Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

Trabajo de Investigación Tutelada

ACTUACIÓN DE RESOLUTORES DE PRIMERO Y SEGUNDO AÑO DE SECUNDARIA EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO: UN ESTUDIO EXPLORATORIO.

Ángel Alberto López

Granada, 2011

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

ACTUACIÓN DE RESOLUTORES DE PRIMERO Y SEGUNDO AÑO DE SECUNDARIA EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA MATEMÁTICO: UN ESTUDIO EXPLORATORIO.

Trabajo de investigación tutelada realizado bajo la dirección del Doctor Francisco Fernández García del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Ángel Alberto López para su aprobación por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

ÁNGEL ALBERTO LÓPEZ

DIRECTOR

DR. FRANCISCO FERNÁNDEZ GARCÍA

Granada 2011

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mis seres queridos:

Osmer y Vane;

A Marlene, compañera de toda la vida;

A mi madre Ana López;

A mis Hermanos Carlos, Magalys, José Luís y Trina.

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer a todas las personas que han hecho posible la culminación de este trabajo. Agradezco de manera especial al profesor Dr. Francisco Fernández por su apoyo y orientación para la culminación de este trabajo.

Agradezco a todos los profesores del Máster, y a mis compañeros latinoamericanos y europeos por su continua solidaridad.

Agradezco a mi familia por darme su apoyo y comprender mi ausencia para dedicar tiempo a mi formación personal.

Agradezco a todos mis compañeros de trabajo de la Universidad de Carabobo, específicamente el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias y Tecnología por su continuo apoyo.

Finalmente a la Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas (ACM), por permitirme formar parte de su equipo de trabajo.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo trata sobre la resolución de problemas y los sistemas de representación utilizados por un grupo de estudiantes venezolanos de 1º y 2º año de secundaria que presentaron la prueba de la final regional de la olimpiada matemática venezolana en el año 2008, en el estado Carabobo.

El interés personal por esta investigación tiene que ver con el hecho que desde hace varios años he estado participando en los entrenamientos de estudiantes venezolanos para competencias nacionales e internacionales en olimpiadas matemáticas, así como en la aplicación de las pruebas.

En ese proceso de entrenamiento pasa algo curioso, los alumnos, independiente del grado de escolaridad, en los entrenamientos, quieren resolver todos los problemas, sin importar el nivel de los mismos y a veces son capaces de hacerlo.

Ese interés mostrado por los alumnos se ve reflejado en las resoluciones de los problemas, donde expresan de una manera muy coherente las ideas matemáticas. De allí surge la idea de observar cómo resuelven los problemas y cómo son capaces de comunicar sus ideas.

En este estudio, describimos la actuación de resolutores cuando resuelven un problema matemático, de manera espontánea con lápiz y papel.

Este estudio se enmarca dentro de la línea de investigación del Grupo de Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, y consta de cinco capítulos que se han desarrollado a largo de la investigación y que detallamos a continuación.

En el capítulo 1 se presenta la justificación del problema, las preguntas de investigación, los objetivos así como cuatro conjeturas que al final de la investigación y con los resultados podemos determinar si son ciertas o no.

El capítulo 2 se presenta el marco teórico y consta de tres pilares fundamentales: las representaciones externas, los sistemas de representación y la resolución de problemas.

En el capítulo 3 se hace referencia a la metodología que permitió llevar a cabo esta investigación. Se establece la naturaleza descriptiva del estudio, también se describe la muestra intencional, el instrumento aplicado, las condiciones de la aplicación del instrumento. En este capítulo también se hace referencia a la forma como se hizo la codificación así como el software utilizado para tal fin.

En el capítulo 4 se presentan los resultados a nivel general y luego separado por grupos, comparándolos en las fases de la resolución de problemas, así como, en los sistemas de representación utilizados por los resolutores en cada grupo. Se presentan también algunos ejemplos de producciones de los estudiantes, donde se puede observar el desempeño de los mismos.

Finalmente, en el capítulo 5, se exponen las conclusiones del estudio respondiendo a las preguntas de investigación, a los objetivos, así como a las conjeturas planteadas originalmente al inicio del informe.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este Capítulo se presenta, en primer lugar, la justificación del problema objeto de estudio, resaltando la importancia que tienen los sistemas de representación en la resolución de problemas. A continuación se exponen algunas preguntas de interés para nuestra investigación, se establecen los objetivos y se proponen las conjeturas que vamos a verificar a lo largo de este trabajo de investigación.

JUSTIFICACIÓN

La necesidad de comunicarnos nos ha llevado a crear una cantidad importante de símbolos, señales, palabras, reglas, etc. para facilitar el intercambio de información con nuestros semejantes.

En nuestro caso, las Matemáticas, por su naturaleza, está llena de símbolos y reglas que siguen una lógica estructurada. La forma de expresar las ideas matemáticas ha sido un tema de interés para muchos autores a largo de la historia y, actualmente, retoma su importancia al relacionar su utilización en el ámbito escolar con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en las distintas etapas de la Educación Matemática. Por ejemplo, los sistemas simbólicos para codificar y representar conceptos matemáticos se han estudiado desde el punto de vista del análisis histórico, desde el punto de vista lingüístico, antropológico, filosófico y psicológico (Castro 1994).

El interés del estudio de ese lenguaje estructurado para la Educación Matemática se justifica porque a través de ese lenguaje ocurre la comunicación durante la actividad de enseñanza-aprendizaje escolar. Cuando un profesor explica a sus estudiantes, o cuando un estudiante resuelve un problema, hacen el mayor esfuerzo por expresar las ideas de forma que se puedan entender. Ese esfuerzo pasa necesariamente por establecer representaciones.

El tema de las representaciones ha ocupado y ocupa la atención de investigadores en Educación Matemática, en donde se abordan desde los aspectos epistemológicos y los cognitivos hasta llegar a establecer diferentes sistemas de representaciones (Hiebert y

Carpenter, 1992; Duval, 1993; Rico, Castro y Romero, 1996; Wagner y Kieran, 1989; Puig y Cerdán, 1989, 1991; Kaput, 1989; Filloy y Rubio, 1992; Fong y Chong, 1995; Meavilla, 1995; Palarea y Socas, 1995; Rojano, 1996, Fernández 1997).

Los sistemas de representación y la resolución de problemas matemáticos es un tema de interés para la Didáctica de la Matemática porque se pone en juego una serie de conocimientos, conceptos, modelos, métodos, estrategias, experiencias y relaciones que implican un pensamiento elaborado complejo que consigue que, a partir de unos datos conocidos, encontrar otros datos desconocidos.

Los investigadores en Didáctica de la Matemática han dedicado esfuerzos importantes en caracterizar y describir los modelos, metodologías, estrategias generales, heurísticos, etc. seguidos por los resolutores de problemas, así como la relación entre las tipologías de resolutores y su forma de resolver problemas en el ámbito escolar.

Nuestro trabajo se va a centrar en la resolución de problemas escolares mediante lápiz y papel que, en la actualidad, sigue siendo la forma más generalizada en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles.

Cuando algún estudiante resuelve un problema mediante lápiz y papel deja la huella de los pasos seguidos en su resolución. Esos pasos están cargados de información importante que el resolutor presenta haciendo uso de algún sistema de representación que le es conocido y le permite comunicar su pensamiento.

En nuestra investigación estamos interesados en estudiar los sistemas de representación utilizados por un grupo de estudiantes de 1º y 2º de Educación Secundaria, durante la resolución de un problema de la fase final regional de la Olimpíada Matemática venezolana de 2008. En ese sentido, hemos planteado algunas preguntas de interés para la investigación, definido los objetivos y hecho algunas conjeturas sobre los resultados que, de acuerdo a nuestra experiencia como docentes, esperamos encontrar a lo largo del estudio.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN. OBJETIVOS

Una vez planteado el problema de nuestra investigación, nos surgen una serie de interrogantes a los que trataremos de dar respuesta en nuestro trabajo.

En nuestro caso vamos a estudiar las respuestas de los estudiantes a uno de los problemas, de la prueba referida anteriormente, que es común a los dos grupos de estudiantes citados. En este caso, las preguntas de investigación que nos hemos planteado son:

1. ¿Cuál o cuáles son los Sistemas de Representación más utilizados por los estudiantes objeto de nuestro estudio en la resolución de un problema común para los dos grupos de Secundaria?
2. ¿Es posible que el grupo de resolutores utilicen sólo los sistemas de representación descritos en Fernández (1997)?.
3. ¿Cuál de los grupos tendrá un mejor desempeño en la resolución del problema y qué sistema de representación utilizan en este caso?
4. ¿Cuál es el sistema de representación más efectivo y menos efectivo para estos dos grupos de estudiantes, al resolver el problema?

Las preguntas de investigación anteriormente planteadas, nos lleva a definir los objetivos de la investigación.

Objetivos específicos

1. Identificar los sistemas de representación Ensayo y Error, Pate-Todo, Gráfico, Gráfico-Simbólico y Simbólico en la resolución de un problema en la prueba citada.

2. Identificar las fases de planteamiento, ejecución y desempeño final, en la resolución de un problema de la fase final regional de la olimpíada matemática venezolana realizado por estudiantes de primero y segundo de secundaria.

3. Describir la relación entre los sistemas de representación y las fases de la resolución del problema objeto de estudio.

4. Comparar la actuación de los dos grupos de resolutores cuando resuelven un problema de la fase final regional de la olimpíada matemática venezolana.

CONJETURAS

En el caso de las investigaciones descriptivas, como plantean algunos autores, no siempre es necesaria la formulación de hipótesis y, en caso de existir, tienen un carácter general (Fox, 1987; Hernández Sampieri, Fernández y Baptista, 2007).

Un ejemplo de la utilización de hipótesis descriptivas es el trabajo de tesis doctoral de Olivo (2008), leído en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en que se aclara que las hipótesis formuladas "deben entenderse como conjeturas o expectativas de lo que se espera encontrar" (Olivo, 2008, p. 24).

En nuestro caso, de igual forma, las hipótesis que formulamos a continuación se deben entender como conjeturas o hipótesis descriptivas de lo que esperamos encontrar en nuestro estudio.

1. Se puede caracterizar el sistema de representación utilizado por cada resolutor, con base a los sistemas de representación descritos en Fernández (1997).
2. Los sistemas de representación más intuitivos son utilizados mayoritariamente por los alumnos del primer curso de secundaria.
3. Los sistemas de representación más abstractos son utilizados mayoritariamente por los alumnos del segundo curso de secundaria.
4. Los estudiantes del curso superior obtienen mejores resultados que los del curso inferior.

Al final del trabajo retomaremos las conjeturas que hemos formulado para determinar su confirmación en uno u otro sentido.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La fundamentación teórica en esta investigación contempla los siguientes apartados: antecedentes, resolución de problemas y sistemas de representación. En los antecedentes haremos una revisión bibliográfica sobre trabajos realizados referidos al tema y que consideramos importantes por su aporte a nuestra investigación. En el apartado de resolución de problemas incidiremos en la importancia que ha tenido la resolución de problemas en el desarrollo de la matemática, así como su posterior incorporación en la educación matemática y, por último describiremos los sistemas de representación a los que nos vamos a referir en este trabajo.

ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación indicamos y describimos algunas de las investigaciones relacionadas directamente con los sistemas de representación y resolución de problemas:

- Fernández (1997) en su tesis doctoral *Evaluación de competencias de álgebra elemental basado en la resolución de problemas verbales* caracteriza una serie de tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental, en base a los sistemas de representación que los estudiantes han utilizado, espontáneamente, para resolver los problemas propuestos.
- Espinoza (2005) en *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencia sobre la evaluación con profesores en formación inicial* realiza una réplica de la tesis anterior y establece las relaciones entre las tipologías de resolutores de problemas, definidas por Fernández (1997), y las creencias que tienen los futuros profesores cuando evalúan los problemas bien resueltos por los estudiantes, diferenciados según el sistema de representación que han utilizado en su resolución.
- González (2010) en *Iniciación a la resolución de problemas de álgebra escolar a través de un método gráfico. Un estudio de caso* se plantea conocer cómo los estudiantes resuelven problemas algebraicos escolares a

través de un método geométrico lineal, basado en el uso de segmentos. Para ello elabora y aplica un instrumento así como una serie de entrevistas a los estudiantes de la muestra.

- Martínez (2011) en *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental* plantea la pertinencia de emplear una metodología de resolución de problemas de álgebra elemental en 1º y 2º de ESO, basada en la utilización de segmentos de recta, lo que denominó MGL, para representar las cantidades conocidas y desconocidas implicadas en los textos de los problemas verbales indicados y operar sobre dichos segmentos.

REPRESENTACIONES Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Las representaciones han sido objeto de estudio en la matemática y también en la didáctica de la matemática. Es de gran interés, desde este punto de vista, la forma como se comunican las ideas que están matemáticamente estructuradas.

Sobre las representaciones se ha planteado la dicotomía entre las representaciones que son internas y representaciones externas. Duval (1999) define como representación externa la producida como tal por un sujeto o por un elemento, que se efectúa a través de un sistema semiótico y es accesible a todos quienes conocen dicho sistema. Al mismo tiempo describe a la representación interna como aquella que pertenece a un sujeto y que no es comunicada a otro a través de la producción de una representación externa.

Para efectos de esta investigación, cuando se haga referencia al término representación nos estaremos refiriendo a las representaciones externas, en el sentido que es utilizada por Castro y Castro (1997), es decir, "notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes" (p. 96).

Igualmente en este trabajo y por la naturaleza del mismo, adoptaremos el término Sistema de Representación (SR) definido por Fernández (1997), el cual establece que: "es un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto" (p. 73).

Los sistemas de representación se pueden clasificar de manera genérica en numéricos, gráficos y simbólicos. (Wagner y Kieran, 1989; Puig y Cerdán, 1989, 1991; Filloy y Rubio, 1992; Fong y Chong, 1995; Meavilla, 1995; Palarea y Socas, 1995; Rojano, 1996).

Partiendo de estos tres sistemas básicos de signos: numéricos, gráficos y simbólicos, Fernández (1997) establece cinco sistemas de representación diferentes que articulan su estudio y que sirven como base para esta investigación.

