



UNIVERSIDAD DE GRANADA

**Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática**

Trabajo fin de máster

**ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS ESCRITAS PARCIALES DE LA
ASIGNATURA MAT002-CÁLCULO I QUE SE IMPARTIÓ EN LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE COSTA RICA DE 2014 A 2017**

María Gabriela Calderón Torres

Granada, septiembre de 2018



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación
Departamento de Didáctica de la Matemática

Trabajo fin de máster

ANÁLISIS DE LAS PRUEBAS ESCRITAS PARCIALES DE LA ASIGNATURA MAT002-CÁLCULO I QUE SE IMPARTIÓ EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE COSTA RICA DE 2014 A 2017

Presentado por
Lic. María Gabriela Calderón Torres

Dirigido por
D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Granada, septiembre de 2018

RESUMEN

Este estudio se realizó con el objetivo de caracterizar, a través del análisis de sus tareas, las pruebas escritas parciales de la asignatura Cálculo I impartida en la Universidad Nacional de Costa Rica de 2014 a 2017. Se consideraron nociones teóricas del pensamiento matemático avanzado, el análisis didáctico y el modelo de demanda cognitiva. Con enfoque cualitativo y alcance exploratorio-descriptivo, se siguió el método del análisis de contenido. Se identificaron rasgos, del contenido y su significado, cognitivos y descriptivos-estructurales, que permiten describir las tareas. Además, se identificaron rasgos recurrentes y singulares según tipos de pruebas y periodos lectivos contemplados.

ABSTRACT

This study was carried out with the objective of characterizing, through the analysis of their tasks, the partial written tests of the Calculus I course, which is taught at the National University, Costa Rica, in the period 2014-2017. Theoretical notions of advanced mathematical thinking, didactic analysis and the cognitive demand model were considered. With qualitative approach and exploratory-descriptive scope, the method of content analysis was followed. We identified characteristics, content and its meaning, cognitive and descriptive-structural, that allow us to describe the tasks. In addition, recurrent and unique characteristics were identified according to the types of tests and periods considered.

AGRADECIMIENTOS

Al D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo, como director de este proyecto, por su invaluable respaldo y por compartir su conocimiento y experiencia. Al D. José Antonio Fernández Plaza, como asesor de este estudio, por su valiosa colaboración y por sus recomendaciones.

Al profesorado del Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, por sus enseñanzas, reflejadas de una u otra manera en este trabajo. A las autoridades de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica por el acceso al medio en que realizó este estudio.

Al D. Ronny Gamboa Araya y a la Lic. Rebeca Calderón Torres, como colegas y como familia, por sus inestimables consejos y palabras de ánimo. A mis padres por su constante apoyo y por su ejemplo de trabajo y dedicación.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	5
1.1. CONTEXTO	5
1.2. JUSTIFICACIÓN	6
1.3. VIABILIDAD	7
1.4. PREGUNTA Y OBJETIVOS	8
CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES	9
2.1. ANÁLISIS DE TAREAS EN LIBROS DE TEXTO.....	9
2.2. ANÁLISIS DE TAREAS EN PRUEBAS ESCRITAS	11
CAPÍTULO 3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA	12
3.1. PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO	12
3.2. ANÁLISIS DIDÁCTICO.....	12
3.3. MODELO DE LA DEMANDA COGNITIVA	16
CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA.....	17
4.1. CONTENIDO Y UNIDAD DE ANÁLISIS	17
4.2. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	18
4.3. CUANTIFICACIÓN E INTERPRETACIÓN	24
4.4. CREDIBILIDAD Y CONSISTENCIA	25
CAPÍTULO 5. RESULTADOS	26
5.1. NÚMERO DE PRUEBAS PARCIALES Y TAREAS ANALIZADAS	26
5.2. PRIMERA PRUEBA PARCIAL SEGÚN CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	26
5.3. SEGUNDA PRUEBA PARCIAL SEGÚN CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	35
5.4. TERCERA PRUEBA PARCIAL SEGÚN CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	41
CAPÍTULO 6. RESUMEN Y CONCLUSIONES	48
6.1. CONCLUSIONES GENERALES	48
6.2. LIMITACIONES Y CONTINUIDAD	54
REFERENCIAS	56
ANEXOS.....	61

CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el contexto de educación matemática universitaria costarricense y de enseñanza del cálculo diferencial e integral se ha distinguido interés por realizar este trabajo de investigación, de manera que, tomando en consideración su viabilidad, fue llevado a cabo.

A continuación, se plantea y describe el problema de investigación tratado.

1.1. Contexto

El sistema educativo en Costa Rica está conformado por cuatro niveles: preescolar, primaria, media y superior (Asamblea Legislativa, 1957). Es en este último nivel, el universitario, cuando los estudiantes reciben formación matemática sobre cálculo diferencial e integral (en caso de que cursen alguna carrera que incluya algún curso afín), pues en secundaria tal temática no es contemplada (Ministerio de Educación Pública, 2012), como sí sucede en sistemas educativos de otros países (v.g., España).

En el caso de la Universidad Nacional (UNA), una de las cinco universidades públicas de Costa Rica, en la Escuela de Matemática (EMUNA) se imparten cursos de matemática, incluyendo cursos sobre cálculo diferencial e integral, a estudiantes de diversas carreras, cuya formación profesional requiere de cierto grado de conocimiento en la disciplina.

En muchos casos, los estudiantes empiezan su formación matemática universitaria, con un curso de cálculo diferencial e integral en una sola variable (a veces, precedido por un curso de matemática básica), para luego cursar asignaturas afines.

Antes del año 2014, se impartían varios cursos sobre cálculo diferencial e integral en una sola variable que compartían una misma base temática (límites, derivadas, integrales y algunas aplicaciones) con ligeras diferencias, pero, de manera que cada curso era ofertado para estudiantes de cierta carrera de forma exclusiva.

Luego de valorar tales condiciones, se decidió crear un único curso sobre cálculo diferencial e integral, para los estudiantes de todas las carreras que lo requerían. Según el acuerdo N° AA-003-03-2013 tomado por Asamblea de Académicos Ampliada de la EMUNA en octubre del año 2013, a este proceso se le llamó unificación, y fue llevado a cabo, además de en el caso de cálculo diferencial e integral, en otros cursos (EMUNA, 2013). Así, a partir de la segunda mitad del año 2014, se oferta un único curso llamado MAT002-Cálculo I,

indiferentemente de la carrera que curse cada estudiante (Biología, Economía, Ingenierías en Sistemas de Información, en Topografía Geodesia y Catastro, Forestal, o Química).

El curso MAT002-Cálculo I es impartido en cátedra, es decir, cada periodo lectivo, todos los estudiantes reciben una formación basada en un mismo programa (contenidos, objetivos, evaluación, cronograma), independientemente del profesor que imparta el curso.

Algunos aspectos del programa del curso comúnmente no varían de un periodo lectivo a otro, entre ellos: contenidos y objetivos. En el programa general del curso (EMUNA, 2018), no indicado como perteneciente a un periodo lectivo particular, se establece como objetivo general: resolver problemas de aplicación utilizando conceptos del cálculo diferencial e integral, y como contenidos: (a) límites y continuidad de funciones reales de variable real, (b) derivadas, (c) aplicaciones de la derivada, (d) integrales, y (e) aplicaciones de la integral.

Por otra parte, a pesar de que la evaluación puede variar de un periodo a otro (pues depende de decisiones de los profesores de la cátedra), desde que se imparte el curso (segundo periodo lectivo del año 2014) y durante siete periodos lectivos consecutivos, el curso se ha caracterizado por 100% de evaluación basada en pruebas escritas.

Además, según las disposiciones de cursos en cátedra, cada prueba es confeccionada bajo la coordinación de uno de los profesores del curso (llamado coordinador de cátedra) y con la colaboración de otros profesores, y es aplicada a todos los estudiantes por igual.

1.2. Justificación

Debido a las características de evaluación del curso MAT002-Cálculo I, la promoción de cada estudiante depende exclusivamente de su rendimiento en las pruebas escritas. Por ello, las pruebas escritas repercuten tanto en estudiantes como en docentes. Para los estudiantes, representan la única forma con la que pueden evidenciar conocimientos y destrezas adquiridas en el curso, para poder aprobar la asignatura. Para los docentes, son la única forma de valorar los aprendizajes de los estudiantes y poder promoverlos o no.

Así, para los docentes (e incluso para las autoridades universitarias encargadas del planteamiento de los cursos y de las ofertas educativas), el hecho de conocer los resultados de un análisis exhaustivo de las pruebas escritas que se han aplicado en el curso, y de las tareas que las han compuesto, representaría una oportunidad para informarse sobre aspectos de interés tales como: la forma en que se han estado diseñando las pruebas, los contenidos que se han estado planteando y priorizando, las demandas cognitivas que se han estado

planteando a los estudiantes que resuelven las pruebas, y la correspondencia de los objetivos de enseñanza con lo planteado en las pruebas. Además, la consideración de tales aspectos podría contribuir a valorar el grado de dificultad planteado en las pruebas, y la evolución de las características de las pruebas a través del tiempo, desde que el curso se empezó a impartir.

Esto permitiría valorar el proceso de confección de las pruebas, los criterios utilizados para su diseño, el cumplimiento de sus funciones, entre otros aspectos. Y a su vez, permitiría tomar decisiones fundamentadas, en pro de mejoras para el curso, sobre el sistema de evaluación, o sobre el planteamiento general de la asignatura.

Por otra parte, réplicas del análisis, en las pruebas escritas de otras asignaturas de matemática impartidas en la UNA, e inclusive en otras universidades de Costa Rica, permitirían valorar los sistemas de evaluación de los aprendizajes que están siendo utilizados a nivel de educación superior costarricense, en los cursos de matemática. Esto, a su vez, permitiría hacer comparaciones con resultados de análisis similares realizados en otros países, y contribuir a la generación de información más amplia sobre aspectos relacionados con la confección de pruebas escritas de matemática, en diversos temas y niveles educativos.

1.3. Viabilidad

Este estudio fue considerado viable por dos motivos: (a) la posibilidad de acceder a las fuentes de información y (b) la disposición de recursos para realizar la investigación.

Se consideró posible acceder a las fuentes de información, en primer lugar, por la forma en que se ha gestionado, académica y administrativamente, el curso MAT002-Cálculo I, entre ellas: (a) se ha impartido durante un periodo (tres años y medio) definido, reciente y relativamente corto; (b) ha sido impartido en cátedra, bajo los mismos criterios sobre contenidos, objetivos, sistema de evaluación y otros; (c) se han aplicado las mismas pruebas a todos los estudiantes; y (d) pruebas y programas han sido recolectados por la administración de la EMUNA. En segundo lugar, debido a que la investigadora principal de este estudio es académica de la EMUNA, ha impartido el curso en varias ocasiones y tiene contacto con profesores y administrativos. Y, en tercer lugar, a la disponibilidad de las autoridades de la EMUNA para la realización de investigación sobre procesos educativos en cursos impartidos.

Sobre la disposición de recursos humanos, temporales y económicos se valoró: (a) la participación de profesores-investigadores con experiencia en enseñanza del cálculo y/o investigación en didáctica del cálculo; (b) el tiempo para la realización de investigación,

como requisito para optar por el Máster en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, por parte de la investigadora principal; y (c) el gasto económico nulo implicado.

1.4. Pregunta y objetivos

Con base en el interés y la viabilidad de responder a la pregunta de investigación planteada para este estudio: *¿cómo se caracterizan las pruebas escritas parciales de la asignatura MAT002Cálculo I que se impartió en la Universidad Nacional de Costa Rica de 2014 a 2017?*, se planteó: (a) un objetivo general y (b) tres objetivos específicos; de manera que, su cumplimiento permitiría dar respuesta a la pregunta. Estos, se detallan a continuación.

Objetivo General. Caracterizar, a través del análisis de sus tareas, las pruebas escritas parciales de la asignatura MAT002Cálculo I que se impartió en la Universidad Nacional de Costa Rica de 2014 a 2017.

Objetivo Específico 1. Identificar rasgos que permitan describir las tareas que componen las pruebas escritas parciales aplicadas.

Objetivo Específico 2. Describir, en términos de sus rasgos, las tareas que componen las pruebas escritas parciales aplicadas.

Objetivo Específico 3. Describir, en términos de sus rasgos, diferencias y similitudes de las tareas que componen las pruebas escritas parciales aplicadas, según número de prueba, unidad de contenido y periodo lectivo de aplicación.

Aunque el objetivo específico 1 se relaciona con una etapa de la investigación descrita en el capítulo de metodología (denominar, definir e interpretar categorías de análisis) y no a todo el proceso, cuestión señalada por Hernández, Fernández y Baptista (2014) como inconveniente para el planteo de objetivos de investigación, se ha considerado su relevancia desde el punto de vista de investigación (además, del metodológico), pues condiciona dos características pretendidas para este estudio: pertinencia y reproductibilidad.

Según Kilpatrick (1998), una investigación es pertinente, en la medida en que alguno de sus aspectos pueda ser utilizado; y es reproducible, en la medida en que la forma en que se comunica posibilite seguir los procedimientos y obtener, comprobar o refutar los resultados. Desde ambas perspectivas, se pretendió que los rasgos que permitan describir tareas que sean identificados según el objetivo específico 1, puedan ser usados en análisis de tareas matemáticas de otras temáticas, niveles educativos y/o contextos, contribuyendo a la generación de criterios generales para la caracterización de tareas matemáticas.

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES

El análisis de tareas matemáticas es una línea de investigación a la que investigadores han dedicado esfuerzos, desarrollando múltiples estudios al respecto. Se revisaron comunicaciones de estudios afines y se distinguieron dos tipos de documentos como fuente de datos: libros de texto y pruebas escritas. Además, se observó que tratan tareas de diferentes contenidos (matemática en general, cálculo diferencial e integral, y otros); y que, a su vez, los de tareas de cálculo diferencial e integral contemplan diferentes: (a) niveles educativos (secundaria, transición secundaria-universidad, y universidad); y (b) temáticas particulares (derivadas, límites y continuidad, integral). Por ejemplo, Ruiz de Gauna (2010) caracterizó libros y pruebas de transición secundaria-universidad, de 1970-2008 en España, hallando diferencias entre periodos sobre tratamiento didáctico del contenido, lenguaje gráfico-simbólico, problemas-ejercicios, y otros. También, Boesen, Lithner y Palm (2010), analizaron tareas de libros de texto y pruebas nacionales suecas, determinando que las tareas de evaluación similares a las de libros de texto conducían a tipos razonamiento por imitación.

A continuación, se describen algunos antecedentes contemplados en este estudio, organizados por tipo de documento, señalando contenido y nivel educativo tratados.

2.1. Análisis de tareas en libros de texto

A pesar del desarrollo de múltiples estudios sobre análisis de tareas en libros de texto, estos, no son mayoría respecto al total, y no se observa tendencia clara en cantidad creciente a través del tiempo. Sobre esto, mediante revisión bibliográfica, Marco-Buzunáriz, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2016) clasificaron trabajos, relacionados con libros de texto, en actas de Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) de 1997-2015, hallando: (a) aparición irregular y no mayoritaria (entre 4% y 8,8%) entre 2003 y 2015; y (b) coincidencias en: carácter descriptivo, enfoque empírico, niveles educativos superiores (82,9% sobre secundaria, bachillerato y/o universidad) y diferentes temas, siendo más frecuentes cálculo (32,3%), y estadística-probabilidad.

Al respecto, Fan (2013), examinó problemas de investigación sobre libros de texto y sus métodos, en trabajos de Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME) de 2010 y 2011, y señaló necesidades: (a) pasar de estudios descriptivos (mayormente localizados) a correlacionales y causales; y (b) pasar de múltiples métodos y enfoques

(mayormente localizados) a métodos rigurosos y unificados (por ejemplo, experimental). Esto coincide con Tzur, Zaslavsky y Sullivan (2008), que resaltan la necesidad de consideración de tres perspectivas (docente, educador de profesores e investigador) estableciendo conexión entre teoría y práctica escolar. Por ejemplo, Stein, Grover y Henningsen (1996) analizaron características, demandas cognitivas e implementación de las tareas, mientras que, tanto Swan (2006) como Giménez, Font y Vanegas (2013) analizaron diseño teórico-experimental de tareas, implementación y rediseño.

El análisis de tareas sobre cálculo diferencial e integral ha recibido especial interés, en temáticas y niveles educativos particulares como: (a) puntos críticos en secundaria española del siglo XX (González y Sierra, 2004); (b) optimización, en secundaria portuguesa en la época del único libro-1954 (Aires y Esteves, 2012), y en bachillerato español (Balcaza, Contreras y Font, 2017); (c) límites y continuidad en bachillerato español (Giacomone, Loría, Solera y Ruiz-Hidalgo, 2015); (d) derivación, en universidad española (Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo, 2017), y en bachillerato español (Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo, 2018). Además, algunos coinciden en métodos y marcos teóricos, como: (a) investigación histórica (Aires y Esteves, 2012); (b) análisis de contenido (Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo, 2017; Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo, 2018); (c) enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción (EOS), (Balcaza, Contreras y Font, 2017).

En términos de características de tareas, como: (a) estructura, símbolos, fenómenos, funciones, complejidad (González y Sierra, 2004); (b) forma, contexto y resolución (Aires y Esteves, 2012); (c) situaciones y contextos (Giacomone, Loría, Solera y Ruiz-Hidalgo, 2015); (d) conceptos y procedimientos (Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo, 2017); (e) significados (Balcaza, Contreras y Font, 2017); (f) descriptivas-estructurales y de significados (Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo, 2018); los resultados coinciden en algunos casos: (a) diferencias entre periodos y textos (González y Sierra, 2004; Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo, 2017); (b) contexto recurrente (real en Aires y Esteves, 2012; no real en Giacomone, Loría, Solera y Ruiz-Hidalgo, 2015; intramatemático en Balcaza, Contreras y Font, 2017, y procedimental en Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo, 2018).

Otras temáticas también han sido de interés, por ejemplo, sobre: matemática básica en primaria turca (Özgeldi y Esen, 2010), probabilidad en secundaria estadounidense (Jones

y Tarr, 2007), y fracciones en secundaria sueca (Brändström, 2005), se halló predominio de niveles inferiores de demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998).

2.2. Análisis de tareas en pruebas escritas

Mientras parte de la investigación sobre análisis de tareas contempla como fuente de información, libros de texto, otra parte se dirige a pruebas escritas, tanto en asignaturas de diferentes niveles (por ejemplo; Meza y Agüero, 2014; quienes analizaron técnicamente pruebas de matemática de diferentes centros de secundaria costarricense), como en pruebas de selectividad o diagnóstico en ingreso a la universidad, por ejemplo: (a) Boal, Bueno, Lerís y Sein-Echaluce (2008) analizaron habilidades en pruebas de acceso a universidades españolas; (b) Ruiz de Gauna, Sarasua y García (2011) analizaron la tipología de tareas de pruebas de acceso a universidad española de 1994-2008; (c) Jiménez y Montero (2013) analizaron dificultad, procesos y contenidos de prueba diagnóstica de ingreso a universidad costarricense. Los tres estudios hallaron dificultades consideradas de nivel medio.

El análisis de tareas sobre cálculo diferencial e integral en pruebas escritas, sobre todo en la transición hacia la universidad, también ha recibido atención, algunos sobre tareas matemáticas en general en universidad española de 2016 (Herrera, 2017), y otros en temáticas particulares como: (a) derivadas en universidad española de 2013-2016 (Jiménez, 2017); (b) integral definida en universidad español de 1999-2010 (Ordóñez y Contreras, 2011).

En términos de características de las tareas, como: (a) contenido, cognición y estructura (Herrera, 2017); (b) significados (Jiménez, 2017; Ordóñez y Contreras, 2011); algunos resultados coinciden, como: (a) diferencias entre comunidades (Herrera, 2017); y (b) escasez de notaciones, sistema de representación simbólico predominante, mayor uso como regla en situación científico matemáticas (Jiménez, 2017; Ordóñez y Contreras, 2011). También, algunos métodos y marcos teóricos coinciden, como: (a) análisis de contenido (Herrera, 2017; Jiménez, 2017); (c) EOS (Ordóñez y Contreras, 2011).

Otras temáticas también han sido abarcadas, por ejemplo, en pruebas de acceso a la universidad: (a) López-Martín, Contreras, Carretero y Serrano (2016) sobre probabilidad en España 2003-2014, hallaron variaciones en el tiempo sobre conceptos, procedimientos y contexto predominante en juegos de azar; (b) Díaz-Levicoy, Parraguez y Sánchez (2015) sobre estadística en Chile 2005-2015, hallaron predominio de representación tipo tablas sobre gráficos, y de nivel de complejidad basado en cálculos.

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Se consideraron tres referentes teóricos: (a) pensamiento matemático avanzado (PMA), (b) análisis didáctico, y (c) modelo de demanda cognitiva (como complemento al análisis didáctico, sobre cognición). Estos, desempeñaron doble función: (a) diseño del método, y/o (b) organización e interpretación de resultados. Tres razones de su elección fueron: (a) uso reiterado en estudios sobre Didáctica de la Matemática y del Cálculo, y sobre análisis de tareas; (b) posibilidad de integración coherente; y (c) claridad del tratamiento de nociones, a pesar de la complejidad innegable del contexto referido (enseñanza y aprendizaje de la matemática y del cálculo). Precisamente, este estudio fue situado en PMA porque se consideró un contexto de transición entre pensamiento matemático elemental (PME) y PMA.

A continuación, se destacan los aspectos que fueron considerados en este estudio.

3.1. Pensamiento matemático avanzado

Existen divergencias sobre a qué distingue al PMA del PME. Sin embargo, se ha señalado, como rasgo distintivo del PMA, un mayor nivel de complejidad de contenidos y/o tipos de pensamientos (Tall, 1991). Según, Selden y Selden (2005), la discrepancia es, precisamente, si el término avanzado se refiere a los contenidos, a los pensamientos, o a ambos; siendo una postura recurrente: que se refiere a los tipos de pensamientos (avanzados) característicos de ciertos temas matemáticos (avanzados). Por ejemplo, definir, representar, demostrar, abstraer, y deducir, entre otros, que se llevan a cabo frecuentemente en cálculo diferencial e integral, álgebra abstracta, teoría de conjuntos, entre otros (Tall, 1991). Al respecto, según Robert y Schwarzenberger (1991), la transición de PME a PMA coincide con la aparición de más conceptos, definiciones y relaciones, manipulados con deducción lógica.

3.2. Análisis didáctico

El análisis didáctico de los contenidos matemáticos escolares ha sido considerado como uno de los contenidos sobre didáctica de la matemática que debe conocer y/o aplicar, tanto el profesor (Rico y Moreno, 2016) como el investigador en el área (Rico, 2012). Se entiende como “un método para [generar,] escudriñar, estructurar e interpretar, dentro de un marco curricular, los contenidos didácticos de las matemáticas escolares, con el propósito de su planificación, implementación y evaluación” (p. 95); que incluye cuatro análisis parciales: (a) de los significados, (b) cognitivo, (c) de instrucción, y (d) evaluativo (Rico, 2016).

3.2.1. Análisis de los significados

El análisis de los significados trata la dimensión cultural-conceptual del currículo, su objeto de estudio son los significados de los contenidos matemáticos escolares, y sus categorías de análisis son: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación, y (c) sentidos y modos de uso (Rico, 2016).

Un contenido matemático escolar se entiende como el conjunto de conceptos matemáticos, procedimientos, estructuras y actitudes provenientes de la tradición histórico-académica, que los responsables de los currículos escolares eligen para que los profesores enseñen y los escolares aprendan (Fernández-Plaza, 2016). De manera que el objetivo de la enseñanza es el aprendizaje de los contenidos matemáticos establecidos en los currículos.

Así, para aprender un contenido matemático se requiere comprensión de cada concepto que lo constituye; y a su vez, “comprender un concepto matemático consiste en interpretarlo y usarlo con significado” (Fernández-Plaza, 2016, p. 103), es decir, comprender su significado. Rico (2016) señala que “conocer un concepto matemático es conocer su definición, representarlo, mostrar sus operaciones, y sus modos de uso, interpretación y aplicación en la resolución de problemas” (p. 94), y distingue tres componentes del significado: (a) estructura conceptual, (b) sistemas de representación, y (c) sentidos y modos de uso. Estos, son las categorías del análisis didáctico de los significados, y corresponden, respectivamente, a los componentes del significado de un concepto que, desde una perspectiva lógico-formal, Frege (1998) distinguió: (a) referencia, (b) signo, y (c) sentido.

La estructura conceptual de un concepto matemático escolar es “una red de conceptos y relaciones” afines (Rico, 2016, p. 89), y aprenderlo es incorporar articuladamente su estructura conceptual a una estructura de conceptos que preexiste. Según Fernández-Plaza (2016), la estructura conceptual está dada por tres ámbitos (conceptual, procedimental, y actitudinal) y tres niveles (unidades de información, abstracción/generalización, y estructuración). Las nueve combinaciones generadas (ver Tabla 3.1) constituyen un sistema de categorías, en el que hechos incluyen términos-notaciones (palabras-símbolos que materializan objetos, nociones, relaciones y operaciones), conceptos son redes articuladas de hechos, estructuras conceptuales son redes de conceptos, y los procesamientos: de hechos son destrezas, de relaciones entre conceptos son razonamientos, y de razonamientos de varias estructuras conceptuales son estrategias (Rico, 2016; Fernández-Plaza, 2016).

Tabla 3.1 *Estructura conceptual de un concepto matemático, ámbitos y niveles.*

Nivel	Conceptual	Procedimental	Actitudinal
Unidades de información	Hechos	Destrezas	Emociones
Abstracción/generalización	Conceptos	Razonamientos	Moralidad y normas
Estructuración	Estructuras conceptuales	Estrategias	Valores éticos

Por otra parte, según Rico, Castro y Romero (2000), en la comprensión de un concepto matemático también intervienen las representaciones con las que se manifiestan y se nombran los conceptos, procedimientos, propiedades y relaciones afines, pues ellas ponen de manifiesto diferentes facetas complementarias del significado del concepto. Según Castro y Castro (1997) hay dos tipos de representaciones: internas (ubicadas en la mente de los sujetos) y externas (poseen un carácter semiótico, pues expresan las ideas mentales sobre cierta noción mediante signos verbales, símbolos o gráficos). Según Lupiáñez (2016), las representaciones externas suelen organizarse en sistemas de representación (simbólico, gráfico, numérico, verbal y pictórico) que contemplan, además de los signos, reglas y convenios para su uso y transformación (incluyendo procesamientos intra e intersistemas).

Finalmente, según Ruiz-Hidalgo (2016) para alcanzar el dominio del significado de un concepto matemático escolar, junto con la estructura conceptual y los sistemas de representación, debe considerarse el sentido de tal concepto desde una perspectiva funcional, “entendiendo sus diferentes modos de uso, aplicándolos en variedad de situaciones, comprendiendo los tipos de problemas que resuelven, dominando los términos propios del concepto y conociendo los fenómenos que organizan” (p. 140). Los distintos términos para un mismo concepto, los contextos a los que pertenecen las cuestiones que responde, los fenómenos en que surgió y que organiza, y las situaciones en las que intervine, denotan sus diferentes sentidos y condicionan el modo en que se usa (Ruiz-Hidalgo, 2016).

3.2.2. Análisis cognitivo

El análisis cognitivo trata la dimensión cognitiva del currículo, su objeto de estudio son condiciones y orientación del aprendizaje matemático escolar, y sus categorías de análisis son: (a) expectativas, (b) limitaciones, y (c) oportunidades de aprendizaje (Rico, 2016).

Sobre las expectativas de aprendizaje de un contenido matemático (siendo objetivos de aprendizaje y competencias dos forma de enunciarlas), Flores y Lupiáñez (2016) señalan que expresan las previsiones de aprendizaje referenciando propósitos sobre lo que puede y debe aprender el escolar, mediante tres componentes: (a) conceptos, procedimientos y

actitudes del contenido matemático; (b) demandas planteadas en tareas matemáticas en las que son requeridas y deben ser movilizadas; y (c) capacidades observadas en los escolares en actuaciones ante demandas. Las expectativas de aprendizaje a modo de objetivos requieren de alto grado de precisión y de tres componentes: capacidad (verbo de acción observable), conocimientos específicos, y su aparición en el contexto (Flores y Lupiáñez, 2016).

Sobre oportunidades de aprendizaje Ruiz-Hidalgo y Rico (2016) señalan tres componentes: (a) circunstancias condicionantes, (b) demandas cognitivas, y (c) otras cuestiones singulares; detallando, sobre demandas cognitivas, tres facetas: formular, aplicar e interpretar, y tres niveles de complejidad según PISA: reproducción, conexión y reflexión.

3.2.3. Análisis de instrucción

El análisis de instrucción trata la dimensión ético-normativa del currículo, su objeto de estudio es la planificación e implementación de la enseñanza, y sus categorías de análisis son: (a) tareas, (b) organización del trabajo de aula, y (c) materiales y recursos (Rico, 2016).

Sobre tareas, Moreno y Ramírez (2016) definen tarea matemática escolar como “una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica” (p. 244) con intención de aprendizaje o de evaluación; señalando, que cada tarea puede ser descrita mediante datos (meta o finalidad, formulación, recursos o materiales, tipo de agrupamiento, situación o contexto, y temporalización) y estudiada metódicamente mediante un análisis de variables (contenido, situaciones, y dificultad). Sobre dificultad, Ramírez y Moreno (2016) señalan criterios teóricos (reproducción, conexión, y reflexión), empíricos, y de formato (redacción, formato abierta/cerrado, motivación-autenticidad, y representaciones); mientras que, sobre dimensión, señalan: ejercicios y problemas (distinguiendo a los problemas como retadores pues la forma de resolver no es conocida previamente) y mencionan las categorías generadas por cruce de complejidad y estructura de Ponte (2004). Además, Ramírez y Moreno (2016) se refieren al rol de la modelización (hacer matemáticas o matematizar) en la resolución de problemas, señalando la realización cíclica de acciones (formular, aplicar, interpretar, y evaluar) pasando del dominio extra-matemático al matemático y viceversa.

3.2.4. Análisis evaluativo

El análisis evaluativo trata la dimensión social del currículo, su objeto de estudio son aprendizajes logrados, y sus categorías de análisis son: (a) diseño y modalidades, (b) intervención y decisiones, y (c) indicadores de calidad (Rico, 2016).

Respecto a evaluación, Segovia (2016) señala que contempla desde cuantificar logros de los alumnos en términos de juicios de sus aprendizajes, hasta obtener información sobre un programa de estudios o una intervención didáctica y tomar decisiones al respecto; y que las modalidades de evaluación se establecen en las normativas curriculares. Evaluar en términos de rendimiento académico escolar es enjuiciar “los logros alcanzados por unos escolares concretos sobre determinada estructura conceptual, de acuerdo con un programa y unos objetivos propuestos previamente” (Moreno, 2016, p. 330), por medio de instrumentos (v.g. prueba escrita estandarizada) que permiten resumir los logros en un valor (individual o grupal) según aciertos en la resolución de ciertas tareas diseñadas con finalidad evaluativa.

