean los alumnos seleccionados para el estudio; y de otra, se diseña como instrumento de recogida de datos un cuestionario de tipo semántico para ser aplicado a una muestra de alumnos elegida de forma intencional. Con este cuestionario no se pretende generalizar los resultados que se obtienen a contextos más amplios, sino que se analizan con la finalidad de particularizarlos y poder profundizar en ellos en el contexto de nuestra investigación.

En primera instancia se lleva a cabo un análisis conceptual de los términos clave. Posteriormente, tanto en el análisis de los problemas y ejercicios de los libros de texto como en el análisis de las respuestas del cuestionario se sigue un enfoque cualitativo, en primer lugar analizando cada respuesta por separado y en segundo lugar en su conjunto, a fin de poder obtener perfiles de alumnos. Este doble análisis (libro de texto y respuestas del cuestionario) se hace con la finalidad de poder objetivar al máximo las respuestas que los alumnos escriben en el cuestionario.

3.2 Descripción de los sujetos de estudio

La muestra se elige por disponibilidad, y está compuesta por 44 alumnos que en el año académico 2015/2016 cursan 1º de Bachillerato en el Colegio Retamar de Pozuelo de Alarcón (Madrid). Todos los alumnos de la muestra, de 16 y 17 años de edad, cursan simultáneamente el Bachillerato LOMCE con la asignatura de Matemáticas NM (Nivel Medio) del Programa del Diploma Bachillerato Internacional.

El Bachillerato Internacional es una fundación educativa sin ánimo de lucro fundada en 1968. En el diseño y desarrollo de sus cuatro programas (Programa de la Escuela Primaria, Programa de los Años Intermedios, Programa del Diploma y Programa de Orientación profesional) tiene el objetivo de “desarrollar las habilidades intelectuales, personales, emocionales y sociales que los alumnos necesitan para vivir, aprender y trabajar en un mundo cada vez más globalizado” (IBO, 2013, p. 3). En la actualidad, hay más de 4000 centros educativos en todo el mundo que imparten los programas del Bachillerato Internacional. En nuestro país, el Programa del Diploma se cursa en 95 centros, siendo casi un tercio de ellos institutos públicos (IBO, 2013).

El colegio donde estudian los alumnos de la muestra ofrece a todos sus estudiantes, bajo ciertos requisitos¹, la posibilidad de simultanear los estudios de Bachillerato LOMCE con los del Bachillerato Internacional. Los alumnos que acceden a ese programa cursan entre los dos años de Bachillerato seis asignaturas con el doble programa Nacional – Internacional. La oferta de asignaturas de Bachillerato Internacional va en consonancia con el itinerario LOMCE elegido por los alumnos. De esta forma, según la especialidad elegida, los alumnos cursan las siguientes asignaturas con el doble programa:

- Especialidad de Ciencias e Ingeniería: Matemáticas NM², Química NM, Filosofía NM, Física NS, Lengua NS, Inglés NS.
- Especialidad de Ciencias de la Salud: Matemáticas NM, Física NM, Filosofía NM, Química NS, Lengua NS, Inglés NS.
- Especialidad de Ciencias Sociales: Matemáticas NM, Historia NM, Biología NM, Filosofía NS, Lengua NS, Inglés NS.

El hecho de simultanear dos programas de Bachillerato hace que en algunas asignaturas los temarios sean algo más extensos, según la modalidad de Bachillerato LOMCE del alumno. Así, los alumnos matriculados en Matemáticas I (especialidades de Ciencias e Ingeniería y Ciencias de la Salud) no ven incrementado su temario por el hecho de cursar un doble bachillerato, pues el currículo de Matemáticas I es algo más extenso que el de Matemáticas NM. Por su parte, los alumnos de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I complementan su currículo con algunas nociones algo más avanzadas de Trigonometría y Geometría Analítica, a fin de abarcar los contenidos de la asignatura de Matemáticas NM del Bachillerato Internacional.

De los 44 alumnos de la muestra, 24 de ellos están matriculados en las especialidades de Ciencias e Ingeniería y Ciencias de la Salud, y los 20 restantes de Ciencias Sociales. Aunque todos ellos cursan la asignatura de Matemáticas NM, nos parece importante resaltar este hecho, ya que, como se ha visto, los alumnos de los

¹ Los requisitos de acceso al Programa del Bachillerato Internacional en este centro son obtener una calificación media en 4º de ESO igual o superior a 8, y no menos de un 7 en la calificación final de Matemáticas. Es por ello que los estudiantes de la muestra son alumnos de capacidad media-alta.

² En el Programa del Diploma se han de cursar tres asignaturas a Nivel Medio (NM), con una carga lectiva equivalente a un curso escolar; o bien a Nivel Superior (NS), con una carga lectiva equivalente a dos cursos escolares.

itinerarios científicos cursan además la asignatura de Física, donde se imparten temas relacionados con los términos que se analizan en la presente investigación.

Otro hecho que merece la pena reseñar es que todos los estudiantes de la muestra habían obtenido instrucción previa sobre nociones básicas de Trigonometría, cuando en 4º de ESO cursaron (todos ellos) Matemáticas opción B. En el momento de aplicación del cuestionario habían pasado cinco semanas desde que se terminó la explicación del tema de Trigonometría. Se dedicaron un total de 12 sesiones de clase al desarrollo del tema, al trabajo de los alumnos y al examen correspondiente.

El libro de texto empleado por los alumnos está editado por Pearson, y cubre ampliamente el temario de Bachillerato Internacional. La referencia es la siguiente: Wazir I. and Garry T. (2012). *Mathematics Higher Level*. Harlow: Pearson Baccalaureate.

El autor de la investigación, en la fecha de aplicación del cuestionario, es el responsable del Área de Matemáticas del centro en cuestión, y desempeña su labor docente impartiendo la asignatura de Matemáticas a los alumnos del doble programa de Bachillerato. Previamente a la implementación del cuestionario, el investigador mantuvo una entrevista con el Jefe de Estudios de Bachillerato del centro, a fin de explicar los detalles de la investigación y recibir autorización para la aplicación del cuestionario a los alumnos seleccionados.

3.3 Análisis de ejercicios y actividades del libro de texto que emplean los alumnos

A fin de identificar los diferentes contextos relativos a un determinado concepto o estructura, se ha llevado a cabo un análisis de los ejemplos, ejercicios y problemas de los temas de trigonometría en el libro de texto que emplean en sus clases los alumnos de la muestra. Las actividades analizadas se encuentran en Wazir y Garry (2012) en las unidades 7 “Trigonometric functions and equations” y 8 “Triangle trigonometry”. Para el análisis, se pretende determinar en cada actividad la presencia explícita de las nociones de periodo y frecuencia objeto de nuestro estudio, así como identificar los términos clave y las situaciones a las que esas actividades hacen referencia.

Adicionalmente a estas categorías, se tienen en cuenta en las actividades analizadas las competencias que intervienen en la realización de una tarea, tal y como se emplean en el informe PISA: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, planear estrategias, uso de símbolos y lenguaje formal y técnico, y uso de herramientas matemáticas (OECD, 2013).

Para la clasificación y categorización de las actividades hemos elaborado unas tablas, que tienen en cuenta todas las categorías indicadas.

Con este análisis y clasificación pretendemos observar hasta qué punto las respuestas dadas por los estudiantes corresponden a los contextos en los que se hace más hincapié en su libro de texto de esta asignatura de Bachillerato Internacional, atendiendo también al grado de complejidad y al tipo de tareas que especifica el texto. Al realizar un análisis semántico de esas respuestas podremos establecer paralelismos entre lo que expresa el alumno acerca de los conceptos tratados y la forma y la complejidad con que se presentan en su libro de texto, consiguiendo además mayor objetividad en el análisis semántico de las respuestas.

3.4 Elaboración del instrumento de recogida de información. Aplicación

El instrumento de recogida de información fue un cuestionario de respuesta abierta, que se elaboró específicamente para esta investigación. Las fases que se siguieron en la confección del cuestionario fueron las siguientes:

Fase I: determinación del tipo de cuestionario

Los objetivos que se plantearon al principio de la investigación sugerían que, en este caso, el tipo de cuestionario que se emplearía a la hora de recoger la información había que diseñarlo de manera que el posterior análisis de las producciones de los alumnos no diera pie a clasificar estas respuestas únicamente en “correctas” e “incorrectas”. Al tratarse de un estudio cuyo objetivo implica el análisis de la forma en que los alumnos emplean los conceptos de periodo y de frecuencia y cómo expresan su significado de forma verbal, no parece conveniente limitarse a un cuestionario consistente en actividades de cálculo o ejercicios.

Por este motivo, y a fin de poder establecer categorías en las respuestas de los alumnos teniendo en cuenta los términos empleados por ellos, el cuestionario habría que diseñarlo de forma que el posterior análisis fuera de tipo semántico. Los cuestionarios semánticos indagan propiedades de los conceptos que identifican los sujetos, representaciones que hacen de los mismos y los términos y argumentos que emplean para darles sentido (Vander Blok, 2014). En general, las herramientas de estimulación semántica (“semantic elicitation”, también traducido por “elicitación semántica”) proporcionan fuertes evidencias sobre el entendimiento de la semántica de un concepto. Entre estas herramientas de estimulación están las entrevistas, las grabaciones, las narraciones, las traducciones, o los cuestionarios de opinión (“judgement questions”).

Por otra parte, se veía la necesidad de procurar que las respuestas de los alumnos pudieran darse utilizando algún sistema de representación adicional al verbal escrito, de modo que también se pensó en que los alumnos pudieran complementar las respuestas escritas con dibujos y gráficos. Otra de las características que nos ayudó a decidir el tipo de cuestionario fue el objetivo. Para los cuestionarios semánticos cuyo objetivo es la recogida exhaustiva de datos individuales, ya sea de forma oral o escrita, el número de participantes debe ser reducido (Vander Blok, 2014).

Por lo tanto, se decidió emplear un cuestionario de este tipo, de respuesta abierta, breve, y con preguntas en las que se provocara una explicación por parte del alumno, bien de conceptos clave relacionados con los términos de periodo y de frecuencia, o bien de situaciones personales.

Fase II: revisión de la literatura científica y de los libros de texto.

Con el fin de determinar tanto la forma de plantear las cuestiones del instrumento de recogida de datos como en qué conceptos había que incidir más, se procedió a una revisión de estudios empíricos y libros de texto para seleccionar una serie de actividades que pudieran ser la base en la elaboración de nuestro cuestionario.

Así, se consultaron los siguientes estudios empíricos: Martín (2013), Koyunkaya (2016); Kendal y Stacey (1998); Fernández-Plaza (2012); Shama (1998); Weber (2005); Weber, Knott y Evitts (2008).

El libro de texto que se ha consultado es el mencionado anteriormente: Wazir y Garry (2012). Además, se consultó otro libro de texto de similares características, pero perteneciente a otra editorial (Cirrito, 2007).

A partir de las actividades que consideramos que podrían servir como base a las preguntas de nuestro cuestionario y de las investigaciones consultadas, elaboramos una lista de posibles preguntas, clasificándolas en diversos apartados:

- Preguntas simples, del tipo “¿cómo explicarías...?”, “¿podrías dibujar...?”, “da un ejemplo de...”.
- Preguntas de elección múltiple, con justificación escrita de la respuesta elegida.
- Preguntas con escalas de Likert, con justificación escrita de la respuesta elegida.
- Redacciones breves.
- Realizar clasificaciones de dibujos, expresiones simbólicas, ejemplos cotidianos, etc., justificando la clasificación realizada.

Paralelamente a esto, y teniendo en cuenta la importancia del contexto en los conceptos que se quería preguntar, clasificamos las posibles preguntas según diversas situaciones que podrían aparecer en ellas, ya sea de forma implícita o explícita: astronómicas, cotidianas, horarias, términos relacionados...

Fase III: construcción del cuestionario final

En esta última fase, de todas las posibles preguntas que elaboramos consideramos conveniente elegir cinco de ellas para esta investigación, que fueran sencillas para los alumnos y que dieran pie a que pudieran expresar con sus palabras lo que se les preguntaba. Los motivos de la elección de cada pregunta del cuestionario se describen brevemente a continuación:

Pregunta 1: se pretende que los alumnos expliquen mediante registro verbal escrito lo que entienden por el concepto de periodo. El objetivo es comprobar cuáles son las categorías y contextos que emplean con mayor frecuencia al definir este término, y si éstas coinciden con las categorías y contextos presentes en las actividades de los libros de texto. Además, se les dio la posibilidad de hacer un dibujo que complementara su explicación (registro gráfico).

Pregunta 2: similar a la anterior. Además de lo que se pretendía en la Pregunta 1, incluimos esta pregunta para comprobar qué semejanzas y relaciones establecían los alumnos entre los conceptos de periodo y frecuencia.

