DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.
Especialidad: Matemáticas.

Curso 2010-2011
Universidad de Granada
AUTORA: ANA MARÍA RETAMOSA REYES
SUPERVISOR: JOSE LUIS LUPIÁÑEZ GÓMEZ

Universidad de Granada

UNIDAD DIDÁCTICA: DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Memoria de TRABAJO FIN DE MÁSTER realizada bajo la tutela del Doctor Jose Luis Lupiáñez Gómez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Ana María Retamosa Reyes, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Ana Retamosa

Fdo.: Ana María Retamosa Reyes

VºBº del Tutor

Fdo: Jose Luis Lupiáñez Gómez

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Con este proyecto pretendemos realizar una Unidad Didáctica sobre la Discusión y Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales que estará destinada a los alumnos de segundo curso de Bachillerato de la modalidad de ciencias y tecnología.

Durante la educación secundaria, se ha tratado este tema pero sin profundizar demasiado, es ahora cuando intentaremos estudiarlo a fondo para poder aplicarlo al resto de materias o preparar a aquellos alumnos y alumnas que deseen cursar estudios técnicos y científicos superiores en los que seguramente les sea de gran ayuda. De aquí la gran importancia de que la unidad que preparemos cubra todas las necesidades de los alumnos. Para conseguir este objetivo será necesario un minucioso estudio del tema que estamos tratando y que expondremos en este trabajo.

En primer lugar, en el segundo capítulo, fundamentaremos nuestro trabajo destacando las principales investigaciones en las que se va a basar, haremos referencia a los trabajos que le preceden y de los que nos ayudaremos a la hora de analizar nuestro tema. Además intentaremos justificar el tema desde un punto de vista legal, refiriéndonos a las leyes, decretos y órdenes que satisface tanto a nivel estatal como autonómico.

A continuación, para conseguir adecuar los contenidos con el nivel deseado realizaremos el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción como parte de un análisis didáctico, que ocupará el tercer capítulo del trabajo, y que nos ayudará a encontrar la mejor manera de planificar y diseñar toda la unidad didáctica, con la finalidad de que se adapte al máximo a las exigencias de los estudiantes a la que va dirigida.

Con la realización del análisis de contenido estudiaremos el tema desde un punto de vista histórico, para intentar dar respuesta a porqué surgió la estructura de sistema lineal y qué se pretendía solventar con él. Después, trataremos los contenidos del tema desde el punto de vista conceptual y procedimental, así como las relaciones principales que existen entre ellos, para poder decidir cuáles de estos contenidos son los que queremos desarrollar dentro de la unidad didáctica. Asimismo, veremos cuáles son las principales formas de representar los contenidos que hemos estudiado anteriormente. Y finalmente intentaremos ver a que fenómenos da respuesta.

En segundo lugar, con el análisis cognitivo fijaremos las expectativas que pretendemos superar con esta unidad, así como las principales dificultades y limitaciones que pensamos que pueden darse cuando los estudiantes se enfrentan a los contenidos previamente expuestos en el análisis anterior. Además, presentaremos algunos ejemplos de tareas que nos ayudarán a superar o detectar los errores y a alcanzar algunas de las expectativas propuestas.

Por último, dentro del análisis de instrucción, intentaremos diseñar las tareas, ordenarlas y analizarlas para que se adapten a las necesidades del alumnado y para darnos cuenta si realmente nos ayudan a lograr los objetivos y detectar los errores expuestos en el análisis cognitivo. Además, intentaremos analizar la coherencia de la secuenciación propuesta en lo que se refiere al nivel de dificultad de las tareas, a la finalidad que tiene cada una de ellas y a la distribución en las distintas sesiones que conformarán el período de puesta en práctica de la unidad. La descripción detallada de cada una de las tareas aparecerá en el primer anexo de este trabajo, ya que dada su extensión no se ha podido incluir dentro de este apartado.

Para finalizar el análisis de instrucción, diseñaremos y estudiaremos un modelo de prueba escrita. Este lo podemos ver en el segundo anexo de este trabajo.

Seguidamente, en el cuarto capítulo de este proyecto, expondremos la unidad haciendo referencia a cada uno de los elementos que la componen: contenidos, objetivos específicos, temporalización, competencias básicas, metodología, recursos, atención a la diversidad, evaluación (criterios de evaluación, instrumentos de evaluación, estrategias de evaluación y criterios de calificación). Además, incluimos una secuenciación completa de las diferentes sesiones que compone esta unidad didáctica destacando los aspectos más importantes de cada una de ellas, como por ejemplo qué pretendemos conseguir con cada una de las sesiones, qué expectativas buscamos lograr, qué contenidos abarca, la duración de las explicaciones y de las tareas, la interacción del profesor con los alumnos en cada una de las tareas que pretendemos llevar a cabo, etc.

En el quinto capítulo, expondremos unas conclusiones en las que aparecen recogidas las principales dificultades que nos hemos encontrado a la hora de realizar las distintas partes que conforman este proyecto, por qué hemos tomado ciertas decisiones, así como nuestro punto de vista del resultado final obtenido.

