DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE GRANADA

SENTIDO ESTRUCTURAL MANIFESTADO POR ALUMNOS DE 1º DE BACHILLERATO EN TAREAS QUE INVOLUCRAN IGUALDADES NOTABLES.

Trabajo Fin de Máster que presenta

DANELLYS CLEMENTINA VEGA CASTRO

Dirigido por las doctoras

ENCARNACIÓN CASTRO MARTÍNEZ y **MARTA MOLINA GONZÁLEZ**

GRANADA, 2010

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

SENTIDO ESTRUCTURAL MANIFESTADO POR ALUMNOS DE 1º DE BACHILLERATO EN TAREAS QUE INVOLUCRAN IGUALDADES NOTABLES.

Trabajo Fin de Máster presentado por
Dª. Danellys Clementina Vega Castro
para la obtención del título
Máster en Didáctica de la Matemática

Tutoras:

Dra. Dª. Encarnación Castro

Dra. Dª. Marta Molina

GRANADA, 2010

A la memoria de mi Padre
Domingo Luis Vega B.

Este estudio ha sido realizado en el seno del Grupo de Investigación "Didáctica de la Matemática" de la Universidad de Granada en la línea de Pensamiento Numérico y Algebraico.

Su autora es becaria del Programa Becas Doctorales y Postdoctorales 2005-2010 para la Formación de Investigadores de Panamá. Este Programa, está patrocinado por el Instituto para la Formación y el Aprovechamiento de Recursos Humanos (IFARHU) y, coauspiciado por la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT). El contrato tiene una duración de cuatro (4) años, a partir de 1 de octubre de 2009 a 1 de octubre 2013, bajo el Reglamento aprobado por el Consejo Nacional del IFARHU mediante Resolución Nº 11 de 21 de julio de 2005.

AGRADECIMIENTO

Agradezco primeramente a Dios, Divina Mente Suprema y, guía de la buena voluntad, por permitirme realizar el sueño de mi vida.

A mis tutoras, Doctoras Encarnación Castro y Marta Molina, deseo expresar mi más profundo agradecimiento, por brindarme su orientación con buena voluntad y dedicación incansable para culminar satisfactoriamente este trabajo, por su paciencia para conmigo y la confianza brindada.

Al Profesor Juan Francisco Ruiz del I.E.S. Antonio Mendoza de Alcalá La Real en Jaén y a la Profesora Purificación Vega Álvarez del Instituto Ángel Ganivet por su apoyo y colaboración para la realización de la experiencia con alumnos de sus clases.

A los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada por sus enseñanzas y orientaciones.

A los profesores María Consuelo Cañadas, Enrique Castro e Isidoro Segovia por sus puntuales orientaciones.

A mi madre Clementina por sus consejos de fortaleza y entusiasmo en momentos de dificultad.

A mis hermanos, Domingo, Darinel, Rodrigo, Aracellys, Luis, Franklin y Bertilda por sus constantes motivaciones y apoyo incondicional.

A mis dos hijas, Mileyka e Iluzka por ser mi estímulo constante de lucha y motivo de superación.

A todos mis amigos, compañeros y todos los que en una u otra forma colaboraron conmigo en este trabajo, les expreso mi más sincero agradecimiento.

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

El estudio que aquí se presenta es un Trabajo de Fin de Máster, desarrollado durante el curso académico 2009/2010 en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, por la alumna Danellys Vega-Castro bajo la dirección de las doctoras Dª. Encarnación Castro y Dª. Marta Molina.

Nos planteamos el problema de conocer las producciones de un grupo de alumnos de primero de Bachillerato cuando realizan transformaciones en expresiones algebraicas en las que varias igualdades notables están presentes, ya sea implícita o explícitamente, y construyen nuevas expresiones con la misma estructura. El objetivo general que ha guiado nuestra investigación es analizar el sentido estructural que ponen en juego estos estudiantes cuando realizan dichas tareas. Este trabajo se enmarca dentro de la línea de investigación de Pensamiento Numérico y Algebraico, y tiene como antecedentes básicos la tesis doctoral de Dª. Marta Molina dirigida por Dª. Encarnación Castro y la memoria de fin de Máster de Dª. Paola Trujillo, dirigida por las doctoras anteriormente citadas.

A continuación presentamos la memoria del trabajo realizado estructurada en cinco capítulos. En el primero de ellos justificamos el interés de este estudio y presentamos el problema de investigación que hemos formulado. En el segundo y tercer capítulo, respectivamente, describimos el marco teórico que sustenta este trabajo y el marco metodológico del mismo. El capítulo cuarto presenta los datos obtenidos, el análisis realizado de los mismos y los resultados alcanzados. Por último, en el quinto capítulo se sintetizan dichos resultados y se presentan las conclusiones de esta investigación y se detallan las posibles vías que hemos identificado de continuación del trabajo y que serán consideradas para la posterior realización de una tesis doctoral en esta misma línea de investigación.

CAPÍTULO I: PROBLEMA A INVESTIGAR

Existe coincidencia entre diferentes autores en señalar la desilusión mostrada por profesores de Educación Secundaria y Bachillerato, debido a la incapacidad que dejan ver los estudiantes para aplicar las técnicas básicas algebraicas en contextos distintos de aquellos que han experimentado (Cerdán, 2008; Espinoza, 2004; Fernández, 2001; Nortes, y Nortes, 2010; Novotná y Hoch, 2008). Dichos profesores expresan, a veces, que muchos estudiantes con buenas calificaciones en matemáticas muestran numerosas dificultades al trabajar con expresiones algebraicas y algunos estudiantes abandonan las matemáticas avanzadas en los últimos cursos de la educación obligatoria, debido a su incapacidad para aplicar las técnicas algebraicas en diferentes contextos (Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006, Novotná y Hoch, 2008). Por su parte, Hoch (2003) insiste en esta idea expresando que incluso buenos estudiantes presentan dificultades con las técnicas del álgebra básica: no saben "cómo hacer" ni "cuándo hacer" transformaciones en las expresiones algebraicas.

Esta misma experiencia la he vivido en mi práctica docente con estudiantes de niveles equivalentes a Educación Secundaria y Bachillerato en mi país. Pese al relativamente extenso periodo escolar dedicado a la práctica de transformaciones de expresiones algebraicas en diferentes contextos (e.g., resolución de ecuaciones, simplificación de expresiones…), los estudiantes curso tras curso cometen los mismos errores y no parecen progresar en su dominio de las técnicas algebraicas.

Algunos investigadores (e.g., Herscovics y Linchevski, 1994; Linchevski y Herscovics, 1994; Palarea, 1998; Ruano, Socas y Palarea, 2003) han indagado en las dificultades particulares que encuentran los estudiantes en el trabajo con expresiones algebraicas, identificando las que resultan más persistentes. Entre ellas mencionan la necesidad de clausura que muestran los alumnos al trabajar con las expresiones algebraicas, la particularización de expresiones algebraicas dándoles valores numéricos al no encontrar sentido en el uso del lenguaje algebraico en algunos contextos, el uso inadecuado o no uso de paréntesis, la concatenación de igualdades, la sobre-generalización de la propiedad distributiva de la suma a la operación multiplicación, la separación de un número o símbolo del signo operacional que le precede, falta de aceptación del signo igual como expresión de una equivalencia, un orden incorrecto de las operaciones, fallo en la percepción de la cancelación de expresiones, etc.

La reiterada percepción de éstas y otras dificultades puestas de manifiesto por los estudiantes al trabajar con expresiones algebraicas de diferentes tipos, ha ocasionado un interés creciente en la investigación en Educación Matemática por conocer cuál es el conocimiento que sobre el Álgebra escolar poseen o desarrollan los estudiantes de educación secundaria y cómo es dicho conocimiento. Vienen así a sumarse a numerosas investigaciones que respecto al mismo tema de conocimiento han dirigido su trabajo y han tratado de arrojar luz sobre interrogantes como ¿qué es el álgebra? o ¿Cuál es la mejor forma de trabajar el álgebra en el aula? (Trujillo, 2008). Autores como Kaput (1999), Kieran, (1989, 2006, 2007), Kieran y Filloy (1989), Lee, (1996), NCTM, (2000), Socas et al., (1989) y Van Amerom (2002) han proporcionado respuestas a dichos interrogantes, entre otros, llegando a presentar diferentes concepciones de qué es el álgebra escolar. Entre dichas concepciones o enfoques destacan: la generalización de patrones numéricos y geométricos y de las leyes que gobiernan las relaciones numéricas, la resolución de problemas, la modelización de fenómenos físicos y el estudio de las funciones (ver Molina, 2006).

Dentro de esta corriente, destacamos los recientes trabajos de Hoch y colaboradores (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006, 2007; 2010; Novotná y Hoch, 2008) en los que se reflexiona sobre las habilidades de los sujetos que intervienen en el trabajo con expresiones algebraicas y se define el Sentido Estructural. Dicho constructo se refiere, en términos generales, a una colección de habilidades relacionadas con transformar expresiones algebraicas que permite a un alumno hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. Con este constructo dichos autores proponen una nueva forma de afrontar la problemática de la enseñanza del álgebra. En ella nos vamos a centrar para realizar nuestro estudio. Vamos a considerar unas expresiones algebraicas muy concretas, como son las igualdades notables en el contexto de las fracciones algebraicas, y vamos a estudiar las muestras de sentido estructural de un grupo de sujetos de primero de

Bachillerato, tomando de Hoch y colaboradores las ideas asociadas al constructo sentido estructural.

I.1 Motivación del problema a investigar

La motivación por el estudio de las igualdades notables, enfocándolo como hemos indicado anteriormente, desde el sentido estructural, radica en poder encontrar situaciones de aprendizaje que puedan ayudar a los estudiantes a superar la diversidad de dificultades que confrontan cuando trabajan con estructuras algebraicas que involucran esta temática. En muchos países estas igualdades notables representan una temática de difícil comprensión en el desarrollo del álgebra básica para los estudiantes de estos niveles, quienes ven estas igualdades como una barrera que limita sus estudios (Chang y Tsai, 2005). Parte de la fuerza de nuestra motivación tiene su fundamento en las siguientes líneas: “Las dificultades son interrogantes a los que buscar respuesta, estímulos para diseñar estrategias de superación, retos para reflexionar y entender las distintas variables que intervienen en aquellos procesos cuyo control parece que se nos escapa” (Rico, 2000, p. viii)[1]. Como educadores preocupados por el mejoramiento de la calidad de educación nos motiva poder contribuir al estudio de este tema, apoyando así al desarrollo de futuros trabajos de investigación.

Por otra parte destaco mi motivación personal, por profundizar en mi comprensión de las dificultades que encuentran los estudiantes de Educación Secundaria y Bachillerato en este ámbito del conocimiento. El permanecer durante 17 años trabajando como docente en secundaria en un Colegio de la provincia de Los Santos en mi país Panamá, me dio la oportunidad de observar la gama de dificultades que confrontaban los estudiantes de IX grado (3º de Educación secundaria en España) cuando se les impartía el tema sobre las igualdades notables así como posteriormente en IV y V año (IVº de ESO y 1º de Bachillerato en España) cuando tenían que hacer aplicaciones de estas igualdades en contextos algebraicos. Este era un tema que por la cantidad de fracasos que presentaban los estudiantes, se discutía constantemente en las reuniones realizadas por el Departamento de

[1] Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM).

Matemáticas del Colegio donde trabajaba. El referido departamento estaba constituido por siete profesores que siempre intentábamos buscar alternativas para mejorar la enseñanza de estas igualdades y por ende el aprendizaje de la mismas por los estudiantes. Se organizaban distintas actividades didácticas, y tal vez el aprendizaje en los estudiantes mejoraba, pero el problema continuaba sobre todo en los niveles más altos IV y V año. Constantemente solicitábamos al Ministerio de Educación nos proporcionara seminarios que nos instruyeran como impartir éste y otros tipos de enseñanzas, pero los seminarios que se nos impartía no se centraban en temas concretos sino genéricos como por ejemplo la personalidad del educador. En lo personal, consideraba que debía haber algún tipo de estrategia que nosotros desconocíamos y que era la clave para el buen aprendizaje de los estudiantes. Sumergida en la más completa ignorancia nunca imaginé que éste fuese un problema a nivel de otros países y el hecho de que Dios me permitiera venir a la Universidad de Granada y contar con el apoyo de profesoras especialistas en ésta área me ha permitido estudiar e investigar este tema. Focalizándome en el mismo persigo dos objetivos más generales: ahondar en mi comprensión del proceso de aprendizaje de las matemáticas, para enriquecer mi formación como docente, e iniciarme en la actividad investigadora como preparación para la posterior realización de una tesis doctoral.

I.2 Justificación

Como hemos indicado, nuestro estudio sobre el uso de igualdades notables tiene su origen en la diversidad de dificultades que confrontan estudiantes de secundaria cuando resuelven tareas que involucran esta temática. No obstante, la justificación de esta investigación la podemos basar en la gran importancia que estas expresiones algebraicas tienen en los programas de estudio de matemáticas a nivel de educación secundaria por sus frecuentes aplicaciones en temas posteriores al curso básico de estudio de las mismas. Entre dichas aplicaciones se pueden señalar: la simplificación de expresiones, operaciones con fracciones algebraicas, límites, entre otros temas. Otras de sus aplicaciones pertenecen al área de la física y a posteriores estudios superiores y/o de nivel universitario. Así mismo, se busca contribuir al cumplimiento de algunas de las expectativas de los Principios y Estándares para la Educación Matemática, los cuales sugieren en el álgebra estándar para la etapa 6-8 “reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas” y para la etapa 9-12 “comprender el significado de formas equivalentes de expresiones”, además de que el estudiante escriba formas equivalentes de expresiones algebraicas (NCTM, 2000, p.226 y p.300).

Aunque el trabajo se centre en expresiones algebraicas muy concretas, fracciones algebraicas que involucran igualdades notables, esperamos que los resultados sean de interés y sumarán conocimiento por una parte en el entendimiento del constructo sentido estructural, el cual tiene una andadura muy corta, y por otra al conocimiento sobre el desempeño de unos estudiantes en relación con el mismo. Ambos conocimientos nos permitirán abordar, en el futuro, un tratamiento de las igualdades notables, en el aula, desde el punto de vista del sentido estructural que nos permitirá trabajar desde expresiones aritméticas a algebraicas que presenten la misma estructura, haciendo el tránsito al álgebra como una aritmética generalizada.

I.3 Antecedentes

Es muy extensa la investigación que se ha realizado sobre el aprendizaje de contenidos específicos del álgebra escolar. Dan prueba de esta afirmación numerosos trabajos publicados, entre ellos Kieran y Filloy (1989) y capítulos de relevantes handbook como los editados por Grouws en 1992 y English en 2002. Estos estudios hacen referencia a muy diversos componentes de la actividad algebraica escolar, tales como la resolución de ecuaciones, las funciones y sus gráficas, las variables, etc. En esta memoria vamos a dejar de lado gran parte de dichos antecedentes por dos razones: una es que su inclusión sobrepasaría este trabajo y la otra es que nuestro centro de interés es muy específico dentro del campo del álgebra escolar, de aquí que la cantidad de antecedentes que presentamos a continuación sea menor y se concentren en un grupo reducido de investigadores. Centramos nuestra atención en trabajos que han realizado aportaciones relativas al sentido estructural, ya sean previos o posteriores a la definición de dicho constructo por Hoch y colaboradores.

El término sentido estructural fue utilizado por vez primera por Linchevski y Livné (1999), según Hoch (2003). Dichos autores confirmaron que las dificultades de los estudiantes con la estructura algebraica se deben a su falta de comprensión de las nociones estructurales en la aritmética. En concreto investigaron si las interpretaciones erróneas de la estructura algebraica encontradas en estudios anteriores en un contexto algebraico, se producen también en contextos puramente numéricos y cómo estas interpretaciones son sistemáticas. Diseñaron algunas tareas numéricas para los estudiantes y su estudio confirmó dos observaciones en parte contradictorias. Por un lado, las interpretaciones de los estudiantes de las estructuras de las expresiones fueron muy consistentes, es decir, se encontraron las mismas tendencias en las respuestas de muchos estudiantes. En este caso el comportamiento de los estudiantes se manifestó de forma sistemática. Por otra parte, observaron que un mismo estudiante puede dar una respuesta equivocada en un contexto y una respuesta correcta en otro. A menudo parecía que los estudiantes fueron inconsistentes en sus conocimientos. Consideraron que sin duda, los estudiantes deben ser expuestos a la estructura de las expresiones algebraicas, sin embargo, hay que hacerlo de una manera que les permita desarrollar el sentido estructural. Esto significa que los estudiantes deben ser capaces de utilizar interpretaciones diferentes de las mismas estructuras de una expresión de manera flexible y creativa y que la instrucción, a su vez, debe suscitar la transformación de las expresiones con sentido y garantizar la preparación necesaria para ello.

Posteriormente al trabajo de Linchevski y Livné (1999), Hoch y Dreyfus han realizado varios estudios centrados en la noción de sentido estructural siendo estos autores los que han avanzado en la definición de este constructo. Con esta intención entrevistaron a cinco expertos en investigación en educación matemática pidiéndoles su opinión sobre el sentido estructural. A partir de la información obtenida se definió tentativamente el sentido estructural, en el contexto del álgebra escolar, como una colección de habilidades que incluyen: “ver una expresión o una sentencia algebraica como una entidad, reconocer una expresión o sentencia algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad” (Hoch y Dreyfus, 2004, pp. 51).

Esta definición se utilizó como guía para diseñar unos cuestionarios a aplicar a alumnos de último curso de Educación Secundaria. Al analizar las respuestas a los cuestionarios, éstos se consideraron inadecuados para identificar algunos aspectos del sentido estructural. Por este motivo, se consideró necesario avanzar en el refinamiento de la definición de sentido estructural en posteriores trabajos (Hoch y Dreyfus, 2005, 2006, 2007), llegando a identificar varios descriptores del uso del sentido estructural en el contexto del álgebra escolar los cuales recogemos posteriormente en el marco teórico.

Paralelamente al desarrollo del constructo sentido estructural, Hoch y Dreyfus han realizado diversas investigaciones con estudiantes de educación secundaria. Hoch y Dreyfus (2004) analizan el efecto de los paréntesis para obtener éxito al resolver ecuaciones algebraicas y el uso de sentido estructural en esa tarea de un grupo de 92 alumnos con edades entre 16 y 17 años que estaban cursando un nivel intermedio o avanzado de matemáticas. En dicho trabajo observaron que menos del 20% de los alumnos utilizaron sentido estructural en al menos una de las ecuaciones, siendo éste más frecuente entre los alumnos que cursaban unas matemáticas más avanzadas. La presencia de la variable en ambos miembros, y en menor medida también los paréntesis, facilitaron el uso de sentido estructural. Observaron que los estudiantes que no dieron muestras de sentido estructural cometieron numerosos errores de cálculo y no identificaron las soluciones extrañas. Al proponer la misma tarea a un grupo de alumnos de un curso inferior, que habían trabajado más recientemente la resolución de ecuaciones, los autores detectaron un mayor uso de sentido estructural. Por este motivo, Hoch y Dreyfus afirman que la enseñanza puede contribuir a que los estudiantes presten atención a la estructura de las expresiones y ecuaciones algebraicas pero que se necesitan encontrar mejores métodos para favorecer la retención de las mismas.

En estudios posteriores (Hoch y Dreyfus, 2005, 2006) ambos autores confirman el bajo sentido estructural de los alumnos de últimos cursos de educación secundaria, en especial al trabajar con expresiones complejas que incluyen potencias en términos aditivos, y detectan cierta correlación entre el nivel de sentido estructural y la habilidad en la manipulación de expresiones algebraicas puestos de manifiesto por dichos estudiantes. En general, a mayor sentido estructural mayor habilidad para la manipulación de expresiones algebraicas.

Previamente a los trabajos mencionados, otros autores han realizado estudios sobre el reconocimiento de la estructura de expresiones algebraicas por parte de los estudiantes de educación secundaria. Este es el caso de Booth (1982), Wagner, Rachlin y Jensen (1984), Steinberg et al. (1990) y Pirie y Martin (1997) según cita Molina (2006), los cuales centran su atención en la equivalencia de expresiones algebraicas, en particular ecuaciones. Booth

(1982) observó que los alumnos interpretaban las expresiones de manera diferente según el contexto, ignorando las convenciones del orden de las operaciones, y procediendo mayoritariamente de izquierda a derecha. Por tanto, un par de expresiones pueden ser consideradas como equivalentes en un contexto y no en otro.

Wagner, Rachlin y Jensen (1984) y Steinberg et al. (1990) ponen de manifiesto que alumnos de educación secundaria tienen dificultades para concebir una expresión compleja como un todo y reconocer semejanzas en las estructuras de ecuaciones equivalentes, pese a mostrar facilidad para resolver dichas ecuaciones siguiendo procedimientos estándares. Al juzgar la equivalencia de pares de ecuaciones, cometían errores tales como comparar únicamente uno de los miembros de ambas ecuaciones, asumir que $a + x = ax$, así como exigencias basadas únicamente en aspectos de la estructura superficial de las ecuaciones ("su aspecto es diferente", "una ecuación tiene más números", "no tienen los mismos números"). Por su parte, Pirie y Martin (1997) señalan la tendencia de los alumnos a interpretar las ecuaciones como sucesos temporales, no estáticos, leyéndolos de izquierda a derecha, es decir como una acumulación de ítems y operaciones que se realizan sucesivamente en el tiempo.

I.4 Formulación del Problema

De la lectura de los documentos consultados y de nuestro interés por el tema que aquí se aborda nos surgen una serie de interrogantes: ¿Está el constructo sentido estructural eficaz y completamente caracterizado en el contexto del álgebra escolar? ¿Es posible explicitar descriptores propios con los que detectar el sentido estructural de un sujeto en dicho contexto? ¿Qué tipos de tareas serían pertinentes para detectar el sentido estructural de sujetos de un determinado nivel educativo? ¿Qué juego darían las igualdades notables utilizadas para tal fin?

I.4.1 Objetivos de la Investigación

A partir de estas preguntas surge nuestro objetivo general de investigación:

Analizar el sentido estructural que muestran estudiantes de Bachillerato en tareas que requieren la construcción y manipulación de fracciones algebraicas, susceptibles de ser simplificadas aplicando igualdades notables.

Concretamos este objetivo en los siguientes objetivos específicos:

O.1 Avanzar en la caracterización del constructo "Sentido Estructural" en el contexto del álgebra escolar

O.2 Construir un instrumento que permita conocer el sentido estructural que muestren estudiantes de 1º de Bachillerato, al manipular igualdades notables:

a) Cuando la manipulación se realiza para simplificar una fracción algebraica.
b) Cuando la manipulación se realiza para mantener la estructura de una fracción algebraica.

O.3 Analizar el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de 1º de Bachillerato al simplificar y construir fracciones algebraicas que involucran igualdades notables.

O.4 Estudiar el comportamiento de estudiantes de 1º de Bachillerato, cuando han de reproducir la estructura de fracciones algebraicas dadas.

O.5 Identificar errores y dificultades que encuentran los estudiantes para reconocer la estructura de una expresión algebraica.

I.5 Valor del trabajo

Este trabajo consta de varios criterios de valor. En primer lugar la utilidad, ya que contribuye a un mejoramiento del aprendizaje por parte de los estudiantes, puesto que asumirán con más claridad las situaciones algebraicas. Goza de relevancia social, ya que saldrán beneficiados tanto profesores como estudiantes, por el hecho que si los educadores emplean métodos de enseñanza que favorezcan la percepción de expresiones algebraicas desde un punto de vista estructural, los estudiantes serán beneficiados en cuanto a la evolución del aprendizaje se refiere. En cuanto a valor teórico, estos resultados se pueden generalizar a otras áreas de la matemática como es la trigonometría, donde las estructuras compuestas por identidades trigonométricas gozan de las mismas dificultades que las igualdades notables. Y respecto a la utilidad metodológica se contribuye a fortalecer la validez del término sentido estructural a través de los resultados empíricos obtenidos.

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

II.1 Introducción

La finalidad de este marco teórico es situar el problema planteado dentro de un conjunto de conocimientos que, habiendo permitido orientar la búsqueda, han contribuido a una mejor conceptualización de los mismos. Nos va a permitir así mismo cumplir con el objetivo que nos planteamos: O.1 Avanzar en la caracterización del constructo “Sentido Estructural” en el contexto del álgebra escolar. Para hacer una revisión de la literatura relacionada con nuestro trabajo, nos hemos centrado en las palabras claves: sentido, estructura y sentido estructural. Recordamos que nuestra investigación pretende analizar cómo unos estudiantes concretos dan muestras de su sentido estructural al analizar y manipular unas expresiones algebraicas que poseen características específicas. En este capítulo se hace una recopilación de información sobre estudios y aportaciones realizadas por algunos investigadores, relativas al significado de los términos sentido y estructura, éste último en contextos escolares, y a cómo surge la noción de sentido estructural, en conjunto. A final del capítulo recogemos además un breve análisis de las igualdades notables consideradas en este estudio. El orden en que se presentan las dos ideas fundamentales de este marco teórico, sentido y estructura algebraica, no es relevante. Comenzamos por los apartados relacionados con el sentido por ser en su conjunto menos extensos.

II.2 Construcción de conocimiento con sentido

Un aspecto relevante en la construcción del conocimiento es que éste se realice con sentido. Peltier (2003) considera la necesidad de impregnar de sentido el conocimiento como un slogan de la pedagogía vigente durante las últimas décadas. Dicho slogan tiene su apoyo en la idea de que un conocimiento no puede ser funcional sino en la medida en que es portador de sentido para quien lo posee. De manera breve se podría decir que un conocimiento es portador de sentido para un sujeto si este último es capaz de identificar un campo de aplicación de este conocimiento. Esta concepción pedagógica del aprendizaje ha dado lugar a que se tengan en cuenta en la enseñanza y en la investigación constructos como sentido numérico (Sowder 1988), sentido operacional (Slavit, 1995, 1999), sentido simbólico (Arcavi, 1994), sentido estructural o de estructura (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006; Linchevski y Livneh, 1999; Novotná, Stehlikova y Hoch, 2006, Novotná y Hoch, 2008), entre otros. Siendo el término sentido numérico el que está más consolidado en la literatura de Educación Matemática.

En todos estos casos se considera a los alumnos como pensadores, como personas capaces de comprender los dominios matemáticos. Son términos asociados a una visión de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas centrada en promover la comprensión de las matemáticas (Molina, 2006).

II.3 Noción de Sentido

Cuando Peltier (2003) plantea su reflexión sobre la idea de sentido lo hace desde tres puntos de vista: filosófico, psicológico y didáctico, nos detenemos más en los dos últimos. Para el punto de vista filosófico de sentido se apoya en Deleuze (1969) y su articulación del mismo en tres dimensiones; referencia, significación y manifestación.

Para el punto de vista psicológico se centra en Vergnaud (1990), en su teoría sobre significados y significantes. Según Vergnaud, el sentido es una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes. El sentido de una situación lo constituyen los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o por un significante. El sentido de la adición para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que puede poner en juego para tratar las situaciones a las cuales el sujeto se enfrenta y que implican la idea de adición. Es también el conjunto de esquemas que puede poner en juego para operar sobre los símbolos numéricos, algebraicos, gráficos y lingüísticos que representa la adición. Define esquema como una totalidad organizada, que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. En cuanto a dar sentido a los conceptos matemáticos, Vergnaud, sostiene que son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos. No quiere decir que el sentido esté en las situaciones mismas, ni en las palabras, ni en los símbolos matemáticos, sino en las relaciones que el individuo establece con los mismos, y el significado que les atribuye. Se dice que una representación simbólica, una palabra o un enunciado matemático tiene sentido, o varios sentidos, o ningún sentido para tales o cuales individuos.

Para el punto de vista didáctico toma las teorías de Brousseau (1986) quien considera que el sentido de un conocimiento está sostenido por tres conjuntos: un conjunto de situaciones en las que el conocimiento emerge como teoría matemática (semántica); un conjunto de problemas a lo que el conocimiento da solución (pragmática) y un tercer conjunto el de las concepciones (historia personal y colectiva). Peltier concluye que sólo se puede estar seguro de que un estudiante dispone de un concepto matemático con sentido cuando es capaz de movilizarlo, sin ayuda, en situaciones complejas en las que entra en juego el concepto y los diferentes teoremas en acción asociados. Esto requiere que el estudiante haya tenido la necesidad de actuar bajo su propia responsabilidad, con suficiente frecuencia, sobre un tipo concreto de tareas relacionadas con un concepto y haya tenido que plantearse preguntas fundamentales en relación con el significado del concepto.

II.4 Sobre el vocablo estructura

La palabra estructura tiene diferentes usos fuera del contexto educativo. Así por ejemplo se habla de la estructura de un edificio o casa (ver ilustración 1), de la estructura de una organización, de la estructura molecular o de la estructura de una ilustración geométrica (ver ilustración 2)[2].

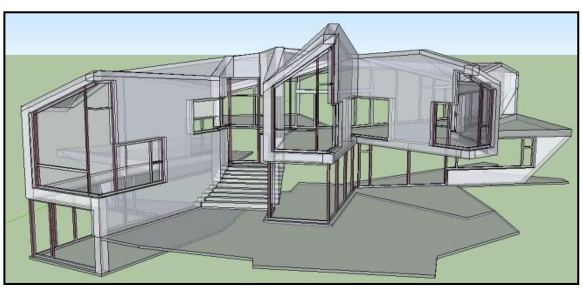


Ilustración 1: estructura de una casa

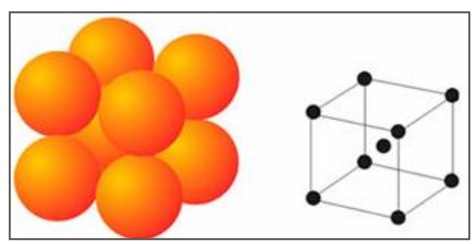


Ilustración 2. Estructura de un cubo centrado

También en el ámbito de la educación matemática la palabra estructura permite varios usos como indican Hoch y Dreyfus (2004). Incluso para una misma persona este término tiene diferentes significados, dependiendo del contexto en el que se utilice, y puede significar

[2] http://www.cinsasl.net/img/detalle_estructura.jpg&imgrefurl

diferentes cosas para diferentes personas. Si bien hay investigadores que no contemplan la necesidad de concretar el significado de este término, nosotras trataremos de precisar el que le vamos a asignar en este trabajo, al ser éste un elemento primordial del mismo.

