TRABAJO FIN DE MASTER

Resolución de ecuaciones, inecuaciones e interpretación de sus soluciones

Universidad de Granada

Cristina Moraleda Espinar

Supervisor: José Luis Lupiañez Gómez

Granada 2010

Universidad de Granada

Resolución de ecuaciones, inecuaciones e interpretación de sus soluciones

Memoria de TRABAJO FIN DE MÁSTER realizada bajo la tutela del Doctor Jose Luis Lupiáñez Gómez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Cristina Moraleda Espinar, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo.: Cristina Moraleda Espinar

VºBº del Tutor

Fdo.: Jose Luis Lupiáñez Gómez

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN……………………………………………………………….5
2. ESTADO CURRICULAR…………………………………………………………7
3. ANÁLISIS DIDÁCTICO………………………………………………………..3
   3.1. Análisis de Contenido…………………………………………………...3
   3.2. Análisis Cognitivo………………………………………………………..18
   3.3. Materiales y Recursos…………………………………………………….24
4. EVALUACIÓN……………………………………………………………...26
   3.1. Criterios de Evaluación………………………………………………..26
   3.2. Instrumentos de Evaluación……………………………………………...29
5. TEMA: Resolución de ecuaciones, inecuaciones e interpretación de sus soluciones…………………………………………………………………...33
   4.1. Objetivos…………………………………………………………………33
   4.2. Contenidos……………………………………………………………….34
   4.3. Metodología……………………………………………………………....34
   4.4. Sesión 1…………………………………………………………………..36
   4.5. Sesión 2…………………………………………………………………...38
   4.6. Sesión 3…………………………………………………………………...40
   4.7. Sesión 4…………………………………………………………………...42
   4.8. Sesión 5…………………………………………………………………...44
   4.9. Sesión 6…………………………………………………………………...46
   4.10. Sesión 7…………………………………………………………………...49
   4.11. Sesión 8…………………………………………………………………...51
   4.13. Sesión 9…………………………………………………………………...53
6. CONCLUSIONES……………………………………………………………...54

7. REFERENCIAS……………………………………………………………..57

ANEXO I…………………………………………………………………......58

ANEXO II……………………………………………………………………61

1. INTRODUCCIÓN

Las Matemáticas constituyen un pilar fundamental en la educación, ya que permite obtener información de la realidad, estructurarla, analizarla y poder tomar decisiones. Dependiendo de la complejidad de los procedimientos matemáticos usados, tendremos o contaremos con un número de situaciones que se puedan resolver, obteniendo así una nueva información, la cual la podemos conocer y valorar de forma más completa.

Las Matemáticas se usan en todo el mundo como una herramienta esencial en muchos campos, entre los que se encuentran las ciencias naturales, la ingeniería, la medicina y las ciencias sociales, e incluso en disciplinas que, aparentemente, no están vinculadas con ella, como la música. Luego las Matemáticas nos son de gran utilidad en diferentes aspectos de la vida cotidiana. El aprendizaje de las Matemáticas se produce sobre conocimientos previos, algunos de tipo intuitivo e informal. También debemos tener en cuenta los argumentos que consideran el valor estético, el carácter lúdico, recreativo de las Matemáticas, ya que si sólo nos centramos en los argumentos utilizados para los fines de la educación matemática, quedará un vacio en el proceso de aprendizaje.

En este aspecto cobra una gran importancia el profesor/a de Matemáticas, ya que este tiene una gran responsabilidad porque debe de llevar a cabo todas las pautas mencionadas, tanto en la formación del alumno/a como en su posterior incorporación a la sociedad. Para ello surge la necesidad de confeccionar trabajos planificados con anterioridad a la actividad de la enseñanza, ya que la improvisación tiene límites a todos los niveles.

La planificación del trabajo a desarrollar en el aula mediante mi acción docente en la configuración de la siguiente unidad didáctica, se contextualiza en el primer curso de bachillerato en el área de Matemáticas para la modalidad de humanidades y ciencias sociales.

En la planificación de la unidad didáctica referente a la resolución de ecuaciones, inecuaciones e interpretación de sus soluciones, se comenzará estableciendo el marco legislativo y la fundamentación en la cual se sustenta nuestra unidad. Aunque no existe un método único y excluyente para llevar a cabo la práctica educativa, se realiza una propuesta metodológica y de evaluación que sintetiza los principios educativos a seguir en clase. La metodología es esencialmente constructivista, activa y motivadora.

En la evaluación se pretende conocer el grado de adquisición de los objetivos por parte del alumnado, para ello se utilizaran varios instrumentos de evaluación.

Seguidamente se muestra como la unidad está configurada y concretada para ser desarrollada en nueve sesiones, indicando en último lugar las conclusiones aportadas en la realización de este proyecto.

2. ESTADO CURRICULAR

En lo que respecta a la confección de la unidad didáctica, los contenidos a desarrollar en el curso de 1ºBachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología, mostrados por el currículo son únicamente Ministerio de Educación y Ciencia (2007 b):

Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones.

Para desarrollarlo recurrimos al nivel de conocimiento previo de nuestros alumnos/as, donde del currículo se han extraído los contenidos referentes al curso de 4º de E.S.O. entre los que se encuentra Ministerio de Educación y Ciencia (2007 a):

Opción A: Desigualdades, usos y propiedades. Resolución de inecuaciones lineales sencillas. Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones lineales sencillas

Opción B: Resolución de inecuaciones. Interpretación gráfica. Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.

En estos textos también hemos podido observar algunas indicaciones metodológicas que hemos considerado oportunas a tener en cuenta:

En la enseñanza de las matemáticas debemos disponer de diferentes herramientas que nos ayuden a motivar a los jóvenes a utilizarlas, dentro y fuera del aula, para encontrar soluciones a determinadas cuestiones relacionadas con su vida cotidiana o con su aplicación en otras áreas.

Las opciones metodológicas que se tomen van a ser fundamentales, incluso más que la propia introducción de unos u otros contenidos.

La utilización racional de las herramientas tecnológicas. El uso adecuado de calculadoras y software específico en el aprendizaje de los contenidos matemáticos mejora el desarrollo cognitivo en aspectos como el sentido numérico, la visualización o la relación entre diferentes contenidos.

El empleo de calculadoras y programas informáticos en la Educación secundaria obligatoria está especialmente indicado en la comparación, aproximación o las relaciones entre las diferentes formas de expresar los números, en el estudio de la geometría dinámica y en los contenidos relacionados con la utilización de gráficas y, en general, en la interpretación, tratamiento y representación de la información.

La fuerte abstracción simbólica, el saber matemático, deben tener en esta materia una relativa presencia. Las fórmulas, una vez que se las ha dotado de *significado, adoptan un papel de referencia que facilita la interpretación de los resultados pero, ni su obtención, ni su cálculo y mucho menos su memorización, deben ser objeto de estudio. Por su parte, las herramientas tecnológicas ofrecen la posibilidad de evitar tediosos cálculos que poco o nada aportan al tratamiento de la información. No por ello debe dejarse de trabajar la fluidez y la precisión en el cálculo manual simple, donde los estudiantes suelen cometer frecuentes errores que les pueden llevar a falsos resultados o inducirle a confusión en las conclusiones.*

Esta descripción de criterios constituye nuestro punto de partida, pero como señala Rico, L.(1997 b,p.50):

El profesor de matemáticas necesita ampliar sus perspectivas sobre los contenidos del currículo de matemáticas realizando una aproximación cognitiva para cada uno de los contenidos, además de un análisis semiótico, una reflexión fenomenológica, una perspectiva histórica y, en su caso, epistemológica, una valoración de contextos en los que se presenta cada concepto y de sus usos y significados, y una revisión de los materiales y recursos con los que puede mostrarse. Estos tipos de conocimientos son organizadores del currículo (entendiendo por organizadores del currículo, aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas), se presentan como las principales fuentes de información para el profesor de matemáticas y como instrumentos concretos en su actividad profesional para las tareas de planificación y diseño de una unidad didáctica.

Luego para la fundamentación de la unidad didáctica seguiremos el patrón marcado por los organizadores del currículo, que se estructuran en el análisis didáctico Gómez, P. (2007). Este análisis permite diseñar unidades didácticas en torno a un tema matemático, tal y como justificaremos en este trabajo.

En la planificación de las unidades didácticas, además de las posibles opciones matemáticas de organización para un tópico, resulta imprescindible tener en cuenta otros aspectos, de los que vamos a hacer una selección y destacar los que, a nuestro juicio, resultan más relevantes Rico, L.(1997 b,p.46)y hemos hecho mención anteriormente.

- *Errores y dificultades usualmente detectados en el aprendizaje de las matemáticas. Los errores se ponen de manifiesto como conocimientos inadecuados, por ello su detección se organiza mediante un escalonamiento de ejercicios, problemas y actividades.*
- *La diversidad de representaciones utilizadas para sistema conceptual. Las diferentes representaciones para los conceptos y procedimientos matemáticos se presentan explícitamente, así como las conexiones entre ellas.*
- *La fenomenología de los conocimientos implicados, debe estar en la base de los diferentes ejercicios y actividades que se proponen o de las actividades de motivación y ampliación.*
- *La diversidad de los materiales de tipo manipulativo y de los recursos que pueden emplearse en la enseñanza de cada tópico*

Posiblemente hay otras alternativas u otros modos de considerar los organizadores que acabamos de presentar. Sobre estos organizadores que acabamos de presentar, vamos a centrar nuestra reflexión. Rico, L.(1997 b,p.47).

Según el currículo relevante al primer curso de bachillerato, para desarrollar nuestro tema, contamos únicamente con el ítem:

Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones.

Esta descripción es insuficiente para describir con detalle los aspectos más relevantes a tener en cuenta en la elaboración de la unidad didáctica.

Para superar esta carencia, en primer lugar, realizamos una breve alusión a la historia en la que se fundamenta nuestra unidad, ésta aparece con mayor detalle en el ANEXO I. La resolución de ecuaciones e inecuaciones pertenece a la parte de las Matemáticas llamada Álgebra. Estas ecuaciones surgen del quehacer cotidiano de la actividad científica en uno de sus principales cometidos: la resolución de problemas. Los procedimientos de resolución de ecuaciones e inecuaciones ocuparon durante muchos años y en diferentes épocas de la historia de la Matemática a numerosos matemáticos.

A continuación se desarrollará el análisis didáctico referido a nuestro tema, ampliando el ítem que nos indica el currículo para el primer curso de Bachillerato y teniendo en cuenta también los referentes al curso de cuarto de ESO.

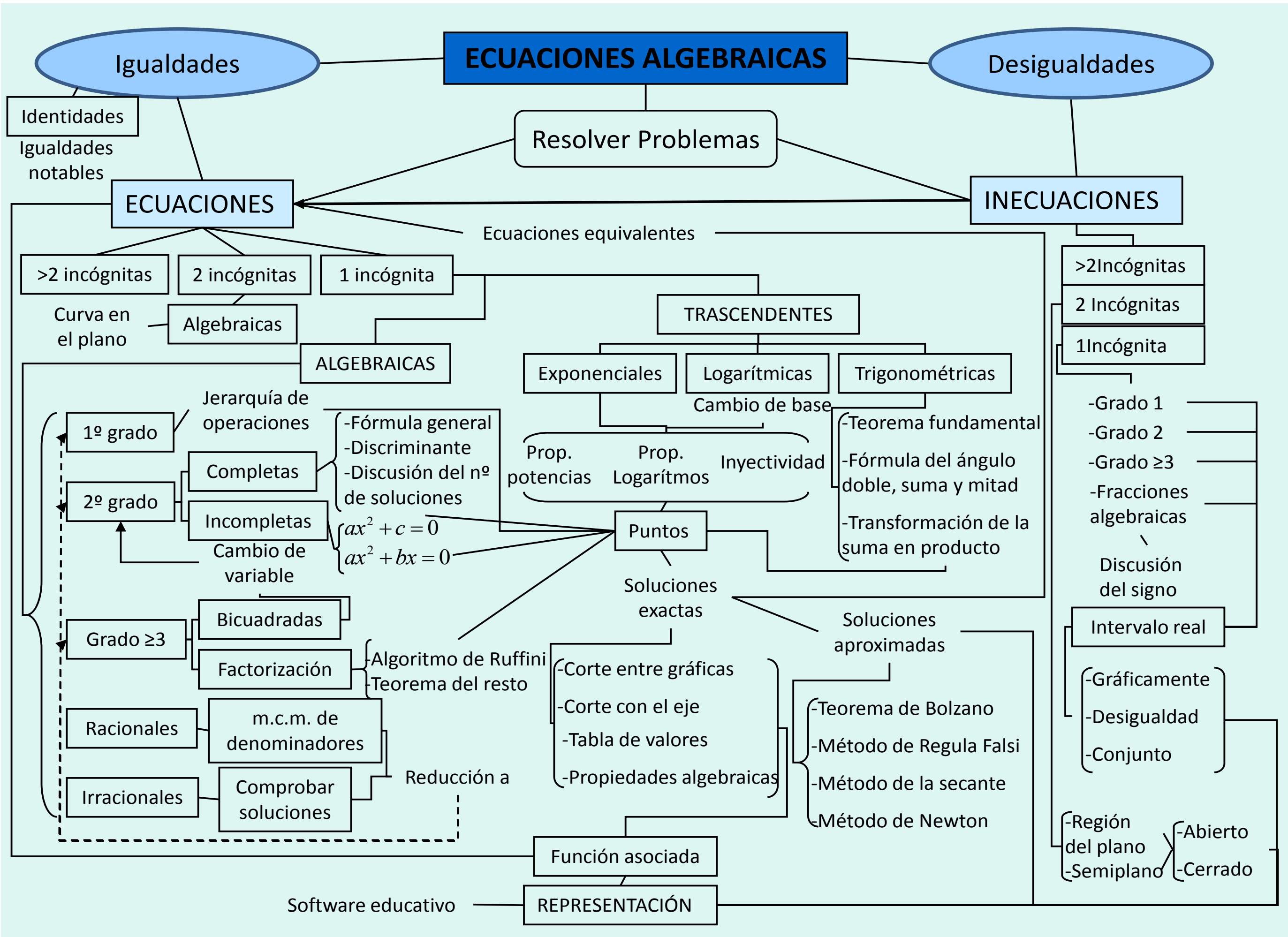
3. ANALISIS DIDÁCTICO

El análisis didáctico incluye varios procedimientos, se centrará la atención en dos de ellos; el análisis de contenido y el análisis cognitivo del tema de Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones. Además, se analizarán los materiales y recursos que se pueden utilizar en la unidad didáctica.