3.3. Modelo de la demanda cognitiva

Para valorar niveles de razonamiento, el modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein (1998) establece cuatro niveles de demanda (de menor a mayor): memorización, algoritmos sin conexiones, algoritmos con conexiones, y hacer matemática, que pueden ser requeridos para resolver con éxito una tarea, y examinados el enunciado (ver Tabla 3.2).

Tabla 3.2. *Caracterización de tareas según niveles de demanda cognitiva del modelo Smith y Stein*

Nivel	Características
Memorización	Reproducción exacta, solicitada claramente, de reglas o definiciones. Ausencia de procedimientos. Sin conexión, excepto por memoria, con conceptos o significados subyacentes.
Algoritmos sin conexiones	Uso de procedimiento explícitamente requerido o evidente por experiencia. Sin conexión con conceptos o significados que subyacen al procedimiento. Sin explicaciones o explicaciones solo para describir el procedimiento.
Algoritmos con conexiones	Uso de procedimientos con comprensión de conceptos. Sugerencias de vías explícitas o implícitas, a modo de procedimientos generales con conexiones a ideas conceptuales subyacentes. Representación múltiple y conexiones entre representaciones.
Hacer matemáticas	Pensamiento complejo y no algorítmico. Vía predecible y ensayada no sugerida. Explorar y comprender conceptos, procesos o relaciones. Autorregulación de procesos cognitivos. Acceso a conocimientos y experiencias notables, y uso apropiado. Examinación activa de restricciones que limitan estrategias y solución. Ansiedad por impredecibilidad.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

Se realizó un estudio de enfoque cualitativo, con alcance exploratorio-descriptivo y mediante el método de análisis de contenido; considerando credibilidad y consistencia.

El enfoque cualitativo exploratorio es conveniente cuando el tema del estudio ha sido poco explorado, como en este caso; y el alcance descriptivo coincide con la búsqueda de propiedades desde perspectiva interpretativa (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Como es característico del enfoque, se siguió un proceso inductivo, interpretativo, iterativo y recurrente (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Se utilizó análisis de contenido, como método de investigación, para reducir y descomponer el contenido de textos en sus unidades más simples determinando estricta, rigurosa y sistemáticamente temáticas y categorías, descubriendo patrones en el discurso e infiriendo significados interpretativos (Rico, 2013), es decir, reduciendo mediante categorización los datos recolectados (Cohen, Manion y Morrison, 2017; Hernández, Fernández y Baptista, 2014). Las fases seguidas fueron: (a) delimitar y localizar el contenido por analizar y concretar la unidad de análisis; (b) denominar, definir e interpretar las categorías de análisis, consideradas previamente y/o emergentes y afinadas según examinación; (c) codificar, cuantificar, relacionar e interpretar unidades de análisis según categorías y temas (Rico, 2013).

4.1. Contenido y unidad de análisis

Se delimitó el contenido para el análisis como los textos de todas las pruebas escritas parciales (42, entre ordinarias y de reposición) aplicadas en el curso MAT002-Cálculo I en la EMUNA, durante siete periodos (ciclos) lectivos consecutivos (dos por año), desde II ciclo 2014 (primero en que se impartió) hasta II ciclo 2017 (concluido más reciente a la recolección). Se consideró, además, el texto de todos los programas respectivos. Con la colaboración de autoridades de la EMUNA todos los textos se localizaron en digitales (PDF).

Inicialmente, se propuso considerar, además de pruebas parciales, extraordinarias. A pesar de que todas las extraordinarias fueron localizadas y de que sus tareas fueron sometidas a análisis, finalmente no se incluyeron en este informe de extensión limitada, debido a que el grado de detalle del análisis impedía que los resultados para tales pruebas fueran anotados.

Por otra parte, se concretó la unidad de análisis como cada tarea (cada apartado de cada ítem o cada ítem completo cuando no tenía apartados) de cada prueba parcial (411

tareas). Considerando el enfoque didáctico del análisis pretendido, se tomó la unidad de análisis más simple (pequeña) que componía cada texto, pero que tuviera sentido didáctico según los componentes del análisis didáctico: contenido, cognición, instrucción y evaluación.

Por ejemplo, en la Figura 4.1, hay dos ítems (4 y 5). El primero no posee apartados, y el segundo posee dos (a y b). Se consideraron tres tareas: (a) primer ítem completo, (b) enunciado compartido y apartado a del segundo ítem, y (c) enunciado compartido y apartado b del segundo ítem. Así, para cada tarea tipo apartado se consideró el enunciado compartido.

4. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva de $y = x^2 - x$ que contienen al punto $(2, 1)$.	(7 puntos)
5. Calcular y' en cada uno de los ejercicios siguientes:	
a) $y = \left(\frac{x^3 - 1}{2x^3 + 1} \right)^4$	(5 puntos)
b) $x^3 + y^3 - 6x^2y = 0$	(5 puntos)

Figura 4.1. Enunciados de tareas incluidas en primera prueba parcial de reposición del II ciclo 2014

Debido a la gran cantidad de pruebas y tareas, fue necesario identificarlas, organizarlas y referirlas sistemáticamente. Se creó un sistema de codificación (código alfanumérico para cada prueba y tarea), cuya estructura se señala en la Figura 4.2.

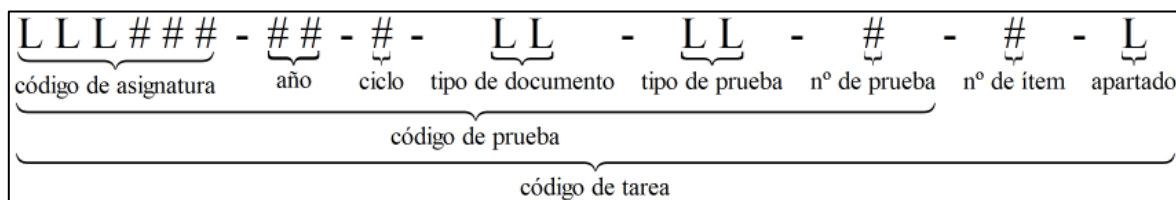


Figura 4.2. Estructura de código de pruebas y tareas. L representa a una letra y # a un número.

Por ejemplo, el código MAT002-15-2-PB-PO-2-1-b se refiere a la tarea de Asignatura Cálculo I, Año 2015, II ciclo, prueba, ordinaria, segunda, primer ítem, segundo apartado.

4.2. Categorías de análisis

Se siguió un proceso deductivo e inductivo para construir el sistema de categorías que permitiera examinar cada unidad de análisis. De la revisión de literatura se consideraron categorías preliminares que fueron aplicadas (deductivamente) a una porción de tareas, de manera que: (a) se obtuvo una visión general del contenido; (b) se confirmaron, descartaron o afinaron categorías, según el contenido; y (c) se generaron nuevas categorías (inductivamente), según la identificación de otros aspectos por evidenciar. Así, emergió un nuevo sistema de categorías. Este proceso se repitió, aumentando cada vez la cantidad de

tareas tomadas, hasta que se consideró la saturación del sistema, es decir, que nuevas unidades no generaban nuevas categorías (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Para la primera versión de categorías (ver Tabla A.1 en Anexos) se tomaron 14 (ordenándolas congruentemente, unificando repetidas, eliminando carentes de sentido debido a diferencias entre estudios y detallando aspectos) de dos antecedentes que sobre este estudio ejercieron amplia influencia, especialmente en el método (Herrera, 2017; Jiménez, 2017). Siguiendo a Moreno y Ramírez (2016), Gómez y Romero (2015), y Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo (2017), en su estudio, Herrera (2017) consideró las categorías: formulación, meta, recursos, contenido, situación según PISA (OECD, 2013), complejidad, abierta/cerrada; tipo según Ponte (2004), número de apartados, puntuación, relación entre apartados, tipo de función, inverso/directo, y observaciones. Jiménez (2017) consideró: términos, notación, explicitación, sistemas de representación, contextos según Ruiz-Hidalgo (2016), situación y capacidad requerida según PISA (OECD, 2016), complejidad y ejercicio/problema según Moreno y Ramírez (2016), puntuación, tipo de función, y observaciones.

Del sistema preliminar se confirmaron: puntuación, tipo de tarea y observaciones (sin cambios), relación entre apartados, contenido, explicitación del contenido, sistema de representación, tipo de función, situación, meta, abierta/cerrada, complejidad, directo/inverso y recursos (modificadas). Se crearon: cuantificación de relación entre tareas, contenido sobre cálculo de límites, contenido sobre técnica de integración, unidad de contenido, definición de la función, rasgos y cuantificación, operaciones y cuantificación, uso de parámetros y cuantificación, acción, demanda cognitiva, tipo de respuesta, uso de imágenes, objetivos específico y general (ver motivos de modificaciones y creaciones en la Tabla A.2 de Anexos).

Similar a lo hecho por Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo (2018), el sistema de 29 categorías finalmente considerado se organizó en tres temas (aspectos): (a) del contenido y su significado (ver Tabla 4.1); (b) cognitivos (ver Tabla 4.2); (c) descriptivos-estructurales, no relacionados exclusivamente con contenido o cognición (ver Tabla 4.3). Además, se consideraron otros ocho aspectos sobre las pruebas de las tareas (ver Tabla 4.4).

Tabla 4.1. Sistema final de categorías de análisis de tareas, aspectos del contenido y su significado.

Categoría/Definición	Modalidad
<i>Unidad de contenido.</i> Unidad de contenido a la que se refiere la tarea.	Límites y continuidad; Derivación; Aplicaciones de la derivada; Integración; Aplicaciones de la integral; y Otra (no incluida en el programa).

<i>Detalle del contenido.</i> Temática específica de la tarea, según términos, verbos, notaciones, u otra información presente en el enunciado de la tarea (adaptado; Herrera, 2017).	Noción intuitiva de límite; Cálculo de límite; Continuidad y discontinuidad; Definición función derivada; Derivada como razón de cambio instantáneo; Rectas tangentes y normales (interpretación geométrica de derivada); Teoremas sobre derivación; Teorema del valor medio; Teorema de Rolle; Derivadas de orden superior; Derivación implícita; Derivación logarítmica; Puntos críticos; Extremos relativos y absolutos; Criterios de primera, segunda y enésima derivada; Crecimiento; Puntos de inflexión; Concavidad; Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas; Gráficas; Cuadro de variación; Optimización; Regla de L'Hopital; Integral indefinida; Integral definida; áreas bajo y entre curvas; Sólidos de revolución; y Otro (no incluido en el programa).
<i>Contenido sobre cálculo de límites.</i> Tipo del límite o de técnica para el cálculo del límite, solo para tareas sobre cálculo de límite de una función (fue considerada como mutuamente excluyente con Regla de L'Hopital) de la categoría detalle del contenido.	Sustitución directa; Simplificación; Racionalización; Cambio de variable; Teorema del encaje; De funciones trigonométricas; De funciones trigonométricas mediante cambio de variable; De funciones trigonométricas inversas; Límites unilaterales; Límite infinito; Límite al infinito; y No aplica.
<i>Contenido sobre integral-técnica de integración.</i> Técnica de integración para calcular la integral indefinida implicada, solamente para tareas sobre integral definida o integral indefinida.	Directa; Por partes; Sustitución; Sustitución trigonométrica; Fracciones parciales y sustitución de racionales; Sustitución de Weierstrass; De funciones trigonométricas; De funciones exponenciales; De funciones logarítmicas; y No aplica.
<i>Tipo de explicitación del contenido.</i> Forma en que el contenido se hace explícito en el enunciado de la tarea, por algún término que comparte raíz léxica con algún contenido o por notación específica (adaptado; Jiménez, 2017).	No explicitado; Solamente por uno o varios términos (se registraron las palabras); Solamente por una o varias notaciones específicas (se registraron los símbolos); y Por combinación de términos y notaciones.
<i>Sistema de representación.</i> Sistema de representación utilizado en el enunciado de la tarea (adaptado de Herrera, 2017; Jiménez, 2017).	Solo Verbal; Verbal-Simbólico; Verbal-Gráfico; Verbal-Geométrico; y Múltiple (Verbal y al menos dos de las opciones Simbólico, Gráfico o Geométrico).
<i>Uso de imágenes.</i> Presencia de imágenes en la tarea y las funciones que desempeñan (adaptado; Brändström, 2015).	Sin imagen; Con imagen decorativa (no orienta la resolución); Con imagen funcional indispensable (ilustran el texto y se necesita para resolver); y Con imagen funcional no indispensable (ilustran el texto, pero no se necesitan para resolver).

<i>Definición de la función.</i> Forma de definir la función a la que se refiere la tarea.	Explícita (la variable dependiente se expresa únicamente en términos de la variable independiente); Implícita (no explícita); y No aplica (no hay función).
<i>Rasgos de función.</i> Rasgos que componen la función a la que se refiere la tarea (adaptado; Jiménez, 2017).	Constante; Monomio; Polinomio de primer grado; Polinomio de segundo grado; Polinomio de grado superior a dos (se registró el grado); Exponencial; Logaritmo; Trigonometría; Trigonometría inversa; y No aplica (no hay función).
<i>Cuantificación de rasgos de función.</i> Cantidad de rasgos que componen la función a la que se refiere la tarea.	Sin modalidades debido a su carácter cuantitativo.
<i>Operaciones de función.</i> Operaciones entre rasgos o aplicadas a rasgos que componen la función a la que se refiere la tarea.	Potencia de exponente entero positivo; Potencia de exponente entero negativo; Potencia de exponente racional (no entero); Suma y/o resta; Cociente; Producto; Valor absoluto; Composición; A trozos; y No aplica (no hay función).
<i>Cuantificación de operaciones de función.</i> Cantidad de operaciones entre rasgos o aplicadas a rasgos que componen la función a la que se refiere la tarea.	Sin modalidades debido a su carácter cuantitativo.
<i>Uso de parámetros en la función.</i> Uso de parámetros en la función a la que se refiere la tarea.	No; Sí; y No aplica (no hay función).
<i>Cuantificación de parámetros en la función.</i> Cantidad de parámetros en la función a la que se refiere la tarea.	Sin modalidades debido a su carácter cuantitativo.
<i>Situación.</i> Categoría definida como el tipo de contexto presentado en la tarea (adaptado; OCDE, 2016).	Personales (actividades diarias de los estudiantes); Educativas o laborales (propias del entorno escolar o laboral); Públicas o sociales (de la comunidad y la comunicación); Científico exclusivo matemático (acciones y situaciones propias exclusivamente del ámbito matemático); y Científico-tecnológico no exclusivo matemático (acciones y situaciones propias de ámbitos científicos o tecnológicos extra-matemáticos).

Tabla 4.2. Sistema final de categorías de análisis de tareas, aspectos cognitivos.

Categoría/Definición	Modalidad
<i>Tipo de respuesta.</i> Tipo de respuesta esperada al resolver la tarea.	Breve (una sola expresión); y Desarrollo (una secuencia de expresiones).

<i>Dirección.</i> Sentido en que se realizan las acciones y se determina lo solicitado (adaptado; Martínez-Luaces, 2017).	Directo (dados ciertos elementos iniciales que intervienen se aplican procedimientos sobre ellos y se determinan aspectos que los caracterizan); e Inverso (dadas ciertas condiciones iniciales sobre los elementos que intervienen se aplican procedimientos sobre ellas y se determinan los elementos que las satisfacen).
<i>Acción.</i> Acción prevista al resolver la tarea.	Analizar; Calcular; Determinar; Estudiar; Explicar; Hallar; Justificar; Mostrar; Plantear; Probar; Resolver; Trazar; Usar; y Verificar.
<i>Demanda cognitiva.</i> Demanda cognitiva prevista para la tarea, según características de los procesos previstos al resolverla (adaptado; Smith y Stein, 1998).	Memorización (no se usan algoritmos, se recurre, sin necesidad de explicaciones, a datos recordados o tomados directamente del enunciado); Procedimiento sin conexiones (uso de algoritmos, pero sin necesidad de establecer conexiones con aspectos distintos al procedimiento mismo, o de dar explicaciones más allá de lo que al procedimiento se refiere); Procedimientos con conexiones (uso de algoritmos, pero con la necesidad de establecer y explicar conexiones con aspectos distintos al procedimiento); y Modelización (estrategia de solución, incluyendo necesidad de establecer y explicar conexiones entre aspectos de la estrategia).
Complejidad. Dificultad de la tarea según demanda cognitiva prevista.	Fácil (memorización o procedimiento sin conexión); y Difícil (procedimiento con conexión o modelización).
Objetivo específico. Objetivo específico de aprendizaje establecido en el programa del curso que abarca la tarea.	Para tareas de II ciclo 2016: Calcular límites de funciones de una variable; Resolver problemas con cálculo de derivadas e integrales; Resolver problemas aplicando concepto de derivada; Optimizar de funciones; Resolver problemas que involucren cálculo de máximos y mínimos; Calcular integrales definidas e indefinidas usando técnicas de integración; Calcular integrales definidas usando la definición; y Otro (no incluido en el programa). Para el resto: Desarrollar conceptos de cálculo diferencial e integral de funciones de una variable; Resolver problemas que involucren cálculo de derivadas e integrales de funciones de una variable; Optimizar funciones de una variable; y Otro (no incluido en el programa).

Objetivo general. Objetivo general de aprendizaje establecido en el programa del curso que abarca la tarea.	Para tareas de II ciclo 2016: Aplicar conceptos del cálculo a la solución de ejercicios; Resolver problemas de aplicación usando conceptos del cálculo; y Otro (no incluido en el programa). Para el resto: Resolver problemas de aplicación utilizando conceptos del cálculo (problema y científico-tecnológico no exclusivo matemático); y Otro (no incluido en el programa).
---	---

Tabla 4.3. *Sistema final de categorías de análisis de tareas, aspectos descriptivos-estructurales.*

Categoría/Definición	Modalidad
<i>Puntuación.</i> Valor de la tarea en términos de la cantidad de puntos asignados (Herrera, 2017; Jiménez, 2017).	Sin modalidades debido a su carácter cuantitativo.
<i>Tipo de relación entre tareas.</i> Tipo de relación de la tarea con otras tareas de la misma prueba (adaptado; Herrera, 2017).	Ninguna; Solamente el enunciado (comparte solo el enunciado, no información sobre función implicada, datos implicados, o solución de otra tarea); Información, pero no solución (refiere a la información de otra tarea, sobre función implicada o datos implicados, pero no a la solución de otra tarea); Solución, además de información (refiere a la información de otra tarea, sobre función implicada o datos implicados, y además a la solución de otra tarea).
<i>Cuantificación de relación entre tareas.</i> Cantidad de tareas con las que se relaciona la tarea.	Sin modalidades debido a su carácter cuantitativo.
<i>Cerradura.</i> Explicitación en la tarea de lo que se da y/o se pide (adaptado; Moreno y Ramírez, 2016).	Cerrada (se concreta claramente lo que se da y lo que se pide); y Abierta (incertidumbre respecto a lo que se da, a lo que se pide, o a ambos).
<i>Tipo de tarea.</i> Tipo de tarea según complejidad y cerradura (Ponte, 2004).	Ejercicio (cerrada y fácil); Problema (cerrada y difícil); Proyecto (abierta y fácil); e Investigación (abierta y difícil).
<i>Recursos.</i> Material estrictamente necesario para resolver la tarea (adaptado; Moreno y Ramírez, 2016).	Lápiz y papel; Calculadora; Programas de cálculo simbólico; y Programa de representación gráfica.

Tabla 4.4. *Sistema final de categorías de análisis de tareas, otros aspectos.*

Categoría/Definición	Modalidad
<i>Observaciones.</i> Observaciones sobre cualquier aspecto de la tarea que no haya sido contemplado en las otras categorías y que sea de interés.	No se consideraron modalidades debido a su carácter general.

<i>Asignatura.</i> Asignatura en que se aplicó la prueba a la que pertenece la tarea.	MAT002-Cálculo I (se consideró elemental en caso de replicar este estudio diversas asignaturas).
<i>Periodo lectivo.</i> Periodo lectivo en el que se aplicó la prueba a la que pertenece la tarea.	2014 II ciclo; 2015 I ciclo; 2015 II ciclo; 2016 I ciclo; 2016 II ciclo; 2017 I ciclo; y 2017 II ciclo.
<i>Tipo de prueba.</i> Tipo de prueba a la que pertenece la tarea.	Parcial ordinaria; Parcial reposición; y Extraordinaria (esta última modalidad, finalmente no fue incluida en la presentación de resultados).
<i>Número de prueba.</i> Número de prueba a la que pertenece la tarea.	Primera; Segunda; Tercera; y Cuarta (tres primeras son parciales y cuarta extraordinaria).
<i>Cantidad de tareas.</i> Cantidad de tareas de prueba a la que pertenece la tarea.	Sin modalidades debido a su carácter cuantitativo.
<i>Puntaje total.</i> Valor total (en puntos) de la prueba a la que pertenece la tarea.	Sin modalidades debido a su carácter cuantitativo.
<i>Porcentaje.</i> Valor porcentual (respecto a la calificación final del curso) de la prueba a la que pertenece la tarea.	Sin modalidades debido a su carácter cuantitativo.
<i>Tiempo.</i> Tiempo (en horas) estimado para la resolución de la prueba a la que pertenece la tarea.	Sin modalidades debido a su carácter cuantitativo.

4.3. Cuantificación e interpretación

Para examinar cada tarea según cada categoría, utilizando las herramientas insertar tabla y lista desplegable para las modalidades, se construyó una matriz de 507 filas (encabezado y tareas) y 67 columnas (categorías) en hoja de cálculo de Microsoft Excel (ver Figura A.1 en Anexos), que se completó para un grupo de tareas a la vez (de una misma prueba), durante días consecutivos (descansos entre escrutinios de no más de ocho horas).

Por ejemplo (ver Figura 4.3), la lista de cada categoría y la modalidad asignada (entre paréntesis) para la tarea código MAT002-17-2-PB-PO-1-3 es: asignatura (MAT002-Cálculo I); periodo lectivo (2017 II ciclo); tipo de prueba (parcial ordinaria); número de prueba (primera); cantidad de tareas (9); puntaje total (52); porcentaje (35); tiempo (3); puntuación (5); tipo de relación entre tareas (ninguna); cuantificación de relación entre tareas (0); detalle del contenido (derivada por definición); contenido sobre cálculo de límites (no aplica); contenido sobre integral-técnica de integración (no aplica); unidad de contenido (derivación); tipo de explicitación del contenido (combinación términos y notaciones-palabras definición

y derivada, símbolo primera derivada); sistema de representación (verbal-simbólico); uso de imágenes (sin imagen); definición de la función (explícita); rasgos de función (constante y polinomio de primer grado); cuantificación de rasgos de función (2); operaciones de función (cociente); cuantificación de operaciones de función (1); uso de parámetros en la función (no); cuantificación de parámetros en la función (0); situación (científico exclusivo matemático); dirección (directo); tipo de respuesta (desarrollo); acción (usar); demanda cognitiva (procedimientos sin conexiones); complejidad (fácil); cerradura (cerrada); tipo de tarea (ejercicio); objetivo específico (desarrollar [aplicar] conceptos de cálculo); objetivo general (otro); recursos (lápiz y papel); observaciones (ninguna).

3. Considere la función f cuyo criterio es $f(x) = \frac{1}{3x+2}$. Haciendo uso de la definición de derivada, calcule $f'(x)$. (5 puntos)
--

Figura 4.3. Enunciado de tarea código MAT002-17-2-PB-PO-1-3

Para cuantificar tareas en cada modalidad y categoría, se usaron las herramientas tabla dinámica y gráfico dinámico. Se hicieron grupos, para identificar: (a) relaciones entre categorías, (b) tendencias según periodo lectivo, número de prueba y unidad de contenido.

4.4. Credibilidad y consistencia

Para respaldar la credibilidad de los resultados de este estudio, se construyó una bitácora de fechas, referencias, fuentes, ideas, decisiones, reflexiones, conflictos y modos en que se resolvieron (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

Además, para respaldar la consistencia de los resultados (interpretaciones congruentes de varios investigadores y/o en varios momentos; Hernández, Fernández y Baptista, 2014), se siguieron varias estrategias: (a) equipo de investigadores con conocimiento del contexto del problema de investigación, y/o experiencia docente y/o de investigación en el área (investigadora principal y tutor); (b) asesoría externa mediante consulta a profesores y/o investigadores colaboradores, también con conocimiento del contexto, y/o experiencia docente y/o de investigación en el área; y (c) dos meses después de haberse finalizado la fase de análisis, se duplicó, en una porción elegida aleatoriamente (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), del quince por ciento de unidades de análisis, determinándose un grado de coincidencia de 98,30% en general (98,05% en caso de categorías sobre contenido y su significado; 98,70% sobre cognición; 98,21% sobre estructura; y 98,36% sobre otros aspectos).

CAPÍTULO 5. RESULTADOS

A continuación, se describen y discuten los resultados obtenidos, en términos de las categorías de análisis de los tres temas señalados en el capítulo 4: aspectos del contenido matemático y su significado; aspectos cognitivos; y aspectos descriptivos-estructurales.

Los resultados se presentan y organizan de la siguiente manera: (a) número de pruebas parciales y tareas analizadas; y (b) distribución de tareas analizadas, agrupadas por número de prueba parcial, según categorías de análisis. Además, se señalan aspectos puntuales sobre los periodos contemplados y sobre casos particulares de tareas analizadas.

5.1. Número de pruebas parciales y tareas analizadas

Se analizaron las 42 pruebas parciales aplicadas en el curso, seis pruebas para cada uno de los siete periodos contemplados. En cada periodo, hubo dos pruebas (ordinaria y reposición) para cada número de prueba (primera, segunda y tercera). Se observó que la cantidad y la distribución de las pruebas parciales no varió entre periodos. Es decir, la evaluación se compuso de tres pruebas parciales, en todos los periodos.

Sin embargo, se observó que el número de tareas sí varió entre periodos, incluso varió entre número de prueba. En la Tabla 5.1 se observa que, en general y en cada periodo (excepto uno), la cantidad de tareas de las terceras pruebas parciales es menor.

Tabla 5.1. *Tareas según número de prueba parcial*

	2014 II	2015 I	2015 II	2016 I	2016 II	2017 I	2017 II	Total
Número de prueba	ciclo	ciclo	ciclo	ciclo	ciclo	ciclo	ciclo	
Primera prueba parcial	16	19	21	19	30	36	18	159
Segunda prueba parcial	22	23	25	16	20	23	20	149
Tercera prueba parcial	12	17	16	16	14	16	12	103
Total	50	59	62	51	64	75	50	411

Nota: Cada modalidad de número de prueba incluye dos pruebas: ordinaria y de reposición.

Debido a la disparidad hallada sobre la cantidad de tareas por prueba, a continuación, se presentan los resultados del análisis de tareas, agrupadas por número de prueba, en términos de porcentajes, excepto en algunos casos indicados.

5.2. Primera prueba parcial según categorías de análisis

En la primera prueba parcial, las tareas se distribuyeron en dos unidades de contenido: (a) límites y continuidad, y (b) derivación. En la Tabla 5.2 se observa: (a) la presencia de

ambas unidades en todos los periodos; (b) proporciones mayores de derivación en los primeros periodos; y (c) proporciones menores de derivación en los últimos.

Tabla 5.2. *Tareas de primera prueba parcial según unidad de contenido*

Unidad de contenido	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Límites y continuidad	37,50	47,37	47,62	42,11	66,67	69,44	55,56	55,35
Derivación	62,50	52,63	52,38	57,89	33,33	30,56	44,44	44,65

A continuación, se presentan las características de las tareas de esta prueba, agrupándolas por unidad de contenido.

5.2.1. Límites y continuidad, aspectos del contenido y su significado

En cuanto al detalle del contenido, en la Tabla 5.3 se observa que en todos los periodos hubo mayor proporción de tareas sobre cálculo de límites que sobre continuidad.

Tabla 5.3. *Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según detalle del contenido*

Detalle del contenido	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Cálculo de límites	66,67	77,78	80,00	75,00	90,00	92,00	80,00	84,09
Continuidad	33,33	22,22	20,00	25,00	10,00	8,00	20,00	15,91

Sobre cálculo de límites, en general, los tres tipos y/o técnicas más frecuentes fueron: al infinito con un 29,73%, unilaterales con un 28,38%, y trigonométricos por cambio de variable con un 10,81%. Además, en todos los periodos la proporción mayor fue de límites al infinito. Para más sobre tipos y/o técnicas para cálculo de límites, ver Tabla A.3 en Anexos.

Sobre cómo se hace explícito el contenido, en general, se presentó combinación de términos y notaciones específicas (palabra y símbolo de límite, en todo caso) en el 84,09% de las tareas; y solo uno o varios términos (continuidad, discontinuidad, función continua, función discontinua, discontinuidades, y discontinuidad evitable) en el 15,91%. Además, en todos los periodos la proporción de explicitación por combinación de términos y notaciones fue mayor. Para más sobre el tipo de explicitación ver Figura A.2 en Anexos.

Respecto al uso de sistemas de representación, en general, 68,18% de las tareas presentaron sistema verbal-simbólico, y 31,82% múltiple. Sin embargo, en la Figura 5.1 se observa que la representación múltiple únicamente se presentó (en mayor proporción) en dos periodos, pues en el resto de los periodos solo hubo representación verbal-simbólica.

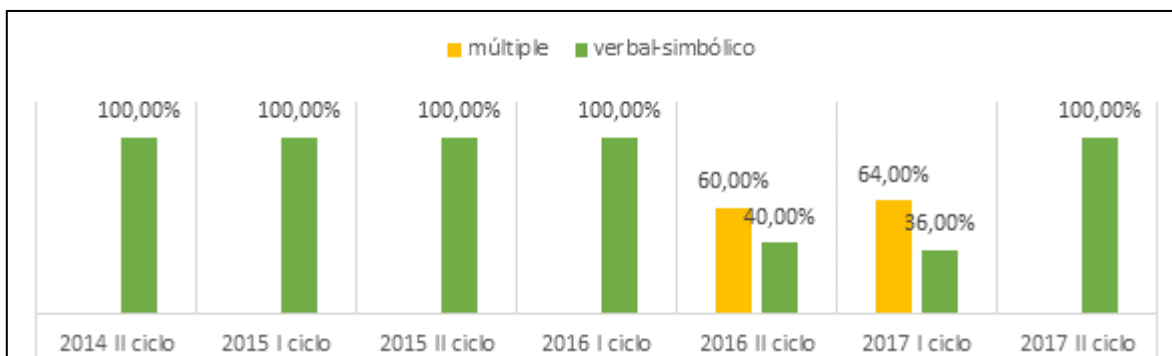


Figura 5.1. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según sistema de representación

Sobre el uso de imágenes, la distribución es igual que la de sistemas de representación (verbal-simbólico atañe a sin imagen, y múltiple a imagen funcional indispensable). Solo en dos periodos hubo tareas con imagen funcional indispensable, y en el resto de los periodos ninguna tarea presentó imagen. Para más sobre uso de imágenes ver Figura A.3 en Anexos.