La palabra estructura en matemáticas se utiliza en ocasiones para referir a un conjunto cerrado bajo una o varias operaciones, cumpliendo varios axiomas. En términos de Castro, Rico y Romero (1997, p.362) consiste en “un conjunto de entes abstractos expresados simbólicamente, dotado de unas operaciones o modos de componerlos y de unas relaciones mediante las que se comparan dichos entes”. En este caso se asigna el vocablo estructura a un sistema compuesto por un conjunto de objetos matemáticos, alguna operación u operaciones, así como ciertas propiedades y relaciones de y entre estos objetos y operaciones. Por ejemplo, la estructura del conjunto de los números naturales con la operación suma que es de semigrupo conmutativo, comprende los citados números, junto a la operación de suma y ciertas propiedades, entre ellas la conmutativa.

Este significado de estructura es, según Molina (2009), el más frecuente en matemáticas, pero este vocablo también se utiliza en expresiones aritméticas y algebraicas, para referirse a los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes elementos y a las relaciones que existen entre ellos (Molina, 2009). En este caso el término estructura se refiere a la forma gramatical de las expresiones (Esty, 1992). Es lo que Kieran (1991) denomina estructura superficial de una expresión y Kirshner (1989) estructura sintáctica.

Desde un punto de vista amplio, se puede decir que el término estructura, en matemáticas, se refiere a la forma en que una entidad se compone de partes, existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad (Hoch y Dreyfus, 2004). Con este mismo significado y para un ámbito general se presenta la idea de estructura cuando se hace una búsqueda de este vocablo a través de Internet: Estructura (del latín *structūra*) es la disposición y orden de las partes dentro de un todo. También puede entenderse como un sistema de conceptos coherentes enlazados, cuyo objetivo es precisar la esencia del objeto de estudio[3]. Así mismo el diccionario de la Real Academia Española (2001) en su

[3] http://es.wikipedia.org/wiki/Estructura

definición del término estructura, refiere a la a distribución de las partes de una cosa y a su orden.

II.5 Estructura Algebraica

En álgebra abstracta se emplea de manera general el término estructura algebraica para referir a un conjunto compacto que involucra una o más operaciones, que satisfacen algunos axiomas (Novotná y Hoch, 2008). Por otra parte Hoch y Dreyfus (2004), consideran que expresiones o frases algebraicas como la relación de igualdad o desigualdad entre dos expresiones algebraicas representan estructuras algebraicas. Así, según estos autores, dos ejemplos de estructuras de álgebra en el nivel de secundaria son las fracciones algebraicas y las ecuaciones cuadráticas.

Basándose en diversos factores como la forma gramatical (Esty, 1992), las analogías con la estructuras numéricas (Linchevski y Livneh, 1999) y las jerarquías (Sfard y Linchevski, 1994), Hoch (2003) discute y analiza la estructura de las expresiones del álgebra en secundaria. Dicho análisis le lleva a hacer una descripción de dicha estructura en términos de forma y orden. La forma está relacionada con la apariencia externa de una expresión algebraica y el orden con las relaciones que mantienen los componentes de dichas expresiones entre sí y con otras estructuras. Mediante el proceso de simplificación o transformación de una expresión, el cual implica un cambio de forma, puede revelarse el orden interno de la misma. Por ejemplo, si tomamos una expresión polinómica que represente una ecuación cuadrática podremos transformarla en otra expresión con forma estándar: $ax^2 + bx + c = 0$, siendo a, b y c números reales. El proceso de transformación de la ecuación dada a la forma estándar puede conducir a la solución ya sea por la factorización o utilizando la fórmula cuadrática. El orden interno también podría llevar a conocer el número de soluciones (0, 1 o 2 soluciones), y saber que estas soluciones son los puntos de intersección de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ con el eje X.

La reflexión que mantienen los autores que venimos siguiendo sobre la estructura en el álgebra, les lleva a plantearse la necesidad de determinar la estructura de dos expresiones algebraicas equivalentes. Concluyen que dos expresiones equivalentes son dos interpretaciones diferentes de la misma estructura. Tienen diferente forma externa pero los mismos componentes internos. Por ejemplo la ecuación $4x^2 - x^3 + 5(4 - 2x) = (3 - x^2)(6 + x)$ puede ser transformada en $10x^2 - 13x + 2 = 0$. Las dos ecuaciones son equivalentes, pero mientras que en la segunda su estructura es conocida, en la primera no lo es. En el caso de las dos expresiones $30x^2 - 28x + 6$ y $(5x - 3)(6x - 2)$, que son equivalentes, la primera es una expresión cuadrática y la segunda un producto de dos factores lineales, las dos tienen una estructura conocida y se les considera diferentes interpretaciones de la misma estructura. Saber qué interpretación es más útil tomar en un contexto dado, forma parte del sentido estructural.

II.6 Términos en una expresión algebraica

La equivalencia (también llamada igualdad) de dos expresiones algebraicas puede ser establecida o juzgada a partir de la relación entre las componentes o partes de la expresión. En dicho caso, se ha de analizar las expresiones explorando e identificando las relaciones tanto entre sus partes como entre las partes y el todo. El concepto "término", entendido como un par formado por un número y el símbolo operacional que le precede (Banerjee y Subramaniam, 2004, 2005) juega un papel importante en este contexto. Ellos destacan su potencial para ayudar a los alumnos a percibir la estructura de las expresiones aritméticas y a observar el paralelismo existente entre las expresiones aritméticas y las algebraicas. Los términos pueden ser términos simples ($+5$) o complejos, siendo éstos últimos de varios tipos: productos (e.g., $+ 3 \times 2$) o términos con paréntesis (e.g., - (4 $+2$)). Los términos complejos pueden contener factores numéricos, simbólicos o factores en paréntesis. Mientras que los términos simples se pueden combinar con facilidad, un término complejo no se puede combinar con un término simple a menos que el término complejo se convierta en uno o varios términos simples (Banerjee y Subramaniam, 2005). En las expresiones algebraicas, si un término compuesto (producto o suma) es sustituido por una variable o parámetro o viceversa, la estructura de ambas expresiones sigue siendo la misma. Por ejemplo, la estructura de la expresión $a^2 - b^2$ (diferencia de cuadrados) es la misma que la de la expresión $4x^6y^4 - 25z^8$ o la expresión $(x - 3)^4 - (x + 3)^4$ y viceversa (Novotná y Hoch, 2008).

La adquisición del concepto “término” requiere que se perciba el número, o numeral, con su signo como un todo y no como elementos separados (Banerjee y Subramaniam, 2005). Cuando la expresión incluye términos compuestos, la encapsulación de dos objetos diferentes y su coordinación de tal manera que sean considerados un mismo objeto se complica, no siendo extraño que algunos estudiantes no tengan éxito en dicha tarea (Tall y Thomas, 1991).

Se llama coeficiente numérico (o simplemente coeficiente) de un término a cualquier constante que aparezca en él como factor. Si en el término no aparece constante alguna, se entiende que el coeficiente es 1. El coeficiente de cualquier término de una expresión algebraica incluye el signo que le antecede. Dos o más términos se dice que son semejantes si son iguales salvo en los coeficientes que pueden ser diferentes. Las variables que intervienen como factores en dichos términos han de ser las mismas y están elevadas a las mismas potencias. Si una expresión algebraica contiene más de una expresión semejante es posible reducirlas a un solo término en virtud del axioma de distributividad (Barnett, 1984).

En el contexto de la equivalencia de expresiones algebraicas también está muy presente el concepto de igualdad, que comprende desde una instrucción para hacer algo a una relación entre dos expresiones que tienen el mismo valor (Molina, Castro, y Castro, 2009). Ambos conceptos, término e igualdad, dan soporte para evaluar expresiones y utilizar reglas (e.g., para encerrar entre paréntesis), y para conseguir reformular expresiones pasando a otras equivalentes.

II.7 Sentido estructural

El término sentido estructural fue introducido por Linchevski y Livneh (1999) en su reacción a la definición de conocimiento estructural de Kieran (1988) como la capacidad de identificar todas las formas equivalentes de una expresión. Las autoras expresan su desacuerdo con la misma y sugieren incluir, bajo el término de sentido estructural, dicha capacidad junto a la capacidad de discriminar entre las formas pertinentes de realizar la tarea ─por lo general una o dos formas─ y todas las demás. Posteriormente, Hoch y Dreyfus, interesados en este constructo han ido elaborando progresivas definiciones del mismo restringiéndose al contexto del álgebra escolar. Su primera definición tentativa fue presentada por Hoch en el CERME de 2003: “reconocer la estructura algebraica y utilizar las características apropiadas de una estructura en un contexto dado como guía para elegir las operaciones a realizar” (p.2). Hoch sugirió que un estudiante que se inclina por un método efectivo y minucioso en la transformación de una expresión algebraica está demostrando poseer buen sentido estructural.

Posteriormente, Hoch y Dreyfus (2004, 2005) precisan algunas de las habilidades que engloba el sentido estructural en el contexto del álgebra escolar: ver una expresión o una sentencia algebraica como una entidad, reconocer una expresión o sentencia algebraica como una estructura conocida, dividir una entidad en subestructuras, apreciar las conexiones mutuas entre estructuras y reconocer qué transformaciones es posible realizar y cuáles de éstas son de utilidad. Más recientemente (Hoch y Dreyfus, 2006) han concluido una definición más elaborada, formulada de manera operacional por medio de tres descriptores, que permite identificar si un alumno está utilizando sentido estructural en el contexto del álgebra de Educación Secundaria (ver apartado siguiente).

Novotná y Hoch (2008) conjeturan que el desarrollo del sentido estructural en contextos algebraicos en educación secundaria es un pre-requisito para el sentido estructural en contextos algebraicos abstractos requerido en niveles universitarios.

En el nivel educativo de secundaria, Hoch y Dreyfus (2006) consideran que el sentido estructural es una extensión del sentido simbólico que puede tener mucho que ver con la experiencia y algo en común con la intuición. Molina (2006), por su parte, argumenta que el sentido estructural comprende aspectos de los sentidos numérico, operacional y simbólico en tanto que muchas de las evidencias de sentido estructural destacadas por Hoch y Dreyfus (2004, 2005, 2006) pueden ser reconocidas como evidencias de sentido simbólico. Para visualizar esta afirmación proporciona el gráfico de la ilustración 3 en el que en particular señala (a la derecha de la ilustración) la diferente concepción de las operaciones en cada uno de estos constructos, desde el punto de vista de su estado en el proceso de reificación.

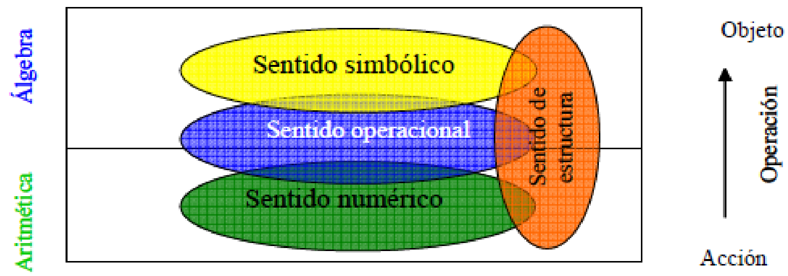


Ilustración 3**:** Sentidos relativos al aprendizaje y enseñanza de la aritmética y el álgebra (Molina, 2006, p. 94)

En conclusión, según estos autores que han promovido el constructo y a los que vamos citando, en términos generales el sentido estructural consiste en la capacidad de manipulación de expresiones que permite a los estudiantes hacer un mejor uso de técnicas algebraicas previamente aprendidas. Este constructo no sugiere un concepto nuevo, sino que enfatiza cierta forma de "poseer" el conocimiento. Se manifiesta a través de unos signos externos cuando el sujeto trabaja con expresiones aritméticas y, sobre todo algebraicas. Estos signos externos, producidos por una serie de habilidades y capacidades que se ponen en juego, son: reconocer expresiones que son equivalentes sin necesidad de operar, pudiendo ser cambiada una por otra en caso necesario; conocer qué expresión entre las equivalentes es más conveniente utilizar para cada ocasión; saber qué expresión, entre todas las equivalentes, es la más simple de todas y cuando es conveniente sustituir una por otra; entre otros. Con respecto a la enseñanza, no parece que el sentido estructural tenga que estar ligado a ciertas formas de enseñanza, aunque posiblemente habrá formas que lo promuevan más que otras. Estas son cuestiones aún no estudiadas.

II.8 Descriptores de Sentido estructural

En 2006, Hoch y Dreyfus presentaron una definición operacional de sentido estructural, por medio de tres descriptores, que permite identificar si un alumno está utilizando sentido estructural en el contexto del álgebra de Educación Secundaria. Dicen que un alumno muestra sentido estructural en dicho contexto si es capaz de:

SS1 Reconocer una estructura familiar en su forma más simple,

SS2 Tratar con un término compuesto como una única entidad y, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar en una forma más compleja,

SS3 Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.

En función de la complejidad de los términos que componen las expresiones con las que se esté trabajando, los autores subdividen los descriptores **SS2** y **SS3** en dos y tres sub-descriptores respectivamente:

SS2.a Donde el término compuesto contiene un producto o potencia pero no una suma/resta

SS2.b Donde el término compuesto contiene una suma/resta y posiblemente también un producto o potencia

SS3.a Donde la estructura está en su forma más simple

SS3.b Donde el término compuesto contiene un producto o potencia pero no una suma/resta

SS3.c Donde el término compuesto contiene una suma/resta y posiblemente también un producto o potencia

Lo que caracteriza a **SS2.a**, **SS2.b**, **SS3.b.** y **SS3.c** es la necesidad de tratar términos compuestos como si fueran una entidad.

Observamos aquí que, este refinamiento de la definición aportada previamente por Hoch y Dreyfus en 2006 está influenciado por su consideración de tareas en las que es necesario realizar transformaciones de expresiones algebraicas. Por ese motivo habilidades como *dividir una entidad en subestructuras y apreciar conexiones mutuas entre estructuras*, recogidas en la definición previa, no son enfatizadas al no considerarse incluidas dentro de estos descriptores. Sin embargo, en este trabajo, queremos destacarlas como habilidades implícitas dentro del constructo sentido estructural, las cuales pueden ser medidas separadamente de aquellas habilidades recogidas en los descriptores, por medio de tareas tales como la agrupación de expresiones según su misma estructura o la construcción de expresiones con estructura igual a otra dada. Por este motivo, proponemos añadir un descriptor (**SS4**) a los anteriores: “Distinguir subestructuras dentro de una entidad y reconocer relaciones entre ellas” y dos subdivisiones consistentes en:

SS4.a Las subestructuras forman parte de la misma expresión polinómica

SS4.b Las subestructuras forman parte de diferentes expresiones polinómicas (por ejemplo del numerador y del denominador).

Los siguientes son ejemplos relacionados con la expresión $a^2 - b^2$ para cada uno de estos descriptores del sentido estructural: En la tarea de factorizar la expresión $81 - x^2$, reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados e identificar los factores, correspondería a SS1. En la tarea de factorizar $(x - 3)^4 - (x + 3)^4$, tratar los binomios $(x - 3)^2$ y $(x + 3)^2$ como una sola entidad, reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados e identificar los factores implicados correspondería a SS2. En la tarea de factorizar $24x^6y^4 - 150z^8$, apreciar la posibilidad de la diferencia de cuadrados, extraer factor común para obtener $6(4x^6y^4 - 25z^8)$, tratar $2x^3y^2$ y $5z^4$ como entidades individuales, reconocer la diferencia de los cuadrados de estas entidades y, factores consecuentes correspondería al descriptor SS3.

Por tanto los indicadores de sentido estructural que vamos a manejar son cuatro:

SS1 Reconocer una estructura familiar en su forma más simple,

SS2 Tratar con un término compuesto como una única entidad y, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar en una forma más compleja,

SS3 Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.

SS4 Distinguir subestructuras dentro de una entidad y reconocer relaciones entre ellas.

II.9 Conocimiento de la estructura de la Aritmética y el Álgebra

La puesta en juego del sentido estructural requiere hacer uso de conocimiento sobre la estructura del álgebra y de la aritmética. Este conocimiento es el que permite identificar formas equivalentes de una expresión, así como discriminar entre las formas que interesa considerar para la actividad que se aborde (Kieran, 1989; Linchevski y Vinner, 1990).

En una recopilación efectuada por Molina (2006) se recoge información proporcionada por diversos autores (Kieran, 1989; Morris, 1999; Warren, 2001) que expresan que el conocimiento de la estructura aritmética y algebraica comprende conocimiento sobre: conjuntos de objetos matemáticos (números y/o variables numéricas), de operaciones entre ellos, de propiedades y relaciones de y entre estos objetos y sus operaciones (ej., equivalencia, desigualdad, asociatividad, conmutatividad, distributividad), y de las propiedades de relaciones cuantitativas (ej., transitividad e igualdad)

Investigadores anteriores han dejado constancia de que el conocimiento de la estructura de la aritmética y el álgebra se encuentra incrustado en la realización de variedad de tareas matemáticas tales como la interpretación de expresiones, el cálculo de valores de expresiones, juzgar la equivalencia de expresiones y realizar transformaciones que preservan la equivalencia (Chaiklin y Lesgold, 1984). Por ejemplo, este conocimiento incluye saber que un operador sólo se aplica al número dispuesto inmediatamente a su derecha, cuando no hay paréntesis, o conocer que la expresión $a + b + c$ puede ser agrupada como $(a + b) + c$ ó como $a + (b + c)$, (Molina, 2006).

Desde una visión del álgebra como aritmética generalizada, según Linchevski y Livneh (1999), algunos investigadores (e.g., Booth, 1988; Kieran, 1988, 1992) afirman que las dificultades de los estudiantes con la estructura matemática en el sistema algebraico reflejan las dificultades que estos estudiantes ya tienen con la estructura matemática en el sistema numérico. Booth (1981, 1984, 1988) hizo hincapié en que los estudiantes construyen sus nociones algebraicas sobre la base de su experiencia previa en la aritmética. Sugiere Booth (1988) que las dificultades de los estudiantes en álgebra, son heredadas de su conocimiento aritmético y se deben en parte a su falta de comprensión de diversas nociones estructurales en la aritmética. Greeno (1982), por otro lado, afirma que los estudiantes de álgebra principiantes separan las expresiones matemáticas en sus partes componentes de un modo que parece sin rumbo, equivocado y arbitrario.

Molina (2009) recoge dos tipos de estrategias utilizadas por los estudiantes en la resolución de expresiones aritméticas y algebraicas las cuales son matemáticamente correctas y, posiblemente, ambas satisfactorias para los docentes. En una de las estrategias se emplea un procedimiento estándar aprendido, sin atender a las características particulares de las expresiones con las que se estaba trabajando; en este caso se dice que se ha seguido un enfoque procedimental. En la otra estrategia se presta atención a las características particulares de las expresiones, es decir a su estructura, y ésta se utiliza para abordar la resolución de la actividad propuesta; se dice que se ha utilizado un enfoque estructural. Este enfoque es más rico desde el punto de vista del sentido estructural, pues según Tall y Thomas (1991) cuando los niños se sienten inhábiles para dar sentido a los conceptos, encubren sus dificultades acudiendo a acciones rutinarias con el fin de obtener respuestas correctas. En el enfoque procedimental el estudiante activa en su mente procedimientos aprendidos tras haber identificado el área a la que pertenece el problema. En cambio, el enfoque estructural, requiere atender a toda la expresión, analizarla e identificar su estructura para construir la estrategia de resolución, todo ello requiere un pensamiento más flexible. El reconocimiento de la estructura de una expresión aritmética o algebraica requiere del conocimiento de las relaciones matemáticas existentes entre los elementos que la componen.

En esta misma línea, a partir de los resultados de un estudio empírico, Morris (1999) insiste en que es más recomendable una enseñanza centrada en los conceptos de estructura que una larga experimentación procedimental con expresiones algebraicas dado que la mayoría de los alumnos requiere un largo periodo de tiempo para abstraer generalizaciones sobre la estructura de la aritmética y del álgebra que puedan ser aplicadas de unos contextos a otros.

II.10 Fracciones algebraicas

Dado que el estudio a realizar se basa en cómo trabajan los estudiantes cuando transforman fracciones algebraicas a su forma más simple, nos permitimos definir que es una fracción algebraica. Consideremos dos polinomios P(x) y Q(x). Si realizamos una división de estos polinomios, suponiendo Q(x) ≠ 0, solo se obtiene otro polinomio cuando la división resulte exacta. En el caso de que la división de P(x) entre Q(x) no resulte exacta, el resultado será una fracción algebraica o expresión racional (Barnett, 1984), que podemos expresar como P(x)/Q(x). De esta manera dos fracciones algebraicas son iguales o equivalentes si cumplen la siguiente regla

$$\frac{\mathrm{P(x)}}{\mathrm{Q(x)}} = \frac{\mathrm{R(x)}}{\mathrm{S(x)}} \Leftrightarrow \mathrm{P(x)S(x)} = \mathrm{R(x)Q(x)}$$

Esta definición de igualdad nos permite dividir el conjunto de todas las fracciones algebraicas en clases de equivalencias. Dentro de este subconjunto formado por todas aquellas fracciones algebraicas que son equivalentes a una dada, P(x)/Q(x), podemos elegir aquella que sea lo más sencilla posible en un cierto modo. Esta fracción canónica se obtiene descomponiendo los polinomios P(x) y Q(x) en factores irreducibles y eliminando a continuación en P(x) y Q(x) los factores comunes. Este procedimiento recibe el nombre de simplificación.

II.11 Igualdades Notables

Las igualdades notables (también llamadas identidades notables y productos notables), pertenecen al conjunto de las identidades algebraicas.

Las igualdades notables son el resultado de ciertos productos de binomios. Toda igualdad notable corresponde a una fórmula de factorización. La factorización en álgebra consiste en expresar un objeto (por ejemplo, un número compuesto, una matriz o un polinomio) como producto de otros objetos más simples a los que se les denomina factores. En el caso de los números se utilizan los números primos como factores, por ejemplo, para el número *35* su descomposición factorial sería a través de los números primos *7* y *5* *(5·7)* ya que el resultado de multiplicarlos da el objeto inicial, *35*. En el caso de un polinomio como $x^2+14x+49$ su descomposición en factores es $(x+7)^2$ o lo que es lo mismo $(x+7)\ (x+7)$. Los productos notables resultan de gran eficacia para abreviar algunos cálculos con expresiones algebraicas. Ahora bien no todas las expresiones algebraicas (o polinomios) se puede factorizar en el conjunto de los números reales. Entre los que sí se conocen métodos para hacerlo se encuentran:

a. Binomios: Diferencia de cuadrados. Suma o diferencia de cubos. Suma o diferencia de potencias impares iguales
b. Trinomios: Trinomio cuadrado perfecto. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$
c. Polinomios: Factor común. Ya sean coeficientes, monomio, binomio etc.

Dado que la notabilidad de una igualdad algebraica es algo no objetivo, no existe una lista que recoja todas las igualdades notables. Para nuestro trabajo vamos a considerar ciertas igualdades notables propias del álgebra de niveles de secundaria. Las cuatro igualdades notables seleccionadas destacan por ser de las más utilizadas en la práctica escolar.

En concreto las igualdades notables que tratamos en este estudio son las siguientes:

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ o equivalentemente $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$,
- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ o equivalentemente $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ o equivalentemente $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- $ac + bc = (a+b)c$ o equivalentemente $(a+b)c = ac + bc$

Como toda identidad algebraica, están compuestas por dos expresiones equivalentes que difieren en su forma.

A continuación analizamos la estructura de cada una de estas igualdades basándonos en su forma y en su orden, utilizando la nomenclatura de Banerjee y Subramaniam (2004).

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

La expresión $(a + b)^2$ se conoce como cuadrado de un binomio suma. Según su forma se trata de una potencia de exponente dos, es decir el cuadrado, de una expresión formada por una suma de dos sumandos. La forma de la expresión $a^2 + b^2 + 2ab$ consiste en la suma de tres términos: los dos primeros son cuadrados perfectos y el tercero es el doble del producto de la raíz cuadrada positiva de dichos cuadrados perfectos. Los sumandos de la primera expresión son las raíces cuadradas positivas de los cuadrados perfectos que aparecen en la segunda expresión.

- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

La expresión $(a - b)^2$ se conoce como cuadrado de un binomio resta. Según su forma se trata del cuadrado de la resta de dos elementos. La forma de la expresión $a^2 + b^2 - 2ab$, que se conoce también como trinomio cuadrado perfecto, viene dada por la suma de dos cuadrados perfectos a los que se resta el doble del producto de la raíz cuadrada positiva de dichos cuadrados perfectos. El minuendo y el substraendo de la primera expresión son las raíces cuadradas positivas de los cuadrados perfectos que aparecen en la segunda expresión.

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

La expresión (a - b) (a + b) representa dos binomios conjugados o lo que es igual el producto de la suma y la diferencia de un mismo par de elementos. En otras palabras su forma está constituida por dos binomios de grado uno cuyos primeros términos son iguales entre sí y sus segundos términos también son iguales pero de distinto signo. La forma de $a^2 - b^2$, expresión que se conoce como diferencia de cuadrados, consiste como dicho nombre indica, en la resta de dos cuadrados perfectos. Las raíces cuadradas de dichos cuadrados perfectos son las que actúan como sumandos y, minuendo y substraendo, respectivamente, en la primera de las expresiones.

- $ac + bc = (a + b)c$

A esta identidad notable se le suele denominar de forma diferente según la posición, respecto al signo igual, que ocupen las expresiones que componen ambos miembros. Si viene representada como $ac + bc = (a + b)c$, se le reconoce como la extracción de un factor común a dos monomios, en cambio si viene dada como $(a + b)c = ac + bc$ se le reconoce como la representación simbólica de la propiedad distributiva[4]. La forma de la expresión $ac + bc$ viene dada por la suma de dos productos que tienen un factor en común. La forma de la expresión $(a + b)c$ consiste en un producto, siendo uno de los factores una suma de dos sumandos. El factor común de los dos productos de la primera expresión, coincide con uno de los factores de la segunda expresión, y los otros dos factores que componen los sumandos de la primera expresión son los sumandos del factor suma de la segunda expresión.

[4] A diferencia de las otras identidades consideradas en este estudio, esta identidad es generalizable a casos en que aparezcan un mayor número de sumandos.

CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO

Dedicamos esta tercera parte de la memoria a describir las características metodológicas de nuestro trabajo y a exponer el proceso seguido para diseñar y llevar a cabo la recogida de datos.

III.1 Tipo de investigación realizada

Esta investigación es considerada de carácter exploratorio ya que se conoce poco sobre el problema en estudio debido a que la problemática que envuelve al sentido estructural ha sido aún poco estudiada. En nuestro caso pretendemos recopilar información preliminar que nos ayuden a definir el problema con mayor precisión y nos sugiera hipótesis de investigación al respecto sobre las que continuar nuestro trabajo sobre el tema. Clasificamos, la investigación como de carácter descriptivo ya que se persigue dar una descripción detallada del sentido estructural de los estudiantes según es manifestado en sus producciones en las tareas propuestas. Esta investigación, además es de carácter cualitativo, ya que se basa en la toma de muestras pequeñas y se requiere un profundo entendimiento del comportamiento de los sujetos en estudio.

III.2 Sujetos

Los sujetos que han intervenido en el estudio han sido tres grupos de estudiantes de edades comprendidas entre 15 y 18 años, alumnos de dos centros de secundaria diferentes durante el curso académico 2009-2010. Dos de dichos grupos, de 17 (10 chicos y 7 chicas) y de 12 (7 chicos y 5 chicas) alumnos, respectivamente, pertenecían a un Instituto de Alcalá La Real (Jaén) y cursaban 4º curso de ESO. Un tercer grupo de 33 alumnos (14 chicos y 19 chicas), pertenecía a un Instituto de la ciudad de Granada, situado en la zona céntrica de esta ciudad, y cursaban 1º de bachillerato. Estos grupos de estudiantes no fueron escogidos al azar sino que su selección fue resultado de la disponibilidad de sus profesores para colaborar en esta investigación.

Estos grupos de alumnos han cumplido diferentes papeles dentro del proceso de investigación. Los dos primeros, pertenecientes al I.E.S. Antonio Mendoza de Alcalá La Real, nos han permitido poner a punto el instrumento de recogida de datos e identificar el curso adecuado para su implementación, respectivamente. El grupo del Instituto de Granada, nos ha servido para recoger los datos empíricos sobre los que realizamos el análisis que se presenta en esta memoria.

III.3 Proceso de diseño del instrumento

Una vez planteado nuestro problema de investigación, al no contar con un instrumento preparado y utilizado por otros investigadores para una investigación similar, nos planteamos construir una prueba que nos permitiese recoger la información necesaria para dar cumplimiento a nuestros objetivos de investigación. Este diseño estuvo guiado por los descriptores de sentido estructural que señalan Hoch y Dreyfus (2006), los cuales nos guiaron a seleccionar la simplificación de fracciones algebraicas como contexto en el cual plantear la manipulación de expresiones algebraicas involucrando las igualdades notables seleccionadas (ver capítulo 2). Teniendo en cuenta el tercero de los descriptores del sentido estructural (SS3), “Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura”, decidimos que dicho contexto era adecuado por permitir que la manipulación de las expresiones tuviera un propósito para los estudiantes que diera sentido a la selección de las manipulaciones a realizar. En este contexto la aplicación de las igualdades notables era necesaria para simplificar las fracciones propuestas. De este modo el indicador SS3 estaría implicado en todas las tareas. Como posteriormente se describe, los otros dos indicadores, SS1 y SS2, se consideran adicionalmente, de forma separada, en el diseño de las tareas.

A continuación detallamos los pasos seguidos hasta llegar al diseño definitivo de la prueba utilizada.

PRIMER PASO: Diseño de una prueba piloto

Preparamos una prueba compuesta por seis tareas, con los mismos cuatro apartados en cada una de ellas (ver ilustración 4). La diferencia entre las tareas radicaba en la expresión con la que debían trabajar en cada caso los estudiantes. Junto con la prueba escrita se les proporcionó a los estudiantes una relación escrita de una serie de igualdades notables (a lo que denominamos plantilla), algunas de las cuales estaban involucradas en la prueba, estando cada una identificada por un código de dos letras iguales (e.g, AA) (ver Anexo A).