Para finalizar, encontramos la bibliografía donde aparecen recogidos todos los documentos consultados para la realización de este trabajo, así como todas las páginas webs que hemos visitado.

2. FUNDAMENTACIÓN

Para comenzar este apartado es aconsejable remitirnos a la idea de “currículo”. Así, la LOE (Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación) lo define como el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en ella.

La finalidad del currículo es relacionar la organización y legislación educativa con la actividad docente del profesor. A nosotros, como futuros docentes, nos va ayudar a decidir cómo planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje y las actividades que queremos desempeñar dentro del aula.

De modo general, intenta dar respuesta a cuatro cuestiones centrales: ¿qué formación?, ¿para qué?, ¿cómo llevar a cabo la formación? y ¿qué resultados se obtienen? Estas cuestiones darán lugar a una diferenciación en cuatro dimensiones: dimensión cultural y conceptual, dimensión cognitiva, dimensión ética o formativa y dimensión social.

Además de la distinción de estas dimensiones, L. Rico (1997) distinguirá diferentes grados a los que puede ser tratada cada una de ellas dependiendo de las personas que intervengan o de la profundidad con la que se traten. Así, tendremos los siguientes niveles: teleológico o de los fines, de las disciplinas académicas, del sistema educativo y de la planificación para los profesores. Más tarde, en 2007, P. Gómez incluirá un nuevo nivel: el del análisis didáctico. Con nuestro trabajo respetaremos esta división en niveles e intentaremos ajustarlo a dos de ellos: en el análisis didáctico y en el de planificación del profesor.

Dentro del análisis didáctico y en relación con las distintas dimensiones del currículo, diferenciamos cuatro análisis distintos: análisis de contenido (dimensión conceptual), análisis cognitivo (dimensión cognitiva), análisis de instrucción (dimensión formativa) y análisis de actuación (dimensión social).

En el tercer capítulo de este trabajo nos centraremos en los tres primeros análisis y para eso tomaremos como base numerosos estudios que han sido realizados en la Universidad de Granada desde hace años, aunque fijaremos nuestra atención en dos de ellos: *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Pedro Gómez, 2007) *y Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Jose Luis Lupiáñez, 2009).

Así, la estructuración del análisis de contenido en estructura conceptual, sistemas de referencia y análisis fenomenológico, la hemos tomado de la tesis citada anteriormente de Pedro Gómez (2007). Mientras que la distinción dentro del análisis cognitivo en expectativas de aprendizaje, análisis de las limitaciones de aprendizaje y las oportunidades de aprendizaje, la tomaremos de la tesis presentada por Jose Luis Lupiáñez (2009). Finalmente para la realización del análisis de instrucción seguiremos las lecciones impartidas por Pedro Gómez en la asignatura de “aprendizaje y enseñanza de las matemáticas” del Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato (especialidad Matemáticas).

En la concreción de la unidad didáctica que aparece en el cuarto capítulo, atenderemos al nivel de planificación para los profesores, por lo que encontraremos contenidos (dimensión conceptual), objetivos (dimensión cognitiva), metodología (dimensión formativa) y evaluación (dimensión social). Además, tendremos en cuenta otros elementos como: recursos y atención a la diversidad.

Finalmente, a lo largo de toda la secuencia de tareas que propondremos dentro del mismo capítulo podremos encontrar numerosos ejemplos que consistirán en la modelización por parte del alumnado de situaciones reales que le serán más o menos conocidas. Con esto pretendemos enfatizar el enfoque funcional que actualmente tienen las matemáticas y que surgió como respuesta a los resultados obtenidos con el Proyecto PISA.

Además de todo lo anterior, en la realización de la unidad didáctica hemos tenido en cuenta la legislación vigente.

Como expresamos en la introducción, dirigimos nuestra unidad didáctica a los alumnos y alumnas de segundo curso de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología.

Para ello, a nivel nacional, está basada en la Ley Orgánica 3/2006, de Educación (LOE) y su contenido queda reflejado en el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, y que aparece recogido en B.O.E. número 266 de 6-11-2007.

Según la Orden ESD 1729/2008, de 11 de junio, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del Bachillerato en España, podemos situar esta unidad didáctica dentro del bloque de Álgebra de Matemáticas II.

A nivel autonómico, está basada en la Ley 17/2007, de 10 de diciembre de 2007, de Educación en Andalucía (LEA) y su contenido queda reflejado en el Decreto 416/2008, de 22 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía. (BOJA 28-07-2008).

Finalmente, la Orden de 5 de Agosto de 2008, por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía, sólo divide en cuatro grandes núcleos temáticos, pero no específica los contenidos propios de cada núcleo.

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO

En este apartado pretendemos realizar un estudio para *"diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza aprendizaje".*

Se trata de una práctica directamente relacionada con la actividad docente del profesor y que nos ayudará a obtener la mayor calidad posible del proceso de enseñanza-aprendizaje.