1. *Sistema de representación Ensayo y Error.* Consideramos que se está utilizando este sistema cuando se prueban, de forma sistemática, valores numéricos concretos para la/s incógnita/s, estableciendo las relaciones implícitas en el problema, y utilizando los valores fallidos para conjeturar nuevos valores que aproximen paulatinamente al resultado correcto.

   Se utilizan notaciones numéricas y simbología aritmética, pero se establecen un conjunto de reglas y convenios que permiten establecer relaciones entre datos conocidos y desconocidos, además de potenciar la evaluación del dato erróneo para producir un resultado correcto.
2. *Sistema de representación Parte – Todo.* Las relaciones que implica el problema se plantean, en su mayoría, numéricamente mediante alguna o varias de estas estrategias para relacionar los datos: combinación, cambio, comparación e igualación. Se establece una inclusión de clases y una comparación, considerando los datos desconocidos como parte del resultado de operar los datos conocidos y comparando el total con la parte.

   Es un enfoque intuitivo de representación que incluye el uso de hechos numéricos, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento (Kieran y Filloy, 1989). Este sistema de representación, como el anterior, se caracteriza porque utiliza símbolos numéricos (generalmente, operaciones con números concretos). En algunos casos pueden establecerse ecuaciones, pero no se utilizan las reglas de sintaxis del álgebra, sino operaciones aritméticas basadas en la comparación e igualación (balanza). No generaliza pero establece unas relaciones entre cantidades que no son operaciones aisladas
3. *Sistema de representación Gráfico.* Entendemos que se emplea este sistema de representación cuando se utiliza un sistema de representación visual (representación física, icónica, geométrica o diagramática), en definitiva un código gráfico, para plantear las relaciones entre datos e incógnitas del

problema, sin ningún otro elemento que podamos considerar simbólico. Las operaciones numéricas se efectúan a partir de las relaciones establecidas en el gráfico, utilizando generalmente un esquema de Parte – Todo o una relación de proporcionalidad (regla de tres).

Este sistema de representación es especialmente útil cuando, en los problemas verbales algebraicos, las relaciones que se establecen son lineales y el contexto de está formado por objetos en los que los datos e incógnitas son cantidades de magnitudes lineales o componentes lineales de magnitudes vectoriales. Entonces, la representación gráfica suele tender a establecer un isomorfismo entre la magnitud que se relaciona en el texto del problema con la magnitud longitud.

4. *Sistema de representación Gráfico-Simbólico.* Este sistema de representación podemos considerarlo un híbrido del sistema de representación gráfico y el sistema de representación simbólico. Consiste en establecer relaciones mediante un lenguaje simbólico (alfabético), pero con un apoyo explícito en un gráfico o dibujo en donde se representan los datos y las incógnitas, identificando los elementos que intervienen en las relaciones y, a veces, las propias relaciones.
5. *Sistema de representación Simbólico*. Se presenta cuando se utiliza un lenguaje sólo y exclusivamente abstracto, usualmente alfabético, es decir, el lenguaje algebraico en sentido tradicional o lenguaje cartesiano. Se identifican las incógnitas con letras o palabras y se expresan relaciones mediante ecuaciones. No se utilizan objetos concretos (dibujos o gráficos) para representar datos o relaciones. Se produce una abstracción y generalización de las relaciones. El modelo se puede aplicar a cualquier otro problema de las mismas características

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

La resolución de problemas, históricamente, ha contribuido al desarrollo de la matemática como ciencia desde las primeras civilizaciones. Sin embargo, la incorporación de la resolución de problemas en la Educación Matemática comienza formalmente en el siglo veinte con los trabajos de Poyla (1945) y posteriormente los de Schoenfeld. (1985)

La resolución de problemas ha sido considerada, a partir de estos trabajos, como un área abierta y de interés para la Didáctica de la Matemática. De hecho, su incorporación en el currículo como metodología para promover el aprendizaje ha sido relativamente reciente en la enseñanza de las matemáticas en los centros escolares.

En los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2000) se establece que la resolución de problemas, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no sólo constituye un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino que también es una metodología para alcanzarlo.

En Venezuela, la incorporación de la resolución de problemas en el currículo está desde la educación inicial, de hecho, en las finalidades de la educación inicial hay un apartado que se refiere específicamente a la resolución de problemas que establece *formar niños y niñas, sanos(as), participativos(as), creativos(as), espontáneos(as), capaces de pensar por sí mismos(as), de tomar decisiones, de resolver problemas y de desenvolverse armoniosamente en diferentes contexto* (Ministerio de Educación Cultura y Deportes, 2005).

FASES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para efectos de este trabajo utilizaremos las fases descritas por Mayer (1986) y utilizadas por Fernández (1997), Espinosa (2002, 2005) y Martínez (2011) que son:

- *Planteamiento:* es la fase en la que se traduce a un lenguaje matemático el texto del problema a través de un sistema de representación y en la que se establecen relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos o incógnitas, es decir, se integran, primero mentalmente, y luego se expresan físicamente sobre el papel, señalando un plan de acción posible.
- *Ejecución:* es el desarrollo de las relaciones establecidas en el planteamiento. Esta fase puede orientarnos, mejor que otras, respecto del tipo de pensamiento movilizado (algebraico o aritmético).
- *Desempeño final:* responder dando el/los resultados pedidos en el texto del problema. Un resultado correcto viene precedido, generalmente, de un buen planteamiento y de una buena ejecución.

Más adelante, en capítulos posteriores, ejemplificaremos estas fases, identificándolas en producciones de los propios estudiantes, cuando hagamos el estudio y análisis de los resultados de las pruebas de resolución de problemas realizadas por un grupo de estudiantes venezolanos.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

Para exponer la metodología utilizada en la investigación, se presenta el tipo de estudio, se hace una descripción de la muestra y se describe el instrumento aplicado a la muestra.

Por otro lado, se indican las condiciones en las cuales se aplicó el instrumento y, finalmente, se hace referencia a la matriz de datos recogidos en este estudio y a la técnica empleada para el análisis de los mismos.

TIPO DE ESTUDIO

Es un estudio descriptivo de carácter exploratorio, ya que se documentan las respuestas de los estudiantes y se describen las resoluciones que han producido respecto a uno de los problemas del instrumento, elegido intencionalmente

La descripción de la resolución del problema objeto de este trabajo se hará en función de dos aspectos:

a.- El primero de ellos está referido a las tres fases de resolución de problemas descritas en el Capítulo 2. En este aspecto, se ha seguido la consideración hecha por Fernández (1997) que establece las fases y los criterios para determinar cuándo una fase se considera correcta o no: La fase de planteamiento estará bien resuelta cuando las relaciones expresadas sean las que se deducen correctamente de la sintaxis y la semántica del texto. Igualmente, se considera correcta la fase de ejecución cuando se aplica apropiadamente el proceso analítico, a través de aplicar propiedades aritméticas y/o, en su caso, de las reglas algebraicas, para obtener nuevas relaciones. La fase de desempeño final está considerada con la intención de separar el proceso de resolución del resultado, y en esta fase se analiza la solución pedida en la pregunta del texto.

En esta investigación se le asignarán valores a cada una de las fases de la resolución descritas anteriormente, en ese sentido se valora con 1 o con 0 cada una de las tres fases: 1 cuando es correcta la fase y 0 cuando sea incorrecta.

b.- El segundo aspecto que consideramos, es el referido al sistema de representación utilizado por los estudiantes en la resolución. Debido a la formación matemática de los sujetos de esta muestra (estudiantes de 1º y 2º de Educación Secundaria), y teniendo en cuenta lo que indica Cerdán (2008) respecto a la consideración de si un problema escolar es tipo aritmético o algebraico, hemos tenido en cuenta también la posibilidad de una respuesta algebraica simbólica. Por lo tanto hemos adoptado la clasificación de los sistemas de representación que utiliza Fernández (1997) y Espinosa (2005) en sus respectiva tesis doctorales y que, de desde los más numéricos e intuitivos a los más simbólicos y abstractos, son: Ensayo-Error, Parte-Todo, Gráfico, Gráfico-Simbólico y Simbólico.

En cuanto a la codificación para el sistema de representación (ver Tabla 1) se hará una pequeña modificación a la utilizada por Fernández (1997). Esta modificación consiste en no tomar el valor 0 para las respuesta sin información suficiente, ya que sólo uno de los sujetos de la muestra no abordó el problema (lo dejó en blanco) y, por lo tanto, no supone un hecho significativo para nuestro estudio. Es decir, en las producciones hechas por los estudiantes de nuestra muestra siempre habrá algún sistema de representación para observar.

Tabla 1
Codificación de los Sistemas de Representación

Valor	Sistema de Representación
1	Ensayo y Error
2	Parte-Todo
3	Gráfico
4	Gráfico-Simbólico
5	Simbólico

Tomaremos como sistema de representación aquel que lleve al estudiante a resolver el problema y a dar un resultado, ya sea correcto o incorrecto.

MUESTRA

La muestra está constituida por 57 estudiantes venezolanos, de los que 18 pertenecen al primer año de Secundaria y 39 son de segundo año de Secundaria, que se han presentado a la fase final regional de la Olimpíada Matemática venezolana. Las edades de estos estudiantes está comprendida entre 11 y 13 años, ambos inclusive,

Los estudiantes que se presentan a esta prueba han realizado, en los diferentes institutos de origen, una prueba preliminar que tiene 30 preguntas de selección simple, que es la prueba del concurso Canguro Matemático (ver anexos A y B), que se desarrolla y aplica en Europa y en algunos países de América. De esta prueba preliminar se escogen las mejores calificaciones por cada instituto, y los estudiantes con mayores calificaciones del conjunto de centros son los que se presentan a la fase de final regional de la Olimpiada.

Como hemos indicado anteriormente, se ha eliminado a uno de los sujetos (la muestra inicial era de 58 estudiantes) porque dejó este problema “en blanco”, por lo consideramos que no es un caso significativo en el conjunto de la muestra. En ese sentido, podemos indicar que es una muestra intencional

INSTRUMENTO Y PROCEDIMIENTO DE APLICACIÓN

La prueba corresponde a la fase final regional de la Olimpíada Matemática venezolana. La misma está constituida por 5 preguntas de desarrollo y los estudiantes tienen hasta 3 horas para responder.

La pregunta que hemos seleccionado es común para el primero de secundaria y segundo de secundaria. En la presentación de la prueba no se permite el uso de calculadora ni de algún otro artefacto tecnológico y los estudiantes reciben antes de la prueba todos los insumos necesarios para su realización: lápiz, sacapuntas, borrador, hojas en blanco (una por cada pregunta), etc.

La prueba es estrictamente individual y durante su aplicación no está permitida la comunicación entre los estudiantes. En la primera media hora de la prueba, los estudiantes pueden hacer preguntas, sólo por escrito, en unas hojas destinadas para tal fin, y las preguntas son recogidas por los aplicadores de las pruebas y entregadas a un grupo de profesores que, durante la primera media hora, podrán responder o no a las mismas. En ningún caso se responden preguntas cuya respuesta conduzca en forma directa a la solución, ni se responden preguntas cuya respuesta forme parte de la solución. En todo caso, queda a criterio de los profesores responder o no.

Las pruebas (Anexos: C y D) se presentaron en forma simultánea en la Facultad de Ciencias y Tecnología de la Universidad de Carabobo, ubicada en la ciudad de Valencia en Venezuela, el día sábado 26 de abril de 2008 a las 9:00 am.

Aunque cada curso ha tenido una prueba independiente, de las 5 preguntas uno de los ítems ha sido común en ambas pruebas: el problema nº 3 de la prueba de primero de Secundaria coincide con el problema nº 2 de segundo de Secundaria. Por esta razón se ha seleccionado para nuestro estudio, ya que nos permite analizar las respuestas de resolutores de dos cursos distintos, en los que están abiertas la posibilidad a mayor variedad de resoluciones, dado que los estudiantes han podido abordar el problema de forma espontánea, sin restricciones a la hora de utilizar sistemas de representación, modelos, métodos o estrategias predeterminadas, sino que han aplicado, libremente, sus conocimientos y experiencias para conseguir una buena resolución.

El problema en cuestión es el siguiente:

> *Natalia compró pinturas de colores amarillo, azul y blanco para hacer una mezcla para pintar toda su casa. La octava parte de la mezcla es de pintura amarilla, mientras que dos terceras partes de la mezcla es de pintura azul; el resto de la mezcla es de pintura blanca. Si Natalia utilizó 10 galones de pintura blanca para su mezcla, ¿cuántos galones de mezcla de pinturas hizo en total?*

VARIABLES. CODIFICACIÓN DE DATOS

En este apartado explicamos cómo se realizó el proceso de codificación. Se codificó la información contenida en las 57 producciones de los estudiantes (18 de 1º de secundaria y 39 de 2º de secundaria). Se utilizaron 13 códigos que se corresponden con: el grupo el cual pertenece el estudiante, el sistema de representación y las fases de resolución de problemas con base en los aspectos descritos en el marco teórico. En relación a las fases de resolución de problemas se identificó además su corrección o incorrección.

Tabla 2
Lista de códigos y su descripción

Código	Descripción
G1	Grupo 1º de secundaria
G2	Grupo 2º de secundaria
SREE	Sistema de representación Ensayo y Error
SRPT	Sistema de representación Parte-Todo
SRGR	Sistema de representación Gráfico
SRGS	Sistema de representación Gráfico-Simbólico
SRSI	Sistema de representación Simbólico
RPC	Resolución fase planteamiento correcto
RPI	Resolución fase planteamiento incorrecto
REJC	Resolución fase ejecución correcto
REJI	Resolución fase ejecución incorrecto
DFC	Resolución fase desempeño final correcto
DFI	Resolución fase desempeño final incorrecto

Utilizamos un programa computacional para análisis de datos cualitativos (ATLA.ti 5.5). Este programa facilitó el proceso de codificación, pues permitió hacer las codificaciones, anotar dudas y volver sobre ellas para hacer recodificar.

En la Figura 1 se presenta un ejemplo de una producción y su correspondiente codificación.

