UNIVERSIDAD
DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Trabajo Fin de Máster

Evolución del significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales

Presentado por
Dña. Cristina Ayala-Altamirano

Granada, 2017

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Trabajo Fin de Máster

Evolución del significado que estudiantes de tercero de primaria le otorgan a la letra en contextos funcionales

Trabajo de Fin de Máster presentado por
Dña. Cristina Ayala-Altamirano
para la obtención del título Máster en Didáctica de la Matemática

Dña. Cristina Ayala-Altamirano

Dirigido por la Doctora
Dña. Marta Molina
Granada, 2017

El presente trabajo de investigación se ha realizado dentro de los proyectos de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España; y en el seno del grupo de investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" (FQM-193) de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

A mi esposo Sebastián por apoyarme, aventurarse y ser parte de este proyecto.
A la Doctora Marta Molina por los aprendizajes y experiencias transmitidas. Por tener siempre la paciencia y sabiduría para guiarme en este proceso.
A mis amigas y amigos por acompañarme en esta parte del viaje.
A mi familia, que desde Chile me han transmitido su amor e incondicionalidad y me alentaron a llegar hasta aquí.

Resumen

En el contexto funcional del pensamiento algebraico temprano, en este trabajo analizamos los significados que estudiantes de tercer curso de primaria otorgan a las letras en contextos funcionales. Además, describimos las interacciones que contribuyen a ampliar o modificar las ideas sobre las letras de los estudiantes. Esta investigación ratifica que las dificultades se pueden atribuir a la falta de experiencias con cantidades que covarían y uso de la notación. El trabajo da cuenta de múltiples significados posibles que los estudiantes asignan a las letras y amplía los hallazgos de estudios previos al describir cómo los estudiantes representan la variable.

Palabras clave: Early Algebra, Pensamiento algebraico, Pensamiento funcional, simbolismo algebraico, variables

In the context of the functional approach of early algebra, in this study we analyse the meaning given to letters by third graders. Also, we describe the interactions which contribute to widen or modify the student's ideas about letters. This research study confirms that the difficulties can be attributed to lack of experience which co-varying quantities and use of notation. This study shows multiple possible meanings that students assign to letters and broaden the findings of previous studies by describing how students represent the variable.

Keywords: Early Algebra, algebraic thinking, functional thinking, algebraic symbolism, variables

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

Presentación

Este documento constituye la memoria del Trabajo de Fin de Máster de la autora, realizado en el programa de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada durante el curso 2016/2017. El trabajo que aquí se describe se enmarca en un experimento de enseñanza cuyo foco es indagar en las capacidades que manifiestan los estudiantes de educación primaria en situaciones funcionales como una aproximación al pensamiento algebraico. En particular en esta investigación se indaga sobre los significados que le otorgan a las letras estudiantes de tercero de primaria, de un colegio de Granada.

El escrito se estructura en seis capítulos. En el primero se presenta el problema de investigación y se justifica la pertinencia y necesidad de efectuar esta investigación. En el segundo, se describen los principales elementos que conforman el marco teórico y los antecedentes de este trabajo. Basándose en lo expuesto en los capítulos anteriores, en el tercero se exponen los objetivos generales y específicos de esta investigación. En el cuarto capítulo se describe el marco metodológico, en el cual se detalla el tipo de investigación, la muestra, el diseño y recogida de datos, su implementación y análisis. En el siguiente capítulo se exponen los resultados y su discusión, esto según los objetivos propuestos. Finalmente, en el sexto capítulo se presentan las conclusiones y principales hallazgos de esta investigación, también se enumeran algunas de las limitaciones y líneas abiertas del trabajo.

Capítulo 1: Presentación y justificación del problema de investigación

En este capítulo presentamos el problema de estudio y justificamos su realización desde tres perspectivas: la docencia, la investigación y la dimensión curricular.

Presentación del problema de estudio

Durante las últimas décadas, aproximadamente a partir de los años 90, se han realizado numerosas investigaciones sobre la integración del álgebra en la Educación Primaria. Una de las propuestas curriculares que surgió producto de estas investigaciones es la denominada *Early algebra*, en la cual se busca promover modos de pensamiento algebraico, mayor grado de generalización en el pensamiento de los estudiantes de Educación Primaria y aumentar su capacidad para expresar esa generalidad (Brizuela y Blanton, 2014; Molina, 2005), esto a partir de "la algebrización del currículum" (Kaput, 2000).

En el marco de esta propuesta nuestro interés es indagar en cómo los estudiantes expresan con letras la generalización e interpretan expresiones generales que utilizan símbolos literales. Si bien la generalización se puede expresar de diversas formas (Brizuela y Blanton, 2014; Blanton et al., 2015; Radford, 2011b), nos focalizaremos solo en el uso de las letras. Nos interesa observar cómo los estudiantes relacionan las letras con cantidades indeterminadas y las emplean como notación.

Centrados en la perspectiva socio-constructivista del aprendizaje, consideramos que un factor importante es la interacción en el aula, por tanto también será el foco de nuestra problemática. Particularmente, nos detendremos a analizar qué interacciones de las investigadoras ocasionan cambios en el significado que los estudiantes le otorgan a las letras.

Justificación desde la perspectiva de la docencia

Una cantidad indeterminada puede tener asociados distintos significados, por lo que es necesario dar la oportunidad a los estudiantes de participar en experiencias de aprendizaje diversas que les ayuden a generar significados amplios y ricos, tanto de las cantidades indeterminadas como de las letras. Estas últimas consideradas como una forma de representación o notación de la primera (Schoenfeld y Arcavi, 1988; Trigueros y Jacobs, 2008; Ursini, 1994). Considerando que el pensamiento funcional es un importante punto de entrada al pensamiento algebraico (Carraher y Schliemann, 2007), este trabajo pretende aportar en la comprensión de los significados y usos de las letras como variables que manifiestan los estudiantes al resolver tareas en las que está involucrada una relación funcional. Esto permitirá develar las tensiones que se producen al tratar con un nuevo sistema de representación y aportar información útil a los docentes en la preparación de la enseñanza. Considerando lo propuesto por MacGregor y Stacey, (1997), los docentes deben ser conscientes de las creencias acerca de los significados de las letras y la notación matemática que traen consigo los estudiantes y contemplarlas en el proceso de enseñanza.

La información obtenida en esta investigación será de utilidad a los docentes para preparar sus clases, pues contribuirá a planificar su enseñanza fundada en lo que realizan los estudiantes y en algunas situaciones de enseñanza y aprendizaje exitosas.

Justificación desde la perspectiva de la investigación

En el contexto del *early algebra,* diversas investigaciones dan cuenta que los estudiantes son capaces de desarrollar una comprensión de las letras como representaciones de cantidades indeterminadas que varían, cuando se les brinda la oportunidad de participar en clases y discusiones sobre funciones (e.g. Brizuela, Blanton, Gardiner, Newman-Owens y Sawrey, 2015; Cañadas, Brizuela y Blanton, 2016). Estas investigaciones se han realizado principalmente en contextos de habla inglesa, y fuera de España. Por lo que queda por contrastar si esos resultados son generalizables al contexto español.

Uno de los significados que se le puede otorgar a la letra es como una cantidad indeterminada que varía. Al respecto, Socas, Camacho, Palarea y Hernandez, (1996) plantean que el uso del concepto de variable es una práctica matemática común, sin embargo, parte de los problemas es que la escuela no desarrolla el sentido de variabilidad ligado a las letras (p.28). Por lo que resulta de interés el estudio de situaciones en las que variabilidad y letras son relacionadas.

Asimismo, las investigaciones antes mencionadas y otras (e.g. Küchemann, 1981) se refieren a los significados que los estudiantes le otorgan a las letras, pero existe escasa información sobre cómo los estudiantes representan cantidades indeterminadas. Es por esto que el interés de esta investigación es describir cómo los estudiantes representan las cantidades indeterminadas, si emplean las letras o no.

Finalmente, investigaciones sobre la interacción en el aula en el contexto del álgebra son escasas. Si bien se reconoce la importancia de las experiencias de aprendizaje

(Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey y Newman-Owens, 2017; MacGregor y Stacey, 1997; Molina, Ambrose y Del Río, en prensa), pocas de las investigaciones describen las ayudas que los docentes (en nuestro caso las investigadoras) le otorgan a los estudiantes. Warren, (2006) analizando actividades de patrones algebraicos describe las ayudas que el docente realiza para vincular descripciones verbales y símbolos. De modo similar, pero en el contexto de las funciones, nuestro interés es describir cuáles son las ayudas que permiten una cambio en los significados de las letras.

Justificación desde la perspectiva curricular

En la actualidad diversos lineamientos curriculares han incorporado el álgebra desde primaria. Uno de los primeros documentos curriculares en explicitar su incorporación es el National Council of Teacher of Mathematics (2000). En éste se propone como objetivo que los estudiantes sean capaces de comprender patrones, relaciones y funciones; así como también representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas, utilizando símbolos y modelos matemáticos para comprender relaciones cuantitativas. Posteriormente, el Common Core State Standards for Mathematics (NGA y CCSSO, 2010) reitera la importancia del álgebra desde los primeros cursos de educación infantil y, por ejemplo, sugiere el uso de letras en expresiones algebraicas desde tercero de primaria.

En particular, en España, país en el que se realiza la investigación, en el Real Decreto 126/2014 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014), se explicita por ejemplo, que los estudiantes deben ser capaces de "describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones" (p. 19.387). En Chile también se observa esta tendencia, las bases curriculares (Ministerio de Educación de Chile, 2012) señalan que se espera que los estudiantes "expliquen y describan múltiples relaciones como parte del estudio de la matemática. Busquen relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, lo que los facultará para investigar las formas, las cantidades y el cambio" (p. 33).

Por lo tanto, como se ha incorporado el álgebra en primaria en los países antes mencionados y otros como Australia, Canadá, Japón o Portugal (Merino, Cañadas y Molina, 2013), es importante proporcionar datos empíricos y fundamentados para informar el desarrollo del pensamiento del álgebra y, en particular, la construcción del significado de la notación algebraica.

Capítulo 2: Marco teórico y antecedentes

En este capítulo mostramos los principales elementos teóricos que sustentan la investigación y los relacionamos con el problema descrito anteriormente. Además, describimos brevemente algunas investigaciones previas relacionadas con el significado de las letras como notación algebraica. En primera instancia presentamos los tópicos generales, como: el álgebra escolar, la propuesta *early algebra* y el pensamiento funcional, para luego focalizarnos en los temas específicos: las variables, su notación y la interacción en el aula.

Álgebra escolar

Existe cierto consenso sobre que el álgebra no es algo sencillo de definir, pues es un concepto multidimensional (Usiskin, 1988). Basándose en la identificación de los distintos componentes y concepciones del álgebra, han surgido diversos enfoques que proponen la introducción de la enseñanza del álgebra escolar desde la educación primaria y analizan sus conexiones con otras áreas del currículo. Entre estos enfoques hay numerosas relaciones, por lo que no se consideran como disjuntos. Además, no se restringen solo al uso del simbolismo. Se pueden identificar: (a) aritmética generalizada y estudio de patrones, (b) enfoque funcional, (c) resolución de problemas, (d) estudio de estructuras y (e) lenguaje algebraico (Molina, 2012). Al conseguir un equilibrio entre los distintos componentes y complementarlos con diversas situaciones que les otorguen significado, los alumnos tendrán la oportunidad de comprender en profundidad la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso del razonamiento algebraico (Bednarz, Kierany Lee, 1996).

Early algebra

Early algebra es una propuesta que sugiere la incorporación del pensamiento algebraico desde los primeros cursos de primaria (Kaput, Carraher y Blanton, 2008; Molina, 2009). Se basa en los planteamientos de Kaput (2000) quien propone la "algebrización del currículo". Esta propuesta no implica incorporar más contenidos, sino potenciar el currículo tradicional y cultivar hábitos del pensamiento que atiendan a la estructura de la matemática.

Se espera que los estudiantes de Educación Primaria logren desarrollar diversas habilidades a través de las prácticas de exploración, modelización, predicción, discusión, argumentación y comprobación de ideas (Blanton y Kaput, 2005). Se busca promover mayor grado de generalización en el pensamiento de los estudiantes y aumentar su capacidad para expresar esa generalidad.

Según Kaput, (2008), las prácticas del pensamiento algebraico —generalización, representación y razonamiento—, tendrán lugar en los siguientes aspectos del contenido relacionados con el álgebra: (a) estudio de estructuras y sistemas abstraídos de cálculos y relaciones, incluyen los que emergen de la aritmética generalizada y el razonamiento cuantitativo: (b) estudio de funciones, relaciones y variaciones conjuntas; y (c) aplicación de un conjunto de lenguajes de modelamiento tanto dentro como fuera de las matemáticas. Sobre la practica representacional, es necesario considerar que la generalización y el razonamiento no se pueden separar de los modos como se representan (Brizuela y Blanton, 2014).

La propuesta *early algebra* se basa en estudios que demuestran que los estudiantes tienen capacidades algebraicas innatas (Molina, 2009). Algunos trabajos que dan cuenta de las capacidades resultantes de experiencias en el marco del *early algebra* son: Blanton et al. (2015); Brizuela y Earnest (2008); Cañadas et al. (2016); Pinto, Cañadas, Moreno y Castro (2016); Schliemann et al. (2011).

Pensamiento funcional

Este tipo de pensamiento forma parte del pensamiento algebraico y se centra en el estudio de las funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real (Cañadas y Molina, 2016). Incluye la generalización de las relaciones entre cantidades que varían en forma conjunta; la expresión de estas relaciones utilizando el lenguaje natural, símbolos, tablas o gráficos; y el uso de esas expresiones para analizar el comportamiento de una función (Blanton, 2008; Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011). También se refiere a las ideas de cambio cualitativo, cuantitativo, relaciones entre estos cambios y usos de relaciones para resolver problemas (Warren y Cooper, 2005).

El pensamiento funcional se puede incorporar a la sala de clases con facilidad, pues se pueden adaptar las historias problemáticas preguntando qué piensan en una variedad de casos y luego generalizar a partir de ellos (Molina et al., en prensa). Según lo propuesto por Smith (2008), se pueden identificar tres tipos de relaciones funcionales, que dan cuenta de la manera en la cual se relacionan las variables involucradas en una función: (a) la recursividad, (b) la covariación y (c) la correspondencia. La recursividad describe la variación de una secuencia de valores, indica cómo obtener un número de la secuencia a partir de un número anterior y se puede centrar en la variable dependiente o a en la independiente. Las relaciones de co-variación, se centran en cómo dos cantidades varían simultáneamente y en cómo los cambios en los valores de una producen cambios en la otra; y a las relaciones de correspondencia, se centran en la correlación entre dos cantidades expresadas como la regla de la función.

Es necesario considerar que la recursividad no implica necesariamente una relación funcional. Blanton et al. (2011) plantean que la recursividad es una aplicación limitada, no implica la relación entre las variables al referirse a una sola de ellas, por lo tanto es considerada solo como el primer paso en la construcción del sentido de los datos. Argumentando que el pensamiento funcional requiere mirar una secuencia de valores y comprender cómo las cantidades varían en relación a otras, mencionan que esto se puede llevar a la práctica al establecer relaciones de covariación y correspondencia, siendo esta última la relación más general, pues se pueden determinar valores específicos de la función fácilmente sin conocer otros valores de la función (p.53).

La variable

Dependiendo del contexto en el que aparece la variable su significado puede cambiar (Ursini, 1994; Wagner, 1983). Es así como consecuencia de las múltiples dimensiones del álgebra escolar que tendrá distintos usos. Entre ellos encontramos la variable como números generalizados, como representante de cantidades que varían, como incógnita y como parámetros o como objetos arbitrarios en una estructura (Molina, 2012; Usiskin, 1988).

En respuesta a estas múltiples interpretaciones, Schoenfeld y Arcavi (1988) señalan que es necesario brindar a los estudiantes la oportunidad de resolver una serie de problemas de modo que puedan comenzar a notar y articular los patrones generales que ven en las distintas facetas. Una construcción adecuada de la variable implica incluir diversos significados, interpretar de distintas maneras los símbolos que se usan y tener la posibilidad de pasar de un significado a otro con flexibilidad según las exigencias del problema a resolver (Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero, 1996; Ursini, 1994).

Como se mencionó anteriormente, al describir los objetivos de la propuesta *early algebra*, la generalización y la expresión de ésta son claves en el desarrollo del pensamiento algebraico. Desde otro enfoque, pero concordando al destacar estos dos procesos, el grupo Azarquiel (1993) señala que dar significado a la variable supone una conjunción entre la generalización y la representación. La generalización podrá dar sentido a los símbolos, permitiendo establecer relaciones con las situaciones que se pretende expresar a partir de ellos. Centrándose en la noción de variable como una cantidad que varía, se espera que los símbolos no se consideren como simples objetos que se manipulan o sustituyen por otros números, más bien se espera que a través de la generalización representen auténticas situaciones variables. Este grupo, también señala que otra instancia que contribuye a adquirir el concepto de variable relacionado con la idea de variabilidad es la resolución de situaciones abiertas en las que el propio estudiante "debe tomar decisiones, debe producir la variación, describiendo la variable adecuada y conduciendo la selección de valores al objetivo que pretende" (p.55). En definitiva, la comprensión de la variabilidad en situaciones en la que se trabaja una serie de casos particulares ayudará a relacionar este significado de la variable con las letras como símbolos que las representan. Lo anterior coincide con lo que plantean Kaput, Blanton y Moreno (2008) quienes señalan que el símbolo se debe construir a partir de un campo de referencia y la generalización es el conductor principal.

Letras como notación algebraica y su uso en expresiones

Según Radford (2011b), el pensamiento algebraico trata de razonar con cantidades indeterminadas de manera analítica. Es posible pensar en cantidades indeterminadas antes de tener símbolos para expresarlo, pero una vez desarrollada la capacidad de expresión se pueden utilizar distintas formas. El modo más sofisticado implica el uso de letras. Las letras como símbolos algebraico son herramientas lingüísticas para representar las ideas matemáticas de forma sucinta (Blanton et al., 2015). Actualmente, no son consideradas como única forma de manifestar el pensamiento algebraico, si bien son esenciales, se acepta que los modos de pensamiento y actividad algebraica se pueden representar de otras maneras. En Blanton et al. (2011) se caracteriza las letras del siguiente modo:

- Las letras representan una medida o la cantidad de objetos, no el objeto en sí.
- En una expresión se pueden repetir letras o usar letras distintas, no obstante hay que considerar que una misma letra utilizada en un ecuación representa un único valor y distintas letras pueden tener el mismo valor.
- La misma letra puede tomar uno o más roles dentro de un problema o situación.

- Pueden representar una cantidad discreta o una cantidad continua.

Por otra parte, una de las dificultades que afrontan los estudiantes al enfrentarse a expresiones algebraicas que emplean letras, es su ambigüedad. La cual se puede interpretar desde distintos puntos de vistas: se produce al poder interpretarse como un proceso o un objeto (Drouhard y Teppo, 2004), o por la polisemia de los símbolos, pues, por ejemplo x se puede interpretar como una cantidad que varía, una incógnita o el argumento de una función (Nataraj y Thomas, 2017). Consideremos x en la expresión $2x + 1$. Representa una cantidad que varía si es que se presenta en un contexto en el que pueda obtener distintos valores, como en el caso de $2x + 1 = y$. Representa una incógnita con valor único si se expresa del siguiente modo $2x + 1 = 11$ y podría ser el argumento de una función en el siguiente caso $f(x) = 2x + 1$. Continuando con el ejemplo $2x + 1$, se considera un proceso si la expresión es interpretada como un conjunto de símbolos que indican como operar sobre la x, pudiendo reflejar esto al asignar valores a la letra para poder calcular el resultado de la expresión. En cambio se puede interpretar como un objeto si la expresión se considera como una totalidad y puede ser utilizada en otras instancias o ser modificada para resolver otras situaciones problemas similares. Los significados que sean asignados a las letras afectaran en el modo como son resueltos los problemas, pudiendo ser resueltos de manera inesperada (Küchemann, 1981).