En el análisis de contenido se analizará el mapa conceptual del tema, los sistemas de representación que intervienen y la fenomenología asociada (Gómez, 2007). En el análisis cognitivo se estudiarán las expectativas, oportunidades y limitaciones esistentes en el aprendizaje. Lupiáñez, J. L. (2009).

3.1 Análisis de Contenido

Se presenta así el análisis de contenido, analizando el mapa conceptual siguiente:



Como se puede observar en el mapa conceptual, el trabajo comprende ecuaciones, inecuaciones y su representación gráfica, cuya función principal es la resolución de problemas.

Para desarrollar el tema, se ha dividido en igualdades, desigualdades y representación.

Se comienza hablando de las **igualdades**. Por un lado se han distinguido:

- Identidades: con esto se hace referencia a igualdades que se verifican para cualquier valor real, entre las que se engloban las igualdades notables.
- Ecuaciones: donde se ha atendido al número de incógnitas y a la naturaleza de las expresiones de sus miembros. Así se puede diferenciar entre:
    - Ecuaciones de primer grado: en las de una sola incógnita, la dificultad estará en el manejo de la jerarquía de las operaciones (paréntesis, denominadores, etc.). Y en las de dos incógnitas, habrá que tener en cuenta que la solución se dará en forma de recta en el plano.
    - Ecuaciones de segundo grado: donde se hallan ecuaciones completas e incompletas, teniendo en cuenta que con la fórmula general se pueden resolver los dos tipos a pesar de que las segundas tienen su método propio de resolución. En este tipo, también se tiene que considerar el estudio del número de soluciones a partir del discriminante.
    - Ecuaciones de grado mayor que dos: dentro de esta categoría es especialmente importante la factorización, para la cual se abordará el tanto el Algoritmo de Ruffini como el Teorema del Resto. Destacar las ecuaciones bicuadradas, que se resolverán a través de un cambio de variable como las ecuaciones de segundo grado.
    - Ecuaciones racionales: para lo cual habrá que tener en cuenta el cálculo del mínimo común múltiplo de los denominadores. Así, la ecuación de partida se reducirá a uno de los tipos anteriores.
    - Ecuaciones irracionales: hacer mención a la especial importancia de comprobar las soluciones, debido a que el método utilizado para su resolución implica la posible obtención de soluciones que no correspondan a la ecuación de partida. También en este caso, la ecuación se reduce a una de los tipos anteriores.

- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas: se caracterizan porque sus funciones asociadas son inversas una de la otra, por lo que sus propiedades y formas de resolución siguen caminos paralelos. También porque existen diferentes tipos de ecuaciones, por lo que el método a emplear dependerá de éstos. La unicidad de solución está relacionada con la inyectividad de tales funciones.
- Ecuaciones trigonométricas: este tipo de ecuaciones se trataría con más profundidad en el tema de trigonometría pero se quieren resaltar algunas de las herramientas que se utilizan para su resolución, como pueden ser: el Teorema Fundamental de la Trigonometría, las fórmulas del ángulo suma, diferencia, doble y mitad y las de transformación de sumas o diferencias en productos o divisiones. También se debe tener en cuenta que este tipo de ecuaciones tienen infinitas soluciones.

Al margen del tipo de ecuación, se tratará también la equivalencia de ecuaciones, atendiendo a sus soluciones.

Las soluciones de este tipo de ecuaciones, excepto en el caso de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya solución es una recta en el plano, son un número finito de puntos.

Con respecto a las **desigualdades**, esto es, inecuaciones, de nuevo se ha atendido al número de incógnitas para su clasificación. No obstante, para su resolución se recurrirá a sus ecuaciones asociadas, por lo que la clasificación es la misma salvo en los tipos de soluciones que se obtienen, que será lo que trataremos a continuación. Así, se obtienen los siguientes tipos:

- Inecuaciones con una incógnita: con ello se hace referencia a las de primer, segundo y tercer o mayor grado y a las racionales. En estos casos, el resultado obtenido será un intervalo real que se puede expresar de manera gráfica, en forma de desigualdad o como un conjunto. Resaltar que en el caso de inecuaciones con fracciones algebraicas, el procedimiento no se apoya tanto en la resolución de la ecuación asociada, sino que habrá que realizar la comprobación de signos del numerador y denominador.

- Inecuaciones con dos incógnitas: donde habrá que tener en cuenta que la ecuación asociada define una curva en el plano y el tipo de desigualdad nos determinará la región solución.

En lo referente a la **representación**, se pretende resaltar el importante nexo de unión entre las ecuaciones e inecuaciones y las funciones, ya que la representación de las funciones asociadas favorece notablemente la visualización por parte de los alumnos/as de las soluciones. Los métodos para representar dichas funciones serán a través de una tabla de valores o a partir del estudio de sus propiedades algebraicas. Una vez realizada esta representación, habrá que estudiar los puntos de corte con el eje de abscisas para obtener las soluciones exactas. Por otro lado, se sabe que si se representan las funciones asociadas a cada miembro de la expresión, las abscisas de los puntos de corte entre gráficas corresponderán a las soluciones de la ecuación de partida.

También se podría abordar un proceso de obtención de soluciones diferente de los anteriores: se trata de la aproximación, que se puede explicar a partir del método de Regula-falsi, método de Newton, de la secante o por el Teorema de Bolzano.

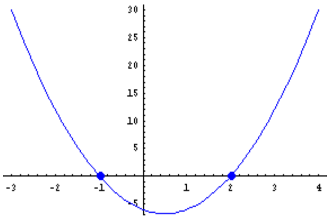
Otro de los organizadores mencionados son los sistemas de representación. "La noción de representación hace referencia al modo en que los sujetos expresan sus conocimientos con notaciones simbólicas o mediante algún tipo de gráfico". Rico, L.(1997 b,p.53).

Los sistemas de representaciones matemáticos se utilizan para modelizar fenómenos naturales o sociales, estos aspectos se estudiarán a continuación.

El estudio de los sistemas de representación, se analizará desde cinco ámbitos diferentes: Simbólico, Gráfico, Numérico, Verbal y Tecnológico. Ya que todos ellos participan en la mejor comprensión de los contenidos mencionados en el punto anterior y deben conocerse las analogías existentes entre ellos.

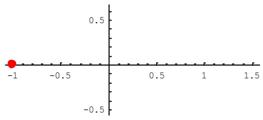
Desde el punto de vista simbólico, se representa una ecuación o inecuación desde diferentes perspectivas matemáticas.

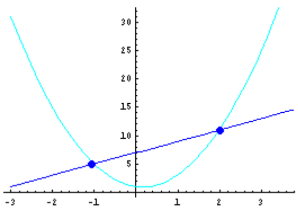
Por ejemplo: Una ecuación de segundo grado sería $ax^2 + bx + c = 0$, otra forma de representarla es factorizada $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ó como igualdad de dos funciones diferentes $ax^2 + x + 1 = (1 - b)x - c + 1$. Si se define la función asociada a la primera ecuación se tendrá también $f(x) = ax^2 + bx + c$, y atendiendo a lo anterior se puede escribir $ax^2 + x + 1 = (1 - b)x - c + 1$ como igualdad de dos funciones $f_1(x) = ax^2 + x + 1$ y $f_2(x) = (1 - b)x - c + 1$, desde el punto de vista simbólico lo anterior se puede representar como (en función de los valores de a, b y c), tomando por ejemplo a =3, b=-3y c=-6:



Se representa la igualdad $3x^2 - 3x - 6 = 0$ en el eje de coordenadas. Donde esta ecuación también se puede ver como sus puntos de corte con el eje de abscisas: (-1,0) y (2,0), representando estos a su vez como:

$ax^2 + bx + c = 0$





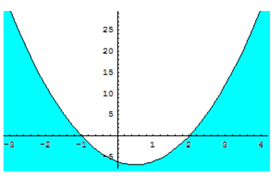
En este caso se representan las dos funciones asociadas a $3x^2 - x + 1 = 2x + 7$ que son:

$$f_1(x) = 3x^2 - x + 1 \text{ y } f_2(x) = 2x + 7$$

Como intersección de estas dos funciones, dando las dos soluciones.

En el caso de la inecuación $3x^2 - 3x - 6 \leq 0$ (genéricamente como $ax^2 + bx + c \leq 0$), para poder estudiarla y representarla se necesita definir su ecuación asociada, que correspondería a la estudiada anteriormente $3x^2 - 3x - 6 = 0$. De ello se obtiene el conjunto de puntos $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$ que también se puede escribir simbólicamente como conjunto de puntos $\{x \in \mathbb{R}/\ x \leq -1 \vee x \geq 2\}$, ambos se pueden representar sobre la recta real como:

Si se considera ahora, la inecuación en dos variables en la forma: $y \leq 3x^2 - 3x - 6$, para resolverla de nuevo se necesita definir su ecuación asociada que vendría dada por $y = 3x^2 - 3x - 6$. Donde el conjunto de soluciones de la misma se puede denotar simbólicamente como $\boxed{\{(x,y) \in \Re^2 / y = 3x^2 - 3x - 6\}}$ y el de la inecuación de partida como $\boxed{\{(x,y) \in \Re^2 / y \leq 3x^2 - 3x - 6\}}$ estos conjunto de soluciones se pueden representar gráficamente como:

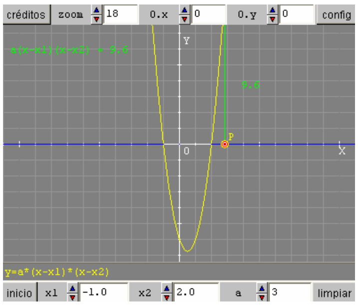


La región del plano limitada por la ecuación asociada a la inecuación de partida.

Desde un punto de vista numérico, lo que se pretende es aproximar las soluciones de una ecuación mediante los métodos mencionados en el mapa conceptual, para llegar a ellas, parten de consideraciones gráficas o analíticas. Algunos de estos métodos son Regula-falsi, Newton, Secante y Bolzano.