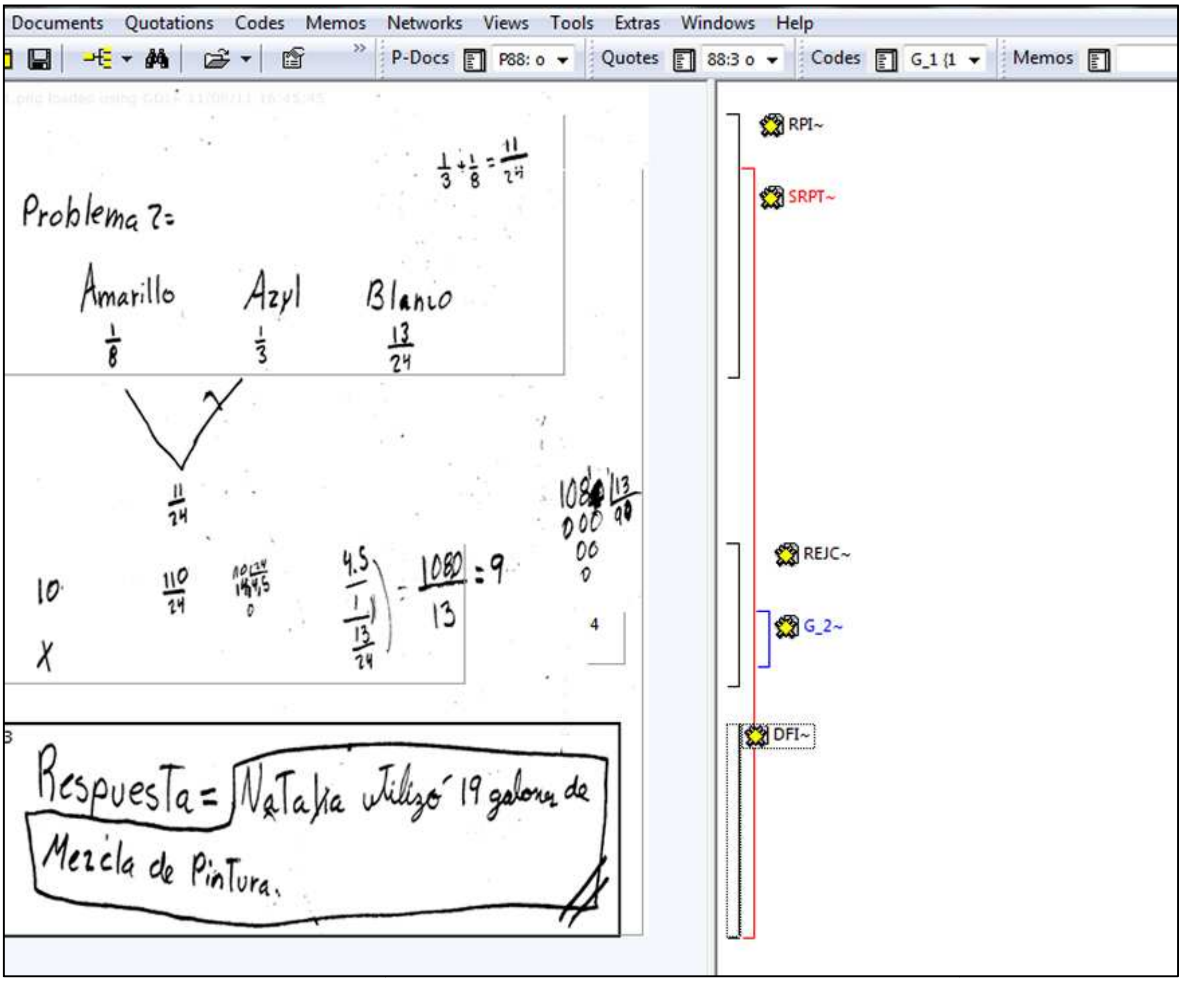


Figura 1. Pantalla ATLAS.ti del proceso de codificación

El programa computacional también permitió generar una matriz inicial de datos donde para cada producción se especifican los tres aspectos antes mencionados (grupo, sistema de representación y fases de la resolución). También muestra la frecuencia para cada uno de los aspectos citados.

Esta matriz inicial sirvió de insumo para generar una matriz de datos (ver Anexo E) donde están representados mediante un vector cada una de las actuaciones de los estudiantes.

Cada uno de los sujetos de la muestra está representado entonces, por un vector de cinco componentes: $\vec{v}:(g,s,p,e,d)$, que forma una fila de la matriz de datos. Estas componentes corresponden a las variables recogidas en la Tabla 3.

Tabla 3
Codificación general

Código	Descripción
g	Grupos al que pertenece
s	Sistema de Representación utilizado
p	Resolución: Fase de Planteamiento
e	Resolución: Fase de Ejecución
d	Resolución: Fase de Desempeño Final

En lo que sigue, presentamos dos respuestas de los estudiantes, que sirven como ejemplo del vector mencionado anteriormente.

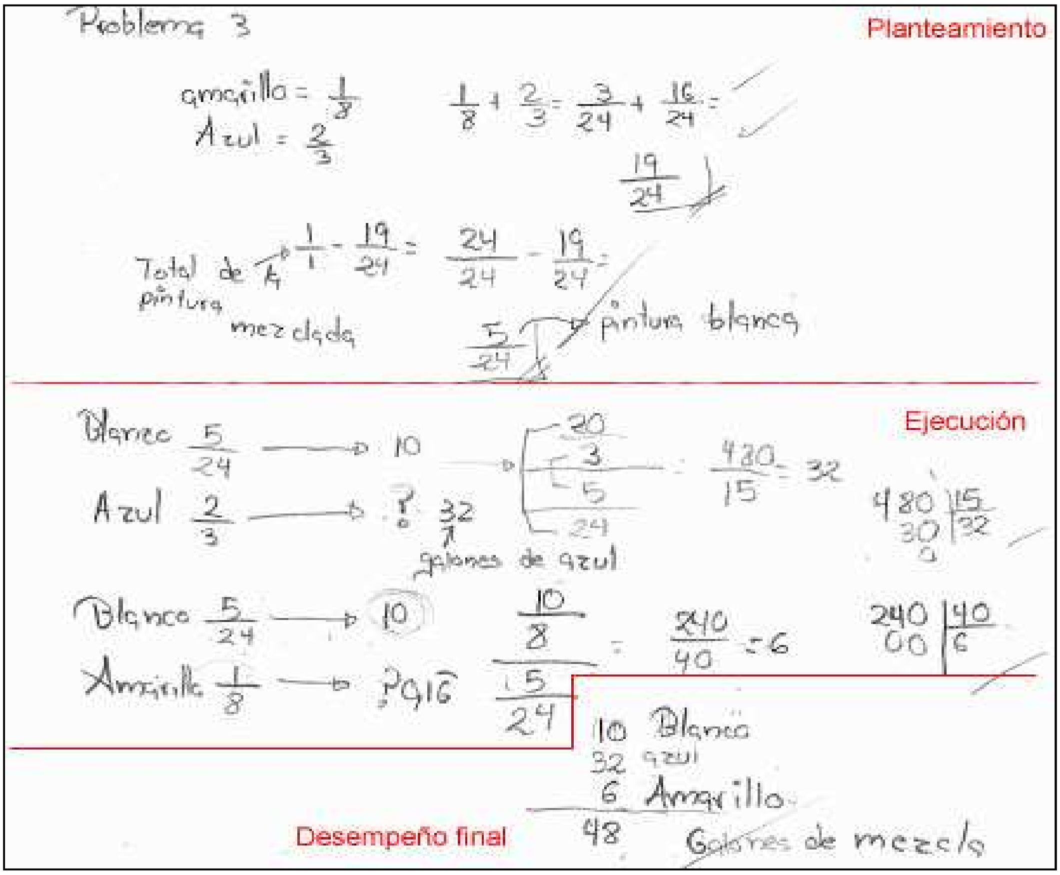


Figura 2. Ejemplo 1

El primer ejemplo (ver Figura 2) se corresponde con el vector $\vec{v}:(1,2,1,1,1)$ cuyas componentes indican:

- El estudiante pertenece al grupo 1 (primera componente).

- Que utilizó el sistema de representación Parte – Todo (segunda componente).
- Que tiene la fase de Planteamiento correcta (tercera componente).
- Que tiene correcta la fase de Ejecución (cuarta componente).
- Que tiene correcta la fase de Desempeño Final (quinta componente).

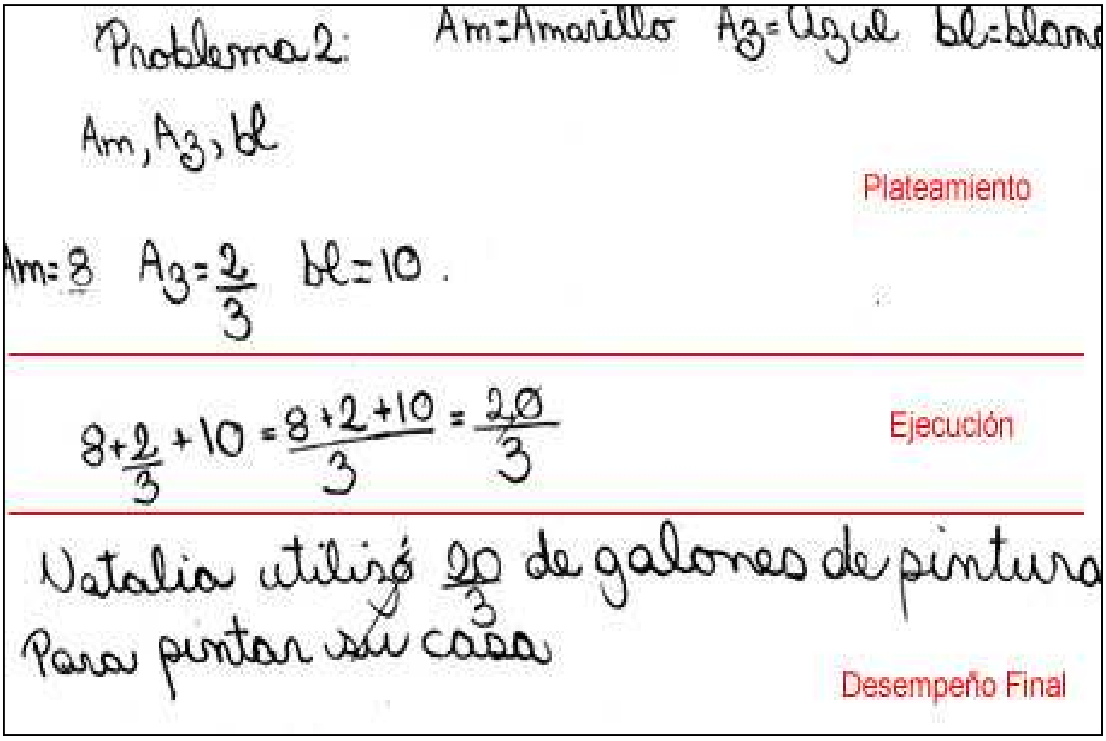


Figura 3. Ejemplo 2

El segundo ejemplo (ver Figura 3) se corresponde con el vector $\vec{v}: (2,2,0,0,0)$ y sus componentes indican:

- El estudiante pertenece al grupo 2 (primera componente).
- Que utilizó el sistema de representación Parte – Todo (segunda componente).
- Que tiene la fase de Planteamiento incorrecta (tercera componente).
- Que tiene incorrecta la fase de Ejecución (cuarta componente).
- Que tiene incorrecta la fase de Desempeño Final (quinta componente).

MATRIZ DE DATOS Y TÉCNICA DE ANÁLISIS

A partir de la codificación de los resultados se han obtenido los datos, que han formado una matriz que es la que vamos a analizar mediante programas estadísticos. La matriz se organiza con 57 filas y 6 columnas (Anexo E). Las filas se corresponden con las pruebas de los estudiantes y las columnas con las variables: *grupo al que pertenece*, *sistema de representación* utilizado, *planteamiento*, *ejecución* y *desempeño final* de la resolución del problema, con los valores ya indicados (ver Tabla 4).

Por ser una investigación descriptiva con carácter exploratorio, los hallazgos se analizaron mediante técnicas estadísticas descriptivas o, en su caso, análisis exploratorio de los datos.

Los resultados obtenidos del estudio estadístico, se organizaron en tablas de contingencia y en representaciones gráficas, que nos permitieron describir la actuación de los resolutores cuando resuelven un problema matemático específico, así como las relaciones posibles entre las variables.

Tabla 4
Forma general de la matriz de datos

Pruebas	Grupo	Sistema de Representación	Planteamiento	Ejecución	Desempeño
$P67$	1 - 2	1-2-3-4-5	0 - 1	0 - 1	0 - 1
$P68$	1 - 2	1-2-3-4-5	0 - 1	0 - 1	0 - 1
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
$P112$	1 - 2	1-2-3-4-5	0 - 1	0 - 1	0 - 1
...	...	...	...	...	...
P_n	1 - 2	1-2-3-4-5	0 - 1	0 - 1	0 - 1

En el capítulo que sigue describimos los resultados de los análisis realizados.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE DATOS

Para analizar los datos vamos a tener en cuenta, en primer lugar, al conjunto de la muestra, sin discriminar a los sujetos por el grupo al que pertenecen. Posteriormente, veremos los resultados de los grupos por separado. De esta forma, podremos establecer diferencias y similitudes entre el grupo de 1º de Secundaria y el 2º de Secundaria.

En principio, se podría conjeturar que los estudiantes más avanzados, es decir, los del curso superior, deberán obtener mejores resultados y, además, utilizar con mayor solvencia sistemas de representación más abstractos, como los gráficos y los simbólicos, dejando los sistemas más numéricos e intuitivos.

RESULTADOS

Resultados del Conjunto de la Muestra (G1 y G2)

En la Tabla 5 se recogen los porcentajes, con una aproximación de una cifra decimal, de los sistemas de representación utilizados y la corrección o incorrección en las distintas fases de la resolución del problema, considerando conjuntamente los dos grupos de estudiantes.