Pregunta 3: se les pide ejemplos de situaciones cotidianas “cíclicas” o “periódicas” (sin emplear estos términos) a fin de comprobar la forma en que los alumnos hacen uso del significado de los conceptos aprendidos.

Pregunta 4: se vuelve de nuevo a una cuestión puramente matemática, a fin de poder analizar posibles dificultades al cambiar de sistema de representación gráfico a verbal, al tener que explicar con sus palabras un dibujo que elaboran ellos mismos.

Pregunta 5: incluimos esta pregunta para comprobar hasta qué punto la adquisición del concepto lleva a los alumnos a ser capaces de extrapolarlo y relacionarlo con otras áreas de las matemáticas.

En el apartado correspondiente se detalla el análisis de las respuestas de los 44 alumnos a las tres primeras preguntas. Aunque las respuestas a la cuarta y la quinta pregunta dan información interesante, no es posible incluir el análisis de esos resultados en esta memoria por cuestiones de extensión.

La aplicación final del cuestionario a los alumnos de la muestra se llevó a cabo el jueves 17 de marzo de 2016 en los dos grupos de alumnos. El investigador fue el encargado de repartirlo a los alumnos, previa explicación del propósito del cuestionario y de hacer las aclaraciones pertinentes para cada una de las cinco preguntas, animando a los alumnos a que sus respuestas fueran lo más claras posibles. En cada uno de los dos grupos se dedicó un total de 40 minutos a rellenar el cuestionario, sin que se produjeran incidencias reseñables. Algunos alumnos manifestaron algunas dudas mientras rellenaban el cuestionario, dudas que fueron resueltas por el investigador de manera que la información que se facilitara al alumno fuera la mínima indispensable, a fin de reducir la posible influencia que la respuesta del investigador pudiera tener en lo que escribiera el alumno.

3.5 Tipo de análisis que se ha realizado

Tanto en el análisis de las actividades del libro de texto como en las producciones de los alumnos se ha seguido un modelo de análisis cualitativo. En todos los casos se ha procedido a realizar una codificación de los enunciados de las actividades y de las respuestas de los alumnos. Para el análisis, se parte de la base propuesta por McMillan y Schumacher (2005), realizando un proceso inductivo en el cual las categorías, relaciones y modelos aparecen a partir de los datos. Para procesar y analizar la información haremos un análisis de contenido, en el cual, como señala Rico (2013) descompondremos los enunciados de las actividades y las respuestas de los alumnos en sus unidades más simples, sintetizando así de manera sistemática una serie de categorías y temas en cada unidad analizada.

De esta manera, partiendo de estas bases, en el caso de las actividades del libro de texto, se han considerado los siguientes puntos:

- Tipología: ejercicio o problema.
- Presencia explícita de los términos objeto de estudio (periodo y frecuencia).
- Énfasis: términos clave y conceptos que tienen especial relevancia en ese enunciado en particular.
- Situaciones: distinguimos cuatro situaciones diferentes, de acuerdo a los estándares marcados para las pruebas PISA en OECD (2013): personales, profesionales, sociales y científicas.
- Número de competencias que ha de poner en práctica el alumno: de nuevo, se siguen las pautas del marco teórico de las pruebas PISA.

Por su parte, en las producciones de los alumnos hemos considerado y codificado las siguientes cuestiones en cada una de las preguntas analizadas:

- Preguntas 1 y 2:
 - Respuesta correcta o incorrecta: más que para descartar una respuesta si es incorrecta, el objetivo es estudiar qué parte del significado que expresa el alumno en su respuesta le puede llevar a confundir o equivocar términos.
 - Énfasis: se han buscado los términos clave en los que incide el alumno para articular su respuesta.

- Pregunta 3: situaciones, haciendo una codificación análoga al ítem correspondiente del análisis de las actividades de los libros de texto.

En una primera fase, se analizará individualmente cada actividad propuesta en el libro de texto, para después hacer un análisis conjunto que permita establecer perfiles de actividades. De forma análoga se procederá con el análisis de las producciones de los alumnos: se hará pregunta a pregunta en primera instancia, para después hacer un análisis conjunto de las tres respuestas a fin de determinar posibles relaciones entre ellas, además de poder determinar perfiles de alumnos en función de sus respuestas. Estos perfiles se determinarán mediante un análisis clúster jerárquico. Este análisis ofrece una manera de buscar grupos homogéneos dentro de un conjunto de individuos, y tiene en cuenta diversas cuestiones tales como la densidad de los datos dentro de cada grupo como la variabilidad de los mismos, así como la forma y la separación de los grupos (Fernández, 1991).

Por último, se procederá a analizar la posible relación existente entre los significados puestos de manifiesto por los estudiantes y las categorías en las que se han clasificado las actividades presentes en el libro de texto.

3.6 Valoración de la investigación

Ya se ha señalado anteriormente cómo las cuestiones tratadas en esta investigación a día de hoy apenas tienen eco en la literatura científica. Es por ello que consideramos la pertinencia de esta investigación, que podría servir para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Del análisis de los datos obtenidos se podrán extraer sugerencias que pueden ser de utilidad tanto para el profesor que explique la materia como para el alumno, además de poder servir de base para futuras investigaciones.

Acerca de la validez, tal y como señalan León y Montero (1997), distinguimos entre validez interna y externa. La validez interna se ha mantenido a través de las numerosas entrevistas entre el equipo investigador a la hora de diseñar el análisis de las actividades del libro de texto y, especialmente, en el diseño de los ítems del cuestionario. Además, estas entrevistas se han mantenido en todo el proceso de análisis

de datos, a fin de discutir los resultados obtenidos. Por su parte, la validez externa queda cubierta en la revisión de antecedentes y estudios previos.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS

En la sección anterior se ha explicado la forma en que se procederá al análisis de los datos obtenidos, en sus dos vertientes: actividades del libro de texto y respuestas de los alumnos al cuestionario elaborado.

En el caso de las respuestas obtenidas en el instrumento de recogida de datos, se procedió a identificar mediante un código todos los cuestionarios recogidos. Este código consta de 3 caracteres alfanuméricos: el primero se refiere al grupo del alumno (A o B), los dos siguientes se utilizan para identificar al alumno mediante un número de dos dígitos (del 01 al 24 para el grupo A, y del 01 al 20 para el grupo B). A las cinco preguntas del cuestionario se adjuntó, a modo de portada, una hoja en la que se pedía al alumno que consignara su nombre, edad y grado de interés por las matemáticas, de forma que pueda ser identificado por si hiciera falta una posterior aclaración de alguna de sus respuestas.

Los 44 cuestionarios obtenidos fueron escaneados para facilitar el tratamiento de la información. La hoja de portada con los datos personales no fue escaneada. Los originales de los cuestionarios fueron almacenados convenientemente, por si hiciera falta hacer uso de ellos posteriormente. Además, se procedió al volcado de todas las respuestas en registro verbal en una hoja de cálculo, transcribiendo literalmente lo producido por cada estudiante. En caso de que el estudiante proporcionara una respuesta en registro gráfico, se indicaba en la hoja de cálculo que existía ese tipo de respuesta.

Tras el volcado y ordenación de los datos de las dos fuentes se procedió a hacer el análisis tanto de los ítems 1, 2 y 3 del cuestionario como de las actividades del libro de texto. El método de análisis empleado en cada caso se detallará en el apartado correspondiente.

Por otra parte, la información de las actividades del libro de texto se recogió en una tabla, dentro de una hoja de cálculo. Para identificar cada actividad se utilizó un código alfanumérico de 5 caracteres: el primer carácter se refería a la unidad en la que se encontraba esa actividad, el siguiente a la sección donde se encontraba, los dos siguientes al número de actividad y el último, si era el caso, para el apartado de la actividad en cuestión.

El análisis realizado es de tipo cualitativo, y se detalla en los siguientes apartados de este informe. Tras presentar las preguntas que contenía el cuestionario, detallaremos los resultados obtenidos de los ítems 1, 2 y 3 del cuestionario, de forma separada. Posteriormente comentaremos los resultados obtenidos al hacer el análisis conjunto de estos tres ítems. Tras esto, se expondrán los resultados más relevantes de las actividades del libro de texto, para, finalmente, proceder a un análisis conjunto de las producciones de los estudiantes con respecto a lo analizado en los libros de texto.

4.1 Preguntas del cuestionario

Las cinco preguntas del cuestionario son las siguientes:

Pregunta 1: “Utiliza tus palabras para explicar qué entiendes por PERIODO. Si crees que es necesario puedes realizar un dibujo.”

Pregunta 2: “Utiliza tus palabras para explicar qué entiendes por FRECUENCIA. Si crees que es necesario puedes realizar un dibujo.”

Pregunta 3: “Da algún ejemplo de situaciones cotidianas que se repitan una y otra vez (puedes usar ejemplos de otras asignaturas).”

Pregunta 4: “Dibuja una función con elementos que se repitan una y otra vez. Descríbela.”

Pregunta 5: “¿Qué elementos de las matemáticas relacionarías con *infinitas soluciones*?”

Como ya se ha comentado, el análisis se limitó a las tres primeras preguntas del cuestionario, pues se consideró que eran las más adecuadas para cubrir los objetivos propuestos en esta investigación.

Las respuestas a estas preguntas se volcaron en una hoja de cálculo para facilitar su tratamiento y análisis, utilizando una fila para cada cuestionario, y con los siguientes encabezados para las columnas:

- Columna 1: identificación del alumno.
- Columna 2: transcripción de la respuesta a la primera pregunta.
- Columna 3: ¿incluye un dibujo?
- Columna 4: transcripción de la respuesta a la segunda pregunta.
- Columna 5: ¿incluye un dibujo?
- Columna 6: transcripción de la respuesta a la tercera pregunta.
- Columna 3: transcripción de la respuesta a la cuarta pregunta.
- Columna 4: transcripción de la respuesta a la quinta pregunta.

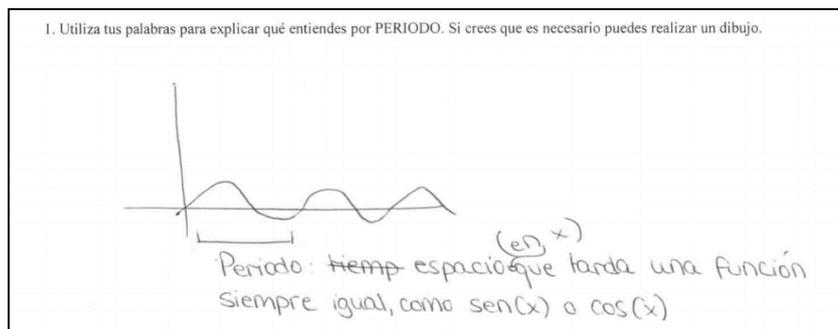
4.2 Análisis de las respuestas a la pregunta 1 del cuestionario

De la tabla general, se copiaron en una nueva hoja de cálculo las columnas 1, 2 y 3. El análisis de las respuestas comenzó diferenciando las respuestas correctas de las incorrectas, en cuyo caso incluíamos una explicación de por qué era incorrecta. Consideramos como correcta una respuesta si se adecuaba, aunque no fuera literalmente, a la definición de periodo establecida tras el análisis conceptual de este término. Adicionalmente, se identificaron dos términos clave, en función de en qué conceptos hacía énfasis el alumno en su respuesta.

Se observó que el 39 alumnos (el 89%) daban una respuesta considerada como correcta, mientras que 5 alumnos (el 11% restante) daban una respuesta incorrecta. De los alumnos que contestaron de forma errónea, el error de tres de ellos (alumnos B01, B03 y B17) consistió en confundir este término con “frecuencia”. El caso del alumno B16 es digno de mención: a pesar de dar una definición incorrecta en registro verbal, sí que acompañó su definición con un dibujo adecuado:

Imagen 4.1

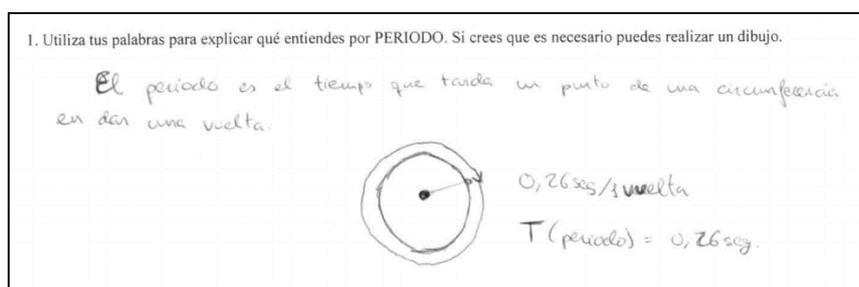
Respuesta del alumno B16 a la pregunta 1 del cuestionario



En la búsqueda de los términos en los que los alumnos hicieron mayor énfasis en sus definiciones, se encontraron con una frecuencia significativa³ los términos “tiempo” (presente en el 84% de las respuestas), “repetición” (presente en el 64%), “circunferencia” (presente en el 14% de las respuestas) y “distancia” (también presente en el 14% de las respuestas). En este primer análisis de frecuencias observamos que la gran mayoría de los alumnos asocian el concepto de periodo con un suceso temporal, lo que sugiere una conexión con la acepción física del término. También destaca con un alto porcentaje la presencia del término “repetición”, presente tanto en la acepción matemática como en la acepción física de periodo. En casi todos los alumnos que se sirven de la “circunferencia” para explicar su concepto de periodo encontramos siempre que el dibujo que acompaña a su explicación es precisamente de una circunferencia. Sirva como ejemplo la respuesta del alumno A23:

Imagen 4.2

Respuesta del alumno A23 a la pregunta 1 del cuestionario



Para cada respuesta se anotaron hasta dos términos clave por alumno. Los porcentajes de aparición de cada pareja de términos (o de términos singulares, si el alumno sólo hacía énfasis en uno) se recogen en la tabla 4.1.