Estudios previos sobre el significado de las letras

Las primeras investigaciones sobre el significado de las letras se centraron en las dificultades y errores de los estudiantes de secundaria. Por ejemplo, Küchemann (1981) realiza una investigación, que se enmarca en el enfoque del álgebra como la aritmética generalizada, en la que aplica una prueba a estudiantes con aproximadamente 14 años de edad. Los criterios en los que se basa el instrumento de evaluación son dos: complejidad estructural del ítem y la naturaleza de los elementos del ítem, entre ellos las letras. Menciona que los estudiantes tienen dificultades para interpretar la letra como una cantidad que varía. Predomina una visión estática sobre una dinámica donde x e y pueden tener valores que cambian y a veces pueden ser iguales. También las letras tienden a ser interpretadas como objetos concretos o ignoradas. Además señala que los diferentes significados, que se describen en la tabla 1, afectarían al modo como pueden ser resueltas las actividades y, que para tener una comprensión real de la letra, los estudiantes deben enfrentarse a actividades que sugieran esos significados al menos con estructuras simples. Este autor organiza las categorías que establece para identificar los significados desde la más simple a la más compleja, además las relaciona con las etapas de desarrollo cognitivo propuestas por Piaget. Concluye que las dificultades que manifiestan los estudiantes se deben a motivos de desarrollo cognitivo, por lo que en un inicio las actividades deberían considerar los significados asociados a las operaciones concretas, para luego progresar poco a poco en la abstracción.

Tabla 1
Interpretaciones de los estudiantes sobre las letras

Categoría	Descripción
Letra evaluada	Se asigna un valor numérico desde el inicio.
No usa la letra	Ignoran las letras o no reconocen su existencia, pero le dan un significado.
Letra como un objeto	Es la abreviatura de un objeto o el objeto en su propio derecho.
Letra como una incógnita	Número específico que representa una incógnita y puede operar sobre este directamente.
Letra como un número generalizado	Es interpretada como una representación de varios valores numéricos antes de que uno en particular.
Letra como una variable	Representa un rango de valores no especificados y sistematiza la relación entre dos conjuntos.

La investigación de Booth, (1988) también sigue el enfoque del álgebra como aritmética generalizada y se centra en las dificultades y errores que manifiestan estudiantes de entre 13 y 16 años. Identifica posibles explicaciones del origen de los errores. Una de estas es el foco de la actividad algebraica y la naturaleza de sus respuestas. Señala que mientras que en la aritmética se busca encontrar una respuesta numérica, en el álgebra el centro está en los procesos y relaciones, su expresión en forma general. Como consecuencia de no identificar las diferencias en el tipo de respuesta, en contextos algebraicos los estudiantes esperan escribir una respuesta numérica o necesitan la clausura, es decir completan expresiones con un símbolo que representa el resultado $x + y = z$. Además señala que el uso de la notación y los convenios en el álgebra también pueden ser origen de los errores. Por ejemplo, el signo "+" tiende a ser interpretado como una acción y el signo "=" como la indicación de un resultado. Propone que para evitar esto desde el aprendizaje de la aritmética los estudiantes tengan la posibilidad de comprender algunas relaciones que luego se convierten en dificultades en el álgebra.

En el estudio de MacGregor y Stacey (1997) los autores interpretan las letras como números generalizados o como incógnitas. Realizan pruebas escritas, intervenciones y entrevistas a estudiantes de entre 11 y 15 años. Se discute si el origen de los errores y dificultades tienen relación con el desarrollo cognitivo de los estudiantes o no. Ellos creen que la falta de desarrollo cognitivo explica la falta de respuestas correctas, pero no explica la variedad de interpretaciones que realizan los estudiantes. Proponen que las causas de los malos entendidos pueden ser: (a) suposiciones intuitivas y razonamiento pragmático acerca de la nueva notación, (b) analogías con sistemas familiares, (c) interferencias del nuevo aprendizaje y (d) materiales de enseñanza engañosos. El origen puede estar asociado a la enseñanza o a los estudiantes.

Por su parte Knuth, Alibali, McNeil, Weinberg y Stephens (2011) investigan la comprensión de la equivalencia y de las letras como representación de cantidades variables de un grupo de estudiantes de sexto a octavo grado. Su motivación fueron estudios previos en los que se constata que los símbolos literales son un gran desafío para los estudiantes y los problemas en su comprensión se reflejan en la simbolización de las soluciones de problemas y en las formas de pensar algebraicamente.

Para analizar la compresión de las letras establecieron cinco categorías: valores múltiples, números específicos, objeto (etiqueta/objeto), otros y no sabe/no responde. Sus resultados muestran que en los tres grados se acepta que la letra puede representar más de un valor, aunque en octavo esta idea se evidencia en mayor número de estudiantes. Concluyen que es importante fomentar una interpretación de la letra como valores múltiples, pues podría contribuir a la preparación de los estudiantes al álgebra y formas de pensamiento algebraico. Apoyan la idea de incorporar la noción de variabilidad antes del séptimo grado (nivel en el que comienza el estudio del álgebra al momento de realizar la investigación) y considerar que tal vez presentar en primaria la variable a partir de expresiones como "*8 + 3 = ¿?*" puede llevar a considera la letra como un número específico.

Otros trabajos se han focalizado en interpretar los distintos significados que le otorgan a las letras los estudiantes de Educación Primaria y muestran de lo que son capaces estudiantes de estos niveles. Blanton et al. (2015) compararon el impacto de una intervención en el marco del *early algebra* con una intervención tradicional, con estudiantes de tercer grado. Analizaron sus respuestas codificándolas a partir de las categorías que se describen en la tabla 2. Sus resultados muestran que los estudiantes que participaron en la intervención en el marco del *early algebra* dejaron de asignar un valor a las cantidades desconocidas involucradas en las situaciones presentadas en los test. Logran expresar relaciones entre variables utilizando letras. Concluyen que la instrucción tiene efectos significativos en todas las prácticas fundamentales del álgebra evaluadas, en particular, sobre el uso de la notación algebraica. Los estudiantes de tercero de primaria pueden representar correctamente cantidades desconocidas, generalizar y conectar el lenguaje natural con notaciones algebraica así como representar relaciones funcionales mediante esa notación.

Tabla 2
Categorías de análisis de tareas que involucran cantidades desconocidas

Categoría	Significado y uso
Letra	Asigna una letra al valor desconocido
Comparación	Compara las cantidades en la tarea
Valora	Asigna un valor específico al valor desconocido.
Letra relacionada	Escribe una expresión utilizando la relación planteada en una pregunta anterior.
Letra nueva	Utiliza una letra para representar el valor desconocido que no está relacionado con la respuesta anterior.

En esta misma línea o enfoque, otras investigaciones como Brizuela y Blanton (2014) evidencian que niños de primero de primaria logran dar significado a las letras como cantidades que varían y las utilizan para resolver problemas funcionales. No rechazan su uso y sus ideas cambian con el tiempo a medida que van participando en experiencias de aprendizaje. Los estudiantes demuestran estar dispuestos a dejar indeterminadas las cantidades involucradas, pero tienden a fijar los valores cuando las letras no son utilizadas. Esto evidencia que las letras pueden convertirse en herramientas para repensar las cantidades con las que se está lidiando. Estos trabajos también han permitido identificar las ideas innatas de los estudiantes, como por ejemplo que tienden a asignar un valor fijo a las letras determinado por su posición en el alfabeto o aceptan que pueden representar diversos valores, pero de todos modos le asignan valores numéricos de forma arbitraria para resolver las situaciones (Brizuela et al. 2015).

En segundo grado de primaria se han obtenido resultados similares. Cañadas et al. (2016) realizan un experimento de enseñanza en el que está involucrada la relación funcional $y = 2x$. Ellos evidencian que los estudiantes pueden expresar relaciones funcionales usando letras. Nuevamente se observan casos en que el valor de la letra depende de la posición en el alfabeto y reconocen las letras como representaciones de cualquier número.

En el contexto español, Molina et al. (en prensa) focalizan el estudio en los significados asignados a la letra y en su uso en expresiones algebraicas junto con números y signos operaciones. La investigación muestra los resultados de una intervención en primero y tercero de educación primaria y toma la comprensión inicial de los estudiantes como punto de partida para la instrucción. Las respuestas de los estudiantes se categorizaron según lo propuesto por Blanton et al., (2015) y se complementó con dos nuevas categorías: (a) letras relacionadas y valor, y (b) rechazo de la letra. Al igual que otras investigaciones confirman que para los estudiantes que recién están aprendiendo a leer no es fácil desprenderse de la idea de correspondencia y significado basado en el alfabeto. No obstante a lo recién mencionado, también evidencian que hay un grupo de estudiantes que logra emplear la letra como una cantidad que varía, esto sin recibir instrucción previa. Además, este grupo de estudiantes al participar en las discusiones y puestas en común favorecen que otros estudiantes evolucionen en la comprensión de la variabilidad. Por tanto, proponen que los docentes generen oportunidades de uso de la letra y que consideren el rol importante de la interacción, permitiendo a los estudiantes expresar y comunicar sus ideas a otros. Otros elementos a considerar son la familiaridad del contexto y la simplicidad de las funciones, los cuales colaborarán a dar sentido a las letras, así como, expresar los datos en tablas.

Las investigaciones hasta el momento descritas han evolucionado desde el estudio de los errores y dificultades al resolver situaciones con notación algebraica, siguiendo con el reconocimiento de la importancia de las experiencias de aprendizaje en el proceso de construcción del significado, hasta la manifestación de las capacidades de estudiantes de Educación Primaria para trabajar con estos símbolos y cuáles son los significados que pueden manifestar en distintos momentos. Para complementar lo anterior, Blanton et al. (2017) describen una progresión del pensamiento sobre las variables como cantidades que varían y su notación. Consideran que las dificultades con el simbolismo puede ser menos asociadas a la edad y más con los conflictos que las notaciones crean con las experiencias y entendimientos previos de los estudiantes, uno de ellos la experiencia que tiene con los símbolos en contextos no matemáticos.

Los citados autores caracterizan niveles cada vez más sofisticados en el pensamiento a medida que se avanza en un proceso instruccional. Esto no se considera una progresión lineal en el pensamiento, los estudiantes pueden saltar de niveles en una tarea en particular o en diversos contextos. Otras consideraciones que se plantean sobre los niveles:

- Transmiten conceptualizaciones de los estudiantes y también evidencian lo que pueden o no hacer.
- Deben captar el razonamiento inicial y compresión matemática formal dirigida en la secuencia instruccional.
- A veces el pensamiento sobre la variabilidad es indistinguible de su notación.
- La notación y la comprensión de la variabilidad no progresan en conjunto.

Se definen seis niveles, que describen la compresión de la letra como variable que representa un valor que varía y el uso de los símbolos literales. Estos son los siguientes:

1. Pre-variable/pre-simbólico. No se reconocen o perciben las variables en el contexto matemático, ni se utilizan los símbolos literales o no literales para representar cantidades. Esta etapa se puede relacionar con el rechazo o negación de la letra. Frente a actividades en las que hay cantidades indeterminadas, intentan adivinarlas o contarlas.
2. Pre-variable/letras como etiquetas o como objetos. La letra representa algo que no es variable. Como aún no internalizan el concepto de variable, utilizan otro significado basándose en el contexto del problema. No perciben las variables como un objeto que puede existir indeterminadamente y que necesita ser matematizado.
3. Letras representando variables con valores fijos y deterministas. En este nivel comienzan a percibir la variable y el símbolo literario que la representa. La letra es un valor desconocido y con un valor fijo o determinado por una lógica externa. En esta categoría, por ejemplo, asignan un valor a la letra dependiendo

de la posición ordinal en el alfabeto. No ven que la elección del símbolo puede ser arbitraria y su elección no tener relación con su elección.

4. Letras como representaciones de variables con valores fijos, pero arbitrariamente escogidos. A diferencia del nivel anterior, aquí la elección al azar de ese valor fijo es el elemento distintivo. La letra puede ser “cualquier número”, sin estar vinculado a una relación matemática o seguir una lógica interna. Una vez escogido el valor, no puede tener otro.
5. Letras que representan variables que tiene valor desconocido variable. Aquí, en el contexto funcional, la letra es conceptualizada como una incógnita variable, reconocen que tiene un valor desconocido y para responder a las actividades no tienen necesidad de encontrar un valor.
6. Letras que representan variables como objetos matemáticos. En este nivel pueden operar o transformar las variables para producir una nueva relación.

En resumen, los dos primeros niveles implican la interiorización del significado de la letra como variable, los estudiantes operan con objetos conocidos o los proponen. No conceptualizan la cantidad variable en situaciones problemáticas como una cantidad desconocida o indeterminada. Desde el nivel tres al cinco, se realiza un proceso de condensación del significado, se comienza a percibir la variable como una cantidad desconocida que puede variar. Ya en el nivel seis se convierte en un objeto y se produce la reificación, se matematizan cantidades desconocidas y se actúa sobre ellas como objetos en sí mismos o combinados con otros.

El aprendizaje de los símbolos y la intervención en el aula.

Kaput et al. (2008) plantean que la simbolización es un proceso social, en el que la generalización y la simbolización están estrechamente relacionadas. Conjuntamente es un proceso dinámico, en el cual al lograr simbolizar la generalización se logra una nueva plataforma sobre la cual expresar y razonar. Las simbolizaciones resultantes permiten tratar esas generalizaciones simbolizadas como objetos y relaciones por derecho propio que pueden ser utilizadas para otras generalizaciones en un espiral ascendente de abstracción matemática. Considerando esto, símbolo y referente pueden ser experimentados separadamente por los estudiantes. Por ejemplo, los estudiantes podrían comprender la idea de variable como cantidad indeterminada y que varía, sin embargo no contar con los símbolos convencionales para representarlos. Antes de lograr utilizar las letras y sus convenciones, los estudiantes utilizarán otras formas intermedias de simbolización y crearán un sistema de símbolos convencionales a partir de la comparación de los sistemas que utilizan, esto con el objetivo de buscar una forma económica y eficiente de comunicar sus ideas.

Asimismo, estos autores señalan que el proceso de simbolización se considerará algebraico cuando está al servicio de expresar generalizaciones o razonamientos sistemáticos con simbolizaciones algebraicas convencionales. Mientras que se considerará cuasi-algebraico si implica expresar una generalización, pero utiliza cualquier otro sistema de símbolos, ya sea aritméticos, formales, informales o idiosincráticos. No será algebraico si la actividad solo consiste en manipular las convenciones algebraicas sin estar involucrado algún tipo de generalización (p. 49-50).

Debido a lo antes mencionado, la perspectiva adoptada en este trabajo es que en el aprendizaje del álgebra los signos se elaboran en actividades matemáticas específicas, en las que se adquieren sistemas de signos socialmente objetivados, cuyos usos y elaboración de significado son procesos individuales y sociales que emergen en relación a otros sistemas de signos que surgen en el aula (Radford, 1999). Bajo esta perspectiva los signos no son cognitivamente neutros, en nuestro caso, la variable y las letras tienen algún significado para los estudiantes aun cuando sean distintos a los esperados, y los hacen actuar de cierto modo. Al usar la variable y las letras, los procesos cognitivos de los estudiantes se modifican, es decir, su forma de abordar una actividad cambia y se ajusta a las experiencias que enfrentan.

En base a la teoría Vygotskiana sobre la enseñanza y aprendizaje, Radford (2011a) señala que la acción permite un cambio en el pensamiento de quien aprende, entendiendo que el pensamiento tiene componentes materiales e ideas, formas de imaginación sensual, gestos, tacto y acciones reales con signos y artefactos culturales. Propone que el cambio se produce por la acción, pero también menciona que esto es posible gracias a la ayuda del docente, quien en su intervención crea Zonas de Desarrollo Próximo (ZDP) que permiten avanzar al estudiante.

Sobre las intervenciones en el aula, Warren, (2006) describe un experimento de enseñanza realizado con un grupo de 27 estudiantes de aproximadamente 10 años, a quienes propuso situaciones de patrones algebraico. Ella identifica las acciones de los maestros que ayudan a establecer los vínculos entre descripciones verbales y escritas al realizar generalizaciones, es decir, acciones que ayudan en la simbolización de las generalizaciones. Entre ellas menciona:

- Usar lenguaje y acciones para relacionar la representación visual con tablas de valores.
- Introducir un lenguaje específico.
- Justificar descripciones verbales.
- Traducir de manera explícita lo que verbalizan con notación matemática.
- Introducir notación para cantidades desconocidas.

Concluye que la actividad algebraica es posible en edades tempranas con acciones docentes apropiadas.

Para determinar cuándo las acciones son apropiadas nos referiremos a lo que señala Onrubia (2000). Él coincide con Radford al definir la enseñanza como un proceso de creación de Zonas de Desarrollo Próximo, añadiendo la idea de "ayuda ajustada". Esta propuesta se basa en la consideración de que la enseñanza debe ayudar a la construcción de significados y sentidos que efectúa el alumno. La ayuda se considera eficaz si se ajusta a la situación y las características del alumno, conjugando los siguientes elementos: (a) toma en cuenta los esquemas de conocimiento de los estudiantes en relación con el contenido que se está enseñando, considerando los significados y sentidos que dispongan y (b) provoca retos que hagan cuestionarse esos significados y sentidos, forzando la modificación y que esos cambios vayan en el camino esperado, es decir, que se acerquen a las intenciones educativas.

La ayuda ajustada del docente consistirá por tanto en proponer retos abordables. Esto no implica que solo sean retos en los cuales se pueda encontrar la respuesta correcta, sino más bien que los pueda afrontar con sus propias posibilidades y con los apoyos e instrumentos que reciba de parte del profesor. El objetivo es que el estudiante logre realizar de manera autónoma las mismas tareas a un nivel superior.

La idea de "ayuda ajustada", Onrubia (2000) la relaciona con la noción de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), la que se define como la distancia entre el nivel del resolución de una tarea que una persona puede alcanzar actuando independientemente y el nivel que puede alcanzar con la ayuda de un compañero más competente o experto en esa tarea (Vygotski, 1979). Es en la ZDP donde puede producirse nuevas formas de entender gracias a la interacción con otros. Es un espacio dinámico, por tanto una intervención que pueda ser exitosa en un momento, en otro momento puede no serlo, debido a las características de los participantes. A causa de esto mismo, las ayudas e intervenciones no deben ser las mismas para todos los estudiantes, se requiere de la variación y diversidad de formas de ayuda.

En el esquema que se muestra en la figura 1 se integran las propuestas descritas en este apartado, graficando el proceso social que permite adquirir un sistema de signos o modificar los significados otorgados a ellos, en el que el docente interviene creando ZDP.

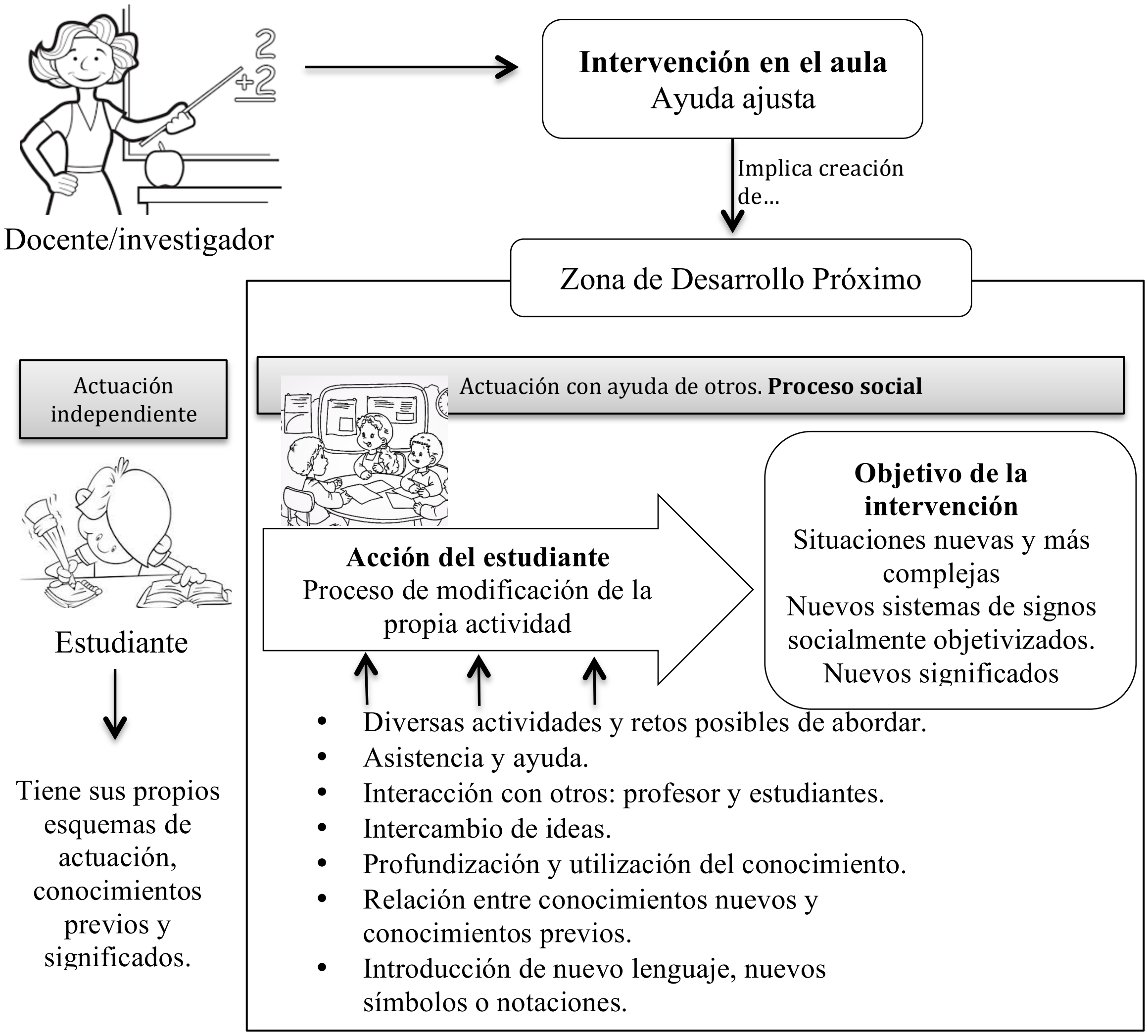


Figura 1. Esquema del aprendizaje de signos e intervención en el aula

Capítulo 3: Objetivos de investigación

En esta investigación se han definido dos objetivos generales que se desglosan en dos objetivos específicos cada uno:

OG1: Describir cómo evolucionan los significados que estudiantes de tercero de primaria asocian a las letras en contextos funcionales.