Tabla 5

G1 y G2. Sistemas de Representación y Fases en la Resolución de Problemas

Sistema de Representación	Plantea C	Plantea I	Ejecuta C	Ejecuta I	Desempeño C	Desempeño I	Total
Grupos 1 y 2							
Ensayo y Error	1.8	1.8	3.5	0.0	0.0	3.5	3.5
Parte-Todo	38.6	28.1	50.9	15.8	29.8	36.8	66.7
Gráfico	7.0	10.5	8.8	8.8	5.3	12.3	17.6
Gráfico-Simbólico	3.5	3.5	5.3	1.8	1.8	5.3	7.1
Simbólico	1.8	3.5	3.5	1.8	1.8	3.5	5.3
Total	52.7	47.4	72.0	28.2	38.7	61.4	100

A nivel general, destaca que el sistema de representación Parte-Todo es el que utiliza la mayoría de los resolutores, específicamente el 66.7 % de los casos, mientras que el sistema de representación Ensayo y Error es el menos usado, sólo el 3.5 % (ver Figura 4).

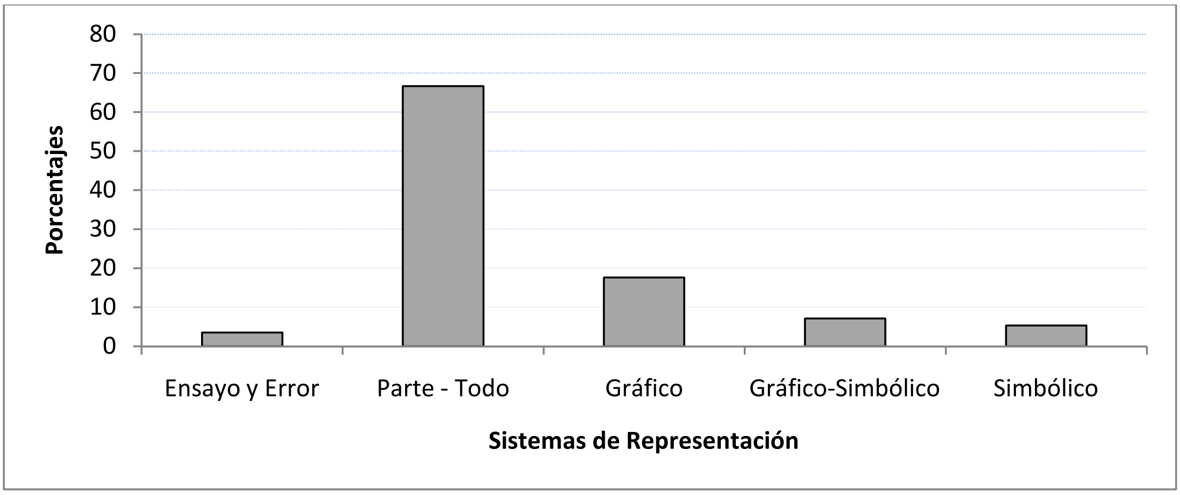


Figura 4. Sistemas de Representación y Porcentajes asociados al total de resolutores

Respecto a las fases en la resolución de problemas, se observa que la fase de ejecución es donde los resolutores acumulan el mayor porcentaje de aciertos, con 72.0%. Sin embargo, también acumulan un alto porcentaje en la fase de desempeño final incorrecto con un 61.4% (ver Figura 5)

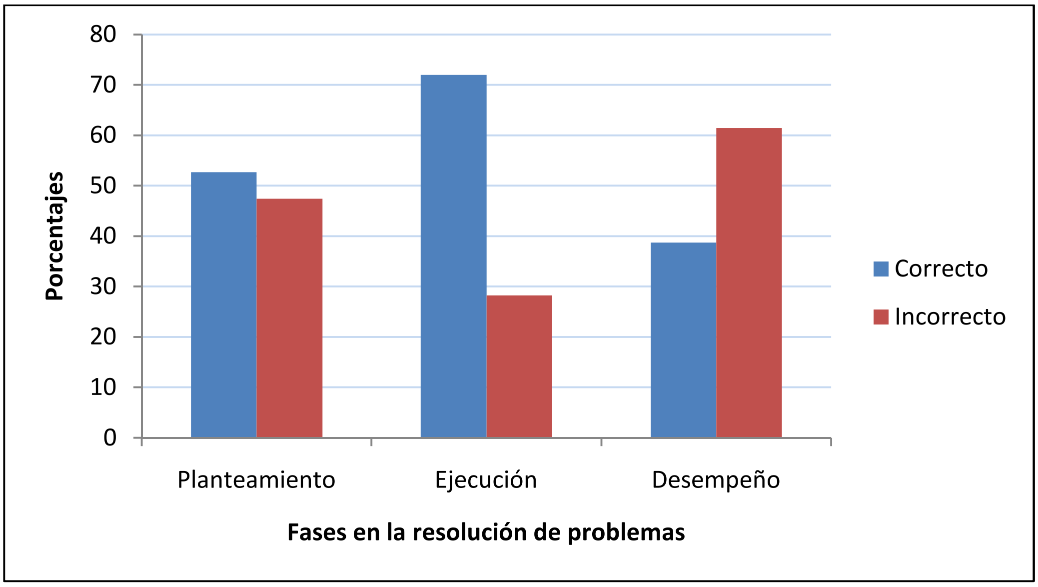


Figura 5. Fases de la Resolución de Problemas y Porcentajes, total de resolutores

También llama la atención que al comparar los aciertos en la fase de Planteamiento con las siguientes fases: Ejecución (correcto) y Desempeño Final (correcto), se puede ver que en la fase de Ejecución los resolutores mejoran pero en la fase de Desempeño Final bajan notablemente el porcentaje (ver Figura 5). Esta situación planteada lleva a observar más de cerca los datos:

- El 38.7% que tienen la fase de Desempeño Final correcto, están estrictamente contenidos en el 52.7% correspondiente a la fase de Planteamiento correcto.
- Aproximadamente de cada 4 resolutores que hacen un buen planteamiento hay 3 que obtienen buena respuesta y sólo 1 da una respuesta incorrecta.

A nivel general, para estos grupos, se observa una relación recíproca verdadera, es decir, tener el Desempeño Final correcto implica, en este caso, haber tenido un Planteamiento correcto. Sin embargo, la relación directa no es necesariamente verdadera, es decir, no es cierto que un Planteamiento correcto implique un Desempeño Final correcto.

Si se compara el sistema de representación utilizado por los resolutores con la fase de Planteamiento, se observa que el sistema de representación Parte-Todo fue el más efectivo para hacer un Planteamiento correcto, con un 57.8%, mientras que para los otros sistemas de representación el nivel de porcentaje en Planteamiento correcto es notablemente inferior.

Igualmente, se observa que el sistema de representación menos efectivo para estos resolutores resultó ser el simbólico: 2 de cada 3 estudiantes que usaron el sistema de representación simbólico, tienen el planteamiento incorrecto.

Resultados del Grupo 1

Considerando por separado a los sujetos del Grupo de 1º de Secundaria, en total 18 estudiantes, se obtiene la siguiente Tabla de resultados.

Tabla 6

Grupo 1. Sistema de Representación y Fases de Resolución de Problemas

Sistema de Representación	Plantea C	Plantea I	Ejecuta C	Ejecuta I	Desempeño C	Desempeño I	Total
			Grupo 1				
Ensayo y Error	0.0	5.6	5.6	0.0	0.0	5.6	5.6
Parte-Todo	55.6	16.6	66.6	5.6	55.6	16.6	72.2
Gráfico	11.0	5.6	16.6	0.0	11.0	5.6	16.6
Gráfico-Simbólico	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Simbólico	5.6	0.0	5.6	0.0	5.6	0.0	5.6
Total	72.2	27.8	94.4	5.6	72.2	27.8	100

Se destaca la utilización del sistema de representación Parte-Todo por encima de cualquier otra forma de abordar el problema. De acuerdo a la experiencia propia, este resultado era de esperar en unos estudiantes con una buena formación aritmética e incipiente bagaje algebraico.

En esta Tabla 6, sobresale y llama la atención que la fase de Ejecución correcta es la que acumula el mayor porcentaje: 94.4%. De este alto porcentaje, el 72.2% corresponde a resolutores que tienen la fase de Planteamiento correcta y coincide en el mismo porcentaje de los que tienen la fase Desempeño Final correcta. Se observa que la relación para este grupo es verdadera en los dos sentidos, es decir, para este grupo tener un Planteamiento correcto implica un Desempeño Final correcto y, recíprocamente, tener un Desempeño Final correcto implica haber tenido un Planteamiento correcto. De forma análoga, el 27.8% de los estudiantes de este grupo tienen el Planteamiento incorrecto, porcentaje que se repite en la fase de Desempeño Final incorrecto.

Cabe destacar también que:

- Sólo el 5.6% tienen la fase de Ejecución incorrecta
- Ninguno de los estudiantes ha utilizado las representaciones gráficas-simbólicas para resolver el problema.

Resultados del Grupo 2

En la siguiente Tabla, se presentan los resultados obtenidos por el Grupo de 39 estudiantes de 2º de Secundaria.

Tabla 7
Grupo 2. Sistema de Representación y Fases en la Resolución de Problemas

Sistema de Representación	Plantea		Ejecuta		Desempeño		Total
	C	I	C	I	C	I	
			Grupo 2				
Ensayo y Error	2.6	0.0	2.6	0.0	0.0	2.6	2.6
Parte-Todo	30.8	33.3	43.6	20.5	17.9	46.2	64.1
Gráfico	5.1	12.8	5.1	12.8	2.6	15.3	17.9
Gráfico-Simbólico	5.1	5.1	7.7	2.6	2.6	7.7	10.2
Simbólico	0.0	5.1	2.6	2.6	0.0	5.1	5.1
Total	43.6	56.3	61.6	38.5	23.1	76.9	100

En este caso, vuelve a tener presencia mayoritaria el sistema de representación Parte-Todo para resolver el problema (64.1%), aunque, a diferencia del G1, se han utilizado, en una u otra fase, ya sea correcta o incorrectamente, todos los sistemas de representación que hemos considerado.

Destaca también el porcentaje de sujetos con un Desempeño Final incorrecto, 76.9%,cuando lo esperado es que estos estudiantes fueran más solventes que los del G1 para la resolución de estos problemas escolares.

También llama la atención el poco rendimiento a la hora de llevar a cabo un buen Planteamiento (43.6%) en un problema relativamente asequible para una prueba de una Olimpiada Matemática.

Nos parece interesante, entonces, hacer un estudio comparativo entre los resultados obtenidos por los estudiantes del G1 y del G2.

Comparación de Resultados del Grupo 1 y del Grupo 2

La Tabla 8 muestra los datos numéricos correspondientes a los dos grupos, en relación a los sistemas de representación y las tres fases de resolución consideradas en el estudio.

Tabla 8.
Comparación: G_1 y G_2. Sistema de Representación y Fases en la Resolución de Problemas.

SR			Planteamiento				Ejecución				Desempeño			
			C		I		C		I		C		I	
	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2
EE	5.6	2.6	0.0	2.6	5.6	0.0	5.6	2.6	0.0	0.0	0.0	0.0	5.6	2.6
PT	72.3	64.1	55.6	30.8	16.7	33.3	66.7	43.6	5.6	20.5	55.6	17.9	16.7	46.2
G	16.7	17.9	11.1	5.1	5.6	12.8	16.7	5.1	0.0	12.8	11.1	2.6	5.6	15.4
GS	0.0	10.2	0.0	5.1	0.0	5.1	0.0	7.7	0.0	2.6	0.0	2.6	0.0	7.7
S	5.6	5.1	5.6	0.0	0.0	5.1	5.6	2.6	0.0	2.6	5.6	0.0	0.0	5.1

La Figura 6 muestra el comportamiento de cada uno de los grupos en relación a los sistemas de representación usados y se puede observar que el sistema de representación más usado en ambos grupos de resolutores es el Parte Todo.

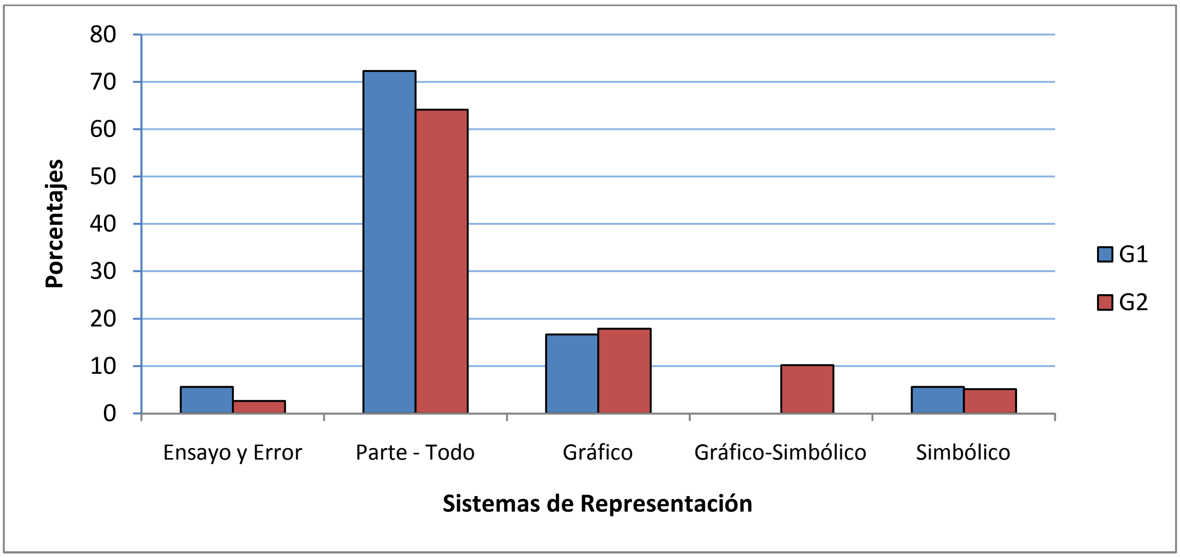


Figura 6. Sistemas de Representación y Porcentajes asociados a cada grupo

Otra característica común que mantienen los dos grupos es que una vez hecho el planteamiento correcto, ambos mejoran en la ejecución correcta y bajan el porcentaje en el desempeño final correcto.