También se puede trabajar el tema desde lo verbal, detallando de forma explícita el problema a destacar y solucionar, además de poner de manifiesto los elementos utilizados para modelizar el problema en cuestión. Se utilizarán para ello, términos como: Solución, conjunto, igualdad, desigualdad,…

Por último, se desarrollará el aspecto tecnológico en los sistemas de representación, mediante materiales informáticos como páginas interactivas tales como:



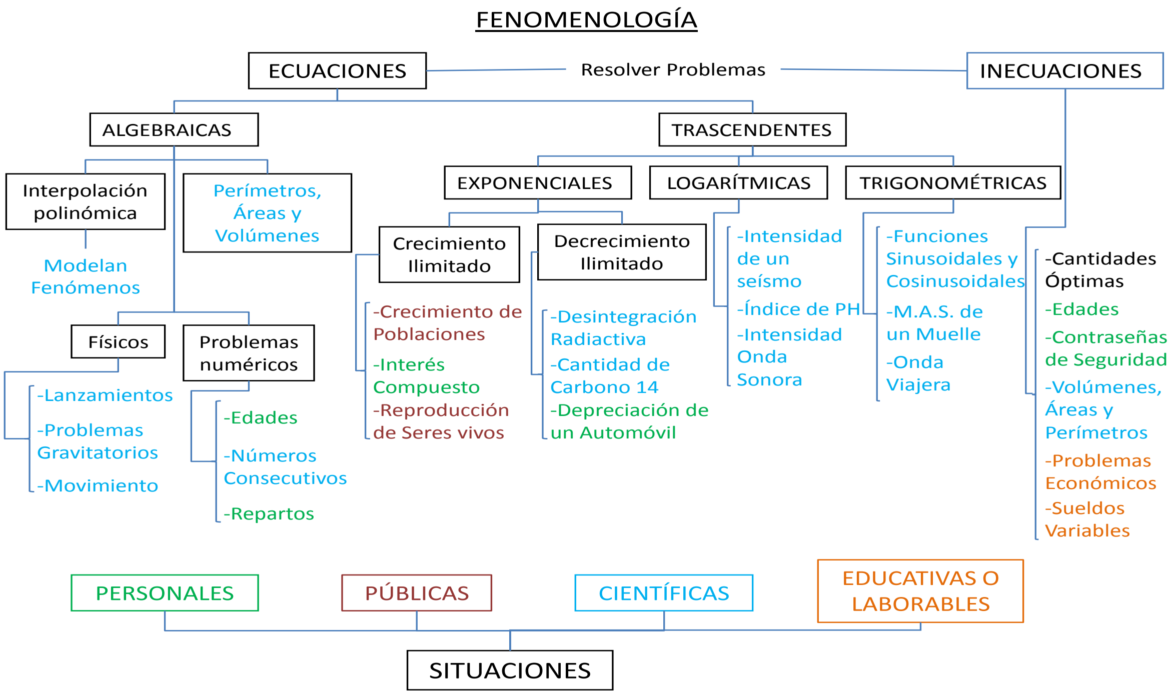
En ellas se pueden trabajar ecuaciones y sobretodo inecuaciones, cobra gran importancia en la resolución gráfica de inecuaciones, a la hora de distinguir la región solución.

También se puede hacer uso de calculadoras gráficas y de las hojas de cálculo, para agilizar los cálculos de problemas o actividades. Y gracias a ello para introducir a el alumnado instrumentos o herramientas que les ayuden en su estudio.

Conviene conocer cuáles son los fenómenos que están en la base de los contenidos tratados en la unidad didáctica. Por ello se realiza un estudio de los fenómenos que responden al tema a tratar, ecuaciones e inecuaciones, donde se pueden distinguir múltiples situaciones que se pueden encuadrar en los diferentes niveles de nuestro mapa conceptual. Así, se ha basado en una doble clasificación, la que atiende a la naturaleza de las expresiones algebraicas que aparecen en las ecuaciones e inecuaciones (algebraicas y transcendentales) y la que toma como referencia la naturaleza de las magnitudes de nuestro problema, en cuanto si se refiere a ellas como cantidades fijas o como cantidades variables. Se analizará esta segunda clasificación con un poco más de detalle:

- En las ecuaciones se encuentra con que la indeterminada x será un número o cantidad fija que se tiene que hallar, las expresiones utilizadas serán de la forma $f(x)=0$ ó $f(x)=g(x)$ donde en ambos casos se trata de encontrar los números exactos que hacen o bien que la cantidad $f(x)$ valga cero o bien que las cantidades $f(x)$ y $g(x)$ valgan lo mismo. Pero carece de interés la posible variación de las cantidades $f(x)$ o $g(x)$ que ocurre cuando x se mueva en un intervalo, pues aunque se sabe que pueden tomar varios, sólo nos interesa uno en concreto. Por ejemplo, cuando se calcula la longitud de un lado de una superficie para que ésta tenga el área fija que deseamos, no interesará como varía el lado, sino que sólo se quiere encontrar la medida exacta para la que la superficie mida una cierta cantidad
- Por otra parte en las inecuaciones las situaciones que se hallarán, son de la forma $f(x) \leq 0$ ó $f(x) \leq g(x)$, donde aquí sí interesa como varían las cantidades $f(x)$ o $g(x)$ conforme varía x, ya que aunque x se mueva dentro del propio conjunto de soluciones y se esté cumpliendo la igualdad, se puede obtener una información más precisa del problema según el valor elegido para la variable. Por ejemplo cuando se habla de dos métodos de obtener un sueldo y se pregunta a partir de cuantas horas merece más la pena un método u otro, en esta situación aunque interesan todos los valores de x para los que un sueldo es mayor que otro en concreto tienen especial importancia aquellos en los que ambos tipos de sueldo se encuentran igualados porque nos estarán diciendo hasta que cantidad de horas(x) interesa una fórmula de calcular el sueldo $f(x)$ y a partir de cual interesa la otra forma $g(x)$. Aunque en este problema también interesa que ambas cantidades de sueldo varían y por tanto se podrían hacer preguntas sobre la diferencia del sueldo según varía la x.

Así en el siguiente cuadro se han tratado de poner algunas de las situaciones que se pueden modelar desde el tema que nos atañe.



Cabe destacar que la fenomenología es fundamental en el desarrollo de la unidad didáctica, sobretodo en la redacción de las actividades, proporcionándonos múltiples ideas y alternativas centradas en actividades cotidianas y cercanas al alumnado.

Una vez realizado el análisis de contenido, se estudiará a partir de ello el análisis cognitivo, en el que se desarrollarán las expectativas, limitaciones y oportunidades del aprendizaje.

3.2 Análisis Cognitivo

En las expectativas de aprendizaje, se analizarán los objetivos específicos del tema, utilizando para ello la información recogida del análisis anterior. La función de dichos objetivos, será delimitar la información del mapa conceptual desarrollado. En la siguiente tabla se muestran tales objetivos, desde los que se plantea la unidad didáctica, indicando además las competencias PISA que satisfacen dichos objetivos, siendo estas: Pensar y Razonar (PR), Argumentar y Justificar (AJ), Comunicar(C), Modelizar(M),Resolver Problemas(RP), Representar(R), utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones (LS) y Emplear herramientas tecnológicas y soportes (HT).

	Identificar y Justificar	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.		X	X				X	
2	Modelizar procesos de crecimiento ilimitado y decrecimiento limitado.	X			X		X	X	X
3	Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	X	X				X	X	X

	Resolución y Representación Gráfica	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
4	Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	X	X				X	X	X
5	Aproximar una función asociada a una ecuación y sus soluciones mediante una tabla de valores y viceversa.						X	X	X
6	Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	X	X				X	X	
7	Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.	X					X	X	X
8	Obtener soluciones aproximadas de una ecuación mediante el método de Bolzano.		X	X			X		X

	Resolver Problemas	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
9	Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.		X	X	X	X			
10	Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	X			X	X		X	
11	Obtener problemas que modelen una ecuación o inecuación dada.	X			X	X		X	
12	Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	X	X	X					

A continuación se muestra un ejemplo, donde se analizan los objetivos que cubre la actividad de los señalados anteriormente:

- *Un elemento radioactivo se desintegra en función del tiempo t, medido en segundos, según $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$, donde N(t) es el número de átomos radiactivos existentes en el instante t, N_0 el número de átomos radiactivos en el instante inicial y la constante de desintegración λ del bario es igual a 0,0578. Calcula el tiempo que debe transcurrir para que se desintegre el 75% de una cierta cantidad de átomos de bario.*

Utiliza el método de Bolzano para aproximar la solución con cuatro iteraciones, de forma numérica y gráfica, ayudándote con una hoja de cálculo para alcanzar mayor precisión.

En esta actividad se pretende que los alumnos/as entiendan el proceso de aproximar una solución mediante el método de Bolzano. Es por ello que se les pide que realicen cuatro iteraciones con lápiz y papel.

También se pretende que sean conscientes de la efectividad de las nuevas tecnologías y sean capaces de utilizarlas. Por este motivo, se introducen las hojas de cálculo (Excel) para que puedan obtener más precisión en la solución aproximada. Para ello, tendrán que saber introducir fórmulas que relacionen los elementos de filas y columnas.

En esta actividad se trabajan los objetivos: 2, 4, 8, 9 y 10. Las competencias detectadas son: Pensar y Razonar, Argumentar y Justificar, Modelizar, Resolver Problemas y Herramientas Tecnológicas.

Como puede comprobarse, con los objetivos propuestos para este tema se cubren todas las competencias, algunas de ellas en mayor medida que otras debido a que este tema se brinda a trabajar más por ejemplo las competencias: Pensar y Razonar, Argumentar y Justificar, Lenguaje Simbólico y Resolver Problemas. Para poder trabajarlas de forma adecuada, se tendrán siempre presentes en el desarrollo diario de las clases, haciendo mayor hincapié en aquellas que les cuesten mayor trabajo al alumnado.

Una vez determinados los objetivos centrales del tema, se realizará una delimitación de los posibles errores cometidos por los alumnos/as.

El estudio de los errores y dificultades también proporciona esquemas con los que organizar los contenidos, en cuanto que una determinada secuenciación facilita la superación de dificultades específicas; proporciona criterios para establecer objetivos, en cuanto marca los errores prioritarios que deben evitarse y los obstáculos que hay que superar; proporciona orientaciones metodológicas en cuanto permite diseñar situaciones que planteen conflictos cognitivos a los alumnos en las que sea necesario reestructurar los conocimientos previos para superar las dificultades conceptuales. Rico, L.(1997 b,p.56).Se presentan a continuación los posibles errores o dificultades presentes en este tema, estos aparecen clasificados según del tipo que sean:

- **DIFICULTADES DE LENGUAJE**
  - No distinguir entre los distintos signos de desigualdad ($\leq$, $\geq$, $<$, $>$). Aparece en los objetivos 3, 7, 10, 11, anteriormente mencionados.

  - Dificultad para expresar algebraicamente un enunciado del lenguaje natural. Aparece en los objetivos 2, 9, 10, 11.
  - No entienden ni saben leer el lenguaje matemático que se usa en la expresión conjuntista. Aparece en los objetivos 3,4 y 7.
  - No reconocer ecuaciones ni inecuaciones si la variable no es “x”. Aparece en los objetivos 1, 4, 7 y 11.

- **APRENDIZAJE DEFICIENTE DE CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS PREVIO**
  - No cambiar el símbolo de la desigualdad cuando se multiplica por un número negativo. Aparece en el objetivo 7.
  - Se olvidan de comprobar las soluciones en las ecuaciones irracionales. Aparece en los objetivos 3, 4 y 12.
  - No entender las soluciones numéricas de las ecuaciones como puntos del plano o de la recta. Aparece en los objetivos 3, 4, 5, 6 y 8.
  - No entienden como solución un conjunto. Aparece en los objetivos 3, 6 y 7.
  - Tienen problemas al manejar expresiones infinitas (en intervalos y representación gráfica). Aparece en los objetivos 3, 5, 6 y 7.
  - No conocen la representación gráfica de las funciones elementales. Aparece en los objetivos 2, 5, 6, 7 y 8.

- **ASOCIACIONES INCORRECTAS O RIGIDEZ DE PENSAMIENTO**
  - No distinguir las regiones solución en una inecuación. Aparece en los objetivos 3 y 7.
  - No diferenciar el tipo de método de resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Aparece en los objetivos 1, 4 y 12.
  - Resolver inecuaciones polinómicas de grado mayor o igual que dos sin utilizar la ecuación asociada. Aparece en los objetivos 1, 7 y 12.
  - Dificultad para expresar un mismo conjunto solución en sus distintas formas. Aparece en los objetivos 3, 5, 6 y 7.

- **APLICACIÓN DE REGLAS O ESTRATEGIAS IRRELEVANTES**
  - No tener en cuenta los denominadores en inecuaciones con fracciones algebraicas. Aparece en los objetivos 3, 7 y 12.
  - Confusión al interpretar la solución de un problema. Aparece en los objetivos 2, 3, 9, 11 y 12.

Se analizará a continuación los errores que se pueden encontrar en una actividad concreta:

- Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$3x - \frac{x+2}{3} > \frac{2x+1}{4} - \frac{5-x}{2}$$

$$4t^4 + 2t^2 + 1 \geq 0$$

$$\frac{2z(z-3)+z^2}{z-1} \leq 3(z-1)$$

Utiliza la aplicación que aparece en la siguiente página de Internet:

http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones_con_una_incognita/inecuaciones_con_una_incognita.htm

para resolver las inecuaciones primera y cuarta.

La página está diseñada para la resolución de inecuaciones con una incógnita de primer grado, de segundo grado con y sin raíces reales y de fracciones algebraicas de primer grado. En cada uno de los casos se pueden variar los coeficientes. Lo que hace la aplicación es dibujar la función asociada a la inecuación y colocar un punto en el eje de abscisas que el alumno/a puede mover con el ratón. Al moverlo, se obtiene cuánto vale la imagen de ese punto por la función y así se pueden estudiar los cambios de signo y tomar el/los intervalos que correspondan a la desigualdad propia de la inecuación.