OE1: Identificar significados que los estudiantes asignan a las letras, a partir de sus intervenciones orales y producciones escritas en el marco de un experimento de enseñanza en el que se trabaja en contextos funcionales.

OE2: Describir la trayectoria que siguen los significados puestos de manifiesto por los estudiantes a lo largo de las sesiones de trabajo que constituyen el citado experimento de enseñanza.

OG2: Identificar y describir las intervenciones en el aula que contribuyen a la evolución del significado que los estudiantes asignan a las letras.

OE1: Identificar las intervenciones en el aula que se detectan asociadas a un cambio en el significado que el estudiantes asigna a la letra.

OE2: Describir intervenciones conducentes a que los estudiantes den significado o cambien el significado dado a la letra.

Capítulo 4: Método

En este capítulo describimos los elementos que forman parte del marco metodológico de esta investigación. Detallamos el tipo de investigación, la muestra, el diseño y recogida de datos, su implementación y análisis.

Tipo de investigación

Esta investigación es de tipo cualitativa, específicamente tiene carácter exploratorio y descriptivo (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2010). Se enmarca dentro de una investigación más amplia que sigue la metodología de investigación de diseño, concretamente un experimento de enseñanza, y que tiene como objeto de estudio el pensamiento funcional de estudiantes de tercero de educación primaria.

La investigación de diseño o investigación basada en diseño es un paradigma metodológico de naturaleza principalmente cualitativa. Se nutre de otras disciplinas como antropología, psicología, sociología, neurociencia, etc. Sus objetivos son:

- comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad.
- desarrollar y analizar de forma paralela un diseño instruccional específico.

(Molina, Castro, Molina y Castro, 2011, p.75)

En este tipo de investigación no se busca que los diseños sean perfectos, más bien se pretende explicar la relación entre la teoría educativa, la práctica y herramientas de enseñanza. Su potencial es que hace progresar teorías de aprendizaje y enseñanza en situaciones complejas y conduce a conocimiento empíricamente fundamentado (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003; The Design-Based Research Collective, 2003; Valverde, 2014)

El experimento de enseñanza es una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son normalmente un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores (Steffe y Thompson, 2000). Su objetivo es comprender cómo, cuándo y porqué ciertas innovaciones educativas pueden funcionar en el aula, para esto se testea y generan hipótesis, ya sea inicialmente fundadas en investigaciones y literatura relacionada con la temática o generadas durante el experimento según las observaciones realizadas. Se lleva a cabo en tres fases: (a) preparación del experimento, (b) experimentación y (c) análisis retrospectivo (Cobb y Gravemeijer, 2008).

En este trabajo, nos situamos en el análisis retrospectivo del experimento de enseñanza, el cual consiste en analizar los datos, revisar y reformular las hipótesis. Se regresa a cada una de las secuencias aplicadas y se analiza detalladamente el quehacer del estudiante, su entorno y el contexto en el que se realizó la actividad.

Sujetos

La muestra está formada por 24 estudiantes que cursaban tercero de Educación Primaria (8-9 años) durante el curso 2014-2015. Es de carácter intencional, según la disponibilidad del centro y los docentes del mismo. El centro educativo está ubicado en Granada y es privado. Antes de participar en el experimento de enseñanza, los estudiantes no habían trabajado en el aula tareas que involucraran funciones ni hicieran uso de las letras para representar cantidades indeterminadas.

Diseño e implementación de la recogida de datos

El experimento de enseñanza en el que se enmarca este trabajo implicó cuatro sesiones de trabajo en el aula de tercero de primaria[1], de aproximadamente 90 minutos cada una. En la recogida de los datos participó un grupo de investigadores de la Universidad de Granada que tenían distintos roles. Durante todas las sesiones una investigadora fue quien dirigió las clases, desempeñándose como investigadora-docente. Otra de las investigadoras prestaba apoyo a la primera y además cumplía el rol de investigadora-observadora. Un tercer integrante del grupo se encargaba de los registros audiovisuales, cumpliendo el rol de técnico de las cámaras.

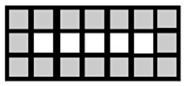
Los estudiantes estaban sentados en grupos de 3 o 4 integrantes conservando la configuración habitual de la sala de clases. En consecuencia, podían trabajar de forma individual o conjunta al estar sentados en grupo.

En cada una de las sesiones se planteó una situación relativa a una relación funcional y varias preguntas respecto de esta. En la tabla 3 se muestran los enunciados generales y las funciones presentadas en cada una de las sesiones. En la segundo y tercera se considera la misma situación, aunque las preguntas que se plantean son diferentes. En este trabajo no consideran los datos recogidos en la última sesión pues las cuestiones planteadas a los estudiantes no implicaban el uso de letras.

[1] También se realizaron de forma paralela sesiones en las aulas de primero y quinto de primaria.

Tabla 3

Situaciones presentadas a los estudiantes en las sesiones de trabajo

Cuestionario	Forma de la función	Nombre de la situación	Enunciado general
1	$f(x) = x + 5$	La edad de hermanos.	María y Raúl son dos hermanos que viven en La Zubia. María es la hermana mayor. Sabemos que María es 5 años mayor que Raúl.
2 3	$f(x) = 3x$	Venta de camisetas.	Carlos quiere vender camisetas con el escudo de su colegio para poder ir de viaje de estudios con su clase. Gana 3 euros con cada camiseta que vende.
4	$f(x) = 2x + 6$	Las baldosas.	Un colegio quiere reformar el suelo de todos sus pasillos porque está ya muy estropeado. El equipo directivo decide enlosar los pasillos con baldosas blancas y con baldosas grises. Todas las baldosas son cuadradas y tienen el mismo tamaño. Las baldosas se van a colocar en cada pasillo de la manera que ves en la siguiente imagen.  El colegio contrata una empresa para que reforme los pasillos de las tres plantas del colegio. Te pedimos que ayudes a los albañiles a contestar algunas preguntas que necesitan responder para hacer este trabajo.

La estructura de las clases fue similar: se realizó una introducción de la situación, luego los estudiantes realizaron las actividades presentadas en un set de hojas de trabajo[2] y se realizaron puestas en común de sus trabajos en distintos momentos de la clase de forma intercalada con el trabajo escrito en las actividades propuestas.

Durante las sesiones, al presentar por primera vez las actividades o situaciones se dialogó sobre ellas. Esto con el objetivo de que los estudiantes comprendieran los enunciados y contextos que se les estaban proponiendo. No se les indicó cómo realizar el trabajo o qué estrategia aplicar pues se quería activar sus ideas o conocimientos previos y a partir de ellos dirigir la atención hacia los elementos algebraicos que se buscaba trabajar. En general, el objetivo no fue obtener respuestas correctas, sino

[2] Las hojas de trabajo se pueden descargar desde el siguiente link https://goo.gl/6jHts9

compartir diferentes verbalizaciones de las relaciones que establecieron entre las dos variables y la manera cómo lo expresaban por escrito.

La recogida de datos se realizó a partir de tres fuentes de información: (a) cuestionarios escritos, (b) grabaciones de video con una cámara fija ubicada al final del salón y (c) grabaciones de una cámara móvil que captó el trabajo realizado en algunos grupos de estudiantes al responder los cuestionarios y la interacción entre estudiantes o de estos con el investigador-docente o investigador-observador. De las grabaciones, para esta investigación se transcribieron los momentos de las sesiones en los que realizaron actividades relacionadas con el uso de las letras[3].

Diseño de los cuestionarios

En todas las sesiones el modelo del razonamiento inductivo propuesto por Cañadas y Castro (2007) fue la base para estructurar las actividades de las hojas de trabajo así como la discusión en el aula. Principalmente se preguntó por la relación de correspondencia, pero también por la relación de covariación (Smith, 2008). No se presentaron casos consecutivos para evitar utilizar el pensamiento recursivo.

Al responder las hojas de trabajo los estudiantes tuvieron la oportunidad de usar diversas representaciones, tales como tablas, lenguaje verbal y letras, de esta forma tendrían múltiples formas de explorar las relaciones funcionales y expresar su pensamiento.

Las letras se introdujeron de manera intencional para representar cantidades indeterminadas. No se les dio explicación sobre su significado. En los casos en los que se propuso la letra a utilizar (ej., Z), se escogieron con la intención de que no fuesen relacionadas con el sistema de numeración romano o con las iniciales de los objetos de los problemas para alejar la idea de etiqueta de las letras.

Cuestionario 1

La situación de las edades de dos hermanos (ver tabla 3) es el eje central de este cuestionario que consta de dos hojas. La elección de esta se debe a que se consideró que era un contexto accesible para los estudiantes, pues muchos de ellos tenían hermanos y pensar en las diferencias de edad y cómo cambian a medida que crecen es algo cercano a ellos, permitiendo involucrarlos en la tarea y pensar en la variación de las cantidades con diferencias constantes. Una de las limitantes del contexto es que no

[3] Las transcripciones se pueden descargar en el siguiente link: https://goo.gl/G5XnU5

tiene sentido pensar en cantidades superiores a 100, no obstante considerando que es el primer acercamiento a las tareas funcionales, el rango numérico es suficiente para realizar la introducción. La idea de variable también se ve favorecida por el contexto, pues de forma natural podrían entender que a medida que se envejece la edad cambia.

En la tabla 4 se describen las preguntas propuestas en este cuestionario que forman parte de la primera hoja de trabajo, cuyo objetivo es presentar diversos casos particulares numéricos.

Tabla 4

Preguntas propuestas en la hoja de trabajo 1. Cuestionario 1

Preguntas	Descripción
Cuando Raúl tiene 7 años, ¿cuántos años tiene María?	Focalizadas en la relación de correspondencia directa. Consideran cantidades cercanas y un caso particular lejano.
Cuando Raúl tiene 15 años, ¿cuántos años tiene María?	
Cuando Raúl tiene 80 años, ¿cuántos años tiene María?	

En la segunda hoja de trabajo se esperaba que luego de trabajar con diversos casos particulares, siguiendo la propuesta para el desarrollo del razonamiento inductivo, lograran generalizar la relación entre las edades y la expresaran utilizando las letras que ellos escogieran, convirtiéndose en el primer acercamiento en el uso de este tipo de representación. Los datos se organizan en una tabla y en la última fila se les propone completar las celdas con una letra, tal como se muestra en la figura 2.

5. Rellena algunas filas de la tabla con cantidades que pueden ser ciertas. Recuerda que María es 5 años mayor que Raúl. No escribas en la fila que aparece en gris.

Edad de Raúl	Operaciones para calcular la edad de María	Edad de María
7		
15		
80		
⇨	➡	

6. Elije una letra para indicar la edad de Raúl. Coloca la letra en la fila de la tabla que aparece en gris, junto a la flecha blanca.
Junto a la flecha negra, escribe cómo usar la letra para calcular la edad de María.

Figura 2. Actividades hoja de trabajo 2, cuestionario 1

Cuestionario 2

El hilo conductor de este cuestionario es el problema de la venta de camisetas (ver tabla 3). Los contextos de ventas también se consideran situaciones familiares a los estudiantes. En esta oportunidad es posible trabajar contemplando un rango numérico mayor, a diferencia del problema de las edades.

En la primera hoja de trabajo se presenta la situación como un problema abierto. El objetivo es motivar a los estudiantes a involucrarse en la situación y favorecer la exploración de la relación funcional subyacente. Los estudiantes deben proponer la cantidad de camisetas vendidas, pudiendo trabajar sobre la base de cualquier número de camisetas y así analizar que conforme más ventas se realicen, las ganancias irán aumentando.

En la segunda hoja de trabajo se proponen 15 sentencias en las que los estudiantes deben argumentar si son verdaderas o falsas. Los casos fueron organizados considerando casos cercanos no consecutivos, casos lejanos no consecutivos y letras. En la tabla 5 se describen cada una de ellas y se muestran en el orden cómo se representaron en el cuestionario.

Las preguntas 6, 7, 14 y 15 se focalizan en el uso de la letra. En todos los casos se representó la variable independiente con la letra Z, mientras que la representación de la variable dependiente fue cambiando:

- En la pregunta 6 se expresa explicitando la operación que permite calcular la cantidad de euros ganados.
- En las preguntas 7 y 14 se presenta con una letra distinta a Z y no se explicita la operación que representa la relación con la variable independiente. Estas sentencias puede ser verdaderas o falsas según las condiciones que señalen que debe cumplir las letras N e Y.
- En la pregunta 14 se representan ambas variables con la misma letra (Z).

Tabla 5

Preguntas propuestas en la hoja de trabajo 2. Cuestionario 2

Preguntas	Descripción
1. Cuando Carlos vende 5 camisetas, gana 10 euros. 2. Cuando Carlos vende 23 camisetas, gana 69 euros.	El foco es la relación de correspondencia directa. Considerando cantidades cercanas.
3. Cuando Carlos vende mil camisetas, gana tres mil euros. 4. Cuando Carlos vende un millón de camisetas, gana cuatro millones de euros.	El foco es la relación de correspondencia directa. Considerando cantidades lejanas.
5. Los euros que gana Carlos son el doble del número de camisetas que vende.	Generalizar la relación de correspondencia directa.
6. Cuando Carlos vende Z camisetas, gana 3xZ euros. 7. Cuando Carlos vende Z camisetas, gana N euros	Generalizar la relación de correspondencia directa y expresarlo utilizando letras.
8. Carlos a vendido 20 camisetas más. Entonces ha ganado 60 euros más.	El foco se encuentre en la relación de covariación.
9. Cuando Carlos vende el doble de camisetas, gana el doble de euros.	Generalizar la relación de correspondencia directa.
10. Carlos ha ganado 18 euros. Entonces sabemos que ha vendido 6 camisetas.	El foco es la relación de correspondencia inversa. Considerando cantidades cercanas.
11. Carlos ha ganado 150 euros. Entonces sabemos que ha vendido 60 camisetas. 12. Carlos quiere ganar 900 euros. Entonces tiene que vender 300 camisetas.	El foco es la relación de correspondencia inversa. Considerando cantidades lejanas.
13. Carlos tiene que vender un número de camisetas igual a un tercio del dinero que quiere ganar.	Generalizar la relación de correspondencia inversa.
14. Carlos quiere ganar Z euros. Entonces tiene que vender Y camiseta. 15. Carlos quiere ganar Z euros. Entonces tiene que vender Z camiseta.	Generalizar la relación de correspondencia inversa y expresarlo utilizando letras.

Cuestionario 3

En este cuestionario nuevamente el hilo conductor es el problema de las camisetas. El objetivo es profundizar en la indagación del pensamiento funcional de los estudiantes y explorar aspectos relacionados con el uso de representaciones variadas (ej. la representación tabular) y con el reconocimiento del codominio de la función.

En esta oportunidad la tabla que se debe completar tiene dos columnas, una con la cantidad de camisetas vendidas y la otra con la cantidad de euros ganados. Los casos nuevamente fueron organizados considerando casos cercanos no consecutivos, casos lejanos no consecutivos y letras. Se completan celdas en ambas columnas estableciendo las relaciones de correspondencia directa o inversa. En ocasiones las cantidades están representadas con la operación que permite obtenerlas a partir de la variable independiente o dependiente, según sea el caso. En la figura 3 se presentan los cuatro casos en los que están involucradas las letras.

Número de camisetas vendidas	Euros ganados	
N		⇐ Relación de correspondencia directa
	3×Y	⇐ Relación de correspondencia inversa
Z:3		⇐ Relación de correspondencia directa
	D	⇐ Relación de correspondencia inversa

Figura 3. Actividades que involucran letras. Cuestionario 3

Descripción del desarrollo de las sesiones

En este apartado describimos de modo general cómo se desarrolló cada una de las sesiones, enfatizando aquellas actividades en las que se utilizaron las letras.

Sesión 1

La sesión comenzó presentando la situación y verificando que la entendieran, para esto se realizó una puesta en común y los estudiantes propusieron edades para María y Raúl, verbalizando los motivos por los que establecieron esas relaciones. Enseguida se les entregó la primera hoja de trabajo con las preguntas que se describen en la tabla 4. Luego, nuevamente se hizo una puesta en común y se les mencionó el siguiente caso: han encontrado una fotografía del cumpleaños de Raúl, y solo se ven las velas del pastel (sin decirle cuál es la edad de Raúl en ese cumpleaños), ¿cómo podrían saber la edad de María? Su objetivo fue que los estudiantes generalizaran la relación explicando que basta con mirar las velas y sumar 5 para saber la edad de María. Tras esto continuaron trabajando con casos particulares y los representaron en primera instancia en una tabla construida por ellos y luego plantearon otros casos en la tabla propuesta en la segunda hoja de trabajo (ver figura 2).

Finalizó la sesión con una puesta en común de sus ideas sobre el uso de las letras, los criterios que siguieron para escogerlas, la forma como las utilizaron para representar la operación y el significado que les otorgaron.

Sesión 2

La sesión inició presentando la situación. Se solicitó a los estudiantes que con sus compañeros dialogaran y establecieran una forma de determinar cuánto dinero puede conseguir Carlos. Sin mencionar la cantidad de camisetas vendidas o las ganancias obtenidas se esperaba que comprendieran la situación, identificaran las variables involucradas y las expresaran del modo que cada uno estimara conveniente. Luego, se entregó una segunda hoja en la que se propusieron una serie un sentencias asociadas con la relación funcional, debían identificar si eran verdaderas o falsas justificando su respuesta según los datos presentados en el problema. A continuación se realizó una discusión de todo el grupo en la cual los estudiantes verbalizaron sus respuestas y argumentaron por qué pensaban que cada una de las sentencias era correcta o no. La discusión, en lo que respecta a las letras, se focalizó en las sentencias: "Cuando Carlos vende Z camisetas, gana 3xZ euros" y "Carlos vende Z camisetas, gana N euros". El objetivo fue que verbalizaran las generalizaciones de la relación funcional, así como invitar a los estudiantes a dar significado a la letra.

Sesión 3

El trabajo inició registrando casos particulares en una tabla de tres columnas. La primera columna representaba la cantidad de camisetas vendidas, la segunda la operación para calcular la cantidad de euros y la tercera la cantidad de euros ganados. Los casos los planteó cada estudiante con la condición que fueran verdaderos. Una vez que completaron la tabla, reflexionaron sobre las relaciones que se podían extraer de los datos y realizaron una puesta en común.

En la segunda hoja de trabajo, los casos fueron propuestos por las investigadoras. Tras unos minutos en los que registraron sus respuestas por escrito, se realizó una discusión en gran grupo. La discusión se centró principalmente en las celdas que contenían letras. Las siguientes actividades y hojas de trabajos se focalizaron en la representación de los datos en gráficos. Dado que esto no es el objetivo de esta investigación, no se entra en detalle sobre estas.