Todas las tareas con representación múltiple presentaron imagen funcional indispensable. Sin embargo, solo ocurrió en dos periodos, y en el caso de límites. En 2016 II ciclo hubo 12 tareas de este tipo, y en 2017 I ciclo, 16. Una fue la tarea código MAT002-17-1-PB-PO-1-1-a (ver Figura 5.2). En ella (relacionada con siete tareas referidas a la misma gráfica), se utiliza representación verbal, simbólica y gráfica, e imagen indispensable.

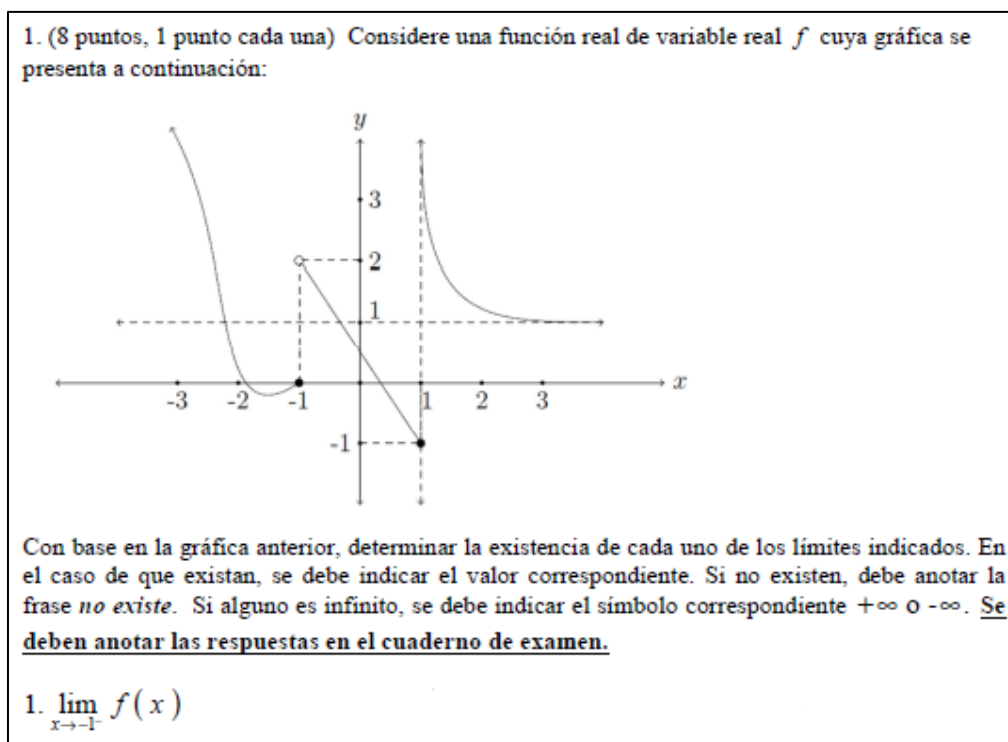


Figura 5.2. Enunciado de tarea código MAT002-17-1-PB-PO-1-1-a

Sobre características de las funciones presentadas: (a) 100% se definió explícitamente; y (b) 86,67% no presentó parámetros, 8,33% presentó un parámetro, y 5,00% presentó 2. Sin embargo, en dos periodos el 100% de las funciones no presentó parámetros, y en el resto, la proporción de tareas con funciones sin parámetros fue mayor. Para más sobre uso de parámetros y su cuantificación ver Figura A.4 en Anexos. Además, las funciones presentaron rasgos y operaciones (inclusive, varios(as) a la vez, en una misma función o en funciones diferentes de una misma tarea).

Sobre rasgos, en general, y en la mayoría de los periodos, los tres más frecuentes fueron polinomios (más frecuente de primer grado), constantes y monomios. Se dieron todos los tipos de rasgos, excepto logaritmo y trigonométrico inverso. La cantidad de rasgos fue cuantificada. En general, 16,67% de las tareas presentó uno, 41,67% dos, 38,33% tres, 1,67% cuatro y 1,67% cinco. En todos los periodos hubo dos o tres rasgos, y solo en dos, hubo más de tres. Para más sobre rasgos y su cuantificación ver Tabla A.4 y Figura A.5. en Anexos.

La mayor cantidad de rasgos en una misma tarea fue cinco. Una única tarea presentó cinco rasgos: tarea código MAT002-16-1-PB-PO-1-2 (ver Figura 5.3). Es sobre continuidad, y la función presenta los rasgos: constante, monomio, polinomios de primer y segundo grado, y trigonométrico. Además, presentó cinco operaciones a rasgos o entre rasgos: suma y/o resta, cociente, producto, composición y a trozos; y dos parámetros.

2. (5 pts) Determine, si es posible, los valores de las constantes a y b para que la función f sea continua en $\mathbb{R}$, con

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - bx & \text{si } x < 1 \\ \cos(x - 1) & \text{si } x = 1 \\ \frac{a \operatorname{sen}(\pi x) + b}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Figura 5.3. Enunciado de tarea código MAT002-16-1-PB-PO-1-2

Sobre las operaciones a rasgos o entre rasgos, en general, y en la mayoría de los periodos, las tres más frecuentes fueron cociente, composición y suma y/o resta. Se presentaron todos los tipos, excepto potencia de exponente entero negativo. La cantidad de operaciones también fue cuantificada. En general, 25,00% de las tareas presentó una operación, 18,33% dos, 28,33% tres, 8,33% cuatro y 1,67% cinco. En todos los periodos hubo tareas con una y con cuatro operaciones, y únicamente en uno, hubo con más de cinco. Para más sobre operaciones y su cuantificación ver Tabla A.5 y Figura A.6 en Anexos.

Por otra parte, todas las situaciones son de contexto científico exclusivo matemático.

5.2.2. Límites y continuidad, aspectos cognitivos

Respecto a la dirección en que se propone la realización de acciones, en general, 95,45% de las tareas propone acciones en sentido directo y el resto en sentido inverso. En la mitad de los periodos todas las tareas proponen acciones directas, y en el resto, la proporción de acciones directas es mayor. Para más sobre la dirección ver Figura A.7 en Anexos.

En cuanto al tipo de respuesta esperado, en general, se espera una respuesta de desarrollo en el 68,18% de los casos, y breve en el resto. Sin embargo, la respuesta breve solo se presentó (en mayor proporción) en dos periodos, pues en el resto de los periodos fue desarrollo. Para más sobre el tipo de respuesta ver Figura A.8 en Anexos.

Sobre la acción explícitamente solicitada en la tarea, en general, 43,18% propone calcular, 36,36% determinar, 10,23% hallar, 6,82% estudiar, y 3,41% analizar. En todos los periodos las acciones calcular, hallar y determinar se presentan en mayor proporción que analizar y estudiar. Para más sobre acción ver Figura A.9 en Anexos.

Sobre demanda cognitiva, en general, 81,82% de las tareas presentan demanda de tipo procedimiento sin conexiones y el resto de procedimiento sin conexiones, siendo nulas memorización y modelización. En la Figura 5.4 se observa que, en todos los periodos es mayor la proporción de tareas de procedimiento sin conexiones.

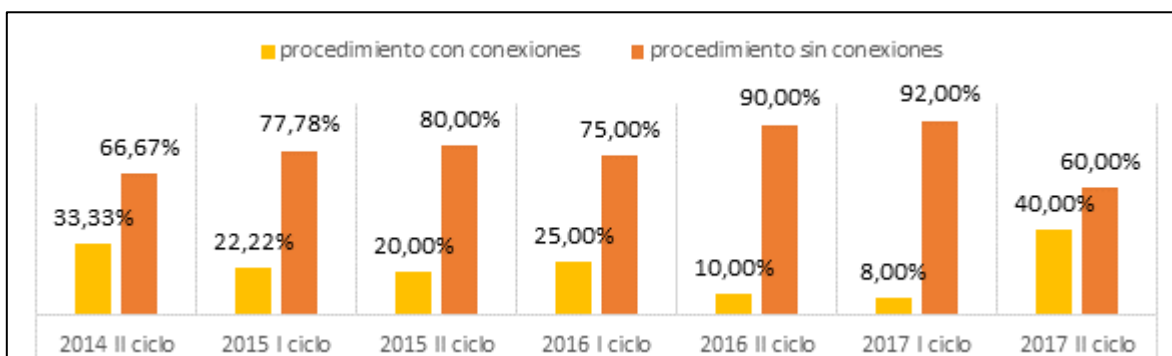


Figura 5.4. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según demanda cognitiva

Debido a que complejidad depende de demanda cognitiva (procedimiento con conexiones atañe a complejidad difícil y procedimiento sin conexiones a fácil), en este caso, sus distribuciones son iguales. En todos los periodos fue mayor la proporción de tareas fáciles. Para más sobre complejidad ver Figura A.10 en Anexos.

Sobre objetivos, ninguna tarea correspondió con el único objetivo general presente en los programas de todos los periodos: resolver problemas de aplicación usando conceptos del cálculo. Para más sobre objetivos generales y específicos ver Tabla A.6 y Tabla A.7 en Anexos.

5.2.3. Límites y continuidad, aspectos descriptivos-estructurales

Sobre aspectos descriptivos-estructurales: (a) sobre cerradura, todas las tareas son cerradas; (b) sobre recursos, en todas se requiere de lápiz y papel; y (c) sobre puntuación, 31,82% se valoraron con un punto, 10,23% con cuatro puntos, 15,91% con cinco, 13,64% con seis, 13,64% con siete, 10,23% con ocho, 2,27% con nueve, y 2,27% con 10 puntos. En la mayoría de los periodos hubo tareas de entre cuatro y ocho puntos (ambos inclusive). Para más sobre puntuación ver Figura A.11 en Anexos.

Sobre tipo de relación entre tareas, en general, 15,91% no se relacionan con otras, 59,09% comparten solo el enunciado, 20,45% comparten información (pero no solución) y 4,55% solución (además de información). Sin embargo, en todos los periodos (excepto uno) fue mayor la proporción de relación solo con enunciado. La cantidad de tareas con las que cada tarea se relaciona fue contabilizada. Se obtuvo un 4,55% que se relacionan con una sola, 25,00% con dos, 27,27% con tres, 13,64% con cinco, y 13,64% con siete. En la mayoría de los periodos hubo tareas relacionadas con dos tareas. Para más sobre relación entre tareas y su cuantificación ver Figura A.12 y Figura A.13 en Anexos.

Sobre tipo de tarea, en general, 81,82% son ejercicios, y el resto son problemas. En todos los periodos fue mayor la proporción de ejercicios. Tipo depende de cerradura y dificultad, así, en este caso, las distribuciones de tipo de tarea y dificultad coinciden (ejercicio atañe a fácil y problema a difícil). Para más sobre tipo de tarea ver Figura A.14 en Anexos.

5.2.4. Derivación, aspectos del contenido matemático y su significado

En cuanto al detalle del contenido, en la Tabla 5.4 se observan variaciones entre periodos, de presencia y proporciones de contenidos. Solo tres estuvieron en todos los periodos: derivación por teoremas; rectas tangente y normal; y derivación por definición.

Tabla 5.4. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según detalle del contenido

Detalle del contenido	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Derivación implícita	20,00	10,00	9,09	9,09	0,00	18,18	12,50	11,27
Derivación logarítmica	0,00	10,00	18,18	18,18	0,00	18,18	12,50	11,27
Derivación por teoremas	20,00	20,00	18,18	18,18	60,00	36,36	25,00	28,17
Derivada de orden superior	20,00	20,00	18,18	18,18	0,00	0,00	0,00	11,27
Derivada por definición	20,00	20,00	18,18	18,18	20,00	9,09	12,50	16,90
Rectas tangente y normal	20,00	20,00	18,18	18,18	20,00	18,18	25,00	19,72
Teorema de Rolle	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	12,50	1,41

Sobre cómo se hace explícito el contenido, en general, se presentó combinación de términos y notaciones específicas (palabras y símbolos derivada, y derivadas de orden superior) en el 28,17% de las tareas; solo uno o varios términos (definición, derivada, primera derivada, segunda derivada, tercera derivada, derivación implícita, tangente, punto de tangencia, normal, teorema de Rolle) en el 60,56%; y solo una o varias notaciones (símbolo de derivada, y derivada de orden superior) en el 11,27%. En la mayoría de los periodos es mayor la proporción de explicitación solo por términos, en uno es el 100%. Para más sobre el tipo de explicitación ver Figura A.15 en Anexos.

Respecto al uso de sistemas de representación, todas las tareas presentaron sistema verbal-simbólico. Y sobre el uso de imágenes, ninguna tarea no presentó imagen.

Sobre características de las funciones presentadas: (a) el 83,10% se definió explícitamente, y en todos periodos la proporción de funciones definidas explícitamente fue mayor; y (b) el 98,59% no presentó parámetros, pero en un solo periodo hubo alguna tarea con parámetros (dos parámetros, en todo caso). Para más sobre la definición de la función y sobre el uso de parámetros ver Figura A.16 y Figura A.17, respectivamente, en Anexos.

Una única tarea presentó parámetros, la tarea código MAT002-14-2-PB-PO-1-5-b (ver Figura 5.5). Es una tarea sobre derivación implícita, en la que la función presenta dos parámetros. Además, se explicita el contenido mediante combinación de términos y notaciones específicas: palabra derivada y símbolo de primera derivada de y respecto a x.

5. Calcular la derivada indicada en cada caso:

b) Si $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, hallar $\frac{dy}{dx}$. (4 puntos)

Figura 5.5. Enunciado de tarea código MAT002-14-2-PB-PO-1-5-b

Además, las funciones presentaron rasgos y operaciones (varios(as) a la vez, en una misma función o en funciones diferentes de una misma tarea). Sobre rasgos, en general, y en la mayoría de los periodos, los tres más frecuentes fueron polinomios (más frecuente de primer grado), monomios y constantes. Se presentaron todos los tipos. La cantidad fue cuantificada. En general, 18,31% de las tareas tuvo uno, 53,52% dos, 15,49% tres, 11,27% cuatro y 1,41% cinco. En todos los periodos hubo tareas con dos rasgos, y solo en uno, más de cuatro. Para más sobre rasgos y su cuantificación ver Tabla A.8 y Figura A.18 en Anexos.

Sobre operaciones a rasgos o entre rasgos, en general, y en la mayoría de los periodos, las tres más frecuentes fueron composición, cociente, y suma y/o resta. Se presentaron todos los tipos, excepto valor absoluto y a trozos. Los tipos de operaciones implican que, en el caso de derivación por teoremas, frecuentemente se propuso usar regla de la cadena, del cociente y del producto. La cantidad fue cuantificada. En general, 8,45% no presentó operaciones, 28,17% presentó una, 21,13% dos, 23,94% tres, 12,68% cuatro, 4,23% cinco, y 1,41% seis. En todos los periodos hubo una, dos y tres operaciones, y en uno solo, más de cinco. Para más sobre operaciones y su cuantificación ver Tabla A.9 y Figura A.19 en Anexos.

Por otra parte, todas las situaciones son de contexto científico exclusivo matemático.

5.2.5. Derivación, aspectos cognitivos

Respecto a la dirección en que se propone la realización de acciones, en general, el 80,28% propone sentido directo y el resto inverso. En todos los periodos la proporción de tareas de acciones directas fue mayor. Para más sobre dirección ver Figura A.20 en Anexos. Además, sobre el tipo de respuesta esperado, fue de desarrollo en todas las tareas.

Respecto a la acción explícitamente solicitada en la tarea, en general, 59,15% propone calcular, 15,49% usar, 11,27% hallar, 7,04% calcular, 5,49% verificar y 1,41% probar. En todos los periodos calcular se presenta en mayor proporción que el resto de las acciones. Para más sobre acción ver Figura A.21 en Anexos.

Una única tarea propuso probar, la tarea código MAT002-17-2-PB-PR-1-3 (ver Figura 5.6). Es sobre rectas tangentes, y se solicita probar la perpendicularidad, en un punto dado, de las rectas tangentes de dos curvas dadas. Se presupone el uso de derivada de una función en un punto como pendiente de la recta tangente a su curva en ese punto. Sin embargo, se explicita el contenido solo por el término rectas tangentes, sin señalar la derivación.

3. Pruebe que las rectas tangentes a las curvas $y = \frac{x^2 + 45}{x^2}$ y $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ en $x = 3$, son perpendiculares. (7 puntos)

Figura 5.6. Enunciado de tarea código MAT002-17-2-PB-PR-1-3

Sobre demanda cognitiva, en general, 78,87% de las tareas presentan demanda de tipo procedimiento sin conexiones y el resto de procedimiento con conexiones, siendo nulas memorización y modelización. En la Figura 5.7 se observa que en todos los periodos es mayor la proporción de tareas de procedimiento sin conexiones.

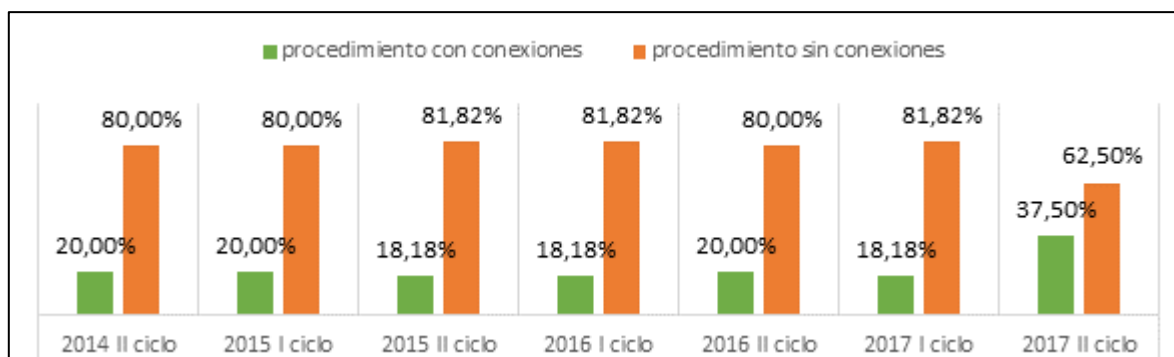


Figura 5.7. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según demanda cognitiva

Debido a que complejidad depende de demanda cognitiva (procedimiento con conexiones atañe a complejidad difícil y procedimiento sin conexiones a fácil), en este caso, sus distribuciones son iguales. En todos los periodos es mayor la proporción de tareas fáciles. Para más sobre complejidad ver Figura A.22 en Anexos.

Sobre objetivos, ninguna tarea trató el único objetivo general presente en los programas de todos los periodos: resolver problemas de aplicación usando conceptos del cálculo. Para más de objetivos generales y específicos ver Tabla A.10 y Tabla A.11 en Anexos.

5.2.6. Derivación, aspectos descriptivos-estructurales

Sobre aspectos descriptivos-estructurales: (a) sobre cerradura, todas son cerradas; (b) sobre recursos, en todas lápiz y papel; y (c) sobre puntuación, hubo 12,68% de cuatro puntos, 38,03% de cinco, 29,58% de seis, 11,27% de siete, y 8,45% de ocho. En todos los periodos hubo tareas de cinco y seis puntos. Para más de puntuación ver Figura A.23 en Anexos.

Sobre tipo de relación entre tareas, en general, 47,89% no se relaciona con otras, 46,48% comparten solo enunciado, y 5,63% información (pero no solución). Sin embargo, en la mayoría de los periodos las tareas se distribuyen entre tareas sin relación o con relación

solo por enunciado (en proporciones similares). La cantidad fue contabilizada. Se obtuvo 16,90% relacionadas con una sola, 29,58% con dos, y 5,63% con tres. En la mayoría de los periodos hubo tareas relacionadas con una y dos. Para más de relación entre tareas y su cuantificación ver Figura A.24 y Figura A.25 en Anexos.

Sobre tipo de tarea, en general, 78,87% son ejercicios, y el resto problemas. En todos los periodos fue mayor la proporción de ejercicios. Tipo de tarea depende de cerradura y dificultad, así, en este caso, las distribuciones de tipo de tarea y dificultad coinciden (ejercicio atañe a fácil y problema a difícil). Para más sobre tipo de tarea ver Figura A.26 en Anexos.

5.3. Segunda prueba parcial según categorías de análisis

En la segunda prueba parcial, las tareas se distribuyen en dos unidades de contenido: (a) derivación, y (b) aplicaciones de la derivada; excepto algunas sobre otros contenidos fuera de programa. En la Tabla 5.5 se observa: (a) presencia de derivación en un solo periodo; y (b) proporciones mayores de aplicaciones de la derivada en todos los periodos.

Tabla 5.5. *Tareas de segunda prueba parcial según unidad de contenido*

Unidad de contenido	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Otro	9,09	8,70	8,00	0,00	0,00	8,70	5,00	6,04
Derivación	0,00	0,00	0,00	0,00	25,00	0,00	0,00	3,36
Aplicaciones de la derivada	90,91	91,30	92,00	100	75,00	91,30	95,00	90,60

En cuanto al detalle del contenido, en el único periodo en que hay tareas sobre derivación, solo tratan derivación implícita, logarítmica y de orden superior. Esto permite suponer que, por alguna situación poco común, en ese periodo no se evaluaron todos los contenidos de derivación en la primera prueba, y parte de ellos fueron evaluados en segunda prueba. Por otra parte, en el caso de otros contenidos, todas las tareas son relacionadas con aplicaciones de la derivada para la construcción de gráficas de funciones, tratándose de determinación de dominio e intersecciones con ejes dado el criterio de una función.

Debido a que en la segunda prueba la inclusión de derivación y de otros contenidos es un hecho inusual no presentado en todos los periodos, a continuación, solo se presentan características de tareas sobre aplicaciones de la derivada.

5.3.1. Aplicaciones de la derivada, aspectos del contenido matemático y su significado

En cuanto al detalle del contenido, en la Tabla 5.6 se observa que en general y en todos los periodos hubo mayor proporción de tareas sobre regla de L'Hopital que sobre los demás contenidos. En general, los contenidos más frecuentes fueron regla de L'Hopital, razón de cambio, gráficas de funciones, optimización, y rectas asíntotas.

Tabla 5.6. *Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según detalle de contenido*

Detalle de contenido	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Concavidad	0,00	9,52	8,70	12,50	6,67	14,29	5,26	8,15
Cuadro de variación	10,00	9,52	8,70	0,00	0,00	9,52	5,26	6,67
Derivada de orden superior	0,00	0,00	0,00	0,00	6,67	0,00	0,00	0,74
Gráficas de funciones	10,00	9,52	8,70	12,50	13,33	9,52	10,53	10,37
Inflexión	10,00	0,00	4,35	0,00	0,00	0,00	5,26	2,96
Monotonía	10,00	9,52	4,35	12,50	6,67	9,52	5,26	8,15
Optimización	10,00	9,52	8,70	12,50	13,33	9,52	10,53	10,37
Puntos críticos	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	4,76	0,00	0,74
Razón de cambio	10,00	9,52	8,70	18,75	20,00	9,52	10,53	11,85
Rectas asíntotas	10,00	9,52	13,04	6,25	6,67	9,52	15,79	10,37
Regla de L'Hopital	20,00	23,81	26,09	25,00	26,67	19,05	21,05	22,96
Valores extremos	10,00	9,52	8,70	0,00	0,00	4,76	10,53	6,67

Sobre cómo se hace explícito el contenido, en general, se presentó combinación de términos y notaciones específicas (palabra y símbolo de límite, primera y segunda derivada) en el 22,95% de las tareas; solo uno o varios términos (palabras razón, cambio, derivada, primera derivada, segunda derivada, puntos críticos, máximos, mínimos, máximo relativo, mínimo relativo, extremos, puntos de inflexión, monotonía, creciente, decreciente, concavidad, cuadro de variación, gráfica, L'Hopital, límite, optimización, minimizar, maximizar, asíntotas, asíntota oblicua, asíntota horizontal, asíntota vertical) en el 74,81%; y solo una o varias notaciones específicas (símbolo de límite, primera y segunda derivada) en el 2,22%. En todos los periodos la proporción de explicitación por solamente términos fue mayor. Para más sobre el tipo de explicitación ver Figura A.27 en Anexos.

Respecto al uso de sistemas de representación, en general, 81,48% de las tareas presentan sistema verbal-simbólico, 15,56% solo verbal, y 2,96% verbal-geométrico. En la Figura 5.8 se observa que en todos los periodos fue mayor la proporción de representación verbal-simbólico, y que representación verbal-geométrica solo se presentó en tres periodos.

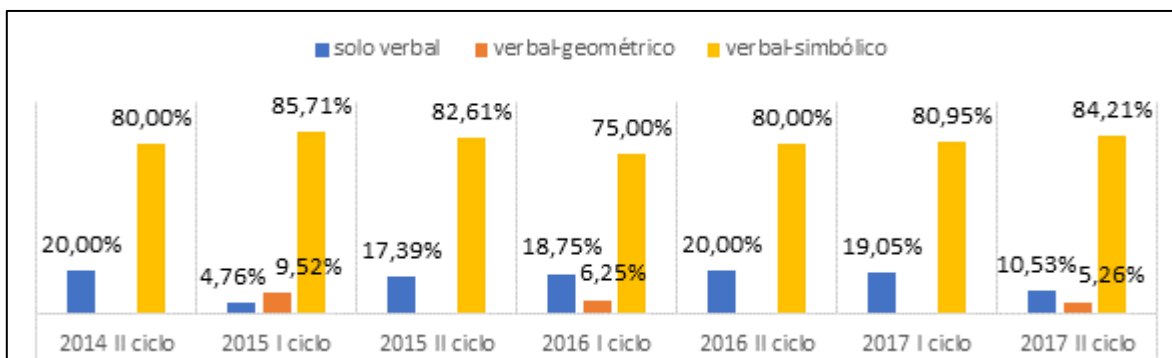


Figura 5.8. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según sistema de representación

Sobre uso de imágenes, en general, 96,30% de las tareas no presentaron imagen, 2,96% presentaron imagen funcional no indispensable, y 0,74% imagen funcional indispensable. Solo en tres periodos hay tareas con imagen, pues en el resto ninguna tarea presentó imagen. Para más sobre uso de imágenes ver Figura A.28 en Anexos.

Hubo tareas con imagen funcional no indispensable y representación verbal-geométrica. Sin embargo, solo en dos periodos: 2015 I ciclo y 2016 I ciclo; una en cada periodo. Una fue la tarea código MAT002-16-1-PB-PO-2-6 (ver Figura 5.9). En ella se presenta un problema de optimización, mediante texto y figura. Sin embargo, la figura coincide con una frase del enunciado: “forma rectangular con una semicircunferencia en su parte superior”. La figura es funcional pero no indispensable para resolver. Además, supone demanda cognitiva de tipo modelización y presenta una situación de tipo científico-tecnológico no exclusivo matemático. Es un ejemplo de las 23 tareas (todas de segunda prueba y aplicaciones de la derivada) en que el contexto no fue exclusivamente matemático.

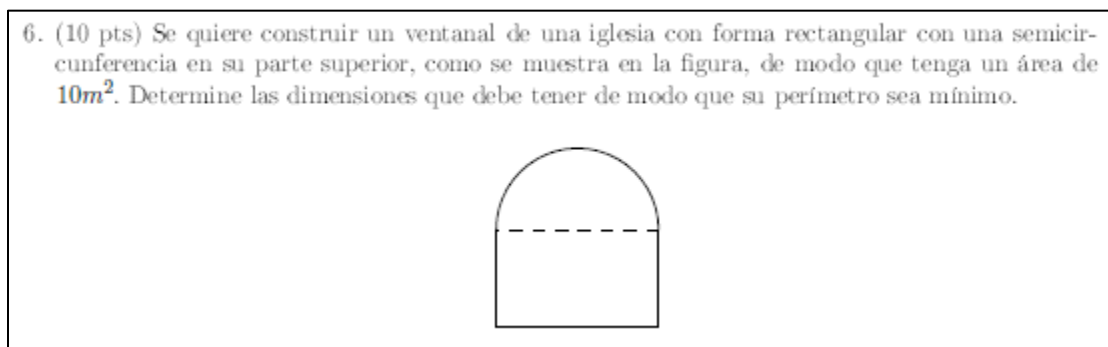


Figura 5.9. Enunciado de tarea código MAT002-16-1-PB-PO-2-6

Sobre características de las funciones presentadas: (a) el 99,05% se definió explícitamente, pero en solo un periodo hubo funciones definidas implícitamente; y (b) el

88,89% no presentó parámetros, 0,93% presentó uno, 4,63% dos, 3,70% tres, y 1,85% cuatro. En todos los periodos la proporción sin parámetros fue mayor. Para más sobre la definición de la función y uso de parámetros ver Figura A.29 y la Figura A.30, respectivamente, en Anexos. Además, las funciones presentaron rasgos y operaciones (varios(as) a la vez, en una misma función o en funciones diferentes de una misma tarea).

Sobre rasgos, en general, y en la mayoría de los periodos, los tres más frecuentes fueron polinomios (más frecuente de segundo grado), monomios y constantes. Hubo rasgos de todos los tipos. La cantidad fue cuantificada. En general, 5,71% presentaron un rasgo, 27,62% dos, 46,67% tres, 14,29% cuatro, y 5,71% cinco. En todos los periodos hubo tareas de tres o cuatro rasgos, y en solo uno, de más de cuatro. Para más sobre rasgos y su cuantificación ver Tabla A.12 y Figura A.31 en Anexos.

Sobre las operaciones a rasgos o entre rasgos, en general, y en la mayoría de los periodos, las tres más frecuentes fueron cociente, composición y producto. Se presentaron todos los tipos, excepto valor absoluto y a trozos. La cantidad fue cuantificada. En general, 5,71% no presentaron operaciones, 21,90% una, 33,33% dos, 14,29% tres, 22,86% cuatro, y 1,90% cinco. En todos los periodos hubo tareas con tres operaciones, y solo en dos, con más de cuatro. Para más de operaciones y su cuantificación ver Tabla A.13 y Figura A.32 en Anexos.

La mayor cantidad de operaciones presentada en una misma tarea fue cinco. Sin embargo, esto se dio solo en dos periodos: 2015 II ciclo y 2016 I ciclo; una en cada periodo. Una fue la tarea código MAT002-15-2-PB-PR-2-1-b (ver Figura 5.10). Presenta un ejercicio sobre cálculo de límites mediante uso de la regla de L'Hopital (el uso de la regla no es explicitado en el enunciado). En la función hay cinco operaciones: potencia de exponente entero positivo, suma y/o resta, cociente, producto y composición; aplicadas a (o entre) tres rasgos: monomio, exponencial y trigonométrica. La resolución mediante el uso de la regla, en consideración de las operaciones presentadas, supone el uso de reglas de derivación del producto, de la suma y/o resta, y de la cadena.

1. Calcule los siguientes límites.

b) (5 pts.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - x}{\sin^2(2x)}$

Figura 5.10. Enunciado de tarea código MAT002-15-2-PB-PR-2-1-b

Por otra parte, sobre situaciones, en general, el 82,96% de las tareas presentó contexto científico exclusivo matemático, y el resto científico-tecnológico exclusivo no matemático (sobre almacenamiento, fluidos, construcción, arquitectura, diseño, costos, agricultura, proyectiles, sombras, y transporte en automóvil, tren o barco). En la Figura 5.11 se observa que en todos los periodos fue mayor la proporción de tareas científico exclusivo matemáticas.