³ Situamos el umbral de relevancia por encima de una frecuencia del 5% (Coleman y Unrau, 2005)

Tabla 4.1

Porcentajes de aparición términos clave (individuales o emparejados) en las respuestas a la pregunta 1

Término(s) clave	Porcentaje de aparición
Tiempo – Repetición	50
Tiempo – Circunferencia	13
Tiempo	11
Repetición	9
Tiempo – Distancia	7
Repetición – Distancia	5
Distancia	5

Como se observa en la tabla, la dupla “tiempo – repetición” es la utilizada mayoritariamente por los alumnos (la mitad de ellos se refieren a estos dos términos en sus definiciones), lo que, una vez más, sugiere que la interpretación mayoritaria del concepto es la física.

Los alumnos que emplean la pareja “tiempo – circunferencia” restringen en su definición la noción de periodo a lo que tarda un objeto en dar una vuelta completa, en clara asociación con la velocidad angular; algo similar ocurre con los alumnos que enfatizan los términos “tiempo” y “distancia”: se da una idea del periodo como un concepto asociado a la velocidad (velocidad lineal en este caso).

Por otro lado, observando los casos en los que el alumno sólo ofrece un término clave en su definición, nos encontramos en primer lugar con el 11% que se apoya exclusivamente en el término “tiempo”, encontrando definiciones como “el periodo es el tiempo que uno o algo tarda en hacer un proceso completo” (alumno A04), o bien “por periodo entiendo el tiempo que transcurre desde que empieza una acción hasta que acaba” (alumno A24). Algunos alumnos llegan incluso a restringir totalmente la idea de periodo a un intervalo de tiempo, indicando que ha de medirse en segundos, como por ejemplo el Alumno A18: “el periodo es el tiempo que tarda una función trigonométrica en repetirse. El periodo se mide en segundos”. Esta idea de periodo como tiempo transcurrido puede presentar dificultades para comprender el carácter de ciclo que este término tiene en Matemáticas, tal y como se desprende de definiciones de los alumnos A04 y A24, quienes omiten cualquier referencia al carácter cíclico y repetitivo que tiene este concepto.

En cuanto a los alumnos que enfatizan únicamente la “repetición” en su definición, se observa que definen este término de forma más abstracta, más próxima a nuestra definición de referencia. Destacamos en este sentido la definición del alumno A13: “entiendo por periodo como el intervalo en el que se repite la función en el eje X”. En cualquier caso, sólo son 4 alumnos los que consiguen dar esta definición sin una referencia a una magnitud determinada.

Para el resto de las parejas o alumnos que hacen énfasis en un solo término, consideramos que, al tener una frecuencia tan baja, su análisis no ofrece resultados relevantes.

4.3 Análisis de las respuestas a la pregunta 2 del cuestionario

Para el análisis de las respuestas a la segunda pregunta del cuestionario se procedió de igual forma que con las respuestas a la pregunta anterior. En esta ocasión, encontramos que el número de respuestas incorrectas era mayor: una cuarta parte de los alumnos no dio una definición que se ajustaba a la que propusimos a raíz del análisis conceptual del término frecuencia; el 75% restante de los alumnos sí que consiguió dar una definición adecuada. De los 11 alumnos que dieron una respuesta incorrecta o incompleta, se observa en 7 de ellos que, al explicar con sus palabras el término “frecuencia”, dan una definición de “periodo”. Así, encontramos definiciones como “la frecuencia es lo que tarda en repetirse una función, ya sea tiempo o cualquier otra variable” (Alumno A11), o “el tiempo que tarda una función en hacer lo mismo que hacía antes” (Alumno B16).

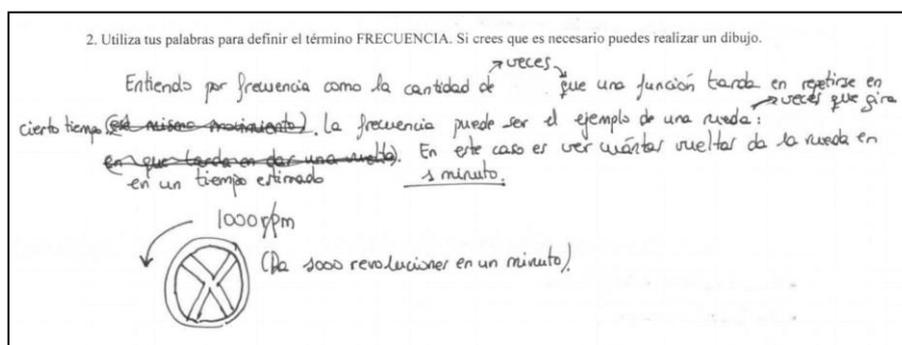
Son 4 los alumnos que responden de forma incorrecta a las dos primeras cuestiones: es el caso de los alumnos A11, B01, B17 y B16 (aunque recordemos que este alumno dio una respuesta incorrecta al expresarla verbalmente, pero correcta en sistema gráfico). Resulta llamativo que los tres primeros alumnos de este grupo intercambien el significado de los conceptos “periodo” y “frecuencia” en sus descripciones.

Observando la frecuencia de términos en los que se hace mayor énfasis, en esta ocasión encontramos una mayor variedad, con 6 términos clave: tiempo (el 75% de los alumnos enfatiza este término), repetición (con una frecuencia del 57%), circunferencia (11%), distancia (7%), onda (7%) y velocidad (11%). Habíamos tomado como

referencia en nuestro análisis conceptual la primera acepción de Oxford (2014): “el ritmo al que algo ocurre en un periodo de tiempo particular o en una muestra dada”. Contrastando estas frecuencias con la definición, cabría esperar haber encontrado un mayor número de referencias explícitas a los términos “velocidad” o “ritmo”, pero no es así. Aunque la cuarta parte de los alumnos se apoya en la palabra “tiempo” para su definición, la significativa presencia del término “repetición” sugiere que la idea de frecuencia que tienen los alumnos de la muestra está asociada principalmente a un contexto circular, y así lo expresan algunos de ellos en los dibujos con los que acompañan su respuesta. Veamos como ejemplo de esta afirmación la producción del alumno A13:

Imagen 4.3

Respuesta del alumno A13 a la pregunta 2 del cuestionario



Algo similar ocurre con los alumnos que se apoyan en el concepto de “onda” para su descripción: “La frecuencia es la cantidad de oscilaciones por unidad. En el caso de una rueda es el número de vueltas que hace en un segundo” (Alumno A01); “La frecuencia es el número de ondas que se suceden en periodo de tiempo” (Alumno A09).

Al hacer los emparejamientos de términos en los que los alumnos hacen énfasis en sus definiciones obtenemos la tabla 4.2. Al igual que en el caso anterior, se han considerado tanto los casos en los que el alumno, en su definición, sólo hace uso de un término clave, o bien emplea dos diferentes. Además, en este caso resultó que 2 de los alumnos dieron su respuesta únicamente en registro gráfico, por lo que no se pudieron extraer términos clave en sus respuestas.

Tabla 4.2

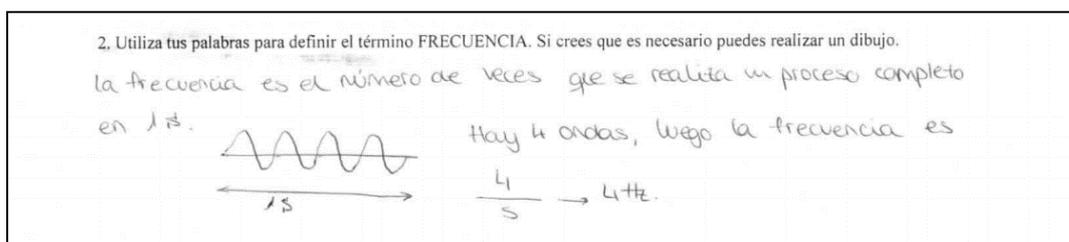
Porcentajes de aparición términos clave (individuales o emparejados) en las respuestas a la pregunta 2

Término(s) clave	Porcentaje de aparición
Tiempo – Repetición	43
Tiempo – Circunferencia	11
Tiempo	9
Tiempo – Onda	7
Repetición	7
Repetición – Velocidad	7
Tiempo – Distancia	5
Velocidad	5
Distancia	2
(Sin términos clave)	4

Una vez más observamos cómo la dupla “tiempo – repetición” es la más empleada por los alumnos en sus descripciones, aunque en este caso con un porcentaje ligeramente menor (43% frente al 50% anterior). Con el uso simultáneo de estos dos términos varios alumnos en sus definiciones sugieren una comprensión de la frecuencia como de un suceso cíclico, de un hecho que vuelve a su estadio inicial tras un lapso de tiempo. Así, el Alumno A06 afirma que “entiendo por frecuencia la cantidad de veces que se repite un hecho o situación en un determinado rango de tiempo”, afirmación similar a la del Alumno A24: “por frecuencia entiendo el número de veces que se repite una acción en un tiempo. Por ejemplo las vueltas que da un tiovivo en un minuto”. La concepción cíclica de la frecuencia que se extrae de estas afirmaciones no es únicamente circular, como se expresa en el anterior ejemplo, sino que también hay alumnos que acompañan sus palabras de un dibujo con el que dan a entender que ese comportamiento cíclico puede ser lineal:

Imagen 4.4

Respuesta del alumno A04 a la pregunta 2 del cuestionario



Algo similar encontramos en las descripciones de los alumnos que emplean los términos “repetición” y “velocidad”: dan a entender que su concepto de frecuencia está relacionado con el ritmo al que se repiten los ciclos de una función, pero sin especificar si esos ciclos son de naturaleza circular o lineal. En esta línea destacamos, por ejemplo, las palabras del alumno A12, quien escribe que la frecuencia “es la rapidez con la que se repite un término en una función”.

Esa interpretación cíclica de la frecuencia también se encuentra en los alumnos que enfatizan los términos “tiempo” y “circunferencia”, aunque, en esta ocasión, sí que su sentido queda restringido a una velocidad angular. Así se expresa, por ejemplo, el Alumno B06, cuando afirma que “la frecuencia (f) es la forma de medir la cantidad de vueltas que es capaz de dar un objeto a una circunferencia en un segundo”, o el Alumno B11, quien señala que “en una circunferencia, es el número de vueltas que se pueden dar o se dan en un periodo de tiempo de 1 segundo”. Igual conclusión extraemos del 7% de respuestas que incluyen los términos “tiempo” y “onda”. En este sentido podemos poner como ejemplo la definición del Alumno A09: “La frecuencia es el número de ondas que se suceden en periodo de tiempo”.

Nos fijamos ahora en el 23% de las respuestas en las que sólo hay un término de énfasis, aunque analizaremos sólo las producciones en las que se enfatiza el término “tiempo” por un lado y “repetición” por otro. No lo haremos con el resto (“distancia” y “velocidad”) por sus bajos porcentajes.

Son cuatro los alumnos que usan únicamente el término “tiempo” en su definición de frecuencia. En estos casos se observa una concepción de este término que se aleja de la vista anteriormente de velocidad y se aproxima más a la noción de en cuanto a densidad de ocurrencia de un suceso. Es muy ilustrativo en este sentido el ejemplo con el que el Alumno A14 acompaña a su definición: “la frecuencia son la cantidad de veces que se da un suceso en la unidad de tiempo (1 s). Por ejemplo cuántos coches pasan durante un segundo por un punto concreto de una carretera”.

Acerca de las producciones en las que sólo se enfatiza la “repetición”, se da que en todos estos casos las definiciones son incorrectas en el sentido que hemos dado al término estudiado. Se hace una interpretación de frecuencia únicamente como lo que sucede muchas veces, como “lo frecuente”, “lo que pasa a menudo”, despojándolo de su sentido matemático o físico. Así se expresa el alumno B17: “lo que se repite de forma

habitual y con regularidad”. En cualquier caso, como se ve en esta definición de este alumno cuando habla de regularidad, sigue de fondo la idea de suceso cíclico como constructo inherente a la frecuencia.