El análisis didáctico, como hemos visto en el capítulo anterior, se estructura y articula en torno a cuatro análisis distintos, cada uno correspondiente con una de las dimensiones del currículo. Así nos encontramos con el análisis de contenido (dimensión cultural y conceptual), el análisis cognitivo (dimensión cognitiva), el análisis de instrucción (dimensión ética o formativa) y el análisis de actuación (dimensión social).

A. ANÁLISIS DE CONTENIDO

Este análisis se sitúa en la dimensión cultural y conceptual del currículo, y con él se pretende identificar, seleccionar y organizar los conceptos y procedimientos más importantes del tema que estamos tratando.

Con este análisis pretendemos identificar y organizar los distintos significados del tema, para seleccionar aquellos que creemos que son más importantes para la instrucción.

En un primer lugar vamos a hacer un breve recorrido por el desarrollo histórico del tema, con la finalidad de que nos ayude a entender la aparición y utilidad de los sistemas de ecuaciones lineales. Después estudiaremos los tres organizadores del currículo en torno a los cuales Gómez (2007) organiza el estudio del significado del tema.

1. DESARROLLO HISTÓRICO

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales constituye uno de los problemas matemáticos más antiguos y los encontramos en la matemática de culturas muy diferentes, como por ejemplo, en la matemática mesopotámica, en la china y en la japonesa.

Los **babilonios** llamaban a las incógnitas con palabras tales como *longitud, anchura, área, o volumen*. Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos:

$$\frac{1}{4} anchura + longitud = 7\ manos$$

$$longitud + anchura = 10\ manos$$

Para resolverlo comenzaban asignando el valor 5 a una mano y observaban que la solución podía ser: anchura=20, longitud=30 Para comprobarlo utilizaban un método parecido al de eliminación.

Por su parte, los **egipcios** nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhind, 1650 a.C., y el de Moscú, 1850 a. C.) multitud de problemas matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, pues no se refieren a ningún objeto concreto. En éstos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos, de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones.

Los **griegos** también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos. Thymaridas (400 a.C.) había encontrado una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Diophante resuelve también problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones, pero transformándolos en una ecuación lineal. Sólo aceptaba las soluciones positivas, pues lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones. Carece de un método general y utiliza en cada problema métodos a veces excesivamente ingeniosos.

Los sistemas de ecuaciones aparecen también en los documentos **indios**, pero no llegan a obtener métodos generales de resolución.

Por su parte, los matemáticos **chinos** durante los siglos III y IV a.C. continuaron la tradición de los babilonios y nos legaron los primeros métodos del pensamiento lineal. Por ejemplo, en el tratado *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático*, publicado durante la Dinastía Han, aparece el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Además aparece un método para su resolución, conocido como la regla “fan-chen”, la cual, en esencia, es el popular método de eliminación gaussiana de nuestros días. El problema que dio lugar a este sistema lineal es:

“Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de la segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase? ”

Esta obra *Nueve capítulos sobre el Arte Matemático* fue compuesta por el hombre de estado y científico Chuan Tsanom en el año 152 a.C. y en el que se incluyeron sistemáticamente todos los conocimientos matemáticos de la época.

Luego vendrían los aportes de los matemáticos **islámicos y europeos**, quienes siguieron cultivando el pensamiento lineal.

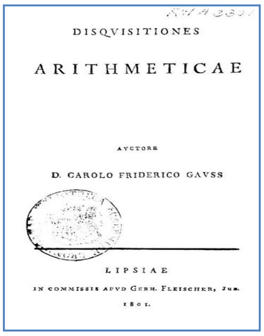
Dentro de los matemáticos árabes podemos nombrar a Al-Khwarizmi, que es conocido por muchos autores como uno de los padres del álgebra. Hizo numerosos avances en el mundo del álgebra, y en su libro *Hisab al-jabr w´al muqâbala* recoge una exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, en especial de las de segundo grado.

Los **europeos** durante la **Edad Media y el Renacimiento** realizaron algunas aproximaciones a un tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales. Esto aparece reflejado, por ejemplo, en la obra de Leonardo de Pisa (1180-1250), más conocido como Leonardo Fibonacci, y en Cardano (1501-1576), quien en su *Ars Magna*, muestra una regla para resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, a la cual llama *regula de modo,* y que, esencialmente, es la conocida regla de Cramer para resolver sistemas lineales 2x2.

Pero parece que fue Leibniz quien primero se propuso obtener un método general de resolución y quien por tanto primero manejó los determinantes. En el año 1693 dio ejemplos de sistemas de ecuaciones con coeficientes generales utilizando la notación con subíndices. No obstante, las ideas de Leibniz cayeron en el olvido.

Más tarde, el suizo Cramer (1704-1752) publicó su *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques (1750)*, obra que en cuyo apéndice aparecía, gracias a la ayuda de expresiones similares a los determinantes, un método impecable para la resolución de un sistema de n ecuaciones con n variables. Este método es conocido como la Regla de Cramer y, aunque lleva su nombre, variantes de la idea básica fueron planteados anteriormente por otros matemáticos.