Categorías y análisis de datos

En la investigación se realizó una codificación cualitativa (Hernández Sampieri et al., 2010) de las transcripciones de las sesiones grabadas con las cámaras fija y móvil, así como de las producciones escritas de los estudiantes. Primero, en cada uno de los instrumentos que fueron utilizados para la recogida de datos, se identificaron las instancias relacionadas con la variable y su notación. Luego, en el caso de las transcripciones se realizó una revisión línea por líneas, las cuales fueron organizadas y numeradas en una hoja de cálculo, tal como se muestra en la figura 4. En cuanto a las producciones escritas, las unidades de análisis fueron las respuestas escritas, las cuales fueron contrastadas con las transcripciones de las grabaciones de las cámaras fija y móvil, para complementarlas con los argumentos que daban los estudiantes.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1						Uso de las letras						
2	Nº	Diálogo	Sesión	Estudiante que interviene	Nº Intervención	Variable independiente		Relación entre las variables		Variable dependiente		Significado de las letras
3						Categoría	Representación	Categoría	Representación	Categoría	Representación	
4	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11	C12
28	**24**	E5: Yo he puesto aquí una R de Raúl (señala 1º columna), y aquí una C de cinco (señala 2º columna)	1	E5	3	Letra	R	Solo letras	R + C	Letra nueva no relacionada	M	**Letras como etiquetas o como objetos**
29	**25**	**Investigadora 1**: una C de cinco, aquí ¿y por qué has puesto una C de cinco?	1									
30	**26**	E5: Por que todo era sumando 5	1									
31	**27**	**Investigadora 1**: Porque todo era sumando 5. Vale y si R es la edad de Raúl, ¿cómo pondrías la edad de María?	1									
32	**28**	E5: M	1									
33	**29**	**Investigadora 1**: ¿Por qué?	1									
34	**30**	E5: Porque es la inicial	1									
35	**31**	**Investigadora 1**: Porque es la inicial, ¿y que tiene que ver la R con la M.?¿Qué relación hay entre la R y la M que has escogido?	1									
36	**32**	E5: Son las iniciales de sus nombres	1									
37	**33**	**Investigadora 1**: ¿qué más ideas tenéis? A ver (menciona nombre de estudiante)	1									
38	**34**	E6: A + 5. Y pongo por ejemplo 45 (imperceptible)	1	E6	4	Letra	A	Letra y número	A + 5	Número relacionado con el valor fijado	47	**Letra como variable/ valor aleatorio.**
39	**35**	**Investigadora 1**: O sea por ejemplo si coges la letra Z, ¿te vale esa, o cual has pensado tú? Si pongo la A que tú me estabas diciendo. Entonces en este caso, ¿qué harías con esa letra?	1									
40	**36**	E6: Haría A más 5	1									
41	**37**	**Investigadora 1**: A más 5, ¿y cuál sería entonces la edad de María?	1									
42	**38**	E6: imperceptible	1									
43	**39**	**Investigadora 1**: por ejemplo 47, ¿por qué 47?	1									
44	**40**	E6: imperceptible	1									
		Investigadora 1: tú me has dicho que la A representa la edad de Raúl, y esto										

Figura 4. Ejemplo organización transcripción cámara fija para el análisis de los datos

En primera instancia se analizaron las transcripciones de las puestas en común que fueron registradas por la cámara fija. Se identificó cómo los estudiantes representaban la variable independiente, la variable dependiente y la relación funcional. A su vez, cuál era el significado asignado a las letras en sus intervenciones. En las transcripciones, las intervenciones de los estudiantes fueron codificadas con la inicial "I" y numeradas según orden cronológico (I_i, con i = 1, … 31). Para mantener el anonimato de los estudiantes, a estos también se le asignó un código específico (E_i, con i = 1, … 24). Luego se revisó las transcripciones de las grabaciones de la cámara móvil, se identificaron los mismos elementos antes mencionados y se incluyó el análisis de las intervenciones docentes. La intervenciones fueron codificadas como IM_i (con i = 1, … 13).

Finalmente se analizaron las producciones escritas, las cuales se interpretaron a la luz de los hallazgos obtenidos del análisis de las explicaciones verbalizadas en las instancias grabadas y se codificaron siguiendo los mismos criterios tanto para los modos de representar la variable como para asignarle un significado a la letra. Este proceso se estructuró en dos fases.

La primera fase consistió en identificar las actividades que requerían el uso de las letras. En total se seleccionaron 9 actividades (sesión 1: 1 actividad; sesión 2: 4 actividades y sesión 3: 4 actividades). Las respuestas fueron transcritas y codificadas en una hoja de cálculo: En la primera columna se identificó al estudiante, en la segunda a la actividad, en la tercera si respondía o no la actividad y en las siguientes se utilizaron los mismos criterios empleados al analizar las transcripciones (ver figura 5). Se incluyó al final una columna de comentarios en la que se transcribió los argumentos escritos por los estudiantes en las actividades en las que debían justificar si las sentencias eran verdaderas o falsas y también se incluyeron aquellas anotaciones al pie de página o al borde del margen que los estudiantes realizaron en las hojas y que permitían comprender sus respuestas.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1				Uso de las letras						Significado de las letras	Comentario
2				Variable independiente		Relación entre las variables		Variable dependiente			
3	Est.	Actividad	¿Responde?	Categoría	Representación	Categoría	Representación	Categoría	Representación		
4	E18	S1_A1	NO								
5	E18	S2_A6	Verdadera								
6	E18	S2_A7	NO								
7	E18	S2_A14	NO								
8	E18	S2_A15	NO								
9	E18	S3_A1	NO								
10	E18	S3_A2	NO								
11	E18	S3_A3	NO								
12	E18	S3_A4	NO								
13	E6	S1_A1	Sí	Letra	A	Letra y número	A + 5	Número	65		
14	E6	S2_A6	Falsa								
15	E6	S2_A7	NO								
16	E6	S2_A14	Falsa							Letra evaluada/ Valor lógico	Evalúa Z como 30 e Y como 29. 3 x 30 no es 29
17	E6	S2_A15	Falsa								
18	E6	S3_A1	Sí	Letra	N			Número	24		
19	E6	S3_A2	Sí	Número	27			Letra y número	3 x Y		

Figura 5. Ejemplo análisis producciones escritas

La segunda fase consistió en comparar las respuestas escritas con la información recabada al analizar las transcripciones de las cámaras. Esto permitió interpretar las respuestas a la luz de los comentarios de los estudiantes y dar un significado más preciso a aquellas respuestas que parecían ambiguas. Por ejemplo, en la variable dependiente se analizó la codificación "número", ya que algunos que parecían ser escogidos al azar o no tener relación con la variable dependiente pero sí lo tenían y seguían una lógica explicitada en las grabaciones. De forma similar sucedía con los significados asociados a las letras, al escribir en las hojas de trabajo un número se podría pensar que los estudiantes no comprendían el significado de la letra como una variable, no obstante al contrastarlo con las grabaciones fue posible determinar cuándo lo escribían como un ejemplo, siendo conscientes que la letra podría representar un número indeterminado.

Significado de las letras como variables

Las categorías de análisis se propusieron basándose en los antecedentes y el marco teórico expuesto en los capítulos anteriores. En el caso de las categorías para el significado de las letras como variables se organizaron considerando su evolución, contemplando desde el rechazo de la letra hasta su aceptación como una variable que representa un valor indeterminado. En la tabla 6 se describen cada una de ellas.

Tabla 6

Categorías de análisis significado de las letras como variables

Categoría	Descripción
Rechazo de la letra	Señala que no se pueden utilizar letras porque no significan nada.
Acepta uso letra	Utiliza la letra pero al analizar sus intervenciones el significado asociado no se puede determinar con exactitud.
Letra como etiqueta o como objeto.	Las letras son escogidas considerando la inicial o como etiqueta de un objeto, por ejemplo dice la M es María, sin referirse a que representa la cantidad de años que tiene María.
Letra evaluada	Relaciona la letra con una cantidad, no obstante no es posible identificar los motivos por los cuales asignó ese valor.
Letra evaluada/ valor lógico	El valor de la letra es único y determinado por alguna lógica, por ejemplo el orden en el alfabeto.
Letra como variable/ Valor aleatorio	Señala que la letra puede tener un valor variable, el cual ejemplifica. Es usual que en su respuesta mencione “por ejemplo”, un caso es “la Z puede ser 5, por ejemplo, entonces como cada camiseta cuesta 3 euros. 3x5 son 15, por ejemplo”.
Letra como variable/ valor indeterminado	Señala que la letra puede tener valores variables y puede analizar la situación sin necesidad de recurrir a un ejemplo numérico concreto. Responde generalizando.

Con el objetivo de visualizar cómo cambiaban los significados de las letras en el transcurso de cada sesión y describir su evolución a lo largo de todo el periodo que duró la intervención en aula, se construyó una tabla de doble entrada en la que se relacionó los significados de las letras, la sesión, el número de la intervención y el estudiante que expresó ese significado. Además, se realizó una comparación de la información recogida y se describió en detalle los significados observados en cada sesión.

Representación de la variable

Las categorías surgieron de manera inductiva al analizar tanto las transcripciones como las producciones escritas de los estudiantes. Se identificó que los estudiantes utilizaban letras o números o ambas. En el caso de las letras y de los números, se logró establecer categorías más específicas, las cuales se presentan en la tabla 7.

Tabla 7

Categorías de análisis representación de las variables

Códigos	Descripción
Letra	Utiliza alguna letra para representar la variable.
Solo letras	Expresa la relación funcional utilizando letras y la operación involucrada. Por ejemplo, en el problema de las edades escribe: "R + C", reemplazando el número (cinco) por una letra, que en este caso es su inicial.
Letra relacionada	Utiliza la misma letra que propone en la variable independiente o la dependiente, según sea el caso, y expresa la relación. Por ejemplo, en la venta de las camisetas proponen N como el número de camisetas y 3xN como la cantidad de euros ganados.
Letra nueva no relacionada	Propone una nueva letra que no tiene relación con la variable independiente o dependiente, según sea el caso. Por ejemplo, en las edades propone R y M, centrándose en las iniciales de los nombres.
Letra nueva relacionada	Plantea una letra distinta a la variable independiente o dependiente, según sea el caso, pero hay un explicación sobre cómo se relacionan. Por ejemplo, relaciona las letras por medio del orden del alfabeto: A más 5 igual a E.
Repite letras	Expresa la variable dependiente y la independiente de igual forma, utilizando la misma letra, por ejemplo, vende N camisetas y gana N euros.
Número	Representa la variable escribiendo un número.
Número relacionado con el alfabeto	Dada la letra que representa la variable dependiente o independiente, completa el dato que falta con un número que determina considerando el orden en el alfabeto.
Número aleatorio	Asigna un valor numérico al azar. Por ejemplo, si se plantea que gana S euros, señala que vende 100 camisetas, pues puede ser cualquier número.
Letra y números	Expresa la relación funcional utilizando letras, números y la operación involucrada en la situación. Por ejemplo, en el problema de las edades, expresa "R + 5".
Palabras	Expresa la relación funcional o las variables con palabras.

En primera instancia se categorizaron las representaciones como “letra”, “letra y número” y “número”. Luego de categorizar la información recabada en las sesiones, se realizó una comparación de las representaciones y los argumentos dados para su uso, así surgieron categorías más específicas. Enseguida se contrastaron con los significados otorgados a las letras, para finalmente describir la forma cómo representaron la variable independiente, la variable dependiente y la relación funcional. Vale mencionar, que en los casos en los que no había certeza de los motivos por los cuales se propuso la letra o el número, se decidió por categorizar de manera amplia las respuestas. Por ejemplo, en el caso en que al estudiante se le pedía representar la variable dependiente a partir de una variable independiente “A”, si las letras utilizadas eran distintas y no había explicación, se categorizó su respuesta como “letra nueva”, en cambio cuando sí había registro de las decisiones tomadas, éstas se asociaron a categorías más específicas. En el ejemplo, el estudiante podría responder con la letra E, y en el contexto de las edades de los hermanos, señalar que la letra se encuentra a una distancia de 5. En este caso la letra E, se considera una “letra nueva relacionada” según el orden de las letras en el alfabeto.

Intervención en el aula

Para identificar y describir las intervenciones que contribuyen a la evolución del significado que los estudiantes asignan a las letras o a sus representaciones, se analizó la transcripción de las grabaciones de la cámara móvil. Se analizó línea a línea las intervenciones identificando las representaciones y significados de las letras utilizando las mismas categorías propuestas en las tablas 6 y 7. Las categorías para describir la intervención en el aula, que se muestran en la tabla 8, se basaron en la propuesta de Onrubia (2000) y Warren (2006), siendo complementadas con las evidencias observadas en las grabaciones. Se consideró una intervención efectiva cuando el estudiante logra modificar su significado inicial y adopta uno más complejo. Por ejemplo, en un caso hipotético un estudiante interpreta las letras como una etiqueta o un objeto y, luego de dialogar con la investigadora-docente, el estudiante considera que la letra puede tener cualquier valor, es decir la considera como una variable con valor indeterminado.

Tabla 8
Categorías de análisis intervención en el aula

Códigos	Descripción
Activa conocimientos previos de los estudiantes	• Revisa y explicita ideas previas de los estudiantes. • Debate sobre las propias ideas y las contrasta con las de otros.
Orienta la actividad y esfuerzo de los estudiantes	• Centra la atención tanto en el proceso como en resultado. • Ordena las ideas que los estudiantes verbalizan y los orienta para que las expresen por escrito. • Hace alusión a elementos conocidos para comprender la tarea.
Ayuda a atribuir significado a la nueva información	• Facilita la oportunidad de verbalizar las ideas y contrastarlas con las de otros. • Plantea contraejemplos. • Fomenta el pensamiento inductivo analizando casos particulares para generalizar el proceso. • Guía una comprensión cualitativa del problema y las relaciones entre las variables. • Contrasta la comprensión cualitativa del problema con una cuantitativa. • Introduce lenguaje específico. • Traduce la verbalización dada por el estudiante con notación algebraica.

Fiabilidad

Para asegurar la fiabilidad de las categorías, en primera instancia la autora de este trabajo analizó los datos, estableció las categorías y unidades de análisis. Luego, fueron chequeadas por la directora del mismo, llegándose a acuerdo sobre si las categorías cumplían con los siguientes características: (a) existe un criterio único en su construcción, (b) son exhaustivas, (c) son mutuamente excluyentes, (d) significativas, (e) claras y (f) replicables.

Capítulo 5: Resultados y discusión

En este capítulo presentamos los resultados y discusión de los mismos. Se organiza en tres apartados: significados de las letras, representación de las cantidades indeterminadas e intervención en el aula. En cada uno de ellos describimos y relacionamos las respuestas dadas por los estudiantes en las puestas en común, en las intervenciones captadas por la cámara móvil y en las producciones escritas.

Significado de las letras

En las puestas en común se analizaron 31 intervenciones (S1 = 8; S2 = 16; S3 = 7) identificando 36 significados. Las siete categorías se observaron por lo menos una vez, lo que evidencia una amplia diversidad de significados. En la tabla 9 se registra cuándo se advirtió cada uno y su frecuencia a los largo del experimento de enseñanza. Los significados se ordenan según su complejidad desde el rechazo hasta entender la letra como la representación de una cantidad variable indeterminada.

Tabla 9

Significados identificados en las transcripciones de las puestas en común

Significado de la letra	Sesión 1	Sesión 2	Sesión 3	Frecuencia total
Rechazo de la letra	-	-	1	1
Acepta uso de la letra	2	-	-	2
Letra como etiqueta o como objeto	2	2	-	4
Letra evaluada	4	1	2	7
Letra evaluada/ valor lógico	-	2	2	4
Letra como variable/ valor aleatorio	1	5	1	7
Letra como variable/ valor indeterminado	-	9	2	11

En la tabla 9 se puede observar que los significados evolucionan desde nociones simples que implican aceptar la letra y relacionarla con elementos concretos (observadas en la sesión 1) para luego en la sesión 2 centrarse especialmente en la idea de variabilidad (14 de 19 significados). En la sesión 3 no se observa una tendencia en los significados, pero a modo general se puede visualizar que las categorías puestas de manifiesto dan cuenta que los estudiantes relacionan las letras con cantidades, las cuales las obtienen ya sea aplicando una lógica, de manera aleatoria o las consideran como indeterminadas.

Las categorías "letra como variable/ valor indeterminado" y "letra como variable/ valor aleatorio" se encuentran estrechamente relacionadas. Se observaron 4 casos en los que los estudiantes recurrieron a casos numéricos concretos para apoyar sus argumentos en los que se referían a la letra como una cantidad indeterminada.

A modo general, y considerando lo propuesto por Blanton et al. (2017), se observa que en primera instancia los significados corresponden principalmente a la etapa de interiorización del concepto. Por ejemplo, en la primera sesión solo un estudiante expresa que la letra puede tener un valor variable mientras que los otros recurren a elementos familiares al evaluar la letra. En la segunda sesión se observa un cambio en las interpretaciones, el concepto comienza a condensarse y en los significados predomina la idea de que la letra representa un valor variable indeterminado, la cual en ocasiones se sustenta en ejemplos particulares, escogidos de manera aleatoria (I_{12}, I_{13} e I_{17}). También se observa que aún hay estudiantes que no identifican la variabilidad, pues evalúan las letras o las interpretan como etiquetas u objetos (I_{10}, I_{15}, I_{18}, I_{19} e I_{24}). En la tercera y última sesión, no se observa una tendencia hacia un significado en particular, hay diversidad de significados, los que van desde el rechazo a la letra hasta aceptarla como la representación de una cantidad indeterminada. A continuación se hace un análisis detallado de cada sesión y se caracterizan los significados que manifestaron los estudiantes.

Sesión 1

En la puesta en común de la primera sesión no hubo intervenciones en las que se rechazara la letra y en una de las 8 intervenciones se hizo alusión a dos significados distintos. En este primer acercamiento al uso de la letra, hubo predominio de significados asociados a la etapa de interiorización del concepto de variable. En particular, la categoría "Letra evaluada" tiene mayor frecuencia y 3 de las intervenciones que fueron categorizados ahí coinciden en que se refieren al alfabeto, no obstante no queda claro si piensan que a cada letra le corresponde el número de su posición en el alfabeto (letra evaluada/ valor lógico) o si solo para efectos de representar las edades se fijan en la posición, pudiendo cada letra representar un valor indeterminado (letra como variable/ valor indeterminado). Por ejemplo, algunos de los argumentos utilizados por los estudiantes fueron:

Intervención 2

Investigadora 1: A más 5 igual a E. A ver explícame ¿cómo has llegado a eso?

E4: entre A y E hay 5

Investigadora 1: Hay 5, ¿dónde? ¿En el abecedario?

E4: Sí

En la intervención 2, el estudiante cuenta las letras siguiendo su orden alfabético y aplica la relación dada en la situación, es decir que María es 5 años mayor. Entonces si la A es la edad de Raúl, cuenta las siguientes 5 letras (B, C, Ch, D, E) y la última que menciona es la edad de María. Nunca se refiere a una edad en particular, por lo que no se puede determinar cómo las evalúa.

Algo similar sucede en la intervención 8, que se muestra más adelante. El estudiante E5 señala que la edad de Raúl es Z, y como esta letra es la última del abecedario, él continúa la cuenta comenzando una nueva secuencia de letras del alfabeto ordenado. Si Raúl es Z, cuenta 5 letras más (A, B, C, Ch, D), María tiene D años.

Intervención 8

Investigadora 1: dilo otra vez que no te he entendido bien, yo creo que casi nadie te ha escuchado

E5: la letra que tienes que poner debajo del 20 es una D, porque Z más 5 sería D.

En ninguno de estos dos casos se reemplaza la letra por algún valor numérico. Las cantidades siempre fueron indeterminadas.

La categoría "letra como etiqueta o como objeto" se identificó en dos intervenciones en las que los estudiantes se refieren a las iniciales de los nombres de Raúl y de María. En una de estas intervenciones se observa que este significado cambia y acepta la inicial para representar la variable independiente y la operación, no obstante piensa en un valor fijo para la letra R y en relación a esto calcula la edad de María, representándola con un número (Letra evaluada). Solo un estudiante (E6) señala en la intervención 4 que la letra puede representar una cantidad variable, en su argumento menciona que la cantidad que propone es solo un "ejemplo".

Intervención 4

E6: A más 5. Y pongo por ejemplo 45 (inaudible)

Investigadora 1: O sea por ejemplo si coges la letra Z, ¿te vale esa, o cual has pensado tú? Si pongo la A que tú me estabas diciendo. Entonces en este caso, ¿qué harías con esa letra?

E6: Haría A más 5

Investigadora 1: A más 5, ¿y cuál sería entonces la edad de María?

E6: (inaudible)

Investigadora 1: por ejemplo 47.