4.4 Análisis de las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario

Para el análisis de esta pregunta se procedió de forma diferente con respecto a las dos anteriores. El objetivo de este ítem era proporcionar al alumno una oportunidad de ejemplificar y contextualizar las nociones definidas en las dos preguntas anteriores. Con esta finalidad, se trasladaron las respuestas transcritas a una nueva hoja de cálculo, para clasificar los ejemplos que proporcionaron los alumnos en las cuatro situaciones a las que hace referencia OEDC (2013) para las pruebas PISA: personales, profesionales, sociales y científicas. Para ello, se volvieron a transcribir en la hoja de cálculo las respuestas de este ítem, pero diferenciando en cuatro columnas diferentes, según la situación a la que se refiriera cada ejemplo propuesto por el alumno.

En la tabla 4.3 recogemos los porcentajes de situaciones que se extraen de los ejemplos propuestos por los alumnos. No se ha tenido en cuenta en su elaboración el número de ejemplos de una misma situación: hemos considerado que, aunque se pusiera un solo ejemplo para una situación y múltiples ejemplos de otra, el alumno era capaz de relacionar los conceptos anteriores con diversas situaciones y contextos.

Tabla 4.3

Porcentajes de alumnos que ofrecen ejemplos de cada situación

Personal	Profesional	Social	Científica
70	32	21	27

Como se puede observar, es significativamente superior la proporción de ejemplos que responden a situaciones personales. Y lo es también por la cantidad de ejemplos que pusieron los alumnos que consideramos clasificar bajo esa situación: prácticamente todos los que pusieron ejemplos de situaciones personales en su respuesta ofrecieron un buen número de ellos. En gran parte de esos ejemplos se reflejan actividades repetitivas en el día a día de los alumnos: levantarse cada mañana a la misma hora, hábitos de uso del teléfono móvil, las rutinas en los desayunos... Es llamativa la abundancia de ejemplos que se refieren a acciones que se realizan a la

misma hora cada día, o a lo que se tardan en realizar, lo que nos sugiere una concepción circular, de seguimiento de un patrón cíclico y regular. Estos ejemplos nos llevan a pensar en una conexión muy cercana con la idea que expresaban acerca de lo que significaba para ellos el periodo.

A esta última afirmación también responden los ejemplos categorizados bajo las situaciones profesionales. Prácticamente todos esos ejemplos hacen referencia a actividades que se repiten dentro de la jornada escolar: horarios de clase que se repiten diariamente, frecuencia de exámenes, etc.

La situación que menos ejemplos recoge es la social. Aquí encontramos mayor disparidad en cuanto a lo mencionado anteriormente: si bien hay algunos ejemplos en los que está presente una regularidad periódica (“rezar el Ángelus cada día a las 12”, escribe el Alumno A24), la mayoría de ellos no responden a patrones repetitivos, sino a situaciones que se dan a menudo. Encontramos aquí una conexión con lo descrito al final del análisis de la pregunta anterior: concepción de frecuencia como “lo frecuente”, en el sentido de que ocurre muchas veces.

En los ejemplos clasificados como situaciones científicas encontramos de nuevo esa doble vertiente que encontramos en algunas definiciones de frecuencia. Hay ejemplos que sugieren que el alumno interpreta como situaciones que se repiten una y otra vez aquellas que son circulares: “otro ejemplo es la noche, es decir, el giro de la tierra alrededor del sol y el giro de la luna alrededor de la tierra” (Alumno A10), “el movimiento de la tierra” (Alumno B05), “las ondas en el agua cuando cae algo dentro” (Alumno B06), etc., y también encontramos ejemplos que responden a una concepción más lineal: “Los semáforos cambian de color una y otra vez al mismo ritmo siempre” (Alumno A16), “3 meses de verano cada año” (Alumno B06).

Al considerar el número diferente de situaciones presentes en los ejemplos de un único alumno, encontramos que 27 de los 44 alumnos (algo más del 60% de ellos) ofrecieron únicamente ejemplos en una situación, 12 alumnos (el 27%) propusieron ejemplos que correspondían a dos situaciones diferentes, mientras que tan solo 4 alumnos fueron capaces de escribir ejemplos de tres situaciones diferentes, y únicamente un alumno puso ejemplos que se podían categorizar en las cuatro situaciones propuestas. Se observa de esta manera una posible dificultad por parte de

muchos alumnos para relacionar los conceptos que estamos estudiando con una gama amplia de situaciones.

4.5 Análisis conjunto de las tres preguntas

Tras haber analizado separadamente las producciones de los alumnos en las tres primeras preguntas del cuestionario, procedemos a un análisis conjunto de ellas. Es cierto que ya hemos indicado alguna posible relación entre respuestas de diferentes ítems, pero lo que se pretende con este análisis conjunto es establecer diferentes perfiles de alumnos en función de las respuestas dadas.

Para la elaboración de esos perfiles de alumnos utilizaremos el método de análisis conocido como clúster jerárquico. Consiste en hacer un agrupamiento de individuos de manera divisiva, partiendo del conglomerado de todos ellos, para subdividirlos progresivamente en grupos más pequeños. El método jerárquico de agrupación de datos resulta el más adecuado cuando éstos son de tipo cualitativo (Fernández, 1991). Estos subgrupos se van haciendo a diferentes niveles según la tipología de las respuestas que han dado los alumnos en las tres preguntas que analizamos en nuestro cuestionario.

El análisis clúster se llevó a cabo con el software informático SPSS, versión 24. El método de análisis llevado a cabo fue clúster jerárquico, midiendo enlace promedio dentro de los grupos. Para las respuestas de cada alumno se codificó la información recogida en un vector de tres coordenadas, una por cada pregunta del cuestionario. La codificación de las respuestas se hizo atendiendo a los siguientes criterios:

- Pregunta 1: codificación numérica de hasta tres dígitos:
 - Primer dígito: 0 si la respuesta es correcta, 1 si es incorrecta.
 - Segundo y tercer dígitos: se codifican con un número entre 0 y 4 cada uno de los términos en los que el alumno hace énfasis (0 si no lo hace, 1 para el término “tiempo”, 2 para “repetición”, 3 para “circunferencia” y 4 para “distancia”), y se ordenan de menor a mayor.

Por ejemplo, si el alumno responde con una definición correcta y los términos en los que hace énfasis son “circunferencia” y “tiempo”, se le asigna el valor 013.

- Pregunta 2: codificación numérica de hasta tres dígitos:
 - Primer dígito: 0 si la respuesta es correcta, 1 si es incorrecta.
 - Segundo y tercer dígitos: se codifican con un número entre 0 y 6 cada uno de los términos en los que el alumno hace énfasis (0 si no hace, 1 para el término “tiempo”, 2 para “repetición”, 3 para “circunferencia”, 4 para “distancia”, 5 para “onda” y 6 para “velocidad”), y se ordenan de menor a mayor.

Por ejemplo, si el alumno responde con una definición correcta y los términos en los que hace énfasis son “onda” y “repetición”, se le asigna el valor 125.

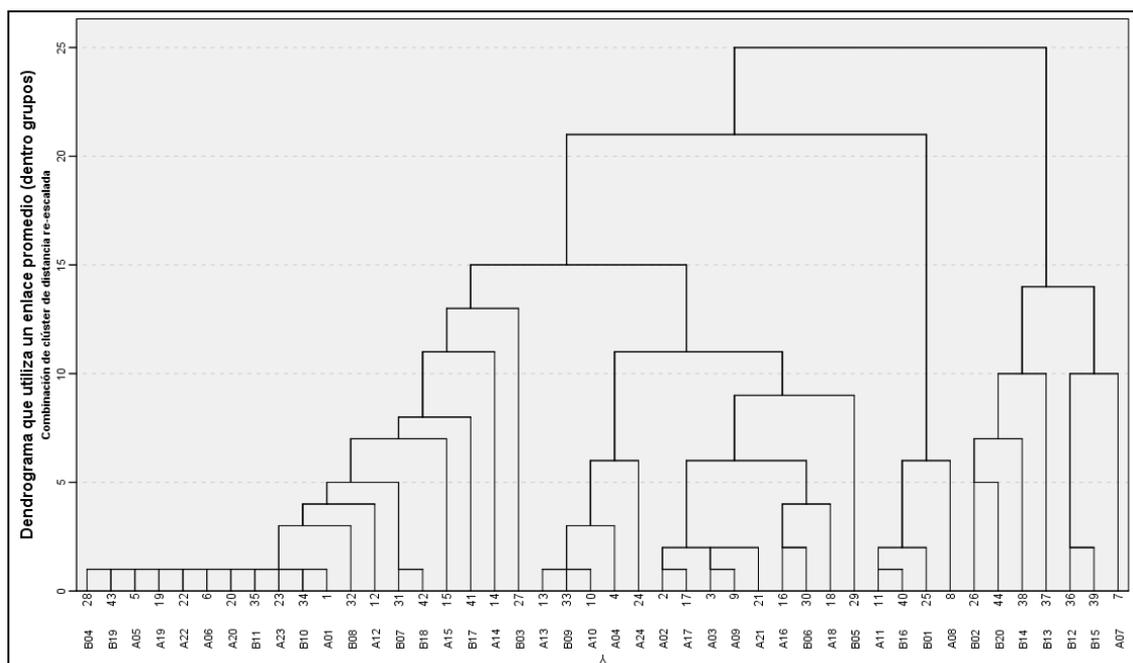
- Pregunta 3: codificación numérica de un dígito entre 0 y 4, en función de las situaciones distintas a las que pertenecen los ejemplos señalados.

Por ejemplo, si un alumno da ejemplos de tres situaciones distintas, se le asigna el valor 3. De nuevo, no se considera aquí la cantidad de ejemplos ofrecidos pertenecientes a una misma situación.

Como resultado del análisis clúster jerárquico obtuvimos el dendrograma del Gráfico 4.1:

Gráfico 4.1

Dendrograma del análisis clúster jerárquico

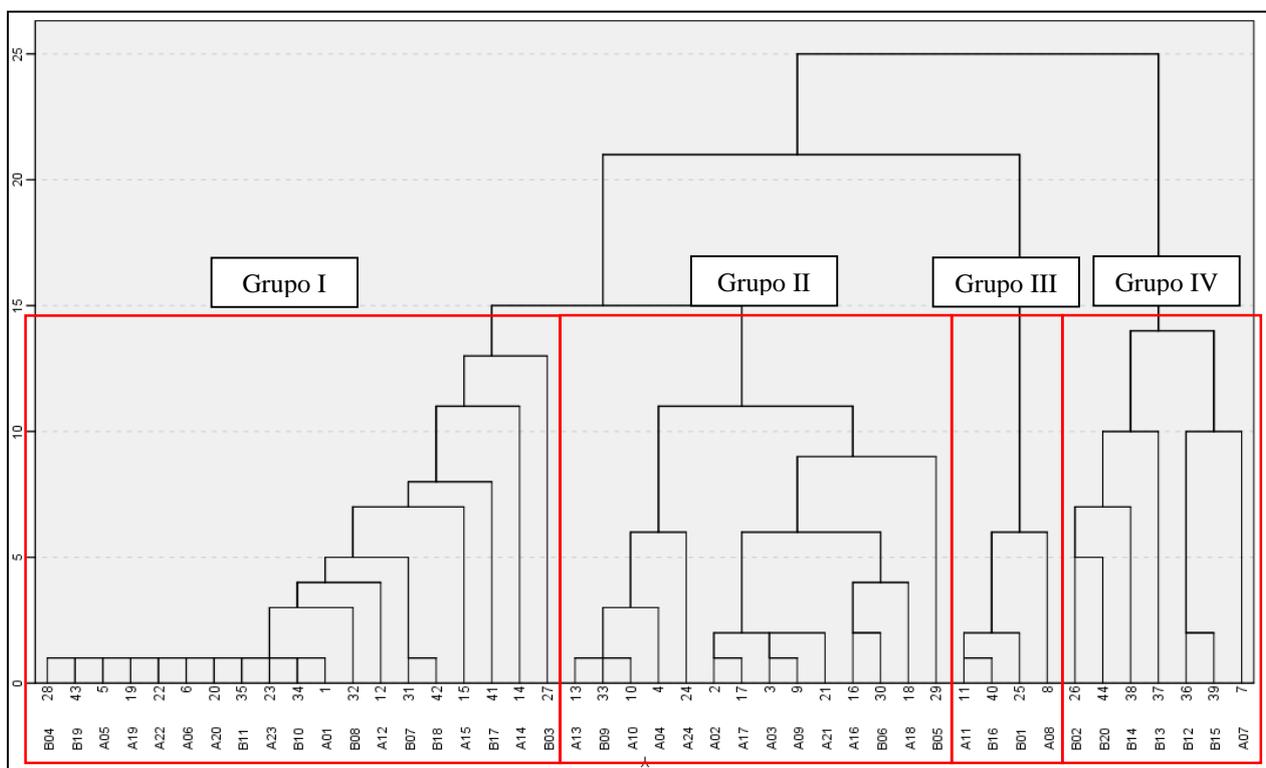


En el eje horizontal del dendrograma se indican los diferentes alumnos según nuestra codificación para cada uno de ellos, mientras que en el eje vertical se reflejan las distancias de los vectores, de nuevo según la codificación de las respuestas que hemos realizado.