I. Modifica esta expresión para obtener una equivalente más sencilla, utilizando una o más igualdades de la plantilla.

II. Indica el código de la o las igualdades que has utilizado ____________________.

III. Explica tu elección indicando la similitud que hay entre la igualdad utilizada y el ejercicio.

IV. Analiza si en la plantilla hay otra u otras igualdades que podías haber utilizado. Si las hay escribe su código____________________.

Ilustración 4: Apartados incluidos en cada tarea en la primera versión de la prueba.

Como se muestra en la ilustración 4, en cada tarea los estudiantes debían transformar la fracción algebraica dada para hacerla más sencilla, indicando cuál de las igualdades notables suministradas en la plantilla habían utilizado y si era posible utilizar alguna o algunas otras, así como justificar la selección realizada explicando la relación identificada entre la fracción de la tarea y la igualdad utilizada.

La tabla 1 muestra las fracciones algebraicas que fueron consideradas en esta primera versión de la prueba. Para el diseño de estas expresiones se consideraron las cuatro igualdades notables seleccionadas (ver capítulo 2). Se construyeron cuatro fracciones involucrando cada igualdad notable de forma independiente, y otras dos fracciones que combinaban dos de estas igualdades. Así mismo, en el diseño de las fracciones se obligó a que tres de ellas implicaran el uso del primer indicador de sentido estructural (SS1: Reconocer una estructura familiar en su forma más simple) y otras tres el segundo de dichos indicadores (SS2: Tratar con un término compuesto como una única entidad y, a través de una sustitución adecuada, reconocer una estructura familiar en una forma más compleja) (Ver tabla 1).

Tarea	Fracción algebraica	Igualdades notables	Descriptores de sentido estructural involucrados		
			SS1	SS2	SS3
1	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} =$	Cuadrado de una Diferencia/ Trinomio Cuadrado	X		X
2	$\frac{a^2-ab}{ab+b^2}\cdot\frac{a^2+ab}{ab-b^2} =$	Factor Común/Propiedad Distributiva	X		X
3	$\frac{x^2-2x+1}{x^2-1} =$	Cuadrado de una Diferencia/ Trinomio Cuadrado Producto Suma por Diferencia/ Diferencia de Cuadrados	X		X
4	$\frac{2(7x^2+1)}{49x^4+1+14x^2} =$	Cuadrado de una Suma/ Trinomio Cuadrado		X	X
5	$\frac{4x^2-1}{(2x+1)(2x-1)} =$	Producto Suma por Diferencia / Diferencia de Cuadrados		X	X
6	$\frac{2m(2m-1)}{8m^3-8m^2+2m} =$	Cuadrado de una Diferencia/ Trinomio Cuadrado Factor Común/ Propiedad Distributiva		X	X

Tabla 1: Fracciones Algebraicas consideradas en la primera prueba y sus correspondientes descriptores de Sentido Estructural.

SEGUNDO PASO: Aplicación de la prueba piloto

Con el objetivo de comprobar el funcionamiento de la prueba con estudiantes de secundaria, la propusimos a uno de los grupos anteriormente mencionados del Instituto de Alcalá la Real. El grupo estaba formado por 17 estudiantes (10 chicos y 7 chicas) de 4º curso de la ESO. Una vez analizados los resultados, comprobamos que sólo parte de la información que pretendíamos recoger era posible hacerlo con los ítems propuestos, pues sólo las respuestas al primero de los apartados de las tareas eran ricas en información. Además observamos que, si bien los estudiantes se tomaron con mucho interés el trabajo de dar respuesta a las tareas planteadas, algunas de ellas les resultaron demasiado complejas. Por otra parte, aunque no se requirió mucho tiempo para resolver la prueba (algo más de 20 minutos en total), resultó bastante monótona a los estudiantes por ser muy repetitiva en las actuaciones solicitadas en cada tarea. Todo ello nos llevó a reelaborar el instrumento.

TERCER PASO: Diseño de la prueba definitiva

Se reelaboró la versión definitiva de la prueba. Para la nueva versión se decidió:

i) Reducir la complejidad de las fracciones consideradas

ii) Incluir sólo 4 tareas, cada una de ellas compuesta de dos partes junto con la petición de explicación de lo realizado en cada caso (4 apartados en total).

iii) Mantener el primer apartado de la prueba piloto en el que se pedía simplificar la expresión y acompañar éste de otra cuestión en la que se pide la construcción de una expresión de igual estructura que la dada.

iv) Prescindir de la plantilla (o relación de igualdades notables)

v) Recoger los datos con alumnos de un curso superior, es decir de 1º de Bachillerato, si bien probaríamos también con otro grupo de 4º de ESO (diferente al anterior) para comprobar cuán adecuada era la prueba a cada uno de estos cursos.

III.4 Descripción del instrumento utilizado

La ilustración 5 muestra la redacción final de los cuatro apartados que componen cada tarea en la versión definitiva de la prueba. En el primero de ellos se pide al estudiante que modifique la expresión dada para obtener una expresión equivalente más sencilla, para lo cual deberá:

1º Factorizar o desarrollar (expansionar) el numerador y/o el denominador.

2º Identificar factores comunes en ambos términos

3º Simplificar, eliminando factores comunes del numerador y del denominador. En el caso de simplificar todos los factores comunes obtendrá la fracción equivalente denominada irreducible.

En el apartado (c) de las tareas se trata de que el alumno analice la expresión dada en el apartado (a) de esa misma tarea, y construya otra expresión diferente con igual estructura. Le sugerimos que utilice diferentes números y letras para enfatizar la idea de que la expresión ha de ser diferente y no una equivalente a la dada. La creación de una expresión con estructura igual a una dada evidencia la percepción de la expresión tanto en su forma como en sus relaciones, lo que hace la tarea sea un componente idóneo para estudiar el sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2010). Sobre la importancia de la tarea, los citados autores (Hoch y Dreyfus, 2010) recogen la misma idea de Rissland (1991) y (Bills et al., 2006), quienes expresan que el arte de generar expresiones o estructuras es una actividad cognitiva muy significativa y que la capacidad de inventar ejemplos de acuerdo a la situación matemática es una herramienta cognitiva de expertos, que a menudo necesitan los principiantes.

En los apartados (b) y (d) se le pide al estudiante que explique lo que ha hecho previamente. Se solicita esta explicación, con el fin de obtener información adicional, si es posible, sobre la forma en que ha abordado la tarea. Consideramos que la necesidad de explicar un proceso con palabras hace al estudiante pensar con más cuidado sobre lo hecho (Hoch y Dreyfus, 2010).

a. *Modifica esta expresión para obtener una expresión equivalente más sencilla.*
b. *Explica lo que has hecho.*
c. *Analiza esta expresión y construye otra expresión que tenga la misma estructura pero con diferentes números y letras.*
d. *Explica lo que has hecho*.

Ilustración 5: Apartados que componen cada una de las tareas de la versión definitiva de la prueba.

La Tabla 2 muestra las fracciones algebraicas consideradas en cada tarea así como la relación de las mismas con las igualdades notables seleccionadas. Tres de las fracciones involucran una de las igualdades notables salvo la de la tarea 4 que involucra dos aunque sólo una de ellas resulta de utilidad para la simplificación de la fracción.

El tipo de expresiones que se consideraron en cada tarea condiciona los descriptores de sentido estructural que se pueden poner de manifiesto en las mismas. En el caso que nos ocupa el diseño de las tareas se realizó de forma que en todas ellas fuera posible el descriptor SS3 pues las tareas fueron construidas como fracciones algebraicas a simplificar y, por lo tanto, en todas ellas el estudiante debía de tomar decisiones sobre la mejor estrategia a seguir de acuerdo con ese objetivo. Un ejemplo de tarea en la que no se pondría en juego el descriptor SS3 es “emparejar expresiones que tengan la misma estructura”. El mejor uso de la estructura en una tarea viene dado por cuál es el objetivo que persigue el alumno con sus manipulaciones.

Tarea	Fracción algebraica	Igualdades notables
1	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}=$	Cuadrado de una Diferencia/ Trinomio Cuadrado
2	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}=$	Factor Común/ Propiedad Distributiva
3	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}=$	Producto Suma por Diferencia/ Diferencia de Cuadrados
4	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=$	Cuadrado de una Suma/ Trinomio Cuadrado y Producto Suma por Diferencia/ Diferencia de Cuadrados

Tabla 2: Fracciones algebraicas consideradas en la prueba definitiva e igualdades notables que involucran.

Las tablas 3 y 4 precisan los descriptores del Sentido Estructural que pueden ponerse de manifiesto en las partes (a) y (c) de las tareas respectivamente.

Tarea, parte (a)	Descriptores de sentido estructural							
	SS1	**SS2**		**SS3**			**SS4**	
		a	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**
$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$	X			X			X	X
$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$		X			X		X	X
$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$		X			X		X	X
$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$		X			X		X	X

Tabla 3. Relación entre descriptores del sentido estructural y parte (a) de las tareas.

Tarea, parte (c)	Descriptores de sentido estructural							
	SS1	**SS2**		**SS3**			**SS4**	
		a	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**
$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$	X						X	X
$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$		X	X				X	X
$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$		X	X				X	X
$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$		X	X				X	X

Tabla 4. Relación entre descriptores del Sentido Estructural y parte (c) de las tareas.

III.5 Descripción de las expresiones algebraicas aplicadas en las tareas

En este apartado describimos las diferentes fracciones algebraicas involucradas en las tareas propuestas.

Descripción de la fracción:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$$

Está compuesta en el numerador por uno de los miembros de la igualdad notable trinomio cuadrado perfecto, que al ser factorizada se convierte en el cuadrado de una diferencia. En el denominador está compuesta por dos factores, binomios de grados 2 y 1 respectivamente, el primero de ellos es el cuadrado de una diferencia. Numerador y denominador comparten la igualdad notable trinomio cuadrado perfecto/cuadrado de una diferencia: $(x-7)^2=x^2-14x+49$

Descripción de la fracción:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$$

Está compuesta en el numerador por el producto de un monomio y un binomio de grado 1, que a su vez constituyen una expresión ya factorizada. En el denominador se tiene una expresión algebraica no factorizada de grado cinco, donde algunos de los factores son comunes con los factores del numerador.

<u>Descripción de la fracción:</u>

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$$

Consta en el numerador de dos factores binomios de grado dos, de los cuales el primer factor constituye una diferencia de cuadrados. Visto de otra forma, ambos binomios tienen la estructura de un producto de suma por diferencia o lo que es igual el producto de dos binomios conjugados, donde el mayor grado de los términos contenidos en cada binomio es dos. En el denominador se tienen dos factores binomios de grado uno, cuya estructura es la de un producto de suma por diferencia, el mayor grado de los términos contenidos en cada binomio es uno. En esta fracción, numerador y denominador, comparten la igualdad notables involucradas, ambas del tipo suma por diferencia/diferencia de cuadrados: $(2x-1)(2x+1) = 4x^2-1$ y $(4x^2-1)(4x^2+1) = 16x^4 - 1$; si bien sólo la primera de ellas resulta de utilidad para simplificar la fracción.

<u>Descripción de la fracción:</u>

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$$

Está compuesta en el numerador por dos factores binomios de grados dos, uno de ellos elevado al cuadrado. La estructura del primer factor es la del cuadrado de una diferencia. En el denominador se tiene la estructura de cuadrado de una suma en su forma expansionada o desarrollada, es decir es un trinomio cuadrado perfecto. En esta fracción hay dos igualdades notables involucradas: cuadrado de una diferencia/trinomio cuadrado perfecto $(5a^2-1)^2 = 25a^4+1+10a^2$ y diferencia de cuadrados $(5a^2-1)(5a^2+1) = 25a^4-1$; si bien sólo la primera de ellas resulta de utilidad para simplificar la fracción.

Consideramos que los estudiantes son conocedores de estas igualdades, han realizado estudios básicos de ellas (se introducen en IIº de ESO) y por tanto se encuentran en condición de poder elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de la expresión algebraica.

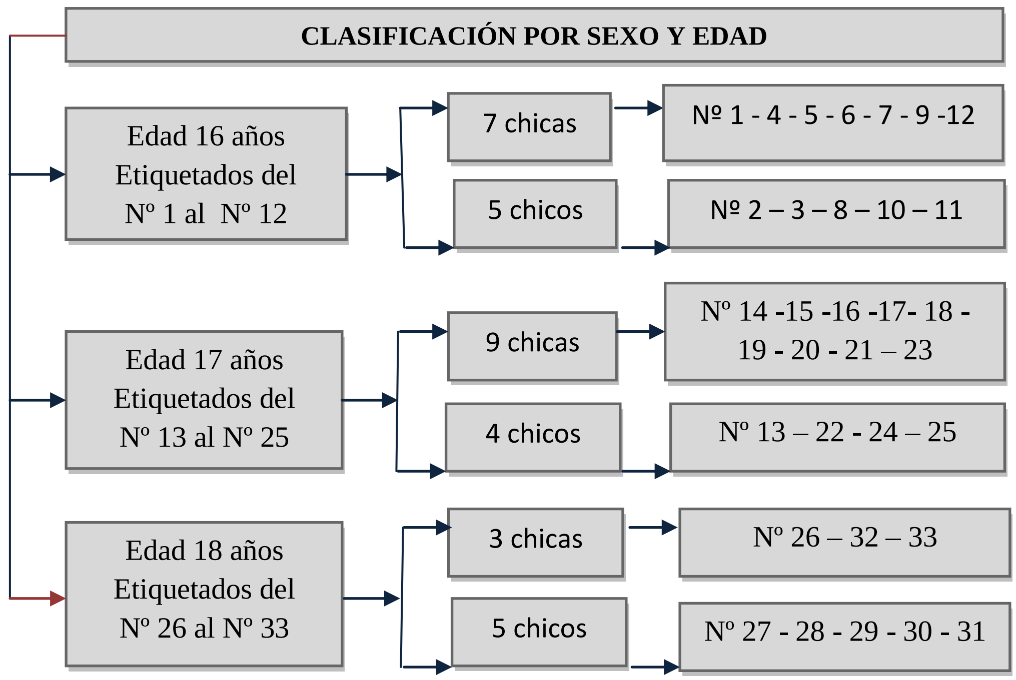
III.6 Aplicación del Instrumento

En el Instituto de Educación Secundaria de Granada la prueba fue aplicada el día 21 de mayo de 2010, durante la sexta hora de clases, de 12:45 a 1:45 horas. Los estudiantes trabajaron bajo la observación de la alumna investigadora y la profesora de matemáticas que atiende al grupo. Los estudiantes no sabían que se les iba aplicar tal prueba. Fueron informados en el momento. Se les explicó que se trataba de una investigación del Departamento de Didáctica de La Matemática de la Universidad de Granada, que se requería de su colaboración y que su aportación sería muy valiosa para nuestra investigación. Al iniciar la prueba cuestionaron si podían utilizar calculadora. Se les respondió que sí podían hacer uso de ella, pero en ningún momento se les vio utilizarla. No se les permitió sacar ningún papel adicional al que se les había entregado, indicándoles que debían escribir todo en las hojas que se les había entregado. En total la prueba tuvo una duración de 50 minutos, incluyendo los primeros 5 minutos de instrucciones. Los estudiantes trabajaron individualmente. Se observó que se esforzaron por resolver al máximo las tareas, siendo pocos los que dejaron algunas partes de las mismas sin resolver.

En el Instituto Alcalá La Real de Jaén, este mismo instrumento fue aplicado a un grupo de alumnos de 4º de Educación Secundaria Obligatoria, la misma se mostró no adecuada para para este nivel ya que no nos proporcionó suficiente información sobre el constructo a estudiar.

III.7 Etiqueta de estudiantes por sexo y edad

Los estudiantes han sido identificados y aparecerán nombrados por números, con el propósito de guardar la confidencialidad de sus nombres. A continuación se muestra en el esquema 1 la clasificación de los 33 estudiantes que participaron en el estudio, los cuales están ordenados por edades. Del Nº1 al Nº12 la edad es 16 años, del Nº13 al Nº25 la edad es 17 años y del Nº26 al Nº33 la edad es 18 años. Hay un total de 12 estudiantes con 16 años, 13 estudiantes con 17 años y 8 estudiantes con 18 años. De los primeros 12 estudiantes, 7 son chicas y 5 son chicos. De los siguientes 13 estudiantes, 9 son chicas y 4 son chicos. Y de los 8 estudiantes restantes, hay 3 chicas y 5 chicos, tal como se esquematiza a continuación:



Esquema 1. Clasificación por sexo y edad de los estudiantes de prueba.

CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE DATOS

En este capítulo presentamos el análisis realizado de los datos recogidos en esta investigación por medio de la prueba descrita en el capítulo anterior. Este análisis persigue dar respuesta a tres objetivos específicos de este trabajo que recordamos a continuación: **O.3**: Analizar el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de 1º de Bachillerato al simplificar y construir fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. **O.4**: Estudiar el comportamiento de estudiantes de 1º de Bachillerato, cuando han de reproducir la estructura de fracciones algebraicas dadas. **O.5**: Identificar errores y dificultades que encuentran los estudiantes para reconocer la estructura de una expresión algebraica.

Dado que la prueba elaborada para la recogida de datos incluye dos tipos de actividades de naturaleza diferente ─ simplificar y construir fracciones algebraicas─, las cuales requieren que los estudiantes pongan en juego distintas capacidades para su ejecución, realizamos de forma separada, y por medio de diferentes criterios, el análisis del desempeño de los estudiantes en los apartados (a) y (c) de las tareas. Para el análisis de las actuaciones de los mismos en el apartado (a) de las tareas, en el que los alumnos trabajan en la simplificación de las fracciones algebraicas, nos hemos centrado en las estrategias que utilizan para hacer las transformaciones en las expresiones dadas. Para el análisis de las fracciones algebraicas construidas en el apartado (c) nos hemos detenido en sus producciones, examinando la conservación de la estructura de las fracciones dadas. Posteriormente establecemos la relación entre dichas estrategias y producciones con los cuatro descriptores que hemos considerado.

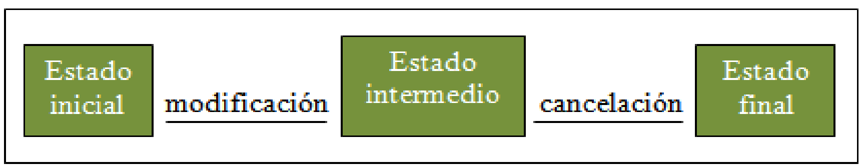
Los apartados (b) y (d) que corresponden a explicaciones que los estudiantes han de dar sobre su acción a los apartados (a) y (c), respectivamente a veces, proporcionan información valiosa de su pensamiento y nos han ayudado a interpretar sus producciones.

I PARTE: ANÁLISIS DEL APARTADO (a) DE LAS TAREAS

IV.1 Modelos de actuación

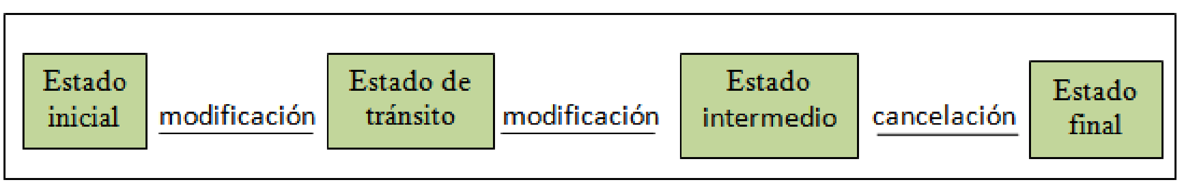
Una vez analizadas las pruebas, se detectaron tres modelos de actuación que los estudiantes siguieron en la parte (a) de las cuatro tareas.

*Modelo A***.** Este modelo consta de dos pasos los cuales hemos llamado modificación y cancelación, con un estado intermedio además del inicial y el final. Dicha estructura se muestra en el Esquema 2. El estado intermedio presenta una fracción equivalente a la inicial en la cuál es más aparente la existencia de factores comunes entre el numerador y el denominador, y por tanto la posibilidad de realizar una cancelación de los mismos. A este modelo se le ha designado el color verde oscuro para identificarlo, diferenciándolo así de otros modelos.



Esquema 2. Modelo A

Modelo B. Este modelo consta de tres pasos como se muestra en el Esquema 3. Hemos denominado a los pasos modificación y cancelación, como en el modelo A, y a los estados de tránsito e intermedio. El estado de tránsito es una expresión equivalente a la fracción inicial en la cual aún no es perceptible la posibilidad de cancelación de términos en el numerador y denominador. El estado intermedio, al igual que en el modelo A, manifiesta con mayor claridad la posibilidad de cancelación de algunos términos. A este modelo se le ha designado el color verde claro.



Esquema 3. Modelo B

Modelo C. Consta de más de tres pasos. No hacemos esquema de este modelo debido a que engloba casuísticas diversas en cuanto al número de pasos y los estados que lo componen. Si bien consta efectivamente de un estado inicial, no se llega a la simplificación de la fracción dada debido ya sea a que algunas de las transformaciones realizadas en la expresión dada no son correctas o a que se pierden al hacer las transformaciones.

Los modelos A y B llevan a soluciones exitosas de la tarea, no así el modelo C. Basándonos en estos tres modelos identificados en las producciones de los estudiantes, a continuación distinguimos diferentes estrategias empleadas por los mismos en la realización de cada tarea las cuales se enmarcan en algunos de estos modelos.

IV.2. Estrategias

Al realizar las tareas, los estudiantes siguen diferentes estrategias, unas exitosas y otras no. A continuación describimos, para cada tarea, las diferentes estrategias que hemos identificado en las producciones de los estudiantes. Las denotamos de forma diferente según se trate de estrategias exitosas "EE" o no exitosas "EQ". De este modo escribiremos i-EEn para denotar a la estrategia exitosa, número n puesta de manifiesto en la tarea i, tomando i los valores 1, 2, 3 ó 4. Adicionalmente distinguimos aquellos casos en los que el estudiante inicia alguna estrategia exitosa pero no llega a culminar la tarea, añadiendo a dicha nomenclatura una I que significa "Interrumpe" (por ejemplo, en el caso de la tarea 1, 1-EE3 I denota a la interrupción de tercera estrategia exitosa). En cambio, si el estudiante inicia una estrategia exitosa pero luego comete algún error añadimos a la denominación de dicha estrategia una Q (ejemplo 1-EE3 Q).

Para el caso de cada tarea, vamos a presentar las estrategias en una tabla de doble entrada tal y como la que se muestra a continuación (ver tabla 6). Por columnas y filas, distinguimos entre las estrategias que implican o no una modificación del numerador y del denominador, respectivamente. No modificar el numerador ni el denominador no tiene interés en nuestro caso ya que correspondería a no hacer la tarea, por ese motivo no se considera. Además se detalla el color a cada una de las estrategias siguiendo los colores de los modelos. Recordamos que para el modelo A se ha elegido un color verde oscuro, para el modelo B un color verde claro y el modelo C, que corresponde a las estrategias no exitosas, como no lleva esquema se le ha designado un color blanco. Estos colores se utilizan en las tablas siguientes que describen el sentido estructural de los estudiantes con respecto a la primera parte de las tareas.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Estrategias</th><th colspan="2">Modifica P(x)</th></tr>
<tr><td>No</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Modifica Q(x)</td><td>No</td><td>No se considera</td><td></td></tr>
<tr><td>Sí</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Tabla 6. Modelo de tabla para las estrategias.

IV.2.1 Tarea 1

Recordamos que el apartado (a) de la Tarea 1 pide a los estudiantes modificar la expresión $\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ para obtener una expresión equivalente más sencilla. La Tabla 7 recoge las estrategias asociadas a esta tarea. Se identificaron 6 estrategias, 5 de ellas exitosas y una no exitosa. De las cinco estrategias exitosas tres corresponden al modelo A y dos al modelo B, las cuales describimos a continuación:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Estrategias Tarea 1 (a)</th><th colspan="3">Modifica P(x)</th></tr>
<tr><td>No</td><td colspan="2">Sí</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Modifica Q(x)</td><td rowspan="3">No</td><td rowspan="3">No se considera</td><td rowspan="3">Aplica Factorización</td><td>Igualdad Notable Percepción. 1-EE1</td></tr>
<tr><td>Ruffini 1-EE2</td></tr>
<tr><td>2º Grado 1-EE3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sí</td><td>Aplica Igualdad Notable. Desarrollo cuadrado de un binomio. Percepción 1-EE4</td><td colspan="2" rowspan="2">Aplica Igualdad Notable. Factoriza y agrupa potencias Percepción. 1-EE5</td></tr>
<tr><td>Agrupa Potencias. 1-EQ</td></tr>
</table>

Tabla 7. Estrategias de la Tarea 1, parte (a).

En el caso en que el estudiante sólo modifica el numerador surgen tres estrategias exitosas. En las tres el estudiante obtiene una factorización del numerador que le permite posteriormente simplificar la fracción obteniendo su forma canónica o irreducible. La diferencia que existe entre estas estrategias radica en cómo se obtiene dicha factorización:

1. En la primera de ellas, 1-EE1, se obtiene a simple vista, por simple inspección o percepción de la expresión aplicando una igualdad notable (modelo A). Tal como se detalla en la ilustración 6.

$$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{x-7}$$

Ilustración 6

2. En la segunda estrategia, 1-EE2, se obtiene aplicando el método de Ruffini a la expresión que compone el numerador, (modelo B).
3. En la tercera, 1-EE3, se obtiene aplicando la fórmula cuadrática (modelo B).

En el caso en que el estudiante sólo modifica el denominador surgen dos estrategias: una exitosa (1-EE4) y otra no exitosa (1-EQ1).

- Estrategia 1-EE4: El estudiante desarrolla el cuadrado de la diferencia que aparece en el denominador y, posteriormente simplifica la expresión (modelo A). Ver ilustración 7.

$$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2-14x+49}{(x^2-14x+49)(x-7)} = \frac{1}{x-7}$$

Ilustración 7

- Estrategia 1-EQ1: El estudiante opera desarrollando las potencias en el denominador no obteniendo una simplificación de la fracción (modelo C).

Por último tenemos el caso en que el estudiante modifica tanto el numerador como el denominador, en el que se identifica sólo una estrategia, exitosa, 1-EE5 (modelo A). En este caso el estudiante factoriza el numerador de forma análoga al caso de la estrategia 1-EE1, es decir, por inspección o percepción de la expresión. Además realiza operaciones en las potencias que componen el denominador, es decir las agrupa. A partir de ambas modificaciones simplifica la fracción. Ver ilustración 8.

$$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^3} = \frac{1}{x-7}$$

Ilustración 8

IV.2.2 Tarea 2

El apartado (a) de la Tarea 2 propone modificar la expresión dada a continuación $\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$ para obtener una expresión equivalente más sencilla. Esquematizamos en la tabla 8 las estrategias presentadas por los estudiantes en esta tarea. Distinguimos dos estrategias exitosas y una no exitosa. La primera estrategia 2-EE1 corresponde al modelo A y la segunda estrategia 2-EE2 corresponde al modelo B.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Estrategias
Tarea 2 (a)</th><th colspan="2">Modifica P(x)</th></tr>
<tr><td>No</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Modifica Q(x)</td><td>No</td><td>No se considera</td><td>Opera
(Propiedad distributiva)
2- EQ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sí</td><td>Extrae Factor Común de Mayor Grado
Percepción. 2-EE1</td><td rowspan="2">No se considera</td></tr>
<tr><td>Extrae Factor Común de Menor Grado
Percepción. 2-EE2</td></tr>
</table>

Tabla 8. Estrategias de la Tarea 2, parte (a).

En esta tarea, si el estudiante mantiene la estructura de la expresión del numerador y modifica la estructura de la expresión del denominador, surgen dos estrategias exitosas (ver ilustración 9). Ambas estrategias tienen un mismo origen, factorizar los monomios que componen el denominador y extraer un factor común. La diferencia entre ambas estrategias radica en si el factor extraído es el máximo común divisor de los monomios, es decir $2m^4$ o es el menor de los divisores o sea 2m.

$$2-EE1 \qquad \frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m(2m-1)}{2m^4(2m-1)} = \frac{1}{m^3}$$

$$2-EE2 \qquad \frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m(2m-1)}{2m(2m^4-m^3)} = \frac{2m-1}{m^3(2m-1)} = \frac{1}{m^3}$$

Ilustración 9

Si el estudiante modifica el numerador, aplicando la propiedad distributiva y conserva el denominador, no obtiene una simplificación de la fracción. Denotamos EQ a esta estrategia no exitosa. Si extrae factor común solamente de las letras en el denominador y no extrae máximo común divisor (M.C.D.) de los coeficientes su búsqueda de la solución queda interrumpida.

IV.2.3 Tarea 3

El apartado (a) de la Tarea 3 propone modificar igual que en las otras tres la expresión $\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$ para obtener una expresión equivalente más sencilla. En este caso los estudiantes manipularon de diversas formas la igualdad notable diferencia de cuadrado perfecto, ello produce cinco estrategias exitosas, tres de ellas correspondientes al modelo A y otras dos al modelo B. Sólo hubo una estrategia no exitosa. La tabla 9 esquematiza las estrategias presentadas por los estudiantes en la tercera tarea.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Estrategias Tarea 3 (a)</th><th colspan="2">Modifica P(x)</th></tr>
<tr><td>No</td><td>Sí</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Modifica Q(x)</td><td rowspan="2">No</td><td rowspan="2">No se considera</td><td>Igualdad Notable.
Factoriza Diferencia de Cuadrados.
Percepción. 3-EE1</td></tr>
<tr><td>Operaciones Diversas. 3-EQ</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sí</td><td>Igualdad Notable.
Desarrolla Producto Suma por Diferencia. Percepción
3-EE2</td><td>Igualdad Notable.
Desarrolla Producto Suma por Diferencia. Percepción.
3-EE4</td></tr>
<tr><td>Producto Suma por Diferencia.
Aplica Propiedad Distributiva
3-EE3</td><td>Producto Suma por Diferencia.
Aplica Propiedad Distributiva.
3-EE5</td></tr>
</table>

Tabla 9. Estrategias de la Tarea 3, parte (a).