A partir de la puesta en común se puede concluir que los significados muestran que el concepto de variable se encuentra en una etapa de formación. Los estudiantes, en su mayoría, utilizan elementos familiares para enfrentar la situación, concordando esto con lo que señala Radford (2001) quien dice que los estudiantes le dan sentido a la notación con significados para símbolos traídos desde otros dominios. En este caso significan la letra refiriéndose a elementos extra-matemáticos, como son las iniciales y el alfabeto. A su vez, coincidiendo con Blanton et al. (2017), se observa que la tendencia es a no percibir las cantidades variables, por lo que a las cantidades desconocidas les asignan un valor fijo. Otras evidencias que complementan esto se encontraron en las transcripciones de las cámaras móviles, en las que se identificaron cuatro intervenciones en las que los estudiantes dialogan con las investigadoras y explican los procedimientos que están realizando. En tres casos se observa que el significado otorgado a las letras es "letra evaluada/valor lógico" y la lógica que fundamenta su razonamiento está estrechamente relacionada con el alfabeto. Por ejemplo, un grupo de estudiantes representan la edad de Raúl con una R y la de María con una M, luego sugieren buscar números que comiencen con esas letras y cuando encuentren uno, ese será el valor de cada letra. Tras seguir este plan, descubren que no logran obtener una respuesta y optan por hacer una lista con el abecedario, así la posición de cada letra sería su valor. El diálogo entre las estudiantes es el siguiente:

Niña 1: Vamos a pensar en un número que empiece por la R.

Niña 2: ¿Con la R?

Niña 1: Sí.

Niña 2: [Cuenta en voz alta desde uno y muestra el conteo con sus dedos. Y llega hasta tres, luego se ríe]

Niña 3: Runo, Ros, Res…

Niña 1: [Sigue la cuenta con palabras con R y luego dice que no sirve, negando con la cabeza] No sale. Tengo una idea. Podemos hacer en una papel en sucio [Se para a buscarlo a un contenedor] Que vamos a poner el abecedario y la tabla de los números. [Luego comienza a escribir en la parte de atrás del folio las letras y un número asociado]

Niña 1: Entiende que cuando lleguemos a la R, el número que es la R, es.

Niña 2: Ah, Vale.

Niña 1: Luego lo mismo, solo que con la M. [Niñas 1, 2 y 3 comienzan a escribir el abecedario en sus hojas]

Merece la pena mencionar que la opción de asignar el valor de la posición del alfabeto no se aplica de manera rígida para evaluar todas las letras propuestas para la situación (R y M). En otra intervención captada con el mismo grupo de estudiantes una de ellas explica que solo evalúa la R con el valor de la posición del abecedario, en el caso de la letra M, esta es el resultado de sumar 5 a este valor, es decir, resulta de aplicar la relación funcional. Además es posible evidenciar que se acepta que el problema puede tener variadas respuestas. Señalan que la edad de María puede ser cualquier número, el cual dependerá de la letra que cada estudiante escoja. Hay una noción de variabilidad que se manifiesta al expresar la situación con distintas letras. A continuación se presenta el diálogo que se relaciona con lo antes descrito.

Niña 3: Estábamos haciendo el abecedario. El número que llegase a la R, el número 19 entonces es la edad de Raúl. Y 5 años más es lo que tiene María.

Investigadora 1: Tú me estas diciendo que Raúl tiene 19 años, entonces María tiene 5 años más.

Niña 3: 24.

Investigadora 1: ¿Pero realmente no sabemos cuántos años tiene Raúl, no?

Niña 3: Realmente no, pero …

Investigadora 1: Si no sabemos cuántos años tiene Raúl, ¿la R tal vez es otro número, o no?

Niña 3: [asiente]

Investigadora 1: Entonces ¿Cómo podrías averiguar la edad de María, si R es la edad de Raúl?

Niña 2: Yo diría que tiene 24 años.

Investigadora 1:¿Por qué?

Niña 2: María, y 19 Raúl

Investigadora 1: Pero no lo sabemos, a lo mejor tienen más.

Niña 2: El que haya elegido la A por ejemplo, tendrá un número más bajito.

Al analizar las producciones escritas de los 24 participantes, observamos que solo 18 respondieron completando alguna celda de la tabla propuesta en el cuestionario. Los significados identificados coinciden con los de las grabaciones, se observa que en 7 respuestas se hace alusión al abecedario y hay 4 casos que evalúan la letra pero no queda claro si es un ejemplo o un valor fijo, probablemente coincidan con lo que manifiestan en la puesta en común y solo sea un ejemplo pues creen que las letras pueden representar cualquier valor. En la tabla 10 se muestran sus respuestas y cómo se interpretaron.

Tabla 10

Significados identificados producciones escritas sesión 1

Significado de la letra	E	VI	RF	VD	Observación
Acepta uso letra/ significado indefinido	E19	R	R + 5		
	E12	R			
	E5	R	C		
	E9	R	G + 5		
	E3	R	W		
	E14	R	Sumandole 5		
	E23	A			
Letra como etiqueta o como objeto	E17	R	R + M		Utilizan R y M por los nombres de los hermanos de la situación.
	E21	R	A	M	
	E25	R	R M	M	
Letra evaluada	E11	A	A	F	Se refieren al orden del alfabeto, entre A y F así como entre C y H, hay 5 letras.
	E8	A	A + 5	F	
	E10	C	C + 5 = H	H	
	E6	A	A + 5	65	Evalúan la letra, pero no queda claro cuál es el criterio seguido.
	E16	A	21 + 5 = 26		
	E7	R	R + 17	22	
	E4	LL	LL + 5 = 140	140	
Letra evaluada/ Valor lógico	E15	R	R + E	24	En una grabación el estudiante señala que piensa que R es 19, por su posición en el alfabeto.

Nota: E = estudiante; VI = Variable independiente; RF = Relación funcional; VD = Variable dependiente.

Es importante aclarar que no siempre que utilicen la inicial de las palabras claves, la letra está asociada a la categoría "letra como etiqueta o como objeto". Hay ocasiones que las iniciales se asocian a cantidades determinadas, por ejemplo la respuesta del estudiante E15, quien usa la R de Raúl, pero la evalúa según su posición en el alfabeto.

En esta investigación las iniciales se categorizaron como objetos o etiquetas cuando no es posible encontrar evidencia de que se refieren a alguna cantidad y los estudiantes solo mencionan que las letras representan nombres.

Sesión 2

En la puesta en común se analizaron 16 intervenciones, 6 de ellas se referían a la frase "cuando vende *Z* camisetas, gana *3xZ* euros" y el resto a la frase "cuando vende *Z* camisetas, gana *N* euros". Al dialogar sobre la primera frase se observa que los estudiantes asocian la expresión *3xZ* con el proceso que realizaron para calcular la cantidad de euros en los casos particulares trabajados previamente, tal como se muestra en la intervención 9.

Intervención 9

> *E8:* Es que *Z* es el número de camisetas que ha vendido, porque todo el rato hemos estado multiplicando por 3, pues entonces, 3 por el número de camisetas, entonces sería verdadero.

También se refieren a la letra como una variable con valor indeterminado señalando que "la letra puede ser el número que tú quieras" y explícitamente ellos generalizan el proceso con la expresión *3xZ*, como se muestra en la intervención 11.

Intervención 11

> *E9:* La Z puede ser el número que tú quieras.
>
> *Investigadora 1:* El número que tú quieras, vale. Y si esta era la letra que tú quieras ¿cómo sabes que era verdadera?
>
> *E9:* Pues si tú usas un número que tu quieras y lo multiplicas por tres (inaudible)
>
> *Investigadora 1:* A vale. Tu dices que si tú coges la letra y lo multiplicas por tres, este resultado es verdadero.

En las intervenciones I_{12} e I_{13}, se observa que además referirse a la generalización recurren en segunda instancia a un ejemplo, en el que asignan un valor aleatorio a la Z para poder reafirmar su postura.

Intervención 12

> *E5:* Pues yo lo mismo que E9, que la Z es cualquier número, entonces en este caso lo estamos multiplicando por el 3, entonces sería, Z por ejemplo es un 10 y … entonces sería 3 por Z.
>
> *Investigadora 1:* Bueno tu estas pensando que Z podría ser 10.

E5: Sí pero como un ejemplo.

Investigadora 1: Es por poner un ejemplo. Vale. Entonces si es por poner un ejemplo, aquí tu pondrías 30, entonces sería verdadero.

E5: [asiente]

Intervención 13

E10: Que si la Z puede ser un número que no sabemos cuál. Pero lo multiplicas por 3 y yo creo que es verdadero.

Investigadora 1: ¿Tú crees que es verdadero cuando lo estamos multiplicando por 3?

E10: Sí, por ejemplo la Z puede ser… no sé… 5 por ejemplo, entonces como cada camiseta cuesta 3 euros… 3 por 5 son 15, por ejemplo. Por ejemplo si pruebas con otro número como el 20, nos daría 60 y la Z sería 20 y por 3, 60. Entonces yo creo que es verdadero.

En las intervenciones I_{10} e I_{14} evalúan la letra, en una señalan que Z es 30 y en la otra se propone un valor que dice que es un ejemplo, en ambas se refieren al proceso de multiplicar el valor de Z por 3.

En la segunda frase las variables dependiente e independiente están representadas por letras distintas y no se explicita la operación que representa la relación funcional. De las 10 intervenciones analizadas, 5 de ellas se refieren a que Z y N representan valores distintos, en una de ellas interpretan la letra como una letra evaluada con valor lógico y refiriéndose al alfabeto señala que Z es 30 y N es 14, por lo tanto la expresión es falsa, las otras 4 intervenciones interpretan la letra como una variable con valor indeterminado y señalan que la frase es verdadera por el hecho de ser letras distintas, las cuales "pueden tener el valor que tú quieras", tal como se muestra en las intervenciones 16, 17 y 20.

Intervención 16

E1: Es verdadera. Pues si la Z es muchos, la N tiene que ser un número grande. Si la Z es poco, entonces la otra tiene que ser un número bajito. Por ejemplo, la Z es 20. 20 por 3 sería…mmmm… 60. Y ahí pones 60, en la N. Y sería 60, y por eso digo es que verdadero.

Investigadora 1: Si aquí pones 20 y aquí pones 60, entonces es verdadera. ¿Es eso lo que tú me has dicho?

E1: Por ejemplo si la Z es un número bajito, la N tiene que ser un número bajito.

Intervención 17

E7: Yo digo que es verdadero, pues si Carlos vende Z camisetas, Z es un número y gana N euros, N es otro número. Entonces si vende Z camisetas, entonces gana N euros. Entonces yo entiendo que si Carlos vende el número que sea, eeehh, gana un número diferente de euros.

Investigadora 1: Entonces como las dos son distintas, tú dices que es verdadero.

E7: Sí.

Intervención 20

E14: Verdadero, porque Z puede ser el número que tu quieras y N también puede ser el número que tú quieras. Si Carlos tiene las camisetas que tú quieras, entonces puedes ganar lo que tú quieras.

A partir de las evidencias descritas, podemos concluir que en la segunda sesión los estudiantes avanzan en la etapa de conceptualización de la variable hacia la condensación de modo similar a como se describe en Blanton et al. (2017). Predomina el significado de la letra como variable con valor indeterminado (9 casos de 19) que se asocia a la idea de que la letra puede ser "el número que tú quieras", esto de forma parecida a como lo señalan otros estudios (e.g. Blanton et al., 2017; Radford, 1999; Schliemann et al., 2011). Sin embargo, no se logra la reificación del concepto, pues en tres de estos casos los estudiantes requieren complementar sus respuestas proponiendo casos particulares, siendo parte del otro significado que obtiene mayor frecuencia, a saber, letra como variable con valor aleatorio (5 de 19 casos). Esto se puede explicar a partir de lo que señala Booth, (1988) quien dice que una de las dificultades que enfrentan los estudiantes tiene relación con los distintos focos de la aritmética y del álgebra. Los estudiantes pueden expresar correctamente la relación algebraica, pero no considerarla como una respuesta apropiada, pues siguiendo la lógica del aritmética buscan responder a partir del uso de números.

Al analizar las producciones escritas, los resultados obtenidos al analizar las puestas en común se ratifican. Nos centramos en 4 frases del cuestionario 2.

La frase: "Cuando vende *Z* camisetas, gana *3xZ* euros", fue respondida por 23 estudiantes, 18 dijeron que era verdadera, 4 que era falsa y 1 no seleccionó una de estas dos opciones, solo escribió una frase referente a la sentencia dada. En total, 18 respuestas fue posible asociar a algún significado, pues en el resto no había justificación a la elección de verdadero o falso o los argumentos no eran lo suficientemente claros como para señalar un significado en particular. Al igual que en las puestas en común, la tendencia en esta frase es interpretar la letra como una variable con valor indeterminado, 12 respuestas se relacionan con ella y se observan dos tipos de argumentos: en uno se generaliza la relación funcional y las letras tienen un valor indeterminado y en el otro se refieren a la letra con valor indeterminado sin generalizar la relación funcional. A diferencia de la puesta en común, aquí es posible encontrar dos casos en los que se rechaza la letra, el argumento principal es que *Z* no vale nada o que no es un número. En la tabla 11 se presentan los argumentos dados en las respuestas escritas.

Tabla 11

Significados identificados producciones escritas sesión 2. Pregunta 6

Significado de la letra	E	R	Justificación	Observación
Letra como variable/ Valor indeterminado	E17	V	Z es un número y lo tienes que multiplicar por 3	En estos casos los estudiantes generalizan. Se refieren a operación para justificar su respuesta y se refieren a Z como un número indefinido.
	E4	V	Z puede ser un número y al multiplicarlo por 3 gana la multiplicación	
	E8	V	La Z es el número de camisetas y como esta multiplicado por 3	
	E9	V	Si la Z es cualquier número la Zx3 Es el número que quieras	
	E22	_	El número que sea Z por 3 te da el número	
	E10	V	El número que sea Z por ese número te sale el número	
	E24	V	La multiplicación de 3 camisetas Z son las monedas	
Letra como variable/ Valor indeterminado	E12	V	Z es el número de camisetas	En estos casos se refieren a Z como una cantidad indeterminada, pero no generalizan la relación funcinal.
	E7	V	Gana 3 euros por cada camiseta	
	E15	V	Como 3 euros cada camiseta	
	E5	V	Cuestan 3 euros	
	E14	V	Cada camiseta vale 3	
Letra como variable/ Valor aleatorio	E1	V	Por que por ejemplo pones el 5 y da el resultado	
Letra evaluada	E2	V	Reemplaza Z por 9.	
	E16	V	3 x Z son 12	
	E20	V	Es mil	
Rechazo letra	E19	F	La Z no vale nada	
	E23	F	Z no es un número	

Nota: E = estudiante; R = respuesta.

La frase "Cuando vende *Z* camisetas, gana *N* euros" la respondieron 17 estudiantes. De ellos, 7 dijeron que era verdadera, 8 que era falsa y 2 no seleccionaron verdadero o falso. Entre quienes dijeron que la frase era verdadera, 5 interpretan la letra como variable con un valor indeterminado, en esta oportunidad no generalizan la operación realizada en los casos particulares y su principal argumento es que son letras distintas y que pueden tener el valor que tú quieras, coincidiendo con lo que plantearon en la puesta en común. Entre quienes señalan que la frase es falsa, 2 manifiestan un rechazo a la letra y 3 hacen alusión al proceso de multiplicar por 3. En la tabla 12 se muestran las respuestas de los estudiantes.

Tabla 12

Significados identificados producciones escritas sesión 2. Pregunta 7

Significado de la letra	E	R	Justificación	Observación
Letra como variable/ Valor indeterminado	E17	V	Z y N son el número que tu quieras	Interpretan la letra como un número indeterminado y considerando que Z y N son letras distintas, esos números también lo serán.
	E9	V	Z y N son el número que quieras	
	E14	V	La Z y la N son el número que quieras	
	E12	V	Z es el número de camisetas y N el los tres euros que gana	
	E24	V	Algún número hacen	
Letra evaluada	E5	V	No sé qué número es Z ni N	
	E22	-	La Z yo creo que es 3 porque todo el rato es tres y la N creo que es 20, porque creo que el resultado es 60	
Letra como variable/ Valor lógico	E3	-	30 x 3 no son 14.	Z es igual a 30 y N a 14, por la posición en el alfabeto.
Rechazo letra	E23	F	Z y N no es un número	
	E19	F	La Z y la N no vale nada	

Nota: E = estudiante; R = respuesta.

Las siguientes frases no fueron discutidas en las puestas en común. Ambas se centran en la relación funcional inversa. La primera "Carlos quiere ganar *Z* euros. Entonces vende *Y* camisetas", coincide con la frase de la pregunta 7 al representar las variables con letras distintas. Esta fue respondida por 13 estudiantes, quienes 5 dijeron que era verdadera, 7 falsa y 1 no marcó preferencia. Los resultados coinciden con la respuesta anterior, pues para argumentar que la sentencia es verdadera se refieren a que son letras distintas que pueden representar el número que quieras, por tanto las interpretan con variables con valor indeterminado. Se siguen encontrando casos en los que evalúan las letras con el número de su posición en el alfabeto y en base a esto dicen que la sentencia es falsa. Hay casos que rechazan la letra y otros confusos en los que al parecer consideran que la respuesta es falsa pues esperan ver explícita la relación de multiplicar por 3. Las respuestas se detallan en la tabla 13.

Tabla 13

Significados identificados producciones escritas sesión 2. Pregunta 14

Significado de la letra	E	R	Justificación	Observación
Letra como variable/ Valor indeterminado	E17	V	Z e Y son el número que tu quieras	
	E9	V	Z e Y son el número que quieras	
	E14	V	La Z es el número que quieras y la Y también	
Letra evaluada	E5	-	No sé qué número es Z ni N	
Letra evaluada/ Valor lógico	E6	F	Evalúa Z como 30 e Y como 29. 3 x 30 no es 29.	Z es igual a 30 e Y es 29, asignado el valor de la posición en el abecedario.
	E3	F	30 x 3 no son 29.	
Rechazo letra	E19	F	La Z y la Y no vale nada	
	E4	F	Z por Y no es nada	
Sin clasificar	E21	F	porque z + y no son 3	Esperan visualizar en la expresión el 3.
	E23	F	N+3 no son z	

Nota: E = estudiante; R = respuesta.

Finalmente, la frase "Carlos quiere ganar *Z* euros. Entonces tiene que vender *Z* camisetas", fue respondida por 16 estudiantes de los cuales 7 señalaron que era verdadera, 8 que era falsa y 1 no seleccionó verdadero o falso pero sí expresó algo sobre la sentencia. En este caso la sentencia es falsa, pues una misma letra no puede representar distintas cantidades en una misma situación, esto lo logran expresar tres alumnos, dos interpretan la letra como una variable que representa cantidades indeterminadas y uno como una letra evaluada con valor lógico, asignado el valor de la posición del alfabeto a las letras. Persiste la idea de que las letras representan el número que tú quieras, por tal razón nos encontramos con tres casos que consideran que la sentencia es verdadera sin hacer reparos que Z estaría representando dos cantidades a la vez. A esto se suma otra respuesta que también considera que la respuesta es verdadera pero argumenta evaluando la letra, la primera Z equivale a 9 y la segunda a 45, que es el resultado de aplicar la relación funcional. Hay dos casos que rechazan la letra y 7 no fue posible categorizarlos, tal como se muestra en la tabla 14.

Tabla 14

Significados identificados producciones escritas sesión 2. Pregunta 15

Significado de la letra	E	R	Justificación	Observación
Letra como variable/ Valor indeterminado	E7	F	Los euros que gana no son iguales a las camisetas que vende	Argumentan que las cantidades de euros no pueden ser iguales a la camiseta, por tanto la Z no representa cantidades distintas.
	E5	F	Tiene que tener el triple	
Letra evaluada/ Valor lógico	E3	F	30 x 3 no son 30	
Letra como variable/ Valor indeterminado	E9	V	Z puede ser el número que quieras	Consideran que la Z puede representar dos cantidades distintas en una misma situación.
	E14	V	Porque la Z puede ser 13 o el número que tú quieras.	
	E17	-	Z es el número que tú quieras.	
Letra evaluada	E2	V	Reemplaza primera Z por 9 y la segunda por 45	
Rechazo letra	E19	F	La Z no significa nada	
	E4	F	Z por Z no da nada	

Nota: E = estudiante; R = respuesta.

Sesión 3

En la última sesión, en la puesta en común se dialogó sobre cómo completaron la tabla propuesta en la hoja de trabajo. Se habló sobre algunos casos particulares y sobre el uso de las letras solo se hizo referencia al caso "se venden *N* camisetas y no se sabe la cantidad de euros ganados". Se observaron 7 intervenciones, identificando 8 significados otorgados a las letra.

En las intervenciones 25 y 28 los estudiantes se refirieron a la letra como una variable con un valor indeterminado, al igual que en las sesiones anteriores en esta categoría señalan que la letra puede ser cualquier número y en ambos casos explicitan que debe existir una relación, por lo que se debe multiplicar por 3 la variable independiente.