Otros aspectos que consideramos importantes de destacar en la comparación los dos grupos:

- El grupo 2 utilizó todos los sistemas de representación, mientras que el grupo 1 no (ver Figura 6).
- Los sistemas de representación más intuitivos (Ensayo y Error, Parte-Todo), concentran aproximadamente un 80% en el grupo 1, mientras que en el grupo 2 ese porcentaje está más distribuido en todos los sistemas de representación, sin embargo, el porcentaje de utilización de los sistemas más abstractos (gráficos, gráfico-simbólico y simbólico) es aproximadamente 33,2%.
- El grupo 1 logró hacer un mejor planteamiento del problema que el grupo 2: aproximadamente las dos terceras partes del grupo 1 tiene el planteamiento correcto, mientras que más de la mitad del grupo 2 tienen el planteamiento incorrecto.
- Sólo un estudiante del grupo 1 utilizó el sistema de representación simbólico, además resolvió el problema correctamente: $\vec{v}: (1,5,1,1,1)$ (ver Figura 7), mientras que en el grupo 2 los que utilizaron el mismo sistema simbólico resolvieron mal el problema: $\vec{v}: (2,5,0,0,0)$ (ver Figura 8).

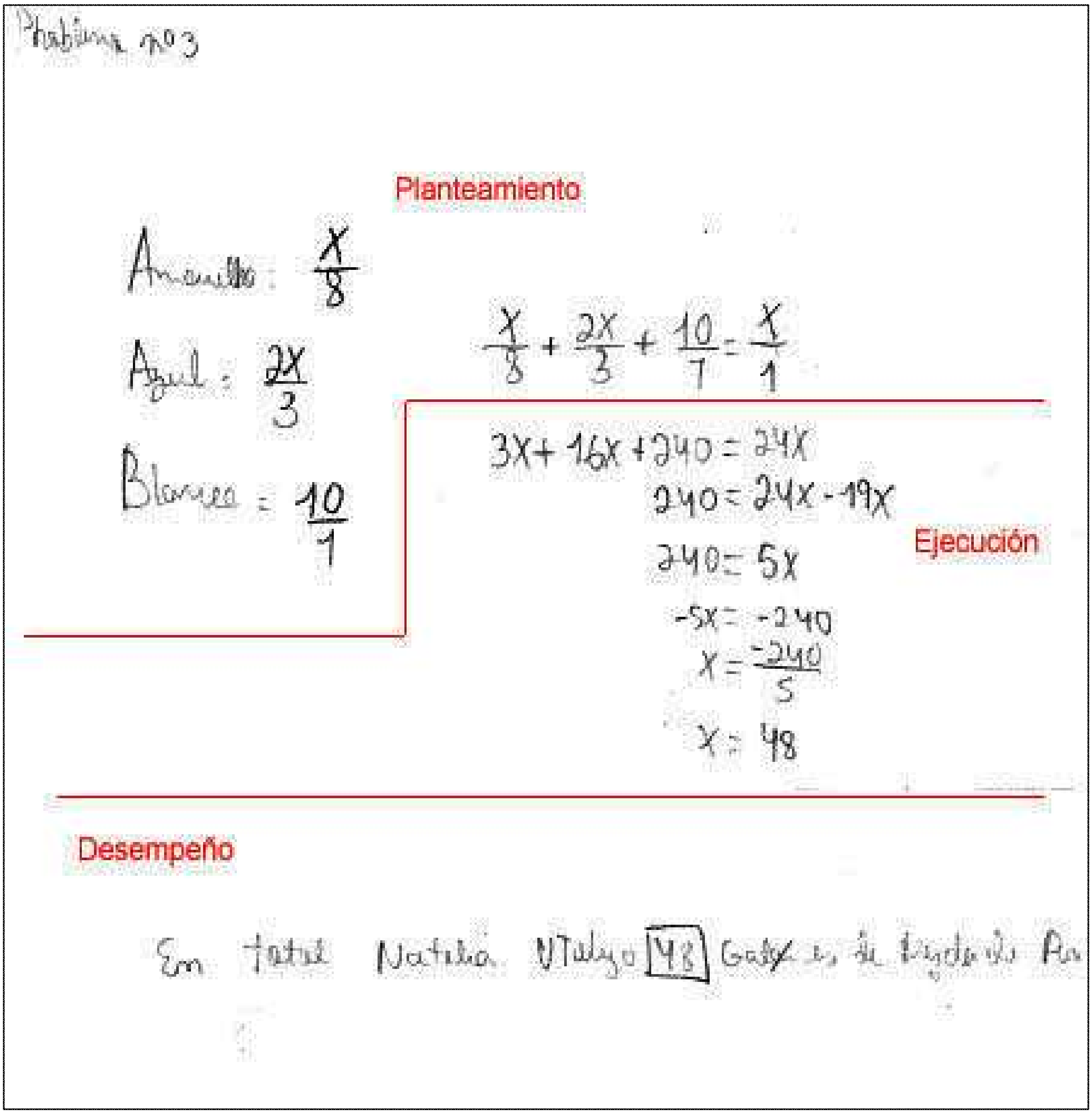


Figura 7. Ejemplo $\vec{v}$: (1,5,1,1,1)

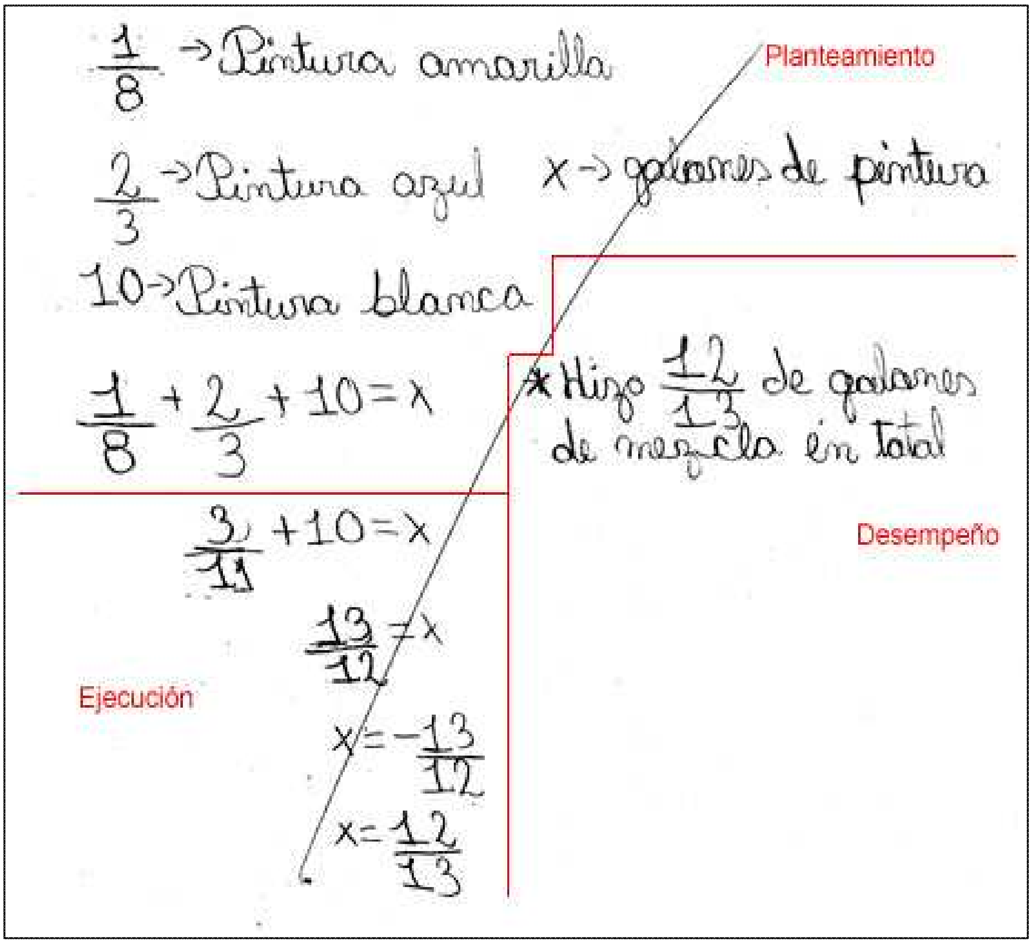


Figura 8. Ejemplo $\vec{v}$: (2,5,0,0,0)

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este capítulo se recogen las conclusiones más importantes del estudio realizado, a partir de los resultados obtenidos y descritos en el capítulo 4. Además, se tratará de responder a las preguntas de investigación, descritas en el capítulo 1, así como los objetivos y las conjeturas propuestas. También se indican algunas limitaciones de la memoria que se presenta y posibles vías de investigación abiertas, a raíz de este estudio, que pueden constituir la continuación del presente trabajo, así como nuevos problemas de investigación para futuros estudios.

PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Las preguntas 1 y 2 están relacionadas con los sistemas de representación, las preguntas 3 y 4 se corresponden con la relación entre la resolución de problemas y los sistemas de representación utilizados.

Pregunta 1

¿Cuál o Cuáles son los Sistemas de Representación más utilizados por los estudiantes, en la resolución de un problema común para los dos grupos?

Los estudiantes, en forma espontánea, representaron en su mayoría las relaciones implicadas en el problema de forma numérica.

En las producciones de los estudiantes con lápiz y papel se pudo observar que el 66,7% utilizó el sistema de representación Parte-Todo. En este sistema de representación, como se definió en el Capítulo 2, se establece una inclusión de clases y una comparación, considerando los datos desconocidos como parte del resultado de operar los datos conocidos y comparando el total con la parte.

Observando los dos grupos por separado, también se mantiene que la mayoría de los estudiantes utilizó el sistema de representación Parte-Todo: para el Grupo 1 el porcentaje fue de 72,2% , mientras que para el Grupo 2 fue utilizado por el 64,1% de los sujetos.

Pregunta 2

¿Es posible que el grupo de resolutores utilicen sólo los sistemas de representación descritos en Fernández (1997)?.

Se puede afirmar que, efectivamente, los estudiantes, en sus producciones, utilizaron todos los sistemas de representación descritos por Fernández (1997) y recogidos en el Capítulo 2: Ensayo y Error (3,5%), Parte–Todo (66,7%), Gráfico (17,6%), Gráfico-Simbólico (7,1%) y Simbólico (5,3%).

Sin embargo, si se observan las producciones separadas por grupos, el Grupo 1 no utilizó el sistema de representación Gráfico-Simbólico, mientras que el Grupo 2 de si utilizó todos los sistemas de representación ya descritos.

Pregunta 3

¿Cuál de los grupos tendrá un mejor desempeño en la resolución del problema y qué sistema de representación utilizan en este caso?

El mejor desempeño lo obtuvo el Grupo de 1º de secundaria con 72,2% de acierto. Con respecto a los sistemas de representación utilizados por estos estudiantes, el 55,6% utilizó el sistema de representación Parte-Todo, el 11% utilizó el sistema de representación Gráfico y el 5,6% utilizó el sistema de representación Simbólico.

Pregunta 4

¿Cuál es el sistema de representación más efectivo y menos efectivo para estos dos grupos de estudiantes, al resolver el problema?

El sistema de representación que tiene mayor porcentaje de efectividad para los estudiantes de la muestra es el Parte-Todo, con 29,82% de efectividad, y el menos efectivo es el sistema de representación Ensayo y Error, con 0% de efectividad. Es decir, los estudiantes que utilizaron el sistema de representación Ensayo y Error no tuvieron éxito en la resolución del problema.

Si separamos los grupos por separado, la situación es distinta en cada grupo: para el Grupo 1, los sistemas de representación con más aciertos son: Simbólico 100% de efectividad, Gráfico 91,6% de efectividad y el Parte-Todo 76,92% de efectividad y el menos efectivo fue el sistema de representación Ensayo y Error 0% de efectividad.

Para el grupo 2, el sistema de representación que tiene el mayor porcentaje de aciertos ha sido el Parte-Todo con un 17,95% de efectividad. Los otros sistemas de representación tienen porcentajes de 0% y 2,5%. Estos resultados indican que este grupo, constituidos por los estudiantes de segundo de secundaria, obtuvo, en general, un mal desempeño en la prueba.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Se plantearon originalmente 4 objetivos, derivados de las preguntas de investigación:

Objetivo 1

Identificar los sistemas de representación Ensayo y Error, Parte-Todo, Gráfico, Gráfico-Simbólico y Simbólico en la resolución de un problema en la prueba citada.

Este objetivo se cumplió, como ya se ha descrito anteriormente en el comentario referido a la Pregunta 2. Es decir, si fue posible identificar, en las producciones espontáneas de los estudiantes, los sistemas de representación Ensayo y Error, Parte-Todo, Gráfico, Gráfico-Simbólico y Simbólico en la resolución del problema en cuestión.

Objetivo 2

Identificar las fases de planteamiento, ejecución y desempeño final, en la resolución de un problema de la fase final regional de la olimpíada matemática venezolana realizado por estudiantes de primero y segundo de secundaria.

En efecto, en las producciones escritas de los estudiantes ha sido posible identificar cada una de las fases de la resolución del problema que hemos tenido en cuenta en nuestro trabajo: planteamiento, ejecución y desempeño final.

Para ello se tomó cada una de las 57 pruebas de la muestra y se fue observando la resolución del problema que escribe el estudiante, pudiendo identificar la fase de planteamiento cuando se expresaba físicamente sobre el papel, las relaciones entre los datos conocidos y los desconocidos o incógnitas señalando un plan de acción posible. La fase de ejecución fue más fácil de identificar por ser el desarrollo de las relaciones establecidas en la fase de planteamiento. Por último la fase de desempeño final fue identificada en la solución dada por cada estudiante.

Objetivo 3

Describir la relación entre los sistemas de representación y las fases de la resolución del problema objeto de estudio.

Para cumplir con este objetivo se analizó una tabla de contingencia para la organización de las variables y los datos, por un lado los sistemas de representación y, por otro, las tres fases de la resolución de problemas, con indicación de la corrección o incorrección de cada una de las fases.

Al observar los datos, sin discriminar los grupos, de la Tabla 5 (Capítulo 4), se concluye que la relación entre sistema de representación Parte-Todo y la fase de planteamiento correcta, es la más productiva para el conjunto, es decir, que los estudiantes que usaron el sistema de representación Parte-Todo fueron capaces, en su mayoría (57,8%), de poder traducir a un lenguaje matemático el texto del problema y, además, pudieron establecer las relaciones entre los datos y la incógnita.