Colin Maclaurin (1698-1746) redescubriría esta regla en su *Treatise of Algebra* (1750) y pasaría un cierto tiempo hasta que estas ideas fueran patrimonio de los demás. Como, tanto Cramer o Maclaurin, no dieron indicaciones de proceder para sistemas de más de tres ecuaciones, habría que esperar hasta el siglo XIX en el que las necesidades de la Astronomía exigirían una mejora del procedimiento.



Carl Friederich Gauss (1777-1855) presentaría un método sistemático de eliminación para describir la órbita del asteroide Pallas, encontrándose con un sistema de seis ecuaciones lineales con seis incógnitas que, a diferencia de los tratados por Cramer y Maclaurin, tenían coeficientes no enteros. Aunque no utilizó notación matricial, el procedimiento era similar al empleado por los chinos. Este método sistemático para resolver tales sistemas es conocido hoy día como eliminación gaussiana.

Más tarde, este procedimiento sería mejorado por Wilhelm Jordan (1842-1899) en sus trabajos de Geodesia desarrollando un método sistemático de retrosubstitución que proporcionaba las soluciones para las incógnitas mediantes fórmulas que involucraban los coeficientes del sistema original.

Gracias a la popularización de los trabajos destinados a la investigación y desarrollo de los determinantes, los problemas básicos del álgebra basados en sistemas de ecuaciones lineales experimentaron un gran auge. Fueron numerosos matemáticos de los siglos XVIII y XIX los que desempeñaron esta labor, entre los que se pueden citar Jacobi, Vandermonde, Laplace o Cauchy entre otros.

Sin embargo, Jacobi (1804-1851) no consiguió obtener un criterio general de resolución de sistemas de n ecuaciones lineales con m variables, puesto que en esa época aún se carecía del concepto de rango de una matriz. Se considera que el primer matemático en abordar este aspecto fue Sylvester (1814-1897), quien introdujo las matrices haciendo uso del rango, claro está, sin llegar a utilizar esta denominación.

A finales del siglo XIX, más concretamente en el año 1875, Rouché enunció el teorema conocido como Teorema de Rouché-Fröbenius, y posteriormene, 1880, publicó una versión más completa del teorema. Este se convertiría en una herramienta fundamental a la hora de discutir los sistemas de ecuaciones lineales.

2. ESTRUCTURA CONCEPTUAL

La estructura conceptual es el primer organizador del tema que vamos a considerar en nuestro estudio. Dentro de esta estructura, diferenciaremos dos grandes campos de conocimiento matemático: el conceptual y el procedimental.

❖ CAMPO CONCEPTUAL: En el que encontraremos los elementos más básicos del conocimiento matemático relacionados con el tema que es objeto de estudio.

Podemos distinguir tres niveles o tipos de conocimiento que irán aumentando en complejidad, y que son: los hechos (unidades de información), los conceptos (conjuntos de unidades de información) y las estructuras conceptuales (sistemas interconectados de conceptos junto con sus relaciones.

A. HECHOS:

1.- TÉRMINOS: fila, columna, matriz, punto, valor, parámetro, término independiente, incógnita, coeficiente, solución…

2.- NOTACIONES:

- $|.| \equiv$ det(.)
- A^t
- A^{-1}
- Adj(.)
- I_n
- Notación de una matriz de orden mxn: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$
- Notación ordinaria de un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- Matriz ampliada: $A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

- Solución de un sistema: $S = (s_1, s_2, \dots s_n)$
- Notación matricial de un sistema lineal:

A·X=B siendo $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

3.- CONVENIOS:

- El determinante se denota por |.|, o por det(.)
- La matriz traspuesta se denota por A^t
- La matriz inversa se denota por A^{-1}
- La matriz adjunta se denota por Adj(.)
- La matriz identidad de orden n se denota por I_n
- Para designar una matriz se usa una letra mayúscula, y para sus elementos la misma letra en minúscula con los subíndices correspondientes.
- Para nombrar los términos de una matriz nombraremos primero el número de fila y a continuación el de la columna.
- El orden de una matriz se denota mxn donde m es el número de filas y n el de columnas.
- Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución, asimismo dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

4. RESULTADOS:

- Criterios de equivalencia de sistemas.
- El rango de la matriz de un sistema indica el número de ecuaciones independientes
- Teorema de Rouché: Un sistema es compatible si, y solamente si, rango(A)=rango(A*).
- En el caso que se satisfaga este teorema, si el número de incógnitas es igual al rango el sistema es compatible determinado. Y si el número de incógnitas es mayor que el rango, el sistema es compatible indeterminado.
- Si el sistema es indeterminado el número de parámetros necesarios es la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de la matriz.
- En el caso de no verificarse el teorema el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.
- Método de Gauss, generalización del método de reducción. Se hacen transformaciones elementales para obtener un sistema equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior.
- Método de Cramer da la solución del sistema si es compatible.