De esta forma, tomando una distancia igual a 14 unidades, podemos dividir la muestra de alumnos en 4 grupos, como se refleja en el Gráfico 4.2:

Gráfico 4.2

División por grupos dentro del dendrograma



Los perfiles o grupos de alumnos resultantes a partir de la división propuesta presentan las siguientes características:

- Grupo I: está compuesto por 19 alumnos, siendo el grupo más numeroso de los cuatro. Prácticamente todos ellos dan una definición correcta de periodo y de frecuencia. Además, para los dos términos hacen especial énfasis en la dupla “tiempo – repetición”: 12 de ellos lo hacen al definir periodo, y 9 al definir frecuencia. Los ejemplos en este grupo de alumnos responden en su mayoría a ejemplos de una única situación: tan solo 5 alumnos en este grupo

es capaz de proponer ejemplos de más de una situación. Haciendo un análisis más profundo de las respuestas de los alumnos de este grupo, destacamos lo siguiente:

- Prácticamente todos los alumnos del grupo se apoyan en su definición de periodo en el concepto “tiempo”, emparejado con otros términos. Esta reiteración refleja una concepción de esta noción totalmente ligado a la magnitud temporal, con la consiguiente pérdida de generalización al contrastarlo con la definición que hemos tomado como referencia.
- Estos alumnos relacionan mayoritariamente la frecuencia con la velocidad lineal. En efecto, en todas sus definiciones de este término está presente la idea de velocidad, ya sea empleando directamente este término, ya sea haciendo mención de la razón entre número de repeticiones por unidad de tiempo.
- Grupo II: nuevamente, la pareja “tiempo – repetición” es la más utilizada por los 14 alumnos de este grupo para explicar su noción de periodo y de frecuencia. Al igual que en el grupo I, casi todas las definiciones producidas por los alumnos son correctas. El punto diferencial de este grupo con respecto al anterior lo encontramos en los ejemplos: casi la mitad de ellos dan ejemplos clasificables en dos situaciones distintas, y 4 alumnos de estos 14 ofrecen ejemplos que corresponden a 3 ó 4 situaciones diferentes. Destacamos además las siguientes ideas, fruto de un análisis más detallado:
 - Varias de las definiciones de periodo indican una comprensión por parte del alumno de este concepto como de algo circular. Encontramos en estas definiciones afirmaciones como “el tiempo que tarda algo en repetirse. Ejemplo: un reloj” (Alumno A17), “por periodo entiendo el tiempo que transcurre desde que empieza una acción hasta que acaba” (Alumno A24) o “El periodo (T) sirve para hallar el tiempo que tarda en dar un cuerpo una vuelta a la circunferencia” (Alumno B06). Son 9 de los 14 alumnos del grupo quienes reflejan esta idea en su definición. Tal y como ocurría en el Grupo I, los alumnos de este grupo tienden a identificar el periodo como un concepto asociado exclusivamente al tiempo: casi todos los alumnos hacen mención de este término en sus definiciones. Sólo hay

4 alumnos que no mencionan este término, y 3 de esos alumnos que son los que dan una definición más próxima a la que establecimos como referencia, en el sentido de que no queda restringida a ninguna magnitud temporal. Incluimos a continuación sus respuestas:

Imagen 4.5

Respuesta del Alumno A10 a la pregunta 1 del cuestionario

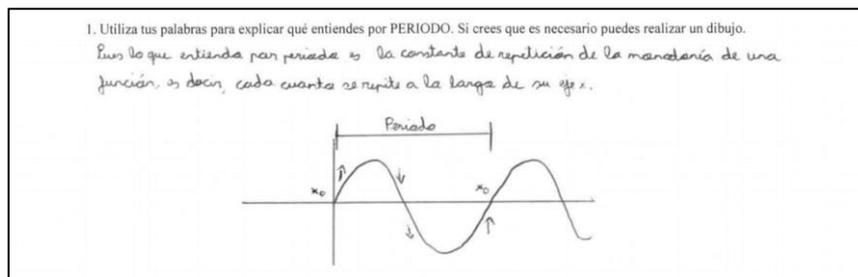


Imagen 4.6

Respuesta del Alumno A13 a la pregunta 1 del cuestionario

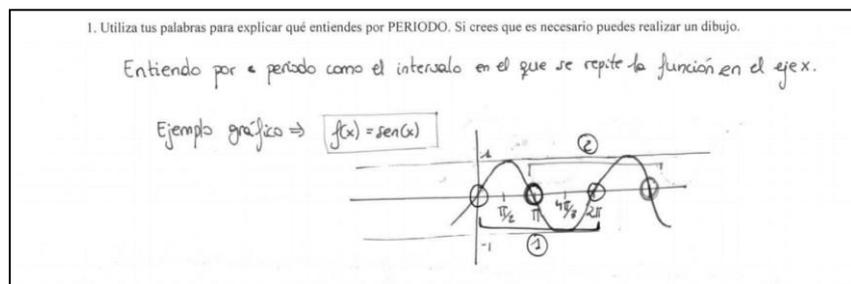
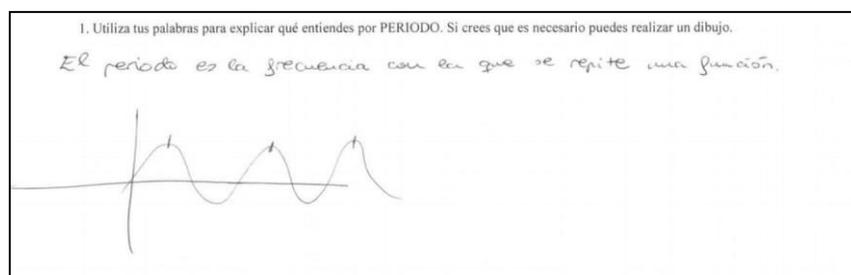


Imagen 4.7

Respuesta del Alumno B09 a la pregunta 1 del cuestionario



- Por otro lado, al hablar de frecuencia, hay una ligera predominancia de relacionar este término con la velocidad en una circunferencia. Así lo expresan 8 de los 14 alumnos de este grupo.

- Grupo III: es el grupo menos numeroso (4 alumnos), aunque el más homogéneo de todos. Los 4 alumnos de este grupo dan definiciones incorrectas tanto del periodo como de la frecuencia, y los ejemplos de los cuatro corresponden en todos los casos a situaciones personales.
- Grupo IV: formado por 7 alumnos, es posible comprobar cómo en este grupo predomina una concepción equivocada de la frecuencia, pues los 7 la definen de forma errónea, cinco de ellos por confundir este término con el de periodo. No se observan términos de énfasis predominantes en ninguna de las dos definiciones, y los ejemplos corresponden en su totalidad a la categoría de situaciones personales, pero con la peculiaridad de que son ejemplos en los que apenas se aprecian patrones o regularidades que hagan pensar en el carácter cíclico mencionado anteriormente. Mostramos un ejemplo de ello a continuación.

Imagen 4.8

Respuesta del Alumno B20 a la pregunta 3 del cuestionario

3. Da algunos ejemplos de situaciones cotidianas en que se repitan una y otra vez (puedes usar ejemplos de otras asignaturas).

- Comar
- Beber
- Escribir
- Ver el móvil

De esta forma, y para concluir con esta parte del análisis, podemos afirmar que el perfil del alumno del Grupo I es tal que interpreta el término periodo en su sentido de intervalo de tiempo, hace lo propio con la frecuencia en relación con una velocidad lineal, y que es capaz de ofrecer poca variedad de ejemplos de situaciones en las que intervengan estos términos. Por su parte, el alumno del Grupo II se caracteriza por interpretar tanto el periodo como la frecuencia en un contexto circular, de repetición o vuelta al origen, a la vez que es capaz de ejemplificar con acierto y variedad situaciones de distintos ámbitos en las que periodo y frecuencia cobran un papel protagonista. El perfil de alumno del Grupo III puede decirse que destaca por una concepción errónea de los dos términos, lo que se refleja en la escasez de los ejemplos que ofrece, correspondiendo siempre a situaciones personales. Por último, los alumnos del Grupo

IV comparten como característica común una concepción equivocada de lo que es la frecuencia, a la que confunden con el periodo, a lo que se añade que en sus ejemplos, de situaciones personales en su mayoría, destaca la ausencia de regularidades y patrones.

En la tabla 4.4 se recoge de manera resumida la clasificación y las principales características de cada grupo de alumnos.

Tabla 4.4

Agrupamientos de los alumnos según rasgos comunes en base a las 3 preguntas del cuestionario

Grupo	Concepto de periodo	Concepto de frecuencia	Tipología de los ejemplos
Grupo I (19 alumnos)	Intervalo de tiempo que transcurre entre dos sucesos	Interpretación relacionada con linealidad	Fundamentalmente situaciones personales
Grupo II (14 alumnos)	Interpretación en contextos circulares: repetición, vuelta al origen... Sentido de tiempo transcurrido (periodo) o velocidad (frecuencia)		Capacidad de ofrecer ejemplos categorizables en diversas situaciones
Grupo III (4 alumnos)	Concepción errónea de ambos conceptos		Escasez de ejemplos
Grupo IV (7 alumnos)	Intervalo de tiempo que transcurre entre dos sucesos	Concepción errónea del concepto. Confusión con el periodo	Situaciones personales, sin referencias a patrones o comportamientos cíclicos

4.6 Análisis de las actividades del libro de texto

Abordamos a continuación el análisis realizado de las actividades del libro de texto empleado por los alumnos que participaron en este estudio (Wazir y Garry, 2012). Para este análisis, se tuvieron en cuenta las actividades de las unidades 7 “Trigonometric functions and equations” y 8 “Triangle trigonometry”.

A fin de clasificar y ordenar los datos, así como de facilitar el análisis, se codificó en una hoja de cálculo de acuerdo a los siguientes criterios:

- En las tres primeras columnas de la hoja de cálculo se consignó, respectivamente, la unidad didáctica a la que pertenecía la actividad y su epígrafe correspondiente, el número de la actividad y, si era el caso, el apartado.
- En la siguiente columna se consignó si la actividad tenía relación directa con el periodo, la frecuencia o con ninguno de los dos.
- En las dos siguientes columnas se hacía mención, en caso de que existiera, al o los conceptos clave contenidos en la actividad, de forma similar a como se procedió en el análisis de las preguntas 1 y 2 del cuestionario.
- A continuación, en la siguiente columna se detalló la situación a la que hacía referencia la actividad: personal, profesional, social, científica o ninguna.
- Por último, se indicaron en la última columna el número de competencias necesarias para el desarrollo de una tarea contenidos en la clasificación propuesta por OCED (2013). Estas competencias, recordamos, son comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, planear estrategias, uso de símbolos y lenguaje formal y técnico, y uso de herramientas matemáticas. En cada actividad se tuvo en cuenta cuántas de estas competencias estaban presentes en ella, obteniéndose así un valor numérico entre 1 y 8.

Siguiendo estos criterios se analizaron las 488 actividades propuestas para estas dos unidades didácticas. De las 488 actividades, tan solo 63 de ellas (algo menos del 13%) hacían necesario el conocimiento y el manejo de los conceptos de periodo (9% del total) y frecuencia (4% del total). En la Tabla 4.5 se recogen las cantidades porcentuales de cada tipo de actividad de acuerdo a la clasificación propuesta para el análisis:

Tabla 4.5

Clasificación de las actividades del libro de texto relacionadas con las nociones de periodo y frecuencia

	Aparición de términos clave (%)	Situaciones descritas (%)	Número de competencias (%)		
PERIODO	Tiempo	78	Científica 91	4	23
	Repetición	27	Personal 5	5	68
	Circunferencia	38	Ninguna 4	6	9
FRECUENCIA	Tiempo	82	Científica 89	4	12
	Velocidad	65	Personal 5	5	65
	Distancia	31	Ninguna 6	6	23

Los porcentajes de la columna “Aparición de términos clave (%)” se refieren al tanto por ciento de actividades que contenían uno de los términos señalados. No se han tenido en cuenta en esta tabla los emparejamientos de términos clave.