De la misma manera, cuando se relacionó el sistema de representación Simbólico con la fase de planteamiento, se concluye que 2 de cada 3 estudiantes no fueron capaces de traducir al lenguaje matemático el texto del problema, ni establecer las relaciones verdaderas entre datos e incógnitas.

Al relacionar los sistemas de representación Ensayo y Error y Gráfico-Simbólico con la fase de planteamiento, se observa que el 50% de los estudiantes fue capaz de representar las condiciones del problema y las relaciones dadas entre variables e incógnitas. Consecuentemente, el otro 50% no fue capaz de hacerlo.

Finalmente, al relacionar el sistema de representación Gráfico con la fase de planteamiento, se obtiene que sólo el 40% de los estudiantes fue capaz de representar las condiciones del problema y el otro 60% no fue capaz de hacerlo cuando utilizó este sistema de representación.

En las fases de ejecución y desempeño la relación más destacable a nivel general es que en todos los casos, independientemente del sistema de representación utilizado, los estudiantes mejoran en la ejecución pero bajan notablemente el porcentaje de acierto en la fase de desempeño final.

Objetivo 4

Comparar la actuación de los dos grupos de resolutores cuando resuelven un problema de la fase final regional de la olimpíada matemática venezolana.

La actuación de los grupos que queremos observar viene dada por el porcentaje de aciertos en la resolución del problema, independientemente del sistema de representación usado.

Para el logro de este objetivo se comparó los dos grupos en las tres fases de la resolución del problema obteniendo las siguientes conclusiones:

- El grupo de primero de secundaria, G1, tuvo mejor desempeño correcto que el grupo de segundo de secundaria, G2, a pesar de estar este grupo más avanzado en cuanto a los estudios realizados.
- En el grupo de primero de secundaria, G1, todos los alumnos que hicieron un buen planteamiento resolvieron bien el problema.
- En el grupo de segundo de secundaria, G2, aproximadamente la mitad de

los estudiantes que hicieron un buen planteamiento resolvió bien la prueba.

CONJETURAS PLANTEADAS EN LA INVESTIGACIÓN

Conjetura 1

Se puede caracterizar el sistema de representación utilizado por cada resolutor, con base a los sistemas de representación descritos en Fernández (1997).

Observando los resultados de las producciones de los estudiantes utilizando lápiz y papel, recogidos en la Tabla 8 (Capítulo 4), y la respuesta a la pregunta 2 de investigación, descrita anteriormente, se puede observar que fueron utilizados por los estudiantes los cinco sistemas de representación descritos en el Capítulo 2. Por esta razón se confirma esta conjetura.

Conjetura 2

Los sistemas de representación más intuitivos son utilizados mayoritariamente por los alumnos del primer curso de secundaria.

De acuerdo con los resultados de las producciones escritas de los estudiantes del grupo de primero de secundaria, G1, recogidas en la Tabla 6 (Capítulo 4), se puede constatar que, efectivamente, una gran mayoría, el 77,8% del grupo, utiliza los sistemas de representación más intuitivos: 72,2% Parte-Todo y 5,6% Ensayo y Error.

Conjetura 3

Los sistemas de representación más abstractos son los utilizados mayoritariamente por los alumnos del segundo curso de secundaria.

Al observar los resultados de las producciones escritas del Grupo 2, recogidas en la Tabla 7 (Capítulo 4), el porcentaje de estudiantes que utilizaron sistemas de representación más abstractos fue de 33,2%, es decir, que la mayoría de los estudiantes de segundo de secundaria no utiliza los sistemas de representación más abstractos, como los sistemas simbólicos, contrariamente a lo que se supuso originalmente. Por lo tanto, se puede concluir que la conjetura 3 no se ha cumplido.

Conjetura 4

Los estudiantes del curso superior obtienen mejores resultados que los del curso inferior.

En los resultados presentados en la Tabla 6 (Capítulo 4), se puede observar que el desempeño correcto de los estudiantes del Grupo 1 es alto, ya que el 72,2% de los estudiantes de este grupo tienen un buen desempeño.

El grupo de segundo de secundaria, G2, tuvo un peor desempeño en la resolución del problema, como se puede observar en los resultados presentados en la Tabla 7 (Capítulo 4), ya que sólo el 23,1% de los estudiantes de este grupo tuvo un desempeño correcto.

Con esos resultados obtenidos tenemos que rechazar la conjetura inicial, en la cual se esperaba que el desempeño de los estudiantes del segundo curso fuera superior a los del primer curso.

LIMITACIONES DEL ESTUDIO

Una de las principales limitaciones fue no haber participado en el equipo que diseñó los instrumentos, tanto el de la prueba de selección como el de la prueba objeto de estudio, aunque si participamos en su aplicación y su posterior corrección.

- Otra limitación importante fue el número de preguntas a observar, sólo se observó un ítem de la prueba, el que era común para los dos grupos, con el fin de establecer una comparación directa entre ambos grupos.
- La frontera entre el sistema de representación Parte-Todo y el sistema de representación Gráfico en algunos casos (muy pocos), fue difícil de determinar por el investigador.
- Por la naturaleza del estudio, no se pudo hacer entrevistas a algunos de los resolutores, que pudieran enriquecer las conclusiones.

POSIBLES VÍAS DE CONTINUACIÓN

En cuanto a posibles vías de continuación se pueden señalar:

- Diseñar y aplicar instrumentos con un mayor número de preguntas para ampliar el estudio.
- Realizar estudios longitudinales donde se pueda hacer seguimiento a grupos y observar su desempeño en la resolución de problemas, así como los sistemas de representación utilizados.
- Hacer un estudio comparativo por edades con los alumnos de secundaria para observar el uso de los sistemas de representación.
- Observar si los estudiantes de secundaria usan otros sistemas de representación distintos a los cinco utilizados en este estudio, para resolver problemas escolares.
- Estudiar la influencia que tiene la fase de planteamiento en la resolución de

problemas.

- Realizar un estudio de caso en el que se analicen las competencias matemáticas que pone de manifiesto un estudiante cuando aborda, sin instrucciones previas, un problema que puede resolverse utilizando diversos sistemas de representación.
- Establecer estudios comparativos con otras poblaciones de estudiantes de otros países.

REFERENCIAS

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con Escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años).* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* (pp. 95 – 122). Barcelona: Hosorsi.

Cerdán, F. (2008). *Estudio sobre la familia de problemas Aritméticos Algebraicos.* Server de Publicacions de la Universitat de València, España.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Traducido al español por Vega, M. Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (1993): Semiosis et Noesis. *Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa* (pp. 118-144). México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Espinosa, E. (2002). *Aplicación de un instrumento de evaluación de álgebra elemental. Réplica de la tesis del Dr. Fernández García.* Trabajo de investigación tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Espinosa, E. (2005). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Filloy, E. y Rubio, G. (1992). *Familia de problemas verbales aritmético-algebraicos y las tensiones entre los diferentes usos de las expresiones algebraicas*. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Fong, H.K. & Chong, T.H. (1995): Solving algebraic word problems. *Mathematics Teachers, 151*, 34-35.

Fox, D. (1987). *El proceso de investigación en educación.* Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra.

González, F. (2010). *Iniciación a la resolución de problemas de álgebra escolar a través de un método gráfico. Un estudio de casos.* Trabajo de investigación tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2007). *Fundamentos de metodología de la investigación.* Adaptación de la primera edición. Madrid, España: McGraw-Hill.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992): Learning and teaching with understanding. En D.A. Grows (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Kaput, J. (1989): Linking Representation in the Symbol Systems of Algebra. En S. Wagner & C. Kieran (Eds.) *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: LEA-NCTM.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989): El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, *7* (3), 229-240.

Martínez, M. (2011). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* España: Paidos.

Meavilla, V. (1995): Estudio sobre el comportamiento visual en Álgebra de los alumnos del segmento educativo 14-16. *Enseñanza de las Ciencias*, *13* (1), 97-105.

Ministerio de Educación Cultura y Deportes. (2005) *Educación Inicial Bases Curriculares.* Caracas, Venezuela: Editorial Noriega.

NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.

Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de Ingeniería en México.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Palarea, M.M. y Socas, M.M. (1995): Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos. *Suma*, *20*, 29-36.

Póyla, G. (1945) *How to solve it; a new aspect of mathematical method*. Princeton University Press. Princeton.

Puig, L. y Cerdan, F. (1989). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Puig, L. y Cerdan, F. (1991). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. *Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática. Apredizaje y Enseñanza del Álgebra* (pp. 35-48). Cuernavaca, Morelos: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

Rico, L.; Castro, E. y Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. *Proceeding 20th PME* (pp. 1, 87-102). Valencia.

Rojano, T. (1996): The Role of Problems and Problem Solving in the Development of Algebra. En N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.) (pp. 55-62).

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving,* Academic Press, Orlando.

Wagner, S. & Kieran, C. (1989): An Agenda for Research on the Learning and Teaching of Algebra. En S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 220-237). Reston, VA: NCTM-LEA.

Índice de Anexos

Anexo A

Prueba Canguro Matemático 2008. Primero de Secundaria Página 1-6

OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICA 2008
CANGURO MATEMÁTICO
PRUEBA PRELIMINAR
7° GRADO

RESPONDE LA PRUEBA EN
LA HOJA DE RESPUESTA ANEXA

1. ¿Por cuál número puede ser reemplazado  para que

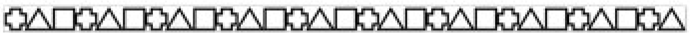
 $\times$  $= 2 \times 2 \times 3 \times 3$?

Ⓐ 2   Ⓑ 3   Ⓒ 2×3 Ⓓ 2×2 Ⓔ 3×3

2. Para que la igualdad $1 + 1♣1 - 2 = 100$ sea correcta, debemos reemplazar el símbolo ♣ por

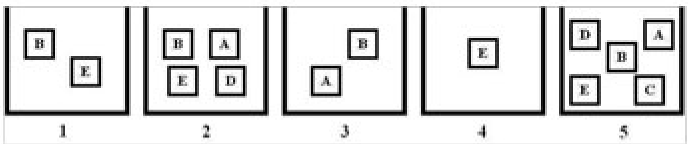
Ⓐ $+$ Ⓑ $-$ Ⓒ $\times$ Ⓓ 1   Ⓔ 0

3. ¿Cuáles de las figuras son las que más se repiten en la siguiente secuencia?



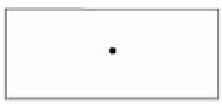
Ⓐ sólo la cruz   Ⓑ sólo el triángulo   Ⓒ sólo el cuadrado
Ⓓ el triángulo y la cruz   Ⓔ todas las figuras se repiten por igual

4. Rosa tiene cinco cajas que contienen algunas cartas marcadas con las letras A, B, C, D y E, como se muestra en la figura. Ella quiere eliminar cartas de las cajas de manera que, al final, cada caja contenga una sola carta y que ningún par de cajas contenga cartas marcadas con la misma letra. ¿Qué letra tendrá la carta que quedará en la caja 5?



Ⓐ A   Ⓑ C   Ⓒ E   Ⓓ B   Ⓔ D

5. Raquel marcó un punto en un trozo de papel. Después, dibuja cuatro líneas rectas que pasan por el punto. ¿En cuántas secciones dividen el papel las líneas dibujadas?



Ⓐ 12   Ⓑ 8   Ⓒ 6   Ⓓ 5   Ⓔ 4

Prueba Canguro Matemático 2008. Primero de Secundaria Página 2-6

6. A continuación, mostramos una pequeña tabla de multiplicación:

×	4	3
5	20	15
7	28	21

La siguiente es, también, una pequeña tabla de multiplicación a la que le faltan algunos números:

×		
	35	63
	30	?

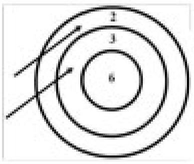
¿Qué número debería estar en lugar del signo de interrogación?

(A) 36 (B) 42 (C) 54 (D) 56 (E) 65

7. Teresa tiene 37 bombones de chocolate. Su amiga Claudia le dice: *"Si me dieras 10 de tus bombones, ambas tendríamos el mismo número de bombones"*. ¿Cuántos bombones tiene Claudia?

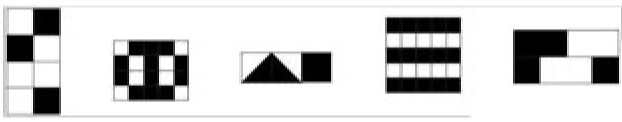
(A) 10 (B) 17 (C) 22 (D) 27 (E) 32

8. Lucas lanzó dos flechas al blanco. En el dibujo observamos un puntaje de 5 puntos. Si suponemos que ambas flechas siempre caen en el blanco, ¿cuántos puntajes distintos puede obtener Lucas?



(A) 6 (B) 9 (C) 3 (D) 8 (E) 4

9. Las siguientes figuras representan banderas coloreadas sólo con blanco y negro. ¿Cuántas de estas banderas satisfacen la condición de que la región pintada de negro cubre exactamente tres quintas partes de la bandera?



(A) 1 (B) 3 (C) 0 (D) 2 (E) 4

Prueba Canguro Matemático 2008. Primero de Secundaria Página 3-6

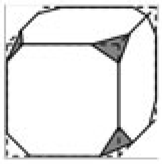
10. Hay 3 canciones en un CD. La primera canción dura 6 minutos y 25 segundos, la segunda canción dura 12 minutos y 25 segundos y la tercera canción dura 10 minutos y 13 segundos. ¿Cuál es la duración total de la música grabada en el CD?

(A) 28 minutos y 30 segundos (B) 31 minutos y 13 segundos
(C) 29 minutos y 3 segundos (D) 31 minutos y 30 segundos
(E) 30 minutos y 10 segundos

11. Gabriel es más alto que Armando y más pequeño que Tomás. Ignacio es más alto que Cristian pero más pequeño que Gabriel. ¿Quién es el más alto?

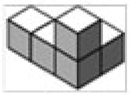
(A) Armando (B) Cristian (C) Gabriel
(D) Ignacio (E) Tomás

12. A un cubo le cortamos todas sus esquinas como se muestra en la figura. ¿Cuántos bordes resultan al hacer dichos cortes?