Como observación destacar que también esta herramienta se puede utilizar para la resolución de inecuaciones de primer grado, de segundo grado con y sin raíces reales y de fracciones algebraicas de primer grado pero, en este caso, con dos incógnitas, siempre y cuando una de ellas sea lineal. Para ello bastaría tener en consideración los cambios de signo estudiados anteriormente para determinar, en este caso, las regiones del plano solución de la inecuación.

Con respecto a la tarea que se está analizando, destacar que mi pretensión es que los alumnos/as reduzcan las inecuaciones hasta llegar a una expresión de las que se trabajan con esta aplicación.

Los errores que podemos encontrar son:

- No distinguir entre los distintos signos de desigualdad ($\leq$, $\geq$, <, >)
- No entienden ni saben leer el lenguaje matemático que se usa en la expresión conjuntista
- No reconocer ecuaciones ni inecuaciones si la variable no es “x”
- No cambiar el símbolo de la desigualdad cuando se multiplica por un número negativo
- No entienden como solución un conjunto
- Tienen problemas al manejar expresiones infinitas (en intervalos y representación gráfica)
- No conocen la representación gráfica de las funciones elementales
- No distinguir las regiones solución en una inecuación
- Dificultad para expresar un mismo conjunto solución en sus distintas formas
- No tener en cuenta los denominadores en inecuaciones con fracciones algebraicas.

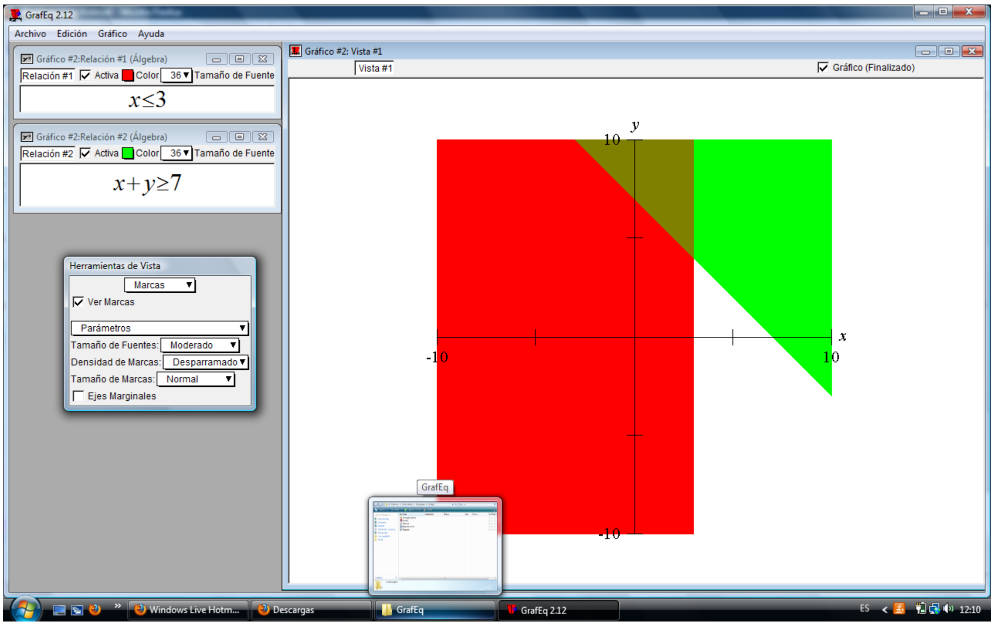
Para solventar o ayudar a los alumnos/as a afrontar las dificultades propuestas, se centrará la atención en el organizador materiales y recursos, ya que está vinculado principalmente con la metodología. *Los materiales y recursos proporcionan los soportes con los que se presentan y refuerzan los conceptos y procedimientos matemáticos. Además proporcionan nuevas tareas de evaluación, más abiertas y creativas, que permiten superar las pruebas convencionales de lápiz y papel*. Rico, L.(1997 b,p.56).

3.3 Materiales y Recursos

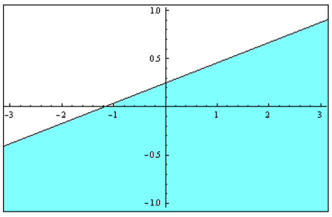
A continuación se presentarán y estudiarán una serie de materiales y recursos, que serán de gran utilidad en el desarrollo de las diferentes sesiones.

- **Transparencias con dibujo para trabajar la unión e intersección de conjuntos**. En estas transparencias aparecerán distintos tipos de conjuntos como intervalos, figuras geométricas, conjuntos acotados y regiones ilimitadas del plano. El trabajo a realizar con ellas consistirá en superponerlas de forma que los alumnos identifiquen gráficamente la unión, intersección, suma y resta de los diferentes conjuntos. Y si es posible, en el caso de los intervalos, den de forma algebraica y analítica los resultados de dichas operaciones (véase ANEXO II).

- La aplicación **“GrafEq”** permite representar funciones asociadas a ecuaciones (introducidas de la forma y=f(x)) y regiones del plano asociadas a inecuaciones (con dos incógnitas). El uso del programa ayuda para representar diferentes conjuntos y operar con ellos, puesto que se pueden representar de manera simultánea varias regiones y, de forma visual, los alumnos podrán relacionar fácilmente el resultado de dichas operaciones. Aunque se les introducirán las inecuaciones correspondientes a las regiones con las que se quiere que se trabaje, los alumnos podrán ir asimilando la relación existente entre el sistema de representación gráfico y el sistema de representación simbólico de las inecuaciones.



- Se utilizarán **tablas** para establecer las relaciones entre los distintos sistemas de representación, con ello se pretende que identifiquen diferentes formas de representar un mismo conjunto y se familiaricen con las gráficas y con el lenguaje matemático utilizado en ellos. Un ejemplo de dichas tablas sería el siguiente:

Intervalos/Regiones	Como conjunto	Gráficamente
[-3,2)		
		
	$\{x\epsilon R/x > -2 \cap x \leq 4\}$	

4. Evaluación

La evaluación es uno de los aspectos más significativos a tratar, pero no sólo se debe centrar en la realización de una prueba de lápiz y papel o un test de cuestiones y respuestas puntuales, ya que estos son instrumentos insuficientes para emitir un juicio útil sobre la competencia matemática de los alumnos/as. Con ello no es posible comprobar la comprensión real de los contenidos, el dominio de las estructuras, la capacidad personal de razonamiento y la habilidad en la elección y desarrollo de estrategias. Rico, L.(1997 a,p.36)

Es por ello, que en esta unidad didáctica se tendrán en cuenta otros muchos aspectos que ayudarán a definir la evaluación del alumno/a. Seguidamente se proporcionarán los criterios de evaluación sobre los cuales centraremos la atención del grado de consecución de los objetivos generales de la unidad

4.1 Criterios de Evaluación

Los criterios de evaluación, que a continuación se muestran, servirán como indicadores de la evolución de los aprendizajes del alumno/a, como elementos que ayudan a valorar el déficit y las necesidades detectadas y como referentes para estimar la mejora de las estrategias en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Tales criterios son:

- Reconoce los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes, explicando y justificando dicha elección.

  La diferenciación entre los distintos tipos de ecuaciones e inecuaciones en sí, mostrará el grado de asimilación de dichos conceptos.

- Resuelve de forma adecuada todo tipo de ecuaciones.

  Con este objetivo se pretende evaluar si el alumno/a conoce los algoritmos necesarios para resolver cualquier tipo de ecuación presentada.

- Interpreta y reconoce los conjuntos solución de inecuaciones.

  Se pretende así, que el alumno identifique y calcule los conjuntos solución de una determinada inecuación.

- Trabaja correctamente con las distintas formas de expresión de los conjuntos solución.

  Un aspecto fundamental que debe dominar un alumno/a es la correspondencia entre diferentes formas de expresión de un mismo conjunto solución.

- Resuelve de forma analítica y gráfica los distintos tipos de inecuaciones.

  Con este criterio se pretende medir la aplicación correcta de la resolución tanto grafica como analítica de una inecuación.

- Identifica situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.

  La integración de una buena interpretación de las situaciones cotidianas en un problema a resolver es un buen criterio para asegurar una buena formación del alumno/a

- Transforma de forma favorable al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.

  Análogamente al anterior, con el se pretende evaluar si el alumno/a tiene la capacidad de convertir un problema al lenguaje matemático.

- Obtiene problemas que modelen una ecuación o inecuación dada.

  Con este criterio se pretende comprobar si el alumno/a es capaz de invertir el proceso y obtener un problema que modele una situación planteada.

- Interpreta y expresa los procesos usados en la resolución de problemas.

  Un pilar principal en matemáticas, es la justificación de las herramientas utilizadas en un determinado problema, y con este criterio se pretende evaluar estos aspectos en el alumnado.

Es posible hacer un seguimiento del trabajo individual y colectivo que se realiza en clase, con la finalidad de evaluar los objetivos planteados anteriormente. Para ello se utilizarán los instrumentos que a continuación se destacan:

4.2 Instrumentos de Evaluación

Para establecer la Evaluación del alumno se tendrá en cuenta todo el proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollado en esta unidad. Es por ello que para recoger los datos que se estimen en dicho proceso de evaluación del alumno/a, se utilizarán instrumentos de evaluación, evitando que ninguno de ellos por sí solo determine la evaluación, sino que esta quede establecida por el conjunto de todos ellos. Además desde el un primer momento se le informará al alumnado de la presencia de estos instrumentos, de cómo debe realizar cada actuación para conseguir una puntuación favorable y de cómo afecta cada uno de ellos a la evaluación. Por tanto los instrumentos que se utilizarán para tal evaluación son:

- **Lista de control:** A través de la observación se obtiene información sobre la conducta o comportamiento que los alumnos/as manifiestan espontáneamente en clase. Para aprovechar mejor la información que pueden aportar estas observaciones, se tendrá en cuenta una lista de control, donde se señalará la presencia o ausencia de actitudes del alumno/a durante el desarrollo de una actividad o tarea, como por ejemplo: las actividades que se les indican para resolver en clase, actividades grupales, etc…
- **Preguntas en clase:** Se le pedirá al alumno/a que realice un resumen o síntesis de algo explicado en clase o del procedimiento llevado a cabo en la resolución de una actividad. Con ello se pretende comprobar el grado de expresión del alumno/a, así como de la asimilación de conceptos.
- **Cuaderno:** El cuaderno de clase del alumno/a es un instrumento de recogida de información muy útil para la evaluación continua, ya que refleja el trabajo diario, mediante él se puede comprobar: si el alumno/a toma apuntes en clase, si realiza las tareas mandadas, lo comprendido de las explicaciones llevadas a cabo en clase, si realiza esquemas,…

  Además, como se ha indicado anteriormente, desde el primer momento, se deberá informar al alumno de los aspectos que se van a valorar en su cuaderno y, realizada la valoración, aprovechar el momento de devolverlos para indicar cuáles son los aspectos que lleva bien, en los que está mejorando y los que más necesita trabajar.
- **Resolución de problemas explicando los pasos seguidos:** Este mecanismo se utilizará tanto para salir como voluntario para participar en la resolución de

tal ejercicio en la pizarra, como su resolución en el cuaderno, comprobando es su recogida que está realizado de forma correcta. Con ello se conocerá si el alumno/a ha comprendido y razonado la situación problemática y su solución.

- **Trabajos de pequeñas investigaciones:** Se le pedirá al alumno/a que investigue sobre algún tema relacionado con la unidad didáctica. Este tipo de tareas tiene la finalidad de profundizar en algún concepto tratado, favorecer así la adquisición de determinados contenidos y despertar una actitud emprendedora en el alumno/a.
- **Mapa conceptual:** Se le exigirá al alumno/a la realización de un mapa conceptual, donde relacione los contenidos vistos en esta unidad. Con ello se pretende ver qué sabe o comprende el alumno/a sobre unidad y detectar posibles conexiones equivocadas entre conceptos.
- **Prueba escrita de contenidos:** Con ella lo que se pretende es recoger la información que se obtiene presentando al alumno/a una serie de tareas o cuestiones que se consideran representativas de la conducta a medir o valorar. Con ellas se pretende que los alumnos/as recuerden contenidos ya trabajados, asocien o establezcan relaciones coherentes entre conceptos próximos, el análisis reflexivo,…

A continuación se presenta el modelo utilizado para la evaluación de la prueba escrita en esta unidad didáctica. La validez de cada tarea es la misma, es decir todas las tareas valen 2 puntos sobre 10. Cabe destacar que en las diferentes sesiones descritas a continuación, se han trabajado las herramientas necesarias para abordar tales actividades.

PRUEBA DEL TEMA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES, INECUACIONES E INTERPRESTACIÓN DE SUS SOLUCIONES.