Cuando el estudiante modifica el numerador y mantiene el denominador surge la estrategia exitosa 3-EE1 que consiste en factorizar la diferencia de cuadrados que aparece en el numerador por inspección o percepción y posteriormente, simplificar la fracción, (modelo A). Si el estudiante mantiene el numerador y modifica el denominador surgen las estrategias 3-EE2 y 3-EE3. La estrategia 3-EE2 consiste en desarrollar la expresión del denominador aplicando igualdad notable, (modelo A), y la estrategia 3-EE3 consiste en desarrollar la expresión del denominador aplicando propiedad distributiva, (modelo B). La ilustración 10 muestra una comparación de los pasos efectuados en las mismas:

3EE2	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(4x^2-1)} = 4x^2+1$
3EE3	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{4x^2+2x-2x-1} = \frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{4x^2-1} = 4x^2+1$

Ilustración 10

Si el estudiante modifica tanto el numerador como el denominador surgen las estrategias 3-EE4 y 3-EE5. La estrategia 3-EE4 consiste en desarrollar el producto de suma por diferencia tanto en el numerador como en el denominador aplicando igualdad notable y a continuación algunos de acuerdo a su percepción obtuvieron la solución, (modelo A). La estrategia 3-EE5 consiste en desarrollar el producto de suma por diferencia en el numerador y en el denominador aplicando propiedad distributiva y a continuación algunos de acuerdo a su percepción obtuvieron la solución, (modelo B). Observemos la ilustración 11.

3 *EE4*	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(16x^4-1)}{(4x^2-1)} = 4x^2+1$
3 *EE5*	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+4x^2-4x^2-1}{4x^2+2x-2x-1} = \frac{16x^2-1}{4x^2-1} = 4x^2+1$

Ilustración 11

La estrategia 3-EQ en ella se realizó diversas operaciones, tentativas para llegar a la solución pero sin criterio, está asociada al modelo C.

IV.2.4 Tarea 4

Recordamos que el apartado (a) de la tarea 4 indica modificar la expresión

$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$ para obtener una expresión equivalente más sencilla. Esta tarea sólo presentó una estrategia que conduce a la solución y que corresponde al modelo A. Se pudo observar cómo los estudiantes en su trabajo intentaron diferentes estrategias pero la mayoría de ellas no condujo al éxito. Posiblemente este hecho deba su origen a la complejidad de la relación entre expresiones del numerador y denominador. Recogemos esquemáticamente en la tabla 10 las estrategias de la tarea.

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Estrategias Tarea 4 (a)</td><td colspan="3">Modifica P(x)</td></tr>
<tr><td>No</td><td colspan="2">Sí</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Modifica P(x)</td><td rowspan="4">No</td><td rowspan="4">No se considera</td><td rowspan="4">Desarrolla</td><td>Cuadrado de binomio 4-EQ1</td></tr>
<tr><td>Producto Suma por Diferencia 4-EQ2</td></tr>
<tr><td>Producto de ambos factores 4-EQ3</td></tr>
<tr><td>Operaciones Diversas 4-EQ4</td></tr>
<tr><td>Sí</td><td>Factoriza Trinomio Cuadrado Percepción. 4-EE1</td><td colspan="2">No se considera</td></tr>
</table>

Tabla 10. Estrategias de la Tarea 4, parte(a).

La estrategia exitosa 4-EE1 que se distingue en esta tarea, consiste en conservar el numerador y modificar el denominador factorizando el trinomio como igualdad notable, (modelo A). Se muestra en la ilustración 12.

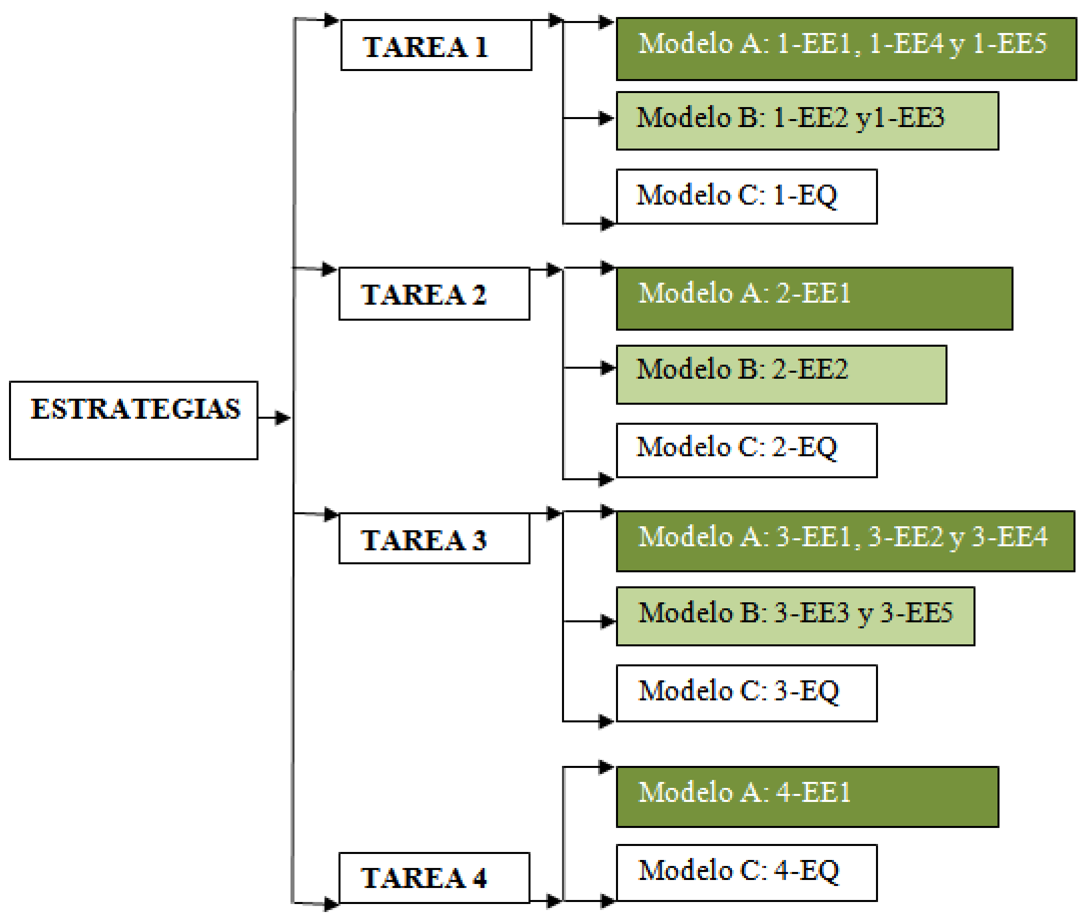
$$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{(5a^2+1)^2}=\frac{(5a^2-1)^2}{(5a^2+1)}$$

Ilustración 12

Los estudiantes que conservaron el denominador y modificaron el numerador, utilizaron cuatro estrategias diferentes, todas ellas no exitosas. La estrategia 4-EQ1 consistió en desarrollar el primer binomio del numerador, es decir desarrollar el cuadrado de la diferencia, a continuación esta expresión la simplificaron con el denominador. La estrategia 4-EQ2 consistió en considerar los dos binomios del numerador como un producto de suma por diferencia, obviando el grado 2 del primer binomio y dejando el desarrollo de esta expresión como resultado. Los que aplicaron la estrategia 4-EQ3 desarrollaron el cuadrado de la diferencia que es el primer binomio de la expresión del numerador y a continuación este producto lo multiplicaron por el factor restante del numerador. La estrategia 4-EQ4 es una combinación de operaciones diversas y que son consideradas en el modelo C.

IV.3 Relación entre las estrategias y los modelos

Con el objetivo de que se puedan apreciar en conjunto las estrategias de todas las tareas y su relación con los modelos, se presenta en este apartado el Esquema 4 que recoge las diversas estrategias de acuerdo a los modelos en cada tarea. Además se detalla el color de cada una de las estrategias, recordemos para el modelo A se ha elegido un color verde oscuro, para el modelo B un color verde claro y para el modelo C, que corresponde a las estrategias no exitosas, un color blanco.



Esquema 4. Resumen de Estrategias por Modelos en cada Tarea.

IV.4 Análisis descriptivo por estrategias utilizadas en cada tarea

En este apartado detallamos las estrategias utilizadas por cada estudiante en cada una de las tareas, utilizando los criterios y denominación precisados en el apartado IV.2, en el que se han descrito cada una de estas estrategias.

IV.4.1 Tarea 1

La tabla 11 recoge el número de estudiantes que aplicaron cada una de las diferentes estrategias de la primera tarea.

Estrategia Exitosa		Estrategia Exitosa Interrumpida		Estrategia Exitosa con errores		Estrategia No Exitosa	
Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos
1-EE1	9	1-EE1-I	1	1-EE1-Q	1	1-EQ	3
1-EE2	5	1-EE2-I	0	1-EE2-Q	1	No se considera	0
1-EE3	2	1-EE3-I	1	1-EE3-Q	1	No realiza	0
1-EE4	5	1-EE4-I	0	1-EE4-Q	2		
1-EE5	0	1-EE5-I	1	1-EE5-Q	1		
Total	21		3		6		3

Tabla 11. Resultados de las estrategias aplicadas en la Tarea 1

Estrategia 1-EE1

Un total de once estudiantes (Nº 4, 7, 8, 12, 17, 18, 21, 24, 27, 30, 32)[5] utilizan la estrategia 1-EE1. De ellos, nueve obtienen éxito en la solución mientras que dos interrumpen la estrategia e inciden en error, respectivamente. Un ejemplo de cómo trabajan estos nueve estudiantes lo podemos ver en la ilustración 13, en la que se toma como modelo la actuación del alumno Nº 4.

[5] Los números representan la etiqueta asignada a cada estudiante.

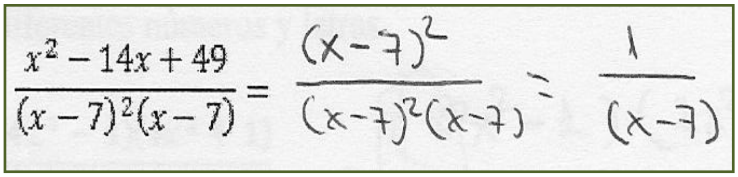
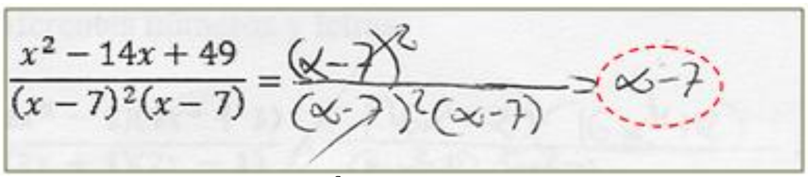


Ilustración 13. Estudiante Nº4

Un estudiante (Nº 17) después de suprimir los factores cuadrados comunes expresa su respuesta igual a *(x – 7)*, no asigna el numerador uno a la expresión final, ver ilustración 14. Podemos citar para esta situación a Bachelard (1998) citado en Escudero (2007) las confusiones cometidas por los estudiantes al realizar tácticas en la búsqueda de una construcción de conocimiento real son obstáculos epistemológicos que determinan lo “incompleto" del conocimiento del alumno, pero no precisamente ausencia de conocimiento”.



Ilustración[6] 14. Estudiante Nº 17

En la ilustración 15 podemos observar la actuación del estudiante Nº 18, no termina de simplificar, la deja interrumpida, tal vez considera que ha terminado, pero es de observar que su trabajo es correcto hasta el punto en que interrumpe.

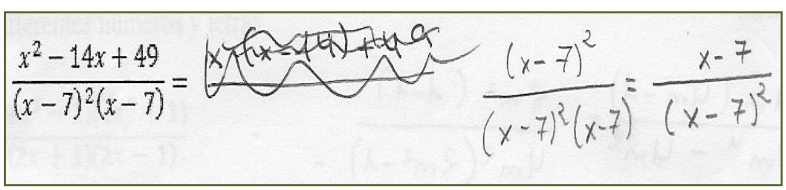


Ilustración15. Estudiante Nº 18

Estrategia 1-EE2

Seis estudiantes trabajan de forma similar a los del caso anterior, con la diferencia que en el numerador aplican el método de Ruffini para transformar el trinomio cuadrado en el producto de dos factores. Cinco de ellos, (Nº 5, 16, 19, 22, 26) aplican exitosamente la estrategia, lo podemos ver en la ilustración 16. Un estudiante. El Nº 28, luego de iniciar

[6] La expresión remarcada señala donde está el error.

correctamente la estrategia obtiene otro resultado debido al error previo de que olvida simplificar la potencia en el denominador.

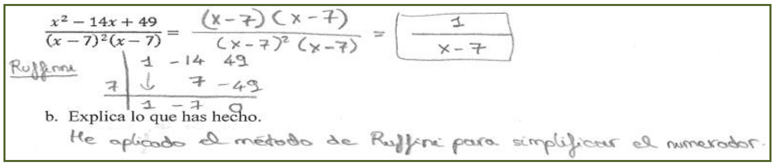


Ilustración 16. Estudiante Nº 5

Estrategia 1-EE3

Esta estrategia fue aplicada por cuatro estudiantes, (Nº 2, 3, 6, 11) los cuales utilizan la fórmula general o fórmula cuadrática para transformar el trinomio cuadrado en el producto de dos factores. Dos de ellos, (Nº 6, 11) obtienen éxito, lo observamos en la ilustración 17 y la justificación que nos aporta este estudiante es: “Como el numerador era igual que la expresión $(x\text{-}7)^2$, se simplifica”. El estudiante Nº 2 luego de factorizar correctamente el trinomio no culmina la simplificación de las potencias y el Nº 3 luego de factorizar correctamente continúa con un proceso que no le conduce al éxito.

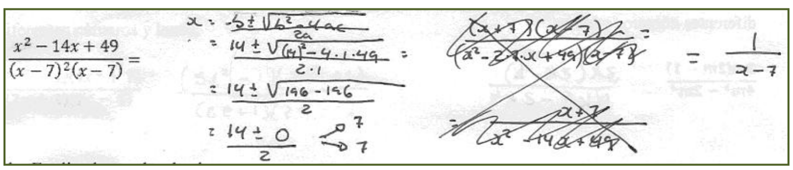


Ilustración 17. Estudiante Nº 6

Estrategia 1-EE4

Siete estudiantes aplican esta estrategia. Cinco de ellos, (Nº 10, 14, 20, 23, 25) obtienen éxito al emplearla. El estudiante Nº 29 comienza agrupando las potencias del denominador, pero posteriormente aplica la estrategia 1-EE4. Sin embargo al expresar la fracción simplificada sitúa la expresión *(x – 7)* en el numerador en vez de en el denominador y no toma esta como respuesta sino que despeja la x como si la fracción fuera una ecuación igualada a cero, ver ilustración 18.

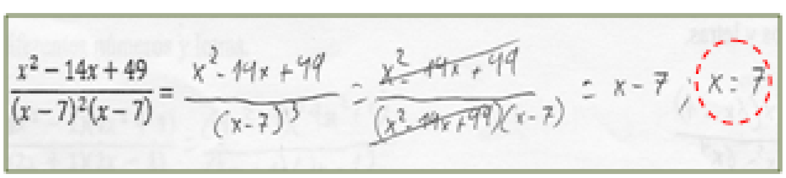


Ilustración 18. Estudiante Nº 29

Estrategia 1-EE5

Esta estrategia fue aplicada por dos estudiantes (Nº 31, 33). El estudiante Nº 31, tras factorizar el numerador aplicando una igualdad notable, olvida escribir el exponente a este factor binomio y agrupa las potencias en el denominador. Con motivo de la omisión del exponente, la fracción obtenida al simplificar los factores comunes del numerador y denominador, no es equivalente a la dada inicialmente (ver ilustración 18). Por otro lado el Nº 33 factoriza el numerador aplicando la igualdad notable correspondiente y agrupa las potencias en el denominador, pero no simplifica las potencias de ambas expresiones quedando la estrategia interrumpida en dicho punto. En este caso las modificaciones realizadas son correctas y útiles para la simplificación de la fracción pero el estudiante no llega a cancelar factores comunes que aparecen en el numerador y denominador.

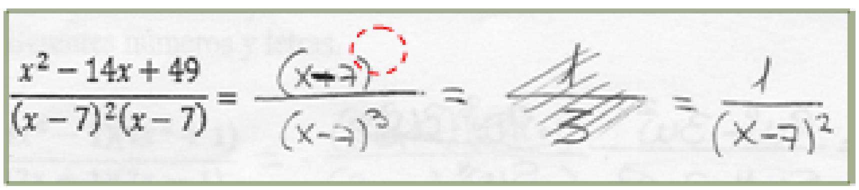


Ilustración 19. Estudiante Nº 31

Estrategia 1-EQ

Un estudiante, el Nº 15, inicialmente modifica el denominador agrupando las potencias y conserva el numerador. Posteriormente transforma incorrectamente la fracción obtenida restando numerador y denominador como se muestra en la ilustración 20.

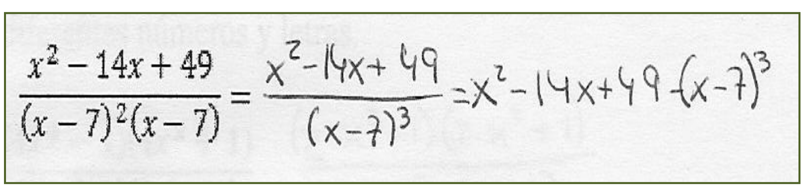


Ilustración 20. Estudiante Nº 15

IV.4.2 Tarea 2

En la tabla 12, presentada a continuación, se muestra el número de estudiantes que puso de manifiesto cada una de las estrategias anteriormente descritas.

Estrategia Exitosa		Estrategia Exitosa Interrumpida		Estrategia Exitosa con errores		Estrategia No Exitosa	
Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos
2-EE1	3	2-EE1-I	3	2-EE1-Q	7	2-EQ	9
2-EE2	1	2-EE2-I	7	2-EE2-Q	2	No se considera	0
						No realiza	1
Total	4		10		9		10

Tabla 12. Resultados de las estrategias aplicadas en la Tarea 2

Estrategia 2-EE1

Un total de 13 estudiantes utilizan esta estrategia. Tres de ellos (Nº 5, 14, 32) extraen el mayor factor común a ambas partes de la fracción, simplifican y obtienen como resultado la fracción irreducible. La explicación que dan a esta estrategia es la siguiente: “El numerador está factorizado, sin embargo el denominador no, factorizando el denominador nos damos cuenta que se puede simplificar con el numerador”. Otros tres estudiantes (Nº 9, 11,24) inician la transformación de la fracción dada empleando esta estrategia, pero antes de obtener la fracción irreducible la interrumpen. Los otros siete estudiantes (Nº 2, 4, 8, 13, 18, 22,29) hacen uso de esta estrategia pero cometen algunos errores. La ilustración 21 nos muestra uno de dichos errores que cometieron cuatro (Nº 4, 8, 22,29) de los siete estudiantes en la simplificación de la fracción, tras haber factorizado correctamente el denominador.

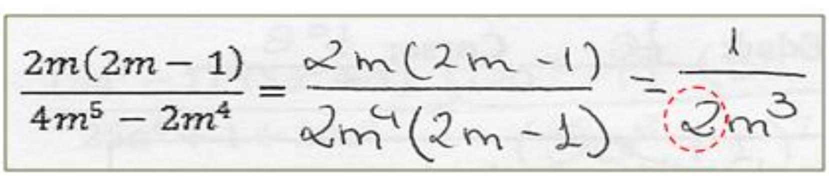


Ilustración 21. Estudiante Nº 4

Estrategia 2-EE2

Esta estrategia es utilizada por 10 estudiantes. De ellos sólo el estudiante Nº1 logra llevarla a cabo correctamente. Siete (Nº 7, 12, 16, 21, 23, 28,30) de ellos presentan un buen inicio, pero interrumpen la estrategia antes de obtener la fracción irreducible. Presentan justificaciones como: “Muy sencillo solo tuve que sacar factor común, luego simplificar y ya está (Nº30)”. Dos estudiantes (Nº 6, 26) muestran errores en el procedimiento.

Estrategia 2-EQ

Nueve estudiantes (Nº 3, 10, 15, 17, 19, 25, 27, 31, 33) aplican la propiedad distributiva en el numerador y conservan el denominador, sin darse cuenta de que esta estrategia no les resulta exitosa para simplificar la fracción. Algunos de estos estudiantes cometen errores en la manipulación de las expresiones. Un ejemplo se muestra en la ilustración 22, la cual acompaña el estudiante Nº 3 con la siguiente explicación: “He multiplicado en el numerador y lo he simplificado luego. Como resulta que queda un uno en el numerador pues lo he invertido y he puesto las potencias del denominador negativas”.

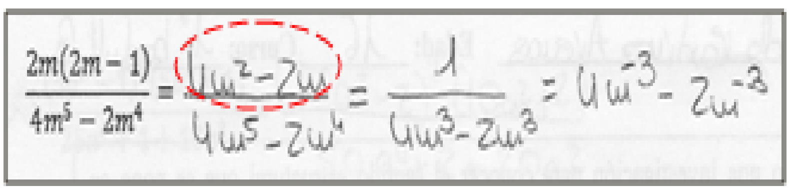


Ilustración 22. Estudiante Nº 3

IV.4.3 Tarea 3

La tabla 13 muestra el número de estudiantes que utilizó cada una de las estrategias aplicadas en la tercera tarea.

Estrategia Exitosa		Estrategia Exitosa Interrumpida		Estrategia Exitosa con errores		Estrategia No Exitosa	
Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos
3-EE1	3	3-EE1-I	0	3-EE1-Q	1	3-EQ	3
3-EE2	4	3-EE2-I	0	3-EE2-Q	0	No se considera	0

3-EE3	1	3-EE3-I	0	3-EE3-Q	0	No realiza	1
3-EE4	2	3-EE4-I	3	3-EE4-Q	1		
3-EE5	2	3-EE5-I	4	3-EE5-Q	8		
Total	12		7		10		4

Tabla 13. Resultados de las estrategias aplicadas en la Tarea 3

Estrategia 3-EE1

Cuatro estudiantes factorizan el numerador haciendo uso de la igualdad notable diferencia de cuadrados. Tres de ellos (Nº 4, 6, 21) concluyen con éxito esta estrategia. El otro estudiante (Nº 22) comete un error (ver ilustración 23) al considerar el segundo binomio como cuadrado de un binomio y justifica: “He desarrollado la suma por diferencia del numerador y he simplificado”.

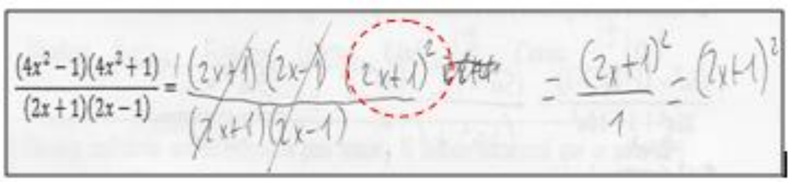


Ilustración 23. Estudiante Nº 22

Estrategia 3-EE2

Cuatro estudiantes, (Nº 12, 14, 24, 30) aplican esta estrategia tal como se muestra en la ilustración 10, desarrollando el producto de suma por diferencia en el denominador, es decir lo sustituyen por una diferencia de cuadrados. Todos ellos aplicaron con éxito esta estrategia, no cometiendo errores ni interrupciones de la misma.

Estrategia 3-EE3

Solamente un estudiante, el Nº 27 aplica esta estrategia siguiendo los pasos de la ilustración 10 y lo hace exitosamente.

Estrategia3-EE4

Seis estudiantes aplican esta estrategia, de los cuales los siguientes, (Nº 19, 32) lo hacen exitosamente. La ilustración 24 muestra el trabajo de uno de ellos, el cual no da más detalles de lo que hizo. Nuestra interpretación de su trabajo es que, tras aplicar las igualdades notables en el numerador y el denominador, observó que en el denominador obtenía uno de las expresiones que componen el numerador de la fracción dada, y utilizó dicha relación para simplificar la fracción.

$$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(4x^2)^2-1}{4x^2-1} = 4x^2+1$$

Ilustración 24. Estudiante Nº 32

Otros tres estudiantes (Nº 5, 23, 33) interrumpen esta estrategia tras aplicar la igualdad notable suma por diferencia, en el numerador y denominador, sin llevar a cabo la simplificación. El estudiante Nº 5 (ver ilustración 25) justifica: “He aplicado la igualdad notable de la suma por diferencia $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$”. El estudiante Nº 29 inicia esta estrategia pero comete algunos errores.

$$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(4x^2)^2-1^2}{(2x)^2-1^2} = \frac{16x^4-1}{4x^2-1}$$

Ilustración 25. Estudiante Nº 5

Estrategia 3-EE5

Catorce estudiantes emplean esta estrategia. De ellos solo el estudiante Nº 7 y el Nº 20 la hacen con éxito. Los estudiantes (Nº 3, 8, 9, y 26) tras desarrollar el producto de suma por diferencia en el numerador y en el denominador aplicando la propiedad distributiva, interrumpen el procedimiento. Los ocho estudiantes restantes, (Nº 1, 2, 10, 13, 15, 25, 28,31), tras iniciar correctamente la estrategia cometen algunos errores, que les impide llegar a la solución. De los ocho, el estudiante Nº15 (ver ilustración 26), justifica: “He multiplicado en el dividendo y en el divisor el 1er miembro de cada paréntesis por los números del 2º y en el 1er paréntesis, el 2º número por los números del 2º paréntesis. Luego he realizado las operaciones que creo que eran oportunas para “juntar” los números”.

$$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+4x^2-4x^2-1}{4x-2x+2x-1} = \frac{16x^4-\cancel{1}}{4x-\cancel{1}} = \frac{16x^4}{4x}$$

Ilustración 26. Estudiante Nº 15

Estrategia 3-EQ

Los estudiantes (Nº 16, 17, 18) realizan una serie de manipulaciones que se consideran estrategias no exitosas.

IV.4.4 Tarea 4

La tabla 14 recoge el número de estudiantes que aplicaron cada una de las diferentes estrategias de la cuarta tarea.

Estrategia Exitosa		Estrategia Exitosa Interrumpida		Estrategia Exitosa con errores		Estrategia No Exitosa	
Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos	Código	No. de alumnos
4-EE1	10	4-EE1-I	1	4-EE1-Q	4	4-EQ1	10
						4-EQ2	2
						4-EQ3	4
						4-EQ4	1
						No realiza	1
						No se considera	0
Total	10		1		4		18

Tabla 14. Resultados de las estrategias aplicadas en la Tarea 4.

Estrategia 4-EE1

Quince estudiantes aplican factorización del trinomio cuadrado. Diez de ellos, (Nº 4, 7, 8, 11, 12, 18, 22, 24, 28, 30) ejecutan con éxito esta estrategia. La ilustración 27 muestra el trabajo de uno de ellos el cual explicó: “Quito el ($5a^2$ + 1) del numerador con el denominador, quedando el denominador con $5a^2$ + 1”.

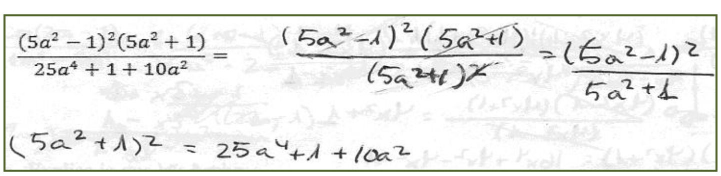


Ilustración 27. Estudiante Nº 7

El estudiante Nº 21 realiza correctamente la factorización del denominador pero luego no continúa y otros cuatro estudiantes (Nº 17, 23, 27, 32) tras factorizar cometen errores que no les permiten llegar a la solución. Observemos la justificación y trabajo realizado por uno de ellos en la ilustración 28 el cual explica: “El numerador lo he dejado como estaba y el denominador lo he transformado en el cuadrado de una suma para así poder simplificarlo con una de las expresiones de arriba. De este modo me ha dado una expresión más sencilla $5a^2 + 1$”. Podemos observar que el razonamiento del estudiante es adecuado pero parece no haber apreciado que los términos simplificados no son iguales.

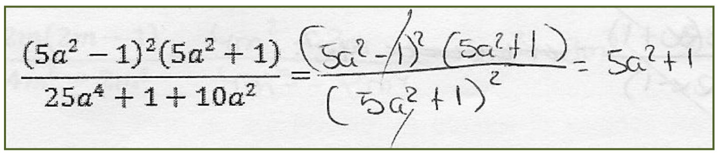


Ilustración 28. Estudiante Nº17

Estrategia 4-EQ

Diecisiete estudiantes siguen esta estrategia. De ellos diez (Nº 1, 3, 6, 9, 10, 13, 14, 19, 25,29) utilizan la estrategia 4-EQ1: desarrollan el cuadrado de la diferencia en el numerador y asumen que la expresión desarrollada es semejante a la expresión del denominador y la simplifican. Así lo explica el estudiante Nº 19 cuyo trabajo mostramos en la ilustración 29: “Al ser el cuadrado de una diferencia el factor del denominador y el numerador iguales pero uno desarrollado y otro no se simplifica”.

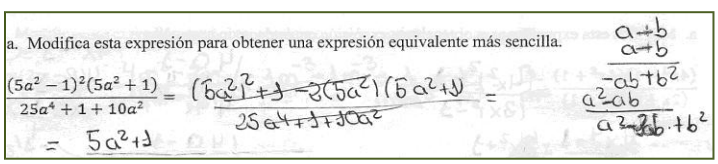


Ilustración 29. Estudiante Nº 19

Dos estudiantes (Nº 5,26) consideran la expresión del numerador como producto de suma por diferencia obviando el exponente del primer factor; estrategia denominada 4-EQ2. A modo de ejemplo se muestra el trabajo del estudiante Nº 26 (ver ilustración 30) el cual explica: “He resuelto la igualdad notable”.

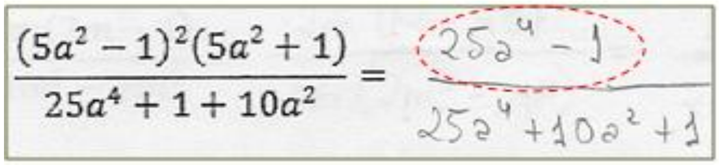


Ilustración 30. Estudiante Nº 26

Cuatro estudiantes (Nº 2, 15, 20,31) desarrollan el producto de los binomios del numerador, presentando una serie de manipulaciones correspondientes al modelo C, que no les conduce a la solución. La ilustración 31 muestra el trabajo del estudiante Nº15 el cual explica: “He juntado los números que he podido y he simplificado”.