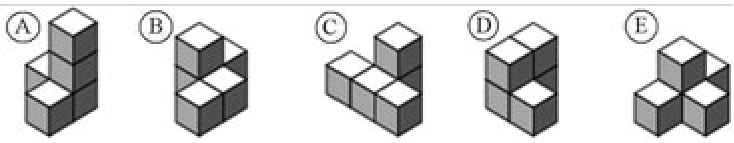


(A) 36 (B) 30 (C) 26 (D) 48 (E) 40

13. Graciela hizo la figura que se muestra a continuación con cinco cubos.



¿Cuál de las siguientes figuras (cuando se ve desde cualquier lado) no se puede lograr al mover un único cubo?

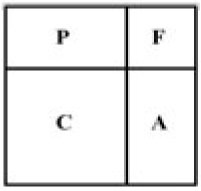


Prueba Canguro Matemático 2008. Primero de Secundaria Página 4-6

14. A Juan le gusta multiplicar por 3, a Pedro le gusta sumar 2 y a Luis le gusta restar 1. Si llamamos J, P y L a las acciones de Juan, Pedro y Luis, respectivamente, ¿en qué orden deberían realizar sus acciones favoritas para convertir 3 en 14?

Ⓐ JPL Ⓑ PJL Ⓒ JLP Ⓓ LJP Ⓔ PLJ

15. Un jardín con forma de cuadrado se ha dividido en una piscina (P), flores (F), césped (C) y arena (A), como se muestra en la figura. El césped y las flores tienen forma cuadrada. El perímetro del césped es 20 m y el perímetro del espacio de las flores es 12 m. ¿Cuál es el perímetro, en metros, de la piscina?



Ⓐ 10 Ⓑ 12 Ⓒ 14 Ⓓ 16 Ⓔ 18

16. ¿Cuántos números de dos cifras son tales que el dígito de la derecha es mayor que el de la izquierda?

Ⓐ 36 Ⓑ 18 Ⓒ 50 Ⓓ 45 Ⓔ 30

17. ¿Con cuántos palillos idénticos es imposible construir un triángulo? *(Los palillos no pueden romperse)*

Ⓐ 7 Ⓑ 5 Ⓒ 3 Ⓓ 6 Ⓔ 4

18. Una tarde, doña Carmen recibió la visita de sus nietos y antes de que ellos llegaran había preparado algunas galletas. Durante la visita se puso a preparar 17 galletas más de las que había preparado antes de la llegada de sus nietos y repartió un total de 21 galletas entre ellos. Después de la visita, a doña Carmen le sobraron 15 galletas. ¿Cuántas galletas había preparado doña Carmen antes de recibir la visita de sus nietos?

Ⓐ 18 Ⓑ 19 Ⓒ 23 Ⓓ 33 Ⓔ 53

Prueba Canguro Matemático 2008. Primero de Secundaria Página 5-6

19. Tres amigos viven en la misma calle: un médico, un ingeniero y un músico. Estos amigos se llaman Eduardo, Roberto y Santiago. El médico no tiene hermanos ni hermanas. Él es el más joven de los tres amigos. Santiago es más viejo que el ingeniero y está casado con la hermana de Eduardo. Los nombres del médico, del ingeniero y del músico son, respectivamente:

(A) Eduardo, Roberto y Santiago
(B) Santiago, Eduardo y Roberto
(C) Roberto, Santiago y Eduardo
(D) Roberto, Eduardo y Santiago
(E) Eduardo, Santiago y Roberto

20. Una tabla contiene 21 columnas numeradas del $1, 2, 3, \ldots, 21$ y 33 filas numeradas del $1, 2, 3, \ldots, 33$. Borramos las filas cuyo número no sea múltiplo de tres y las columnas cuyo número sea par. ¿Cuántas celdas quedan entonces después de borrar?

(A) 110 (B) 119 (C) 242 (D) 115,5 (E) 121

21. ¿Cuál es el mayor número de dígitos que pueden ser borrados del número $20082008\ldots2008$, que tiene 1000 dígitos, de forma que la suma de los dígitos restantes sea 2008?

(A) 260 (B) 510 (C) 1020 (D) 746 (E) 130

22. *Cangu* sólo hace saltos de 1 ó 3 metros. Él quiere avanzar 10 metros. ¿Cuántas formas tiene *Cangu* para hacerlo? (Se consideran como formas diferentes $1+3+3+3$ y $3+3+3+1$, por ejemplo)

(A) 28 (B) 34 (C) 35 (D) 55 (E) 56

23. Nora quiere colocar en los espacios de $2\_\,\_8$ dos dígitos de forma que el número completo sea divisible por 3. ¿Cuántas posibilidades tiene?

(A) 19 (B) 20 (C) 29 (D) 30 (E) 33

24. De todos los números $abcd$ de cuatro cifras tales que $a < b < c < d$ elegimos el mayor número divisible por 6. El dígito de las centenas de este número es

(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

25. Un niño siempre dice la verdad los jueves y los viernes y siempre miente los martes. En los demás días de la semana no sabemos cuando miente o dice la verdad. En siete días consecutivos, se le preguntó su nombre y él contestó los primeros seis días en este orden: Juan, Pedro, Juan, Pedro, Luis, Pedro. ¿Qué respondió en el séptimo día?

(A) Juan (B) Pedro (C) Luis (D) Silvia (E) Otra respuesta

Prueba Canguro Matemático 2008. Primero de Secundaria Página 6-6

26. Un grupo de personas quiere visitar cuatro islas A, B, C y D en barco. Existen barcos entre tierra firme y las islas A, B y C. Hay un barco entre las islas A y B. También a C se le puede llegar desde A y viceversa. Existe, además, un barco que traslada entre las islas A y D. ¿Cuál es el mínimo número de viajes, en barco, que se deben hacer para visitar las cuatro islas partiendo desde tierra firme?

Ⓐ 5 Ⓑ 7 Ⓒ 4 Ⓓ 6 Ⓔ 8

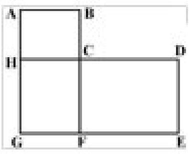
27. Luisa y Juan juegan a las adivinanzas. Para ello, colocan siete hojas de papel en una mesa y escriben los números del 1 al 7 en cada hoja (exactamente uno en cada hoja). Voltean las hojas de manera que no se vean los números y los desordenan. Al azar, Juan toma tres hojas y Luisa toma dos quedando dos en la mesa sin voltear ni ver. Después de ver sus hojas, Juan le dice a Luisa: "Yo sé que la suma de los números que tienes en tus hojas es un número par". ¿Cuál es la suma de los números de las hojas que tiene Juan?

Ⓐ 6 Ⓑ 9 Ⓒ 10 Ⓓ 12 Ⓔ 15

28. Una floristería tiene 24 rosas blancas, 42 rojas y 36 amarillas después de la venta del día. ¿Cuál es el mayor número de arreglos florales idénticos que se pueden hacer si se quieren usar todas las flores que quedaron?

Ⓐ 4 Ⓑ 6 Ⓒ 8 Ⓓ 10 Ⓔ 12

29. La siguiente figura muestra el plano de un pequeño pueblo. Hay cuatro rutas de autobuses en el pueblo. El autobús N° 1 sigue la ruta C-D-E-F-G-H-C, que tiene un perímetro de 17 km. El autobús N° 2 sigue la ruta A-B-C-F-G-H-A, y cubre un perímetro de 12 km. La ruta del autobús N° 3 es A-B-C-D-E-F-G-H-A, y tiene un perímetro de 20 km. El autobús N° 4 realiza el recorrido C-F-G-H-C. ¿Cuál es el perímetro, en kilómetros, de esta última ruta?



Ⓐ 5 Ⓑ 8 Ⓒ 9 Ⓓ 12 Ⓔ 15

30. En una tienda de mascotas se sabe que el costo de dos gatos es el mismo que el de un loro y un perro juntos. El costo de tres loros es el mismo que el de un gato y un perro juntos. Y el costo de un loro, un gato y un perro es de 60 bolívares. ¿Cuál es el precio, en bolívares, de un perro?

Ⓐ 10 Ⓑ 20 Ⓒ 30 Ⓓ 15 Ⓔ 25

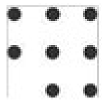
Anexo B

Prueba Canguro Matemático 2008. Segundo de Secundaria Página 1-6

OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICA 2008
CANGURO MATEMÁTICO
PRUEBA PRELIMINAR
8° Y 9° GRADO

RESPONDE LA PRUEBA EN
LA HOJA DE RESPUESTA ANEXA

1. ¿Cuántos cuadrados se pueden formar al unir con segmentos los puntos de la figura?



Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 4 Ⓓ 5 Ⓔ 6

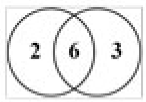
2. Si se tiene que

$$\begin{aligned} a &= 2-(-4) \\ b &= (-2)\cdot(-3) \\ c &= 2-8 \\ d &= 0-(-6) \\ e &= (-12)\div(-2) \end{aligned}$$

¿Cuántos de estos resultados no son iguales a 6?

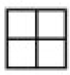
Ⓐ 4 Ⓑ 2 Ⓒ 0 Ⓓ 5 Ⓔ 1

3. Si se lanzan dos dardos a un blanco pintado en una pared como se muestra en la figura, ¿cuántos son todos los posibles puntajes distintos que se pueden obtener? *(Se acepta que los dardos caigan fuera del blanco)*



Ⓐ 4 Ⓑ 6 Ⓒ 8 Ⓓ 9 Ⓔ 10

4. Los números 2, 3, 4 y algún otro número se encuentran escritos en las celdas de una tabla 2×2 como la que se muestra en la figura. Se sabe que la suma de los números de la primera columna es igual a 9 y que la suma de los números de la segunda columna es igual a 6. El número desconocido es:



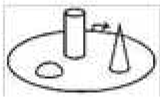
Ⓐ 5 Ⓑ 6 Ⓒ 7 Ⓓ 8 Ⓔ 4

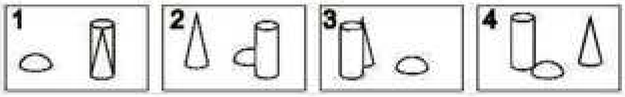
Prueba Canguro Matemático 2008. Segundo de Secundaria Página 2-6

5. Si 6 canguros comen 6 sacos de grama en 6 minutos, ¿cuántos canguros comerán 100 sacos de grama en 100 minutos?

Ⓐ 600 Ⓑ 6 Ⓒ 60 Ⓓ 10 Ⓔ 100

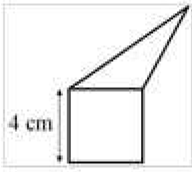
6. Beatriz le dió una vuelta a un parque, como el que se muestra en la figura, partiendo del punto indicado en la dirección dada. Ella tomó las cuatro fotos (indicadas con los números 1, 2, 3 y 4 en la figura) durante su caminata. ¿En qué orden fueron tomadas las fotos?





Ⓐ 2431 Ⓑ 4213 Ⓒ 2143 Ⓓ 2134 Ⓔ 3214

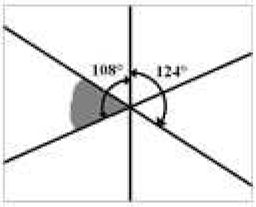
7. El triángulo y el cuadrado que se muestran en la figura tienen el mismo perímetro. ¿Cuál es el perímetro de toda la figura (del pentágono) en centímetros?



Ⓐ 12 Ⓑ 24 Ⓒ 28 Ⓓ 32

Ⓔ Depende de las medidas del triángulo.

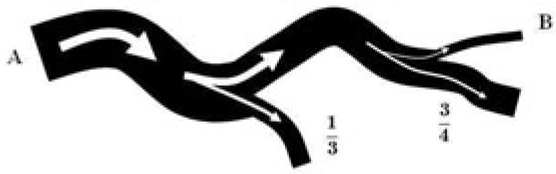
8. Tres rectas se intersectan en un punto. Dos ángulos se muestran en la figura. ¿Cuántos grados mide el ángulo gris?



Ⓐ 52 Ⓑ 53 Ⓒ 54 Ⓓ 55 Ⓔ 56

Prueba Canguro Matemático 2008. Segundo de Secundaria Página 3-6

9. El río Guaragua comienza en un punto A. En cierto punto, el río se divide en dos partes. En la primera parte fluye la tercera parte del agua y en la segunda parte el resto. Más adelante, la segunda parte vuelve a dividirse en dos partes. En una de estas partes fluyen tres cuartas partes del agua y en la otra el resto. El mapa siguiente ilustra la situación. ¿Qué proporción del agua inicial pasa por el punto B?



Ⓐ $\frac{1}{4}$ Ⓑ $\frac{2}{3}$ Ⓒ $\frac{11}{12}$ Ⓓ $\frac{1}{6}$ Ⓔ No puede ser determinada

10. El numerador y denominador de una fracción son números negativos y el numerador es mayor por uno que el denominador. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera sobre la fracción?

Ⓐ La fracción es un número menor que -1

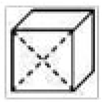
Ⓑ La fracción es un número entre -1 y 0

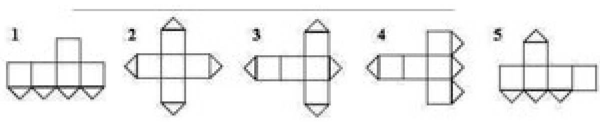
Ⓒ La fracción es un número positivo menor que 1

Ⓓ La fracción es un número mayor que 1

Ⓔ No se puede determinar si la fracción es un número positivo o negativo

11. Una de las caras de un cubo es cortada en sus diagonales como se muestra en la figura. ¿Cuáles de las siguientes configuraciones no es posible?





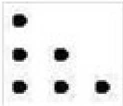
Ⓐ 1 y 3 Ⓑ 1 y 5 Ⓒ 2 y 4 Ⓓ 3 y 4 Ⓔ 3 y 5

12. Un cubo de madera de $11 \times 11 \times 11$ se forma al unir 11^3 cubos de tamaño $1 \times 1 \times 1$ (unitarios). ¿Cuál es el máximo número de cubos unitarios visibles al tomar una fotografía del cubo de madera?