Del análisis detallado de estas 63 actividades, partiendo de los datos reflejados en la tabla anterior, podemos destacar algunas cuestiones. En primer lugar, es notoria la escasez de actividades en las que o bien el concepto de periodo o bien el de frecuencia tienen una incidencia directa a la hora de realizarlas. La mayoría de las actividades presentes en las unidades didácticas en que nos hemos fijado hacen referencia a medidas de ángulos, cálculo de razones trigonométricas, problemas de doble observación, etc. Sólo en algunas de estas actividades, y muchas veces como un apartado de ellas, se requiere que el alumno haga uso de esos conceptos, bien, por ejemplo, para directamente calcular el periodo y la frecuencia de una función trigonométrica (o servirse de sus valores para hallar el valor de algún parámetro de la función), o bien para aplicar esas nociones en un problema contextualizado. Las imágenes 4.10 y 4.11 son dos claros ejemplos de esto:

Imagen 4.9

Enunciado 7.4, 4a del libro de texto (p.288)

- 4** Consider the two functions $f(x) = \cos 4x$ and $g(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.
- a)** Write down: **(i)** the minimum value of the function f
(ii) the period of g .

Imagen 4.10

Enunciado 7, 34a del libro de texto (p.347)

- 34** A bicycle with tyres 70 cm in diameter is travelling such that its tyres complete one and a half revolutions every second. That is, the **angular velocity** of a wheel is 1.5 revolutions per second.
- a) What is the angular velocity of a wheel in radians per second?

Respecto a la clasificación en relación a los términos clave, esta búsqueda la hemos realizado en las actividades cuyo enunciado se apoyaba en un contexto de la vida real, que suponen el 83% de las 63 actividades seleccionadas. Tal y como hemos recogido en la tabla 4.5, los términos más empleados han sido los de “tiempo”, “repetición” y “circunferencia” en aquellas actividades en las que era necesario el manejo del concepto de periodo, mientras que para las actividades relacionadas con la frecuencia los términos más empleados han sido los de “tiempo”, “velocidad” y “distancia”. Otros términos diferentes a los mencionados no han tenido una presencia significativa en estas actividades. En las 52 actividades en las que se han extraído términos clave, siempre se hacía uso de dos de ellos, resultando los emparejamientos de términos que se recogen en la tabla 4.6. Hacemos notar que el término “tiempo” siempre está presente en los emparejamientos, lo que sugiere que se propone al alumno la práctica de estos conceptos en este contexto.

Tabla 4.6

Porcentajes para parejas de términos clave en actividades relacionadas con el periodo y la frecuencia

	Emparejamiento	Porcentaje
PERIODO	Tiempo – Repetición	73
	Tiempo – Circunferencia	27
FRECUENCIA	Tiempo – Repetición	81
	Tiempo – Circunferencia	19

La dupla “tiempo – repetición” es con diferencia la más empleada en las actividades en las que el alumno debe manejar el concepto de periodo. Además, en 11 de estas 42 actividades se ha detectado el uso de la pareja de términos “tiempo – circunferencia”. Por otro lado, cuando se requiere el uso del concepto de frecuencia, la pareja de términos más empleada es, una vez más, la formada por los conceptos de “tiempo” y “repetición”, aunque también en algunas actividades es frecuente observar el

uso de la pareja “tiempo – circunferencia”, empleado siempre en actividades de movimientos circulares, lo que indica que se pretende que el alumno emplee su noción de frecuencia con un sentido cíclico, de velocidad circular. A la vista de todo esto, se observa que en las actividades del libro de texto se emplean las mismas parejas de términos, ya sea para aplicarlos a la noción de periodo o la de frecuencia. En estas actividades, los dos conceptos están siempre ligados a velocidades, bien para determinar el tiempo que se emplea para que un suceso cíclico vuelva a su origen, o bien para determinar el ritmo (de nuevo cíclico o circular) con que se repite.

De acuerdo a los estándares PISA (OECD, 2013), las situaciones en las que se encuadran las actividades responden mayoritariamente a situaciones de tipo científico, con una presencia testimonial de problemas contextualizados en situaciones personales. No se han identificado actividades que respondan a situaciones profesionales o sociales.

Por último, atendiendo al número de competencias necesarias para desarrollar la actividad, de nuevo según los estándares PISA (OECD, 2013), observamos que estas actividades siempre cuentan con, al menos, 4 de esas competencias, lo que nos indica que en el libro de texto estos conceptos se llevan a la práctica a través de actividades complejas. Más concretamente, en torno al 80% de las actividades analizadas cuentan con la presencia de 5 ó 6, por lo que el alumno debe poner en juego de forma simultánea varias competencias diferentes para poder completar la actividad propuesta. Así, por ejemplo, es frecuente encontrar actividades en las que el alumno deba poner en práctica de forma simultánea sus competencias de comunicación, representación, razonamiento, el uso de diversas estrategias, la interpretación de símbolos matemáticos y la utilización de herramientas auxiliares. Podemos ver en el siguiente ejercicio un ejemplo de esto:

Imagen 4.11

Enunciado 7, 9abc del libro de texto (p.346)

- 9** The depth, d metres, of water in a harbour varies with the tides during each day. The first high (maximum) tide after midnight occurs at 5:00 a.m. with a depth of 5.8 m. The first low (minimum) tide occurs at 10:30 a.m. with a depth of 2.6 m.
- a)** Find a trigonometric function that models the depth, d , of the water t hours after midnight.
 - b)** Find the depth of the water at 12 noon.
 - c)** A large boat needs at least 3.5 m of water to dock in the harbour. During what time interval after 12 noon can the boat dock safely?

En definitiva, los resultados obtenidos en el análisis de estas dos últimas categorías indican que las nociones de periodo y frecuencia deben trabajarse por parte del alumno de forma que éste sea capaz de realizar una serie de operaciones que le lleven a determinar su valor, y siempre en un contexto de actividades que requieren la puesta en práctica de una variedad de competencias diferentes para su resolución. En este sentido, destaca la baja presencia de actividades en las que se pida al alumno una explicación acerca de una situación propuesta, una discusión relacionada con estas nociones, etc.

4.7 Relación entre las respuestas al cuestionario y las actividades del libro de texto.

Terminamos esta sección de nuestro informe con un análisis conjunto de los resultados obtenidos entre las respuestas del cuestionario y la clasificación de las actividades del libro de texto. Consideramos que este análisis puede ser útil a fin de determinar si los significados expresados por los alumnos acerca de periodo y frecuencia en las preguntas del cuestionario, así como los ejemplos que han propuesto, se corresponden a las que encuentran en su libro de texto. En este análisis conjunto nos centraremos en aquellas categorías que hemos analizado previamente tanto en el cuestionario como en las actividades del libro de texto, esto es, en el empleo de términos clave y en las situaciones.

Pregunta 1 del cuestionario – Términos clave en actividades en las que interviene el concepto de periodo

Al comparar las producciones a la pregunta 1 del cuestionario con el análisis de las actividades del libro de texto, observamos cómo en ambos casos el término de énfasis más empleado es el de “tiempo”. Este término, recordemos, aparece en el 84% de las respuestas de los alumnos, por un 78% en las actividades del libro de texto. Cuando se emplea más de un término de énfasis, se observa que los emparejamientos “tiempo – repetición” y “tiempo – circunferencia” son los más empleados en ambos casos, tal y como se puede comprobar en la tabla 4.7.

Tabla 4.7

Porcentajes de aparición de emparejamientos de términos clave para la noción de periodo en las respuestas a la pregunta 1 del cuestionario y las actividades del libro de texto relacionadas este término

Emparejamiento	Producciones en el cuestionario	Libro de texto
Tiempo – Repetición	50	73
Tiempo - Circunferencia	13	27

Aunque los alumnos en las producciones han empleado más parejas de términos en los que se apoyan para sus definiciones de periodo, estos nuevos emparejamientos aparecen en un número muy reducido de ocasiones.

En cualquier caso, tanto en las producciones de los alumnos como en las actividades de los libros de texto la noción de periodo se emplea mayoritariamente como el tiempo transcurrido hasta que una acción vuelve a repetirse o a volver a su estado inicial. Basándonos en nuestra definición de referencia para el periodo, fruto del análisis conceptual realizado, podríamos afirmar que las actividades del libro de texto no constituyen un punto de apoyo para que el alumno pueda consolidar el significado más abstracto del término. Las actividades del libro de texto proponen el uso del concepto como algo estrechamente relacionado con la velocidad, midiéndolo siempre en magnitudes temporales, uso que los alumnos reflejan de forma mayoritaria en sus producciones.

Pregunta 2 del cuestionario – Términos clave en actividades en las que interviene el concepto de frecuencia

De forma análoga a como hicimos más arriba, recogemos en la tabla 4.8 los porcentajes de aparición de parejas de términos más relevantes en las producciones de los alumnos y en las actividades del libro de texto.

Tabla 4.8

Porcentajes de aparición de emparejamientos de términos clave para la noción de frecuencia en las respuestas a la pregunta 2 del cuestionario y las actividades del libro de texto relacionadas con este término

Emparejamiento	Producciones en el cuestionario	Libro de texto
Tiempo - Repetición	43	81
Tiempo - Circunferencia	11	19

En las actividades del libro de texto, el empleo de la dupla “tiempo – repetición” se hace siempre en contextos de movimientos circulares y nunca lineales. Por el contrario, ya hemos comentado anteriormente cómo los alumnos que describían la frecuencia con base a estos dos términos manifestaban significados tanto lineales como circulares, no quedando claro en algunos casos a cuál de los dos podían referirse. Así pues, observamos cómo las actividades del libro de texto proponen la práctica de la noción de frecuencia siempre en contextos circulares, asociando este concepto a velocidades angulares. Por su parte, los alumnos muestran una mayor riqueza en el empleo de términos relacionados con la frecuencia. Esa mayor variedad de términos de énfasis la emplean en muchas ocasiones en un intento por distinguir entre el ritmo al que se repite un suceso circular o lineal, aunque siempre queda restringido a su relación como velocidad en cuanto a la relación entre la distancia recorrida (ya sea circular o lineal) y tiempo transcurrido. De esta forma, no se observa que en las actividades del libro de texto haya un tratamiento de la noción de frecuencia más allá del sentido que acabamos de exponer, lo que limita la concepción de frecuencia con la que concluíamos nuestro análisis conceptual, donde basábamos nuestra definición en la razón (ritmo) de cambio entre dos magnitudes que se repiten de forma cíclica.

Pregunta 3 del cuestionario – Situaciones detectadas en las actividades

Comparando las situaciones en las que los alumnos ejemplifican sus respuestas con las situaciones de las actividades del libro de texto, encontramos grandes diferencias entre ambos casos. Así, mientras que los alumnos ofrecen ejemplos clasificables en su mayoría como “personales” (así lo hacía el 70% de ellos), y con una presencia algo menor aunque significativa de ejemplos de las otras tres situaciones, en el libro de texto estas situaciones responden casi en su totalidad a contextos de tipo científico (alrededor del 90%). De hecho, ya hemos comentado cómo en el libro de texto apenas hay actividades que respondan a situaciones personales (el 5% de ellas), y hay una ausencia absoluta de actividades que se encuadren en situaciones profesionales o sociales.

La concepción más ligada a la Física que muestran las actividades del libro de texto acerca de las nociones de periodo y de frecuencia lleva al alumno a trabajar con

estos conceptos en el ámbito de problemas de velocidades. En este sentido, es normal que los ejemplos más asequibles sean de situaciones de tipo científico.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

Completamos el informe de nuestra investigación con este capítulo en el que pretendemos resumir las principales conclusiones a las que hemos llegado, según la descripción dada en las secciones anteriores. De esta forma, presentaremos las principales conclusiones extraídas del análisis de los datos, además de resaltar las limitaciones de nuestro estudio y ofrecer una serie de sugerencias que puedan dar continuidad a esta investigación.

El objetivo principal de nuestra investigación lo establecimos en “explorar y describir las nociones, representaciones y conceptos que los estudiantes ponen de manifiesto cuando expresan el significado de los términos periodo y frecuencia mediante descripciones verbales y ejemplos personales”. Podemos afirmar que, en general y como desarrollaremos a continuación, hemos cubierto estas expectativas. La información recogida en los cuestionarios que se hicieron a los alumnos y en las actividades del libro de texto que hemos analizado se han mostrado suficientes para hacer un amplio análisis sobre los significados que han expresado los alumnos acerca de los conceptos de periodo y de frecuencia, así como la manera en que utilizan esas nociones.

Así pues, comentaremos a continuación y de forma separada de qué manera se ha logrado la consecución de los cuatro objetivos específicos planteados al inicio de nuestra investigación. Para justificar el logro de cada uno de estos objetivos específicos propuestos iremos reflejando las conclusiones extraídas de las diversas fases del análisis de datos descritas en el Capítulo 4 de este informe.

5.1 Logros del primer objetivo específico

El primer objetivo específico que nos planteamos responde al siguiente enunciado:

OE1. Establecer la forma más adecuada de recoger información en registro verbal en un grupo de alumnos de 1º de Bachillerato sobre los términos periodo y frecuencia.