En un nivel intermedio de complejidad nos encontramos con los conceptos:

B. CONCEPTOS: ecuación lineal, ecuación nula, ecuación proporcional, ecuaciones iguales, equivalencia de sistemas, matriz (de coeficientes, ampliada, inversa,…), recta, plano, haz de rectas o planos, determinante de una matriz, rango de una matriz, transformaciones elementales de matrices,…

En el nivel más alto de complejidad dentro del campo conceptual nos encontramos con las estructuras:

C. ESTRUCTURAS.

- La primera estructura que vamos a considerar son los sistemas lineales, que los clasificaremos en sistemas compatibles determinados, compatibles indeterminados y sistemas incompatibles.
- Sistema Equivalente
- Sistema Homogéneo
- Espacio de Matrices de números reales $M_{nxn}(\Re)$
- Espacio constituido por las soluciones del sistema

❖ CAMPO PROCEDIMENTAL:

En este campo de conocimiento incluiremos los procesos y modos de actuación o ejecución de las tareas matemáticas.

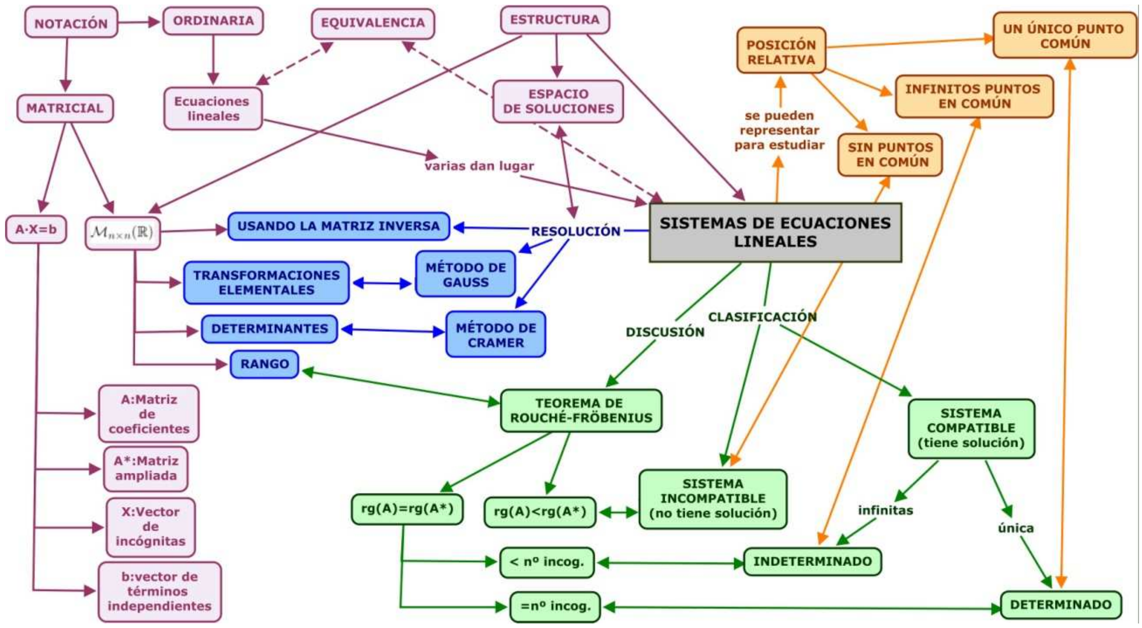
Al igual que ocurría en el conceptual vamos a distinguir tres niveles diferentes de concreción: destrezas, razonamientos y estrategias.

A. DESTREZAS:
   - Saber operar con matrices
   - Utilizar correctamente las transformaciones elementales
   - Identificación de sistemas equivalentes
   - Representar matricialmente un sistema de ecuaciones
   - Clasificación de los sistemas según el tipo de solución
   - Identificación de ecuaciones dependientes dentro de un sistema
   - Obtención de un sistema de ecuaciones más simple realizando las transformaciones convenientes

B. RAZONAMIENTOS:
   - Deductivo:
     - Comprobar que el método de Gauss es válido mediante representación gráfica
     - Comprobar que dos sistemas son equivalentes
   - Inductivo:
     - Extender el método de Gauss desde sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas a sistemas de n ecuaciones con n incógnitas
   - Figurativo:
     - Representar sistemas y sus soluciones (puntos, rectas y planos)
   - Argumentos para justificar los criterios de equivalencia de sistemas

C. ESTRATEGIAS:
   - Reconocimiento del tipo de sistema de que se trata
   - Interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones y sus soluciones.
   - Aplicación del Teorema de Rouché a la discusión de S.E.L. dependientes o no de uno más parámetros.
   - Traducción a sistemas de ecuaciones de problemas cotidianos y de otras áreas del conocimiento.
   - Resolución de sistemas por el método de Gauss
   - Resolución de sistemas por el método de Cramer
   - Resolución de sistemas homogéneos.
   - Resolución de sistemas empleando la matriz inversa Interpretación de las soluciones obtenidas en la resolución de un sistema
   - Utilización del lenguaje matricial como herramienta algebraica

En el siguiente **mapa conceptual** aparecen reflejados la mayor parte de los conceptos de esta estructura conceptual así como las relaciones que se establecen entre ellos.