Ⓐ 331 Ⓑ 329 Ⓒ 332 Ⓓ 330 Ⓔ 328

Prueba Canguro Matemático 2008. Segundo de Secundaria Página 4-6

13. Si tres puntos de la figura son seleccionados al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sean colineales?



Ⓐ $\frac{1}{2}$ Ⓑ $\frac{1}{6}$ Ⓒ $\frac{3}{20}$ Ⓓ $\frac{3}{10}$ Ⓔ $\frac{1}{10}$

14. Daniel tiene en un bolsillo 9 billetes, cada uno de 20 bolívares, mientras que en el otro bolsillo tiene 8 billetes de 50 bolívares cada uno. ¿Cuál es el menor número de billetes que deben cambiar de bolsillo para tener la misma cantidad de dinero en los dos bolsillos?

Ⓐ 4 Ⓑ 5 Ⓒ 8 Ⓓ 12 Ⓔ No puede ser determinado

15. Los 7 enanitos de Blanca Nieves nacieron el mismo día pero en 7 años consecutivos. La suma de las edades de los 3 más jóvenes es 42 años. ¿Cuál es la suma de las edades de los 3 más viejos?

Ⓐ 57 Ⓑ 51 Ⓒ 60 Ⓓ 54 Ⓔ 48

16. El día de hoy, Carmen puede decir *"Dentro de dos años, mi hijo Carlos tendrá el doble de la edad que tenía hace dos años. Y, dentro de tres años, mi hija Sara tendrá tres veces la edad que tenía hace tres años"*. Con base en la información anterior, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

Ⓐ Carlos y Sara tienen la misma edad

Ⓑ Sara tiene un año más que Carlos

Ⓒ Carlos tiene un año más que Sara

Ⓓ Sara tiene dos años más que Carlos

Ⓔ Carlos tiene dos años más que Sara

17. Supongamos que por cada número de dos dígitos se toma la cifra de las decenas y se le resta la cifra de las unidades. ¿Cuál es la suma de todos esos resultados?

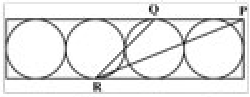
Ⓐ 100 Ⓑ 90 Ⓒ 30 Ⓓ 55 Ⓔ 45

18. En la primera prueba de ortografía de cinco palabras, escribí correctamente una sola. Si ahora practico mucho para escribir correctamente todas las palabras en las pruebas siguientes, ¿cuál es el mínimo número de pruebas que debo hacer, a partir de ahora, para que mi promedio sea cuatro de cinco palabras?

Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 4 Ⓓ 5 Ⓔ 6

Prueba Canguro Matemático 2008. Segundo de Secundaria Página 5-6

19. Cuatro círculos congruentes tangentes de radio 6 cm se inscriben en un rectángulo, como se muestra en la figura. Si P es el vértice y Q y R son puntos de tangencia, ¿cuál es el área del triángulo PQR en cm^2?



Ⓐ 27 Ⓑ 45 Ⓒ 54 Ⓓ 108 Ⓔ 180

20. En una clase hay 9 niños y 13 niñas. Si la mitad de los estudiantes de la clase están resfriados, ¿al menos cuántas niñas están resfriadas?

Ⓐ 4 Ⓑ 1 Ⓒ 0 Ⓓ 3 Ⓔ 2

21. Dados dos conjuntos de números de cinco dígitos, el conjunto A formado por los números cuyo producto de sus dígitos es igual a 25, y el conjunto B formado por los números cuyo producto de sus dígitos es igual a 15. ¿Qué conjunto tiene más números? ¿Cuántas veces más números tiene ese conjunto?

Ⓐ A, 5/3 veces Ⓑ A, 2 veces Ⓒ B, 5/3 veces
Ⓓ B, 2 veces Ⓔ El número de elementos es igual.

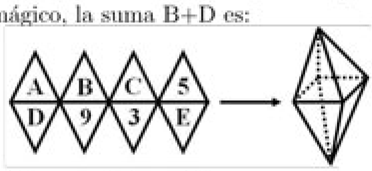
22. Un niño siempre dice la verdad los jueves y los viernes y siempre miente los martes. En los demás días de la semana no sabemos cuando miente o dice la verdad. En siete días consecutivos, se le preguntó su nombre y él contestó los primeros seis días en este orden: Juan, Pedro, Juan, Pedro, Luis, Pedro. ¿Qué respondió en el séptimo día?

Ⓐ Juan Ⓑ Pedro Ⓒ Luis Ⓓ Silvia Ⓔ Otra respuesta

23. En la igualdad $KAN + GA = ROO$ cada una de las letras representa dígitos distintos. El valor de la diferencia $RN - KG$ es

Ⓐ 10 Ⓑ 9 Ⓒ 12 Ⓓ 21 Ⓔ 11

24. Un conjunto de ocho triángulos equiláteros pueden ser unidos para formar un octaedro regular. Para construir un octaedro mágico, reemplaza las letras A, B, C, D y E con los números 2, 4, 6, 7 y 8 (sin repetición) de forma que la suma de los cuatro números de las cuatro caras que comparten vértices tengan siempre la misma suma. En el octaedro mágico, la suma B+D es:



Ⓐ 8 Ⓑ 9 Ⓒ 6 Ⓓ 7 Ⓔ 10

Prueba Canguro Matemático 2008. Segundo de Secundaria Página 6-6

25. Seis números enteros son marcados en la recta real (ver figura). Si se sabe que al menos dos de ellos son divisibles por 3 y al menos dos de ellos son divisibles por 5, ¿cuáles números son divisibles por 15?

Ⓐ A y F Ⓑ B y E Ⓒ C y D Ⓓ Los seis números
Ⓔ Sólo uno de ellos

26. En la figura, cada asterisco puede representar cualquier dígito. La suma de los dígitos del producto es igual a:

```
   ***
 × 1**
 -----
  22**
+ 90*
 **2
 -----
 56***
```

Ⓐ 16 Ⓑ 20 Ⓒ 26 Ⓓ 30 Ⓔ Otra respuesta

27. Rafael tiene 10 cartas, con exactamente los números 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 48, 53, 68 escritos en ellas. ¿Cuál es el menor número de cartas que puede elegir Rafael para que la suma de las escogidas sea 100?

Ⓐ 2 Ⓑ 3 Ⓒ 4 Ⓓ 5 Ⓔ Es imposible de hacer

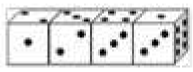
28. Los puntos A, B, C, y D se encuentran marcados en una recta en cualquier orden. Se sabe que $AB = 13$, $BC = 11$, $CD = 14$, y $DA = 12$. ¿Cuál es la distancia entre los puntos extremos o más apartados?

Ⓐ 14 Ⓑ 25 Ⓒ 38 Ⓓ 50 Ⓔ Otra respuesta

29. En un grupo de compañeros de clase, las chicas forman más de un 45 % del grupo pero menos del 50 %. ¿Cuál es el mínimo número posible de niñas en el grupo?

Ⓐ 3 Ⓑ 4 Ⓒ 5 Ⓓ 6 Ⓔ 7

30. Cuatro dados idénticos se arreglan en una fila como se muestra en la figura. Los dados pueden no ser estándares, es decir, la suma de sus caras opuestas podría no ser necesariamente 7. ¿Cuál es la suma total de los puntos de las seis caras que se tocan de los dados de la figura?



Ⓐ 23 Ⓑ 21 Ⓒ 19 Ⓓ 22 Ⓔ 20

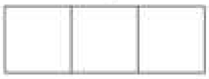
ANEXO C
Prueba Regional Primero de Secundaria

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas
ACM

OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICA
Prueba Regional
26 de Abril de 2008
Séptimo Grado de Educación Básica

Apellidos y Nombres:________________________________ **Nº de Cédula:**____________
Instituto:__________________________ **Sección:**____ **Ciudad:**__________________
Prob. 1_____ **Prob. 2** _____ **Prob. 3** _____ **Prob. 4** _____ **Prob. 5** _____ **Total:**__________

Problema 1
La siguiente figura muestra un rectángulo formado por la unión de tres cuadrados del mismo tamaño:

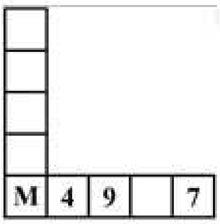


Si el perímetro del rectángulo es 24 metros, ¿cuál es su área en metros cuadrados?

Problema 2
¿Cuántos enteros entre 500 y 700 hay tales que la suma de sus dígitos sea 12?

Problema 3
Natalia compró pinturas de colores amarillo, azul y blanco para hacer una mezcla para pintar toda su casa. La octava parte de la mezcla es de pintura amarilla, mientras que dos terceras partes de la mezcla es de pintura azul; el resto de la mezcla es de pintura blanca. Si Natalia utilizó 10 galones de pintura blanca para su mezcla, ¿cuántos galones de mezcla de pinturas hizo en total?

Problema 4
Si acomodamos todos los números del 1 al 9 de tal forma que la suma de los que están en la columna sea igual a la de los que están en la fila, ¿cuántos valores distintos puede tener **M**? Muestra, además, una forma de colocar los números indicados por cada valor de **M** que encuentres y explica por qué no es posible que **M** tenga otros valores distintos a los que encuentres.



Problema 5
En un desierto, hay serpientes, ratones y alacranes. Cada mañana, cada serpiente se come un ratón, cada mediodía, cada alacrán mata a una serpiente y cada noche, cada ratón se come a un alacrán. Si después de cinco días solamente queda un ratón, ¿cuántos ratones había al inicio?

Valor de cada problema: 6 puntos
Tiempo: 3 horas

Asociación Matemática Venezolana
Apartado postal 47898, Los Chaguaramos, Caracas 1041-A Venezuela

ANEXO D

Prueba Regional Segundo de Secundaria

Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas

ACM

OLIMPÍADA JUVENIL DE MATEMÁTICA

Prueba Regional

26 de Abril de 2008

Octavo Grado de Educación Básica

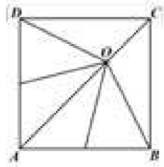
Apellidos y Nombres:________________________ **N° de Cédula:**__________

Instituto:____________________ **Sección:**____ **Ciudad:**____________

Prob. 1____ **Prob. 2** ____ **Prob. 3** ____ **Prob. 4** ____ **Prob. 5** ____ **Total:**______

Problema 1

El área del cuadrado $ABCD$ es de 81 cm^2. Éste se encuentra dividido en seis triángulos con áreas iguales. Calcula la medida de la altura correspondiente al vértice O del triángulo OAB.



Problema 2

Natalia compró pinturas de colores amarillo, azul y blanco para hacer una mezcla para pintar toda su casa. La octava parte de la mezcla es de pintura amarilla, mientras que dos terceras partes de la mezcla es de pintura azul; el resto de la mezcla es de pintura blanca. Si Natalia utilizó 10 galones de pintura blanca para su mezcla, ¿cuántos galones de mezcla de pinturas hizo en total?

Problema 3

La figura anexa muestra una diana de lanzamiento de dardos que se utiliza en la feria anual de Felicidonia, y los puntajes asignados a cada región de la diana (los dardos que caigan fuera de la diana serán contados con puntaje 0). ¿Cuál es el menor puntaje positivo que no puede obtenerse lanzado tres dardos?

Problema 4

En un desierto, hay serpientes, ratones y alacranes. Cada mañana, cada serpiente se come un ratón, cada mediodía, cada alacrán mata a una serpiente y cada noche, cada ratón se come a un alacrán. Si después de seis días solamente queda un ratón, ¿cuántos ratones había al inicio?

Problema 5

Pablo tiene 28 bolívares en monedas de 5, 10 y 25 céntimos. El valor total de las monedas de 10 céntimos es el doble que el valor total de las monedas de 25 céntimos y es la mitad del valor total de las monedas de 5 céntimos. ¿Cuál es el número total de monedas que tiene Pablo?

Valor de cada problema: 6 puntos
Tiempo: 3 horas

Asociación Matemática Venezolana
Apartado postal 47898, Los Chaguaramos, Caracas 1041-A Venezuela

ANEXO E
Matriz Datos

Pruebas	Grupo	Sistema de Representación	Planteamiento	Ejecución	Desempeño
$P67$	1	2	1	1	1
$P68$	1	1	1	1	1
$P69$	1	5	1	1	1
$P70$	1	2	1	1	1
$P71$	1	2	1	1	1
$P72$	1	3	0	1	0
$P73$	1	2	1	1	1
$P74$	1	2	1	1	1
$P75$	1	3	1	1	1
$P76$	1	3	1	1	1
$P77$	1	2	0	0	0
$P78$	1	1	0	1	0
$P79$	1	2	0	1	0
$P80$	1	2	0	1	0
$P81$	1	2	1	1	1
$P82$	1	2	1	1	1
$P83$	1	2	1	1	1
$P84$	1	2	1	1	1
$P86$	2	2	0	1	0
$P87$	2	2	0	0	0
$P88$	2	2	0	1	0
$P89$	2	2	0	1	0
$P90$	2	2	1	0	0
$P91$	2	2	0	1	0
$P94$	2	2	1	1	1
$P96$	2	2	1	1	0
$P97$	2	2	1	1	1
$P98$	2	2	0	0	0
$P99$	2	2	0	0	0
$P100$	2	2	1	0	0
$P101$	2	2	1	1	1
$P102$	2	2	1	1	0
$P103$	2	3	0	0	0
$P104$	2	2	1	0	0
$P105$	2	2	0	1	0
$P106$	2	2	0	1	0
$P107$	2	2	0	1	0
$P108$	2	3	0	0	0
$P109$	2	5	0	0	0
$P110$	2	4	1	0	0
$P111$	2	3	0	0	0
$P112$	2	4	1	1	1
$P115$	2	2	1	1	1
$P116$	2	3	1	1	1
$P117$	2	2	0	0	0

$P118$	2	4	0	1	0
$P119$	2	4	0	1	0
$P120$	2	2	1	1	1
$P121$	2	2	0	0	0
$P122$	2	1	1	1	0
$P123$	2	3	0	0	0
$P124$	2	2	1	1	1
$P125$	2	2	1	1	1
$P126$	2	2	0	1	0
$P127$	2	5	0	1	0
$P128$	2	3	0	0	0
$P129$	2	3	1	1	0