1. Resuelve las ecuaciones:

a) $(x^2 - 3x + 5)log2 = 3 - log125$

b) $\frac{x+10}{2} + \frac{2(x+2)}{5} = \frac{5x-15}{3}$

c) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$

d) $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2}$

e) $9^{x+2} + 3^{x+3} - 810 = 0$

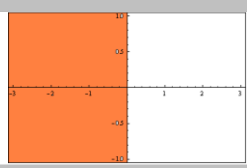
2. Una centena de ciervos se introducen en un coto de caza. El número, N(t), de los que aún queden vivos después de **t** años se predice que es: $N(t) = 100 \cdot 0{,}9^t$ Calcula el tiempo que pasará para que queden vivos en el coto 90 ciervos. Y para que queden vivos 30 ¿Cuánto tiempo pasará?

3. Una empresa de informática cobra por elaborar un programa de ordenador 1000 euros más 120 euros por hora de programación. Otra empresa de la competencia cobra siempre 10000 euros cualquiera que sea el número de horas de programación. ¿En qué condiciones conviene elegir una u otra empresa? Justifica tu respuesta.

4. Resuelve y representa la solución de las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x^2+4x-5}{x^3-x} \geq 0$ b) $-x^3 - 2x^2 - x \leq 0$

5. Completa la siguiente tabla con las diferentes formas de definir un conjunto:

Intervalos/ Regiones	Como conjuntos	Gráficamente
[-5,+∞)		
		
	$\{x \epsilon R / x > 3 \cap x \leq \frac{25}{4}\}$	

Cada una de las cuestiones planteadas en dicha prueba, será de gran utilidad para valorar el grado de consecución de algunos objetivos, así con la primera actividad se está evaluando los objetivos 4 y 7, en la actividad 2 se evalúan los objetivos 9, 10 y 3 al igual que con la actividad 3, en la actividad 4 se evalúan los objetivos 4 y 7 y en la actividad 5 se evalúa el objetivo 3. El resto de objetivos se evaluarán con los instrumentos expuestos anteriormente.

Estos instrumentos descritos, confeccionaran la evaluación del alumno/a en el proceso de enseñanza-aprendizaje del siguiente modo: Lista de control con un 10%, Preguntas de clase con un 10%, Cuaderno 20%, Resolución de problemas 10%, Investigaciones 10% y Prueba escrita un 30%.

5. Resolución de ecuaciones, inecuaciones e interpretación de sus soluciones

En esta unidad didáctica se desarrollará el tema de la resolución de ecuaciones, inecuaciones y la interpretación de sus soluciones. Acercándonos a la experiencia más cercana de los alumnos/as y partiendo de sus conocimientos propios sobre el tema.

Se comenzará estableciendo los objetivos y contenidos en los que se basa la realización y diseño de la unidad didáctica, estableciéndose la metodología más indicada para alcanzar la consecución de tales objetivos. Finalmente se mostraran secuenciadas todas las sesiones que componen el tema.

5.1 Objetivos

Los objetivos se entienden como las intenciones que orientan el diseño y la realización de las actividades necesarias para conseguir las finalidades educativas. Son elementos que guían y ayudan al profesor en la organización de su labor de enseñanza. Se pretende desarrollar las capacidades expresadas por los siguientes objetivos:

- Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.
- Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.
- Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.
- Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.
- Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.
- Obtener problemas que modelen una ecuación o inecuación dada.
- Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.

5.2 Contenidos

Se entienden los contenidos como el conjunto de saberes en los cuales se organizan las actividades. Constituyen el elemento que el profesor/a trabaja con el alumnado para conseguir las capacidades expresadas en los objetivos. Los contenidos de esta unidad son:

- Ecuaciones polinómicas.
- Solución de una ecuación o ecuaciones equivalentes.
- Ecuaciones con radicales. Ecuaciones racionales.
- Ecuaciones trascendentes: logarítmicas o exponenciales.
- Inecuaciones de primer grado, polinómicas y racionales. Conjunto solución.

5.3 Metodología

En el desarrollo de esta unidad, se pretende que los alumnos adquieran las destrezas necesarias para aplicar la resolución de ecuaciones e inecuaciones a problemas de su entorno. Para ello, se irá proporcionando al alumno/a las claves que les permitan ir descubriendo progresivamente los esquemas de resolución de dichos problemas.

Es importante que el alumno alcance los objetivos previstos, ya que será una herramienta indispensable para el desarrollo de temas posteriores, así como de cursos superiores.

La intención es llevar a cabo clases motivadoras, dinámicas y participativas, creando de esta forma un ambiente distendido en el que el alumno/a se sienta predispuesto a aprender. Para ello se programará una amplia variedad de actividades y se introducirán en las clases diferentes métodos de aprendizaje que rompan con la monotonía de una clase rutinaria.

A continuación mostraremos tres principios básicos que nos serán de gran ayuda en la metodología aplicada en el desarrollo de la unidad didáctica:

- *Enseñanza participativa en la que el aprendizaje debe de ser fruto de una intensa actividad por parte del alumno, basada en la observación, el* *planteamiento de preguntas, la formulación de hipótesis, la relación con los conocimiento previos, los intercambios de puntos de vista, etc.*

- *El alumno ha de ser el protagonista del proceso de aprendizaje. La construcción del conocimiento matemático es inseparable de la intuición y de las aproximaciones inductivas impuestas por la realización de tareas concretas (en nuestro caso resolución de problemas), próximas a los conocimientos del alumno.*
- *El profesor ha de actuar como elemento canalizador y dinamizador del proceso, planteando una amplia gama de situaciones, utilizando todos los recursos disponibles, en diferentes contextos que ayuden a los alumnos y alumnas a avanzar de lo concreto a lo abstracto.*

Se trataría por lo tanto, de una metodología activa en la que la clase se organizará, dependiendo de la actividad, en parejas o pequeños grupos. Proyecto de Centro del I.E.S. CRISTÓBAL DE MONROY

Seguidamente se expone el esquema metodológico general a seguir:

1. Repaso y dudas: ayuda para evaluar el grado de comprensión que alcanzan los alumnos/as. También hará que las clases sean más participativas y fomentará que los alumnos/as se expresen de forma clara y precisa.

2. Motivación y explicación de nuevos conceptos.

3. Actividades ejemplificadoras de dichos conceptos.

4. Consolidación de los conocimientos adquiridos y aplicación para mostrar su utilidad.

5. Propuesta de ejercicios para realizar en casa.

La secuenciación de la unidad didáctica viene dada por las siguientes sesiones:

Sesión 1: Actividades de motivación de ecuaciones algebraicas y primeras nociones del tema.

Sesión 2: Repaso de ecuaciones algebraicas.

Sesión 3: Ecuaciones racionales y con radicales.

Sesión 4: Ecuaciones logarítmicas.

Sesión 5: Ecuaciones exponenciales.

Sesión 6: Inecuaciones de primer grado y polinómicas.

Sesión 7: Inecuaciones racionales.

Sesión 8: Nuevas tecnologías y materiales.

Sesión 9: Prueba de evaluación.

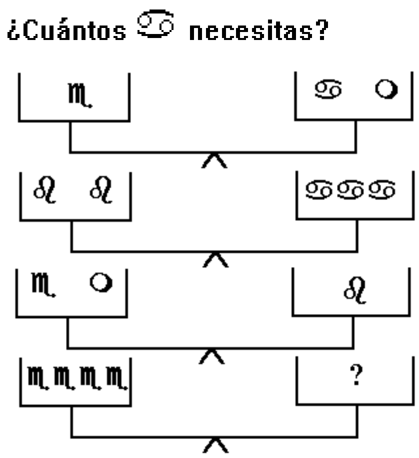
A continuación describimos con más detalle cada una de las sesiones.

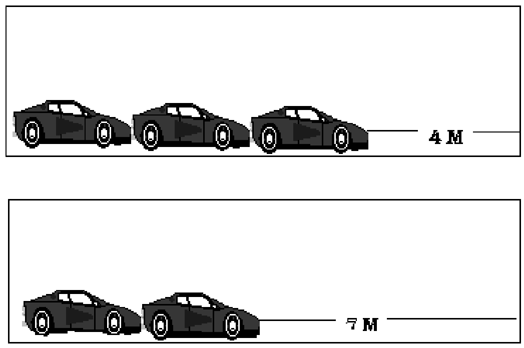
5.4 SESIÓN 1

Debido a que los alumnos/as han trabajado con ecuaciones en años anteriores, sobre todo con las de tipo algebraico, esta sesión será dedicada a motivar el tema desde las ecuaciones ya conocidas por ellos, esto les servirá de recordatorio de qué era una ecuación y como se resuelven. Para ello utilizaremos actividades del estilo:

Actividades sencillas:

- *Para conservar el equilibrio de la balanza* *¿Cuánto mide el coche?*





Son necesarios 5 símbolos Cada coche mide 3 metros.

Se les explicará que este tipo de problemas son resueltos mediante ecuaciones y se les pedirá que intenten expresar la ecuación que define cada uno de los casos anteriores.

Seguidamente se les distribuirá a los alumnos unas actividades fotocopiadas del tipo:

- *Las ecuaciones lineales ya aprecian en el papiro de Rhind en el antiguo Egipto. Resuelve el siguiente problema encontrado en este papiro:*

En un pueblo, hay 7 casas, en cada casa hay 7 gatos, cada gato come 7 ratones, cada ratón se había comido 7 espigas, cada espiga había producido 7 medias de grano ¿Cuántas medias de grano se habían salvado?

- *Inventad un problema en el que se tenga que resolver una ecuación.*

Se les dará tiempo para que lean la actividad y después se le pedirá a la clase que discuta y experimente la situación en pequeños grupos hasta que lleguen a un consenso. Los grupos estarán formados por cuatro alumnos/as aproximadamente.

A continuación se animará a cada alumno individualmente a escribir una descripción clara en su cuaderno de clase, añadiendo y justificando la explicación de cómo han llegado a este resultado.

Mientras los alumnos trabajan, el profesor se irá pasando por los diferentes grupos, escuchándolos y pidiéndoles que expliquen su razonamiento, pero en esta fase es mejor no ayudarles con ninguna respuesta para no estropear la discusión mantenida por el grupo de trabajo formado.

Al finalizar la actividad, se les pedirá a los representantes de los distintos grupos que resuelvan las actividades planteadas en la pizarra, explicando todos los pasos hasta llegar a esa conclusión. Se animará a los demás alumnos a hacer comentarios a favor o en contra de las decisiones tomadas por sus compañeros exponiendo, asimismo, sus propios razonamientos.

Una vez concluida la actividad el profesor intervendrá resumiendo las conclusiones sacadas por los alumnos, haciéndoles pensar en determinadas cuestiones que hayan aparecido, explicando conceptos, definiciones, sistematizando los resultados, resolviendo dudas y atendiendo las dificultades que fueran surgiendo.

De este modo, para el alumno la clase será una actividad creativa, puesto que "hará" matemáticas e intentará descubrir por sí mismo la utilidad del álgebra.

El trabajo individual o en grupo permitir que cada alumno trabaje según sus capacidades y que favorezca la colaboración entre los compañeros, de este modo, en algunas ocasiones, será más efectiva la explicación de un compañero que la del profesor.

La idea de esta actividad aparece en la siguiente página web del I.E.S. CRISTÓBAL DE MONROY.

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/23-1-u-ecuaciones.html

Esta actividad durará la mitad de la sesión. Por último se comenzará recordando que es una ecuación, una ecuación polinómica y que se conoce como solución de una ecuación. Para mejorar la comprensión de estos conceptos realizamos algunos ejemplos sencillos en la pizarra, con la finalidad de recordar estos términos. Tales ejemplos serán del tipo:

- *¿Cuáles de las siguientes expresiones son ecuaciones y porqué? ¿Hay alguna que se polinómica?*

  a) $2x - \frac{5x+4}{6}$ *b)* $9x + 3cosx = 0$ *c)* $\sqrt{x-2} = 4$

- *Calcular una ecuación equivalente a* $2x - \frac{x}{3} - 1 = 0$.

5.5 SESIÓN 2

Esta segunda sesión comenzará recordando lo visto al final de la clase anterior. Para ello se le preguntará de forma aleatoria a algunos alumnos/as y estos deberán explicárselo a sus compañeros.

Se continuará con el recordatorio de las ecuaciones de segundo grado, así como de su resolución. En primer lugar se les presentará la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ (indicándoles que si b o c son nulos la ecuación se denomina incompleta). A partir de ella se introducirá la fórmula que da sus soluciones $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, donde se establecerá la discusión del número de soluciones en función del discrimínate

$\Delta = b^2 - 4ac$, ya que si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales, si $\Delta < 0$ la ecuación no tiene soluciones reales y si $\Delta = 0$ la ecuación tiene una única solución (doble). Después de ello se les planteará esta actividad:

- *Resuelve la ecuación* $x^2 + x - 2$. *Represéntala gráficamente para comprobar las soluciones obtenidas.*

Se dejarán unos minutos para que la resuelvan de forma individual en su cuaderno de clase y posteriormente se pedirá de forma voluntaria que alguien salga a la pizarra y les explique a sus compañeros cómo lo ha resuelto.