3. SISTEMAS DE REPRESETACIÓN.

Todos los contenidos que hemos visto en el apartado anterior se pueden representar de diversas formas. Es ahí donde entran en juego los sistemas de representación, que son las formas de agrupar o clasificar las distintas representaciones.

En las matemáticas, las representaciones son aquellas notaciones simbólicas o gráficas o bien manifestaciones verbales con las que se expresan los conceptos y procedimientos así como sus características y propiedades más relevantes. (Castro y Castro, 1997).

Para representar los sistemas de ecuaciones lineales podemos utilizar diversos sistemas de representación. Para ejemplificarlo vamos a ir exponiendo un mismo sistema en sus distintas representaciones:

Simbólico o Algebraico. Diremos que estamos usando este sistema de representación cuando estamos utilizando el lenguaje algebraico puro. Dentro de este tipo vamos a considerar dos bloques que dentro de nuestro tema cobran gran importancia:

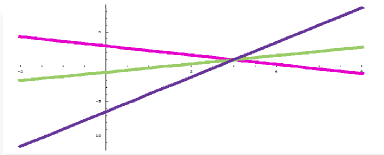
- *Ordinario.* $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9 \\ 3x_1 - 5x_2 = 4 \\ 5x_1 - 2x_2 = 13 \end{cases}$$

- *Matricial*. Este es un modo de representar los sistemas de ecuaciones que facilita su resolución. De hecho, como hemos podido constatar en el desarrollo histórico, el estudio de los sistemas está ligado a los avances en el campo de las matrices.

A·X=b siendo

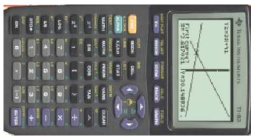
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

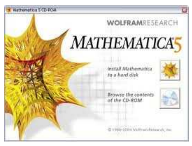
Gráfico. Con este sistema se pretende que el alumno relacione un sistema de ecuaciones lineales con su representación gráfica, puesto que así les será más fácil hacerse una idea de lo que están haciendo cuando lo resuelven, o qué es lo que pretenden determinar cuándo lo discuten.

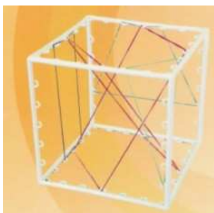


Verbal. Este aparece en la comunicación oral. Realmente se puede decir que se trata de una traducción oral del sistema de representación simbólico.

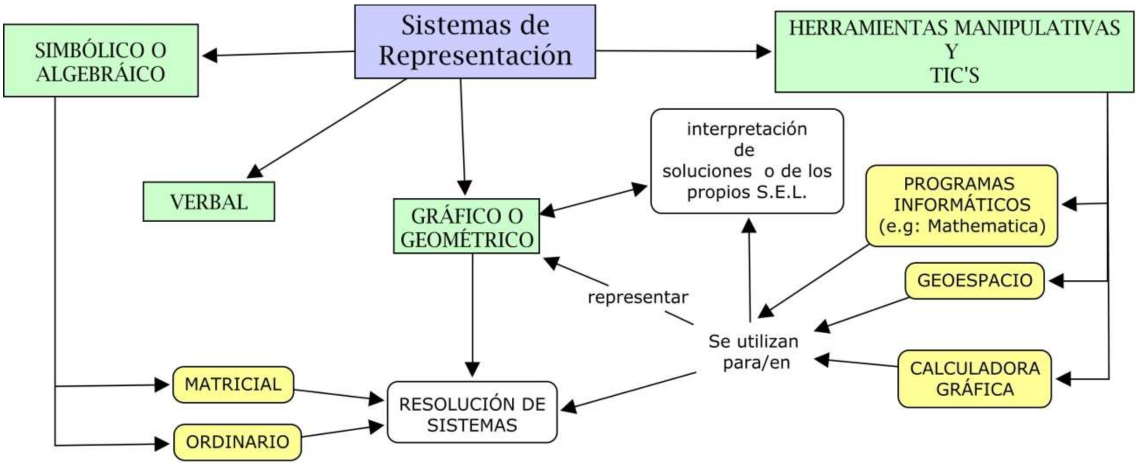
Mediante la utilización de materiales manipulativos o TIC's. Las herramientas manipulativas o TIC's nos ayudan a representar, resolver y comprender los sistemas de ecuaciones lineales. Algunos ejemplos son:

- Calculadoras gráficas: 
- Programas informáticos como:
  - Mathematica
  - Derive
  - Wiris



- Geoespacio: 

A continuación exponemos un mapa conceptual en el que aparecen recogidos los sistemas de representación comentados:



4. FENOMENOLOGÍA

El último de los organizadores que vamos a estudiar para el análisis de contenido es el análisis fenomenológico, que tendrá en cuenta el planteamiento funcional de las matemáticas. Con él mostraremos la conexión entre el significado de conceptos y procedimientos con el mundo real, con las situaciones en las que se localizan, con los contextos en los que tiene sentido ponerlos en juego y con los fenómenos que surgen o en cuyo tratamiento se implican tales conceptos.