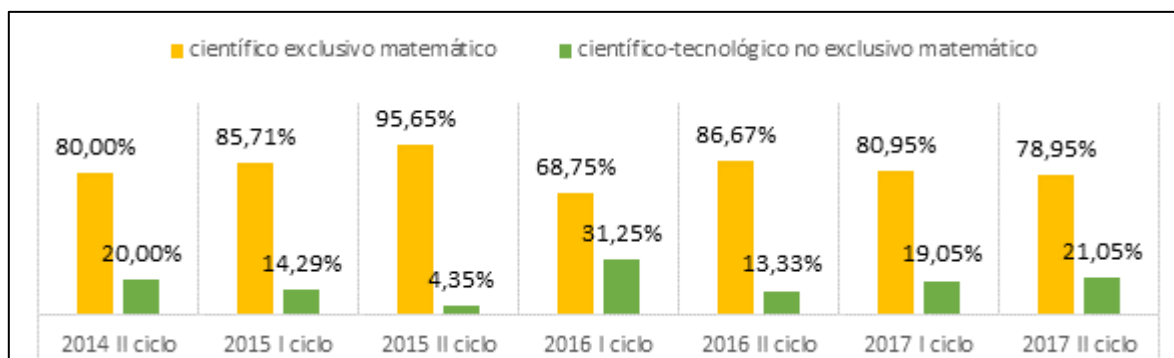


Figura 5.11. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según situación

5.3.2. Aplicaciones de la derivada, aspectos cognitivos

Respecto a la dirección de las acciones, en general, el 63,70% de las tareas propone acciones directas y el resto inversas. En todos los periodos la proporción de tareas directas es mayor o igual que la de inversas. Para más sobre dirección ver Figura A.33 en Anexos. Sobre tipo de respuesta esperado, fue de desarrollo en todas.

Sobre la acción explícitamente solicitada, en general, 43,70% propone determinar, 18,52% resolver, 17,04% calcular, 9,63% trazar, 4,44% hallar, 2,22% usar, 2,22% verificar, 1,48% justificar, y 0,74% explicar. En todos los periodos (excepto uno), determinar se presenta en mayor proporción. Para más sobre acción ver Figura A.34 en Anexos.

Sobre demanda cognitiva, en general, 65,93% de las tareas presenta demanda de tipo procedimiento sin conexiones, 22,22% de modelización, y 11,85% de procedimiento con conexiones, siendo nula memorización. En todos los periodos fue mayor la proporción de procedimiento sin conexiones, y menor la de procedimiento con conexiones (ver Figura 5.12).

Debido a que complejidad depende de demanda cognitiva (procedimiento con conexiones y modelización atañen a complejidad difícil y procedimiento sin conexiones a fácil), en este caso, la distribución de complejidad es similar a la de demanda cognitiva. En general, 65,93% correspondió a tareas fáciles y el resto a difíciles. En la mayoría de los

periodos fue mayor la proporción de tareas fáciles, y en un solo periodo fue mayor la de difíciles. Para más sobre complejidad ver Figura A.35 en Anexos.

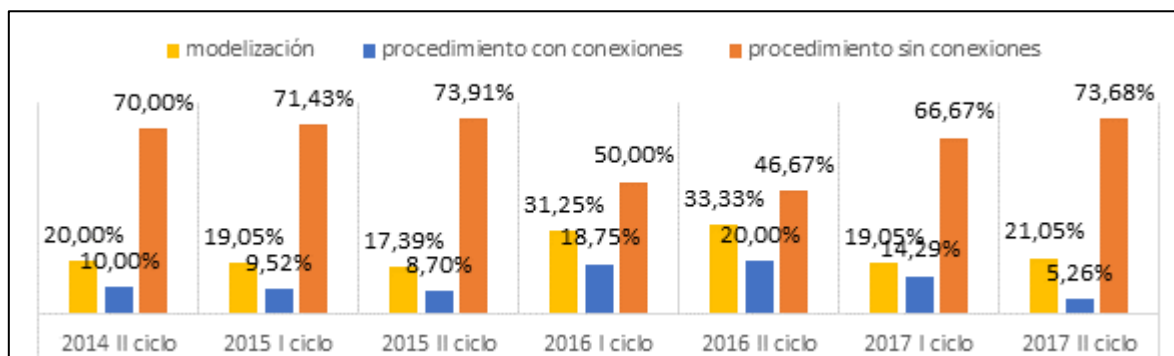


Figura 5.12. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según demanda cognitiva

Sobre objetivos, en la Tabla 5.7 se observa que, en todos los periodos, excepto uno, hubo tareas sobre el único objetivo general dado en todos los programas: resolver problemas de aplicación usando conceptos del cálculo. Sin embargo, en todos los casos fueron menos de una tercera parte. Para más sobre objetivos específicos ver Tabla A.14 en Anexos.

Tabla 5.7. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según objetivo general

Objetivo general	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo
Otro	80	86	100	69	0	81	79
Resolver problemas de aplicación usando conceptos del cálculo	20	14	0	31	13	19	21
Aplicar conceptos del cálculo	NA	NA	NA	NA	87	NA	NA

Nota: NA=No aplica, indica que el objetivo no pertenece al programa de curso del periodo respectivo.

5.3.3. Aplicaciones de la derivada, aspectos descriptivos-estructurales

Sobre aspectos descriptivos-estructurales: (a) sobre cerradura, todas las tareas son cerradas; (b) sobre recursos, en todas se requiere lápiz y papel; y (c) sobre puntuación, 6,67% fueron de un punto, 17,04% de dos, 14,81% de tres, 8,15% de cuatro, 17,04% de cinco, 11,85% de seis, 8,15% de siete, 5,93% de ocho, y 10,37% de diez. En todos los periodos hubo tareas de cinco y seis puntos. Para más sobre puntuación ver Figura A.36 en Anexos.

Sobre tipo de relación entre tareas, en general, 20,74% no se relacionan, 28,89% comparten solo enunciado, 34,81% comparten información (pero no solución) y 15,56% solución (además de información). En todos los periodos cerca de una tercera parte comparte información (pero no solución), mientras que las proporciones del resto de tipos de relaciones

varía de un periodo a otro. La cantidad de relaciones fue contabilizada. Se obtuvo que un 31,11% se relacionan con una, 8,15% con dos, 2,96% con tres, 3,70% con cuatro, 14,81% con cinco, y 18,52% con seis. En todos los periodos hubo tareas relacionadas con una sola. Para más de relaciones entre tareas y su cuantificación ver Figura A.37 y Figura A.38 en Anexos.

Sobre tipo de tarea, en general, 65,93% son ejercicios y el resto problemas. En la mayoría de los periodos fue mayor la proporción de ejercicios, en solo uno la proporción de problemas fue mayor. Tipo de tarea depende de cerradura y dificultad, por lo que, en este caso, la distribución de tipo de tarea es igual que la de dificultad (ejercicio atañe a fácil y problema a difícil). Para más sobre el tipo de tarea ver Figura A.39 en Anexos.

5.4. Tercera prueba parcial según categorías de análisis

En la tercera prueba parcial, las tareas se distribuyeron en dos unidades de contenido: (a) integración, y (b) aplicaciones de la integral; excepto algunas tareas sobre otros contenidos fuera del programa. En la Tabla 5.8 se observa: (a) presencia de ambas unidades a través del tiempo; y (b) proporciones mayores de integración en todos los periodos.

Tabla 5.8. *Tareas de tercera prueba parcial según unidad de contenido*

Unidad de Contenido	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Otro	0,00	5,88	0,00	18,75	7,14	18,75	0,00	7,77
Integración	66,67	64,71	62,50	68,75	78,57	68,75	83,33	69,90
Aplicaciones de la integral	33,33	29,41	37,50	12,50	14,29	12,50	16,67	22,33

En cuanto al detalle del contenido, en el caso de otros, las tareas son sobre (a) separación de fracciones parciales y división de polinomios, y (b) construcción de gráficas de rectas y parábolas. Son tareas relacionadas con integración de racionales (en el primer caso), y con cálculo de áreas entre rectas y/o parábolas (en el segundo caso).

Debido a que en la tercera prueba la inclusión de otros contenidos es un hecho inusual no presentado en todos los periodos, a continuación, se presentan características de las tareas agrupándolas por unidad de contenido, solo de integración y aplicaciones de la integral.

5.4.1. Integración, aspectos del contenido matemático y su significado

Sobre el detalle del contenido, en la Tabla 5.9 se observa que en todos los periodos hubo mayor proporción de tareas sobre integral indefinida que sobre integral definida.

Tabla 5.9. *Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según detalle del contenido*

Detalle del contenido	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Integral definida	0,00	9,09	20,00	18,18	18,18	9,09	20,00	13,89
Integral indefinida	100,00	90,91	80,00	81,82	81,82	90,91	80,00	86,11

Sobre las técnicas de integración, en general, las tres más frecuentes fueron: sustitución con un 26,39%, sustitución trigonométrica con un 22,22%, y por partes con un 19,44%. Además, en la mayoría de los periodos la proporción mayor fue de sustitución. Para mayor detalle las técnicas de integración, ver Tabla A.15 en Anexos.

Sobre cómo se hace explícito el contenido, en general, se presentó combinación de términos y notaciones específicas (símbolo de integral, en todos los casos, junto con palabras integral definida, integral, cambio de variable, Weierstrass, sustitución) en el 87,50% de las tareas, y solo una o varias notaciones (símbolo de integral, en todo caso) en el 12,50%. En tres periodos todas las tareas presentaron combinación de términos y notaciones, y en el resto, tal proporción fue mayor. Para más sobre el tipo de explicitación ver Figura A.40 en Anexos.

Respecto al uso de sistemas de representación, todas las tareas fueron presentadas mediante sistema verbal-simbólico. Y, sobre el uso de imágenes, ninguna presentó imagen.

Sobre algunas de las características de las funciones presentadas en las tareas: (a) el 100% se definió explícitamente; y (b) el 95,83% no presentó parámetros, 2,78% presentó uno, y 1,39% presentó dos. En cinco periodos ninguna función presentó parámetros, y en el resto, tal proporción fue mayor. Para más sobre uso de parámetros ver Figura A.41 en Anexos.

Además, las funciones presentaron rasgos y operaciones (varios(as) a la vez, en una misma función o en funciones diferentes de una misma tarea). Sobre rasgos, en general, y en la mayoría de los periodos, los tres más frecuentes fueron polinomio (más frecuente de segundo grado), monomio, y trigonométrico. Se presentaron todos los tipos, excepto trigonométrico inverso. La cantidad fue cuantificada. En general, 29,17% de las tareas presentaron uno, 51,39% dos, 16,67% tres, y 2,78% cuatro. En todos los periodos (excepto uno) hay tareas con uno, dos o tres rasgos, y en solo uno, con más de tres. Para más sobre rasgos y su cuantificación ver Tabla A.16 y Figura A.42 en Anexos.

Sobre operaciones, en general, y en la mayoría de los periodos, las tres más frecuentes fueron composición, cociente y producto. Se presentaron todos los tipos, excepto valor absoluto y a trozos. La cantidad fue cuantificada. En general, 1,39% no presentó operaciones,

18,06% presentó una, 23,61% dos, 23,61% tres, 27,78% cuatro, y 5,56% cinco. En todos los periodos hubo tareas con dos, tres o cuatro operaciones, y en tres, hubo tareas con más de cuatro. Para más sobre operaciones y su cuantificación ver Tabla A.17 y Figura A.43 en Anexos.

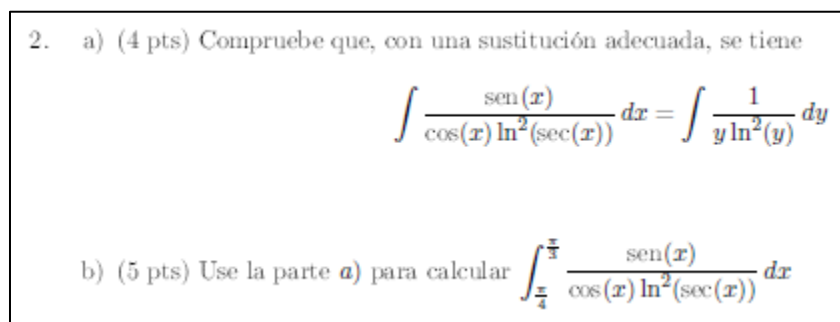
Por otra parte, todas las situaciones son de contexto científico exclusivo matemático.

5.4.2. Integración, aspectos cognitivos

Respecto a la dirección en que se propone la realización de acciones, en todas se propuso directa. Además, respecto al tipo de respuesta esperado, en todas fue de desarrollo.

Sobre acción explícitamente solicitada, en general, 88,89% propone calcular, 6,94% verificar, y 4,17% usar. En cuatro periodos todas las tareas proponen calcular, y en el resto, la proporción de calcular es mayor. Para más sobre acción ver Figura A.44 en Anexos.

Sobre integración, se presentaron únicamente tres tareas sobre usar y cinco sobre verificar. Dos tareas relacionadas entre sí, una en la que se propone usar y otra en la que se propone verificar (comprobar) son las tareas códigos MAT002-16-2-PB-PR-3-2-a y MAT002-16-2-PB-PR-3-2-b, respectivamente (ver Figura 5.13). En la tarea código MAT002-16-2-PB-PR-3-2-a se propone una integral indefinida, para la que se sugiere la técnica de sustitución (se explicita en el enunciado), y se muestra el resultado de la sustitución. En la tarea código MAT002-16-2-PB-PR-3-2-b se propone una integral definida, en la que se sugiere usar el resultado de la tarea previa. El uso del resultado implica que para resolver la integral definida debe considerarse el cambio de los límites de integración, y la forma en que se redacta el enunciado, sugiere que no es válido resolverla usando otra estrategia.



2. a) (4 pts) Compruebe que, con una sustitución adecuada, se tiene

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x) \ln^2(\sec(x))} dx = \int \frac{1}{y \ln^2(y)} dy$$

b) (5 pts) Use la parte a) para calcular $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x) \ln^2(\sec(x))} dx$

Figura 5.13. Enunciados de tareas códigos MAT002-16-2-PB-PR-3-2-a, MAT002-16-2-PB-PR-3-2-b

Sobre demanda cognitiva, en general, 97,22% de las tareas demandan procedimiento sin conexiones y el resto de procedimiento con conexiones, siendo nulas memorización y modelización. Sin embargo, en seis periodos todas las tareas son de procedimientos sin conexiones, y en el otro, tal proporción fue por mucho mayor (ver Figura A.45 en Anexos).

Solo dos tareas sobre integración presentaron demanda cognitiva procedimiento con conexiones (por lo tanto, fueron catalogadas como las únicas dos tareas difíciles y de tipo problema, de la unidad), ambas en 2017 II ciclo y ambas con presencia de parámetros. Una fue la tarea código MAT002-17-2-PB-PO-3-1 (ver Figura 5.14). Precisamente, la presencia de un parámetro implica realizar el procedimiento de integración, además de considerando los aspectos relacionados con la técnica apropiada, estableciendo conexión respecto a la naturaleza del parámetro n y a su comportamiento en el proceso. Además, la tarea se caracteriza por referirse a una integral definida.

1. Si n es un número entero positivo, calcule (6 pts.) $\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen}(nx) \, dx$
--

Figura 5.14. Enunciado de tarea código MAT002-17-2-PB-PO-3-1

Debido a que complejidad depende de demanda cognitiva (procedimiento con conexiones atañe a complejidad difícil y procedimiento sin conexiones a fácil), en este caso, sus distribuciones son iguales. En seis periodos todas las tareas fueron fáciles, y en el otro, tal proporción fue mayor. Para más sobre complejidad ver Figura A.46 en Anexos.

Sobre objetivos, ninguna tarea trató el único objetivo general presente en los programas de todos los periodos: resolver problemas de aplicación usando conceptos del cálculo. Para más de objetivos generales y específicos ver Tabla A.18 y Tabla A.19 en Anexos.

5.4.3. Tareas sobre integración, aspectos descriptivos-estructurales

Sobre aspectos descriptivos-estructurales: (a) sobre cerradura, todas las tareas son cerradas; (b) sobre recursos, en todas se requiere de lápiz y papel; y (c) sobre puntuación, 2,78% fueron valoradas con cuatro puntos, 19,44% con cinco, 36,11% con seis, 18,06% con siete, 15,28% con ocho, y 8,33% con diez. En la mayoría de los periodos hubo tareas de entre cinco y ocho (ambos inclusive). Para más sobre puntuación ver Figura A.47 en Anexos.

Sobre tipo de relación entre tareas, en general, 6,94% no se relacionan con otras, 83,33% comparten solo enunciado, y 9,72% comparten información (pero no solución). Sin embargo, en tres periodos todas las tareas comparten solo enunciado, y en el resto, tal proporción es mayor. La cantidad de relaciones fue contabilizada. Se obtuvo 6,94% de tareas que se relacionan con una sola, 11,11% con dos, 38,89% con tres, 27,78% con cuatro, y

8,33% con cinco. En la mayoría de los periodos hubo tareas relacionadas con otras tres, inclusive en uno de ellos, la proporción fue 100%. Para más sobre relaciones entre tareas y su cuantificación ver Figura A.48 y Figura A.49 en Anexos.

Sobre tipo de tarea, en general, 97,22% son ejercicios, y el resto problemas. En seis periodos la proporción de ejercicios fue 100%, y en el otro, tal proporción fue mayor. Tipo de tarea depende de cerradura y dificultad, por lo que, en este caso, la distribución de tipo de tarea es igual que la de dificultad (ejercicio atañe a fácil y problema a difícil). Para más sobre el tipo de tarea ver Figura A.50 en Anexos.

5.4.4. Aplicaciones de la integral, aspectos del contenido matemático y su significado

En cuanto al detalle del contenido, en la Tabla 5.10 se observa que solo en los primeros tres periodos hubo tareas sobre sólidos de revolución, y que en restantes el 100% de las tareas trataron cálculo de áreas entre curvas. Esto coincide con que luego de los tres primeros periodos los programas de curso no incluyeron sólidos de revolución.

Tabla 5.10. *Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según detalle del contenido*

Detalle del contenido	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Áreas	50,00	40,00	33,33	100,00	100,00	100,00	100,00	60,87
Sólidos de revolución	50,00	60,00	66,67	0,00	0,00	0,00	0,00	39,13

Sobre las técnicas de integración, en general, solo se presentaron dos: directa con 95,65%, y sustitución trigonométrica con 4,35%. Sin embargo, solo en un periodo hubo tareas con sustitución trigonométrica, pues en el resto todas fueron de integración directa. Para más sobre tipos y/o técnicas para el cálculo de límites, ver Tabla A.20 en Anexos.

Sobre cómo se hace explícito el contenido, en todas las tareas se hizo solamente a través de uno o varios términos (área, volumen y sólido de revolución).

Respecto al uso de sistemas de representación, en general, 91,30% presentaron sistema verbal-simbólico, 4,35% solo verbal, y 4,35% múltiple. Sin embargo, en la Figura 5.15 se observa que en cinco periodos la representación verbal-simbólica fue exclusiva, mientras que solo en un periodo hubo representación múltiple. Sobre el uso de imágenes, en general, 95,65% de las tareas no presentó imagen, y el resto presentó imagen funcional no indispensable. Pero, solo en un periodo se presentó imagen funcional indispensable. Para más sobre uso de imágenes ver Figura A.51 en Anexos.

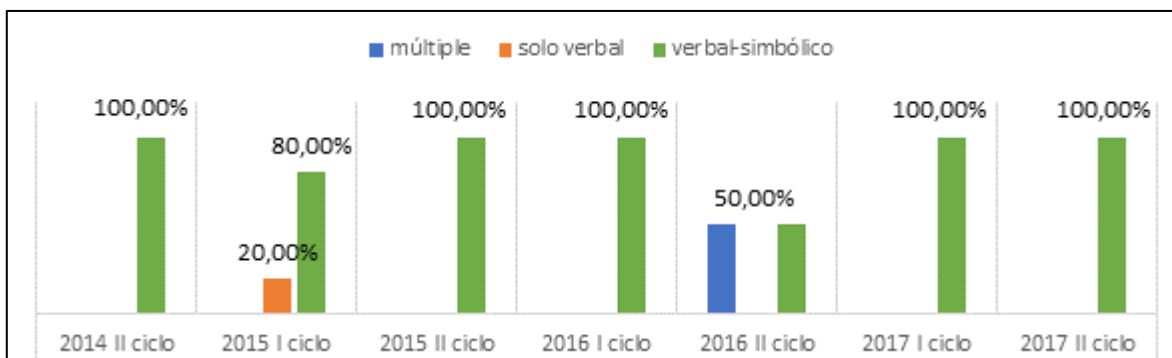


Figura 5.15. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según sistema de representación

Sobre características de las funciones: (a) el 95,65% se define explícitamente, y el resto implícitamente; y (b) ninguna tarea tuvo parámetros. Sin embargo, en un único periodo hubo definición implícita. Para más sobre definición de la función ver Figura A.52 en Anexos.

Una única tarea sobre aplicaciones de la integral incluyó una función definida implícitamente. La tarea código MAT002-17-2-PB-PR-3-2 (ver Figura 5.16), sobre cálculo de área entre curvas, presentó una función definida explícitamente y otra implícitamente.

2. Calcular el área de la región de la figura limitada por las curvas $y = 2 - x^2$, y $y^3 = x^2$. (8 pts.)

Figura 5.16. Enunciado de la tarea código MAT002-17-2-PB-PR-3-2

Además, las funciones presentaron rasgos y operaciones (varios(as) a la vez, en una misma función o en funciones diferentes de una misma tarea). Sobre rasgos, en general, y en la mayoría de los periodos, los tres más frecuentes fueron polinomios (frecuentes de segundo grado), constante y monomio. No hubo otro tipo de rasgo. La cantidad fue cuantificada. En general, 39,13% presentaron uno, 47,83% dos, y 13,04% tres. En la mayoría de los periodos hubo funciones con uno o dos rasgos, y únicamente en tres periodos, más de dos. Para más sobre rasgos y su cuantificación ver Tabla A.21 y Figura A.53 en Anexos.

Sobre operaciones, en general, y en la mayoría de los periodos, solo se presentaron: potencia exponente racional (no entero), cociente, producto y composición. La cantidad fue cuantificada. En general, 65,22 % no presentó operaciones, 30,43% presentó una, y 4,35% dos. En la mayoría de los periodos hubo tareas con una operación, y en solo uno, con más de una. Para más sobre operaciones y su cuantificación ver Tabla A.22 y Figura A.54 en Anexos.

Por otra parte, todas las situaciones son de contexto científico exclusivo matemático.

5.4.5. Aplicaciones de la integral, aspectos cognitivos

Respecto a dirección en que se propone la realización de acciones, se propuso directa exclusivamente. Además, sobre tipo de respuesta esperada, fue de desarrollo en todo caso.

Sobre la acción explícitamente solicitada, en general, 78,26% propone calcular, 17,39% determinar, y 4,35% verificar. En la mayoría de los periodos se propone calcular y/o determinar, y solo en uno verificar. Para más sobre acción ver Figura A.55 en Anexos.

Sobre demanda cognitiva, todas las tareas demandan procedimiento con conexiones. Debido a que complejidad depende de demanda cognitiva (procedimiento con conexiones atañe a complejidad difícil), las distribuciones son iguales y todas las tareas fueron difíciles.

Sobre objetivos, ninguna tarea correspondió con el único objetivo general de los programas de todos los periodos: resolver problemas de aplicación usando conceptos del cálculo. Para más de objetivos generales y específicos ver Tabla A.23 y Tabla A.24 en Anexos.

5.4.6. Aplicaciones de la integral, aspectos descriptivos-estructurales

Sobre aspectos descriptivos-estructurales: (a) sobre cerradura, el 100% de las tareas son cerradas; (b) sobre recursos, en todas se requiere de lápiz y papel; y (c) sobre puntuación, 4,35% fueron valoradas con cuatro puntos, 17,39% con cinco, 39,13% con seis, 21,74% con siete, 4,35% con ocho, 4,35% con nueve, y 8,70% con diez. En la mayoría de los periodos hubo tareas de seis o siete puntos. Para más sobre puntuación ver Figura A.56 en Anexos.

Sobre tipo de relación entre tareas, en general, 89,61% no se relacionó, ninguna comparte solo enunciado, 8,70% comparte información (pero no solución), y 8,70% solución (además de información). En cinco periodos todas las tareas no poseen relación. La cantidad de relaciones fue contabilizada. Se obtuvo 17,39% relacionadas con una, y ninguna con más. Para más de relaciones entre tareas y su cuantificación ver Figura A.57 y Figura A.58 en Anexos.

Solo cuatro tareas se relacionaron, solo dos (de sólidos de revolución) en información (no solución): MAT002-15-1-PB-PO-3-3-a y MAT002-15-1-PB-PO-3-3-b (ver Figura 5.17).

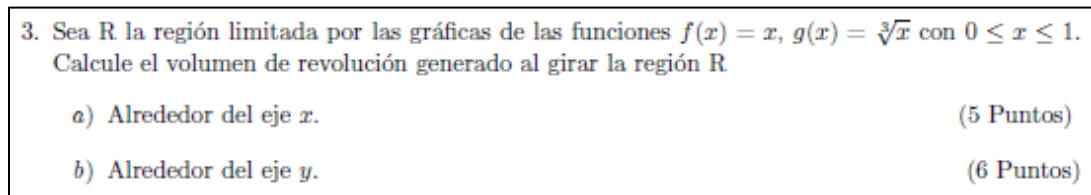


Figura 5.17. Enunciados de tareas códigos MAT002-15-1-PB-PO-3-3-a, MAT002-15-1-PB-PO-3-3-b

Debido a que todas las tareas son cerradas y difíciles, todas fueron problemas.

CAPÍTULO 6. RESUMEN Y CONCLUSIONES

A continuación, en términos consecución de objetivos planteados, antecedentes, referentes teóricos y resumen de resultados, se establecen las conclusiones generales de este estudio. Además, se describen limitaciones y se propone continuidad de investigación afín.

6.1. Conclusiones generales

El objetivo general de este estudio fue caracterizar, a través del análisis de sus tareas, las pruebas escritas parciales de la asignatura MAT002Cálculo I que se impartió en la EMUNA de 2014 a 2017. Para su alcance se analizaron 411 tareas de 42 pruebas escritas parciales aplicadas del II ciclo 2014 al II ciclo 2017 y se plantearon tres objetivos específicos. Con el primero se pretendió identificar rasgos que permitieran describir las tareas de las pruebas. Con el segundo, describir las tareas en términos de sus rasgos. Y con el tercero, señalar diferencias y similitudes según prueba, unidad de contenido y periodo.

Al respecto del primer objetivo específico, mediante revisión de literatura se identificaron las características: relación entre apartados y contenido (Herrera, 2017); explicitación del contenido (Jiménez, 2017); sistema de representación, puntuación y tipo de función (Herrera, 2017; Jiménez, 2017); situación y capacidad requerida (OCDE, 2016); meta, abierta/cerrada, complejidad y recursos (Moreno y Ramírez, 2016); tipo de tarea (Ponte, 2004); directo/inverso (Martínez-Luaces, 2017); demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998); y uso de imágenes (Brändström, 2005). El análisis progresivo de las tareas, en consideración de las características, permitió la generación de un sistema de categorías de análisis: (a) fundamentado en la literatura, pero adaptado a la naturaleza de los datos; (b) cuyas categorías y modalidades están definidas de manera precisa, y toman en consideración tres tipos de aspectos: del contenido y su significado; cognitivos; y descriptivos-estructurales (Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo, 2018; Rico, 2016). Así, los rasgos identificados (en términos de categorías y modalidades) que permiten describir las tareas componentes de las pruebas escritas se resumen en la Figura 6.1.

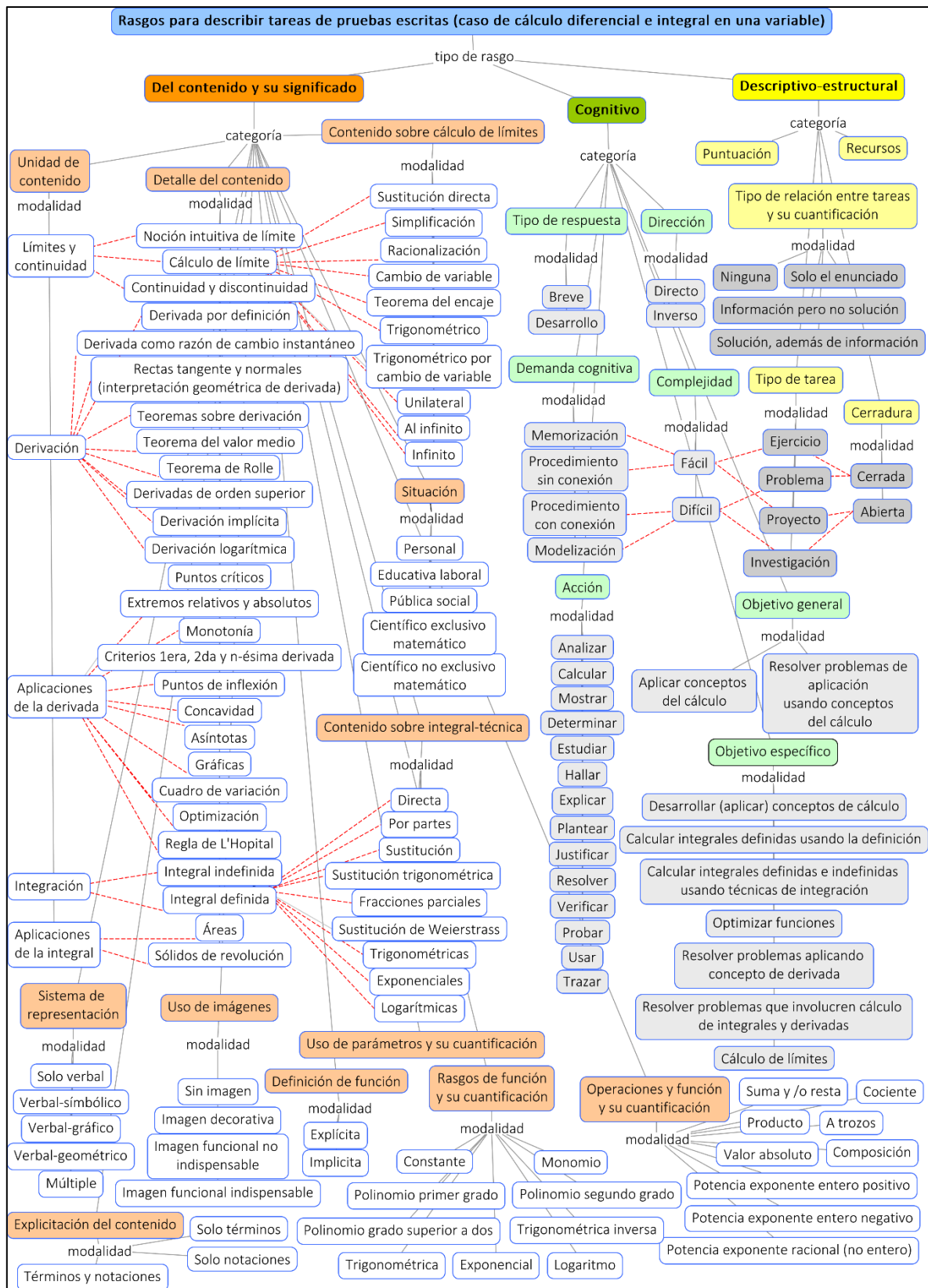


Figura 6.1. Rasgos identificados que permiten describir las tareas componentes de las pruebas escritas. Fuente: Elaboración propia.