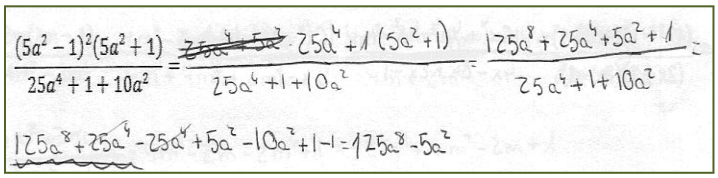


Ilustración 31. Estudiante Nº15

El estudiante Nº16 realiza una serie de manipulaciones 4-EQ4 que se consideran no exitosas.

IV.5 Relación de descriptores del sentido estructural con las estrategias

El tipo de expresiones que se consideraron en cada tarea condiciona los descriptores de sentido estructural que se ponen de manifiesto en las estrategias empleadas por los estudiantes[7]. El diseño de la tarea es también el motivo de que en todas ellas fuera posible el descriptor SS3 pues las tareas fueron construidas como fracciones algebraicas a simplificar y, por lo tanto, en todas ellas el estudiante debía de tomar decisiones sobre la mejor estrategia a seguir de acuerdo con ese objetivo. Un ejemplo de tarea en la que no se pondría en juego el descriptor SS3 es “emparejar expresiones que tengan la misma estructura”. El mejor uso de la estructura en una tarea viene dado por cuál es el objetivo que persigue el alumno con sus manipulaciones.

La parte gris de la tabla 15 indica los descriptores que no pueden manifestarse en cada tarea por el diseño de la misma.

[7] Los descriptores se recogen en el capítulo 2

Tarea	Estrategias	Descriptores de sentido estructural							
		SS1	**SS2**		**SS3**			**SS4**	
			a	**b**	**A**	**b**	**C**	**a**	**b**
$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}=$	1-EE1	X			X				X
	1-EE2								X
	1-EE3								X
	1-EE4	X			X				X
	1-EE5	X			X			X	
$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}=$	2-EE1		X			X		X	X
	2-EE2		X					X	X
$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}=$	3-EE1		X			X		X	X
	3-EE2		X			X		X	X
	3-EE3								X
	3-EE4		X			X		X	X
	3-EE5								X
$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=$	4-EE1		X			X			X

Tabla Nº15. Relación entre descriptores del Sentido Estructural y estrategias. Parte (a).

II PARTE: ANÁLISIS DEL APARTADO (c) DE LAS TAREAS

IV.6 Tipos de producciones en la parte (c) de las Tareas

En el caso de la parte (c) de las cuatro tareas vamos a analizar las producciones de los estudiantes atendiendo a si mantienen la estructura de las fracciones dadas al construir las nuevas: tanto la estructura del numerador y del denominador como la relación existente entre ambas. La tabla Nº 16 recoge los casos que vamos a distinguir en las producciones de los estudiantes. Cada tipo de producción ha sido nombrada con un código.

Se ha denominado con las letras "PE" a lo que consideramos una producción exitosa, esto ocurre cuando el estudiante mantiene las estructuras del numerador y del denominador y la relación existente entre ambos. Denominamos como "PP" a las Producciones Parciales y con "PQ" a las producciones no exitosas. Entendemos por producciones parciales aquellas en las que se mantiene sólo la estructura del numerador o del denominador o la estructura de ambos pero no la relación existente entre las mismas. Las producciones no exitosas son aquellas que no mantienen la estructura ni del numerador ni del denominador. Utilizamos diferentes tonos de azul para identificar cada tipo de producción, tal y como se muestra en la tabla 16.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Producciones parte (c) de las Tareas</th><th colspan="2">Mantiene Estructura
P(x)</th></tr>
<tr><td>Sí</td><td>No</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Mantiene Estructura Q(x)</td><td rowspan="2">Sí</td><td>Mantiene las estructuras
de P(x) y Q(x) relacionándolas
PE</td><td rowspan="2">Mantiene
solo la estructura de Q(x)
PP-3</td></tr>
<tr><td>Mantiene las estructuras
de P(x) y Q(x) sin
relacionarlas
PP-1</td></tr>
<tr><td>No</td><td>Mantiene
solo la estructura de P(x)
PP-2</td><td>No mantiene
ninguna de las dos
estructuras
PQ</td></tr>
</table>

Tabla Nº16. Producciones parte (c) en las cuatro Tareas.

Hacemos la observación de que al analizar las producciones de los alumnos en esta parte de las tareas, no hemos tomado en consideración algunos errores cometidos por los estudiantes que pueden ser debidos a despistes menores, tales como la omisión de alguno de los exponentes de las expresiones involucradas. Así mismo, tampoco hemos dado importancia a las letras utilizadas al escribir la expresión. Recordamos que las indicaciones dadas al estudiante pedían cambiar los números y las letras, con el objetivo de enfatizar que no consistía en construir expresiones equivalentes a las dadas.

IV.7 Análisis de los resultados del apartado c de las tareas

IV.7.1 Tarea 1

Recordamos que el apartado (c) de la Tarea 1 pedía analizar la expresión $\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ y construir otra expresión que tenga la misma estructura pero con diferentes números y letras. En esta tarea, 22 estudiantes Nº (4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 29, 30, 31,33) mostraron en sus producciones la conservación de la estructura de la fracción como un todo. Sus construcciones están fundamentadas en explicaciones como las siguientes:

- "He empleado la igualdad notable del cuadrado de una diferencia" (Nº5);
- "Cogemos un polinomio como por ejemplo (x - 4), lo elevamos al cuadrado y lo colocamos en el numerador y en el denominador el término al cuadrado por él" (Nº11);
- "Dando otro valor y cambiando la letra, por último escribir en el denominador una ecuación de segundo grado, que coincida con el cuadrado del polinomio nuevo" (Nº14).

Tomamos como modelo la producción del alumno Nº5 para la ilustración 32, que muestra con claridad como el estudiante era consciente de que la expresión que compone el numerador proviene del desarrollo del binomio cuadrado que aparece en el denominador

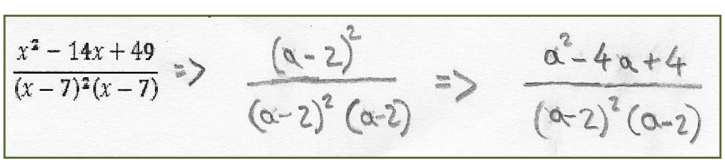


Ilustración 32. Estudiante Nº 5

Otro ejemplo lo encontramos en la producción del estudiante Nº 22 el cual expresa: “Es el cuadrado y el cubo de una diferencia así que he cambiado letras y número al azar para conseguir una expresión con igual estructura”. Consideramos que este estudiante ha reconocido la estructura completa, puesto que lo expresa en palabras en la parte correspondiente a la explicación. Lo que hace es primero transformar la fracción en una equivalente en la que la relación entre el numerador y el denominador es más evidente y, a continuación, escribe la nueva fracción con igual estructura. Ver ilustración 33.

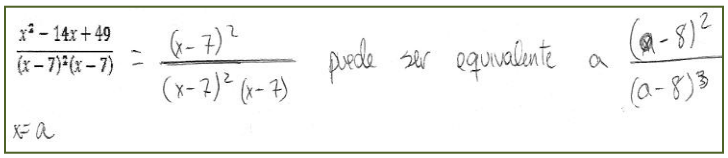


Ilustración 33. Estudiante Nº 22

Tres estudiantes (Nº 6, 9,15), muestran reconocer y mantener la estructura del denominador. En la ilustración 34 se muestra la producción de uno de ellos. Este estudiante percibe la estructura del denominador. En cuanto al numerador percibe: que es un polinomio de segundo grado, los signos de cada término los cuales mantiene, que el tercer término de la expresión debe ser un número cuadrado perfecto, por tanto pone 36, y que el coeficiente de término cuadrado es 1. Sin embargo no percibe la relación del coeficiente del segundo término con los dos restantes (1º y 3º), tampoco percibe que la raíz del tercer término debe coincidir con el segundo término de los binomios del denominador. Su justificación es: “He hecho una fracción igual pero con diferentes números y otra letra”.

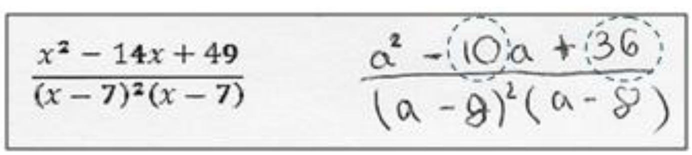


Ilustración 34. Estudiante Nº 9

Ocho estudiantes (Nº 1, 2, 3, 12, 16, 26, 28, 32) no conservan ninguna estructura en sus producciones, por lo que son consideradas no exitosas. Entre ellos tenemos los alumnos (Nº 1,3) que multiplican la expresión dada por 2 (ver ilustración 35). El alumno Nº1 justifica su respuesta con la siguiente frase: “Con la misma estructura he cambiado las *x* por *a* y he cambiado números multiplicando por 2”. El Nº3 dice: “Lo he multiplicado todo por 2, numerador y denominador para obtener una fracción o expresión equivalente”.

$$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} \qquad \frac{2a^2-28a+98}{(2a-14)^2\cdot(2a-14)}$$

Ilustración 35. Estudiante Nº 1

IV.7.2 Tarea 2

La tarea 2, parte c) propone construir una expresión de igual estructura que $\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$ **.** En este caso nueve estudiantes (Nº 4, 5, 7, 13,14, 20, 23, 25,29) reconocieron la estructura del numerador, denominador y la relación entre ambas estructuras. La ilustración 36 muestra la producción de uno de ellos. Su explicación también evidencia su percepción de la estructura global de la fracción: “He cambiado la incógnita m por x y el 2 por el 6, calculando el 36 del denominador”. Comete el error de poner el signo igual entre las dos fracciones como si se tratase de expresiones equivalente.

$$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{6x(6x-1)}{36x^5-6x^4}$$

Ilustración 36. Estudiante Nº 29

Siete estudiantes (Nº 6, 9, 11, 15, 18, 21,33) muestran en sus producciones que reconocen y mantienen la estructura del numerador y del denominador por separado, sin relacionarlas. En la ilustración 37, se recoge la producción del alumno 6, donde se aprecia que la estructura de la expresión del numerador es como la dada, e igual ocurre con la expresión que ha generado en el denominador. Sin embargo no ha considerado la relación entre los términos mediante la cual el factor binomio del numerador está encapsulado en el denominador.

$$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} \qquad \frac{3k(3.k-2)}{6k^5-3k^4}$$

Ilustración 37. Estudiante Nº 6

El estudiante Nº 24 reconoce solo la estructura del denominador. Cinco estudiantes (Nº 2, 10, 19, 27, 32) no realizan la tarea. Once estudiantes (Nº 1, 3, 8, 12, 16, 17, 22, 26, 28, 30, 31) muestran no reconocer ninguna estructura, sus producciones se consideran por tanto no exitosas. Entre ellos podemos enunciar los estudiantes (Nº1, 3, 8, 16, 22) que coinciden en el mismo error que en la tarea anterior. Ellos multiplican toda la expresión por 2 ó 3 (ver la ilustración 38) como claramente expresan en sus explicaciones:

- "He multiplicado todos los números por 2" (Nº 3);
- "La letra *m* la he cambiado por la *x* y a todos los números los he multiplicado por 2" (Nº 1);
- "Multiplicar la fracción por el mismo número el denominador y el numerador en este caso es el 2" (Nº16)
- "He multiplicado por 3 la expresión para obtener una con igual estructura" (Nº 22).

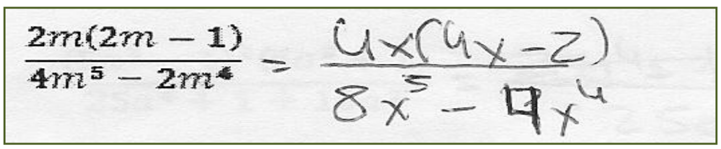


Ilustración 38. Estudiante Nº 3

IV.7.3 Tarea 3

En la tarea 3, parte c) se propone, de la misma forma que en las otras tres: Analiza $\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$ esta expresión y construye otra expresión que tenga la misma estructura pero con diferentes números y letras. En esta tarea diez estudiantes (Nº 4, 7, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 29, 30) conservan en su producción las estructuras de toda la fracción algebraica conjuntamente.

Nueve estudiantes (Nº 5, 6, 8, 11, 15, 17, 19, 31, 33) mantienen o conservan la estructura de Q(x). En la ilustración 39 observamos que el estudiante Nº 33 genera correctamente el producto de binomios en el denominador, pero muestra que no percibe que en el numerador el primer factor es un binomio diferencia de cuadrados relacionada con los factores del denominador.

$$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(6y^2-1)(6y^2+1)}{(3y+1)(3y-1)}$$

Ilustración 39. Estudiante 33

Un grupo de nueve estudiantes (Nº 1, 3, 9, 12, 13, 16, 22, 26,32) no reconocen ninguna estructura en esta tarea y, otros cinco estudiantes (Nº 2, 10, 14, 18,28) no la realizan. Entre el grupo de aquellos que no reconocen ninguna estructura, destacamos el trabajo de tres estudiantes (Nº1,3,16), que aplican linealidad en la resolución de la tarea, es decir multiplican todos los términos de la fracción dada por un número, ver ilustración 40. La justificación de estos estudiantes son las siguientes: “He multiplicado por 2 porque dividir sale con decimales, para mayor comodidad lo he multiplicado” (Nº 16), “He cambiado la *x* por la letra *b* y he multiplicado todos los números por 2” (Nº 1) y “He multiplicado todos los números por 2” (Nº 3).

$$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{(8x^2-2)(8x^2+2)}{(4x+2)(4x-2)} = \frac{(8x^2-2)^2}{(4x-2)^2}$$

Ilustración 40. Estudiante Nº 16

IV.7.4 Tarea 4

En la tarea 4 los estudiantes debían reproducir la estructura de la expresión $\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$. En esta tarea doce estudiantes (Nº 4, 7, 8, 11, 13, 20, 23, 24, 25, 29, 30, 33) mostraron mantener las estructuras de P(x), Q(x) y la relación entre ambas. La ilustración 41 es un ejemplo de ello.

$$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} \qquad \frac{(4x^2-1)^2(4x^2+1)}{16x^4+1+8x^2}$$

Ilustración 41. Estudiante Nº 4

Siete estudiantes (Nº 5, 9, 15, 17, 19, 21,31) mostraron reconocer la estructura del numerador. La ilustración 42 recoge uno de estos casos. Los binomios generados en el numerador poseen la misma estructura a los binomios dados. En el denominador pierde la relación en el término del cuadrado de la incógnita. Explica: “He cambiado algunos números y las letras”.

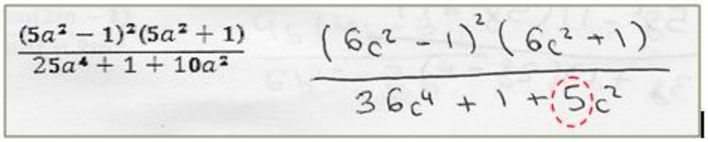


Ilustración 42. Estudiante Nº 9

Seis estudiantes (Nº 1, 3, 16, 22, 26, 28) muestran no reconocimiento de la estructura de la fracción en la tarea. Tres de ellos (Nº 1, 3, 22) aplican la linealidad ya mencionada en la tarea anterior (ver ilustración 43). El estudiante Nº 22 explica “He multiplicado por 2 la expresión inicial para obtener una con igual estructura”. Ocho estudiantes (Nº 2, 6, 10, 12, 14, 18, 27, 32) no realizaron la tarea.

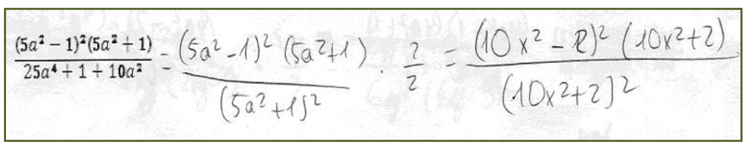


Ilustración 43. Estudiante Nº 22

La tabla 17 recoge la frecuencia de cada uno de los tipos de producciones identificadas en la parte c de las tareas. Se constata que el 40% de las producciones fueron exitosas, el 20.4% fueron parciales, un 25.8% fueron producciones no exitosas y el 13.6% no fueron realizadas.

Código	Producción [P(x) = numerador, Q(x) denominador]	T-1	T-2	T-3	T-4	Total	Porcen-taje
PE	Conserva la estructura P(x), Q(x) y la relación entre ambas.	22	9	10	12	53	40.1%
PP-1	Conserva la estructura de P(x) y Q(x) por separado, sin relacionarlas.	0	7	0	0	7	5.3%
PP-2	Conserva la estructura de P(x).	0	0	0	7	7	5.3%
PP-3	Conserva la estructura de Q(x).	3	1	9	0	13	9.8%
PQ	No conserva ninguna estructura.	8	11	9	6	34	25.8%
---	No realiza	0	5	5	8	18	13.6%

Tabla 17. Frecuencia de Producciones. T-1: Tarea 1, T-2: Tarea 2, T-3: Tarea 3 y T-4: Tarea 4.

IV.8 Relación de los descriptores con las producciones de los estudiantes

El tipo de expresiones que se consideraron en cada tarea condiciona los descriptores de sentido estructural puestos de manifiesto en las producciones realizadas por los alumnos.
El mejor uso de la estructura en una tarea viene dado por cuál es el objetivo que persigue el alumno con sus manipulaciones. La parte gris de la tabla 18 indica los descriptores que no pueden manifestarse en cada tarea por el diseño de la misma.

Tarea	Producciones	Descriptores de sentido estructural							
		SS1	**SS2**		**SS3**			**SS4**	
			a	**b**	**a**	**b**	**c**	**a**	**b**
$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$	PE	X						X	X
	PP-1	X						X	
	PP-2	X						X	
	PP-3	X						X	
$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$	PE		X	X				X	X
	PP-1		X	X				X	
	PP-2		X	X				X	
	PP-3		X						
$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$	PE		X	X				X	X
	PP-1		X	X				X	
	PP-2		X	X				X	
	PP-3		X	X				X	
$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$	PE		X	X				X	X
	PP-1		X	X				X	
	PP-2		X	X				X	
	PP-3		X					X	

Tabla Nº 18. Descriptores del Sentido Estructural. Parte (c).

IV.9. Errores y dificultades puestos de manifiesto por los estudiantes

Respecto al objetivo O.5 que establece: Identificar errores y dificultades que encuentran los estudiantes para reconocer la estructura de una expresión algebraica, vamos a incluir un listado de los mismos. No consideramos que al realizar este listado hayamos dado cumplimiento al objetivo ya que consideramos necesario un estudio de mayor calado para el mismo, pero queremos dejar constancia de que los errores se han tenido en cuenta a lo largo de todo el análisis de los datos. Los errores en cada una de las partes (a) y (c) de las tareas han sido diferentes.

En la parte (a) se han detectado errores como:

- Considerar que una fracción algebraica que tiene como numerador la unidad, es equivalente al denominador de la misma.
- Errores que pueden ser atribuibles a despistes u olvidos al operar, como: no poner o quitar un exponente; cancelar de diferente manera las expresiones del numerador y del denominador; considerar que el exponente de un binomio corresponde solo a uno de los sumandos o viceversa.
- Interpretación de las letras en expresiones y ecuaciones como incógnitas específicas más que como números generalizados o como variables. Collis (1974), citado por Arnau, D. (2010) describe la tendencia de los estudiantes a ver las expresiones algebraicas como algo que necesita ser completado y llama a este fenómeno la dificultad para aceptar la falta de cierre.

En la parte (c) se cometen errores del siguiente tipo:

- Colocar un signo de igualdad entre dos expresiones que no son equivalentes, solo tienen la misma estructura.
- El error más frecuente ha sido el de "linealidad". Llamamos error de linealidad a aquel que consiste en multiplicar todos los factores de una o dos de las expresiones de la fracción algebraica por un mismo número. Hemos adoptado este nombre por la analogía con el error de este mismo nombre para las ecuaciones lineales en las que el error consiste en considerar que se obtiene una ecuación equivalente al sumar un mismo número a los coeficientes de la ecuación dada.

CAPÍTULO V: SÍNTESIS DE LOS RESULTADOS DEL ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

Tras el análisis realizado de las producciones de los alumnos, en las tareas de simplificar y construir fracciones algebraicas que involucran igualdades notables, en relación con los descriptores del sentido estructural, vamos a establecer niveles en el sentido estructural de estos estudiantes a partir de sus producciones. A continuación describimos dichos niveles. Por último presentamos las conclusiones del trabajo y la línea de continuación del mismo.

V.1 Niveles del Sentido Estructural en relación a estrategias y producciones

La tabla 17 recoge cómo han quedado los alumnos de forma ordenada respecto a las estrategias utilizadas en el apartado (a) de las cuatro tareas y el reconocimiento de estructura en el apartado (c) de las mismas tareas. La tabla está compuesta de dos partes correspondientes a cada una de las actuaciones de los estudiantes señaladas. En la misma tabla hemos separado en filas las actuaciones que consideramos corresponde a niveles de los estudiantes. Distinguimos nivel alto; medio-alto; medio; medio-bajo y bajo para la parte (a) de las tareas y nivel alto; medio-alto; medio; medio-bajo; bajo; y nulo en el caso de la parte (c). Según se aprecia en la tabla la división la hemos hecho atendiendo a la cantidad de estrategias exitosas correspondientes al modelo A, en el primer caso y a la cantidad de producciones que mantiene la estructura de la fracción conjuntamente en el segundo caso. Se puede apreciar que en el primer caso no aparezca el nivel nulo y sí lo hace en el segundo, se debe a que todos los estudiantes han utilizado alguna estrategia, en alguna tarea, para simplificar la fracción y en el caso de mantener la estructura muchos (señalados con ---) no hacen nada o escriben alguna cosa sin sentido.

En la primera parte (de la izquierda) en el nivel alto pertenecerían los estudiantes que utilizan una estrategia exitosa de modelo A en cada una de las cuatro tareas. Al medio–alto los que hubiesen utilizado estrategias exitosas en tres tareas. Al nivel medio los que las hayan utilizado en dos tareas. El medio-bajo en una tarea. Al nivel bajo los estudiantes que utilizan alguna estrategia que si es exitosa es del modelo B.

	Nº	Estrategias				Nº	Producciones				
SS Alto	4				Q	4					SS Alto
	24				I	7					
	32				Q	20					
SS Medio Alto	12				I	23					
	30				I	25					
	14					29					
	8			Q	I	24					SS Medio Alto
	21			I	I	13					
	22		Q	Q		30					
	23		I	Q	I	11					SS Medio
	18		I	Q		21					
	29	Q	Q	Q		33					
SS Medio	7				I	5					
	5		I			8					
	11		I			14			--	--	
	27		Q		--	27			--	--	
	9	I	Q	I		18			--	--	SS Medio Bajo
	17	I	I			17					
	33	Q	Q		--	31					
SS Medio Bajo	28		I	Q	Q	19				--	
	6			Q		22					SS Bajo
	2		I	Q		10		--	--	--	
	19					15					
	20				--	9					
	10		Q			6				--	
	25		Q			1					SS Nulo
	31	Q	Q			3					
	13	Q	Q			16					
SS Bajo	26		I	Q		26					
	16		I			12				--	
	1		Q			28				--	
	3	I	Q			32			--	--	
	15	Q				2		--	--	--	

Tabla 19. Nivel de Sentido Estructural mostrado por cada alumno en las partes (a) y (c) de las tareas.

En la parte segunda, los estudiantes que conformarían los niveles serían: Nivel alto, aquellos que han reconocido la estructura en el conjunto de la expresión en las cuatro tareas. Nivel medio-alto, aquellos que la reconocen en tres tareas. Nivel medio los que reconocen dicha estructura en dos tareas. Nivel medio-bajo reconocen la estructura global en una tarea y alguna parcial en alguna otra tarea. Nivel bajo, los que han reconocido la estructura global en una tarea y no muestran nada en las otras y los que han reconocido estructuras en numerador o denominador en tres o cuatro de las tareas. Ya hemos comentado que el nivel nulo correspondería a estudiantes que dejaron las tareas sin hacer o los que hacían algo sin darle sentido a su acción.

V.1.1 Análisis de los datos en la Sección Estrategias -Tabla 19

De acuerdo a los datos de la tabla 19, podemos observar que los primeros tres alumnos (Nº4, 24, 32) muestran un sentido estructural alto, sus actuaciones están basadas en el modelo A (modelo en el cual se hacen presentes todos los descriptores), que se refiere a la aplicación de estrategias por percepción o simple inspección en casi todas las tareas. Los siguientes nueve estudiantes (Nº 12, 30, 14, 8, 21, 22, 23, 18, 29) muestran un sentido estructural medio alto ya que han realizado actuaciones basadas en el modelo A en tres de las cuatro tareas. Descendiendo nuestra mirada en la parte izquierda de la tabla 19 podemos apreciar que los siete estudiantes a continuación (Nº 7, 5, 11, 27, 9, 17, 33) muestran sentido estructural medio, han aplicado el modelo A en la mitad de las tareas. A continuación nueve estudiantes (Nº 28, 6, 2, 19, 20, 10, 25, 31,13) muestran sentido estructural medio bajo, utilizan el modelo A en una de las cuatro tareas. Y los últimos cinco estudiantes (Nº26, 16, 1, 3,15) presentan sentido estructural bajo, no hacen uso del modelo A, aplican el modelo B en la mitad de las tareas y en la otra mitad se aprecia el modelo C.

V.1.2 Análisis de los datos en la Sección Producciones -Tabla 19.

De acuerdo a los datos de la tabla 19, podemos observar que los primeros seis alumnos (Nº4, 7, 20, 23, 25, 29) muestran un sentido estructural alto, sus producciones al reconocer y reproducir la estructura de las cuatro fracciones algebraicas son todas exitosas,. Los siguientes tres estudiantes (Nº24, 13, 30) muestran un sentido estructural medio alto, ya que han realizado producciones exitosas en tres de las cuatro tareas. A continuación siete estudiantes (Nº11, 21, 33, 5, 8, 14, 27) muestran sentido estructural medio, sus producciones exitosas la ejecutan en dos de las cuatro tareas. Luego cuatro estudiantes (Nº18, 17, 31, 19) muestran un sentido estructural medio bajo, realizan producciones exitosas en una de las cuatro tareas. Cinco estudiantes (Nº 22, 10, 15, 9, 6) muestran un sentido estructural bajo, realizan producciones parciales en la mayor parte de sus tareas. Finalmente, ocho estudiantes, (Nº1, 3, 16, 26, 12, 28, 32, 2) muestran sentido estructural nulo, sus producciones están enmarcadas dentro de producciones no exitosas, donde el estudiante no mantiene ninguna estructura.

V.2 Consistencia en los niveles de Sentido Estructural (SS)

De acuerdo a los datos de la tabla 19, se obtuvo como resultado las tablas 20, 21 y 22 en las cuales se presenta una comparación por cada alumno de su sentido estructural mostrado en ambas partes de las Tareas.

La tabla 20 nos permite presentar comparativamente la consistencia mostrada por cada uno de los estudiantes en estudio del nivel de las estrategias respecto al nivel de las producciones. Se puede observar que el alumno Nº 4, mostró ser consistente en cuanto al nivel de sentido estructural de ambas partes de la tarea, además demostró ser el único en poseer un sentido estructural alto tanto en estrategias como en las producciones. A continuación los estudiantes que le siguen al Nº4 demuestran consistencia tanto en una tarea como en la otra. Consideramos que los alumnos contenidos en esta tabla han demostrado poseer un conocimiento de carácter sistemático.

Consistencia Total en los Niveles de SS		
Nº	*Estrategias*	*Producciones*
4	Alto	Alto
23, 24,29	Medio Alto	Alto
30	Medio Alto	Medio Alto
8, 14, 21	Medio Alto	Medio
5, 11,27, 33	Medio	Medio
17	Medio	Medio Bajo
19, 31	Medio Bajo	Medio Bajo
6, 10	Medio Bajo	Bajo
15	Bajo	Bajo
1, 3, 16, 26	Bajo	Nulo
2, 28	Medio Bajo	Nulo

Tabla 20: Consistencia total en los niveles.

La Tabla 21 nos muestra una consistencia parcial en la comparación del los niveles de sentido estructural mostrado por este grupo de alumnos. Podemos decir que su conocimiento no es del todo sistemático.

Consistencia Parcial en los Niveles de SS		
Nº	*Estrategias*	*Producciones*
7	Medio	Alto
9	Medio	Bajo
18	Medio Alto	Medio Bajo
13	Medio Bajo	Medio Alto

Tabla 21: Consistencia parcial en los niveles.

En la Tabla 22 podemos observar que se dio una inconsistencia total en la comparación del los niveles de sentido estructural mostrado por este grupo de cinco alumnos. Por ejemplo el alumno Nº 32, mientras en las estrategias mantiene un sentido estructural alto, en las producciones su sentido estructural es nulo. De igual forma el Nº 20 y el Nº 25 poseen un sentido estructural medio bajo en estrategias y luego un sentido estructural alto en producciones. Este hecho nos remonta al estudio realizado por Linchevski y Livné (1999), citada en el capítulo I.3 (antecedentes de este estudio) quienes observaron que un mismo estudiante puede dar una respuesta equivocada en un contexto y una respuesta correcta en otro, que a menudo parecía que los estudiantes fueran inconsistentes en sus conocimientos.

No consistencia en los Niveles de SS		
Nº	*Estrategias*	*Producciones*
20, 25	Medio Bajo	Alto
12	Medio Alto	Nulo
22	Medio Alto	Bajo
32	Alto	Nulo

Tabla 22: No consistencia en los niveles.

V.3 Relación del Sentido Estructural con el sexo y edad de los estudiantes

También se hizo un análisis comparativo por sexo y edad en lo que se refiere a mayor sentido estructural. Este análisis nos dio a conocer que el sexo y la variedad de edades no influyen en la manifestación del sentido estructural. A continuación presentamos una muestra de este hecho. En vista que los cuatro alumnos con mayor sentido estructural son

(Nº 4, 23, 24, 29), se tomaron como muestra. De ellos, las dos primeras son chicas y los dos siguientes son chicos. El primero tiene 16 años, los dos siguientes tienen 17 y el que sigue tiene 18 años. De igual forma se tomaron seis alumnos (Nº 1, 3, 16, 26, 2, 28) que presentaron bajo sentido estructural. De estos seis estudiantes tres son chicas y tres son chicos. Tres tienen 16 años, uno tiene 17 y dos tienen 18 años. Por lo que el sexo y la edad no interfieren en la manifestación del sentido estructural.