En primer lugar, vamos a ver qué entendemos por contexto. Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento.

Los contextos de una determinada estructura se reconocen porque muestran posibles respuestas a la pregunta ¿Para qué se usan los conceptos que conforman ese tema?

Para poder dar respuesta a esta pregunta dentro del tema de Discusión y Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales, tenemos que tener claro en qué consisten los S.E.L. Sabemos que un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales, es decir aquellas que expresan combinación lineal entre datos desconocidos. Por lo tanto al resolverlo lo que estamos intentando es encontrar los valores que satisfacen al mismo tiempo todas las ecuaciones que lo conforman.

Así pues, podemos destacar un contexto fundamental:

- Conocer datos desconocidos a partir de las relaciones lineales que se establecen entre ellos.

Esta será la base para la modelización de una gran variedad de fenómenos.

Así, en el estudio de las ciencias e ingeniería, como en otros campos tales como, la economía, la medicina, psicología, investigación de operaciones,… se desarrollarán modelos matemáticos (cuyo soporte base serán los sistemas de ecuaciones) para ayudar a comprender el origen de ciertos problemas físicos, biológicos, sociales, etc.

Otro punto a destacar dentro del análisis fenomenológico son las subestructuras, que nos permiten organizar los fenómenos que dan sentido a nuestro tema. En nuestro tema tendremos como subestructuras los sistemas compatibles determinados, los sistemas compatibles indeterminados, sistemas incompatibles, el Teorema de Rouché, los sistemas equivalentes,..

Finalmente podemos estudiar las situaciones en las que se localizan los problemas o cuestiones matemáticas.

Una situación vendrá dada por una referencia al mundo (natural, cultural y social) en la cual se sitúan las tareas y cuestiones matemáticas que se proponen a los estudiantes. Su principal finalidad es que nos permitirán localizar un problema y delimitar el campo de fenómenos de los que surge.

Según el estudio Pisa, las situaciones a la hora de clasificar las tareas matemáticas pueden ser de tipo personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2005a; pp.41-42).

Vamos a intentar ejemplificar cada una de las situaciones anteriores con el tema de Discusión y Resolución de Sistemas de Ecuaciones lineales, así como a intentar relacionarlo con la subestructura adecuada.

a. *Situaciones personales*. Son aquellas que están relacionadas con la vida diaria del alumno. Un ejemplo puede ser:

"Con 9 euros que le ha dado su madre Juan ha comprado 9 paquetes de leche entera y leche semidesnatada por un total de 8.93 euros. Si el paquete de leche entera cuesta 0.92 euros y el de semidesnatada 1.05 euros. ¿Cuántos paquetes ha comprado de cada tipo?"

La subestructura asociada a este problema será la de sistema compatible determinado, puesto que a la hora de resolverlo plantearemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que será de ese tipo.

b. *Situaciones educativas o laborales*. Son las que el alumno se encuentra dentro del centro escolar o entorno de trabajo, y que les son propuestas con la finalidad de que utilice sus conocimientos matemáticos. Así, por ejemplo, podemos encontrar tareas similares a las siguientes:

"Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores de los parámetros:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{cases} \quad "$$

Podemos considerar que en este caso la subestructura asociada será el Tª de Rouché, puesto que será la herramienta fundamental que nos permita discutir según los valores de los parámetros que clase de sistema de ecuaciones lineales obtenemos.

Otro ejemplo pude ser:

"*Un empresario tiene tres máquinas que son empleadas en la fabricación de cuatro productos diferentes. Para utilizar plenamente las máquinas estas estarán en funcionamiento 8 horas diarias. El número de horas que cada máquina es usada en la producción de cada uno de los cuatro productos está dado por:*

	Producto 1	*Producto 2*	*Producto 3*	*Producto 4*

Máquina 1	*1*	*2*	*1*	*2*
Máquina 2	*2*	*0*	*1*	*1*
Máquina 3	*1*	*2*	*3*	*0*

Por ejemplo, en la producción de una unidad del producto 1 la máquina 1 se usa 1 hora, la máquina 2 se usa 2 horas y la máquina 3 se usa 1 hora. Encuentre el número de unidades que se deben producir de cada uno de los 4 productos un día de 8 horas completas"

La subestructura asociada a este problema es la de sistema compatible indeterminado, puesto que a la hora de resolverlo nos saldrían infinitas soluciones. Aunque en el proceso de resolución se han de tomar decisiones como que la cantidad de horas que trabaja cada máquina siempre es mayor o igual que cero, por lo que al final sólo nos saldrán 3 soluciones.

c. *Situaciones públicas*. Son aquellas que hacen referencia a una comunidad, con la finalidad de que los alumnos activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones importantes en la vida pública. Un ejemplo puede ser:

"*La República Popular de China, ganó los juegos olímpicos de Beijing 2008 al obtener el mayor número de medallas de oro, el segundo lugar lo ocupó Estados Unidos, entre los dos países ganaron un total de 87 preseas doradas. Si los 2/3 de las medallas ganadas por China, más dos fueron las medallas obtenidas por los Estados Unidos. ¿Cuál fue el número de medallas que obtuvo cada país?"*

En este caso, de nuevo la subestructura asociada es la de sistema compatible determinado.

d. *Situaciones científicas*. Son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. Un ejemplo de este tipo de situaciones surge en las reacciones químicas, puesto que en el proceso de balanceo es necesario plantear un sistema de ecuaciones lineales para poder ajustar correctamente las cantidades de cada elemento o moléculas que intervienen en dicha reacción.