Sobre segundo y tercer objetivo específico, las tareas se agruparon por número de prueba. En Figura 6.2, Figura 6.3, y Figura 6.4 se describen las tareas de cada prueba. Además, las tareas se clasificaron según unidad de contenido. Esto coincide con Rico (2016) en cuanto es usual la organización disciplinar (según objeto y procedimientos) de los contenidos (manifestado en su programa, y en este caso en las pruebas escritas).

Sobre contenido y significado: (a) cada prueba contempla (focos conceptuales prioritarios, según Rico, 2016) ciertos temas: límites y continuidad y derivación en la primera, aplicaciones de la derivada en la segunda, integración y aplicaciones de la integral en la tercera, pero la variedad en las estructuras conceptuales cambia entre pruebas: conceptos y cálculos en la primera, mientras que en segunda y tercera conceptos, cálculos mayoritariamente (coincidiendo con Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo, 2018; Jiménez, 2017; y Ordóñez y Contreras; 2011) y uso en problemas; (b) en cada prueba hay términos y notaciones específicas (coincidiendo con Balcaza, Contreras y Font; 2017), diferentes sistemas de representación, verbal simbólico predominante (coincidiendo con Jiménez, 2017) y limitado uso de imágenes (coincidiendo con Brändström; 2005); (c) en todas las pruebas las situaciones son científicas (coincidiendo con Giacomone, Loría, Solera y Ruiz-Hidalgo, 2015; Balcaza, Contreras y Font, 2017; Jiménez, 2017; y Boal, Bueno, Lerís y Sein-Echaluce, 2008; pero discrepando con Aires y Esteves, 2012), exclusivo matemáticas en primera y tercera, y no exclusivo matemáticas en segunda; (d) en cada prueba las funciones presentan diferentes tipologías: definidas explícita e implícitamente, mayormente sin uso de parámetros, cantidad variable de rasgos y operaciones (de menor a mayor: primera, segunda, tercera), variedad de rasgos y operaciones (de menor a mayor: segunda, primera, tercera).

Sobre cognición: (a) en las tres pruebas hay objetivos mayormente sobre aplicar conceptos y hacer cálculos (a pesar del objetivo general mayormente presente en programas: resolver problemas de aplicación), (b) variedad de acciones (de menor a mayor: segunda, primera, tercera), (c) mayor presencia de procesos directos en las tres pruebas (exclusivos, en la tercera), (d) respuestas esperadas mayormente de desarrollo en todas las pruebas (breves, solo en primera), (e) variedad (coincidiendo con Brändström; 2005; Ruiz de Gauna, Sarasua y García, 2011; y Jiménez y Montero; 2013) de niveles de demanda cognitiva (de menor a mayor: segunda, tercera, primera), que se traducen en complejidad fácil mayormente (pero, con presencia de difícil en las tres pruebas).

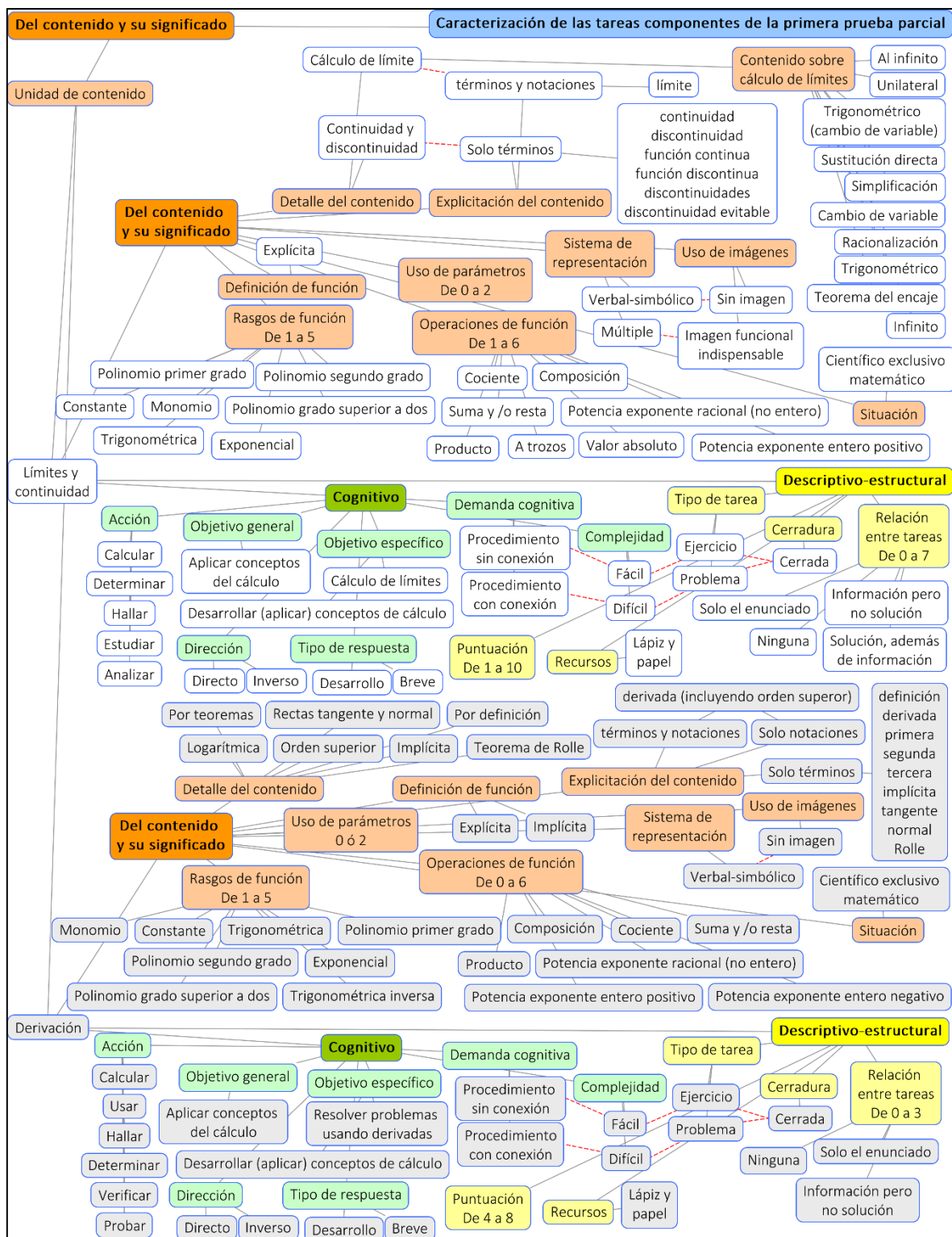


Figura 6.2. Caracterización de tareas de primera prueba parcial. Las modalidades de cada categoría se presentan ordenadas de menor a mayor porcentaje de aparición en los datos según las posiciones arriba-izquierda, derecha-izquierda, abajo-izquierda, abajo-derecha. Fuente: elaboración propia.

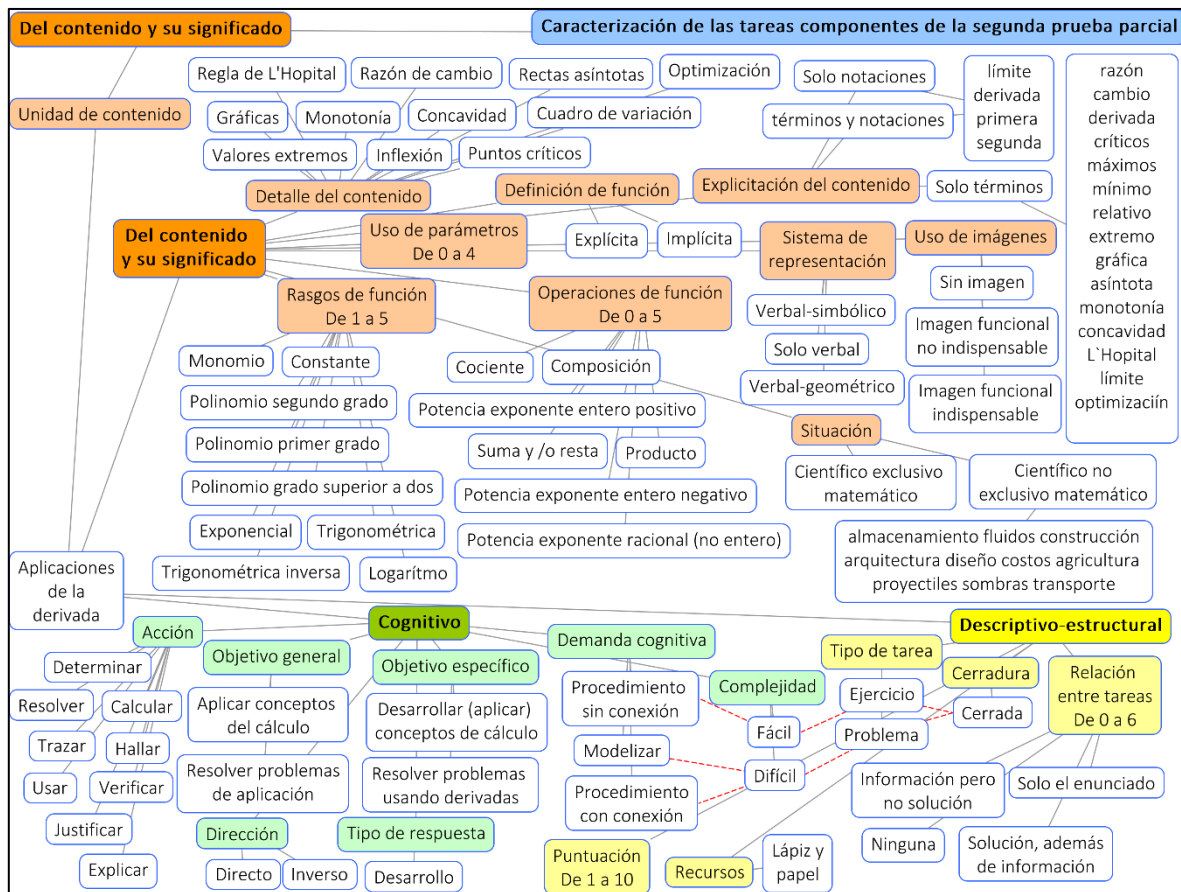


Figura 6.3. Caracterización de tareas de segunda prueba parcial. Las modalidades de cada categoría se presentan ordenadas de menor a mayor porcentaje de aparición en los datos según las posiciones arriba-izquierda, derecha-izquierda, abajo-izquierda, abajo-derecha. Fuente: elaboración propia.

Sobre descripción y estructura: (a) en las tres pruebas es mayor la presencia de ejercicios que de problemas (exclusividad de tareas cerradas); (b) presencia de relación entre tareas en las tres pruebas (de menor a mayor: tercera, primera, segunda); (c) cantidades variables en cuanto a puntuación (de menor a mayor: segunda, primera, tercera).

Así, mediante el análisis de las tareas, se logró caracterizar las pruebas. Segovia (2016) destaca criterios de expertos para la selección de tareas de evaluación, según lo discutido, las tareas analizadas: (a) poseen *relevancia práctica* pues abarcan significados prioritarios establecidos en los programas, pero abarcan en menor medida expectativas de aprendizaje establecidas como objetivo general; (b) poseen *coherencia* parcial pues en ocasiones se imponen explícita o implícitamente técnicas de solución; (c) sobre *rango de respuestas posibles, extensión y valor*, el desarrollo es poco condicionante, y hay presencia de diferentes niveles de pensamiento (incluso superior); (d) los *modos de trabajar* no se adaptan a un ambiente usual de trabajo, pues se propone individualismo y no cooperación.

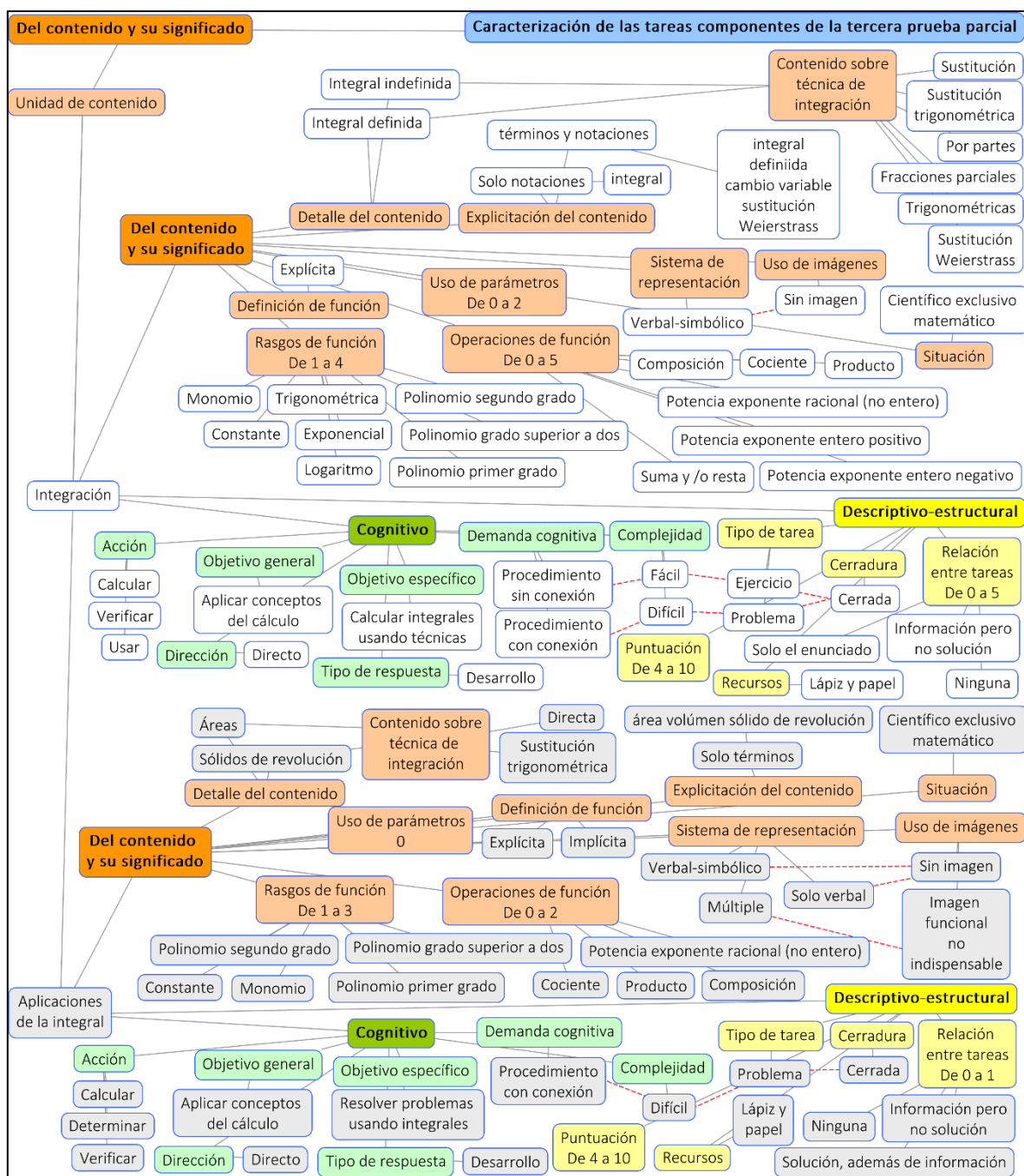


Figura 6.4. Caracterización de tareas de tercera prueba parcial. Las modalidades de cada categoría se presentan ordenadas de menor a mayor porcentaje de aparición en los datos según las posiciones arriba-izquierda, derecha-izquierda, abajo-izquierda, abajo-derecha. Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, sobre el tercer objetivo, las tareas, agrupadas por prueba y unidad de contenido, fueron analizadas agrupándolas por periodo lectivo. Se halló que la mayoría de los rasgos de las tareas no variaron destacablemente entre periodos, lo que indica cierto grado de constancia de la caracterización de las pruebas y tareas, a través del tiempo. Sin embargo,

se destacan aspectos singulares de algunos periodos, que resaltan la posibilidad de cambios entre periodos (coincidiendo con Ruiz de Gauna, 2010; González y Sierra, 2004; López-Martín, Contreras, Carretero y Serrano, 2016; y Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo, 2017). Como los cambios no se mantienen en el tiempo, podría suponerse que no se deben a nuevas políticas de evaluación claras y formales, si no a otras causas circunstanciales.

En el caso de la primera prueba: (a) las proporciones de unidades de contenido se invirtieron en los últimos periodos (siendo mayor límites y continuidad); (b) presencia (y mayor cantidad) de tareas relacionadas en aspectos diferentes al enunciado, respuesta esperada breve, representación múltiple y presencia de imágenes solo en II 2016 y I 2017; (c) presencia de mayor cantidad de rasgos y operaciones de funciones en I y II 2016. En el caso de la segunda prueba: (a) explicitación del contenido exclusivamente por medio de notaciones solo en I y II 2016; (b) uso de imágenes y representación no verbal-simbólica en I 2015, I 2016 y II 2017; (c) mayor cantidad de parámetros y operaciones de función en I y II 2016; presencia de acciones como justificar, usar o verificar exclusivamente en I y II 2016, I 2017); (d) proporciones similares de procesos directos/inversos, de tareas fáciles/difíciles, de ejercicios/problemas en I y II 2016. Y, en el caso de la tercera prueba: (a) menor proporción de tareas sobre aplicaciones en los últimos periodos; (b) presencia de explicitación del contenido solo por notaciones solamente en los últimos periodos; (c) mayor cantidad de rasgos y operaciones en II 2016 y I 2017; (d) presencia de acciones como usar y verificar exclusivamente en I y II 2016 y I 2017; (e) presencia de procedimientos con conexiones, tareas difíciles, y problemas solo en II 2017; (f) eliminación de tareas sobre sólidos de revolución en los últimos periodos; (g) presencia de una técnica de integración distinta a la directa, en el caso de aplicaciones, solo en I 2017; (h) presencia de sistema de representación múltiple e imágenes solo en II 2016.

6.2. Limitaciones y continuidad

Una limitación enfrentada en este estudio fue la extensión limitada de este informe. El planteamiento inicial del problema de interés abarcaba la totalidad de pruebas escritas aplicadas en la asignatura, y a pesar de que se recolectaron y analizaron todas las tareas (506 tareas) de todas las pruebas (49 pruebas), los resultados presentados en este informe abarcan solamente 411 tareas de 42 pruebas parciales. Las pruebas extraordinarias fueron excluidas

porque el grado de detalle del análisis llevado a cabo (gran cantidad y variedad de categorías de análisis) impedía mostrar los resultados de estas pruebas también.

Por lo anterior, se propone, como continuidad de este estudio, la consideración del análisis de tareas componentes de las pruebas extraordinarias, de manera que su caracterización pueda, incluso, compararse con el de las pruebas parciales. Se propone, además, el análisis de tareas de pruebas escritas de otras asignaturas de matemática a nivel universitario y de diferentes contextos geográficos y temporales. De manera que los resultados también puedan ser contrastados.

Además, se propone, como continuidad de investigación afín, la generación de un índice cualitativo de dificultad de una tarea matemática y de una prueba escrita. Para ello, se propone considerar el sistema de rasgos para describir tareas, identificado en este estudio, y considerado aporte manifiesto de este trabajo (incluyendo el detalle de características de las funciones matemáticas presentes en las tareas, como aspecto considerable en el análisis de estas). Este índice podría ser contrastado experimentalmente (de acuerdo con las necesidades señaladas por Fan, 2013; y Tzur, Zaslavsky y Sullivan, 2008) con el índice cuantitativo de dificultad basado en la proporción de estudiantes que responden correctamente una tarea (mientras mayor sea, más fácil se considera la tarea), señalado por Moreno (2016). Un índice cualitativo basado en aspectos que el profesor de matemáticas puede considerar antes de evaluar, le permitiría hacer adaptaciones intencionales, a diferencia del índice cuantitativo, que da información luego de aplicada la evaluación y que, además, puede afectarse por factores externos al diseño (v.g. factores afectivos y motivacionales de los resolutores).

REFERENCIAS

- Aires, A., y Esteves, A. (2012). Las derivadas: análisis del libro de texto de la enseñanza secundaria en Portugal con sus primeras aplicaciones. *Épsilon. Revista de Educación Matemática*, 29(3), 9-22.
- Asamblea Legislativa (1957). *Ley N° 2160-Ley Fundamental de Educación*, del 6 de junio de 2017. Costa Rica: autor.
- Balcaza, T., Contreras, Á., y Font, V. (2017). Análisis de Libros de Texto sobre la Optimización en el Bachillerato. *Bolema*, 31(59), 1061-1081.
- Boal, N., Bueno, C., Lerís, M. D., y Sein-Echaluce, M. L. (2008). Las habilidades matemáticas evaluadas en las pruebas de acceso a la universidad. Un estudio en varias universidades españolas. *Revista de Investigación Educativa*, 26(1), 11-23.
- Boesen, J., Lithner, J., y Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational studies in mathematics*, 75(1), 89-105.
- Brändström, A. (2005). *Differentiated Tasks in Mathematics Textbooks An analysis of the levels of difficulty* (Licenciate thesis). Luleå University of Technology, Sweden.
- Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. New York: Routledge.
- Díaz-Levicoy, D., Parraguez, R., y Sánchez, J. C. (2015). Gráficas y tablas estadísticas en la Prueba de Selección Universitaria chilena. *Premisa*, 17(65), 27-43.
- EMUNA (2013). *Acuerdo N° AA-003-03-2013 de Asamblea de Académicos Ampliada en Sesión Ordinaria N° 03-2013*, del 9 de octubre de 2013.
- EMUNA (2018). *Programa general del curso de servicio MAT002 Cálculo I*.
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM Mathematics Education*, 45, 765–777.
- Fernández-Plaza, J. A. (2016). Análisis de contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 103-118). Madrid: Ediciones Pirámide.

- Flores, P., y Lupiáñez, J. L. (2016). Expectativas de aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 177-194). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Frege, A. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84-111). Madrid: Tecnos.
- Giacomone, B., Loría, J. R., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Solera, M. (2015). Análisis de tareas relacionadas con las nociones de límite y continuidad de funciones en libros de texto españoles. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (p. 557). Alicante: Universidad de Alicante.
- Giménez, J., Font, V., y Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 581-590). Oxford: Proceedings of ICMI Study 22.
- Gómez, P., y Romero, I. (2015). Enseñar las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 61-88). Madrid: Ediciones Pirámide.
- González, M. T., y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), 389–408.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación*. Ciudad de México: McGraw Hill.
- Herrera, M. E. (2017). *Análisis de las tareas de las pruebas de acceso a la universidad: Matemáticas II, 2016* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.
- Herrera, M., Velasco, M., y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2017). Comparando textos de Cálculo: el caso de la derivada. *PNA*, 11(4), 280-306.
- Jiménez, A. (2017). *Significados de la derivada en las pruebas de evaluación de bachillerato para el acceso a la universidad* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.
- Jiménez, K., y Montero, E. (2013). Aplicación del modelo de Rasch, en el análisis psicométrico de una prueba de diagnóstico en matemática. *Revista Digital Matemática*, 13(1), 1-24.

- Jones, D. L., y Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 4–27.
- Kilpatrick, J. (1998). Valoración de la investigación en didáctica de las matemáticas: más allá del valor aparente. En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática* (pp. 17-31). Bogotá: Una empresa docente.
- López-Martín, M., Contreras, J. M., Carretero, M., y Serrano, L. (2016). Análisis de los problemas de probabilidad propuestos en las pruebas de acceso a la Universidad en Andalucía. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (9), 65-84.
- Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 119-138). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M., y Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325–334). Málaga: SEIEM.
- Martínez-Luaces, V. (2017). *Estrategias de profesores en formación para la invención de problemas inversos y enriquecimiento de tareas matemáticas destinadas a alumnos de enseñanza secundaria* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.
- Meza, L., y Agüero, E. (2014). Evaluación de los aprendizajes en la educación media: características técnicas de las pruebas escritas en matemática. *Revista Digital Matemática*, 14(2), 1-12.
- Ministerio de Educación Pública (2012). *Programa de Estudios. Educación Primaria, General Básica y Diversificada. Matemáticas*. Costa Rica: autor.
- Moreno, A. (2016). Rendimiento escolar, criterios e instrumentos. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 329-348). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Moreno, A., y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 243-258). Madrid: Ediciones Pirámide.
- OECD. (2013). *PISA 2015 draft mathematics framework*. París: OECD Publishing.

- OECD. (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematic and financial literacy*. París: OECD Publishing.
- Ordóñez, L., y Contreras, Á. (2011). La integral definida en bachillerato: restricciones institucionales de Pruebas de Acceso a la Universidad. En M. Marín, et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 461-470). Ciudad Real: SEIEM.
- Özgeldi, M., y Esen, Y. (2010). Analysis of mathematical tasks in Turkish elementary school mathematics textbooks. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 2277-2281.
- Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.
- Ramírez, R., y Moreno, A. (2016). Complejidad y estructura de las tareas escolares. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 259-274). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 39-63.
- Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (33), 11-27.
- Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Romero (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 85-100). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Rico, L., Castro, E., y Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. En J. Beltrán (Ed.), *Intervención psicopedagógica y currículum escolar* (pp. 153-182). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Rico, L., y Moreno, A. (Eds.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Robert, A., y Schwarzenberger, R. (1991). Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 127-139). Dordrecht: Kluwer Publishers.

- Ruiz de Gauna, J. (2010). *La enseñanza de las matemáticas del bachillerato, los libros de texto y las pruebas de acceso a la UPV-EHU (1970-2008)* (Tesis doctoral). Universidad del País Vasco, España.
- Ruiz de Gauna, J., Sarasua, J., y García, J. M. (2011). Una tipología y clasificación de los ejercicios de matemáticas de selectividad. *Épsilon*, 28(78), 21-38.
- Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139-151). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2016). Oportunidades para el aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 209-224). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Segovia, I. (2016). Evaluación en matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 309-328). Madrid: Ediciones Pirámide.
- Selden, A., y Selden, J. (2005). Perspectives on advanced mathematical thinking. *Mathematical thinking and learning*, 7 (1), 1-13.
- Smith, M. S., y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(5), 344-350.
- Stein, M. K., Grover, B., y Henningsen, M. (1996). Building students' capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 455-488.
- Swan, M. (2006). *Collaborative Learning in Mathematics: A Challenge to Our Beliefs and Practices*. London: National Institute of Adult Continuing Education.
- Tall, D. (Ed.). (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Publishers.
- Tzur, R., Zaslavsky, O., y Sullivan, P. (2008). Examining teachers' use of (non-routine) mathematical tasks in classrooms from three complementary perspectives: teacher, teacher educator, researcher. En O. Figueras, et al. (Eds.), *Mathematical Ideas: History, Education, and Cognition* (pp. 121-124). Morelia: IGPME.
- Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A., y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). *Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de derivada*. Manuscrito presentado para su publicación.

ANEXOS

Tabla A.1. *Sistema preliminar de categorías de análisis, definiciones y modalidades.*

Categoría	Modalidad
<i>Puntuación.</i> Valor de la tarea en términos de la cantidad de puntos asignados (Herrera, 2017; Jiménez, 2017).	Sin modalidades debido a su carácter cuantitativo.
<i>Relación entre apartados.</i> Cantidad de apartados con los que se relaciona una tarea, debido a que tales apartados se refieren a una misma función, o a la aplicación de un resultado enunciado anteriormente (Herrera, 2017).	Sin modalidades debido a su carácter cuantitativo.
<i>Contenido.</i> Temática específica de la tarea (Herrera, 2017).	Continuidad; Cálculo de límites; Asíntotas; Derivabilidad; Derivación; Extremos, máximos y mínimos; Monotonía; Curvatura; Puntos de inflexión; Recta tangente; Teorema de Rolle; Teorema del Valor Medio; Teorema de Bolzano; Representación gráfica; Optimización; Integración; Cálculo de áreas; Puntos de corte; Dominio; Simetría; Regla de la cadena; Teorema Fundamental del Calculo Integral; Función que modeliza; y Teorema del Valor Intermedio.
<i>Explicitación del contenido.</i> Uso de algún término que comparte raíz léxica o de notación específica del contenido (Jiménez, 2017).	Sí; No.
<i>Sistema de representación.</i> Categoría definida como el tipo de sistema de representación utilizado en la tarea (Herrera, 2017; Jiménez, 2017).	Verbal; Simbólico; Gráfico; Tabular; Geométrico; Pictórico; y Múltiple.
<i>Tipo de función.</i> Tipo de función matemática al que se hace referencia en la tarea (Herrera, 2017; Jiménez, 2017).	Polinómico; Potencia de exponente negativo; Potencia de exponente racional; Fracción algebraica; Exponencial; Logarítmico; Trigonométrico; Valor absoluto; Producto; Cociente; Composición; y A trozos.
<i>Situación.</i> Categoría definida como el tipo de contexto de la tarea (OCDE, 2016).	Personal; Educativa o laboral; Pública; y Científico-tecnológica.
<i>Meta.</i> Categoría definida como el tipo de expectativa que el autor prevé sobre la acción que se ejecuta al resolver la tarea (Moreno y Ramírez, 2016).	Aplicar un procedimiento; Razonar y argumentar; Representar gráficamente; Aplicar una definición; Aplicar un teorema; Realizar una demostración; Enunciar un teorema; Enunciar una regla; Enunciar una definición; y Modelizar.

<i>Abierta/cerrada.</i> Tipo de concreción manifestado en la tarea (Moreno y Ramírez, 2016).	Cerrada (se concreta claramente aquello que se solicita y la información dada); y Abierta (incertidumbre respecto a lo que se solicita o a la información).
<i>Complejidad.</i> Dificultad de la tarea (Moreno y Ramírez, 2016).	Reproducción (exigen repetición de conocimientos descritos); Conexión (requieren relacionar representaciones de una misma situación o enlazar diferentes aspectos); y Reflexión (uso de mayor número de elementos, exigen generalizaciones, explicaciones, razonamientos más complejos y justificación de resultados).
<i>Tipo de tarea.</i> Tipo de tarea según su complejidad y su apertura (Ponte, 2004).	Ejercicio (cerrada y fácil); Problema (cerrada y difícil); Proyecto (abierta y fácil); e Investigación (abierta y difícil). Se considera fácil o difícil según grado de éxito o fracaso previsto en la resolución según condiciones supuestas para resolutor y contexto.
<i>Directo/Inverso.</i> Tipo de orientación en las acciones esperadas (Herrera, 2017).	Directo (induce a la realización de acciones y procedimientos para la obtención de resultados no conocidos de antemano); e Inverso (induce a un procedimiento inverso para determinar la función o ciertos parámetros que satisfagan ciertas condiciones dadas inicialmente).
<i>Recursos.</i> Materiales que se pueden utilizar para resolver la tarea (Moreno y Ramírez, 2016).	Lápiz y papel; Calculadoras; y Programas de cálculo simbólico y de representación gráfica.
<i>Observaciones.</i> Observaciones sobre cualquier aspecto de la tarea que no haya sido contemplado en las otras categorías y que sea de interés.	No se consideraron modalidades debido a su carácter general.