Este primer objetivo específico se logró a través de varias fases. Así, hemos podido encuadrar nuestro problema e hipótesis de investigación apoyándonos en la revisión bibliográfica de antecedentes acerca de estudios de enseñanza de la Trigonometría en general, y sobre significados de conceptos en este tópico en particular. Con esta revisión, detallada en el Capítulo 2 de este informe, hemos podido comprobar cómo estos estudios se centran principalmente en cuestiones básicas de la Trigonometría, tales como medidas de ángulos y razones trigonométricas, pero no se han encontrado investigaciones específicas sobre el significado de los conceptos tratados. En cualquier caso, la revisión bibliográfica realizada ha permitido delimitar el estudio y proporcionarnos focos de interés para abordar nuestra investigación.

Esta delimitación y enfoque de nuestro problema de investigación se vio complementada al exponer los fundamentos teóricos en que se basaba nuestro estudio, expuestos también en el Capítulo 2. De esta forma, en el epígrafe 2.2 hemos presentado la noción de representación que seguiríamos en nuestra investigación, a partir de los enfoques que hemos considerado más adecuados para nuestro tópico. En el apartado 2.4 hemos introducido los principales aspectos que tendríamos en cuenta para interpretar la noción de significado de un concepto matemático escolar, fundamental en nuestro estudio y que ha servido de referencia para la elaboración del cuestionario y para el análisis conceptual de las producciones obtenidas a partir de éste. Como complemento a este apartado, en el epígrafe 2.5 hemos descrito los principales rasgos del marco teórico en el que se mueven las pruebas PISA. Este marco teórico nos ha servido como referencia a la hora de determinar la forma en que los alumnos hacen uso de los conceptos objeto de estudio. Además, estas consideraciones han proporcionado una metodología de investigación original en este tópico, al no haber sido hasta el momento estudiado bajo esta perspectiva.

Bajo esta fundamentación teórica elaboramos el cuestionario con el que recogeríamos la información de los alumnos. Los puntos desarrollados en el Capítulo 2 nos llevaron a la conclusión de que, por los objetivos, enfoque y planteamiento de la investigación, el instrumento idóneo para la recogida de información debía ser un cuestionario de tipo semántico. Para su elaboración, además de tener en cuenta las principales características de este tipo de cuestionarios, se fue delimitando poco a poco la tipología, formato y cantidad de preguntas propuestas. Finalmente, el cuestionario con cinco preguntas fue validado por el equipo investigador e implementado en un grupo de 44 alumnos de 1º de Bachillerato, tal y como hemos detallado en el epígrafe 3.4 de este informe.

5.2 Logros del segundo objetivo específico

El segundo objetivo específico mediante el que concretamos el objetivo general de nuestra investigación es el siguiente:

OE2. Establecer e identificar categorías para organizar la forma en que ese grupo de alumnos expresan verbalmente sus nociones sobre los conceptos de periodo y frecuencia, organizando esas expresiones a partir de las categorías establecidas y las relaciones existentes entre ellas, en base al análisis conceptual de estos términos.

El análisis conceptual de los términos “periodo” y “frecuencia” realizado en el apartado 2.3 de este informe permitió establecer una definición de referencia para cada uno de los términos estudiados. Así, fruto de este análisis conceptual establecimos como referencia para el término “periodo” la segunda acepción de RACEFN (2013): “valor que, sumado a cualquier otro valor de la variable independiente, no altera el valor de la función, es decir, $f(x+p)=f(x)$ para cualquier x , siendo p el período. La función f se dice que es periódica de período p , eligiéndose como período el menor de los valores p que cumplen esa condición”. De la misma forma, la definición de frecuencia quedó establecida según la ofrecida por Oxford (2016): “el ritmo al que algo ocurre en un periodo de tiempo particular o en una muestra dada”.

A raíz de este análisis conceptual extraemos, además, las siguientes conclusiones, que hemos tenido en cuenta a la hora de realizar el análisis de datos obtenidos en el cuestionario y en las actividades del libro de texto:

- (1) En la noción de “periodo” prevalece la acepción propia de la Física en todas las fuentes consultadas, haciendo que se identifique este término como un intervalo de tiempo.
- (2) La definición matemática de “periodo”, presente en RACEFN (2013) y que hemos tomado como referencia, es considerada como más general y abstracta, al no restringir este concepto a una magnitud estrictamente temporal.
- (3) En las acepciones de “frecuencia” se observa que de forma mayoritaria este término se identifica con la velocidad, en su sentido físico de relación entre distancia recorrida y tiempo transcurrido.

De estas conclusiones se extrae que tanto la noción de “periodo” como la de “frecuencia” se presentan en la mayor parte de las ocasiones como elementos constituyentes de la velocidad, por lo que es de esperar que las producciones de los alumnos por una parte, como las actividades del libro de texto por otra parte, respondan mayoritariamente a esta acepción, como se ha comprobado en el análisis de los datos desarrollado en el Capítulo 4.

De las conclusiones del análisis conceptual pudimos establecer el punto de partida para categorizar las respuestas obtenidas a través del cuestionario aplicado a los alumnos. Este análisis, de tipo cualitativo, se llevó a cabo tras el volcado de toda la información recogida en los cuestionarios en una hoja de cálculo, para poder así descomponer las respuestas de los alumnos en sus partes más simples e identificar las principales categorías y situaciones que empleaban.

La identificación de las categorías y términos clave presentes en las respuestas a las preguntas 1 y 2 del cuestionario se hizo en base al análisis conceptual de los dos términos de referencia, identificándose las siguientes:

- Términos clave presentes en las respuestas a la pregunta 1: tiempo, repetición, distancia y circunferencia.
- Términos clave presentes en las respuestas a la pregunta 2: tiempo, repetición, distancia, circunferencia, onda y velocidad.

Por su parte, para la clasificación de los ejemplos con que los alumnos respondían a la pregunta 3 se tuvieron en cuenta los cuatro tipos de situaciones descritos en OECD (2013) para las pruebas PISA: personales, profesionales, sociales y científicas.

Esta caracterización en términos clave y situaciones, además de mostrar una vez más la validez del análisis conceptual y de contenidos para el estudio del significado de un concepto de la matemática escolar, puede aportar al profesor conocimientos para el diseño de unidades didácticas.

5.3 Logros del tercer objetivo específico

El tercer objetivo específico de nuestra investigación quedó establecido en

OE3. Establecer diferentes perfiles de alumnos en función de sus respuestas y de las categorías previamente establecidas, partiendo de los significados que ponen de manifiesto los estudiantes sobre las nociones de periodo y de frecuencia.

Para el logro de este objetivo se empleó el análisis conceptual y de contenido en las respuestas a las tres preguntas del cuestionario analizadas, tal y como se detalla en los epígrafes 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 del presente informe. El análisis de las producciones se llevó a cabo en primera instancia pregunta por pregunta de forma separada, para después realizar un análisis conjunto de las respuestas a las tres cuestiones planteadas, a fin de poder establecer perfiles de alumnos mediante un análisis cluster.

De esta forma, del análisis de las respuestas a la primera pregunta extraemos las siguientes conclusiones:

- (1) Una mayoría significativa de los alumnos (89%) da una definición de periodo considerada como adecuada, en base a nuestra definición de referencia fruto del análisis conceptual del término.
- (2) La presencia del término “tiempo” en el 84% de las respuestas permite concluir que el sentido que la mayoría de los alumnos dan a la noción de periodo está ligado a la acepción física de este concepto.

- (3) La mitad de los alumnos emplea en su definición de forma simultánea los términos “tiempo” y “repetición”, lo que refuerza la conclusión anterior, pero añadiendo la idea de suceso cíclico.
- (4) Un 13% de los alumnos asocia la noción de periodo a contextos de velocidades angulares, tal y como se desprende de las respuestas de esos alumnos, en las que emplean los términos “tiempo” y “circunferencia”.
- (5) Un porcentaje menor de alumnos (7%) también asocia la noción de periodo a contextos de velocidades, aunque en este caso lineales. Son los que emplean en su definición los términos “tiempo” y “distancia” de forma simultánea.
- (6) Por último, en un 11% de los alumnos la idea de periodo como elemento constitutivo de un suceso cíclico no está presente de forma explícita, al no dar en sus definiciones una idea de suceso que sigue un patrón repetitivo.

Al analizar las producciones relativas a la segunda pregunta, concluimos lo siguiente:

- (1) Se encuentran mayores dificultades para definir adecuadamente este término: un 75% de los alumnos dan una definición considerada como correcta, por un 25% que da una respuesta incorrecta o incompleta.
- (2) El 75% de las respuestas correctas ofrecen una forma de uso de la frecuencia equivalente a la velocidad, ya sea lineal o angular. En todos estos casos está presente la idea de repeticiones o sucesos cíclicos.
- (3) No hay evidencias de que el uso simultáneo de los términos “tiempo” y “repetición”, o “repetición” y “velocidad” indiquen una preferencia del alumno para definir la frecuencia como una velocidad lineal o una velocidad angular. El 50% de las respuestas correctas contienen una de estas dos parejas de términos.
- (4) Un 18% de los alumnos sí que expresan su noción de frecuencia como de velocidad angular. Son los que emplean de forma simultánea los términos “tiempo” y “circunferencia” o “tiempo” y “onda”.
- (5) No se han encontrado respuestas de alumnos en las que se exprese directamente la noción de frecuencia como de velocidad lineal.

Por su parte, las conclusiones que se extraen del análisis de la tercera pregunta se resumen en los siguientes puntos:

- (1) El 70% de los alumnos pusieron ejemplos de situaciones personales, porcentaje significativamente superior al de los ejemplos de situaciones profesionales (32%), sociales (21%) o científicas (27%).
- (2) En la mayoría de los ejemplos propuestos de situaciones personales y profesionales se observa una tendencia a ejemplificar mediante acciones que se realizan a la misma hora cada día, permitiendo establecer una relación entre la concepción mayoritaria de “lo periódico” como suceso que responde a un patrón repetitivo.
- (3) En los ejemplos clasificados como de situaciones sociales se observa que éstos en su mayor parte no responden ya a patrones circulares, sino a situaciones que se dan a menudo, dándose una confusión de “frecuencia” en el sentido que le hemos dado con “lo frecuente”, “lo que pasa a menudo”.
- (4) Bajo las situaciones científicas hemos encontrado a partes iguales ejemplos que muestran las dos concepciones de frecuencia descritas anteriormente: las relacionadas con velocidades lineales y con velocidades angulares.
- (5) Por último, se observa que pocos alumnos son capaces de ofrecer ejemplos de uso de los términos estudiados que respondan a varias situaciones: los ejemplos del 60% de los alumnos se clasifican únicamente en una situación, por un 11% que dan ejemplos clasificados bajo 3 ó 4 situaciones.

Finalmente, la realización del análisis clúster ha permitido hacer un estudio conjunto de las respuestas de las tres primeras preguntas del cuestionario. Mediante la codificación de las respuestas desarrollada en el epígrafe 4.5 de este informe hemos determinado la existencia de cuatro grupos de alumnos, cada uno de ellos con unas características comunes que los hacen diferenciarse entre sí:

- Grupo I: el grupo mayoritario (19 alumnos de 44) se caracteriza por interpretar la noción de periodo como el intervalo de tiempo que transcurre entre dos sucesos que se repiten, además de ofrecer un significado de frecuencia relacionado con la velocidad lineal. Este grupo

de alumnos también se caracteriza porque los ejemplos donde aplica estos conceptos responden casi exclusivamente a situaciones personales.

- Grupo II: a este grupo pertenece el 32% de los alumnos. Ofrecen nociones algo más generales tanto de periodo como de frecuencia, aunque, de nuevo, se relaciona su significado en relación a magnitudes temporales. Ofrecen mayor variedad de ejemplos de aplicación, clasificables en varias situaciones diferentes.
- Grupo III: formado por 4 alumnos, los cuales no son capaces de dar una definición correcta de los conceptos preguntados. Se caracterizan también por la escasez de ejemplos que ofrecen.
- Grupo IV: los 7 alumnos restantes que pertenecen a este grupo interpretan el periodo como el intervalo de tiempo que transcurre entre dos sucesos, pero no siempre se da la idea de que esos sucesos son cíclicos. No aciertan a dar una definición adecuada de frecuencia, y los ejemplos que dan se circunscriben principalmente a situaciones personales en las que no hay una referencia a un patrón repetitivo o a comportamientos cíclicos.

De esta manera, se ha propuesto una clasificación de las respuestas dadas por los alumnos, que ha permitido clasificarlas, interpretarlas y buscar relaciones entre las mismas.

5.4 Logros del cuarto objetivo específico

El cuarto y último objetivo específico de nuestra investigación quedó formulado de la siguiente manera:

OE4. Identificar categorías en las actividades presentes en el libro de texto empleado por los alumnos que hagan uso de las nociones de periodo y frecuencia; clasificarlas, relacionarlas entre sí e interpretarlas, a fin de determinar si las expresiones verbales de los alumnos responden a esas categorías.