Intervención 25

> *E4:* Si era multiplicado por 3, tres veces le sumas N.
>
> *Investigadora 1:* Entonces tres veces una N. [escribe en la pizarra]
>
> *E4:* n más n más n, tres N.
>
> *Investigadora 1:* ¿Qué significa esto? ¿E4 no lo puedes explicar?
>
> *E4:* Es como si estuviese multiplicado. Tres N porque multiplicado por tres….

Intervención 28

> *E14:* Que yo he puesto N y luego he puesto S, creo.

Investigadora 1: Otra letra, S.

E14: Sí, He puesto como N es digamos que sería el número que quisiéramos he puesto S, porque pienso N sería un número y luego el resultado una letra diferente. Por eso he puesto S.

Investigadora 1: Has puesto la S porque es un número distinto. Vale.

Investigadora 2: ¿Y ese número, E14, podría ser cualquier número?

E14: Sí, por ejemplo, la N podría ser 3 y la S podría ser 9, por ejemplo.

Investigadora 2: ¿Y cómo calcularías siempre esa S, E14?

E14: Multiplicando la N por 3.

También se observa en las intervenciones 27 y 30 que se le asigna un valor lógico a la variable, y tal como ha sucedido antes, la posición en el abecedario es el que determina el valor de la letra que representa la variable dependiente y la variable independiente se obtiene al aplicar la relación funcional. En las intervenciones 29 y 31 se distinguen dos casos en los que también se evalúa la letra, no obstante no se evidencia una lógica, tampoco es posible distinguir si son valores aleatorios que representan un ejemplo entre los diversos valores que pueden tomar las variables. Solo hay registro de un caso que rechaza la letra, esto argumentando que N es ningún número.

A partir de las evidencias de la puesta en común, se concluye que aun los estudiantes se encuentran en la etapa de condensación del concepto. Si bien se observa una variedad de significados en sus respuestas, en 5 de las 8 intervenciones recurren a la valoración de la letra para poder argumentar su respuesta. Esto último tiene distintas causas, tales como que los estudiantes recurren a conocimientos previos y sistemas conocidos relacionando el orden lineal de los números con el orden del alfabeto (Küchemann, 1981; Wagner, 1983), o basándose en sus conocimientos aritméticos consideran que las respuestas deben ser numéricas sin aceptar las expresiones generales algebraicas (Booth, 1988; Kaput, Blanton, et al., 2008).

Por las características de la actividad realizada en esta sesión, en las producciones escritas no se logró evidenciar cuál era el significado asignado a las letras, pues la tarea consistió en representar las variables y no hubo justificación por escrito de sus respuestas.

Representación de cantidades indeterminadas

En este apartado describimos las representaciones propuestas por los estudiantes y también la interpretación que realizaron al resolver actividades en las que las investigadoras propusieron letras determinadas. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto que concepto y simbolización se experimentan de forma separada, coincidiendo con los planteamientos de Blanton et al. (2017) y Kaput, Blanton, et al. (2008). Los estudiantes lograron generalizar las relaciones entre las variables e interpretar las letras como representantes de cantidades indeterminadas y variables, no obstante al momento de expresar la generalidad emplean letras o números o ambos, llevando a cabo un proceso de simbolización cuasi-algebraico, pues aún no dominan las convenciones asociadas a las letras y las expresiones algebraicas.

A continuación se describe en detalle cómo los estudiantes representaron la variable independiente, la relación funcional y la variable dependiente.

Variable independiente

En 30 de las 31 intervenciones los estudiantes aceptaron el uso de la letra para representar la variable independiente, esto sin distinción del significado otorgado a la letra. Solo un estudiante manifestó rechazo a la letra, el cual en la sesión 3 señala que no significaba nada, aun cuando representa la variable con ella.

Al centrarnos solo en los resultados de la sesión 1, ya que tanto en la puesta en común de la sesión 2 como en la 3 la representación de la variable fue dada por las investigadoras (Z y N respectivamente), observamos 9 intervenciones y en todas ellas se representa la variable con una letra. Utilizaron las letras Z, R, A y C. La letra R fue utilizada en 2 casos como una etiqueta (R de Raúl) y en otro se utilizó como letra evaluada. En el caso de la Z en 2 casos se acepta su uso con un significado indefinido y en otro se evalúa. La letra A se evalúa en un caso y en el otro se interpreta como una variable con valor aleatorio. A partir de lo anterior se podría concluir que indistintamente del significado, la tendencia es a representar la variable independiente con una letra cualquiera. Lo anterior coincide con las respuestas de las producciones escritas de la sesión 1, ya que en las 18 respuestas analizadas se utilizó una letra (A = 5 veces; C = 1 vez; LL = 1 vez y R = 11 veces).

A partir lo expuesto en este apartado, se puede concluir que los estudiantes cuando se les pide representar libremente la situación sus respuestas corresponden a una letra. Si bien en su mayoría coincide con la inicial del nombre del Raúl también escogen otras y los significados asociados son diversos, interpretándolas como etiquetas, letras evaluadas e incluso “letras como variables/ valor aleatorio”.

Relación funcional

Expresar la relación funcional con letras solo se realizó en la sesión 1, en la que completan una tabla y escriben la relación funcional directa. En la puesta en común fue mencionada en 8 intervenciones, observando en 7 de ellas que los estudiantes representan la relación utilizando “letras y números”. Ellos repiten la letra que utilizaron para representar la variable independiente y le suman 5, justifican esto a partir de la situación, tal como se ilustra en el siguiente diálogo:

E3: sumarle 5 a la letra.

Investigadora 1: Sumarle 5 a la letra ¿por qué? ¿Por qué has pensado eso?

E3: porque María tiene 5 años más que Raúl.

Estas respuestas se asocian a tres significados de las letras: (a) “letra evaluada” en 4 casos, (b) “letra como variable/valor aleatorio” en 1 caso y (c) el uso de la letra, pero con significado es indefinido se acepta en 2 casos. En la intervención 3, el estudiante E5 utiliza “solo letras”: a la letra escogida para representar la variable independiente le suma C, tal como se muestra a continuación:

E5: Yo he puesto aquí una R de Raúl (señala 1º columna), y aquí una C de cinco (señala 2º columna)

Investigadora 1: una C de cinco, aquí ¿y por qué has puesto una C de cinco?

E5: Por que todo era sumando 5

En este caso el estudiante utiliza las iniciales de las palabras Raúl y cinco. Se evidencia que se está evaluando la letra C como cinco. No mezcla números con letras.

En las producciones escritas 16 estudiantes expresaron la relación funcional. En la tabla 15 se puede observar que la mayoría de las respuestas corresponde a la categoría “letra y número” y, al igual que en la puesta en común, coinciden con dos significados de las letras: “letra evaluada” y “acepta el uso de la letra”.

Tabla 15

Representación relación funcional en producciones escritas sesión 1

Significado letra	Representación relación funcional					
	LN	LyN	L	N	P	RL
Acepta uso letra/ Significado indefinido	C W A	R + 5 G + 5			Sumándole 5	
Letras como etiquetas o como objetos			R + M R M			
Letra evaluada		A + 5 R + 17 LL + 5 = 140 A + 5 C + 5 = H		21 + 5 = 26		A
Letra evaluada/ Valor lógico			R + E			
Total	3	7	3	1	1	1

Nota: LN = Letra nueva; LyN = Letra y número; L = Solo letras; N = Número; P = palabras; RL = Repite letra

Otra coincidencia se observa en la categoría "solo letras", aquí nuevamente encontramos un caso en el que el estudiante E15 prefiere no mezclar letras y números. El significado que asocia a las letras es "letra evaluada/ valor lógico" y se basa en el abecedario para buscar cuál es la letra que corresponde al número cinco. En las siguientes líneas se muestra el diálogo que tuvo E15 con la investigadora 1.

Investigadora 1:¿me explicas lo que estás haciendo?

E15: A es que como aquí debemos averiguar cuál es el número de la R, pues estamos poniendo el número del abecedario. [Apunta las letras que ha escrito y cuenta, realizando la correspondencia entre número y letra] hasta que llegamos a la M y la R, con todo el abecedario entero, y así sabemos cuál es.

E15: Es que nos las estamos inventando. Como era la letra que sea, la R de Raúl y la M de María.

Investigadora 1: Vale, ¿entonces esta R a qué se refiere?

E15: A la edad de Raúl.

Investigadora 1: Vale, la R la edad de Raúl. ¿Entonces qué vas hacer para averiguar la edad de María si esta es la R de Raúl?

E15: Pues sumar M que es, por ejemplo, el número de María, por ejemplo…

Investigadora 1: Es que no lo sé, es que no me enterado bien. Me he enterado que esta es la edad de Raúl [apunta a R] y que le quieres y qué le quieres sumar algo. Me has dicho que le quieres sumar.

E15: Ah, [tacha la M] ¿Chicas cuál es el 5? Hay que poner la E en vez de la M, porque como María tiene 5 años más que Raúl. Pues como la E es 5.

Sobre las categorías "números" y "solo palabras", se puede señalar que los estudiantes reconocen la relación funcional, ya que ambos indican que hay que sumar 5. En el primer caso representa la variable independiente con la letra A y luego le asigna el valor de 21. En este caso entendemos que piensa que la letra puede tener cualquier valor y por eso escoge uno aleatoriamente. Sobre las categorías "letra nueva" y "letra repetida" no se observa información concluyente que nos permita dilucidar los motivos de su uso.

Variable dependiente

La variable dependiente fue representada en las tres sesiones de clases. En la sesión 1 los estudiantes la representaron con letras que ellos escogían libremente; en la sesión 2 las representaciones fueron dadas por las investigadoras, no obstante se analizaron los casos en los que los estudiantes explicaron cómo interpretaban y utilizaban las letras; en la sesión 3 los estudiantes representaron la variable dependiente dada la variable independiente.

La variable dependiente fue representada usando o letras o números o ambos, en la figura 6, se muestra un esquema de las representaciones observadas.

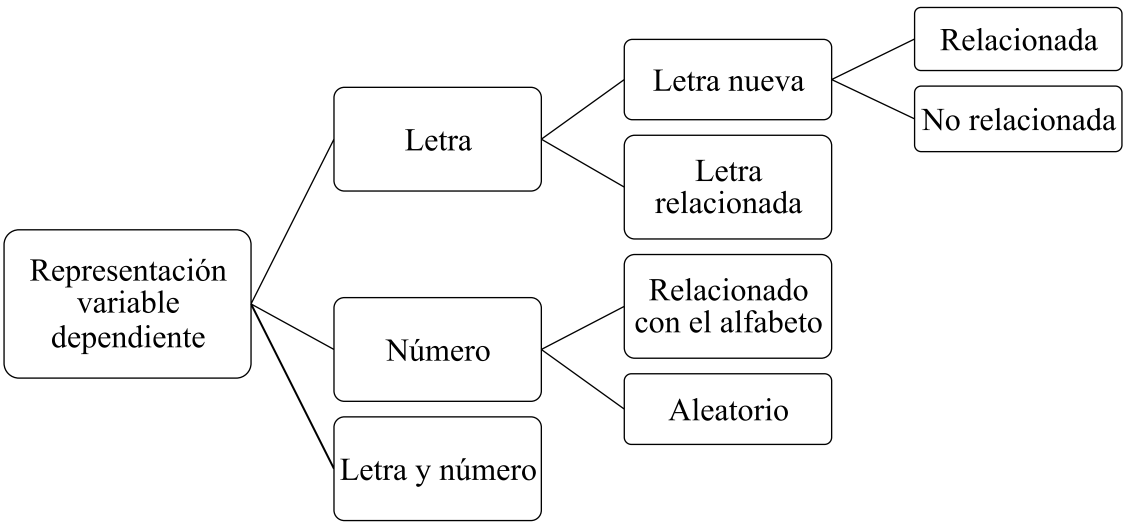


Figura 6. Categoría de representación de la variable independiente

Letra nueva

Emplear una “letra nueva”, implica que los estudiantes expresen la variable dependiente con una letra distinta a la letra que representa la variable independiente, además, estas pueden estar relacionadas o no.

Una forma en la que los estudiantes relacionaron las letras fue tomando de referencia el alfabeto. Por ejemplo, en la puesta en común de la sesión 1 hay evidencia de tres respuestas en las que se escogió una letra para representar la variable independiente (A, C y Z), luego se aplicó la relación funcional y, siguiendo el orden del alfabeto, se contó 5 letras más. Finalmente, se seleccionó la última letra contada para representar la variable dependiente (E, H y D respectivamente). La siguiente intervención, del estudiante E3, ilustra lo antes descrito.

> *Investigadora 1:* si pongo aquí una C, estás pensando (escribe 1º columna)
>
> *E3:* la otra C más 5 y ahora pongo en el otro, H
>
> *Investigadora 1:* ¿H? y este H ¿qué quiere decir?
>
> *E3:* Porque C más 5 es la H

También refiriéndose al alfabeto, en la sesión 2 el estudiante E3 señala que no es correcto representar la variable dependiente con una N, pues evalúa la letra Z y la letra N y no observa la relación funcional. A continuación se presenta lo señalado por estudiante E3.

> *E3:* Yo creo que cuando Carlos vende la Z es 30.
>
> *Investigadora 1:* Tú estas pensando que la Z es 30. Vale.
>
> *E3:* y la Z gana la N y es 14. Entonces porqué digo que es falsa, porque en el abecedario hay 30 letras, y como la Z es la última, por eso no se puede. Por eso digo que es falsa.

Otras formas de relacionar las letras se observaron en los casos en los que las letras fueron interpretadas como “letra como variable/valor indeterminado” y “letra como variable/ valor aleatorio”. Considerando la variabilidad al interpretar las representaciones, los estudiantes señalan que las letras pueden representar “el número que tú quieras” y proponen el uso de letras distintas para representar cantidades distintas. Algunos estudiantes utilizan este argumento de forma amplia y otros de forma restrictiva, ya que señalan que es cualquier número pero se tiene que cumplir la relación funcional entre las variables. Las intervenciones de los estudiantes E7 y E14, permiten ejemplificar la forma amplia de argumentar. Ellos en la sesión 2 señalan lo siguiente:

Intervención 17

E7: Yo digo que es verdadero, pues si Carlos vende Z camisetas, Z es un número y gana N euros, N es otro número. Entonces si vende Z camisetas, entonces gana N euros. Entonces yo entiendo que si Carlos vende el número que sea, eeehh, gana un número diferente de euros.

Investigadora 1: Entonces como las dos son distintas, tú dices que es verdadero.

E7: Sí.

Intervención 20

E14: Verdadero, porque Z puede ser el número que tu quieras y N también puede ser el número que tú quieras. Si Carlos tiene las camisetas que tú quieras, entonces puedes ganar lo que tú quieras.

Otro ejemplo, tomado de la sesión 3 es la respuesta del estudiante E11, quien expresa en la intervención I_{29} los motivos por los que seleccionó la S. Dice que evaluó la N como 15, como al multiplicarla le salió un número distinto a 15, escogió una letra distinta a N.

E11: N por 3, S. Yo he puesto como me ponía primero la N me lo he imaginado como 15, yo he multiplicado por 3, me ha salido otro resultado.

La forma restrictiva de argumentar se ilustra con las intervenciones de los estudiantes E12 y E15 quienes señalan que las letras pueden ser distintas, pero agregan una condición, N debe ser un múltiplo de tres, es decir en su condición explicitan la relación funcional.

Intervención 22

E12: El segundo debe ser 3, porque es la cantidad de euros que gana por cada camiseta.

Investigadora 1: Ah, vale. Tres es el número que gana por cada camiseta. Entonces ¿tu pondrías en el segundo lugar el tres?

E12: Sí.

Intervención 23

E15: Yo pienso que la N no se puede poner (imperceptible) por ejemplo si la Z es… mmm… 20 camisetas, y la N si quieres que sea verdadero tienes que coger el triple de 20.

Explicaciones como estas también se observaron en la puesta en común de la sesión 3, en la cuál los estudiantes explican porqué representan la variable dependiente con la letra S. En la intervención 28, el estudiante E14 manifiesta interpretar la letra como una variable, señalando que puede ser el número que queramos, y como el número de la variable independiente es distinto al de la variable dependiente, entonces utiliza letras distintas. Esto lo ratifica al proponer un ejemplo numérico, escogido de manera aleatoria.

E14: Que yo he puesto N y luego he puesto S, creo.

Investigadora 1: Otra letra, S.

E14: Sí, He puesto como N es digamos que sería el número que quisiéramos he puesto S, porque pienso N sería un número y luego el resultado una letra diferente. Por eso he puesto S.

Investigadora 1: Has puesto la S porque es un número distinto. Vale.

Investigadora 2: ¿Y ese número, E14, podría ser cualquier número?

E14: Si, por ejemplo, la N podría ser 3 y la S podría ser 9, por ejemplo.

Investigadora 2: ¿Y cómo calcularías siempre esa S, E14?

E14: Multiplicando la N por 3.

En la tabla 16 se muestran las respuestas de 18 estudiantes, en los cuestionarios 2 y 3. Estas representaciones se categorizaron como "letra nueva" o "letra nueva relacionada". En la sesión 3 no hay evidencia escrita de los motivo por los cuales escogieron cada representación, por tal motivo no se indicó si se trataban de una letra nueva relacionada o no.

Tabla 16

Representaciones en producciones escritas de la variable dependiente: letra nueva

Representación	Sesión 1	Sesión 3			
		Vende N camisetas	Vende Z : 3 camisetas	Gana 3xY euros	Gana D euros
Letra nueva	R → M	N → Z	Z : 3 → N	3xY → N	D → Z
	R → M	N → Z	Z : 3 → N	3xY → N	D → N
		N → Z	Z : 3 → N	3xY → O	D → A
		N → Y			
Letra nueva relacionada	A → F				
	A → F				
	C → H				

Letra relacionada

La categoría "letra relacionada" se observa solo una vez en las puestas en común , esta consiste en expresar la variable dependiente con la misma la letra que se utiliza para expresar la variable independiente y aplicar explícitamente la relación funcional. El estudiante E4, en la sesión 3 utiliza la misma letra dada para representa la variable independiente y con ésta trata de expresar la operación que ha aplicado en los casos particulares, él señala:

Intervención 25

> *E4:* Si era multiplicado por 3, tres veces le sumas N.
>
> *Investigadora 1:* Entonces tres veces una N. [escribe en la pizarra]
>
> *E4:* n más n más n, tres N.
>
> *Investigadora 1:* ¿Qué significa esto? ¿E4 no lo puedes explicar?
>
> *E4:* Es como si estuviese multiplicado. Tres N porque multiplicado por tres.

En las producciones escritas se pueden encontrar más ejemplos de esta forma de representar la variable dependiente. En la tabla 17 se muestran tanto respuestas correctas como incorrectas. Se consideraron las representaciones incorrectas pues dan cuenta de un intento por expresar la variable dependiente explicitando la relación funcional asociada a la situación. Es de esperar que los estudiantes no apliquen las convenciones algebraicas, pues este experimento de enseñanza es el primer acercamiento al uso de letras y no han recibido instrucción al respecto.

Tabla 17

Representaciones en producciones escritas de la variable dependiente: letra relacionada

Representación	Sesión 1	Sesión 3			
		Vende N camisetas	Vende Z : 3 camisetas	Gana 3xY euros	Gana D euros
Letra relacionada		N → NNN N → 3xN	Z : 3→ ZZZ Z : 3 → Z	3xY → Y 3xY → Y	

Números

En lo que respecta a la categoría "números", por lo general los estudiantes fijan un valor para la variable independiente y luego aplican la relación funcional, el resultado que obtienen lo escriben como representación de la variable dependiente. Los criterios para evaluar las letras se pueden basar en el alfabeto o pueden ser escogidos de manera aleatoria, tal como lo manifiestan los estudiantes E5 y E6, respectivamente.

Intervención 30

E5: Yo me he fijado en el orden del abecedario, pero a mi no me ha dado lo de E3, a mi me ha dado 33.

Investigadora 1: ¿Dónde te ha dado 33? ¿Aquí en el resultado?

E5: [asiente]

(Nota: En este caso el estudiante se equivocó y señaló que N estaba en la posición 11)

Intervención 4

Investigadora 1: tú me has dicho que la A representa la edad de Raúl, y esto ¿qué quiere decir? (señala segunda columna A+5) ¿nos puedes explicar que quiere decir esto?

E6: imperceptible… porque si A es 42, le sumo 5. Imperceptible.

Investigadora 1: y te da 47, en el ejemplo que tú has pensado eso te da 47.

En las producciones escritas , que se muestran en la tabla 18 se observan otros ejemplos de respuestas en las que se utilizó un número para representar la variable dependiente.