Tabla A.2. *Modificaciones y creaciones, del sistema de categorías preliminar al sistema final*

Categoría	Motivo
<i>Relación entre apartados</i> (modificada-se llamó <i>Tipo de relación entre tareas</i>) y <i>Cuantificación de relación entre tareas</i> (creada)	Recolectar información sobre el tipo de relación entre las tareas, y no solamente sobre la cantidad de relaciones.
<i>Contenido</i> (modificada-se llamó <i>Detalle del contenido</i>)	Recolectar información sobre el contenido específico tratado en la tarea, pero contemplando los contenidos detallados en el programa de curso.
<i>Contenido sobre cálculo de límites</i> (creada)	Recolectar información detallada sobre el tipo de estrategia utilizada para el cálculo y/o el tipo de límite específico.

<i>Contenido sobre integral-técnica de integración</i> (creada)	Recolectar información detallada sobre el tipo de técnica utilizada para la integración y/o el tipo de integral.
<i>Unidad de contenido</i> (creada)	Recolectar información general sobre la temática tratada en la tarea, basándose en el programa de curso.
<i>Explicitación del contenido</i> (modificada)	Evidenciar la forma en que el contenido se explicitó mediante términos, símbolos y/o combinaciones.
<i>Sistema de representación</i> (modificada)	Cuantificar la cantidad de sistemas de representación diferentes presentes en una misma tarea, al mismo tiempo que se identifican los tipos, y considerando que en todos los casos hubo representación verbal.
<i>Tipo de función</i> (modificada-se llamó <i>Rasgos de función</i>), <i>Cuantificación de rasgos de función</i> (creada), <i>Operaciones de función</i> (creada), <i>Cuantificación de operaciones de función</i> (creada), <i>Uso de parámetros en la función</i> (creada), <i>Cuantificación de parámetros en la función</i> (creada), <i>Definición de la función</i> (creada)	Recolectar información detallada sobre las características estructurales de las funciones, pues presentan diferentes características que condicionan el trabajo que deba hacerse con ellas; y contabilizar las veces que en una misma función se presentan diferentes rasgos, operaciones, o parámetros simultáneamente (apoyándose en la noción de rasgo de una función de Jiménez, 2017).
<i>Situación</i> (modificada)	Recolectar información sobre el tipo específico de contexto científico (exclusivo matemático y científico-tecnológico no exclusivo matemático).
<i>Meta</i> (modificada-se llamó <i>Acción</i>) y <i>Demanda Cognitiva</i> (creada)	Recolectar información detallada sobre las características de los procesos (acciones a modo de verbos) que se preveía que haría un resolutor de cierta tarea y que le implicaría cierto esfuerzo cognitivo o intelectual (basándose en el modelo de demanda cognitiva de Smith y Stein, 1998; que establece cuatro niveles: memorización, algoritmos sin conexiones, algoritmos con conexiones, y hacer matemática, que pueden ser valorados en el enunciado de la tarea).
<i>Abierta/cerrada</i> (modificada-se llamó <i>Cerradura</i>) y <i>Tipo de respuesta</i> (creada)	Detallar modalidades; y recolectar información sobre la forma de respuesta esperada del resolutor.
<i>Directo/inverso</i> (modificada-se llamó <i>Dirección</i>)	Detallar modalidades (basándose en las definiciones de Martínez-Luaces, 2017; según la noción de estructura de una tarea y sus elementos: información-datos, procedimiento y solución).
<i>Complejidad</i> (modificada)	Hacer corresponder modalidades con las modalidades de las categorías <i>Demanda cognitiva</i> y <i>Tipo de tarea</i> .

Recursos (modificada)

Recabar información sobre los recursos indispensables para resolver cada tarea, pues sobre que se podían utilizar o no, no se tenía información.

Uso de imágenes (creada)

Recolectar información sobre la presencia de imágenes, sus funciones y su necesidad (basándose en lo establecido por Brändström, 2015; respecto a: tareas sin imagen, con imagen decorativa, con imagen funcional).

Objetivo general y Objetivo específico (creadas)

Recolectar información sobre el objetivo de aprendizaje indicado en la tarea según el programa de curso.

[illegible]

Figura A.1. Captura de 67 columnas y primeras 80 filas (de un total de 507) de matriz generada en una hoja de cálculo de Microsoft Excel para la cuantificación de unidades de análisis.

Tabla A.3. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según cálculo de límites

Contenido sobre cálculo de límites	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Al Infinito	50,00	28,57	25,00	33,33	33,33	26,09	25,00	29,73
Cambio de variable	25,00	14,29	12,50	0,00	0,00	0,00	12,50	5,41
Infinito	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	8,70	0,00	2,70
Racionalización	0,00	0,00	0,00	16,67	0,00	8,70	0,00	4,05
Simplificación	0,00	14,29	12,50	16,67	0,00	0,00	12,50	5,41
Sustitución directa	0,00	0,00	0,00	0,00	27,78	0,00	0,00	6,76
Teorema del Encaje	0,00	14,29	0,00	0,00	0,00	4,35	0,00	2,70
Trigonométrico	0,00	14,29	12,50	0,00	5,56	0,00	0,00	4,05
Trigonométrico (sustitución)	25,00	0,00	12,50	16,67	5,56	8,70	25,00	10,81
Unilateral	0,00	14,29	25,00	16,67	27,78	43,48	25,00	28,38

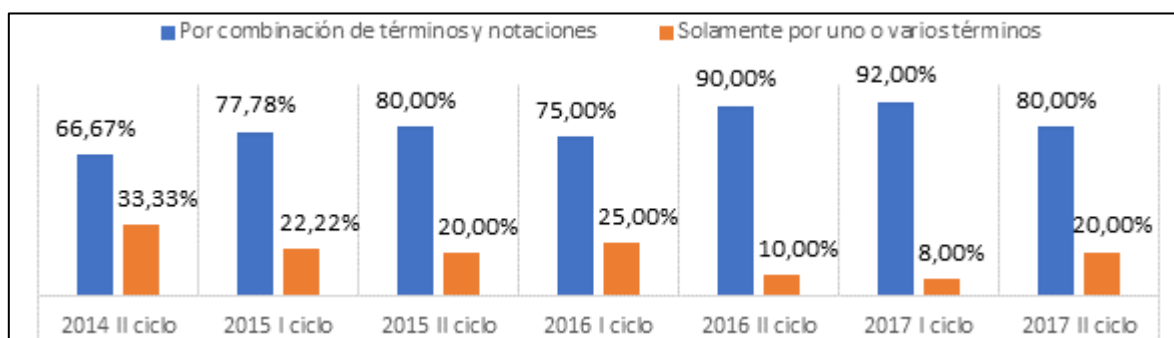


Figura A.2. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según explicitación

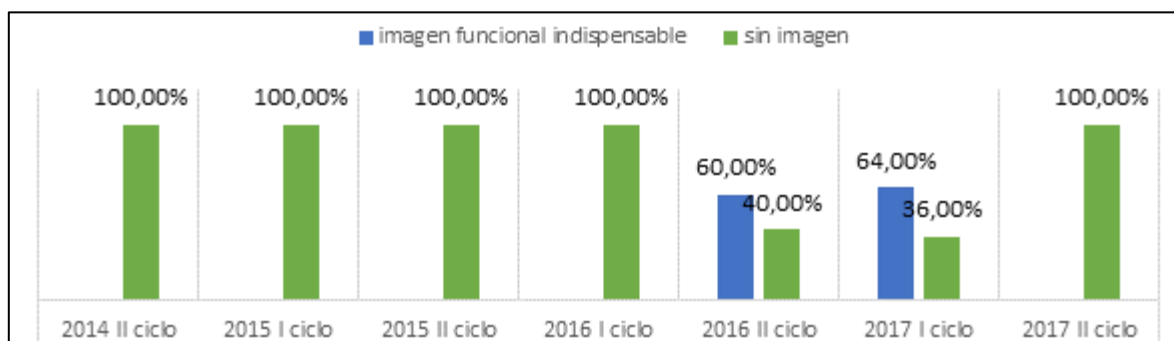


Figura A.3. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según uso de imágenes

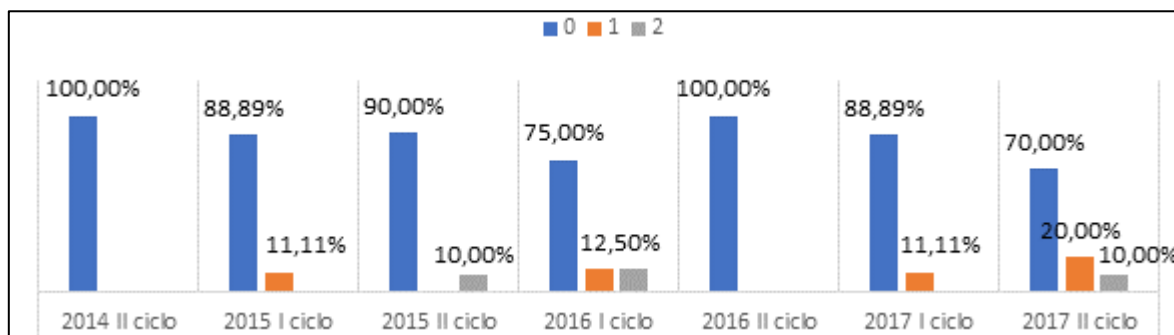


Figura A.4. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según uso de parámetros

Tabla A.4. *Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según rasgos de función*

Rasgos de función	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Constante	3	6	2	3	3	4	3	24
Monomio	1	4	4	4	2	4	4	23
Polinomio de primer grado	3	4	6	4	6	5	7	35
Polinomio de segundo grado	2	3	2	2	6	5	4	24
Polinomio grado superior a dos	1	2	3	2	2	4	1	15
Exponencial	1	0	0	0	0	0	1	2
Logaritmo	0	0	0	0	0	0	0	0
Trigonométrico	1	2	2	3	2	3	2	15
Trigonométrico inverso	0	0	0	0	0	0	0	0

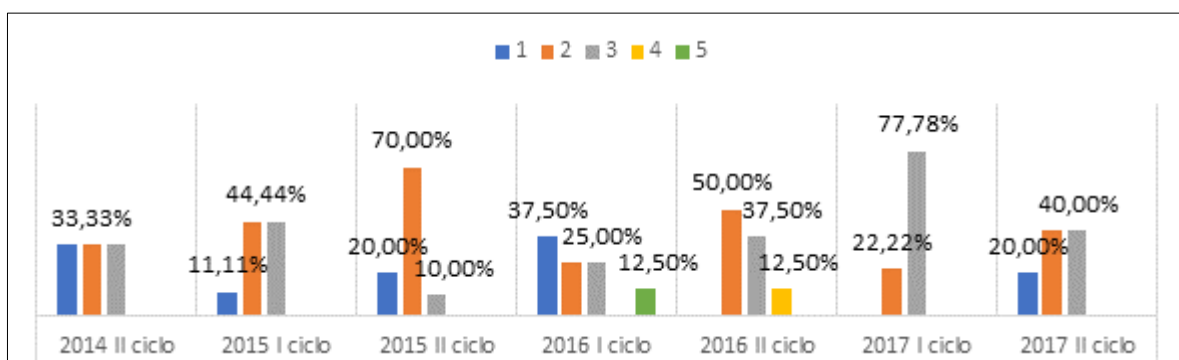


Figura A.5. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según cuantificación de rasgos de función

Tabla A. 5. *Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según operaciones de función*

Operaciones de función	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Potencia exponente entero positivo	0	1	0	1	1	0	0	3
Potencia exponente entero negativo	0	0	0	0	0	0	0	0
Potencia exponente racional (no entero)	2	7	3	3	3	4	3	25
Suma y/o resta	4	6	3	5	5	4	5	32
Cociente	5	8	7	8	7	9	8	52
Producto	2	2	2	2	1	1	0	10
Valor absoluto	0	1	2	0	2	0	2	7
Composición	4	7	3	6	3	5	5	33
A trozos	1	0	1	2	1	1	1	7

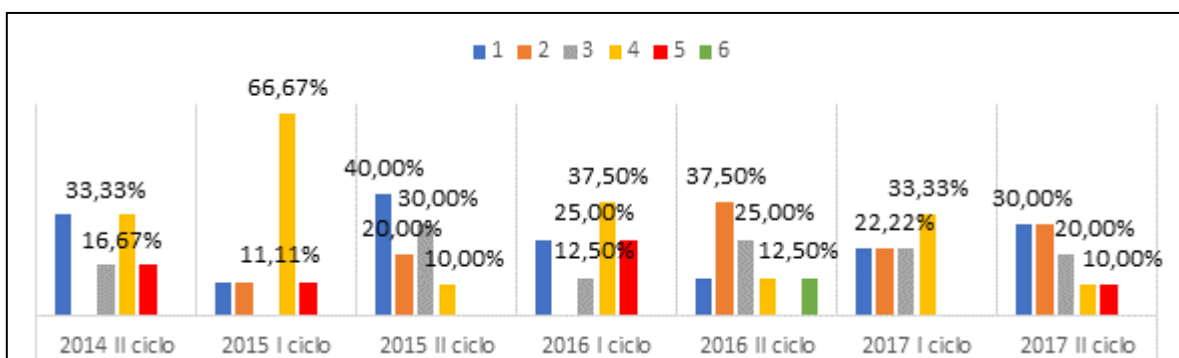


Figura A.6. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según cuantificación de operaciones de función

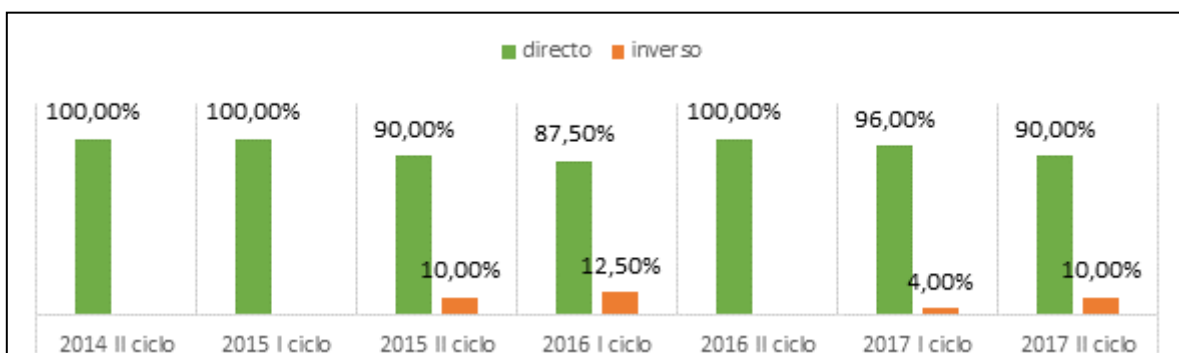


Figura A.7. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según dirección

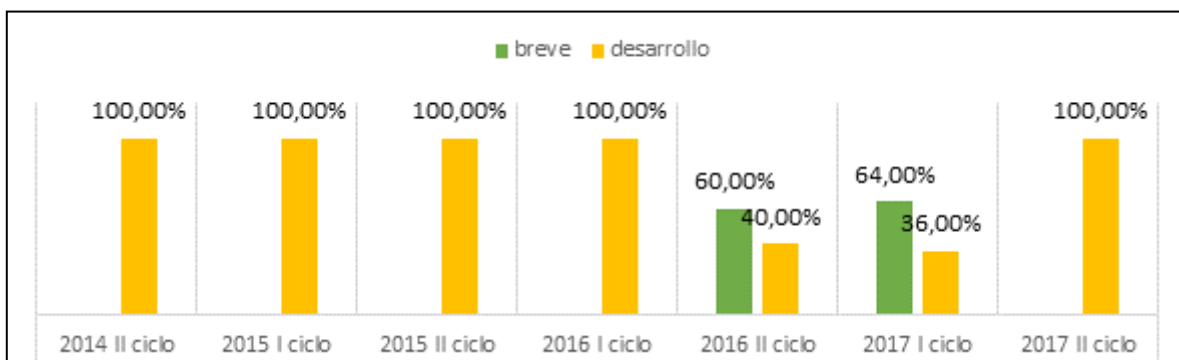


Figura A.8. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según tipo de respuesta

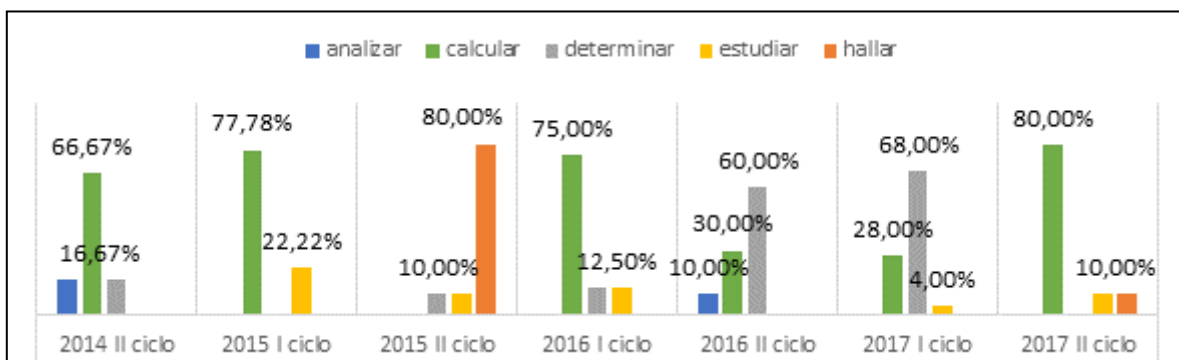


Figura A.9. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según acción

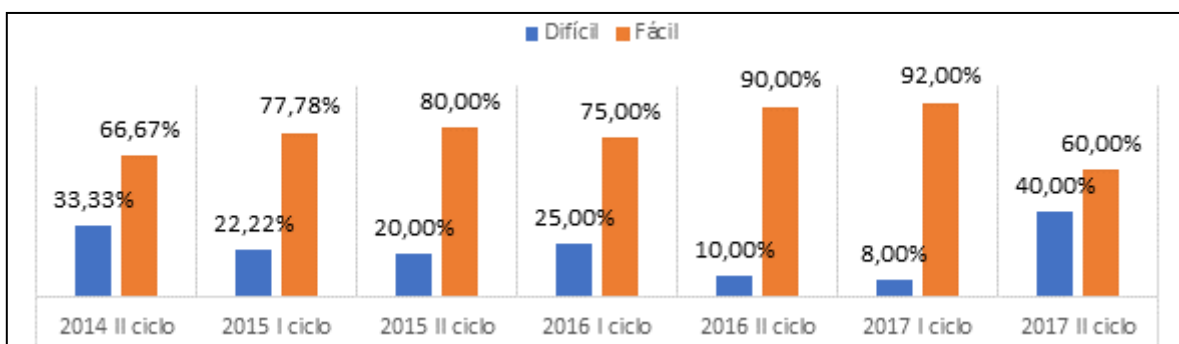


Figura A.10. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según complejidad

Tabla A.6. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según objetivo general

Objetivo general	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo
Otro	100	100	100	100	0	100	100
Resolver problemas de aplicación usando conceptos del cálculo	0	0	0	0	0	0	0
Aplicar conceptos del cálculo	NA	NA	NA	NA	100	NA	NA

Nota: NA=No aplica, indica que el objetivo no pertenece al programa de curso del periodo respectivo.

Tabla A.7. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según objetivo específico

Objetivo específico	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo
Desarrollar (aplicar) conceptos de cálculo	100	100	100	100	NA	100	100
Optimizar funciones	0	0	0	0	0	0	0
Resolver problemas que involucren cálculo de integrales y derivadas	0	0	0	0	0	0	0
Otro	0	0	0	0	10	0	0
Cálculo de límites	NA	NA	NA	NA	90	NA	NA
Calcular integrales definidas e indefinidas usando técnicas de integración	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Calcular integrales definidas usando la definición	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Resolver problemas aplicando concepto de derivada	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA

Nota: NA=No aplica, indica que el objetivo no pertenece al programa de curso del periodo lectivo respectivo.

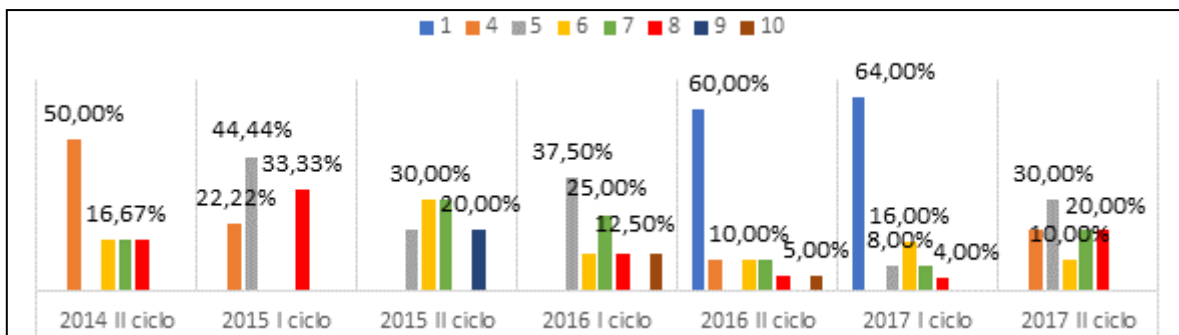


Figura A.11. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según puntuación

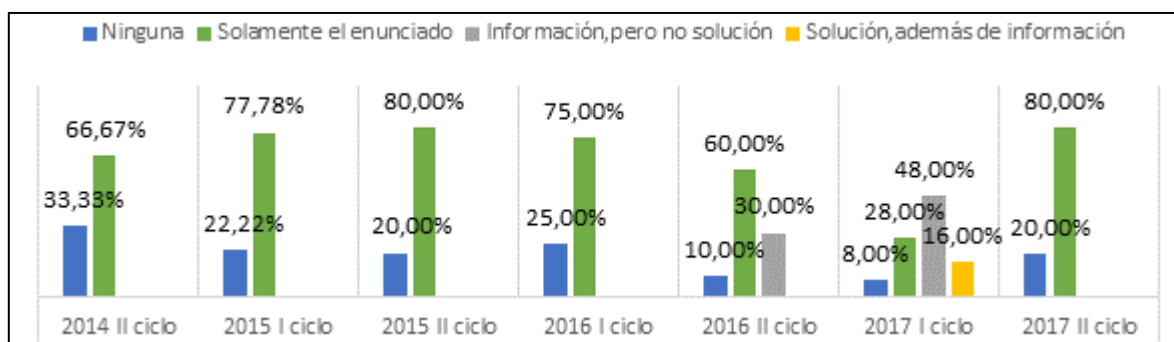


Figura A.12. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según tipo de relación entre tareas

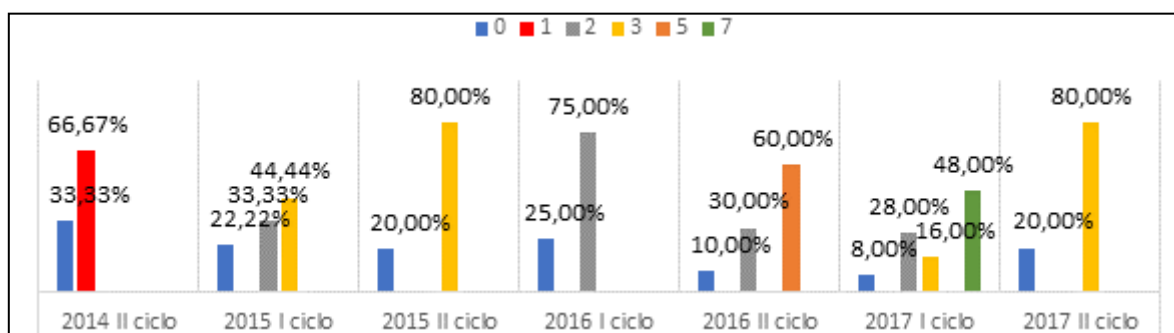


Figura A.13. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según cuantificación de relación entre tareas

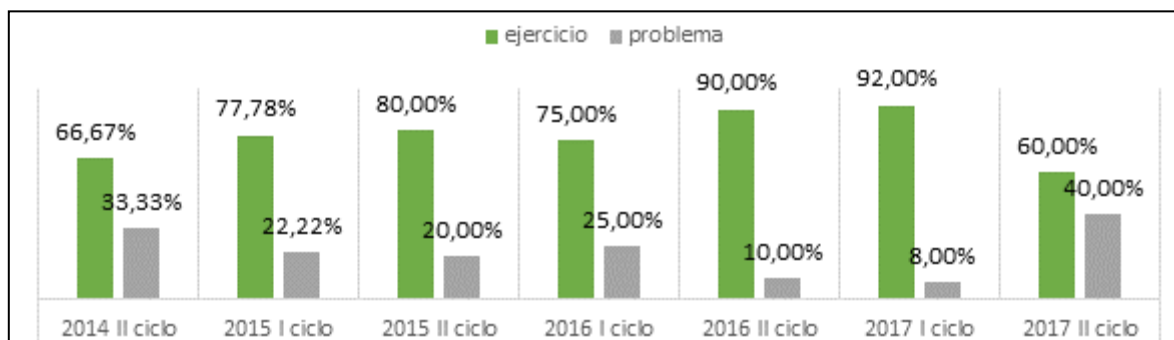


Figura A.14. Tareas sobre límites y continuidad de primera prueba parcial según tipo de tarea

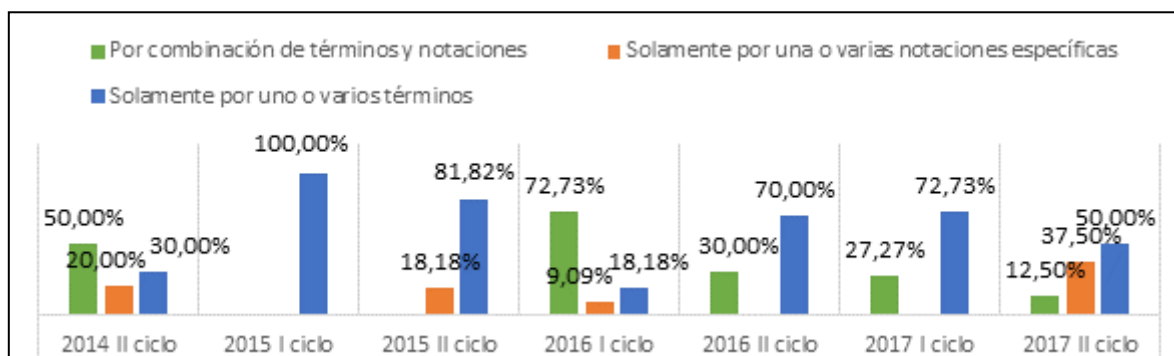


Figura A.15. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según tipo de explicitación del contenido

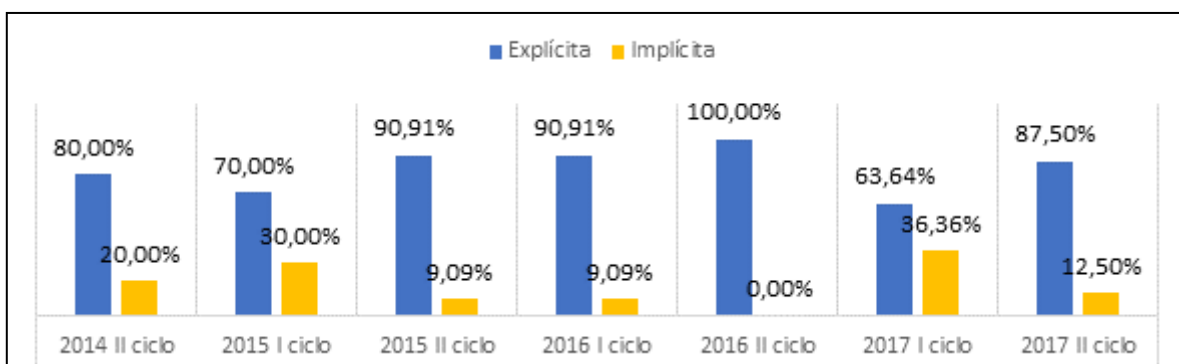


Figura A.16. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según definición de la función

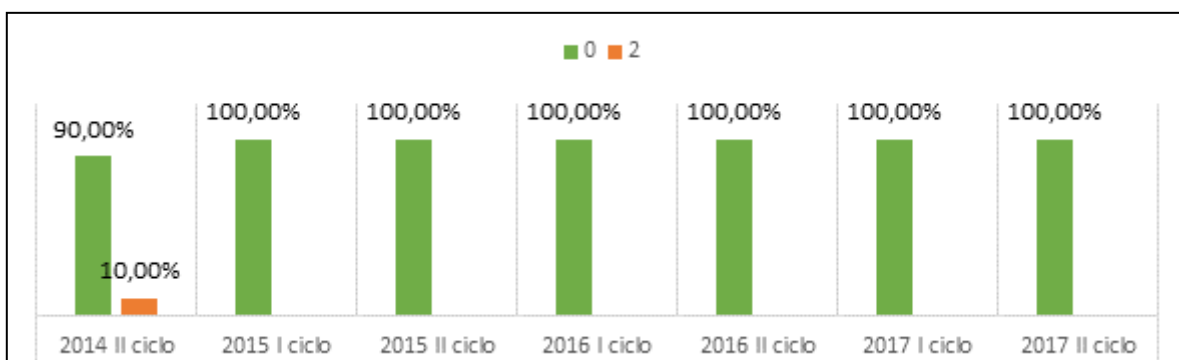


Figura A.17. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según cuantificación de parámetros de función

Tabla A.8. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según rasgos de función

Rasgos de función	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Constante	2	4	4	4	5	5	1	25
Monomio	4	5	8	8	7	5	2	39
Polinomio de primer grado	3	2	2	1	4	3	3	18
Polinomio de segundo grado	2	3	3	1	2	3	1	15
Polinomio grado superior a dos	2	0	1	2	0	0	2	7
Exponencial	0	4	3	3	3	1	1	15
Logaritmo	1	2	2	2	3	1	1	12
Trigonométrica	2	4	4	4	5	2	1	22
Trigonométrica inversa	0	1	1	1	0	2	1	6

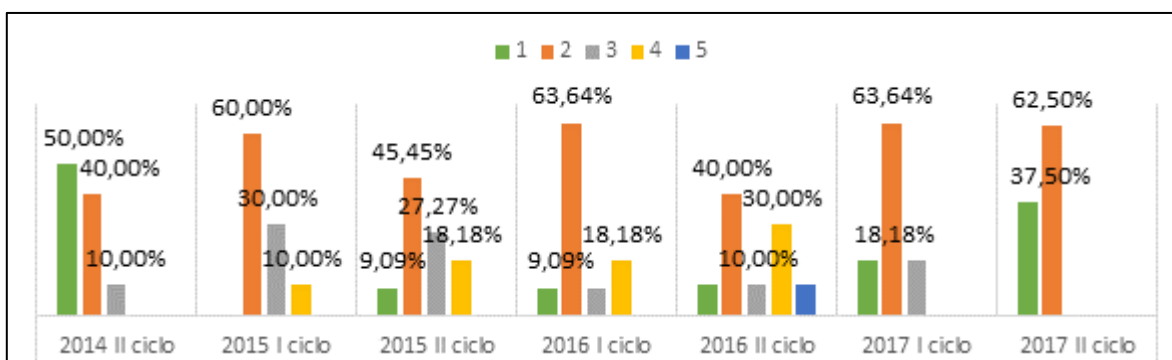


Figura A.18. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según cuantificación de rasgos de función