V.4 Conclusiones

Recogemos aquí nuestra visión a cómo se han logrado los objetivos del trabajo y las respuestas que podemos dar a través del mismo a las preguntas planteadas. A lo largo del capítulo IV se han ido vertiendo consideraciones que bien pudiesen formar parte de las conclusiones pero no las recogemos por no caer en la reiteración.

V.4.1 Cumplimiento de objetivos

Consideramos que con el trabajo hemos dados cumplimiento a los cinco objetivos planteados, si bien el 5º no nos ha dejado totalmente satisfechas dado que el tiempo nos ha obligado a no seguir ahondando en el mismo, lo consideramos tema pendiente para la continuación de nuestro trabajo en esta línea.

Respecto al objetivo O.1: Avanzar en la caracterización del constructo Sentido Estructural en el contexto del álgebra escolar, en el capítulo II (Marco Teórico) se hace una síntesis de los trabajos e intentos de clarificar cuales son los descriptores que lo caracterizan a lo que hemos contribuido añadiendo uno a la lista de los propuestos por otros autores. Así mismo, hemos estudiado la potencialidad de dos tipos de tareas cuyo desempeño por los alumnos proporcionan manifestaciones empíricas de su sentido estructural.

Por lo que respecta al objetivo O.2 cuyo enunciado es: Construir un instrumento que permita conocer el sentido estructural que muestren estudiantes de 1º de Bachillerato, al manipular igualdades notables:

- Cuando la manipulación se realiza para simplificar una fracción algebraica.
- Cuando la manipulación se realiza para mantener la estructura de una fracción algebraica.

Se ha diseñado una prueba que se ha sometido a un proceso de pilotaje para su mejora, una vez corregida y mejorada nos ha permitido detectar en los estudiantes estrategias al operar con expresiones algebraicas, en un caso y formas de concebir la estructura de una expresión algebraica, en otro. Todo ello nos han llevado a establecer diferentes niveles sobre el sentido estructural en estos estudiantes concretos. La prueba ha puesto a punto dos elementos significativos del sentido estructural como son la interpretación de la estructura de expresiones y la realización de transformaciones que preservan la equivalencia. Estos elementos se encuentran entre los que investigadores anteriores han considerado que afectan al conocimiento de la estructura del álgebra (Chaiklin y Lesgold, 1984)[8], y que nosotros los asignamos al sentido estructural. La prueba que si bien ha sido adecuada para estudiantes de 1º curso de bachillerato y, no así para un grupo de alumnos de 4º de Educación Secundaria Obligatoria, deberá de ser nuevamente utilizada con otros grupos de alumnos, para determinar el nivel en que es adecuada su utilización y, puede ser parte de una prueba más amplia donde tengan cabida otros elementos que componen el sentido estructural.

Con relación al objetivo O.3: Analizar el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de 1º de Bachillerato al simplificar y construir fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. En el capítulo IV se ha hecho un análisis de las actuaciones y producciones de los estudiantes llegando a establecer niveles en las mismas asociándolos con los descriptores del sentido estructural. En esa misma línea consideramos la consecución del objetivo O.4: Estudiar el comportamiento de estudiantes de 1º de Bachillerato, cuando han de reproducir la estructura de fracciones algebraicas dadas.

Del objetivo O.5 reiteramos que nuestro propósito preferente será la continuación de la investigación.

V.4.2 Respuestas a preguntas planteadas

Varios fueron los interrogantes que nos planteamos antes del inicio del trabajo y que se recogen en el apartado I.4. Vamos a dar respuesta a las mismas en la medida que la investigación realizada lo permita.

[8] Información más detallada se encuentra en el apartado II.9 de esta memoria

Pregunta 1: ¿Está el constructo sentido estructural eficaz y completamente caracterizado en el contexto del álgebra escolar? Nuestra experiencia nos permite responder que la caracterización, que actualmente se encuentra en la literatura especializada sobre educación matemática, es una buena base con la que trabajar en esta línea de indagación si bien debe ser continuada y mejorada. Esto daría lugar a un constructo mejor delimitado lo que permitiría un mayor atractivo para los investigadores.

Pregunta 2: ¿Es posible explicitar descriptores propios con los que detectar el sentido estructural de un sujeto en dicho contexto? Nuestra respuesta es afirmativa, los investigadores, Hoch y Dreyfus (2006) ya propusieron descriptores con anterioridad, nosotros hemos incluido un nuevo descriptor para nuestro trabajo dado que los anteriores no abarcaban la especificidad de nuestras tareas. Conjeturamos que en nuevos trabajos con tareas de índole diferente en las que se contemplen otros elementos del sentido estructural serán necesarios nuevos descriptores que se sumarán a los anteriores y ayudarán al enriquecimiento teórico del sentido estructural.

Pregunta 3: ¿Qué tipos de tareas serían pertinentes para detectar el sentido estructural de sujetos de un determinado nivel educativo? A esta pregunta no podemos dar respuesta a partir de nuestro trabajo, la herramienta que nosotros hemos elaborado involucra solamente dos de dichos elementos: interpretación de la estructura de expresiones algebraicas y realización de transformaciones que preservan la equivalencia. Dicha herramienta ha sido pertinente para un grupo concreto de un nivel educativo y no para otro grupo de un curso inferior. Habrá que realizar más investigación al respecto de este interrogante que permita responder de forma satisfactoria con resultado de datos empíricos.

Pregunta 4: ¿Qué juego darían las igualdades notables utilizadas para tal fin? Podemos decir sobre este interrogante que para nuestro trabajo ha sido muy satisfactoria su utilización ya que nos ha permitido fijar y acotar la temática sobre la que los estudiantes debían de trabajar, facilitando la tarea de elegir las expresiones algebraicas para la prueba.

V. 5 Continuación del trabajo

Hemos ido narrando a lo largo de los dos apartados anteriores, que hay un objetivo no cumplido y algunas preguntas a las que no hemos dado respuesta. Nuestro deseo es continuar en esta línea indagando en el constructo que nos ocupa, buscando conexiones que puedan haber en el paso de la aritmética al álgebra desde el punto de vista estructural y explorando en la manera en que los estudiantes de secundaria y bachillerato lleguen a aumentar su sentido estructural.

Por otra parte, hemos encontrado mucha dificultad para establecer una conexión entre los descriptores del sentido estructural que nos han permitido diseñar la prueba y las estrategias que los estudiantes han puesto de manifiesto al realizar las tareas. Esto supone un reto que trataremos de afrontar en la continuación del trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-Making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

Banerjee, R. y Subramaniam, K. (2004). “Term” as a bridge concept between algebra and arithmetic. Actas de EPISTEME-1 *An international conference to review research on Science. Technology and Mathematics Education* (pp. 76-77). India: Homi Bhabha Centre for Science Education. Descargado el 2 de Junio de 2006 de http://www.hbcse.tifr.res.in/episteme1/conf_proc/abstracts/epi-abs.pdf.

Banerjee, R.& Subramaniam, K.(2005). *Developing procedure and structure sense of arithmetic expressions. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.).* Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2 (pp. 121-128). Melbourne: PME.

Barnett, R. (1984). *Algebra.* 2º Edición. Traducción al español de Juan Bosco Aurioles. Mexico. McGRAW-HILL.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 126-154). Prague, Czech Republic: PME.

Booth, L. R. (1981). Strategies and errors in generalized arithmetic. En C. Comiti y G. Vergnaud (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, France pp. 140–146.

Booth, L. R (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School, 11* (3), 5-6.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor, UK: NFER Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En A. F. Coxford (Ed.),*The Ideas of Algebra. K-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 20–32.

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique de mathématiques. *Recherces en didactique des Mathématiques,* Grenoble ed. la Pensée Sauvage, Vol.7.2.

Castro, E., Rico, L., Romero, I. (1997). Sistemas de Representación y Aprendizaje de Estructuras Numéricas. *Enseñanza de las Ciencias. 15*(3), 361-371. ISSN: 0212-4521.

Cerdán, F. (2008). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico. Un catálogo de errores. *Investigación en Educación Matemática.* XII SEIEM.

Chaiklin, S. y Lesgold S. (1984). *Prealgebra students' knowledge of algebraic tasks with arithmetic expressions.* Technical report, Learning research and development center, University of Pittsburgh, Pennsylvania.

Chang, C. K. y Tsai, Y. L. (2005). An alternative Approach for the Learning of $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. The 3er East Asia Regional Conference in Mathematics Education.

Deleuze, G. (1969). La Lógica del Sentido. Edición Electrónica de www.philosophia.cl/Escuela de Filosofía Universidad ARCIS. Traducción de Miguel Morey.

English, L. D. (2002). Handbook of International Research in Mathematics Education. New York, NY: Routledge.

Espinoza, M. (2004). Tipologías de Resolutores de Problemas de Álgebra Elemental y Creencias sobre la Evaluación con Profesores en Formación Inicial. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Esty, W. W. (1992). Language concepts of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics 14*(4), 31-53.

Greeno, J. G. (1982). *A Cognitive Learning Analysis of Algebra*. Paper presented at the AERA, Boston, MA.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

Hoch, M. (2003). Structure sense. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proc. 3rd Conf. for European Research in Mathematics Education* (compact disk). Bellaria, Italy: ERME.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.3 (pp. 49-56). Bergen, Norway: PME.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proc. 29th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. 3,* 145-152. Melbourne, Australia: PME.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. Submitted to *30th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education.* Prague: PME.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2007). Recognising an Algebraic Structure. Working Group 3. CERME 5. *436 - 435*.

Hoch, M. (2007). *Structure sense in high school algebra.* Unpublished doctoral dissertation, Tel Aviv University, Israel.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2010). Developing Katy's Algebraic Structure Sense. Working Group 4. Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France © INRP 2010 www.inrp.fr/editions/cerme6 (pp. 529-538).

Grouws (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (A project of the NCTM).* New York: Macmillan.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. Romberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp.133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias,* ***7***(3), 229-240. Traducción castellana de Luis Puig.

Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. En A. F. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra. K-12*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA; Lawence Erlbaum, Hillsdale, NJ (pp. 91–96).

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wanger y C. Kiearn (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Vol. 4 (pp. 33–59). Reston, VA.: Lawence Erlbaum Associates and NCTM.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 707-762). National Council of Teachers of Mathematics.

Kirshner (1989). The Visual Sintax of Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education 1989. 20* (3), 274-287.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. En N. Bednarrz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). London: Kluwer.

Liebenberg, R., Sasman, M. y Olivier, A. (1999, Julio). *From Numerical Equivalence To Algebraic Equivalence. Mathematics Learning and Teaching Initiative (MALATI).* Presentado en el V congreso anual de la Asociación de Educación Matemática de Sur África (AMESA), Puerto Elizabeth.

Linchevski, L. y Herscovics, D. (1994). Cognitives obstacles in pre-algebra. En J. P. Ponte y J. F. Martos (Eds), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3 (pp. 176-183). Lisbon: University of Lisbon.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999) Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

Linchevski, L. and Vinner, S. (1990). Embedded figures and structures of algebraic expressions. En G. Booker, P. Cobb y T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the Fourteenth International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico City, Mexico, Vol.2 (pp. 85–93).

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria.* Tesis doctoral, Universidad de Granada. Disponible en http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM06-2822.PDF

Molina, M. (2009). Pensar matemáticamente en el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas. Trabajo presentado en las XVI jornadas para el aprendizaje de las matemáticas. Girona, 1 al 4 de Julio de 2009.

Molina, M., Castro, E. y Castro E. (2009). Elementary Students´Undestanding of the Equal Sign in Number Sentences. *Electronic Journal of Reseach in Educational Psychology. ISSN: 1696-2095. Nº 17. 7*(1), 361-368.

Morris, A. (1999). Developing concepts of mathematical structure: pre–arithmetic reasoning versus extended arithmetic reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 21*(1), 44-72.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: The Council.

Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de Problemas de Matemáticas en las pruebas de acceso a la Universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI,* 28(1), 317-342.

Novotná, J., Stehlíková, N., y Hoch, M. (2006). Structure sense for university algebra. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 249-256.* Prague, Czech Republic: PME.

Novotná, J., y Hoch, M. (2008). How Structure Sense for algebraic Expression or Equations is related to Structure Sense for Abstract Algebra. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 93-104.

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Tesis doctoral no publicada, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de la Laguna, Tenerife.

Peltier, M. (2003). Problemas Aritméticos. Articulación, significados y procedimiento de Resolución. *Educación Matemática, 15*(003), 29-55.

Pirie, S. y Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 159-181.

Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización formal y modelización en álgebra. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds), *Investigación en educación matemática. Séptimo simposio de la* *sociedad española de investigación en educación matemática (SEIEM)* (pp. 311-322). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics 26,* 191-228.

Slavit, D. (1995, octubre). Operational sense in first grade addition. Presentado en *the seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Columbus, OH. Descargado el 10 de Mayo de 2005 de http://eric.ed.gov/ERICWebPortal/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED389623.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37*(3), 251-274.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison. Their roles in the development of number sense and computational estimation. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Associates.

Steinberg, R. M., Sleeman, D. H. y Ktorza, D. (1990). Algebra Students' Knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(2), 112-121.

Tall, D., y Thomas, M. O. J. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer. *Educational Studies in Mathematics. 22*(2), 125-147

Trujillo, P. A. (2008). *Proceso de generalización que realizan futuros maestros.* Trabajo Fin de Máster en didáctica de la Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Trujillo, P.A., Castro, E., Molina, M., (2009). Un estudio de casos sobre el Proceso de Generalización. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 511- 521). Santander: SEIEM

Van Ameron, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra. Developmental research on the transition form arithmetic to algebra.* Universidad de Utrecht, Utrecht. http://igitur-archive.library.uu.nl/disertationns/2002-1105-161148/inhoud.htm

Vergnaud G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10*(2, 3) 133-170. *Traducción:* Juan D. Godino

Wagner, S., Rachlin, S. L. y Jensen, R.J. (1984). *Algebra learning project: Final report.* Athens: Department of Mathematics, University of Georgia.

Warren, E. (2001). Algebraic understanding and the importance of operation sense. En M. Heuvel–Penhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 399-406). Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

ANEXOS

ANEXO A. PRIMER INSTRUMENTO

Estamos realizando una investigación para conocer cómo trabajan los alumnos de secundaria con expresiones algebraicas. Tu ayuda es fundamental. Te presentamos 6 tareas y una plantilla de igualdades notables. Todas las tareas incluyen las mismas preguntas. Trata de realizar las tareas ayudándote de la plantilla. Escribe todo lo que hagas en el espacio correspondiente a esa tarea. Trata de hacerlo lo mejor que puedas.   Muchas Gracias.

Tarea 1.

a. Modifica esta expresión para obtener una equivalente más sencilla, utilizando una o más igualdades de la plantilla.

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} =$$

b. Indica el código de la o las igualdades que has utilizado ____________________.

c. Explica tu elección indicando la similitud que hay entre la igualdad utilizada y el ejercicio.

d. Analiza si en la plantilla hay otra u otras igualdades que podías haber utilizado. Si las hay escribe su código____________________.

Tarea 2.

a. Modifica esta expresión para obtener una equivalente más sencilla, utilizando una o más igualdades de la plantilla.

$$\frac{a^2 - ab}{ab + b^2} \cdot \frac{a^2 + ab}{ab - b^2} =$$

b. Indica el código de la o las igualdades que has utilizado ____________________.
c. Explica tu elección indicando la similitud que hay entre la igualdad utilizada y el ejercicio.

d. Analiza si en la plantilla hay otra u otras igualdades que podías haber utilizado. Si las hay escribe su código____________________.

Tarea 3.

a. Modifica esta expresión para obtener una equivalente más sencilla, utilizando una o más igualdades de la plantilla.

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} =$$

b. Indica el código de la o las igualdades que has utilizado ____________________.

c. Explica tu elección indicando la similitud que hay entre la igualdad utilizada y el ejercicio

d. Analiza si en la plantilla hay otra u otras igualdades que podías haber utilizado. Si las hay escribe su código____________________.

Tarea 4.

a. Modifica esta expresión para obtener una equivalente más sencilla, utilizando una o más igualdades de la plantilla.

$$\frac{2(7x^2 + 1)}{49x^4 + 1 + 14x^2} =$$

b. Indica el código de la o las igualdades que has utilizado ____________________.

c. Explica tu elección indicando la similitud que hay entre la igualdad utilizada y el ejercicio

d. Analiza si en la plantilla hay otra u otras igualdades que podías haber utilizado. Si las hay escribe su código____________________.

Tarea 5.

a. Modifica esta expresión para obtener una equivalente más sencilla, utilizando una o más igualdades de la plantilla.

$$\frac{4x^2 - 1}{(2x + 1)(2x - 1)} =$$

b. Indica el código de la o las igualdades que has utilizado ____________________.

c. Explica tu elección indicando la similitud que hay entre la igualdad utilizada y el ejercicio

d. Analiza si en la plantilla hay otra u otras igualdades que podías haber utilizado. Si las hay escribe su código____________________.

Tarea 6.

a. Modifica esta expresión para obtener una equivalente más sencilla, utilizando una o más igualdades de la plantilla.

$$\frac{2m(2m-1)}{8m^3-8m^2+2m} =$$

b. Indica el código de la o las igualdades que has utilizado ____________________.

c. Explica tu elección indicando la similitud que hay entre la igualdad utilizada y el ejercicio

d. Analiza si en la plantilla hay otra u otras igualdades que podías haber utilizado. Si las hay escribe su código____________________.

PLANTILLA DE IGUALDADES NOTABLES

CÓDIGO	IGUALDADES NOTABLES
AA	$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
BB	$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
CC	$(a+b)(a-b) = a^2- b^2$
DD	$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
EE	$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
FF	$(c+a)(c+b) = c^2+(a+b)c+ab$
GG	$(ak+b)(ck+d) = ack^2+(ad+bc)kbd+bd$
HH	$k(a+b) = ak+bk$
KK	$(a+b)(b-d+k) = (b-d)(a+b)+k(a+b)$

Plantilla que te ayudará a realizar las tareas.

ANEXO B. SEGUNDO INSTRUMENTO

Estamos realizando una investigación para conocer cómo trabajan los alumnos de Educación Secundaria con expresiones algebraicas. Tu ayuda es fundamental. Te presentamos 4 tareas para que las realices. Escribe todo lo que hagas en cada una de ellas, en el espacio correspondiente. Trata de hacerlo lo mejor que puedas.

Muchas Gracias.

a. Modifica esta expresión para obtener una expresión equivalente más sencilla.

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} =$$

b. Explica lo que has hecho.

c. Analiza esta expresión y construye otra expresión que tenga la misma estructura pero con diferentes números y letras.

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)}$$

d. Explica lo que has hecho.

Tarea 2.

a. Modifica esta expresión para obtener una expresión equivalente más sencilla.

$$\frac{2m(2m-1)}{4m^5 - 2m^4} =$$

b. Explica lo que has hecho.

c. Analiza esta expresión y construye otra expresión que tenga la misma estructura pero con diferentes números y letras.

$$\frac{2m(2m-1)}{4m^5 - 2m^4}$$

d. Explica lo que has hecho.

Tarea 3.

a. Modifica esta expresión para obtener una expresión equivalente más sencilla.

$$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} =$$

b. Explica lo que has hecho.

c. Analiza esta expresión y construye otra expresión que tenga la misma estructura pero con diferentes números y letras.

$$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$$

d. Explica lo que has hecho.

Tarea 4.

a. Modifica esta expresión para obtener una expresión equivalente más sencilla.

$$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} =$$

b. Explica lo que has hecho.

c. Analiza esta expresión y construye otra expresión que tenga la misma estructura pero con diferentes números y letras.

$$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$$

d. Explica lo que has hecho.

ANEXO C. CONTRASTE DE ESTRATEGIAS Y PRODUCCIONES

Alumno	Tarea 1		Tarea2		Tarea 3		Tarea 4	
Nº	Parte a	Parte c	Parte a	Parte c	Parte a	Parte c	Parte a	Parte c
1	1-EQ	PQ	2-EE2	PQ	3-EE5-Q	PQ	4-EQ1	PQ
2	1-EE3 I	PQ	2-EE1-Q	---	3-EE5-Q	---	4-EQ3	---
3	1-EE3 Q	PQ	2-EQ	PQ	3-EE5-I	PQ	4-EQ1	PQ
4	1-EE1	PE	2-EE1-Q	PE	3-EE1	PE	4-EE1	PE
5	1-EE2	PE	2-EE1	PE	3-EE4-I	PP-3	4-EQ2	PP-2
6	1-EE3	PP-3	2-EE2-Q	PP-1	3-EE1	PP-3	4-EQ1	---
7	1-EE1	PE	2-EE2-I	PE	3-EE5	PE	4-EE1	PE
8	1-EE1	PE	2-EE1-Q	PQ	3-EE5-I	PP-3	4-EE1	PE
9	1-EE4 Q	PP-3	2-EE1-I	PP-1	3-EE5-I	PQ	4-EQ1	PP-2
10	1-EE4	PE	2-EQ	---	3-EE5-Q	---	4-EQ1	---
11	1-EE3	PE	2-EE1-I	PP-1	No realiza	PP-3	4-EE1	PE
12	1-EE1	PQ	2-EE2-I	PQ	3-EE2	PQ	4-EE1	---
13	1-EQ	PE	2-EE1-Q	PE	3-EE5-Q	PQ	4-EQ1	PE
14	1-EE4	PE	2-EE1	PE	3-EE2	----	4-EQ1	---
15	1-EQ	PP-3	2-EQ	PP-1	3-EE5-Q	PP-3	4-EQ3	PP-2
16	1-EE2	PQ	2-EE2-I	PQ	3-EQ	PQ	4-EQ4	PQ
17	1-EE1 Q	PE	2-EQ	PQ	3-EQ	PP-3	4-EE1-Q	PP-2
18	1-EE1 I	PE	2-EE1-Q	PP-1	3-EQ	---	4-EE1	---
19	1-EE2	PE	2-EQ	---	3-EE4	PP-3	4-EQ1	PP-2
20	1-EE4	PE	No realiza	PE	3-EE5	PE	4-EQ3	PE
21	1-EE1	PE	2-EE2-I	PP-1	3-EE1	PE	4-EE1-I	PP-2

22	1-EE2	PE	2-EE1-Q	PQ	3-EE1-Q	PQ	4-EE1	PQ
23	1-EE4	PE	2-EE2-I	PE	3-EE4-I	PE	4-EE1-Q	PE
24	1-EE1	PE	2-EE1-I	PP-3	3-EE2	PE	4-EE1	PE
25	1-EE4	PE	2-EQ	PE	3-EE5-Q	PE	4-EQ1	PE
26	1-EE2	PQ	2-EE2-Q	PQ	3-EE5-I	PQ	4-EQ2	PQ
27	1-EE1	PE	2-EQ	---	3-EE3	PE	4-EE1-Q	---
28	1-EE2 Q	PQ	2-EE2-I	PQ	3-EE5-Q	---	4-EE1	PQ
29	1-EE4 Q	PE	2-EE1-Q	PE	3-EE4-Q	PE	4-EQ1	PE
30	1-EE1	PE	2-EE2-I	PQ	3-EE2	PE	4-EE1	PE
31	1-EE5 Q	PE	2-EQ	PQ	3-EE5-Q	PP-3	4-EQ3	PP-2
32	1-EE1	PQ	2-EE1	---	3-EE4	PQ	4-EE1-Q	---
33	1-EE5 I	PE	2-EQ	PP-1	3-EE4-I	PP-3	No realiza	PE

ESTRATEGIAS APLICADAS EN LAS TAREAS

Nº.	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
1	1-EQ	2-EE2	3-EE5-Q	4-EQ1
2	1-EE3 I	2-EE1-Q	3-EE5-Q	4-EQ3
3	1-EE3 Q	2-EQ	3-EE5-I	4-EQ1
4	1-EE1	2-EE1-Q	3-EE1	4-EE1
5	1-EE2	2-EE1	3-EE4-I	4-EQ2
6	1-EE3	2-EE2-Q	3-EE1	4-EQ1
7	1-EE1	2-EE2-I	3-EE5	4-EE1
8	1-EE1	2-EE1-Q	3-EE5-I	4-EE1
9	1-EE4 Q	2-EE1-I	3-EE5-I	4-EQ1
10	1-EE4	2-EQ	3-EE5-Q	4-EQ1
11	1-EE3	2-EE1-I	No realiza	4-EE1
12	1-EE1	2-EE2-I	3-EE2	4-EE1
13	1-EQ	2-EE1-Q	3-EE5-Q	4-EQ1
14	1-EE4	2-EE1	3-EE2	4-EQ1
15	1-EQ	2-EQ	3-EE5-Q	4-EQ3
16	1-EE2	2-EE2-I	3-EQ	4-EQ4
17	1-EE1 Q	2-EQ	3-EQ	4-EE1-Q
18	1-EE1 I	2-EE1-Q	3-EQ	4-EE1
19	1-EE2	2-EQ	3-EE4	4-EQ1
20	1-EE4	No realiza	3-EE5	4-EQ3
21	1-EE1	2-EE2-I	3-EE1	4-EE1-I
22	1-EE2	2-EE1-Q	3-EE1-Q	4-EE1
23	1-EE4	2-EE2-I	3-EE4-I	4-EE1-Q
24	1-EE1	2-EE1-I	3-EE2	4-EE1
25	1-EE4	2-EQ	3-EE5-Q	4-EQ1
26	1-EE2	2-EE2-Q	3-EE5-I	4-EQ2
27	1-EE1	2-EQ	3-EE3	4-EE1-Q
28	1-EE2 Q	2-EE2-I	3-EE5-Q	4-EE1
29	1-EE4 Q	2-EE1-Q	3-EE4-Q	4-EQ1
30	1-EE1	2-EE2-I	3-EE2	4-EE1
31	1-EE5 Q	2-EQ	3-EE5-Q	4-EQ3
32	1-EE1	2-EE1	3-EE4	4-EE1-Q
33	1-EE5 I	2-EQ	3-EE4-I	No realiza

PRODUCCIONES REALIZADAS EN LAS TAREAS

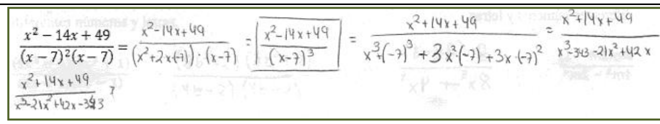
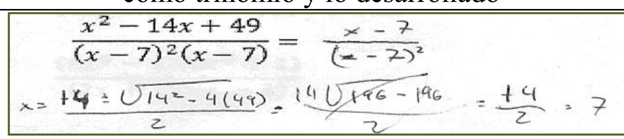
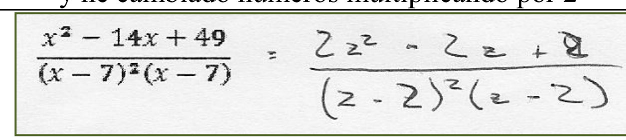
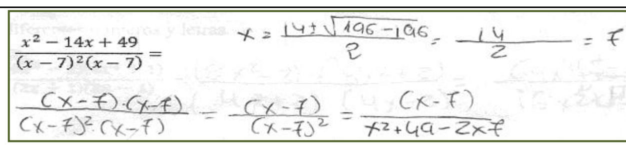
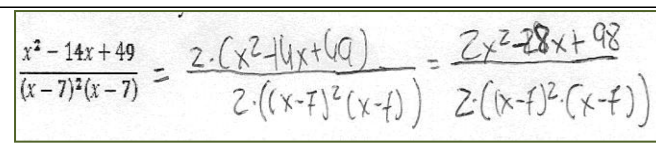
Nº.	Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4
1	PQ	PQ	PQ	PQ
2	PQ	---	---	---
3	PQ	PQ	PQ	PQ
4	PE	PE	PE	PE
5	PE	PE	PP-3	PP-2
6	PP3	PP-1	PP-3	---
7	PE	PE	PE	PE
8	PE	PQ	PP-3	PE
9	PP-3	PP-1	PQ	PP-2
10	PE	---	---	---
11	PE	PP-1	PP-3	PE
12	PQ	PQ	PQ	---
13	PE	PE	PQ	PE
14	PE	PE	----	---
15	PP-3	PP-1	PP-3	PP-2
16	PQ	PQ	PQ	PQ
17	PE	PQ	PP-3	PP-2
18	PE	PP-1	---	---
19	PE	---	PP-3	PP-2
20	PE	PE	PE	PE
21	PE	PP-1	PE	PP-2
22	PE	PQ	PQ	PQ
23	PE	PE	PE	PE
24	PE	PP-3	PE	PE
25	PE	PE	PE	PE
26	PQ	PQ	PQ	PQ
27	PE	---	PE	---
28	PQ	PQ	---	PQ
29	PE	PE	PE	PE
30	PE	PQ	PE	PE
31	PE	PQ	PP-3	PP-2
32	PQ	---	PQ	---
33	PE	PP-1	PP-3	PE

ANEXO D. TAREAS DE LOS ESTUDIANTES

ANEXO D

Las tablas que presentamos a continuación recogen la resolución de los cuatro ítems correspondientes a las tareas realizadas por cada uno de los estudiantes.