Posteriormente se les presentarán las ecuaciones polinómicas de grado superior a 2, viendo que estas se diferencian de las anteriores, en que su grado es mayor a 2. Mediante un ejemplo hecho en la pizarra con la ayuda de los alumnos/as, se les mostrará que la forma de resolver este tipo de ecuaciones es por factorización determinando sus raíces. Como caso particular e interesante estudiaremos las ecuaciones bicuadradas, mediante el cambio de variable; esta actividad irá acompañada de un ejemplo resuelto en la pizarra. Tales ejemplos corresponden a:

- *Resuelve las siguiente ecuación:*

$$6x^4 + 13x^3 - 8x^2 - 17x + 6 = 0$$

y la ecuación bicuadrada dada por: $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$.

Una vez entendidos estos ejemplos, se le propondrá una variante de ellos para que la realicen en casa, que sería:

- *Escribe una ecuación polinómica de tercer grado tal que la solución sea 2 y la suma y el producto de las otras valga -4 y 5, respectivamente.*

Para comprender la utilidad de las ecuaciones vistas, les daremos dos actividades que deben de resolver por parejas, indicando como han resuelto la actividad y si la solución obtenida es coherente con el enunciado. Esta actividad será recogida al finalizarla, contando como trabajo en clase. Las actividades propuestas son:

- *Se sabe que una cierta población de insectos se incrementa en un 9% cada semana. Calcula el tiempo que ha de pasar para que la población se multiplique por cinco.*

- *Si se disminuye en 10 cm el lado de un una granja cuadrada, su área disminuye en 400* cm^2. *¿Cuál es el tamaño original de la granja? Apóyate en un dibujo para resolverlo.*

Además, con la finalidad de que los alumnos practiquen lo visto en clase y que su aprendizaje sea funcional, se les pedirá que busquen ecuaciones en Internet explicando en cada caso, qué modela cada ecuación, resolviéndola y explicando para qué sirven sus soluciones. El próximo día se expondrán en clase algunas de ellas de forma voluntaria.

5.6 SESIÓN 3

La sesión tercera comenzará recordándose lo visto el día anterior sobre ecuaciones. Para ello pediremos voluntarios que expondrán la actividad propuesta el día anterior, indicando en la pizarra o mediante algún programa como Power point, para qué sirve la ecuación buscada, cómo se resuelve y qué significado aportan sus soluciones. Cabe destacar que todos los trabajos realizados por los alumnos, serán recogidos, corregidos y tenidos en cuenta como trabajos de clase.

A continuación, se mostrarán las ecuaciones racionales, indicando los pasos a seguir para su resolución:

- Se multiplican sus dos miembros por el mcm de los denominadores.
- Una vez eliminados los denominadores, se resuelve la ecuación polinómica obtenida.
- Hay que comprobar que las soluciones obtenidas son verdaderas.

Para comprender mejor el proceso se realizará un ejemplo sencillo como el siguiente:

- *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

a) $x + 2 + \frac{2}{x} = -1$ *b)* $2x - \frac{12}{2-x} = 7 + \frac{11x-11}{9}$

c) $\frac{x+1}{2x-1} + \frac{x}{2x+1} = \frac{7}{4x^2-1}$ *d)* $\frac{2x}{x-2} + \frac{3x}{x+2} = \frac{6x^2}{x^2-4}$

Las dos primeras se desarrollarían en la pizarra a modo de ejemplo y las dos segundas quedarían propuestas como actividades para el día siguiente. Además se les propondría el siguiente problema:

- *Dos grifos A y B llenan juntos una piscina en dos horas, A lo hace por sí solo en tres horas menos que B.*

  ¿Cuántas horas tarda cada uno separadamente?

Esta actividad junto con los dos apartados anteriores será corregida en clase el próximo día.

Seguidamente, comenzaremos con la explicación de que son las ecuaciones con radicales. Para poder resolverlas se les mostrarán las siguientes recomendaciones:

- Si la ecuación contiene un único radical cuadrático, conviene aislarlo en un miembro y elevar los dos miembros al cuadrado.
- Si la ecuación contiene más de un radical cuadrático, conviene aislar uno de ellos en un miembro y elevar al cuadrado. Este proceso se repite sucesivamente hasta eliminar los radicales de la ecuación.
- Al elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación se pueden obtener soluciones falsas. Luego hay que comprobar la veracidad de las soluciones obtenidas.

Nuevamente se realizaran en la pizarra ejemplos de resolución de ecuaciones con radicales, como por ejemplo:

a) $\frac{x-1}{\sqrt{x}} = x - \frac{5}{2}$ b) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} = 5$

c) $\sqrt{x-7} + \sqrt{2x} = \sqrt{x-1}$ d) $x + \sqrt{2x^2 + 2x - 3} = -1$

Análogamente, en pizarra se realizaran dos de ellos y otros dos serán mandados como actividades para el día siguiente.

5.7 SESIÓN 4

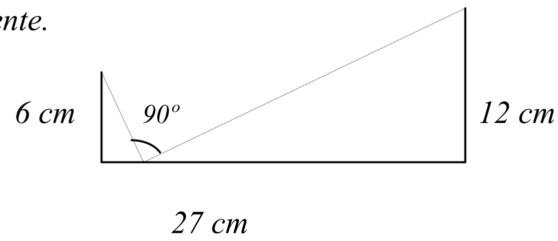
Al comienzo de esta sesión, se recordará lo visto en la sesión anterior con la intención de realizar en clase algunos problemas relacionados con las ecuaciones racionales y las ecuaciones con radicales, debido a que los alumnos/as presentan gran dificultad en la traducción algebraica de problemas matemáticos. Con ello también practicaremos la resolución de estos tipos de ecuaciones.

En un principio comenzamos con un problema matemático para que se familiaricen con este lenguaje:

- *Calcula el valor de un número tal que si se le suma una unidad y después se extrae la raíz cuadrada, se obtiene el doble que al restarle 11 unidades y extraer la raíz cuadrada.*

Una vez comprendido este problema se les plantearán los siguientes de tipo geométrico:

- *Se pretende construir una cascada artificial, de longitud 27 cm. En sus extremos se levantan segmentos perpendiculares de 6 y 12 cm, respectivamente.*



Determina un punto de la base de la cascada tal que si se une con los extremos más alejados de los perpendiculares se forma un ángulo recto.

- *El área de u triángulo equilátero es* $9\sqrt{3}\,m^2$*. Determine el perímetro y la medida de su altura.*
- *El volumen de una esfera mide 36* $\pi\,m^3$*. Calcule la medida de su radio.*

En clase se resolverá uno de ellos, los otros dos serán mandados como actividades para casa.

Posteriormente se plantearán las ecuaciones trascendentes: logarítmicas y exponenciales. Para introducir tales ecuaciones, se les propondrá la siguiente cuestión ¿Qué es para vosotros una ecuación logarítmica o una ecuación exponencial? ¿Podéis decir algún ejemplo en el que aparezcan estas ecuaciones? Seguidamente se les indicará que existen muchos fenómenos en los que entran en juego estas ecuaciones, por ejemplo:

- El crecimiento de una población, con la ecuación exponencial

$$P_t = P_0(1+r)^t$$

- La intensidad de un seísmo, por la ecuación logarítmica:

$$M = 0.67 * Log(0.37 * E) + 1.46$$

donde E es la energía del seísmo en kw/h.

A partir de aquí se comenzará con la explicación de este tipo de ecuaciones, mostrándoles la gran importancia de conocer la solución de ellas para dar respuesta a los problemas planteados.

Las primeras en estudiarse serán las ecuaciones logarítmicas. Se les indicará una vez presentadas, que para poder resolverlas es necesario conocer las propiedades de los logaritmos vistas en cursos anteriores. A modo de resumen, se detallarán estas propiedades y se les darán las siguientes pautas a seguir:

- Para resolverlas se modifican con la ayuda de las propiedades de los logaritmos.
- Tendremos en cuenta que $logA = logB \leftrightarrow A = B$
- Es necesario comprobar que las soluciones obtenidas son válidas, ya que no están definidos los logaritmos de cero ni los de los números negativos.

Recordadas las propiedades y conociendo estas pautas, se llevaran a cabo en la pizarra tres ejemplos como los que siguen:

- *Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:*

a) $5\log x = 3\,logx + 2\,log6$ b) $\log(3x^2 + 5x + 30) - \log(3x + 8) = 1$

$$c)\quad \frac{logx}{2} = \frac{1}{2} + log\sqrt{2}$$

La primera de ellas, será resuelta en la pizarra para indicarles los pasos a seguir, para los apartados b y c, se les dejarán unos minutos para que de forma individual las resuelvan en su cuaderno de clase y posteriormente se resolverán en la pizarra, para aclarar posibles dudas surgidas.

Como actividades complementarias para realizarlas en casa, se les darán las siguientes:

- *Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:*

a) $log3x = log6 + 2logx$

b) b) $\log(2x+3) - \log(x-2) = 2log2 + 2log3$

c) $log\frac{2x-2}{x} = 2\log(x-1) - logx$

- *Calcula el valor de un número sabiendo que el doble de su logaritmo decimal es igual a la suma de los logaritmos decimales de 4 y de 9.*
- *La función que regula la intensidad de un seísmo es* $M = 0.67Log(0.37E) + 1.46$ *donde E es la energía del seísmo en kw/h. Si el seísmo de Haití se ha medido en la escala Richter con una intensidad de 7.0 grados, ¿cuál será la energía del seísmo? Explica el procedimiento que has utilizado para resolverlo.*

5.8 SESIÓN 5

Como en todas las sesiones anteriores, se comenzará la clase realizando un breve resumen de lo visto hasta el momento. Seguidamente se pedirán dos voluntarios que saldrán a la pizarra a corregir; uno de ellos una de las ecuaciones logarítmicas y el otro para corregir uno de los dos problemas propuestos en la sesión anterior. Los demás compañero entregarán sus ejercicios, los cuales serán devueltos en la sesión siguiente.

Resueltas las posibles dudas surgidas de lo explicado hasta el momento, se iniciará la explicación de las ecuaciones exponenciales. Una vez mostrada la definición de ellas, análogamente a los logaritmos, se indicará que para resolverlas se aplicarán las propiedades de los logaritmos, teniendo en cuenta:

- $a^m = a^n \leftrightarrow m = n$
- En algunas ecuaciones resulta útil tomar logaritmos en ambos miembros de la ecuación.
- En otras es conveniente realizar un cambio de incógnita del tipo $z = a^x$ que simplifique la expresión.

Estas indicaciones marcan las pautas a seguir para resolver una ecuación exponencial. Vistas estas indicaciones, se realizaran algunos ejemplos de diferente resolución en la pizarra, para que quede el concepto claro. Las actividades a realizar son:

- *Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:*

a) $4 \cdot 2^x = 4^{2x^2+1}$

Lo interesante de esta ecuación, es que se resuelve utilizando las propiedades de las potencias.

b) $3^{2x-3} = 2$

Esta ecuación se resuelve tomando logaritmos.

c) $3^x + 2 \cdot 3^{x-2} = 11$

Sin embargo, esta otra ecuación, se resuelve realizando el cambio de variable $z = 3^x$.

Comprendidos estos ejemplos y la forma de resolver este tipo de ecuaciones, se les proporcionarán las siguientes actividades a realizar en casa para la siguiente sesión:

- *Resuelve las siguientes ecuaciones:*

1) $2^{2x^2-3x-5} = 16$ 2) $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$ 3) $\frac{1}{2^x} = 16^{\frac{x(x-1)}{2}}$

4) $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0$ 5) $2 \cdot 10^{2x+4} + 3 \cdot 10^{x+2} - 5 = 0$

- *Una ciudad del sur de Almería tenía en el 2008, 30.000 habitantes, si sabemos que el ritmo de crecimiento es del 2% anual, ¿cuántos años han de pasar para que la ciudad tenga 33.500 habitantes?*

  La fórmula que regula el crecimiento de poblaciones es: $P_t = P_0(1+r)^t$

Posteriormente, se les sugerirán tres actividades de repaso, que deberán hacer para la sesión 7, ya que se les indicará que en esta sesión se trabajarán muchas de las actividades vistas en la unidad con las nuevas tecnologías, permitiéndoles comprobar los resultados obtenidos en sus actividades. No se les presentan antes los programas que se utilizaran en la sesión 7, con el objetivo de que por sí solos descubran cómo resolver las diferentes actividades propuestas en las sesiones.