Tabla A.9. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según operaciones de función

Operaciones de función	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Potencia exponente entero positivo	3	2	3	0	2	4	1	15
Potencia exponente entero negativo	0	0	0	1	0	0	0	1
Potencia exponente racional (no entero)	2	2	3	3	6	1	0	17
Suma y/o resta	2	3	5	6	4	6	0	26
Cociente	3	4	5	4	6	2	4	28
Producto	3	4	4	4	3	4	0	22
Valor absoluto	0	0	0	0	0	0	0	0
Composición	7	6	8	8	7	9	4	49
A trozos	0	0	0	0	0	0	0	0

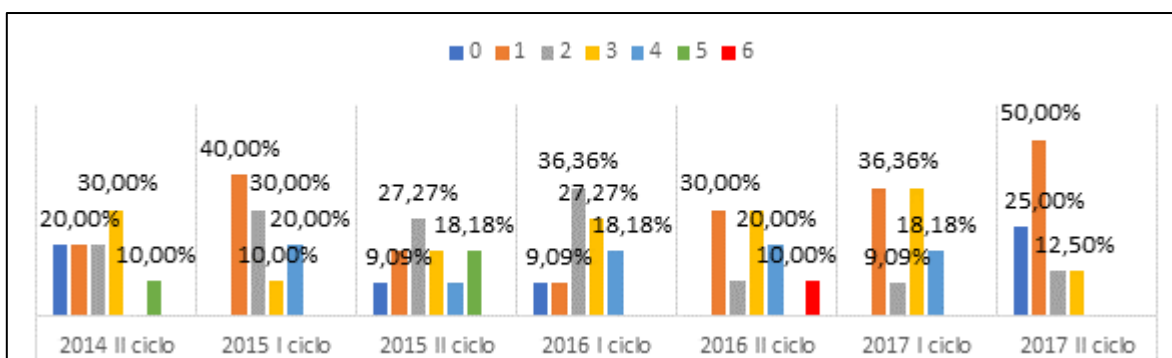


Figura A.19. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según cuantificación de operaciones de función

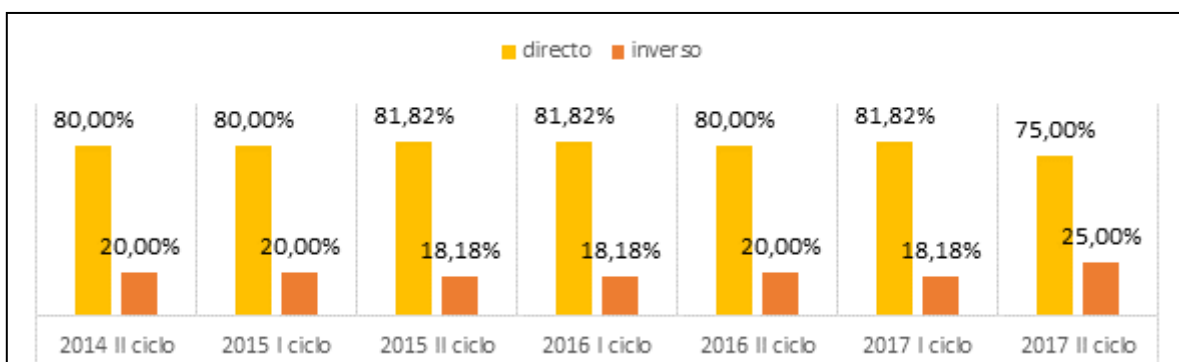


Figura A.20. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según dirección

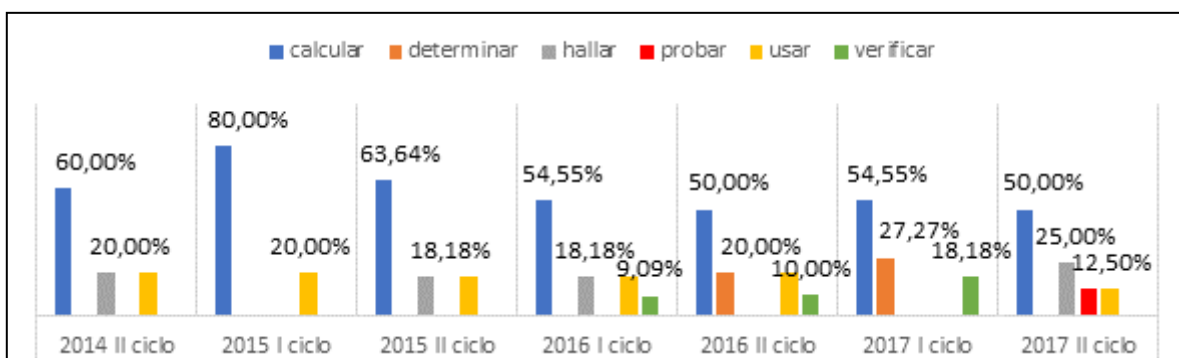


Figura A.21. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según acción

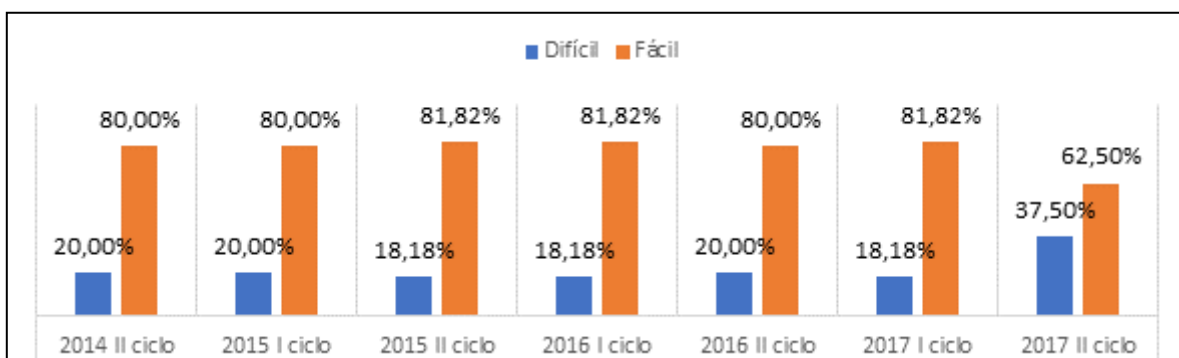


Figura A.22. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según complejidad

Tabla A.10. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según objetivo general

Objetivo general	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo
Otro	100	100	100	100	0	100	100
Resolver problemas de aplicación usando conceptos del cálculo	0	0	0	0	0	0	0
Aplicar conceptos del cálculo	NA	NA	NA	NA	100	NA	NA

Nota: NA=No aplica, indica que el objetivo no pertenece al programa de curso del periodo respectivo.

Tabla A.11. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según objetivo específico

Objetivo específico	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo
Desarrollar (aplicar) conceptos de cálculo	80	80	82	82	NA	82	87
Optimizar funciones	0	0	0	0	0	0	0
Resolver problemas que involucren cálculo de integrales y derivadas	20	20	18	18	20	18	13
Otro	0	0	0	0	80	0	0
Cálculo de límites	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Calcular integrales definidas e indefinidas usando técnicas de integración	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Calcular integrales definidas usando la definición	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Resolver problemas aplicando concepto de derivada	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA

Nota: NA=No aplica, indica que el objetivo no pertenece al programa de curso del periodo lectivo respectivo.

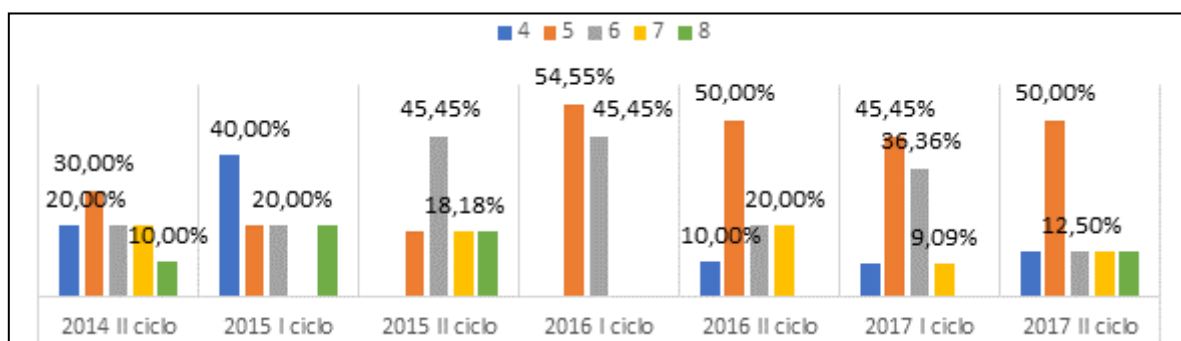


Figura A.23. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según puntuación

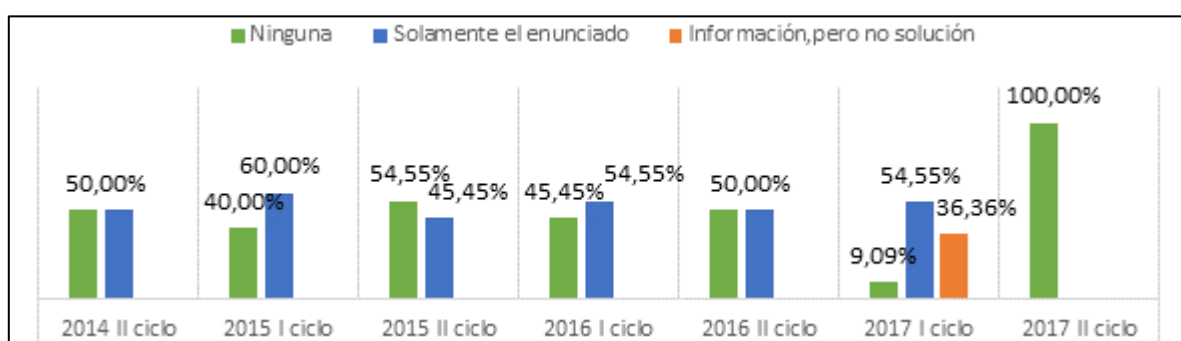


Figura A.24. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según tipo de relación entre tareas

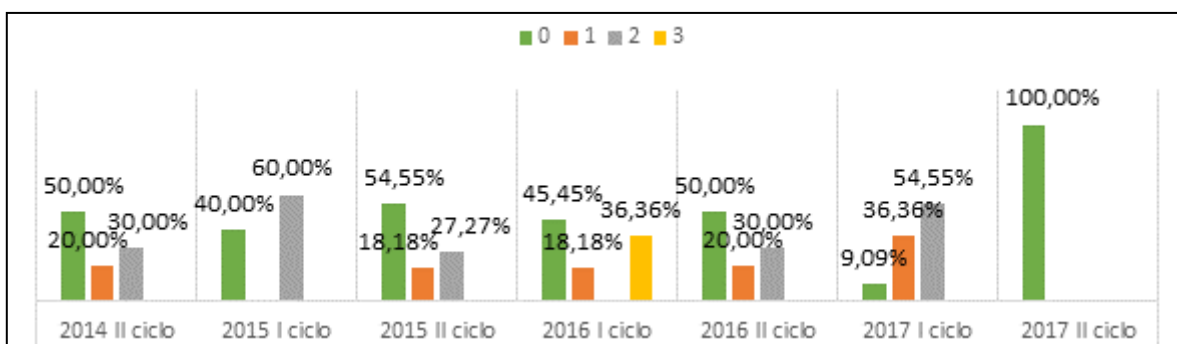


Figura A.25. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según cuantificación de relación entre tareas

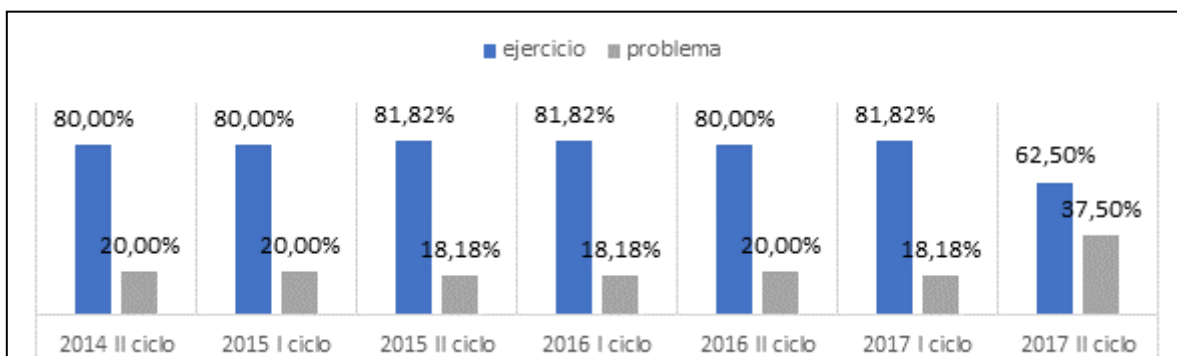


Figura A.26. Tareas sobre derivación de primera prueba parcial según tipo de tarea

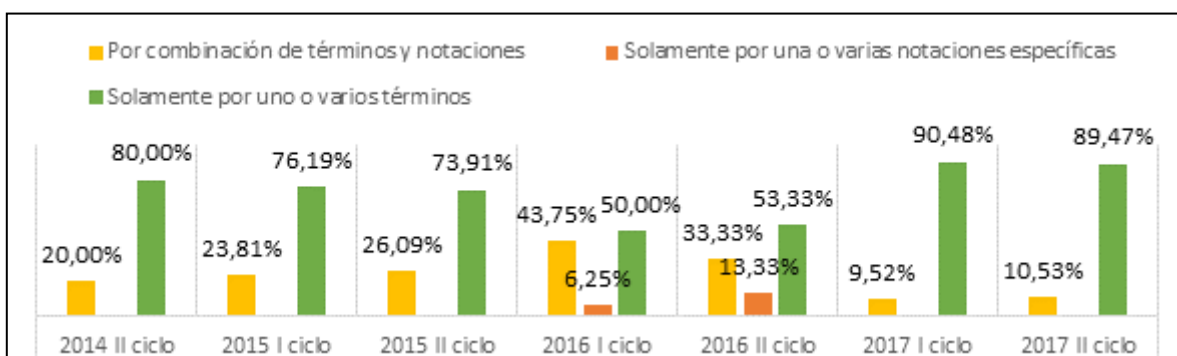


Figura A.27. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según tipo de explicitación del contenido

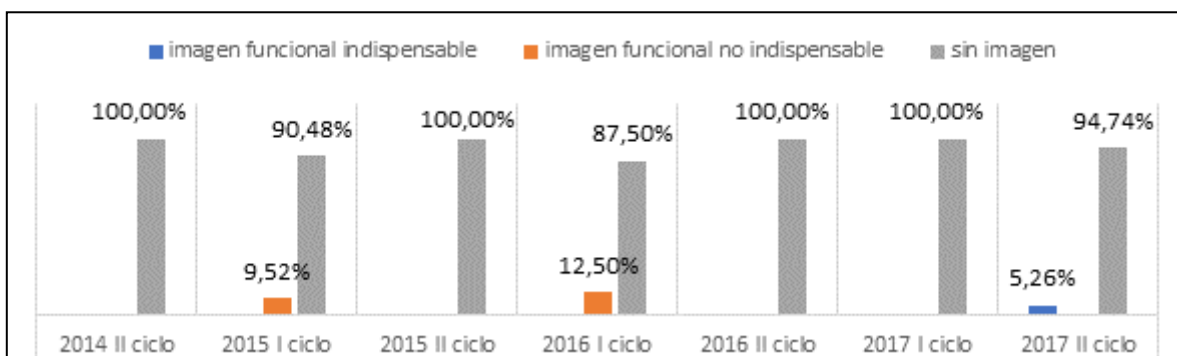


Figura A.28. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según imágenes

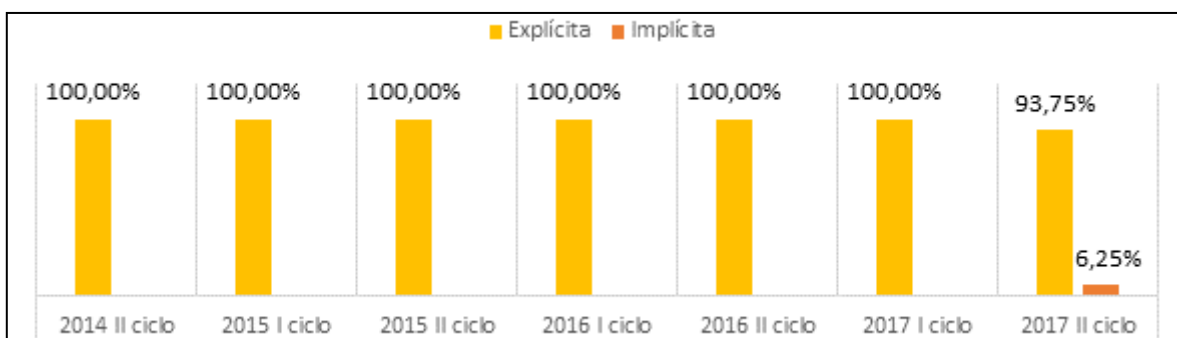


Figura A.29. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según definición

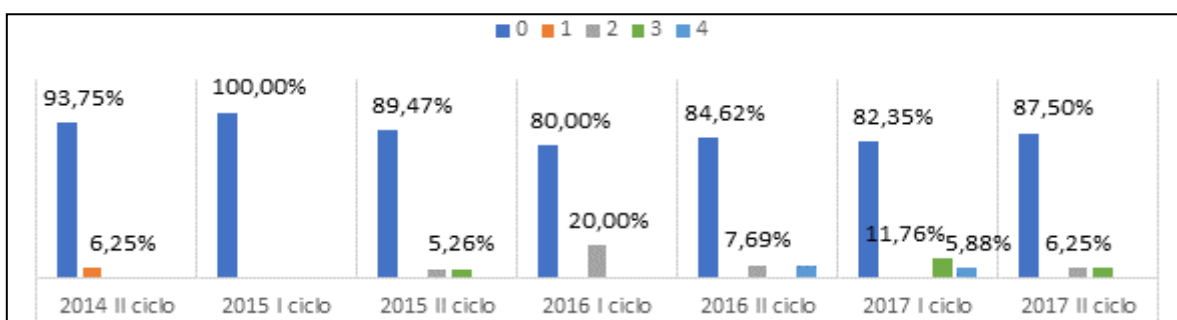


Figura A.30. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según cuantificación de parámetros de función

Tabla A.12. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según rasgos

Rasgos de función	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Constante	14	16	3	5	7	14	8	67
Monomio	15	16	17	7	5	9	15	84
Polinomio de primer grado	12	1	3	4	1	11	7	39
Polinomio de segundo grado	7	1	12	6	4	12	6	48
Polinomio grado superior a dos	6	6	7	0	1	1	1	22
Exponencial	3	3	4	3	2	3	3	21
Logaritmo	0	1	1	0	1	1	0	4
Trigonométrica	3	2	3	2	2	1	2	15
Trigonométrica inversa	0	0	0	0	1	0	0	1

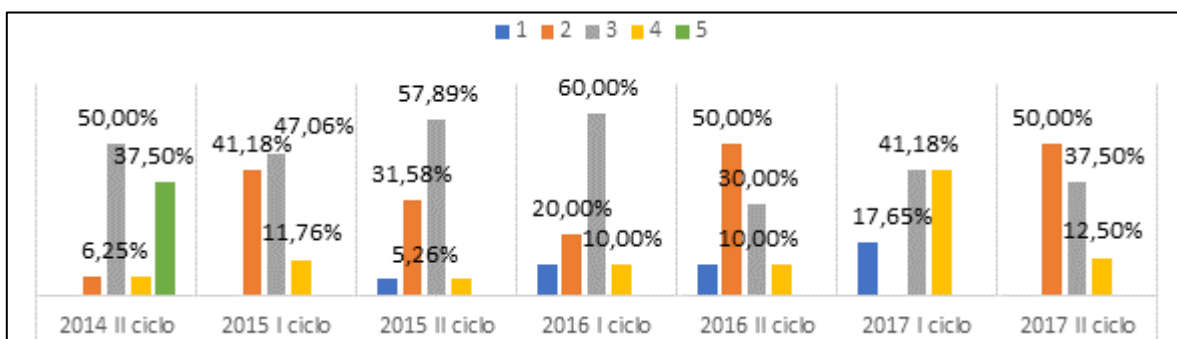


Figura A.31. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según cuantificación de rasgos de función

Tabla A.13. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según operaciones

Operación de función	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Potencia exponente entero positivo	6	0	12	3	1	10	6	38
Potencia exponente entero negativo	0	0	0	1	0	0	0	1
Potencia exponente racional (no entero)	0	0	0	1	0	0	0	1
Suma y/o resta	2	10	5	3	4	4	2	30
Cociente	14	17	18	8	7	14	11	89
Producto	13	0	2	3	1	10	8	37
Valor absoluto	0	0	0	0	0	0	0	0
Composición	10	4	4	6	2	13	9	48
A trozos	0	0	0	0	0	0	0	0

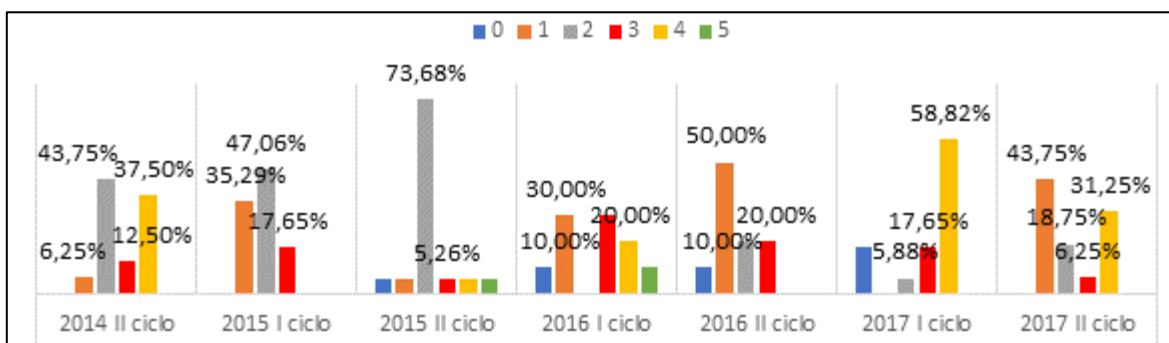


Figura A.32. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según cuantificación de operaciones de función

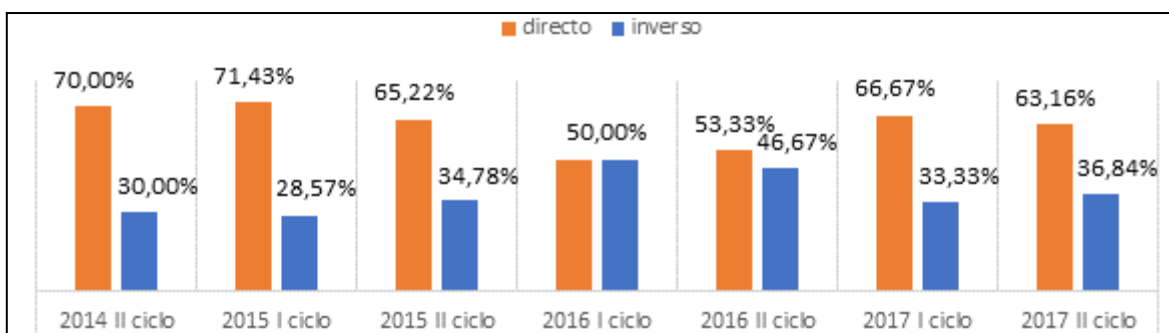


Figura A.33. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según dirección

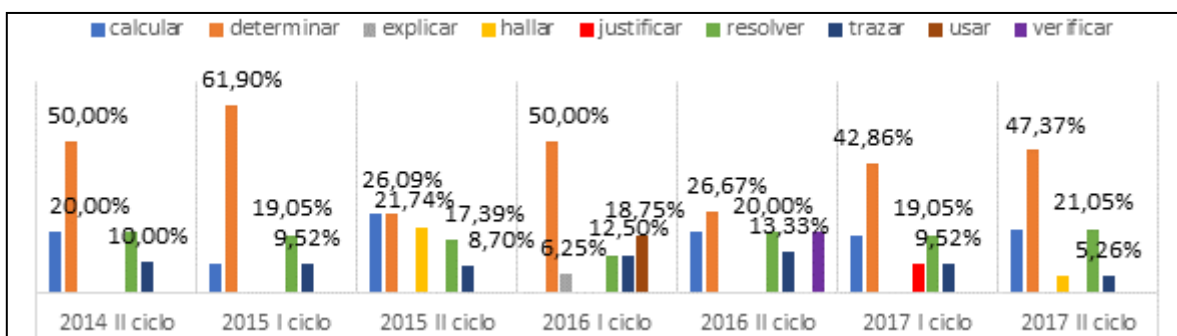


Figura A.34. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según acción

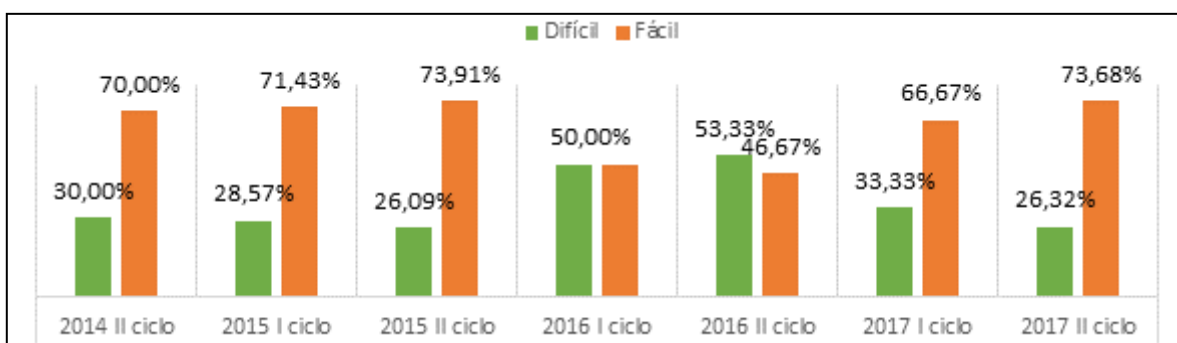


Figura A.35. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según complejidad

Tabla A.14. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba según objetivo específico

Objetivo específico	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo
Desarrollar (aplicar) conceptos de cálculo	70	81	78	69	NA	67	79
Optimizar funciones	10	10	9	13	7	10	11
Resolver problemas que involucren cálculo de integrales y derivadas	20	10	13	19	13	24	11
Otro	0	0	0	0	40	0	0
Cálculo de límites	NA	NA	NA	NA	27	NA	NA
Calcular integrales definidas e indefinidas usando técnicas de integración	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Calcular integrales definidas usando la definición	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Resolver problemas aplicando concepto de derivada	NA	NA	NA	NA	13	NA	NA

Nota: NA=No aplica, indica que el objetivo no pertenece al programa de curso del periodo respectivo.