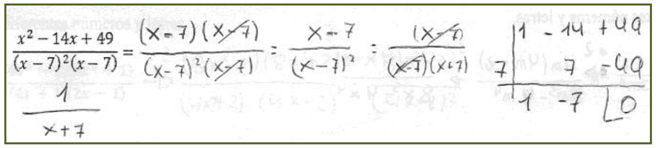
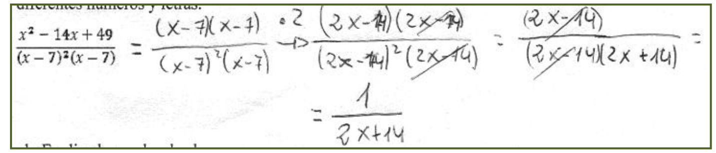
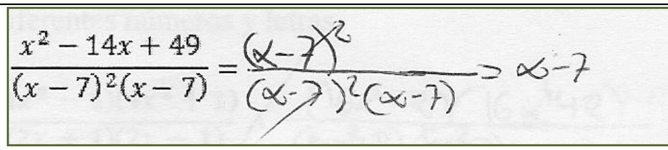
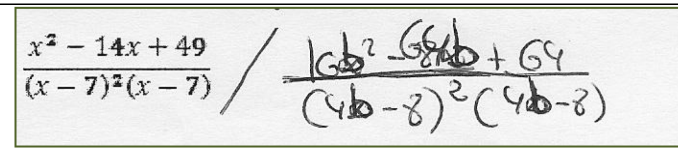
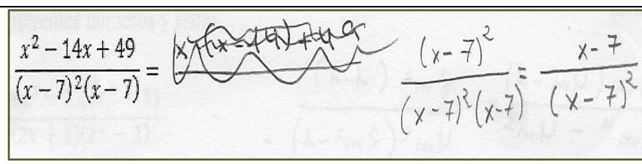
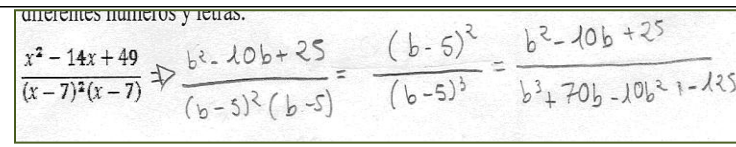
TAREA 1

Alumno Nº	PARTE A Y B. MODIFICA LA EXPRESIÓN.	PARTE C Y D. CONSTRUYE OTRA EXPRESIÓN.
[1]	 “Simplemente el denominador lo he puesto como trinomio y lo desarrollado”	 “Con la misma estructura he cambiadolas *x* por *a* y he cambiado números multiplicando por 2”
[2]	 “He resuelto el numerador y he simplificado”	 Lo deja en blanco.
[3]	 “He resuelto la expresión de 2º grado del denominador y he simplificado arriba y abajo”.	 “Lo he multiplicado todo por 2, numerador y denominador para obtener una fracción o expresión equivalente”.

[4]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{(x-7)}$ "x^2-$14x+49$ es una identidad notable y se simplifica con $(x\text{-}7)^2$ del denominador"	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ $\frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2(x-1)}$ Lo deja en blanco.
[5]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)(x-7)}{(x-7)^2(x-7)} = \boxed{\frac{1}{x-7}}$ Ruffini $\begin{array}{c\|ccc} & 1 & -14 & 49 \\ 7 & \downarrow & 7 & -49 \\ \hline & 1 & -7 & 0 \end{array}$ "He aplicado el método de Ruffini para simplificar el numerador"	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} \Rightarrow \frac{(a-2)^2}{(a-2)^2(a-2)} \Rightarrow \frac{a^2-4a+4}{(a-2)^2(a-2)}$ "He empleado la igualdad notable del cuadrado de una diferencia".
[6]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} =$ $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{14\pm\sqrt{(14)^2-4\cdot1\cdot49}}{2\cdot1} = \frac{14\pm\sqrt{196-196}}{2} = \frac{14\pm0}{2}$ $\begin{smallmatrix}\nearrow 7\\ \searrow 7\end{smallmatrix}$ $\cancel{\frac{(x+7)(x-7)^2}{(x^2-2\cdot7\cdot x+49)(x-7)}} = \cancel{\frac{x+7}{x^2-14x+49}}$ $= \frac{1}{x-7}$ "Como el numerador era igual que la expresión $(x\text{-}7)^2$, se simplifica"	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ $\frac{z^2-2\ \ +16}{(z-2)^2(z-2)}$ "He sustituido los valores nuevos en la misma posición"
[7]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \cancel{x^2-14x+49} \rightarrow \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{(x-7)}$ $(x-7)^2 = x^2+49-2x\cdot7 = x^2+49-14x$ "Al hacer la expresión $(x\text{-}7)^2$ me he dado cuenta que es el mismo número que el numerador pero simplificado, luego lo he sustituido, y he simplificado $(x\text{-}7)^2$ quitándolo con el del numerador".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)}$ $\frac{(y-2)^2}{(y-2)^2(y-2)} = \frac{y^2-4x+4}{(y-2)^2(y-2)}$ "He cambiado las x por y, y el número 7 por el 2, pero sigue siendo una ecuación con una potencia entre otra potencia".

[8]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ "El numerador de la fracción es una ecuación de segundo grado, y la he simplificado para poder simplificar con el denominador, y obtener la fracción simplificada al máximo".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} : \frac{x^2+4x+4}{(x+2)^2\cdot(x-2)} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)^2\cdot(x-2)} = \frac{1}{x-2}$ "He realizado el mismo planteamiento que en el ejercicio de arriba, pero con los números y letras distintas".
[9]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2-14x+49}{(x^2+49)(x-7)}$ $(x-7)(x-7) = x^2-7x-7x+49$ $49 \times 7 = 343$ "He descompuesto la fracción un poco"	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ $\frac{a^2-10a+36}{(a-8)^2(a-8)}$ "He hecho una fracción igual pero con diferentes números y otra letra".
[10]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2-14x+7^2}{x^2-14x+7^2(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ Lo deja en blanco.	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} \rightarrow \frac{x^2-10x+25}{(x-5)^2(x-5)}$ Lo deja en blanco.
[11]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{14\pm\sqrt{171-4\cdot1\cdot49}}{(x^2-14x+49)\cdot(x-7)} = \frac{\frac{14}{2}}{(x-7)^2\cdot(x-7)} = \frac{(x-7)}{(x-7)\cdot(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ "Hallamos las raíces del numerador y simplificamos por el denominador obteniendo el resultado lo mas simplificado posible".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ $\frac{a^2-8x+16}{(a-4)^2\cdot(a-4)}$ "Cogemos un polinomio como por ejemplo *(x - 4)*, lo elevamos al cuadrado y lo colocamos en el numerador y en el denominador el término al cuadrado por él".

[12]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{\cancel{(x-7)^2}}{\cancel{(x-7)^2}(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ "He factorizado el polinomio del numerador hasta poder simplificar con el denominador".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \cancel{(y-7)^2}$ Lo deja en blanco.
[13]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2-14x+\cancel{49}}{x^2\cancel{+49}-14x\cdot(x-7)} = \frac{\cancel{x^2}-14x}{x^2-14x^2+98x} = \frac{x(x^2-14)}{-13x^2+98x} = \frac{\cancel{x}(x-14)}{\cancel{x}(13x+98)} = \frac{x-14}{13x+98}$ "He ido simplificando la ecuación hasta dejarla en una menos compleja".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ $\frac{y^2-16y+64}{(y-8)^2(y-8)}$ "Cambiar los números y letras"
[14]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{\cancel{x^2-14x+49}}{\cancel{x^2-14x+49}(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ "Ya que en el numerador tenemos una ecuación de segundo grado y en el denominador hay una ecuación elevada al cuadrado que cuyo resultado es igual que el numerador, simplificamos ambos ya que hay una multiplicación en el denominador".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} \longrightarrow \frac{m^2-6m+9}{(m-3)^2(m-3)}$ "Dando otro valor y cambiando la letra, por último escribir en el denominador una ecuación de segundo grado, que coincida con el cuadrado del polinomio nuevo".
[15]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2-14x+49}{(x-7)^3} = x^2-14x+49-(x-7)^3$ En el divisor he juntado las operaciones del paréntesis ya que son iguales; luego he escrito la fracción "en línea" cambiando los números del divisor de signo".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ $\frac{t^2-z^2\cdot x+(z^3+z1)}{(t-z)^2(t-z)}$ "He sustituido el 7 por la letra *z* y la *x* por la *t*"

[16]	 “Para simplificar el numerador he hecho Ruffini, una vez simplificado el denominador y el numerador tenían el mismo valor *(x*-7*)* y lo he tachado porque nos saldrá el mismo valor con *(x*-7*)* que eliminándolo. Para simplificar la ecuación he buscado divisores de esta”.	 “Multiplicar numerador y denominador por un mismo número”
[17]	 “Arriba he hecho la suma de una diferencia y lo he simplificado con la de abajo para que al final de *x*-7”.	 “He tomado esta expresión como referencia y después me he inventado una suma por diferencia $(4x-8)^2$ que he colocado en el denominador la he realizado y el resultado de esa suma por diferencia lo he colocado en el numerador”.
[18]	 “En el numerador he simplificado la expresión por la resta de un binomio y después he simplificado las expresiones del numerador y el denominador”.	 “He sustituido números y expresiones y he seguido la misma estructura que el ejemplo y finalmente he resuelto las expresiones”.

[19]	a. Modifica esta expresión para obtener una expresión equivalente más sencilla. $\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{(x-7)}$ $\begin{array}{c\|ccc} & 1 & -14 & +49 \\ 7 & & 7 & -49 \\ \hline & 1 & -7 & 0 \end{array}$ “He descompuesto el numerador a través del teorema de Ruffini y después he simplificado al existir un factor en el denominador y numerador igual y que en el denominador se encuentra multiplicando”.	diferentes números y letras. $\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ $\frac{m^2-6m+9}{(m-3)^2(m-3)} = \frac{1}{m-3}$ $m-3$, $m-3$, $-3m+9$, m^2-3m, m^2-6m+9 “Utilizando el cuadrado de una diferencia”.
[20]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2-14x+49}{(x^2-14x+49)\cdot(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ “He descompuesto el denominador y como tenemos un producto he sacado factor común en el numerador y denominador y se me queda *1/x*-7”.	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ $\frac{x^2-6x+9}{(x-3)^2\cdot(x-3)} \to \frac{y^2-6y+9}{(y-3)^2\cdot(y-3)}$ ”Fijándome que el numerador de la 1ª expresión los números son el número del denominador por 2 y al cuadrado pues he cogido otros números distintos de 7, el 3 por ejemplo y he puesto la misma expresión pero en vez de “*x*” por incógnita he cogido “*y*”.
[21]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \boxed{\frac{1}{x-7}}$ “En el denominador había una expresión desarrollada de un binomio resta. Al escribirla como *(x*-7*)*^{2} se podía simplificar con la multiplicación del denominador”.	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} \to \frac{b^2+36-12b}{(b-6)^2(b-6)}$ $(b-6)^2 = x^2+36-12b$ “He realizado las mismas operaciones que en el ejercicio anterior, pero cambiando el número 7 por el 6 y la letra *x* por la *b*”.
[22]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)(x-7)}{(x-7)(x-7)(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ $(x-7)^{-1}$ $\begin{array}{c\|ccc} & 1 & -14 & +49 \\ 7 & & 7 & -49 \\ \hline & 1 & -7 & \end{array}$	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)}$ puede ser equivalente a $\frac{(a-8)^2}{(a-8)^3}$ $x=a$

	"He hecho Ruffini para descomponer en factores el primer miembro y he simplificado, el resultado era 1 partido por el polinomio, así que he elevado el polinomio *(a -1)* para quitar la fracción".	"Es el cuadrado y el cubo de una diferencia así que he cambiado letras y número al azar para conseguir una expresión con igual estructura".
[23]	a. Modifica esta expresión para obtener una expresión equivalente más sencilla. $\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2-14x+49}{(x^2+49-14x)(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ $x^2-14x+49=0 \to \frac{+14\pm\sqrt{144-4\cdot1\cdot49}}{2} = \frac{14\pm\sqrt{144-196}}{2} \to$ No puede simplificarse "Primero he intentado reducir el numerador con la fórmula para poder hallar sus raíces, pero como no era posible, he simplificado el denominador".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ $\frac{y^3-10y+25}{(x-5)^2(y-5)}$ "He buscado otra expresión similar a la inicial sabiendo que en el numerador el número que acompaña a la *y* tiene que ser el doble del número que tengo en el numerador, y que el término independiente tiene que ser el cuadrado del número del denominador".
[24]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{\cancel{(x-7)^2}}{\cancel{(x-7)^2}(x-7)} = \boxed{\frac{1}{x-7}}$ "Simplificar".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{t^2-2t+1}{(t-1)^2\cdot(t-1)}$ "Cambiar *x* por *t*".
[25]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2-14x+49}{x^2-14x+49\,(x-7)} = \frac{x^2-14x+49}{x^2-14x+49\,(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ "He desarrollado la identidad notable de $(x\text{-}7)^2$ La cual al multiplicar a *x*-7 se puede simplificar con el numerador".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} \Rightarrow \frac{y^2-6y+9}{(y-3)^2(y-3)}$ "He sustituido las *x* por las *y*, y he cambiado el 7 por el 3".

[26]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{\cancel{(x-7)}\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-7)^2}(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ "Descomponer el numerador en múltiplos mediante el método de Ruffini".	diferentes números y letras. $\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2-14x+49}{x^3-21x^2+147x-343}$ $x^2-14x+49$ $x-7$ $-7x^2+98x-343$ x^3-14x^2+49x $x^3-21x^2+147x-343$ d. Explica lo que has hecho. "He resuelto el denominador multiplicando, dejando así una fracción de polinomios".
[27]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ "He simplificado el numerador y luego he despejado el valor *(x-7)*^{2} en el numerador y denominador".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ $\frac{a^2-10a+25}{(a-5)^2(a-5)}$ "He sustituido el valor *x* y -7 por *a* y -5 respectivamente".
[28]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2-14x+7^2}{(x-7)^3} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^3} = \frac{1}{(x-7)}$ $\begin{array}{c\|ccc} & 1 & -14 & +49 \\ 7 & & 7 & -49 \\ \hline & 1 & -7 & \end{array}$ $(x-7)$ "Multiplicar los denominadores, hallar por Ruffini el factor común, y al ser divisibles numerador con el denominador, simplificar".	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x^2-14x+49)}{(x^2-14x+49)(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ "*(x-7)*^{2} = *x*^{2}*-14x +49*, por lo que al ser la misma ecuación que en el numerador se puede simplificar".
[29]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2-14x+49}{(x-7)^3} = \frac{\cancel{x^2-14x+49}}{(\cancel{x^2-14x+49})(x-7)} = x-7\ ;\ x:7$ "He resuelto el cuadrado de abajo y luego he simplificado la división"	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{n^2-4n+4}{(n-2)^2(n-2)}$ "He cambiado la incógnita x por n, y también he cambiado el 7 por un 2, calculando los números de la ecuación de segundo grado"

[30]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{1}{x-7}$ “Lo primero ha sido que he identificado que la expresión del numerador era un binomio de Newton, luego lo reduje a su expresión más simple, y luego dividí el numerador y denominador, simplificando arriba y abajo”	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}$ $\qquad \frac{9t^2-36t+36}{(3x-6)^2\,(3x-6)}$ “Lo único que hice fue poner aleatoriamente una serie de números que estuvieran acorde al modelo”.
[31]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)}{(x-7)^3} = \cancel{\frac{1}{3}} = \frac{1}{(x-7)^2}$ “Pues primero en el numerador he simplificado y me ha dado *x*-7 y en el divisor he sumado exponentes”	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} \Rightarrow \frac{y^2-12x+36}{(x-6)^2(x-6)} = \frac{(x-6)}{(x-6)^3} = \frac{1}{(x-6)^2}$ “Pues he copiado el ejercicio anterior pero cambiando la *x* por la *y* el 7 por el 6”.
[32]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2(x-7)} : \frac{1}{x-7}$ No explica	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x-7}{x^2-14x+49}$ No explica
[33]	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^3}$ “En la expresión del numerador he utilizado la fórmula cuadrática para resolver este tipo de ecuaciones, y en el denominador he multiplicado la expresión elevada al cuadrado por *(x-7)”.*	$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{a^2-8a+16}{(a-4)^2\cdot(a-4)} = \frac{(a-4)^2}{(a-4)^3}$ “Se realiza el mismo proceso que en el apartado a) pero modificando los números y la incógnita”

TAREA 2

Alumno	PARTE A Y B. MODIFICA LA EXPRESIÓN.	PARTE C Y D. CONSTRUYE OTRA EXPRESIÓN.
[1]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{\cancel{2m}(2m-1)}{\cancel{2m}(2m^4-m^3)} = \boxed{\frac{2m-1}{2m^4-m^3}} = \frac{\cancel{2m-1}}{m^3(\cancel{2m-1})} = \frac{1}{m^3}$ “He sacado factor común para que el $2m$ que está multiplicando en el numerador se puede ir con otro $2m$ en el denominador. He seguido sacando factor común en el denominador y el $2m$-1 se ha ido y ha quedado $1/m^3$”.	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$ $\frac{4x(4x-2)}{8x^5-4x^4}$ “La letra *m* la he cambiado por la *x* y a todos los números los he multiplicado por 2”.
[2]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m(2m-1)}{m^4(4m-2m)}$ “He extraído factor común del denominador”	--------
[3]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4m^2-2m}{4m^5-2m^4} = \frac{1}{4m^3-2m^3} = 4m^{-3}-2m^{-3}$ “He multiplicado en el numerador y lo he simplificado luego. Como resulta que queda un uno en el numerador pues lo he invertido y he puesto las potencias del denominador negativas.”	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4x(4x-2)}{8x^5-4x^4}$ “He multiplicado todos los números por 2”.
[4]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m(2m-1)}{2m^4(2m-1)} = \frac{1}{2m^3}$ “He sacado factor común y he simplificado”	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$ $\frac{6x(6x-1)}{36x^5-6x^4}$ No explica.

[5]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m\cancel{(2m-1)}}{2m^4\cancel{(2m-1)}} = \boxed{\frac{1}{m^3}}$ "He aplicado el método de sacar factor común"	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$ $\frac{3m(3m^2-2)}{9m^6-6m^5} = \frac{3m(3m-2)}{3m^5(3m-2)} = \frac{1}{m^4}$ "He procurado que el exponente de la letra del denominador sea mayor para que quede 1 en el numerador".
[6]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4m^2-2m}{4m^5-2m} = \frac{2m(2m-1)}{2m(2m^4-2m^3)} = \frac{2m-1}{2m^4-2m^3}$ "En el primer paso he sacado factor común y lo he simplificado para reducirlo".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$ $\frac{3k(3k-2)}{6k^5-3k^4}$ "He cambiado los números y las letras"
[7]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m(2m-1)}{2m(2m^4-m^3)} = \frac{2m-1}{2m^4-m^3} \Rightarrow \frac{2m-1}{m^3(2m-1)}$; $2m(2m-1) = 4m^2-2m$ "Primero simplifico el denominador, y luego quito 2*m* arriba y abajo porque están multiplicando".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4m^2-2m}{4m^5-2m^4}$ // $\frac{9n^2-3n}{9n^5-3n^4} = \frac{3n(3n-1)}{9n^5-3n^4}$ "He cambiado la letra *m* por la *n*, y los números 4 y 2 por los números 9 y 3".
[8]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m(2m-1)}{2m^4(2m-1)} = \frac{2m-1}{2m^3(2m-1)} = \frac{1}{2m^3}$ "He sacado factor común para poder simplificar el numerador y el denominador de esta fracción".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4x(4x-2)}{8x^5-4x^4} = \frac{4x(4x-2)}{4x^{4}(2x-1)} = \frac{4x-2}{4x^3(2x-1)}$ "He realizado el mismo planteamiento que en el ejercicio arriba".

[9]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m(2m-1)}{2m^4(2m-1)}$ "Simplificarla"	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$ $\frac{4b(4b-3)}{6b^5-3b^4}$ "Cambiar los números y las letras"
[10]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4m^2-2m}{4m^5-2m^4}$ No explica	En blanco
[11]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m\cancel{(2m-1)}}{2m^4\cdot\cancel{(2m-1)}} = \frac{2m}{2m^4}$ "Hacemos factor común en el denominador y simplificamos".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} \Rightarrow \frac{7m(7m-1)}{6m^5-3m^4}$ No explica
[12]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{\cancel{2m}(2m-1)}{\cancel{2m}(2m^4-m^3)} = \frac{2m-1}{2m^4-m^3}$ "Factorizar el denominador, para poder simplificar con el numerador".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4x^2-2x}{2x^2(2x^3-2x^2)}$ "He sustituido la *m* por la *x* y he realizado la operación en el numerador, y he factorizado en el denominador".
[13]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m\cancel{(2m-1)}}{2m^4\cancel{(2m-1)}} = \frac{2m}{2m^4} = m^3$ "He simplificado la cantidad de *m* hasta que solo haya quedado m^3".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$ $\frac{3y(3y-1)}{9y^5-3y^4}$ "Cambiar los números y letras"

[14]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{\cancel{2m(2m-1)}}{\cancel{2m}^{3}\cancel{(2m-1)}} = \frac{1}{m^3}$ "El numerador está factorizado, sin embargo el denominador no, factorizando el denominador nos damos cuenta que se puede simplificar con el numerador".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} \longrightarrow \frac{3m(3m-1)}{9m^4-3m^3}$ "Ya que 4 es el doble de 2, buscamos otra cifra con el doble de ella. Pero aún así, el número 1 se mantiene igual"
[15]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4m^2-2m+2\cdot(2m-1)}{4m+4m^4-2m^4} = \frac{4m^2-2m+4m-1}{4m+2m^4} = \frac{4m^2+2m-4m}{2m^4+1} = \frac{4m^2-2m}{2m^4+1} = 4m^2-2m-2m^4+1 = -2m^4+4m^2-2m+1$ "He juntado todos los miembros posibles y luego la he puesto en orden".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{x(x-1)}{2\cdot x^5-x^4}$ "He sustituido 2*m* por la letra *x*"
[16]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{\cancel{2m}(2m-1)}{\cancel{2m}^4(2m^4-m^3)} = \frac{2m-1}{2m^4-m^3}$ "En el denominador he sacado factor común y he eliminado 2*m* para que sea más simple".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{4m(4m-2)}{8m^5-4m^4} \to \frac{4x(4x-2)}{8x^5-4x^4}$ "Multiplicar la fracción por el mismo número el denominador y el numerador en este caso es el 2".
[17]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4m^2-2m}{4m^5-2m^4} = 4m^3-2m^3$ "En el numerador he multiplicado el número por el paréntesis y después lo que me ha dado lo he simplificado por el denominador, ya que al dividir los exponentes se restan".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} / \frac{2c(2c-2)}{4c^2-4}$ No explica.
[18]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m(2m-1)}{2m^4(2m-1)} = \frac{\cancel{2m^2}(1-1)}{\cancel{2m^4}^{2}(2m-1)} = \frac{(1-1)}{2m-1}$ "Extraer factor común en cada uno de los miembros".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} \Rightarrow \frac{4m(4m-1)}{8m^4-4m^2} = \frac{8m^2(1-1)}{4m^2(2m^2-1)}$ "Sacar factor común".

[19]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4m^2-2m}{4m^5-2m^4} = 1m^{-3}+1m^{-3} = \frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^3} = \frac{2}{m^3}$ No explica	-----
[20]	-----	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} \Big/ \frac{3m(3m-1)}{9m^5-3m^4} \to \frac{3n(3n-1)}{3n^5-3n^4}$ “El numerador tiene un producto que sale 9 que aparece en el denominador por lo que he puesto 9 y arriba un 3”.
[21]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2\cancel{m}(2m-1)}{2\cancel{m}(2m^4-1m^3)} = \boxed{\frac{2m-1}{2m^4-m^3}}$ “He sacado factor común en el denominador y he simplificado”.	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} \Rightarrow \frac{3a(2a-4)}{6a^2-12}$ “He cambiado los números y las letra *x* por la *a* y he efectuado las operaciones para calcular el denominador”.
[22]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{\cancel{2m}(\cancel{2m-1})}{2m^{\cancel{4}3}(\cancel{2m-1})} = \frac{1}{2m^3} = 2m^{-3}$ “He sacado factor común en el denominador y he simplificado, el resultado era 1 partido por $2m^3$ así que he puesto exponente negativo para quitarlo”.	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$ $\frac{2y(2y-1)}{2y^4(2y-1)} \cdot \frac{3}{3} = \frac{6y(6y-3)}{6y^4(6y-3)}$ $m=y$ “He multiplicado por 3 La expresión para obtener una con igual estructura”.
[23]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{\cancel{2m}(2m-1)}{\cancel{2m}(2m^4-m^3)} = \frac{2m-1}{2m^4-m^3}$ “He sacado factor común en el denominador para poder simplificar la expresión”.	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}$ $\frac{3n(3n-1)}{9n^5-3n^4}$ “He buscado otra expresión similar a la inicial sabiendo que los números que tengo que utilizar tienen que ver uno el cuadrado del otro”.

[24]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2m\cancel{(2m-1)}}{2m^4\cancel{(2m-1)}} = \boxed{\frac{2m}{2m^4}}$ “Hallar factor común en el denominador y simplificar”.	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{2t^2-t}{8t^8-4t^4}$ “Cambiar la incógnita y cambiar los números”.
[25]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4m^2-2m}{4m^5-2m^4} = \frac{m(4m-2)}{m(4m^4-2m^3)} = \frac{4m-2}{4m^4-2m^3} = \frac{2(2m-1)}{2(2m^4-m^3)} = \frac{2m-1}{2m^4-m^3}$ “He desarrollado el numerador y luego al sacar factor común he simplificado”.	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} \neq \frac{3x(3x-1)}{9x^5-3x^4}$ “He sustituido la *m* por *x*, y he cambiado los números de tal forma que la estructura sea la misma”.
[26]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{\cancel{2m}(2m-1)}{\cancel{2m}(2m^3-m^3)} = \frac{2m-1}{2m^3-m^3}$ “He sacado factor común para simplificar la expresión”.	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4m^2-2m}{4m^5-2m^4}$ “He multiplicado los factores para desarrollar así la expresión y que quede una fracción de polinomios”.
[27]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{4m-2m}{4m^5-2m^4} = 4m^{-4}-2m^{-3}$ “He multiplicado *2m* por el paréntesis y luego he restado los números a los que están elevados”.	-----
[28]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{\cancel{2m}(2m-1)}{\cancel{2m}(2m^4-m^3)} = \frac{2m-1}{2m^4-m^3}$ “Sacar factor común en el denominador, y simplificar el numerador y denominador”	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4} = \frac{m^2+4m+4-2m}{4m^5-2m^4} = m^2+2m+4$ No explica.

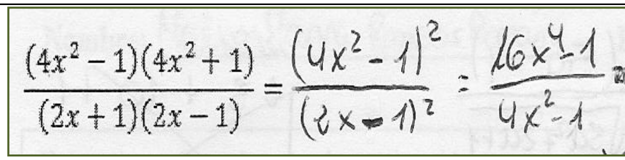
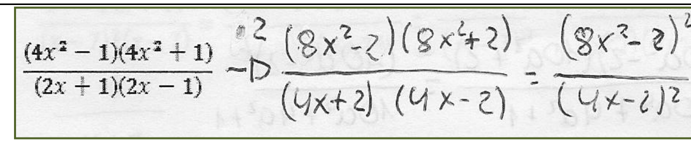
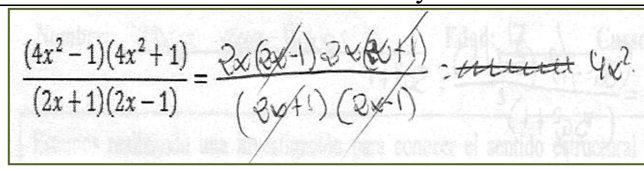
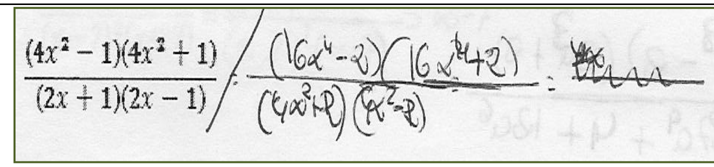
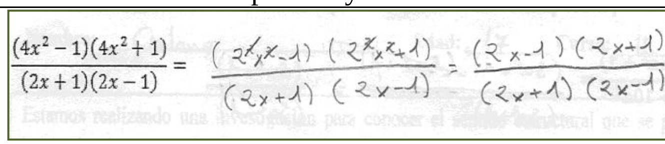
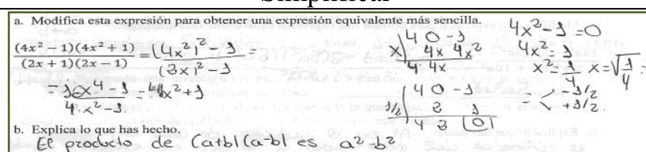
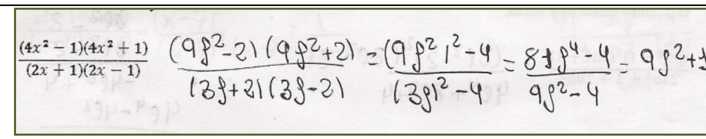
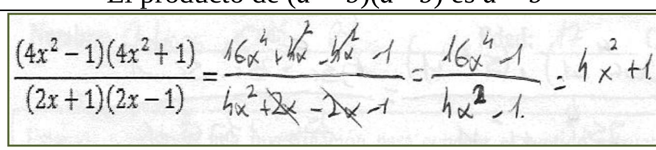
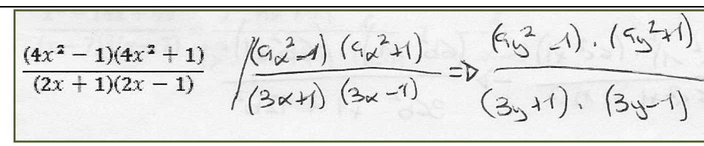
[29]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}=\frac{4m^2-2m}{4m^5-2m^4}=\frac{2m\cancel{(2m-1)}}{2m^{4}\cancel{(2m-1)}}=\frac{1}{2m^3}$ "He sacado factor común en denominador y en numerador".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}=\frac{6x(6x-1)}{36x^5-6x^4}$ "He cambiado la incógnita *m* por *x* y el 2 por el 6, calculando el 36 del denominador".
[30]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}=\frac{2m(2m-1)}{2m(2m^4-m^3)}=\frac{2m-1}{2m^4-m^3}$ "Muy sencillo solo tuve que sacar factor común, luego simplificar y ya está".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}\quad\frac{6s(3s-2)}{18s^5-3s^3}$ No explica.
[31]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}=\frac{4m^2-2m}{4m^5-2m^4}=\frac{1}{4m^3-2m^3}=\frac{1}{2m^3}$ "He multiplicado *2m (2m-1)*= dando =$4m^2$- *2m* y ya aquí he simplificado".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}=\frac{3w^2(3w-1)}{5w^4-3w}=\frac{9w^3-3w^2}{5w^4-3w}=\frac{9w^3-3w}{5w^4}$ $\frac{4\bar{n}(4\bar{n}-1)}{16\bar{n}^6-4\bar{n}^4}=\frac{16\bar{n}^2-4\bar{n}}{16\bar{n}^6-4\bar{n}^4}=\frac{1}{16\bar{n}^3-4\bar{n}^3}$ "Pues he buscado un número cualquiera y he puesto en el divisor su cuadrado para luego poder simplificarlo".
[32]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}=\frac{2m(2m-1)}{2m^4(2m-1)}=\frac{1}{m^3}=m^{-3}$ No explica.	------
[33]	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}=\frac{4m^2-2m}{4m^5-2m^4}=\frac{2m^2-m}{2m^5-m^4}$ "He efectuado la multiplicación del numerador y el denominador lo he dejado tal como está. En el siguiente paso he simplificado la expresión".	$\frac{2m(2m-1)}{4m^5-2m^4}=\frac{3j(3j-2)}{6j^5-3j^4}$ "Modificar la letra *m* por la *j* y cambiar los números de la expresión dada".