Dichas actividades son:

- *Resuelve las siguientes ecuaciones, indicando en cada caso de qué tipo son y porqué.*

a) $\frac{3x-1}{4}-2x=\frac{2x-\frac{7}{4}}{2}-(3x-1)$ b) $x^4-x^3-5x^2-x-6=0$

c) $x^4-125x^2+484=0$ d) $\frac{x+9}{x}-\frac{5+x}{x+2}=\frac{12x+12}{x^2+2x}$

e) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5$ f) $2-3\sqrt{x}=-x$

5.9 SESIÓN 6

Se iniciará recogiendo las actividades propuestas en la sesión anterior y nuevamente realizando un breve resumen de lo visto hasta el momento, que nos ayudará a introducir de forma natural las inecuaciones. Para ello, se hará especial hincapié en la importancia de saber resolver ecuaciones para poder resolver inecuaciones, porque la resolución de inecuaciones involucra la de las ecuaciones.

Se comenzará poniendo ejemplos muy sencillos como los siguientes, animando a los alumnos/as que indique cómo se podrían resolver:

- Las edades de un padre y su hijo difieren 27 años, ¿a qué edad tendrá el padre más del doble de la edad del hijo?
- Las edades de un padre y su hijo difieren 27 años, ¿**entre** qué edades tendrá el padre más del doble de la edad del hijo?
- ¿Cuántos metros de tela metálica se necesitan para vallar una parcela cuadrada cuya área sea de 36 m^2?
- ¿Cuántos metros de tela metálica se necesitan para vallar una parcela cuadrada cuya área sea**, al menos,** de 36 m^2?

En estos pares de ejemplos, se les mostrará la diferencia de que un problema se pueda resolver con ecuaciones o con inecuaciones, indicándoles que en lo que difieren es en el conjunto solución. Ya que en las ecuaciones su solución viene determinada por un punto, sin embargo para las inecuaciones, la solución queda determinada por un conjunto de puntos, de ahí la diferencia subyacente en las preguntas de los problemas anteriores.

Después del debate suscitado por las cuestiones anteriores, se procederá a mostrar la definición de inecuación, solución de una inecuación e inecuaciones equivalentes. Para ello se les revelarán ejemplos como:

a) $¿\, Cuál\ es\ la\ solución\ de\ la\ inecuación\ x < 0$? A partir de este ejemplo y con la ayuda de la recta real, indicaremos que el conjunto de puntos $(\infty, 0)$:

en forma gráfica o por el conjunto de puntos siguiente $\{x \epsilon R / x < 0\}$, son la solución de esta inecuación. De esta forma, se les enseñará que la ecuación $x = 0$ sólo tiene como solución el punto 0 y no un conjunto de puntos como le ocurre a la anterior.

b) Otro ejemplo sencillo que se les puede plantear es: $¿\, Cuál\ es\ la\ solución\ de\ la\ inecuación\ x \geq 0$? Análogamente a la anterior, veríamos que la solución sería el conjunto de puntos $[0,+\infty)$, representado:

o el conjunto $\{x \epsilon R / x \geq 0\}$, mostrándoles nuevamente la diferencia con la ecuación $x = 0$.

c) Un ejemplo de inecuaciones equivalentes vendría dado por: $2x + 6 \leq 0$ y $x \leq -3$ son equivalentes por tener la misma solución.

Entendidos estos ejemplos, se repasarán los tipos de intervalos que se pueden plantear a la hora de resolver una inecuación, al igual que las operaciones que se pueden desarrollar con ellos, tales como la intersección y unión de intervalos. Para trabajar y solucionar algunas dificultades que puedan surgir con ello, se les suministrarán unas transparencias (explicadas con detalle anteriormente); con ellas le les propondrán ejercicios del tipo:

- *Calcula la intersección a modo de intervalo de las figuras:*

  a) 1 y 7   *b) 4 y 8*

  c) 2 y 12   *d) 3 y 9*

Seguidamente, comenzaremos con la explicación de las inecuaciones de primer grado. Para ello se les mostrarán las siguientes pautas:

- Para resolver una inecuación de primer grado se aplican las mismas técnicas que se utilizan para resolver una ecuación de primer grado teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades.
- A continuación se indicarían las propiedades de las desigualdades, que son aplicables a cualquier tipo de inecuación.

Una vez conocidas estas condiciones, se expondrá esta actividad en la pizarra:

- *Resuelve la siguiente inecuación:*

$$\frac{x}{2} - (x-3) < \frac{x-1}{4} - \frac{x-2}{6}$$

  La resolución de esta inecuación, se realizará teniendo mucha cautela en los cambios de signo e incidiendo mucho en este aspecto, para no obtener falsas soluciones. Una vez llegados a la solución, se les recordará nuevamente que la solución de una inecuación es un conjunto de puntos y no un punto como en las ecuaciones. En este caso $\{x \epsilon R / x > 5\}$= $(5, +\infty)$.

- *También como actividad se les pedirá que resuelvan los problemas planteados al comienzo de la sesión, indicando las diferencias entre ellos.*

Comprendido en gran medida lo anterior, se presentarán las inecuaciones polinómicas, indicando:

Para resolver las inecuaciones polinómicas de grado superior a uno, hay que tener en cuenta que los únicos valores de la recta donde puede variar el signo de un polinomio son sus raíces. Luego para resolverlas procederemos así:

- Se simplifica la inecuación hasta obtener otra equivalente en la que uno de los miembros sea un polinomio y otro sea nulo.
- Se calculan las raíces y se factoriza el polinomio anterior.
- Mediante las raíces obtenidas, se divide la recta real en intervalos, se estudia el signo de los factores del polinomio en dichas zonas y se determina el signo del polinomio, y por tanto, la solución de la inecuación.

Para que quede claro lo anterior se desarrollará el siguiente ejercicio en la pizarra:

- *Resuelve la inecuación* $2x \leq x^2$.

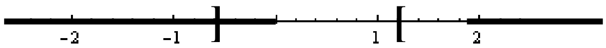
Una vez realizado el cálculo analítico de esta inecuación, se plantea la siguiente tabla con las raíces para calcular el signo de la inecuación:

Raíces de la ecuación asociada: $x = 0 \; y \; x = 2$

-∞ 0 2 + ∞

x	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
$P(x) = x(x-2)$	+	-	+

De donde se obtiene que la solución es: $\{x \epsilon R / x \leq 0 \; \cup x \geq 2\}$= (-∞,0]∪ $[2, +\infty)$.

También nos ayudaremos de la gráfica 

Se les propondrá a los alumnos la siguiente actividad:

- *¿Para qué valores de a, la inecuación* $x^2 + 5x + a < 0$*, tendrá como solución el intervalo (-3,-2)? Una vez resuelto, represéntalo gráficamente.*

5.10 SESIÓN 7

Comenzaremos recordando lo visto en la sesión anterior y corrigiendo los problemas planteados para esta sesión, por parte de los alumnos en la pizarra.

Seguidamente les mostraremos las inecuaciones racionales, indicándoles una vez conocida su definición, que el método a seguir para resolverlas es semejante a las vistas anteriormente:

- Se simplifica la inecuación hasta obtener otra equivalente en la que uno de los miembros sea un polinomio y otro sea nulo.
- Se calculan las raíces de los polinomios que forman el numerador y el denominador de la fracción y se factorizan.

- Mediante las raíces obtenidas, se divide la recta real en intervalos, se estudia el signo de los factores de los polinomios numerador y denominador en dichas zonas y se determina el signo de la fracción algebraica, y por tanto, la solución de la inecuación.

De esta forma se les mostrará un ejemplo como el que sigue:

- *Halla la solución de la inecuación:*

$$a)\ x^2 - 5x + 16 - \frac{48}{x+3} \leq 0$$

Como actividad para casa, se les invitará a hacer los siguientes apartados:

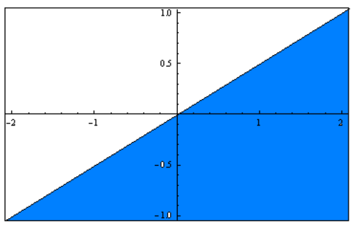
b) $\frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{8} \leq \frac{x}{2}$ c) $3x^2 + x - 24 \geq 0$

$d)$ $3x(2x-1) + x^2 \geq 5x - 1$ e) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geq 0$

$f)$ $\frac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0$

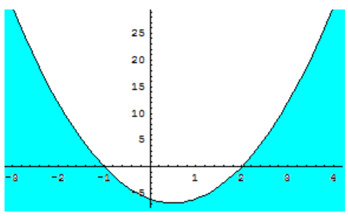
Como generalización de lo visto hasta el momento, se les explicará a los alumnos que las inecuaciones también pueden escribirse como desigualdad de dos incógnitas, es decir una en función de la otra, de esta forma podremos representarlas y visualizar así su solución como una región del plano. Para ello les pondremos como ejemplos:

a) $y \leq x$ indicándoles que esta inecuación se representaría:



Luego esto nos da el conjunto solución de los puntos del semiplano inferior a la bisectriz del primer cuadrante.

b) $y \leq 3x^2 - 3x - 6$ en esta caso si representamos la asociada obtendremos como solución el conjunto de puntos por debajo de gráfica de la ecuación que en este caso es una parábola.



Para trabajar con este concepto, les indicaremos algunas actividades como las que siguen:

- *Calcula de forma analítica y gráficmente las soluciones de las siguientes inecuaciones:*

a) $y \geq x + 2$

b) $y < 2x + 1$

c) $y \leq x^2 - 2x - 3$

5.11 SESIÓN 8

Esta sesión se va a desarrollar en el aula de ordenadores, con la finalidad de que los alumnos/as cuenten con programas informáticos que les ayuden a comprobar las soluciones de las actividades, así como a visualizarlas. Es necesaria la aplicación de estas herramientas y que los alumnos/as se familiaricen con ellas y su uso, porque les serán de gran apoyo en su estudio diario.

Como ya se explicó en el punto de materiales y recursos, se van s utilizar dos herramientas de tipo tecnológico: la calculadora científica y la aplicación "GrafEq". También utilizaremos una tabla, donde se pretende trabajar con las diferentes formas de representación de un conjunto solución.

Se comenzará la clase explicando cómo funciona la aplicación "GrafEq" (utilizada para resolver inecuaciones), para que todos los alumnos conozcan su utilidad y funcionamiento. A continuación se les proporcionarán las calculadoras gráficas, indicándose también su funcionamiento para dibujar gráficas de funciones asociadas a ecuaciones.

Seguidamente se les indicará que saquen los ejercicios realizados durante la unidad, para que mediante la aplicación comprueben las soluciones de los mismos.

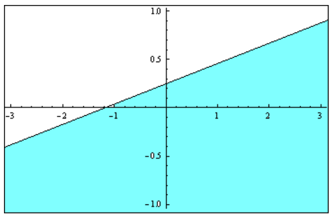
Además se les propondrán unos problemas de inecuaciones, para que trabajen la traducción del leguaje matemático al lenguaje algebraico, tales problemas son:

- *Una empresa automovilística fabrica el mismo modelo con dos motorizaciones similares: el TGi con motor de gasolina y el TDi con motor diésel. El coche de gasolina cuesta 26.000€ y el diésel 32.000€. Los gastos de mantenimiento son* *iguales en ambos modelos. Suponiendo que el kilómetro del coche de gasolina tiene un precio medio de 10 céntimos y el del coche de gasóleo 5 céntimos, se pide a partir de qué kilómetros es rentable la compra del modelo diésel.*

- *Una fábrica paga a cada agente comercial 1€ por artículo vendido más una cantidad fija de 1000€. Otra fábrica de la competencia paga 150 céntimos por artículo y 400€ fijos. ¿Cuántos artículos debe vender un agente comercial de la competencia para ganar más dinero que el primero?*
- *Ayúdate de los materiales con los que cuentas, e invéntate un problema que resuelva una inecuación.*

Con ayuda de los materiales proporcionados se les pedirá que completen la siguiente tabla

- *Rellena la siguiente tabla, escribiendo cada conjunto de las tres formas posibles de representación del mismo:*

Intervalos/Regiones	Como conjunto	Gráficamente
[-3,2)		
		
	$\{x\epsilon R/x > -2 \cap x \leq 4\}$	

Con todos los ejercicios elaborados para esta sesión 8, se lleva a cabo un completo resumen de lo visto en la unidad.

5.12 SESIÓN 9

Esta corresponde a la última sesión de la unidad didáctica, donde se realizará una prueba para comprobar el grado de adquisición de los objetivos dados.

En ella se trabajaría la prueba planteada en el apartado de instrumentos de evaluación, "Prueba escrita de contenidos".

6. CONCLUSIÓN

En función de lo que estipula el currículo sobre el tema a abordar, en esta unidad didáctica se ha pretendido desarrollarlo estableciendo como punto inicial los conocimientos previos del alumno/a, es por ello la presencia del currículo referente al cuarto curso de E.S.O para el tema de las ecuaciones e inecuaciones.