Tabla 18

Representaciones en producciones escritas de la variable dependiente: Números

Representación	Sesión 1	Sesión 3			
		Vende N camisetas	Vende Z : 3 camisetas	Gana 3xY euros	Gana D euros
Número	A → 65 A → 22 A → 140	N → 27 N → 27 N → 24 N → 12 N → 12	Z : 3 → 100 Z : 3 → 50 Z : 3 → 1 Z : 3 → 1 Z : 3 → 3 Z : 3 → 3	3xY → 81 3xY → 27 3xY → 20 3xY → 4 3xY → 3x3	D → 4 D → 4 D → 12 D → 12 D → 4x3 D → 500x3 D → 3+1
Número relacionado con el alfabeto	R → 24 R → 33	N → 42			
Número aleatorio				3xY → 100	

En el caso del uso de números, encontramos explicaciones diversas de su uso. Por ejemplo, en la sesión 3, a la pregunta “cuando gana 3xY euros, ¿cuántas camisetas vende?", el estudiante E3 responde 81 y en un costado de la hoja de trabajo escribe "17 x 3 = 81". Esto da cuenta que aplica la relación funcional y asigna un valor a la letra Y, no sabemos cómo escoge el número 17, por lo que podría estar interpretando la letra como una variable y este número solo ser un ejemplo de las posibles respuestas o podría seguir otra lógica. El estudiante E5 a un costado de su hoja de trabajo (ver figura 7) escribe el valor de cada letra y representa la variable dependiente con un número que coincide con el que resulta de aplicar la relación funcional inversa al valor dado a D (el cálculo que realiza es 12 : 3 = 4) .

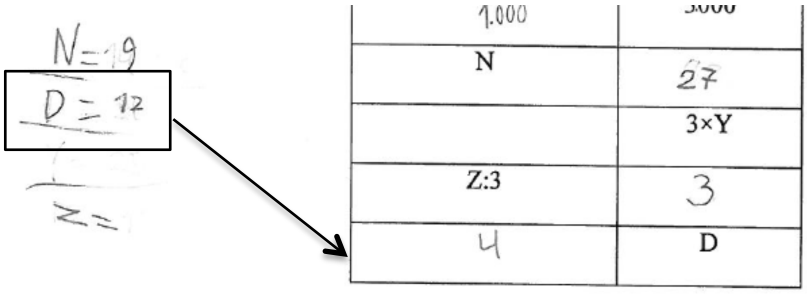


Figura 7. Respuestas sesión 3, estudiante E5

El estudiante E4 es quien propone representar la variable dependiente con la expresión "3 + 1". Tal como se muestra en la figura 8, en su hoja de trabajo primero escribe 4 y luego borra la respuesta. Escribe en un costado "El 3 multiplicado no puede llegar a 4". Probablemente pensó en el 4 pues D es la cuarta letra en el alfabeto e intentó expresar ese número como un múltiplo de 3 evidenciando que busca mantener la relación entre las variables, aunque se refiere a la relación funcional directa en vez de la inversa.

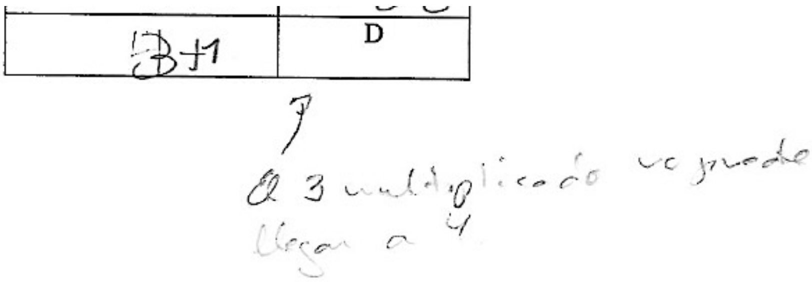


Figura 8. Respuestas sesión 3, estudiante E4

En las grabaciones con la cámara móvil, se identificó una intervención en las que el estudiante E10 explica porqué utilizó el número 100 para representar la variable. Él asocia a la letra el significado de variable y explica que 100 es solo un ejemplo, pues las letras pueden representar "cualquier número". La transcripción del diálogo entre E10 y la investigadora 2, se muestra más abajo.

Investigadora 2: Estas multiplicando la Y por 3 ¿no? Entonces, ¿cuántas camisetas venderá?

E10: Pues 100.

Investigadora 2: ¿por qué?

E10: (imperceptible)… por 3 siempre es 100.

Investigadora 2: Fíjate, ¿cómo has pasado siempre de todos estos números a estos de aquí? [apunta primera columna y luego la segunda]

E10: Pues multiplicándole por 3.

Investigadora 2: ¿Y aquí? N y N por 3 ¿no? Porque tú me has dicho que cada camiseta eran 3 euros, por eso multiplicabas por 3. Entonces aquí que tienes 3 por Y [apunta segunda columna], ¿cuántas camisetas serán?

E10: Podría ser cualquier número.

Investigadora 2: ¿Y cómo le vamos a poner aquí cualquier número?

E10: Pues algún número.

Investigadora 2: Venga, pon lo que tú creas que va ahí. Con letras con lo que tú quieras.

E10: 100

Letra y número

La categoría "letra y número" solo se observa en la sesión 3. El estudiante E14 cuando se le pregunta "Si vende D euros, ¿cuántas camisetas vende?, responde Dx3. Señala que utiliza una misma letra y que ésta puede representar "el número que tú quieras", por lo que está interpretando la letra como una variable. En el diálogo que tiene con una de las investigadoras dice que la D que utilizó en la variable dependiente puede ser por ejemplo 5 y al multiplicar ese número por 3 (por eso escribe Dx3) se obtiene el valor que representa la otra D, que sería 15. Esto evidencia que puede verbalizar y explicar la relación entre las variables pero las convenciones para representar esto por escrito utilizando letras aun no las aplica, por ejemplo no considera que una misma letra no puede tener valores distintos en una misma situación.

Investigadora 2: Vamos a pensarlo, si vendes D camisetas…

E14: Que es el número que tú quieras. Por 3 son D, que también es el número que tú quieras.

Investigadora 2: Vale, el número que tú quieras. Dime un número.

E14: 7.

Investigadora 2: Si aquí pones un 7 por ejemplo, si la D es 7 sería, 7 x 3 que sería 21 camisetas, entonces gana D euros que tú me dijiste que D era 7.

E14: No, D es el número que tú quieras.

Investigadora 2: Vale, D es el número que tú quieras, ¿cuál va a ser D?

E14: Ehh, 5.

Investigadora 2: 5 venga, si son 5

E14: 5 x 3 [apunta primera columna], 15 [apunta segunda columna].

Investigadora 2: Entonces 15 serían 15 camisetas.

E14: No, porque D es el número que tú quieras. Y la otra D también puede ser el número que tú quieras.

Investigadora 2: Pero la letra es la misma ¿no?

E14: Ya pero puede ser otro número. El que tú quieras. Por ejemplo, esta D [apunta primera columna] puede ser el número que tú quieras, y esta otra D [apunta segunda columna] también puede ser el número que tu quieras.

Intervención en el aula

En este apartado centramos la atención en las conversaciones en pequeños grupos entre investigador y algún o algunos estudiantes, captadas por las cámaras móviles. Se seleccionaron dos intervenciones que fueron captadas en la sesión 2, se escogieron porque en aquellas situaciones el diálogo con las investigadoras permitió un cambio en el significado inicial de las letras o un cambio en la interpretación de la letra como representación de una cantidad variable. En estas intervenciones es posible observar ayudas que permiten activar conocimientos previos, orientar la actividad de los estudiantes y atribuir significado a la nueva información. Las intervenciones se ajustan a las necesidades que se presentan en el momento, no obstante en los dos casos el seguir la secuencia del razonamiento inductivo ayudó en el cambio de ideas de los estudiantes.

Caso 1: Desde la letra evaluada a letra como variable/valor indeterminado.

En la primera situación, una de las investigadoras dialoga con el estudiantes E12, quien está trabajado de manera individual y requiere ayuda para determinar si la sentencia “cuando vende Z camisetas, gana 3xZ euros” es verdadera o falsa. En primera instancia el estudiante tiene problemas para emplear la letra, pues tal como señala en la línea 2, no sabe cómo hacer que signifique un número. Es por esto que en la línea 3, la investigadora retoma una idea desarrollada previamente y recuerda que la letra “puede ser el número que quiera”.

1. *Investigadora 2:* Vale. ¿Y tú qué crees, que es verdadera o es falsa?
2. *E12:* Es que no se hacer que signifique un número.
3. *Investigadora 2:* Pues puede ser un número. Puede ser el número que queramos. Pero imagínate que no sabemos qué número es. ¿Tú crees que si vende Z camisetas gana 3xZ euros?
4. *E12:* No.

En una segunda instancia la investigadora activa conocimientos previos alusivos a la situación problema en cuestión y a la relación funcional entre la cantidad de camisetas vendidas y los euros ganados, sin embargo el estudiante continúa con la idea de que la letra debe representar un número concreto. (Líneas 5 a 10)

5. *Investigadora 2:* ¿Cuánto ganaba por cada camiseta?
6. *E12*: 3 euros.
7. *Investigadora 2:* 3 euros, vale. ¿Entonces?
8. *E12*: Falsa.
9. *Investigadora 2:* ¿Por qué?
10. *E12:* Porque gana un número.

Ante esto, la investigadora busca una forma de orientar la tarea y el esfuerzo del estudiante, reitera la idea previa sobre la letra y además hace alusión a un elemento conocido para el estudiante: contrasta el uso de letras con el uso de espacios vacíos. Pero una vez más no tiene éxito (Línea 11).

11. *Investigadora 2:* No, si puede ser un número. El que sea. Pero no sabemos cuál es. Imagínate que en vez de Z ahí hay un hueco. Es que no sabemos. Si en vez de Z te pusiera, Carlos vende un número de camisetas cualquiera, entonces gana 3 por ese número de camisetas, el que sea. ¿Cómo crees que es eso? ¿Crees que sí o que no?[Estudiante sigue sin responder]

En la siguiente intervención la investigadora busca atribuir significado a la letra a partir del análisis de casos numéricos particulares, es así que a partir del razonamiento inductivo analizan los casos para mil camisetas, un millón y también analizan si la expresión doble puede generalizar la relación entre las variables. En cada uno de los casos el estudiante establece correctamente la relación entre las variables, por lo que la investigadora procede a conectar las ideas verbalizadas en los casos particulares con la notación y la sentencia que causa el conflicto. De esta forma su intervención logra ser efectiva pues el estudiante cambia su idea inicial y ya no otorga a la letra el significado de "letra evaluada" y puede generalizar la situación e interpretar la letra como variable con valor indeterminado (líneas 12 a 17).

12. *Investigadora 2:* Entonces la siguiente: Cuando Carlos vende Z camiseta, vende 3xZ euros. ¿Cómo crees que es eso? Z es el número de camisetas que vende y los euros serían, lo que te dice esa frase es que es 3 por el número de camisetas, esos son los euros que gana. ¿Tú crees que eso es verdad o que no?
13. *E12: [en silencio piensa]*
14. *Investigadora 2: Si* a ti te dicen el número de camisetas que vende, ¿Cómo haces siempre para saber el número de euros que gana?
15. *E12:* Si gana 3 por cada camiseta, multiplicas el número de camisetas por lo que gana.
16. *Investigadora 2:* Ah, entonces cuando sabes el número de camisetas lo que haces es multiplicarlo por 3, que es lo que gana. Vale, entonces ahí, ¿está haciendo eso o no? Si tiene Z que es un número de camisetas el que sea, te dice ahí que es el tres por el número de camisetas. ¿Y eso crees que está bien o que no?
17. *E12:* Sí.

En la figura 9, se resume el proceso realizado durante el diálogo entre la investigadora y el estudiante E12, que le permitió cambiar la idea inicial.

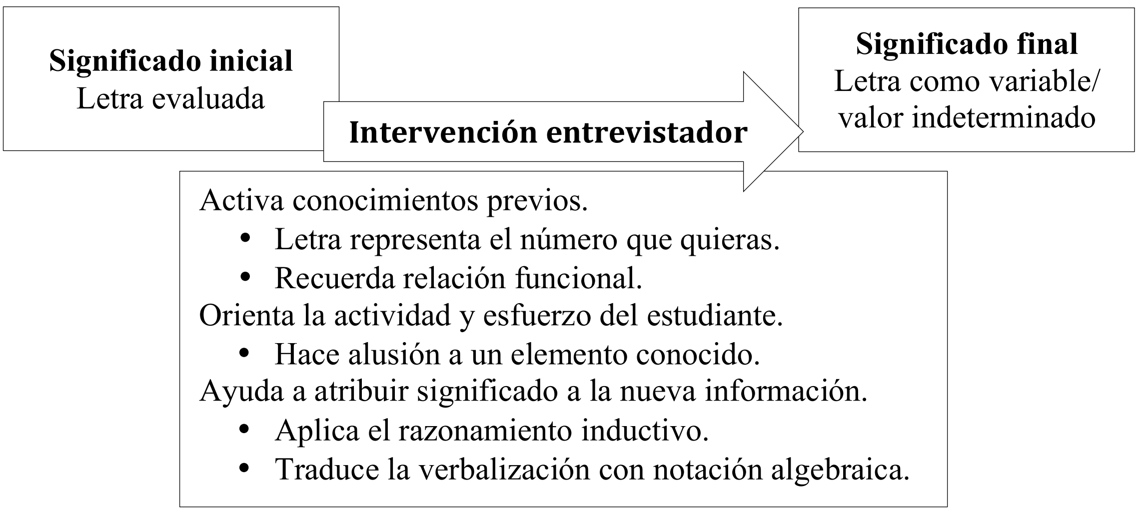


Figura 9. Cambio de significado e intervención docente E12

Caso 2: La respuesta depende de cómo se interpreta la letra.

La siguiente situación se da entre la investigadora y un grupo de estudiantes (E8, E10 y E1), quienes trabajan en la sentencia “cuando vende Z camisetas, gana N euros”. En esta oportunidad el cambio se efectúa al interpretar en primera instancia la expresión como falsa y luego cambiar de idea al señalar que esto es relativo y depende de los valores que tome N (variable dependiente).

El diálogo comienza con la intervención del estudiante E8, quien señala que Z será 3, pues en todo momento se multiplica por ese número y que N será 4. Ante esto, la investigadora orienta la actividad y lo ayuda a ordenar sus ideas, pues es la variable dependiente la que resulta de multiplicar por 3 (Líneas 18 a 29).

18. *Investigadora 2:* ¿alguien lo sabe? ¿Tú como lo has pensado E8?
19. *E8:* Que la Z sea 3.
20. *Investigadora 2:* Ajá.
21. *E8:* Y que la N sea A, y la N cualquier número, por ejemplo, el 4.
22. *Investigadora 2:* Tú has dicho que la Z es 3 y que la N es 4. ¿por qué?
23. *E8:* Pues porque la Z es tres porque hay que multiplicar 3 por el número de camisetas.
24. *Investigadora 2:* Pero si el número de camisetas… mira, fíjate dice. Cuando Carlos vende Z camisetas, tú me dices que a Z le has puesto 3, entonces ¿ya sabes que vende 3 camisetas? ¿o no? Vale, si vende 3 camisetas ¿cuánto gana?
25. *E8:* 9 euros.
26. *Investigadora 2:* ¿y por qué le has puesto a la Z tres? ¿por qué no le has puesto otro número?
27. *E8:* Porque hay que multiplicarlo por tres.
28. *Investigadora 2*: Pero hay que multiplicarlo por tres ¿para saber qué?
29. *E8:* Para saber el número de dinero que ha ganado.

La idea del estudiante no cambia. Es por esto que la investigadora plantea otras preguntas. Guía a los estudiantes en una comprensión cualitativa del problema y la variable, es decir utiliza conceptos como “mucho” o “pocos”, sin hacer referencia a una cantidad. Por ejemplo los estudiantes establecen la relación que si vende “muchas” camisetas, debe ganar “muchos” euros. En la líneas 40 y 41 el estudiante E1 señala que en el caso que venda “muchas” camisetas, no podría ganar “pocos” euros. Manifestando que en ese caso la sentencia es falsa.

30. *Investigadora 2:* Lo que gana, eh. Entonces, les voy hacer la misma pregunta, pero de otra manera. Si en vez de poner Z, les pusiera, si vendemos un número de camisetas concreto, el que sea, no sabemos qué número es. Pero vende muchas camisetas ¿Cómo puedo saber cuánto es lo que gana vendiendo muchas camisetas? ¿Cómo lo sabrías? No sabemos el número que vende. Y sabemos que vende muchas. E8, ¿tú lo sabes?
31. *E8:* eehh… multiplicando….
32. *Investigadora 2:* E1, ¿sabes tú? ¿cómo lo harías? Sabemos que vende muchas, no sabemos cuántas. ¿Cómo lo dirías? Si vende muchas, ¿cuánto gana?
33. *E1:* Pues ganaría mucho dinero.
34. *Investigadora 2:* ¿cuánto? ¿Cómo podrías saber cuánto gana?
35. *E8:* Pues multiplicando esa cantidad por 3. Por ejemplo ha vendido 100 camisetas, bueno más.
36. *Investigadora 2:* muchas. No sabemos cuántas, pero ha vendido muchísimas. ¿Qué le dirías a Carlos? Ese número de camisetas que has vendido ¿qué le haces?
37. *E1 y E8:* Lo multiplicaría por 3.
38. *E8:* Porque cada camiseta vale tres euros.
39. *Investigadora 2:* Ganas tres euros por cada camiseta: ¿y tú cómo lo harías E10?
40. *E10:* Por ejemplo si tenemos muchas camisetas, por ejemplo decimos que son 100. Vale, y a la N, porque en todos nos dice que en cada camiseta que vende gana tres euros, entonces 100 por 3 son 300. Entonces el número que sería es 300. O también muchas camisetas podría ser otro número. Por tanto este número no puede ser 10, porque si son muchas camisetas, pues tendría que ser…
41. *E1:* Yo creo que es verdadero o es falso.

La intervención anterior permitió que el estudiante E1 verbalizara que la respuesta puede ser verdadera o falsa, no obstante el estudiante E8 aún sigue confundido y no logra captar la idea (Líneas 42 a 50).

42. *Investigadora 2:* A ver E8, ¿tú que nos cuentas? Las Z son muchas o son pocas, no lo sabemos, pero nos da igual. Entonces, ¿cómo sabemos lo que ganamos?
43. *E8:* Pues la N… eh…
44. *Investigadora 2:* Sí.

45. *E8:* Ehhh. Es el 3, porque el número que haya de camisetas hay que multiplicarlo por tres.
46. *Investigadora 2:* Vale. La N tiene que ser 3 ¿me dices? ¿Ponemos aquí un tres a ver qué pasa? [lo escribe en la hoja bajo la N] ¿Sí? Entonces si ponemos ahí un tres, ¿eso es verdadero?
47. *E10, E8 y E1:* Sí.
48. *E10:* Si ponéis eso ahí sería verdadero.
49. *Investigadora 2:* Entonces vosotros creéis que cuando Carlos gane Z camisetas, no sabemos cuántas, dijimos que puede ser muchas o pocas, ¿gana siempre 3 euros?
50. *E10, E8 y E1:* Sí.

Luego, como los estudiantes afirman que si N al ser 3 la sentencia siempre será verdadera la investigadora contrasta su idea y relaciona la comprensión cualitativa del problema con una cuantitativa, por lo que en conjunto proponen casos numéricos particulares y analizan si son verdaderos o falso. La investigadora escribe lo que verbalizan en una hoja, tal como se muestra en la figura 10.

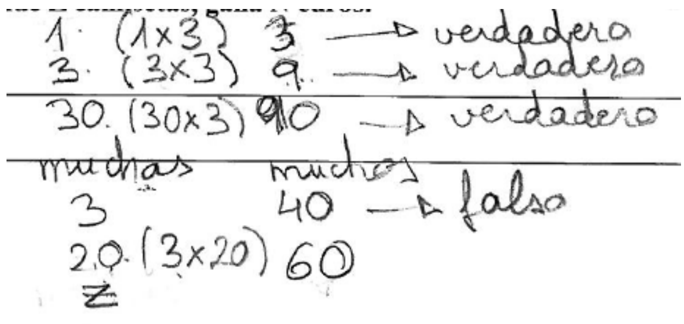


Figura 10. Análisis sentencia Cuando vende Z camisetas gana N euros

En los argumentos, los estudiantes logran reconocer que no siempre N será 3, que es solo la relación entre las variables, incluso les parece incoherente que venda mucho y gane solo 3.