TAREA 3

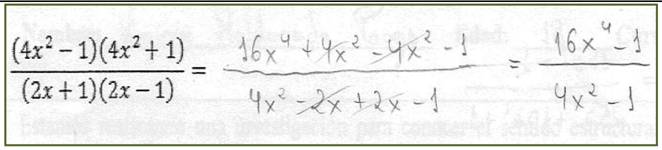
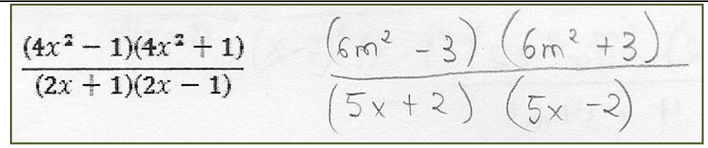
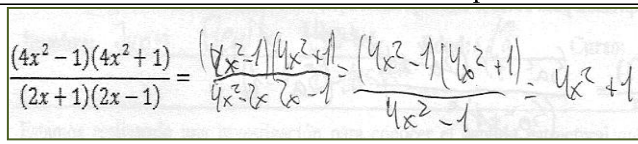
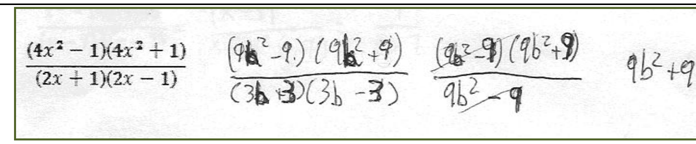
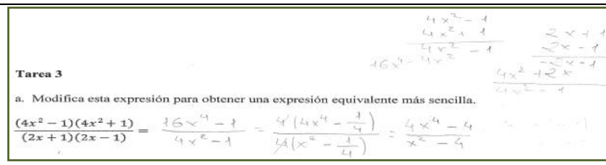
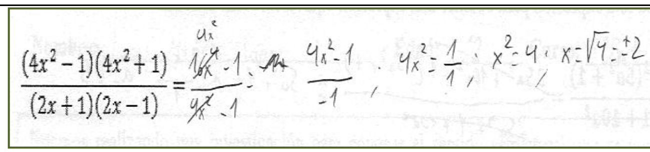
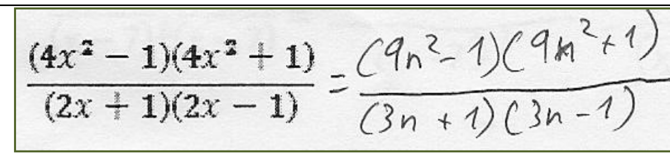
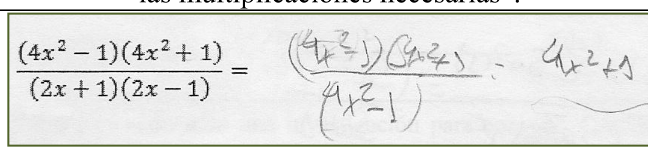
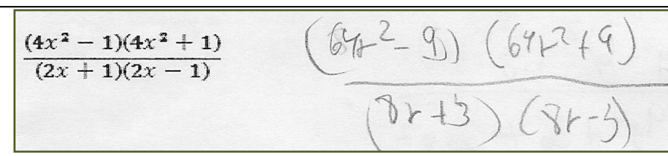
Alumno	PARTE A Y B. MODIFICA LA EXPRESIÓN.	PARTE C Y D. CONSTRUYE OTRA EXPRESIÓN.
[1]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}-\cancel{1}}{2x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-1} = \frac{16x^4-\cancel{1}}{2x^2-\cancel{1}} = \frac{16x^4}{2x^2} = \frac{8x^4}{x^2} = 8x^2$ "He multiplicado cada número y he ido tachando los números que se iban".	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$ $\frac{(8b^2-2)(8b^2+2)}{(4b+2)(4b-2)}$ "He cambiado la *x* por la letra *b* y he multiplicado todos los números por 2".
[2]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \cancel{\sqrt{\tfrac{1}{4}}-\sqrt{\tfrac{1}{4}}}\ \frac{16x^4+\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}-1}{2x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-1} = \frac{16x^4-1}{2x^2-1}$ $4x^2-1$ $x^2=\sqrt{\frac{1}{4}}$ "He multiplicado el numerador y el denominador".	----
[3]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}-1}{4x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-1} = \frac{16x^4-1}{4x^2-1}$ "He multiplicado los paréntesis y luego he simplificado"	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(8x^2-2)\cdot(8x^2+2)}{(4x+2)\cdot(4x-2)} = \frac{64x^4+\cancel{16x^2}-\cancel{16x^2}-4}{16x^2-\cancel{4x}+\cancel{4x}-4} = \frac{64x^4-4}{16x^2-4}$ "He multiplicado todos los números por 2".
[4]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \left(\frac{16x^4+4x^2-4x^2-1}{4x^2+2x-2x-1} = \frac{16x^4-1}{4x^2-1}\right)$ NO $= \frac{(2x+1)(2x-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = 4x^2+1$ "($4x^2$-1) es una identidad notable y después he simplificado".	diferentes números y letras. $\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$ $\left[\frac{(2x^2-1)(2x^2+1)}{(x+1)(x-1)}\right]^{NO}$ $\frac{(9x^2-1)(9x^2+1)}{(3x+1)(3x-1)}$ No explica.
[5]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(4x^2)^2-1^2}{(2x)^2-1^2} = \frac{16x^4-1}{4x^2-1}$ "He aplicado la igualdad notable de la suma por diferencia $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$".	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} \Rightarrow \frac{(3a^3-2)(3a^3+2)}{(3a+2)(3a-2)}$ No explica.

[6]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{\cancel{(2x+1)}\cancel{(2x-1)}(4x^2+1)}{\cancel{(2x+1)}\cancel{(2x-1)}} = 4x^2+1$ No explica.	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$ $\frac{(5t^2-1)(5t^2+1)}{(2t+1)(2t-1)}$ “He cambiado los números y las letras”.
[7]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}-1}{4x^2-2x^2-1} = \frac{16x^4-1}{4x^2-1} \rightarrow$ $\cancel{(2x+1)}$. Esta $\rightarrow$ $\frac{\cancel{(4x^2-1)}(4x^2+1)}{\cancel{(4x^2-1)}} = 4x^2+1$ $(4x^2-1)(4x^2+1) = 16x^4+4x^2-4x^2-1$ $2x+1$, $2x-1$, $-2x-1$, $\frac{4x^2+2x}{4x^2-1}$ b. Explica lo que has hecho. “He multiplicado los números del denominador y dan igual al del numerador, luego los he quitado”.	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$ // $\frac{(9y^2-1)(9y^2+1)}{(3y+1)(3y-1)}$ “Cambio los números ‘4 y 2’ por ‘9 y 3’ y la letra ‘*x*’ por la ‘*y*’ ”
[8]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}-1}{4x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-1} = \frac{16x^4-1}{4x^2-1}$ “He multiplicado en el numerador los dos miembros, y en el denominador igual para poder simplificar la fracción”.	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(6a^2-1)(6a^2+1)}{(3a+1)(3a-1)} = \frac{36a^4+\cancel{6a^2}-\cancel{6a^2}-1}{9a^2+\cancel{3a}+\cancel{3a}-1} = \frac{3a^4-1}{9a^2-1}$ “He realizado el mismo planteamiento que en el ejercicio de arriba pero con los números y letras distintos”.
[9]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}-1}{4x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-1} = \frac{16x^4-1}{4x^2-1}$ “He multiplicado los productos para luego restar lo que se podía restar y poner el resultado”.	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$ $\frac{(5f^2-1)(5f^2+1)}{(3f+1)(2f-1)}$ “Cambiar los números que multiplican a las x y Cambiar las *x* por una *f*”.
[10]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}+1}{4x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-1} = \frac{16x^4}{4x^2}$ No explica.	----

[11]	-----	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} \Rightarrow \frac{(5x^2-1)\cdot(8x^2+1)}{(4x+1)\cdot(4x-1)}$ No explica
[12]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{\cancel{(4x^2-1)}(4x^2+1)}{\cancel{(4x^2-1)}} = 4x^2+1$ "Realizar la operación del denominador, puesto que el producto es igual a uno de los multiplicando del denominador, con el cual le podemos simplificar".	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16m^4-1}{4m^2-1}$ "Sustituir la '*x*' por la '*m*' y realizar las operaciones".
[13]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+4x^2\cancel{-4x^2}\cancel{-1}}{\cancel{4x^2}-2x+2x\cancel{-1}} = 16x^4+4x^2 = x^2(16x^2+4)$ "Multiplicar unos valores por otros para tener una ecuación y después simplificar el resultado".	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} \quad \frac{(6y^2-1)(6y^2+1)}{(3y+1)(2y+1)}$ "Cambiar los números y letras".
[14]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{\cancel{(4x^2-1)}(4x^2+1)}{\cancel{(4x^2-1)}} = 4x^2+1$ "Al existir dos ecuaciones de segundo grado, casi iguales y en el denominador dos polinomios que cuyo resultado de la multiplicación es igual que uno de las dos ecuaciones, la simplificamos".	-----
[15]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+4x^2-4x^2-1}{4x-2x+2x-1} = \frac{16x^4\cancel{-1}}{4x\cancel{-1}} = \frac{16x^4}{4x}$ "He multiplicado en el dividendo y en el divisor el 1er miembro de cada paréntesis por los números del 2º y en el 1er paréntesis, el 2º número por los números del 2º paréntesis. Luego he realizado las operaciones oportunas para "juntar" los números".	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} \quad \frac{(2\cdot x^2-1)(2\cdot x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ "He sustituido 2*x* por la letra *x*"

[16]	 $\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(4x^2-1)^2}{(2x-1)^2} = \frac{16x^4-1}{4x^2-1}$ “Como son del mismo grado pero con signo diferente los he elevado al cuadrado numerador y denominador”	 $\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{(8x^2-2)(8x^2+2)}{(4x+2)(4x-2)} = \frac{(8x^2-2)^2}{(4x-2)^2}$ “He multiplicado por 2 porque dividir sale con decimales, para mayor comodidad lo he multiplicado”.
[17]	 “He sacado factor común de las dos expresiones del numerador y las he simplificado con las del denominador y como en el numerador estaban multiplicándose el factor común los he multiplicado y me ha dado $4x^2$”.	 No explica.
[18]	 “Simplificar”	------
[19]	 El producto de $(a + b)(a - b)$ es $a^2 - b^2$	 $\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} \quad \frac{(9y^2-2)(9y^2+2)}{(3y+2)(3y-2)} = \frac{(9y^2)^2-4}{(3y)^2-4} = \frac{81y^4-4}{9y^2-4} = 9y^2+1$ No explica.
[20]	 $\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+4x^2-4x^2-1}{4x^2+2x-2x-1} = \frac{16x^4-1}{4x^2-1} = 4x^2+1$ “He descompuesto el denominador y numerador y los he simplificado”	 $\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} \Big/ \frac{(9x^2-1)(9x^2+1)}{(3x+1)(3x-1)} \Rightarrow \frac{(9y^2-1)\cdot(9y^2+1)}{(3y+1)\cdot(3y-1)}$ ”En la primera expresión el 4 es el doble de 2 del denominador y la x del denominador arriba es x^2 pues por eso he cogido el $3x$ en el denominador y en el numerador he puesto $9x^2$, y luego he cambiado x por y”.

[21]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{\cancel{(2x+1)}\cancel{(2x-1)}(4x^2+1)}{\cancel{(2x+1)}\cancel{(2x-1)}} = 4x^2+1$ "He desarrollado la suma por diferencia del numerador y he simplificado".	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} \Rightarrow \frac{(9c^2-4)(9c^2+4)}{(3c+2)(3c-2)}$ "He cambiado los números del numerador y he puesto los que corresponden de la suma por diferencia en el denominador".
[22]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{\cancel{(2x+1)}\cancel{(2x-1)}(2x+1)^2}{\cancel{(2x+1)}\cancel{(2x-1)}} = \frac{(2x+1)^2}{1} = (2x+1)^2$ "Descomponer el primer factor del numerador y simplificar".	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$ $\frac{(4a^2-1)(4a^2+1)}{(4a^2-1)} \cdot 2 = \frac{(8a^2-2)(8a^2+2)}{8a^2-2}$ "Multiplicar por 2 para obtener una expresión con igual estructura".
[23]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(4x^2)^2-(1)^2}{(2x)^2-1^2} = \frac{16x^4-1}{4x^2-1}$ "He aplicado el producto notable (*a* - *b*)(*a* + *b*) para simplificar la expresión".	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}$ $\frac{(9x^2-1)(9x^2+1)}{(3x+1)(3x-1)}$ "He buscado una expresión similar a la inicial sabiendo que el número utilizado en el numerador tiene que ser el cuadrado del número empleado en el denominador".
[24]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{\cancel{(4x^2-1)}(4x^2+1)}{\cancel{4x^2-1}} = \boxed{4x^2+1}$ "Hallar el resultado en el denominador y simplificar".	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{(9t^2-4)\cdot(9t^2+4)}{(3t-2)(3t+2)}$ "Lo mismo que en las tareas anteriores".
[25]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{16x^4+4x^2-4x^2-1}{4x^2-2x-1+2x} = \frac{16x^4-1}{4x^2-2x-1+2x} = \frac{16x^4-1}{4x^2-1} = \frac{4(4x^4-1)}{4(x^2-1)} = \frac{4x^4-1}{x^2-1}$ "He desarrollado tanto el numerador como el denominador y a partir de ello he simplificado".	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)} \to \frac{(9y^2-1)(9x^2+1)}{(3y+1)(3x-1)}$ "He sustituido las x por las *y*, y más tarde he cambiado los números por 3 y 9".

[26]	 “Hay dos igualdades notables (suma por diferencia), pero como no recuerdo la fórmula lo he multiplicado”.	 “Construir una fracción de igualdades notables”.
[27]	 No explica	 “He sustituido los valores *x*, -1 y +1 por *b*, -3 y +3 en denominador y los valores *x*, -1 y + 1 por *b*, - 9 y + 9 en el numerador”
[28]	 No explica	-----
[29]	 “He simplificado lo máximo posible, tras realizar las multiplicaciones necesarias”.	 “He cambiado la *x* por *n*, y el 4 por un 9 para mantener la misma estructura”.
[30]	 “Simple; el saber que el denominador era una diferencia de cuadrados [(*a* + *b*)(*a* - *b*)]lo transformé y luego dividí el numerador entre el denominador”.	 No explica.

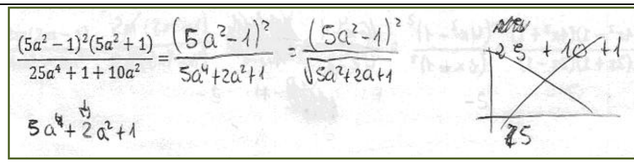
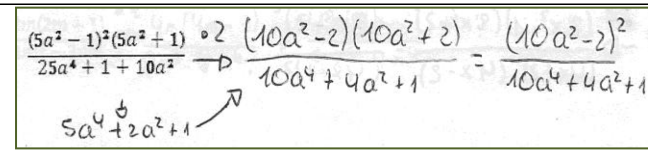
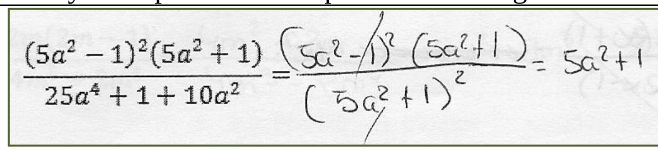
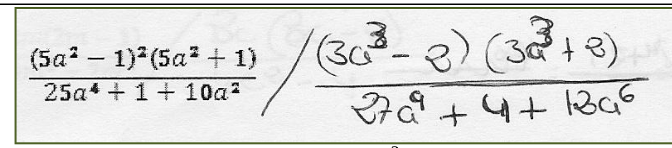
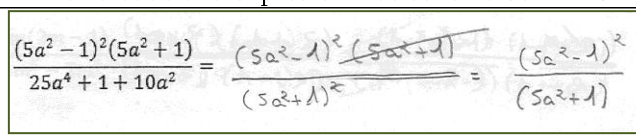
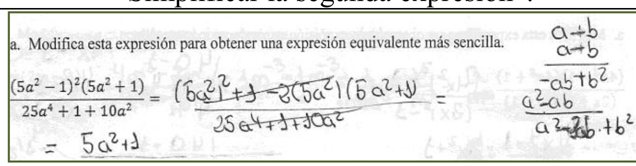
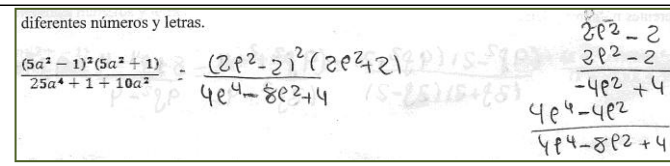
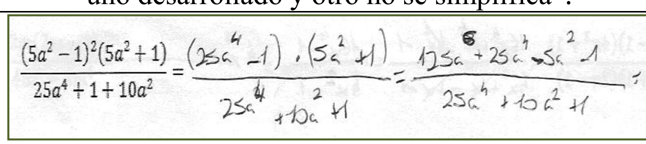
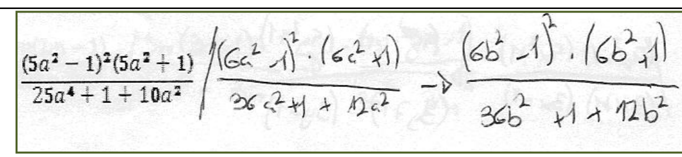
[31]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{16x^4+\cancel{4x^2}-\cancel{4x^2}-1}{4x^2-1}=\frac{16x^4-1}{4x^2-1}=\frac{4x^2}{1}=4x^2$ “Simplificar después de multiplicar”	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{(6a^2-1)(6a^2+1)}{(3x+1)(3x-1)}$ “Pues buscar múltiplos de 4/2=6/3 y cambiar *x* por *a*”.
[32]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{(4x^2)^2-1}{4x^2-1}=4x^2+1$ No explica.	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{4x^5-x}{4x^3-x}$ No explica.
[33]	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{16x^4-1}{4x^2-1}$ “Resolver el producto de la expresión”	$\frac{(4x^2-1)(4x^2+1)}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{(6y^2-1)(6y^2+1)}{(3y+1)(3y-1)}$ “Cambiar la expresión”

TAREA 4

Alumno	PARTE A Y B. MODIFICA LA EXPRESIÓN.	PARTE C Y D. CONSTRUYE OTRA EXPRESIÓN.
[1]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{5a^4+1+2\cdot 5a^2\cdot(-1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{5a^4+1-10a^2}{25a^4+1+10a^2} = \frac{5a^4-10a^2+1}{25a^4+10a^2+1}$ "He desarrollado los paréntesis".	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(10x^2-2)^2(10x^2+2)}{50x^4+2+20x^2}$ "He cambiado la *a* por la *x* y he multiplicado todos los números por 2".
[2]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{25a^4+1-10a^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{125a^6+5a^2-50a^4+25a^4+1-10a^2}{25a^4+1+10a^2} =$ $z=a^2$ $= \frac{125a^6-25a^4-5a^2+1}{25a^4+1+10a^2}$ "He desarrollado el numerador".	---------
[3]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{\cancel{25a^4+1+10a^2}\cdot(5a^2+1)}{\cancel{25a^4+1+10a^2}} = \frac{(5a^2+1)}{1} = (5a^2+1)^{-1}$ "He hecho el paréntesis elevado al cuadrado y me ha salido la misma expresión que abajo y la he simplificado luego lo he elevado a la menos una para quitar la fracción".	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(10a^2-2)^2(10a^2+2)}{50a^4+2+20a^2}$ "Lo he multiplicado todo por 2".
[4]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{(5a^2+1)^2} = \frac{(5a^2-1)^2}{(5a^2+1)}$ No explica.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} \quad \frac{(4x^2-1)^2(4x^2+1)}{16x^4+1+8x^2}$ No explica.

[5]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(5a^2-1)(25a^4-1)}{25a^4+1+10a^2}$ "He utilizado igualmente la igualdad notable de la suma por diferencia".	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$ $\frac{(4x^3-1)^2(4x^3+1)}{16x^6+1+10x^4}$ No explica.
[6]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(25a^4-10a^2+1)(5a^2+1)}{25a^2+1+10a^2}$ No explica	--------------
[7]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(5a^2-1)^2\cancel{(5a^2+1)}}{(5a^2+1)^{\cancel{2}}} = \frac{(5a^2-1)^2}{5a^2+1}$ $(5a^2+1)^2 = 25a^4+1+10a^2$ "Quito el *(5a²* + *1)* del numerador con el denominador, quedando el denominador con $5a^2 + 1$".	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$ // $\frac{(7b^2-1)^2(7b^2+1)}{49b^4+14b^2+1}$ $(7b^2+1)^2 = 49b^4+1+14b^2$ "Cambio la *a* por la *b* y el número 7 por el 5".
[8]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(25a^4-10a^2+1)(5a^2+1)}{(25a^4+1+10a^2)} = \frac{(5a^2-1)^2\cancel{(5a^2+1)}}{(5a^2+1)^{\cancel{2}}} = \frac{(5a^2-1)^2}{5a^2+1}$ "He resuelto $(5a^2 - 1)^2$, y luego $(5a^2 + 1)$ la he simplificado con el denominador.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(4b^2-1)^2(4b^2+1)}{(16b^4+1+8b^2)} = \frac{(4b^2-1)^2\cancel{(4b^2+1)}}{(4b^2+1)^{\cancel{2}}} = \frac{(4b^2-1)^2}{4b^2+1}$ "He realizado el mismo planteamiento que en el ejercicio anterior, pero con los número y letras distintos".
[9]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(\cancel{25a^4}-\cancel{25a^4}-1)(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{-1(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{-5a^2-1}{25a^4+1+10a^2}$ "He hecho el cuadrado del primer paréntesis y luego lo que me ha salido lo he multiplicado por el otro".	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$ $\frac{(6c^2-1)^2(6c^2+1)}{36c^4+1+5c^2}$ "He cambiado algunos números y las letras".

[10]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(25a^4-10a^2+1)(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} =$ No explica.	---------
[11]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(5a^2-1)^2\cdot(5a^2+1)}{(5a^2+1)^2} = \frac{(5a^2-1)^2}{5a^2+1}$ “Simplificamos el denominador y simplificamos los términos”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(10b^2-1)^2\cdot(10b^2+1)}{100b^4+1+20a^2}$ No explica.
[12]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(5a^2-1)^2\cancel{(5a^2+1)}}{(5a^2+1)^{\cancel{2}}} = \frac{(5a^2-1)^2}{(5a^2+1)}$ “Factorizar el denominador al igual que en los ejercicios anteriores haciendo uso de uno de los multiplicandos del numerador con el cual he simplificado”.	-------
[13]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{25a^4\cancel{-1}\cancel{-10a^2}\cdot(5a^2+1)}{25a^4\cancel{+1}\cancel{+10a^2}} = a^4(5a^2+1)$ “He multiplicado los valores y luego he ido reduciendo la ecuación”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} \quad \frac{(8y^2-1)^2(8y^2+1)}{64y^4+1+16a^2}$ “Cambiar los números y las letras”.
[14]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)^2}{25a^4+1+10a^2} = \frac{\cancel{25a^4+10a^2+1}\cdot(5a^2-1)^2}{\cancel{25a^4+1+10a^2}} = (5a^2-1)^2$ No explica.	---------
[15]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{\cancel{25a^4+5a^2}\;25a^4+1\,(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{125a^8+25a^4+5a^2+1}{25a^4+1+10a^2} =$ $125a^8+25a^4-25a^4+5a^2-10a^2+1-1=125a^8-5a^2$ “He juntado los números que he podido y he simplificado”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} \quad \frac{(t^2-1)^2(t^2+1)}{5\cdot t^4+1+2\cdot t^2}$ “He sustituido 5*a* por *t*”.

[16]	 “He elevado al cuadrado el numerador y he simplificado la ecuación y lo he puesto en raíz para cambiar el grado de la *a*”.	 “Multiplicar por 2 y simplificar la ecuación”.
[17]	 “El numerador lo he dejado como estaba y el denominador lo he transformado en el cuadrado de una suma para así poder simplificarlo con una de las expresiones de arriba. De este modo me ha dado una expresión más sencilla $5a^2 +1$”.	 “Me he inventado la expresión $(3a^3-2)$ que está colocada en el numerador y después la he desarrollado en el denominador”.
[18]	 “Simplificar la segunda expresión”.	---------
[19]	 “Al ser el cuadrado de una diferencia el factor del denominador y el numerador iguales pero uno desarrollado y otro no se simplifica”.	 “Utilizando otras letras y otros número pero con el mismo procedimiento”.
[20]	 “He descompuesto las expresiones y he simplificado”.	 “El 25 y el *b* del denominador son el cuadrado y por 2 a 5 y el numerador se pone solo el 5, por eso yo he cogido el 6 y abajo he puesto su doble 36 y por 2, 12”.

[21]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{(5a^2+1)^2}$ “He puesto el denominador en su identidad notable”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}\rightarrow\frac{(2x^3-2)^2(2x^2+2)}{4x^9+4+8x^3}$ “He cambiado las letras y los números del numerador y he desarrollado el binomio suma para el denominador”.
[22]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{(5a^2-1)^2\cancel{(5a^2+1)}}{(5a^2+1)^2}=\frac{(5a^2-1)^2}{5a^2+1}$ “He descompuesto en factores el denominador y he simplificado”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}-\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{(5a^2+1)^2}\cdot\frac{2}{2}=\frac{(10x^2-2)^2(10x^2+2)}{(10x^2+2)^2}$ “He multiplicado por 2 la expresión inicial para obtener una con igual estructura”.
[23]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{(5a^2-1)^2\cancel{(5a^2+1)}}{\cancel{(5a^2+1)}}=(5a^2-1)^2$ “Sabiendo que el denominador es un producto notable desarrollado, lo he transformado a producto notable y lo he simplificado”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$ $\frac{(3a^2-1)^2(3a^2+1)}{9a^4+1+6a^2}$ “He buscado otra expresión similar a la inicial sabiendo que el denominador es un producto notable desarrollado”.
[24]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{(5a^2-1)^2\cancel{(5a^2+1)}}{(5a^2+1)^2}=\frac{(5a^2-1)^2}{5a^2+1}$ “Simplificar”	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{(3t-2)^2(3t+2)^2}{9t^2+4+12}$ “Cambiar”.
[25]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{\left[(5a^2)^2-(2\cdot 5a^2\cdot 1)+1\right](5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{(25a^4+10a^2+1)(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=5a^2+1$ “He desarrollado $(5a^2-1)^2$ el cual se simplifica con el denominador”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}\rightarrow\frac{(7b^2-1)^2(7b^2+1)}{49b^4+1+14a^2}$ “He sustituido *a* por *b* y he realizado la expresión con el número 7”.

[26]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{25a^4-1}{25a^4+10a^2+1}$ “He resuelto la igualdad notable”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$ $\frac{(7m^8-2)(7m^8+2)}{12m^3-4+14m^2}$ “Construir una igualdad notable y un polinomio”
[27]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(5a^2-1)^2\cancel{(5a^2+1)}}{\cancel{(5a^2+1)^2}} = (5a^2-1)^2$ He simplificado el denominador y luego he despejado el $5a^2-1$ en numerador y denominador”.	----------
[28]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(5a^2-1)^2\cdot(5a^2+1)}{(5a^2+1)^2} = \frac{(5a^2+1)^2}{(5a^2+1)}$ “$25a^4 + 1 + 10a^2 = (5a^2+1)^2$ por lo que podemos simplificar el numerador con el denominador”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{25a^2+1-10a^2\cdot\cancel{25a^2+1+10a^2}}{\cancel{25a^4+1+10a^2}} = 25a^2+1-10a^2$ $= (5a^2-1)^2$ “Resolvemos el numerador, y lo simplificamos con el numerador”.
[29]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{\cancel{25a^4+10a^2+1}(5a^2+1)}{\cancel{25a^4+1+10a^2}} = 5a^2+1;\ a^2=\frac{5}{1};\ a=\sqrt{5}$ “He calculado el cuadrado, he simplificado la división y he calculado a”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(4x^2+1)(4x^2-1)^2}{16x^4+8x^2+1}$ “He cambiado el 5 por un 4 y luego conmuto la *a* por la incógnita *x*”.
[30]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2} = \frac{(5a^2-1)^2\cancel{(5a^2+1)}}{(5a^2+1)^2} = \frac{(5a^2-1)^2}{5a^2+1}$ “Reduje la expresión del denominador a un binomio de Newton y luego lo simplifiqué con el numerador”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}$ $\frac{(3g^2-6)^2(3g^2+6)}{9g^4+36+36g^2}$ No explica.

[31]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{(25a^4+1)(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{(125a^6+25a^4+25a^4+1)}{25a^4+1+10a^2}$ y simplif “Pues multiplicar y luego simplificar”.	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{(10b^2-1)(10b^2+1)}{100b^4+1+10b^2}$ Cambiar el 5 por el 10 y sus respectivos cuadrados”,
[32]	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}=\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{(5a^2+1)}=25a^4-10a^2+1=5a^2(5a^2-2)+1$ No explica.	-------
[33]	---	$\frac{(5a^2-1)^2(5a^2+1)}{25a^4+1+10a^2}\quad\frac{(8h^2-1)^2(8h^2+1)}{64h^4+1+16h^2}$ “Cambiar la expresión, sus números y letras”.