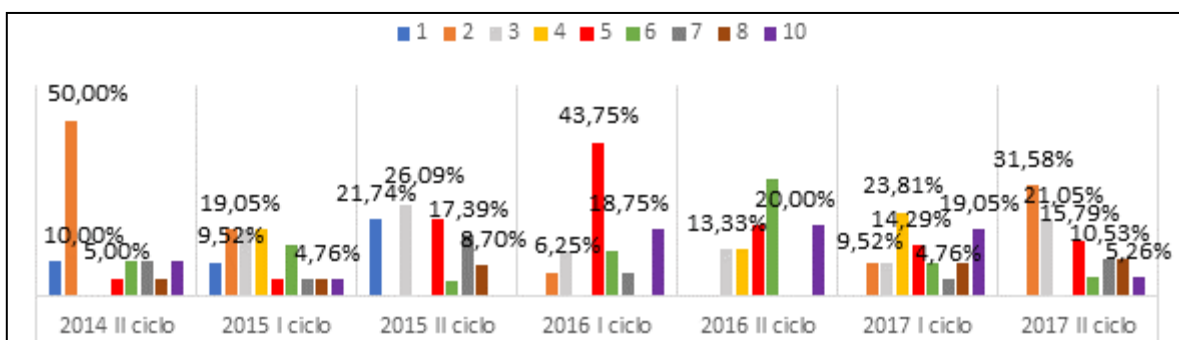


Figura A.36. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según puntuación

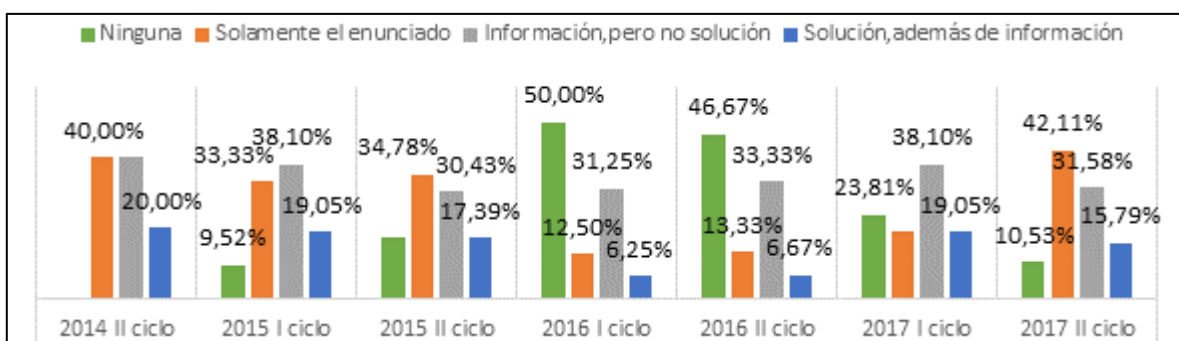


Figura A.37. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial tipo de relación entre tareas

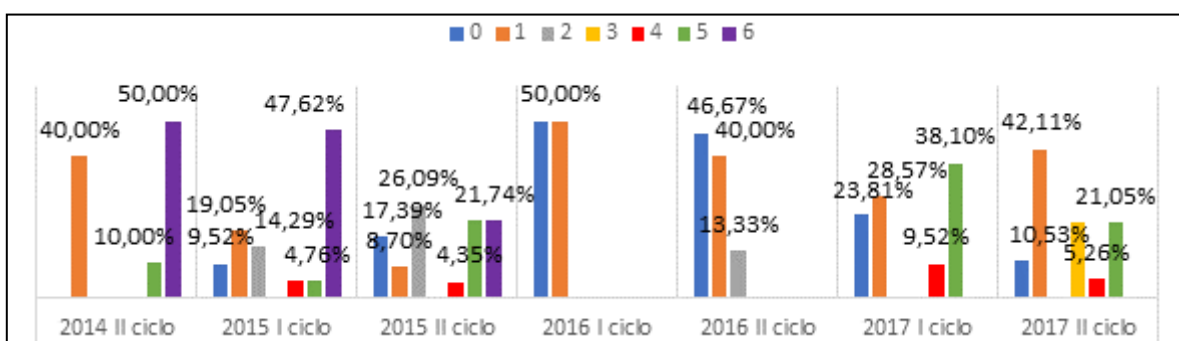


Figura A.38. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según cuantificación de relaciones entre tareas

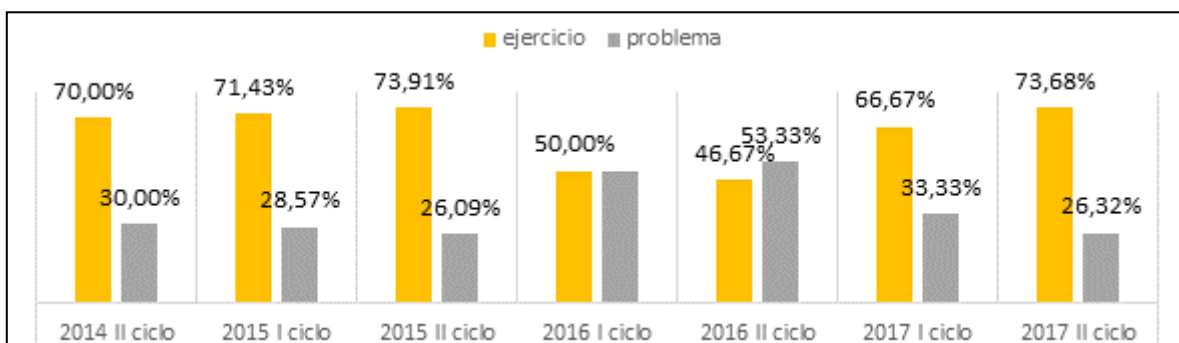


Figura A.39. Tareas sobre aplicaciones de la derivada de segunda prueba parcial según tipo de tarea

Tabla A.15. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según técnica de integración

Técnica de integración	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Fracciones parciales	25,00	18,18	20,00	18,18	9,09	18,18	10,00	16,67
Funciones trigonométricas	0,00	18,18	0,00	18,18	18,18	9,09	20,00	12,50
Por partes	25,00	18,18	20,00	18,18	18,18	18,18	20,00	19,44
Sustitución	25,00	27,27	30,00	9,09	36,36	27,27	30,00	26,39
Sustitución trigonométrica	25,00	18,18	30,00	27,27	18,18	18,18	20,00	22,22
Sustitución Weierstrass	0,00	0,00	0,00	9,09	0,00	9,09	0,00	2,78

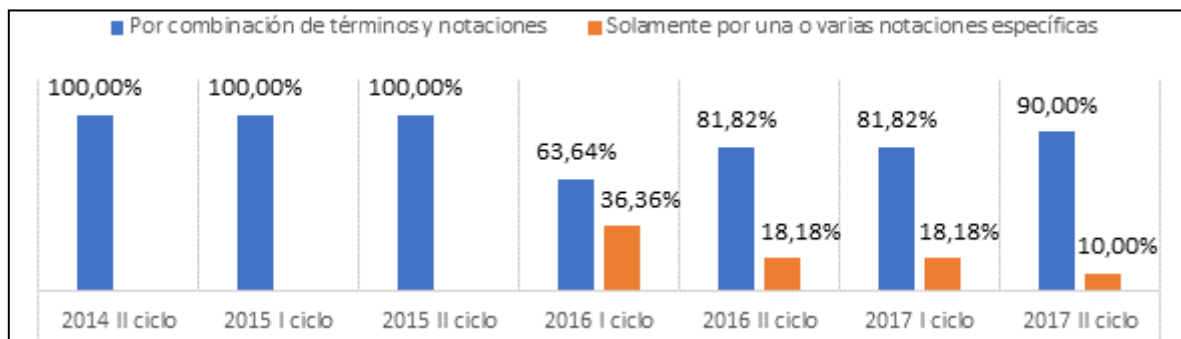


Figura A.40. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según tipo de explicitación del contenido

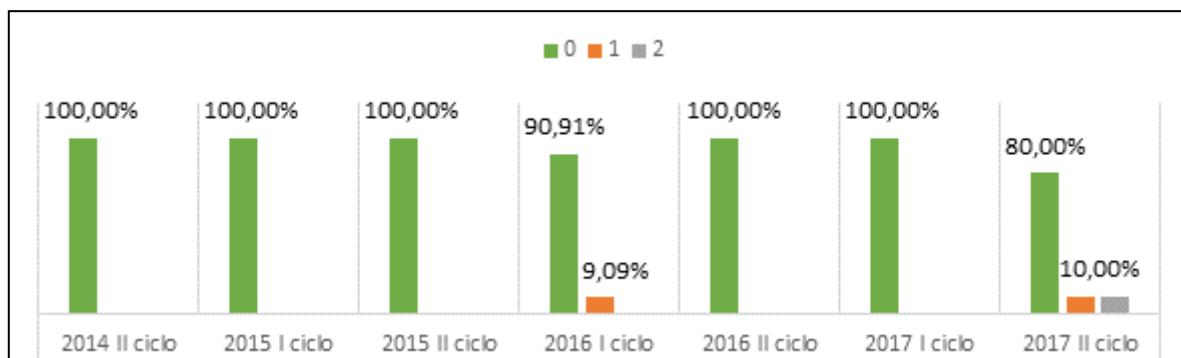


Figura A.41. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según cuantificación de parámetros

Tabla A.16. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según rasgos de función

Rasgos de función	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Constante	2	1	2	1	4	4	2	16
Monomio	4	7	5	5	7	4	6	38
Polinomio de primer grado	1	2	0	0	2	1	1	7
Polinomio de segundo grado	2	3	2	5	2	4	4	22
Polinomio grado superior a dos	1	1	2	1	1	2	2	10
Exponencial	2	2	2	1	3	1	1	12
Logaritmo	0	1	2	1	4	1	0	9
Trigonométrica	3	3	3	3	5	5	3	25
Trigonométrica inversa	0	0	0	0	0	0	0	0

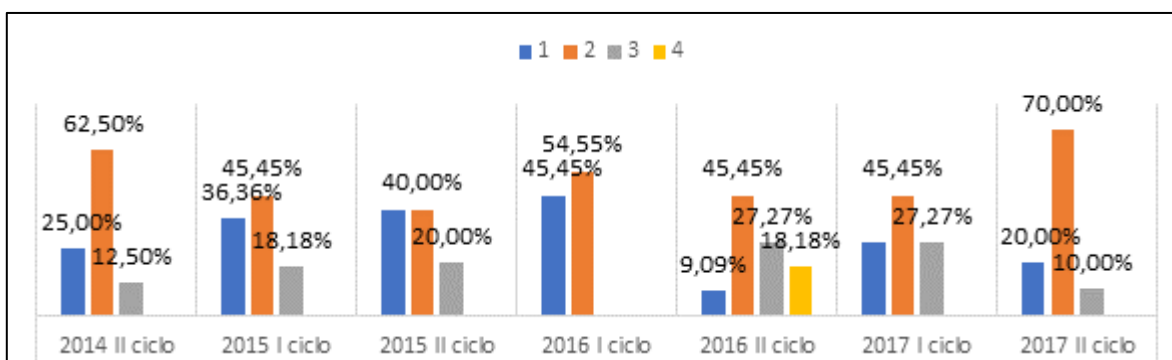


Figura A.42. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según cuantificación de rasgos de función

Tabla A.17. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según operaciones de función

Operaciones de función	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Potencia exponente entero positivo	3	4	2	2	7	2	5	25
Potencia exponente entero negativo	0	0	0	1	1	0	0	2
Potencia exponente racional (no entero)	3	5	4	4	2	5	2	25
Suma y/o resta	0	2	2	1	4	1	0	10
Cociente	6	8	8	6	8	7	6	49
Producto	3	6	6	6	8	4	2	35
Valor absoluto	0	0	0	0	0	0	0	0
Composición	7	9	7	5	10	7	7	52
A trozos	0	0	0	0	0	0	0	0

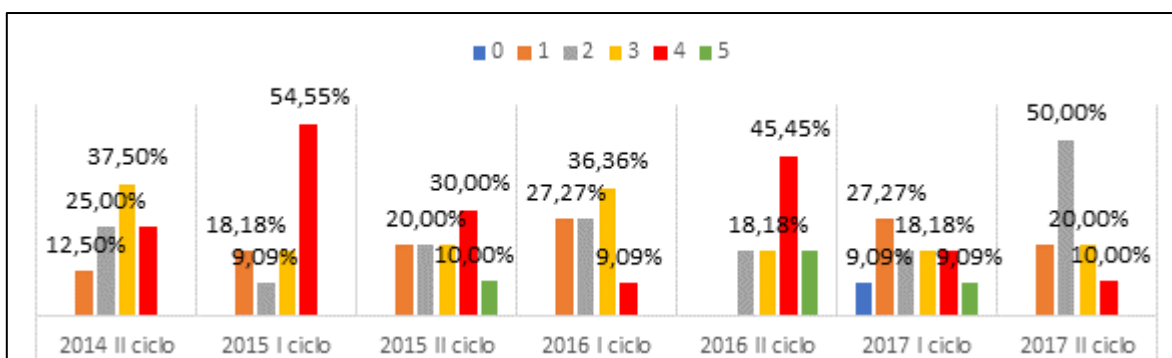


Figura A.43. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según cuantificación de operaciones de función

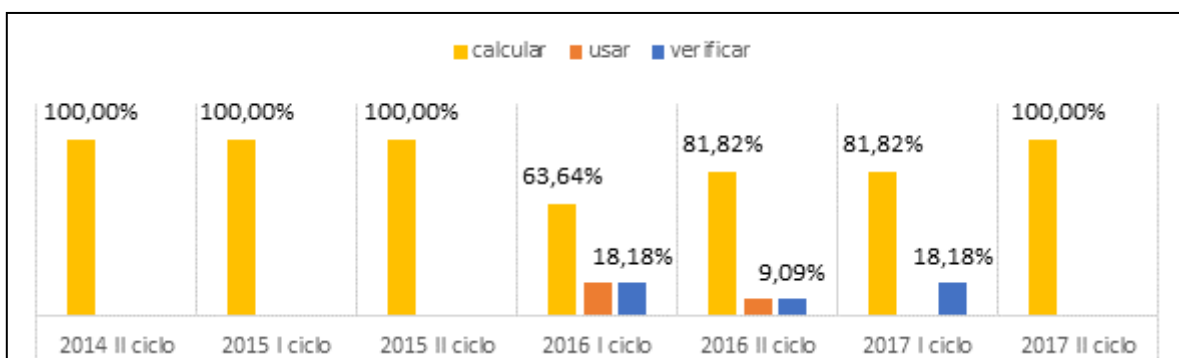


Figura A.44. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según acción



Figura A.45. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según demanda cognitiva

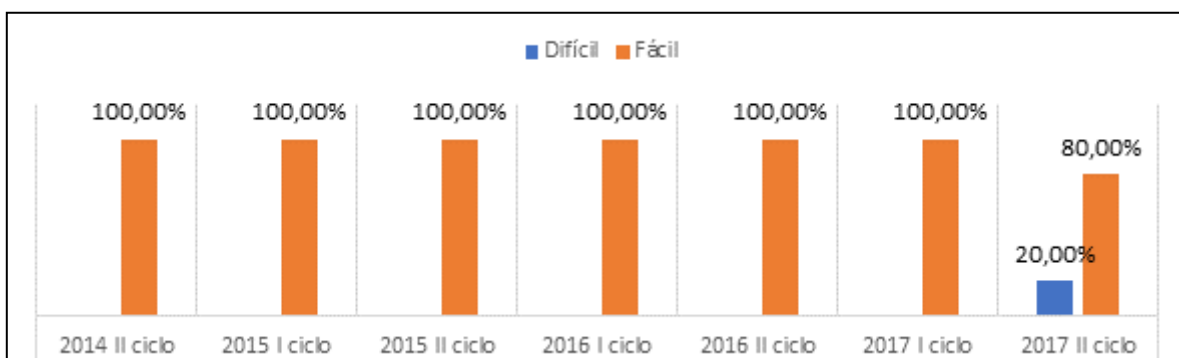


Figura A.46. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según complejidad

Tabla A.18. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según objetivo general

Objetivo general	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo
Otro	100	100	100	100	0	100	100
Resolver problemas de aplicación usando conceptos del cálculo	0	0	0	0	0	0	0
Aplicar conceptos del cálculo	NA	NA	NA	NA	100	NA	NA

Nota: NA=No aplica, indica que el objetivo no pertenece al programa de curso del periodo respectivo.

Tabla A.19. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según objetivo específico

Objetivo específico	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo
Desarrollar (aplicar) conceptos de cálculo	100	100	100	100	NA	100	100
Optimizar funciones	0	0	0	0	0	0	0
Resolver problemas que involucren cálculo de integrales y derivadas	0	0	0	0	0	0	0
Otro	0	0	0	0	0	0	0
Cálculo de límites	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Calcular integrales definidas e indefinidas usando técnicas de integración	NA	NA	NA	NA	100	NA	NA
Calcular integrales definidas usando la definición	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Resolver problemas aplicando concepto de derivada	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA

Nota: NA=No aplica, indica que el objetivo no pertenece al programa de curso del periodo respectivo.

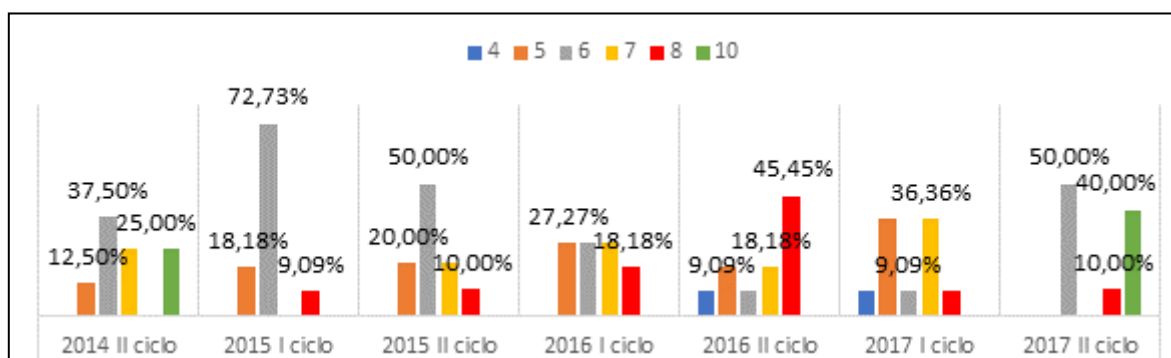


Figura A.47. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según puntuación

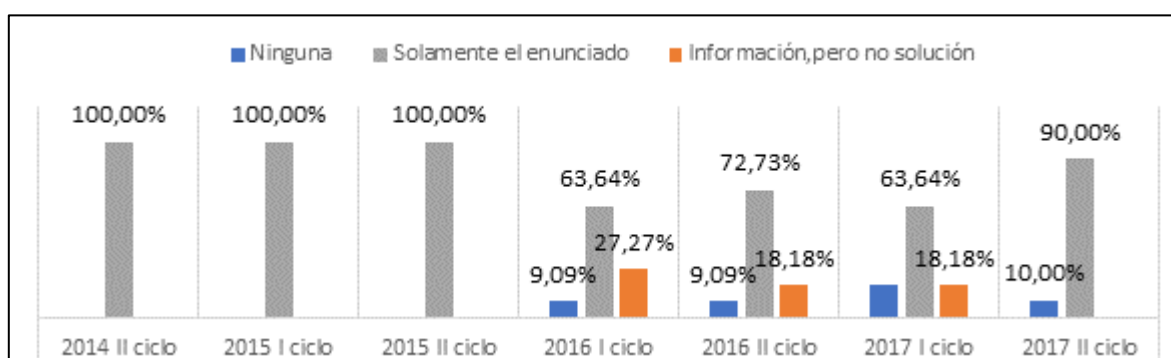


Figura A.48. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según tipo de relación entre tareas

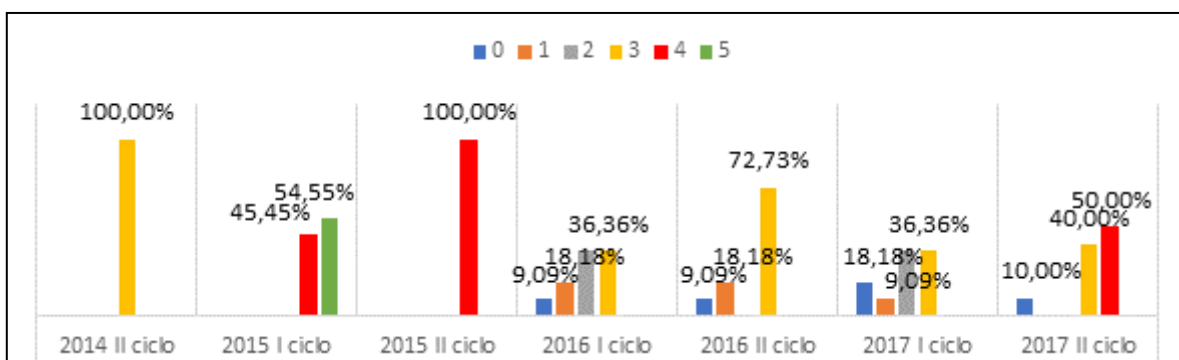


Figura A.49. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según cuantificación de relación entre tareas

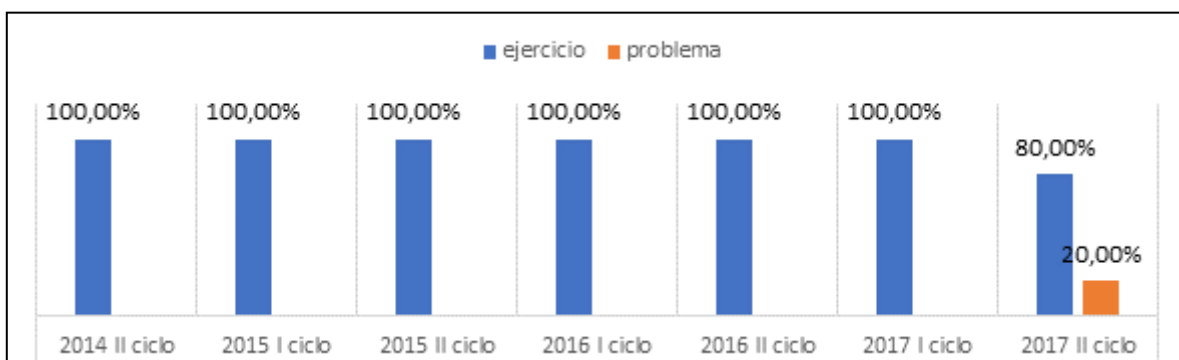


Figura A.50. Tareas sobre integración de tercera prueba parcial según tipo de tarea

Tabla A.20. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según detalle del contenido según contenido sobre técnica de integración

Contenido sobre técnica de integración	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Directa	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	50,00	100,00	95,65
Sustitución trigonométrica	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	50,00	0,00	4,35

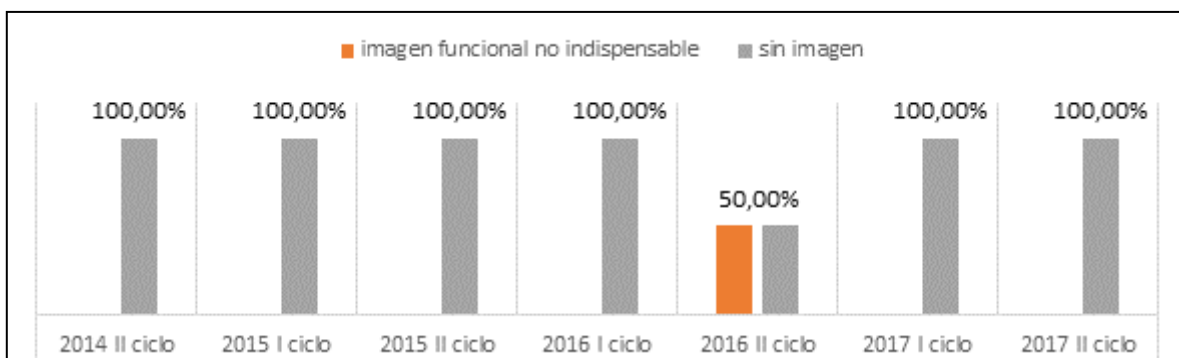


Figura A.51. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según detalle del contenido según uso de imágenes



Figura A.52. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según definición de función

Tabla A.21. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según rasgos de función

Rasgos de función	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Constante	2	0	2	1	2	0	0	7
Monomio	1	2	0	1	1	0	1	6
Polinomio de primer grado	0	1	1	1	2	0	0	5
Polinomio de segundo grado	3	3	5	1	0	1	1	14
Polinomio grado superior a dos	1	1	4	0	0	1	1	8
Exponencial	0	0	0	0	0	0	0	0
Logaritmo	0	0	0	0	0	0	0	0
Trigonométrica	0	0	0	0	0	0	0	0
Trigonométrica inversa	0	0	0	0	0	0	0	0

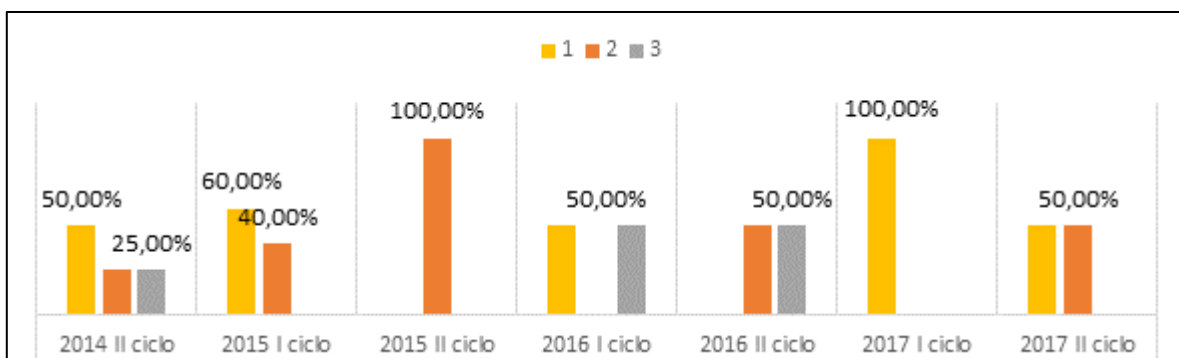


Figura A.53. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según cuantificación de rasgos de función

Tabla A.22. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según operaciones

Operaciones de función	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo	Total
Potencia exponente entero positivo	0	0	0	0	0	0	0	0
Potencia exponente entero negativo	0	0	0	0	0	0	0	0
Potencia exponente racional (no entero)	0	2	0	0	0	1	1	4
Suma y/o resta	0	0	0	0	0	0	0	0
Cociente	0	0	0	1	2	0	0	3
Producto	1	0	0	0	0	0	0	1
Valor absoluto	0	0	0	0	0	0	0	0
Composición	0	0	0	0	0	1	0	1
A trozos	0	0	0	0	0	0	0	0

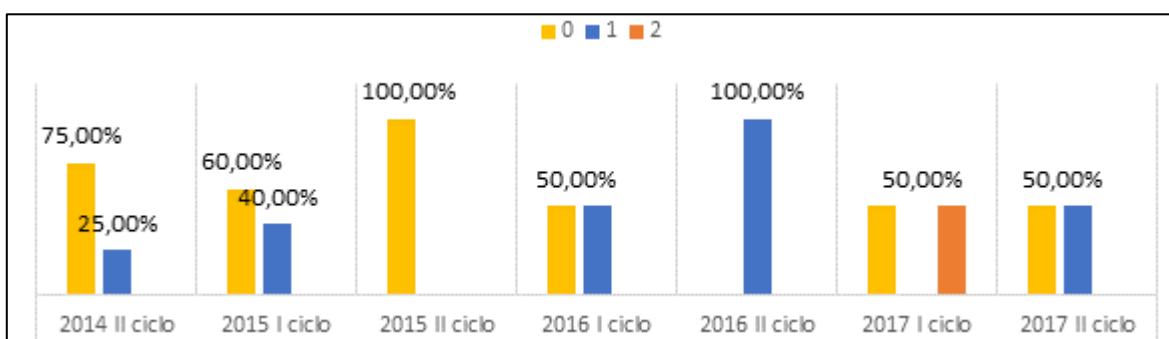


Figura A.54. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según cuantificación de operaciones de función

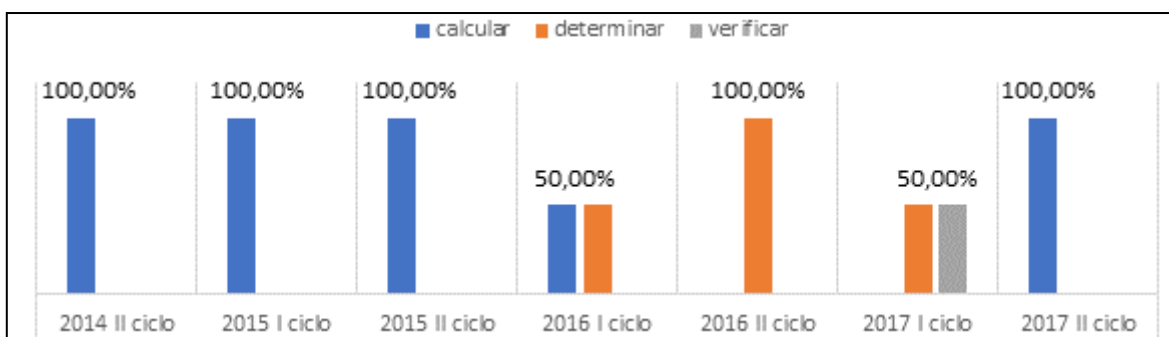


Figura A.55. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según acción

Tabla A.23. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba según objetivo general

Objetivo general	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo
Otro	100	100	100	100	0	100	100
Resolver problemas de aplicación usando conceptos del cálculo	0	0	0	0	0	0	0
Aplicar conceptos del cálculo	NA	NA	NA	NA	100	NA	NA

Nota: NA=No aplica, indica que el objetivo no pertenece al programa de curso del periodo respectivo.

Tabla A.24. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba según objetivo específico

Objetivo específico	2014 II ciclo	2015 I ciclo	2015 II ciclo	2016 I ciclo	2016 II ciclo	2017 I ciclo	2017 II ciclo
Desarrollar (aplicar) conceptos de cálculo	0	0	0	0	NA	0	0
Optimizar funciones							
Resolver problemas que involucren cálculo de integrales y derivadas	100	100	100	100	100	100	100
Otro	0	0	0	0	0	0	0
Cálculo de límites	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Calcular integrales definidas e indefinidas usando técnicas de integración	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Calcular integrales definidas usando la definición	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA
Resolver problemas aplicando concepto de derivada	NA	NA	NA	NA	0	NA	NA

Nota: NA=No aplica, indica que el objetivo no pertenece al programa de curso del periodo respectivo.

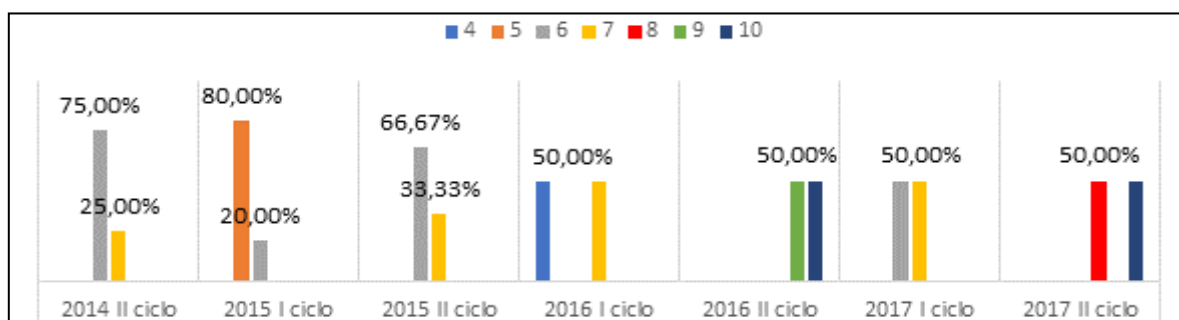


Figura A.56. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según puntuación

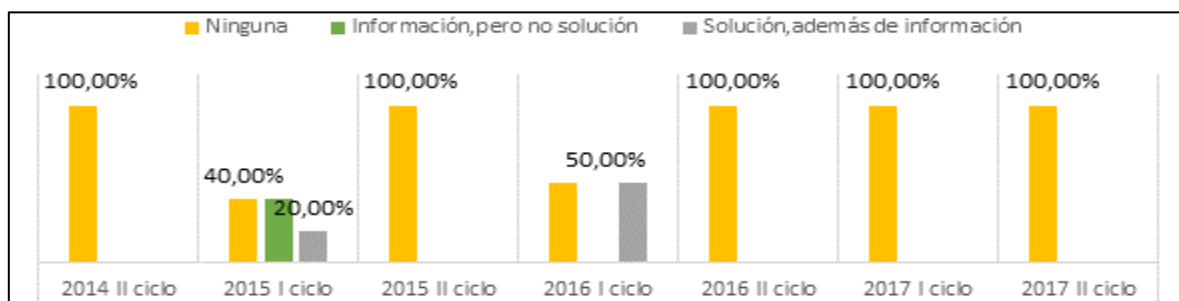


Figura A.57. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según tipo de relación

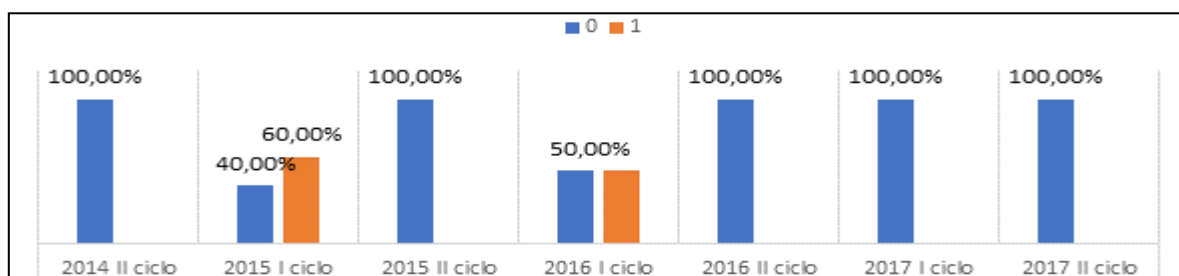


Figura A.58. Tareas sobre aplicaciones de la integral de tercera prueba parcial según cuantificación de relación entre tareas