Con esta finalidad, se realizó un completo análisis de las 488 actividades del libro de texto empleado por los alumnos correspondientes a las dos unidades didácticas de Trigonometría. De entre todas las actividades, se escogieron las 63 que hacían referencia directa a los conceptos de periodo y frecuencia, y se analizaron en base a los términos clave que se empleaban, a las situaciones a las que hacían referencia y a las competencias que se debían poner en práctica a la hora de realizar esa actividad en particular. Esta forma de clasificar las actividades también dota de originalidad a esta parte del análisis de datos, al apoyar el análisis cualitativo de los mismos con una serie de estándares de referencia para tareas propias de educación matemática.

La metodología seguida para el análisis también ha sido de tipo cualitativo, tal y como detallamos en el apartado 3.3 de este informe. La base teórica general de la investigación se ha enriquecido en esta parte del análisis con la inclusión de las competencias matemáticas que un alumno debe poner en práctica a la hora de resolver una actividad determinada, según los estándares PISA (OECD, 2013).

Así pues, el logro de este objetivo específico se ha alcanzado como se refleja en las siguientes conclusiones:

- (1) Apenas el 13% del total de las actividades del libro de texto en las unidades didácticas de Trigonometría hacen referencia directa a los conceptos de periodo y de frecuencia.
- (2) De las 63 actividades escogidas, en 11 de ellas las nociones de periodo y de frecuencia se ofrecían al alumno de forma totalmente descontextualizada.
- (3) En las 52 actividades restantes, se ha comprobado el uso sistemático del término clave “tiempo”, concluyéndose que esas actividades proponen que el alumno practique con las nociones de periodo y de frecuencia asociándolas con magnitudes temporales.
- (4) En el uso de otros términos clave, se ha observado, tanto cuando la actividad hace mención al periodo como cuando hace mención a la frecuencia, el uso preferencial de las duplas “tiempo – repetición” (73% en los ejercicios de periodo y 81% en los de frecuencia) y “tiempo – circunferencia” (27% y 19% respectivamente), presentando siempre estos conceptos ligados a velocidades, bien para determinar el tiempo que se emplea para que un suceso cíclico vuelva a su origen, o bien para determinar el ritmo (de nuevo

cíclico o circular) con que se repite. En todos estos casos, el contexto de los problemas hacía mención a velocidades angulares y no lineales.

- (5) Las situaciones en las que se enmarcan las actividades son en su mayoría de tipo científico (alrededor del 90%), por un 5% de las actividades encuadradas en situaciones personales, quedando el resto de las actividades fuera de cualquier situación.
- (6) Estas actividades, por lo general, pueden considerarse complicadas: más del 80% de las actividades requieren que el alumno ponga en práctica 5 o más competencias para completar la actividad propuesta.

Estas conclusiones permiten definir una tipología determinada en las actividades del libro de texto que emplean los alumnos. Así, las actividades en las que el alumno debe aplicar los conceptos de periodo y de frecuencia son escasas, se dan casi siempre en contextos que llevan a emplear estas nociones en su sentido temporal en el ámbito de velocidades angulares, se enmarcan en situaciones científicas (y, por lo tanto, algo alejadas de la realidad cotidiana del alumno), se centran en desarrollar las destrezas de cálculo, y son actividades difíciles para el alumno en cuanto a que ha de poner en práctica de forma simultánea varias competencias diferentes para realizarlas.

Haciendo una valoración conjunta de las conclusiones mencionadas en apartados anteriores con los puntos que acabamos de destacar, observamos que los términos clave empleados por los alumnos en sus definiciones son más variados que los hallados en el libro de texto, si bien es cierto que los principales términos clave coinciden en ambos casos. No ocurre así con las situaciones en las que los alumnos encuadran sus ejemplos y las que presentan las actividades del libro de texto: los primeros muestran una preferencia clara por la ejemplificación en situaciones personales, aunque también hay una presencia relevante de ejemplos que responden a los otros tres tipos de situaciones, mientras que en el segundo caso hay un claro predominio de aspectos más técnicos y científicos, con una presencia muy baja de situaciones personales y una ausencia total de otras situaciones..

Así pues, es posible afirmar que los alumnos muestran en sus respuestas las facetas en las que se usan los términos “periodo” y “frecuencia” en su libro de texto,

aunque no se limitan únicamente a esas facetas, sino que son capaces de ofrecer un significado más rico que el que les proporcionan las actividades con las que practican esos conceptos.

5.5 Limitaciones de la investigación

Una de las primeras limitaciones que surgen en nuestra investigación es acerca de la muestra de sujetos a los que se ha aplicado el estudio. En efecto, se trata de una muestra intencional, seleccionada por disponibilidad, y en la que los alumnos participantes cursan un programa de Bachillerato específico en el Colegio Retamar de Pozuelo de Alarcón. Es por esta elección no aleatoria que la validez externa de esta investigación queda restringida a este centro docente.

La recogida de datos se hizo en un momento determinado, de forma que no se tienen evidencias sobre los posibles cambios en los significados puestos de manifiesto por los alumnos acerca de estos términos. También, en este sentido, únicamente se analizaron las actividades del libro de texto que los alumnos empleaban en el año en curso, sin tener en cuenta actividades de Trigonometría en su libro de texto del año anterior.

En cualquier caso, el estudio es de naturaleza exploratoria, y uno de sus principales intereses radica en la escasez de estudios de este tipo. De esta forma, no ha sido el objetivo de esta investigación la generalización de los resultados, sino la obtención de evidencias acerca de las formas de entender y aplicar los conceptos de periodo y de frecuencia.

5.6 Sugerencias para investigaciones futuras

Las limitaciones anteriormente descritas pueden ser cauce para nuevas vías de investigación. Así, el análisis a las respuestas de las otras dos preguntas del cuestionario y su implementación en alumnos con otros perfiles podrían ser una forma de determinar de forma más precisa los significados que los estudiantes ponen de manifiesto acerca de los tópicos tratados.

De forma análoga se podría proceder con las actividades de los libros de texto, ampliando el rango de actividades a las que someter a esta clasificación. Este análisis se

podría enriquecer con un profundo análisis de contenido que determine las formas que ofrecen los libros de texto de presentar a los alumnos estas nociones, de manera que se pueda establecer de forma más precisa el grado de conexión entre esta forma de presentar las nociones y los significados expuestos por los estudiantes.

Las nociones de periodo y frecuencia suponen un nexo entre las nociones básicas de la Trigonometría (ángulos, razones trigonométricas...) y cuestiones más avanzadas en este tópico, tales como funciones trigonométricas, periodicidad en las soluciones de las ecuaciones trigonométricas, etc. Consideramos que las investigaciones sobre los significados de estos conceptos pueden ser un punto de partida para a las nociones que tienen los alumnos sobre las infinitas soluciones de las ecuaciones trigonométricas, así como para diseñar e implementar tareas que faciliten el aprendizaje de estos conceptos, junto con el uso de recursos y medios tecnológicos.

Finalmente, es posible abordar el tratamiento de los significados y las aplicaciones de estos conceptos conjugando los puntos de vista de enseñanza de las matemáticas y enseñanza de la física. Este estudio multidisciplinar podría facilitar la puesta en práctica de diferentes planificaciones y organizaciones docentes en torno a estos conceptos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Army, P. D. (1991). *An approach to teaching college course in trigonometry using applications and a graphing calculator*. Unpublished doctoral dissertation, Rutgers University, New Brunswick, NJ.
- Brown, S. A. (2005). *The trigonometric connections: Students' understanding of sine and cosine*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois.
- Byers, P. (2010). Investigating trigonometric representations in the transition to college mathematics. *College Quarterly*, 13, 2, 1–10.
- Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95–124). Barcelona: Horsori.
- Cirrito, F. (2007). *Mathematics Higher Level (Core)*. Victoria: IBID Press
- Coleman, H., & Unrau, Y. A. (2005). *Social work: Research and evaluation. Quantitative and qualitative approaches*. (R. M. Grinnell y Y. A. Unrau, Eds.) (7ª ed.). Nueva York, NY: Oxford University Press.
- Fernández Santana, Ó. (1991). El análisis de cluster: aplicación, interpretación y validación. *Papers: revista de sociología*, (37), 065-76.
- Fernandez-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto*. Artículo sin publicar. Universidad de Granada. Granada.
- Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, 7(3): 117-130.
- Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: subject matter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. Unpublished doctoral dissertation, University of Iowa, Iowa, IA.

- Fiallo Leal, J. E. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Valencia - España: Tesis doctoral de la Universidad de Valencia.
- Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de Semántica y Lógica* (pp. 84–111). Madrid: Tecnos.
- Hiebert, J. (1992). Learning and teaching with understanding. En T. Carpenter (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65–97). New York, NY: MacMillan Publishing Company.
- International Baccalaureate Office (2013). *Informe Anual*. Obtenido de www.ibo.org/es/about-the-ib/ Consultado [03-03-16]
- Joglar Prieto, N., Sordo Juanena, J. M., y Star, J. R. (2014). Designing Geometry 2.0 learning environments: a preliminary study with primary school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(3), 396-416.
- Kahan, J. A., Cooper, D. A., & Bethea, K. A. (2003). The role of mathematics teachers' content knowledge in their teaching: A framework for research applied to a study of student teachers. *Journal of mathematics teacher education*, 6(3), 223-252.
- Kaput, J. J. (1987). Representations systems and mathematics. En C. Javier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 19–26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kendal, M., y Stacey, K. (1997). *Teaching trigonometry*. *Vinculum*, 34, 1, 1–8.
- León, O. G., y Montero, I. (1997). *Diseño de investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill.
- Koyunkaya, M. Y. (2016). Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-21.
- Moliner, M. (2012). *Diccionario del uso del español*. (3ª Ed.). Madrid: Editorial Gredos.

- Fernández-Plaza, J. A. (2012). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio*. Artículo sin publicar. Universidad de Granada. Granada.
- McMillan, J. H., y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa* (5ª edición). Madrid: Pearson Addison Wesley.
- Megías, M; Ruiz, J. F.; Lupiáñez, J. L. (2015). Significado de decimal expresado por escolares mediante la elaboración de cuentos. *Épsilon. Revista de educación matemática*, 32(3)(91), 25-40.
- Montiel G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. (Tesis inédita de Doctorado). CICATA-IPN, México.
- Moore KC. *Making sense by measuring arcs: a teaching experiment in angle measure*. Educ Stud Math Educ. 2013;83(2):225–245.
- National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston (VA): NCTM; 1989.
- National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and standards for school mathematics*. Reston (VA): NCTM; 2000.
- OECD (2013) *PISA 2015 Design* [Ref: EDU/PISA/GB(2012)5]. Paper presented at the 33rd meeting of PISA Governing Board, Tallinn, March 2012.
- Oxford (2016). *Oxford Dictionaries*. Oxford: Oxford University Press. Disponible en <http://oxforddictionaries.com/> Consultado [12-03-2016].
- Real Academia Española (2014). *Diccionario de la Lengua Española*. (22ª Ed). Madrid. Disponible en <http://www.rae.es/rae.html> Consultado [12-03-2016]
- Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (2013). *Vocabulario científico y técnico*. Madrid: Espasa-Calpe.
- Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 219-231). Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

- Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En Gómez, P. y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. (pp. 179-193). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, extraordinario 2006, 275-294.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39 - 63
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Revista iberoamericana de educación matemática. Unión*, 33, 11–27.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., & Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores*. Granada, España: Universidad de Granada.
- Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). *Estudio del sentido de un concepto matemático escolar*. Documento sin publicar. Universidad de Granada. Granada.
- Shama, G. (1998). *Understanding periodicity as a process with a gestalt structure*. *Educational Studies in Mathematics*, 35(3), 255-281.
- Tavera, F., & Villa-Ochoa, J. (2011). *El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas*.
- Tavera, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2013). Pensamiento Variacional: El estudio de las relaciones trigonométricas en contextos dinámicos. En F. J. Córdoba Gómez, & J. Cardeño Espinosa, *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas* (págs. 281 - 293). Medellín: ITM.
- Thompson, K. (2007). *Student's understanding of trigonometry enhanced through the use of a real world problem: improving the instructional sequence*. Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University, Illinois, IL.

- Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 91-106.
- Vander Blok, J. (2014). On the use of questionnaires in semantic fieldwork: A case study in modality. In, Aicha Belkadi, Kakia Chatsiou and Kirsty Rowan (eds.). *Proceedings of Conference on Language Documentation and Linguistic Theory 4*. London: SOAS.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 14(3), 293-305.
- Vinner, S & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*. 20(4), 356-366.
- Wazir I. and Garry T. (2012). *Mathematics Higher Level*. Harlow: Pearson Baccalaureate.
- Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 102, 2, 144–147.
- Weber K, Knott L, Evitts T. (2008). Teaching trigonometric functions: lessons learned from research. *Math Teach*.102(2):144–150.
- Zengin, Y., Furkan, H., & Kutluca, T. (2012). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 31, 183-187.