En la confección de la unidad didáctica, se han tenido en cuenta los diferentes organizadores del currículo, pues estos serán de gran ayuda en el diseño, desarrollo y evaluación de la misma. Estos organizadores contribuyen al análisis didáctico, donde se estudiarán aspectos como la historia sobre la que se sustenta el tema y dos procedimientos fundamentales en los que se centrará la atención, tales procedimientos son: el análisis de contenido y el análisis cognitivo de la unidad.

El análisis de contenido es imprescindible, debido a que en él, se estudia todo lo referente al tema en cuestión. Por ello en el mapa conceptual se obtiene una visión amplia del tema y, así mismo, permite elegir y secuenciar los contenidos y procedimientos que posteriormente se secuenciaran en la unidad didáctica.

En él, se pueden destacar varios focos de contenido según lo establecido a tratar en el tema. El mapa también marca el orden en el que se abordarían las explicaciones; en este caso viendo en primer lugar las ecuaciones y posteriormente las inecuaciones.

Con respecto a los sistemas de representación, destacar que ha sido uno de los pilares fundamentales en el que se apoya tanto el resto de los análisis como el futuro diseño de la unidad didáctica. Puesto que en este estudio se hace evidente su importancia para relacionar los conceptos y procedimientos del mapa conceptual y de él han surgido la mayor parte de las ideas de las actividades.

En este tema de ecuaciones e inecuaciones, los sistemas de representación desempeñan un papel muy importante para la comprensión de determinados conceptos.

Análogamente, el estudio de la fenomenología cobra real importancia en el diseño de tareas y en la motivación del alumnado. De hecho, se podría utilizar como nexo conductor del tema.

Con el análisis cognitivo se realiza una acotación del contenido hallado en el mapa conceptual y en general en lo estudiado en el análisis de contenido.

Los objetivos propuestos en nuestro análisis de contenido, así como su vinculación con las competencias, nos ayudan a delimitar el foco de contenido del mapa conceptual, sobre el que desarrollaríamos nuestra unidad didáctica. Con ello, al estudiar la relación entre objetivos y competencias, han surgido posibles planteamientos de actividades a llevar a cabo con el alumnado.

El estudio de los posibles errores en los que podrían incurrir los alumnos/as, lleva a una visión general de las carencias en las que se debería hacer mayor hincapié. Con ello, también han surgido algunas tareas de reforzamiento de conceptos poco afianzados.

La utilización de materiales y recursos en el aula, ayudarán a los alumnos/as a afrontar algunas de las dificultades que se les presenten, mencionadas estas en el apartado anterior, de forma favorable, reforzando así contenidos ya vistos en clase.

Con todo lo anteriormente mencionado, se fijan las bases para establecer las pautas de la evaluación. Es uno de los aspectos más significativos y donde entran en juego varios criterios e instrumentos. Tales instrumentos recogen información relevante del proceso enseñanza-aprendizaje sobre un alumno/a concreto. Se pretende llevar con ello un seguimiento del trabajo individual y a su vez colectivo del mismo en clase, con la finalidad de evaluar los objetivos planteados en esta unidad.

Es importante utilizar para la concreción de la evaluación, diferentes instrumentos que indiquen un seguimiento del alumno/a, llevando a cabo de este modo una evaluación más justa.

Una vez analizado el ambiente que envuelve el desarrollo y diseño de una unidad didáctica, se comenzará con la realización de la misma, estableciéndose como una secuenciación forma por nueve sesiones de diferente índole, pero todas ellas interrelacionadas.

En tales sesiones, se ha pretendido desglosar los objetivos específicos propuestos en el comienzo de la unidad didáctica. Para ello se partirá de los conocimientos previos de los alumnos/as con los que se va a trabajar y con su experiencia más cercana sobre el tema.

Con objetivo de llevar a cabo lo anteriormente mencionado, se propone una metodología general, en la que se hace especial hincapié en la utilización de las técnicas y herramientas estudiadas en la resolución y comprensión de problemas de su entorno, el trabajo en equipo con la finalidad de que los alumnos/as se enriquezcan de sus propios argumentos y los de sus compañeros/as.

En cada sesión, se pretende que el alumno/a se sienta partícipe de la asignatura de matemáticas, mediante una metodología activa. En tales sesiones, se dejará que el alumno/a exponga sus actividades, así como que trabaje en conjunto con el profesor o en grupo con sus compañeros/as, descubriendo la belleza de las matemáticas.

También con motivo de que el alumno/a trabaje los contenidos vistos en clase, se le indicará algunas actividades para realizar en casa, las cuales serán recogidas posteriormente o corregidas en clase por los alumnos/as. Estas tareas involucrarán diferentes sistemas de representación y múltiples fenómenos orientados a que el alumno/a aprenda a resolver problemas cotidianos, con la finalidad de que dicho alumno/a sea capaz de extrapolar los conocimientos aprendidos a cualquier situación que se la presente, y pueda serle de gran utilidad en vivencias futuras.

En definitiva, un trabajo planificado y elaborado con anterioridad a la actividad que ocupa a un profesor/a que es la enseñanza, es de máxima importancia, pues como se conoce, la improvisación tiene límites a todos los niveles, por el contrario, un trabajo planificado ofrece múltiples ventajas como el orden, la variabilidad, la coordinación y la mejora.

7. REFERENCIAS

Referencias bibliográficas

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007a). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. *BOE, 174*, 31680-31828.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE, 266*, 45381-45477.

Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008a). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Navas, Y., Fuentes, V., Ondoño, P., Fernández J. A. y Fernández, F. J. (2009). *Unidad didáctica. Ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones*. Documento no publicado: Universidad de Granada.

Vizmanos, José R, Máximo Anzola (2007). *ALGOTIRMO*.Madrid:SM

Monsó F., Estela, J., Fernández L. y Giménez, C. (2002). *Matemáticas I*. Sevilla: Guadiel-Grupo Edebé.

Páginas web

http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones_con_una_incognita/inecuaciones_con_una_incognita.htm

Página web del I.E.S. CRISTÓBAL DE MONROY.

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/UnidadesDidacticas/23-1-u-ecuaciones.html

Anexo I. Historia de las ecuaciones

En el siguiente documento, se mostrará la historia referida a las ecuaciones. Cabe destacar que las inecuaciones surgen paralelamente a las ecuaciones.

La primera fase del desarrollo del álgebra, comprende el periodo de 1700 a. de C. a 1700 d. de C ésta se caracterizó por la invención gradual de símbolos y la resolución de ecuaciones. Dentro de esta fase encontraremos un álgebra desarrollada por los griegos (300 a. de C.), llamada álgebra geométrica, rica en símbolos geométricos para resolver ecuaciones algebraicas.

La introducción de la notación simbólica asociada a Viéte (1540-1603), marca el inicio de una nueva etapa en la cual Descartes (1596-1650) contribuye de forma importante al desarrollo de dicha notación. En este momento, el álgebra se convierte en la ciencia de los cálculos simbólicos y de las ecuaciones. Posteriormente, Euler (1707-1783) la define como la teoría de "los cálculos con cantidades de distintas clases" (cálculos con números racionales, enteros, fracciones ordinarias, raíces cuadradas y cúbicas, progresiones y todo tipo de ecuaciones).

Para llegar al actual proceso de resolución de la ecuación $ax + b = c$ han pasado más de 3.000 años.

EGIPCIOS

Los egipcios nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhid-1650 a. de C.- y el de Moscú -1850 a. de C.-) multitud de problemas matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, pues no se refieren a ningún objeto concreto. En éstos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones.

La solución la obtenían por un método que hoy conocemos con el nombre de "método de la falsa posición" o "regula falsi. Generalmente, el cálculo de la solución correcta no era tan fácil e implicaba numerosas operaciones con fracciones unitarias (fracciones con numerador la unidad), cuyo uso dominaban los egipcios. En cuanto el simbolismo, solamente en algunas ocasiones utilizaban el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, para representar la suma y resta, respectivamente.

BABILONIOS

El Mayor número de documentos babilonios corresponde al periodo (600 a. de C. a 300 d. de C.)

Los babilonios casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizás por considerarlas demasiado elementales, y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado.

GRIEGOS

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a Diophante (250 d. de C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación era como hemos visto, mayor por la geometría.

LA CIVILIZACIÓN HINDÚ

Existe una sorprendente falta de continuidad en el caso de la matemática hindú. Las importantes contribuciones matemáticas se han realizado en periodos separados por largos intervalos de tiempo.

Los primeros documentos matemáticos que existen (datan del siglo III d. de C.) son los *Sulvasütras*, donde se recogen todos los conocimientos necesarios para construir los templos. Lo resolvían utilizando el método de la falsa posición, como los egipcios.

Posteriormente, Brahmagupta (siglo VII) expresa, ya de forma sincopada, cómo resolver ecuaciones lineales. La incógnita la representaba por la abreviatura *ya* , y las operaciones con la primera sílaba de las palabras.

ÁRABES

Los métodos anteriormente mencionados, pasaron a los árabes que los extendieron por Europa. Además estos contribuyeron con el nombre. La palabra álgebra viene de un libro escrito en año 830 por el astrónomo Mohamed ibn Musa al-Khowârizmî, titulado *Al-jabr w´al muqâbala,* que significa restauración y simplificación.

Al algebrista Abu-Kamil (siglo IX y X) se le atribuye una obra donde trata la solución de ecuaciones lineales por simple y doble falsa posición. A partir de aquí se dedican al estudio de ecuaciones de grado superior.

EUROPA MEDIEVAL

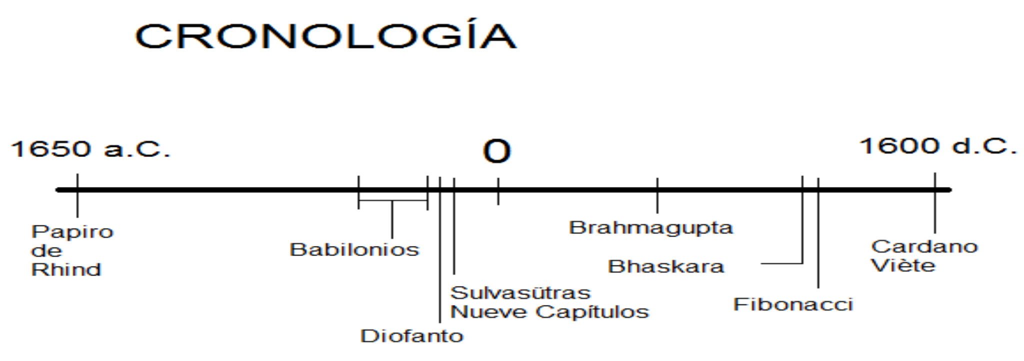
Uno de los matemáticos más importantes en esta época fue Leonardo de Pisa (1170 - 250), más conocido como Fibonacci. Escribió su *Liber Abaci* (el libro del ábaco), un tratado muy completo sobre métodos y problemas algebraicos en el que se recomienda con gran insistencia el uso de los numerales hindú-arábigos. Expuso la solución de ecuaciones determinadas e indeterminadas de primer grado.

RENACIMIENTO

Hasta la aparición del *Ars Magna* de Cardano en 1545*,* no hubo en el Renacimiento desarrollos trascendentes en álgebra.

En Alemania los libros de álgebra publicados llegaron a ser tan numerosos que durante algún tiempo se impuso en casi toda Europa el uso de la palabra alemana “coss” para designar a la incógnita y el álgebra misma vino a llamarse “el arte cósico” o “arte de la cosa”.

Poco después empezaron a aparecer obras que revolucionarían el álgebra, donde aparece la distinción entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita el cual, fue un paso previo a la matemática moderna.

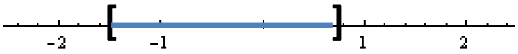


Anexo II

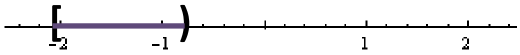
Este documento sería impreso en dos transparencias diferentes para poder superponer unos intervalos con otros, y trabajar así con ello.

INTERVALOS

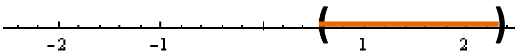
1)



2)

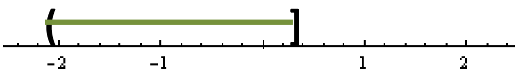


2)

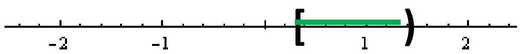


4)

5)



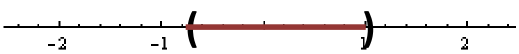
6)



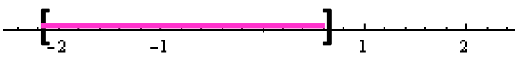
INTERVALOS

7)

8)

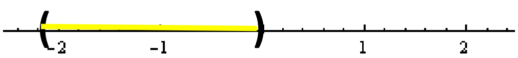


9)



10)

11)



12)