51. *E8 o E1:* Si vende muchas camisetas se consigue mucho dinero, y si vende pocas camisetas, gana pocos euros.
52. *Investigadora 2:* Entonces, ¿siempre no va a ganar 3 euros?
53. *E8 o E1*: No.
54. *Investigadora 2:* ¿Entonces?

55. *E10:* En cada camiseta gana 3 euros, pero si tiene, pero por ejemplo, si tiene 100 camisetas, entonces como las camisetas valen 3 euros. 100 por 3 son 300. Sería ese el resultado.
56. *Investigadora 2:* Vale. ¿entonces ahí qué ponemos? No sé qué vas a poner ahí al final.
57. *E10:* Ahí puedes poner el 3.
58. *Investigadora 2:* ¿Ahí puedes poner el 3?
59. *E10:* Sí porque es el número… o sea las camisetas es cualquiera que puede ser, pero como cada camiseta es 3 euros, la N tendríamos que poner 3 euros.
60. *Investigadora 2:* Si no me lo decís, si no yo soy la que no entiendo y me estoy liando ya. ¿Vale? Dice si Carlos vende Z camisetas, que puede ser muchas o pocas, gana 3 euros. ¿con eso estáis de acuerdo? Si vende muchas camisetas gana 3 euros y vende pocas camisetas…
61. *E1:* A claro, aquí tienes que poner pocas camisetas si quieres poner aquí el 3. Y si aquí pones por ejemplo, eehh, por ejemplo el número 50, tiene que poner muchas camisetas.
62. *Investigadora 2:* Vale, si aquí pones el 3, ¿qué tendrías que poner aquí?
63. *E1:* Poco.
64. *Investigadora 2:* ¿Cómo de poco? ¿Sabríamos cuánto?
65. *E8:* Si queremos el tres y si cada camiseta vale tres euros…
66. *E1:* el 1.
67. *E8:* el 1.

Finalmente la investigadora plantea diversos ejemplos y contraejemplos, logrando que los estudiantes manifiesten comprender porque la sentencia en algunas ocasiones es verdadera y en otras falsas.

68. *Investigadora 2:* Pero no sabemos cuántas, solo sabemos que son muchas, qué hacemos con esa cantidad. No sabemos cuántas. ¿qué le decimos a Carlos? Para saber lo que has ganado tienes que hacer…
69. *E1*: Si son muchas no serán tres ni uno, será uno más alto. 9 o 10.
70. *Investigadora 2:* ¿y tú qué crees E8?
71. *E8*: Mucho dinero.
72. *Investigadora 2:* Vale. Son muchas, voy a poner otra. Como Z y N pueden ser

cualquier número, ahora yo me voy a inventar otro número. Voy a poner 3 y aquí 40.

73. *Investigadora 2:* Como es cualquier número, ahora yo pongo otro.
74. *E1*: Ehh.. 3 y 40.
75. *Investigadora 2:* ¿Estáis de acuerdo que puede ser 3 y 40? ¿y eso creéis que sería verdadero o que sería falso?
76. *E1, E8 y E10:* Falso.
77. *Investigadora 2:* ¿Por qué lo habéis dicho tan rápido?
78. *E10:* Porque si la Z es 3 y la N es 40. Entonces la Z debería ser más número.
79. *Investigadora 2:* ¿Cuál?
80. *E10:* Un número más grande. Por ejemplo, el 10 o 11, entonces… si aquí pones el 3, entonces el 40 debería ser un número más pequeño. Y si quieres quitar el 3, tienes que poner un número más grande que el 3.
81. *E1:* Entonces, si aquí tu pones….
82. *E10:* Entonces esto aquí mismo sería falso. Pero si aquí pones más números sería verdadero.
83. *E1:* Si pones aquí….mmm… uno más grande este sería verdadero.

En la figura 11, se resume el proceso realizado durante el diálogo entre la investigadora y el estudiante E12, que le permitió cambiar la idea inicial.

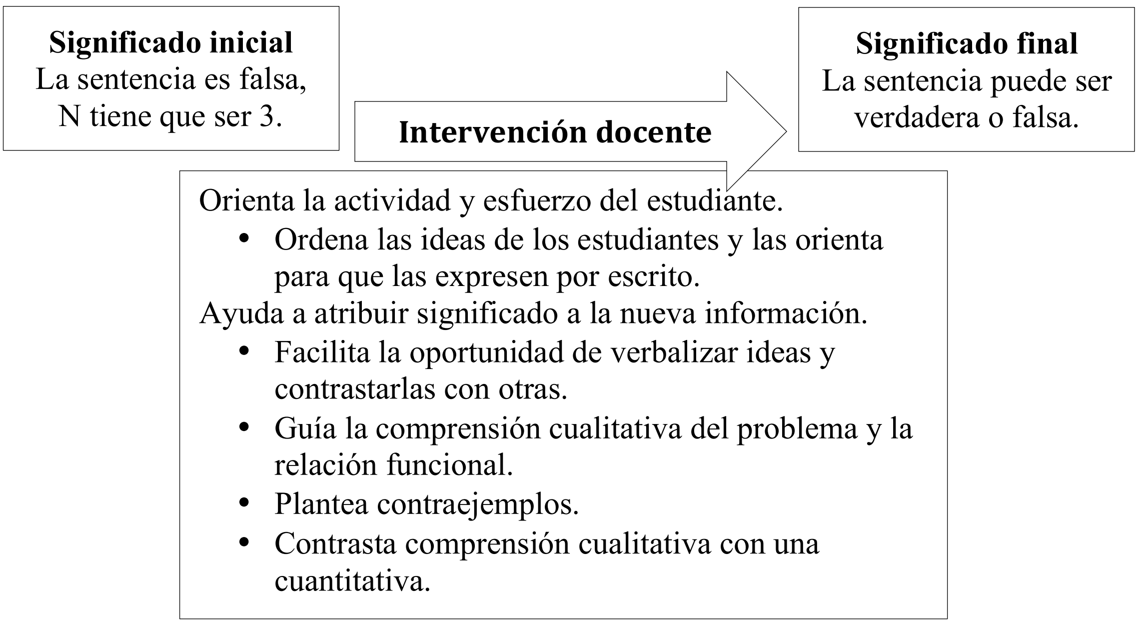


Figura 11. Cambio de significado e intervención docente E1, E8 y E10

En este segunda caso, se observa que la posibilidad de interpretar la situación en términos cualitativos ayudó a los estudiantes a lograr comprender que la respuesta no era única. Lo realizado aquí coincide con lo que plantea Socas, Camacho, Palarea y Hernández, (1996) y Azarquiel, (1993) quienes plantean que para que el alumno comprenda el lenguaje algebraico y su uso, la comprensión cualitativa expresada en lenguaje habitual es un primer nivel de comprensión, el siguiente nivel será la comprensión cuantitativa, que se basa en casos aritméticos para finalizar con la comprensión conceptual del problema.

Capítulo 6: Conclusiones

Este último capítulo reflexionamos sobre las preocupaciones que dieron inicio a esta investigación y describimos los aportes a la comunidad científica. Lo estructuramos en tres apartados: (a) logro de objetivos y principales aportes, (b) limitaciones y (c) líneas abiertas de investigación,

Logro de objetivos y principales aportes

De modo general, podemos afirmar que cumplimos con todos los objetivos propuestos en esta investigación. Las grabaciones y producciones escritas nos permitieron identificar y describir tanto los significados asociados a la letra como las intervenciones que permiten que estos cambien o se amplíen.

Nuestro primer objetivo general fue "describir cómo evolucionan los significados que estudiantes de tercero de primaria asocian a las letras en contextos funcionales". Para esto nos propusimos dos objetivos específicos. Uno de ellos era "identificar significados que los estudiantes asignan a las letras, a partir de sus intervenciones orales y producciones escritas en el marco de un experimento de enseñanza en el que se trabaja en contextos funcionales". A lo largo del experimento de enseñanza pudimos observar que los significados de los estudiantes eran diversos. Todas la categorías propuestas para el análisis se manifestaron por lo menos una vez y al contrastarlas con otras investigaciones (e.g. Blanton el al. 2017; Kücheman, 1981) logramos precisar algunas ideas sobre éstas. Por ejemplo, los estudiantes utilizaron el orden del alfabeto para argumentar qué significado le dan a la letra, pero su interpretación en ocasiones consistía en buscar el número que correspondiera con la letra y escribir esa cantidad ("letra evaluada/ valor lógico) o en otras solo aplicaban la relación funcional y buscaban otra letra, dejando indeterminado el valor de las variables ("letra como variable/ valor indeterminado). También manifiestan que si bien la letra tiene solo un valor que corresponde a su posición, las situaciones problemas pueden tener distintas respuestas y dependerá de la letra que escoja cada estudiante para representar el problema, lo que demuestra que tienen nociones de la variabilidad de las situaciones. Sobre la categoría "letra como variable/ valor indeterminado", observamos que los estudiantes tienden a apoyarse en cantidades concretas para ratificar sus argumentos, por lo que esta categoría estaría estrechamente relacionada con la categoría "letra como variable/ valor aleatorio". Por otra parte, también pudimos observar cómo el significado de la “letra como variable/ valor indeterminado” tiene efectos en los modos de utilizar las letras, pues los estudiantes al señalar que la letra puede ser “el número que tú quieras”, utilizaban letras iguales o distintas y señalaban que pueden representar “cualquier número”, sin hacer distinción que letras iguales no pueden representar la misma cantidad en una situación problemas, o que letras distintas sí pueden tener igual valor. Algunos, considerando esto fueron más rigurosos al interpretar la letra y procuraron explicitar que la letra no puede ser cualquier valor sino uno que resulte de aplicar la relación funcional involucrada en la situación problema.

El otro objetivo específico era “describir la trayectoria que siguen los significados puestos de manifiesto por los estudiantes a lo largo de las sesiones de trabajo que constituyen el citado experimento de enseñanza”. En este caso ratificamos algunos planteamientos propuestos en otras investigaciones. Radford (2001) señala que los estudiantes al dar sentido a los símbolos buscan referentes de dominios conocidos para ellos, en esta investigación se evidencia que en la primera sesión priman significados alusivos al orden del alfabeto o a ideas que provienen desde la aritmética, contextos que los estudiantes han aplicado en otras ocasiones. Blanton et al. (2017) proponen que la progresión de los significados no es lineal y dependiendo de la tarea, se pondrán de manifiesto unos u otros. Esto también se puede ratificar en esta investigación, puesto que si bien los estudiantes en la segunda sesión manifiestan un cambio en sus significados y, en comparación a la sesión 1, hay más estudiantes que se refieren a la letra como una cantidad indeterminada, en la siguiente sesión esta idea no persiste y se logra evidenciar otros significados, incluso el rechazo a la letra. Finalmente, al igual que en Blanton et al. (2017) y Kaput et al. (2008), se observa que no hay una progresión conjunta entre la idea de variabilidad y su representación. Observamos que muchos de los estudiantes comprenden que la letra puede representar una cantidad indetermina que varía. En tareas en las que tienen que representar la variable dependiente, conociendo la variable independiente verbalizan la idea de variabilidad, pero al expresarla con letras y números lo hacen de modo ambiguo. En el caso de los números escriben uno cualquiera, lo que se podría interpretar como que no entienden la tarea o asigna un valor fijo, pero al escuchar sus argumentos se logra identificar que ese número que escriben es solo un ejemplo, pues consideran que si la letra puede ser cualquier número, no es erróneo poner un caso particular cualquiera. En el caso de las letras, por lo general escribieron una letra distinta a la que representaba la variable independiente, esto a simple vista podría interpretarse que no comprenden o responden al azar, sin embargo en sus respuestas dejan implícita la relación funcional. Al verbalizar los motivos por las que las escribieron vuelven a señalar que puede ser cualquier número, y unos pocos estudiantes son más rigurosos y señalan que es cualquier número, pero tiene que ser el resultado de aplicar la relación funcional.

Nuestro segundo objetivo general fue “identificar y describir las intervenciones en el aula que contribuyen a la evolución del significado que los estudiantes asignan a las letras”. En este caso el primer objetivo específico se cumplió y logramos identificar intervenciones en el aula que se detectan asociadas a un cambio en el significado que los estudiantes asignan a la letra. Sin embargo, solo logramos identificar dos casos. Al comparar las ayudas ofrecidas en cada caso, encontramos escasos elementos en común, por lo que nos limitamos a describir los sucesos y esperamos que en investigaciones futuras poder ahondar más en la temática. Por lo anterior, creemos que el segundo objetivo específico “describir intervenciones conducentes a que los estudiantes den significado o cambien el significado dado a la letra”, se logró parcialmente. En los dos casos analizados, logramos identificar el efecto positivo del razonamiento inductivo al momento de generalizar e interpretar las letras. Además, mencionamos una serie de acciones que realiza el investigador que colaboran a que los estudiantes modifiquen el significado que manifestaban de la letra. Se corroboran los efectos positivos de algunas categorías propuestas por Warren (2006) que tienen relación con la verbalización de los procesos y la conexión de estos con los símbolos.

Limitaciones

El primer aspecto a mencionar es el tiempo de trabajo en el que se realizó esta investigación. Si éste se pudiese extender hubiese sido factible lograr profundizar más en los análisis y resultados de la investigación. Otro aspecto tiene relación con la recogida de datos. Si bien los instrumentos permitieron cumplir con los objetivos, dado que el objetivo del experimento de enseñanza era más amplio, la información disponible en la que se hace uso de las letras era reducida. En ocasiones no fue posible profundizar en las respuestas de los estudiantes, pues el espacio para ello era limitado y, si bien los estudiantes de tercero ya escriben con fluidez, aún se encuentran en proceso de desarrollar sus habilidades comunicativas escritas, por lo que comprender lo que deseaban manifestar en algunas oportunidades no fue una tarea fácil.

Finalmente, fue complejo encontrar antecedentes que se refirieran la intervención en el aula, las ayudas que ofrece el profesor y el desarrollo de habilidades algebraicas. Por lo que limitó la posibilidad de contrastar nuestros resultados con otras investigaciones.

Líneas abiertas

Una de las líneas abiertas que deja esta investigación es explorar otros significados relacionados con las cantidades indeterminadas, por ejemplo, las incógnitas. Pues evidenciamos que los estudiantes señalan que las letras pueden representar cantidades indeterminadas y argumentan que "pueden ser el número que tú quieras", pero esto no es cierto en todos los contextos. Por lo que resulta interesante investigar qué pasa cuando en la tarea la letra representa un número con un valor fijo. ¿Percibirán diferencias en los significados? ¿Serán capaces de identificar cuándo las letras representan una incógnita y cuándo una cantidad variable? ¿Validarán los dos significados?

En lo que respecta a las letras, una línea abierta es profundizar en la comprensión de las convenciones matemáticas. En esta experiencia se logra identificar que los estudiantes utilizan las letras, pero hay imprecisiones. Por ejemplo, una misma letra puede representar distintos valores en una misma situación o concebir que siempre letras distintas representan cantidades distintas, sin considerar que también pueden representar cantidades iguales.

Otra línea abierta tiene relación con los estudiantes con talento matemático. Sería interesante identificar el talento matemático de los estudiantes que participan en actividades como las que presentamos en esta investigación e identificar cuáles son los significados que le otorgan a las letras, como las usan y si esto difiere en estudiantes con o sin talento matemático.

Finalmente, en relación a las intervenciones en aula, falta buscar más evidencias de las acciones de los docentes que permiten favorecer el aprendizaje de los símbolos algebraicos. Además, caracterizar otro tipo de interacciones, por ejemplo el efecto que tiene el trabajo en grupo, con compañeros con capacidades matemáticas distintas, entre otras posibilidades.

Referencias

Azarquiel, G. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Madrid, España: Síntesis.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. En N. Bernarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra* (pp. 3–12). Dordrecht, Países Bajos: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_1

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice.* Portsmouth, NH: Heinamann.

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 181–202. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5.* Reston, VA: NCTM.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I. y Kim, J.-S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for research in Mathematics Education, 46*(1), 39–87.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. En A. Coxforf y A. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (pp. 20–32). Reston, VA: NCTM

Brizuela, B. y Blanton, M. (2014). El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología – Segunda época (UNLP), 14,* 37–57.

Brizuela, B., Blanton, M., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A. y Sawrey, K. (2015). A first grade student's exploration of variable and variable notation/Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología: Studies in Psicology, 36*(1), 138–165.

Brizuela, B. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the “best deal” problem. En J. J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 273–301). Nueva York, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Cañadas, M. C., Brizuela, B. y Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior, 41,* 87–103.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorization for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 69–81.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz-Hidalgo y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209–218). Granada, España: Comares.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 2,* 669–705. Charlotte, N.C: Information Age y NCTM

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. En A. E. Kelly, R. Lesh y J. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68–95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Drouhard, J. P. y Teppo, A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (pp. 227–264). Nueva York, NY: Kluwer.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2010). *Metodología de la investigación* (5ª ed). México, DF: McGraw-Hill.

Kaput, J. J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Nueva York; NY: Lawrence Earlbaum Associates.

Kaput, J. J., Blanton, M. y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19–55). Nueva York; NY: Lawrence Earlbaum Associates..

Kaput, J. J., Carraher, D. W. y Blanton, M. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades.* Nueva York, NY: Lawrence Earlbaum Associates.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. y Stephens, A. C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence y variable. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A Global dialogue from multiple perspectives* (pp. 259–276). Berlin, Alemania: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_15

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 11–16). Londres, Reino Unido: Murray.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students'understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1–19.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24–40.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE, 52,* 19349-19420.

Ministerio de Educación de Chile. (2012). *Bases curriculares Educación Básica.* Santiago, Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.

Molina, M. (2005). La integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 53–69). San Cristóbal de la Laguna, España: SEIEM.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en Educación Primaria. *PNA, 3*(3), 135–156.

Molina, M. (2012). *Proyecto investigador. Plaza de profesor titular de universidad.* Documento no publicado. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.

Molina, M., Ambrose, R. y del Rio, A. (en prensa). First encounter with variables by first and third grade spanish students. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: the global evolution of an emerging field of research and practice.* Springer.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Nataraj, M. S. y Thomas, M. (2017). Teaching and learning middle school algebra: Valuable lessons from the history of mathematics. En S. Stewart (Ed.), *And the rest is just algebra* (pp. 131–154). Cham, Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_8

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

National Governors Association Center for Best Practices y Council of Chief State School Officers. (2010). *Common core state standards for mathematics.* Washington, DC: Autor.

Onrubia, J. (2000). Enseñar: Crear zonas de desarrollo próximo e intervenir en ellas. En C. Coll, E. Martín, T. Mauri, M. Miras, J. Onrubia, I. Solé y A. Zabala, *El constructivismo en el aula* (12ª ed., pp. 101–124). Barcelona, España: Graó.

Pinto, E., Cañadas, M. C., Moreno, A. y Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J.A. Macías, A. Jiménez, J.L. González, M.T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F.J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 414-426). Málaga, España: SEIEM.

Radford, L. (1999). El aprendizaje del uso de signos en álgebra Una perspectiva post-vigotskiana. *Educación Matemática, 11*(3), 25–53.

Radford, L. (2001). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42*(3), 237–268.

Radford, L. (2011a). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.) *Proceeding of the 35rd conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education,* (Vol. 4, pp. 17–24). Ankara, Turquía: PME.

Radford, L. (2011b). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization; A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 303–322). Berlin, Alemania: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_17

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., Brizuela, B. M. y Biekofsky, R. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: de las ideas de los niños a las actividades en el aula.* Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Schoenfeld, A. y Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The Mathematics Teacher, 81*(6), 420–427.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grad*es (pp.133-163). Nueva York, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. M. y Hernandez, J. (1996). *Iniciacion al álgebra.* Madrid, España: Síntesis.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A.E. Kelly y R.A. Lesh, (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Mahwah: NJ: LAE.

The Design-Based Research Collective. (2003). Design-based Research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5–8.

Trigueros, M. y Jacobs, S. (2008). On developing a rich conception of variable. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education, MAA Notes* (pp. 3–13). Washington, DC: Mathematical Association of America Thompson

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las Ciencias, 14*(3), 351–363.

Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Educación Matemática, 6*(3), 90–108.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8–19). Reston, VA: NCTM.

Valverde, A. G. (2014). Experimentos de enseñanza: Una alternativa metodológica para investigar en el contexto de la formación Inicial de docentes. *Actualidades Investigativas en Educación, 14*(3), 1–20.

Vygotski, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Barcelona, España: Crítica.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *The Mathematics Teacher, 76*(7), 474–479.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young students write generalizations in words and in symbols. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 377-384). Praga, República Checa: Facultad de educación, Universidad Charles.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood, 6*(2), 150–162.