En la combustión del metano (CH_4) con oxígeno (O_2) se obtiene como productos, dióxido de carbono (CO_2) y agua (H_2O). La reacción es la siguiente

$$aCH_4 + bO_2 \rightarrow cCO_2 + dH_2O$$

¿Podrías ajustarla? Comprueba la solución e indica en cada caso el número de moléculas de cada compuesto que intervienen en la reacción

La subestructura asociada vuelve a ser la de sistema compatible determinado.

B. ANÁLISIS COGNITIVO

Una vez que se ha realizado el análisis de contenido es necesario organizar toda la complejidad de nociones y relaciones que conforman un tema.

Según Coll (2002) el análisis cognitivo capacita a los profesores para que describan, analicen y organicen las expectativas de aprendizaje que tienen los escolares de un nivel educativo concreto sobre el tema tratado. El logro de estas expectativas se hará visible mediante la actuación de los escolares ante las tareas que el profesor les demanda.

Estructuraremos este análisis, siguiendo la organización de J. L. Lupiáñez, en torno a que se espera que los alumnos aprendan, a lo que puede interferir el profesor en el aprendizaje, y a lo que les permite a los discentes aprender y al profesor comprobar si el aprendizaje se produce adecuadamente. De este modo podemos definir tres organizadores que estructuran y organizan el análisis cognitivo.

A continuación, vamos a estudiar los principales elementos que conforman cada uno de los organizadores del análisis cognitivo en el tema de discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

Este organizador es el destinado a delimitar y ordenar lo que el profesor espera que los escolares aprendan sobre un tema matemático concreto.

Para ello es necesario que en primer lugar establezcamos unos focos de interés para el aprendizaje, que consistirán en agrupaciones específicas de conceptos, estrategias y estructuras, y cuya principal finalidad será la de establecer prioridades sobre las expectativas.

En relación a la "Discusión y Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales" hemos destacado cuatro focos de interés para el aprendizaje que son los siguientes:

- *Nociones básicas y conocimientos elementales.*
- *Clasificación y Discusión de Sistemas de Ecuaciones Lineales.*
- *Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales.*
- *Representación gráfica de Sistemas de Ecuaciones Lineales y sus soluciones.*

Una vez establecidos los focos prioritarios de interés, podemos discernir entre dos niveles principales de expectativas importantes para el profesor: objetivos específicos y competencias matemáticas.

En el primer nivel dentro del tema que estamos discutiendo, Discusión y Resolución de S.E.L., hemos considerado para cada uno de los focos mencionados anteriormente los siguientes objetivos específicos:

- **NOCIONES BÁSICAS Y CONOCIMIENTOS ELEMENTALES:**
  1. Identificar sistemas equivalentes mediante transformaciones elementales.
  2. Justificar si dos o más sistemas son equivalentes a partir de las soluciones.
  3. Identificar los diferentes elementos que componen un S.E.L. en sus diferentes representaciones.

4. Representar un mismo S.E.L. en las distintas notaciones.

➡ **CLASIFICACIÓN Y DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES:**

5. Aplicar el Teorema de Rouché para identificar la compatibilidad de S.E.L. y razonar e interpretar las posibles soluciones.
6. Clasificar y resolver el S.E.L. en función de los valores de un parámetro e interpretar la solución.

➡ **RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES:**

7. Resolver un S.C.I., identificando el número de parámetros de la solución.
8. Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales e interpretar las soluciones de los sistemas correspondientes.
9. Inventar una situación real que se modelice/exprese matemáticamente a partir de unas soluciones o un Sistema de Ecuaciones Lineales dado.
10. Resolver S.E.L. usando el Método de Gauss, el Método de Cramer o de forma matricial, y justificar la elección del método en cada caso.

➡ **REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES:**

11. Representar gráficamente un S.E.L. para clasificar, calcular e interpretar las soluciones.
12. Emplear los recursos TIC's para representar los S.E.L., clasificarlos e interpretar sus soluciones.

Una vez establecidos los objetivos específicos, pasaremos al siguiente nivel y vamos a intentar relacionarlos con las competencias matemáticas PISA que vamos a desarrollar en cada caso. Estas competencias pueden ser las siguientes:

PR: Pensar y Razonar; AJ: Argumentar y Justificar; C: Comunicar; M: Modelizar; RP: Plantear y Resolver Problemas; R: Representar; LS: Uso de Lenguaje y Operaciones Simbólicas, Formales y Técnicas; HT: Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas.

En las siguientes tablas apreciamos a qué competencias PISA contribuye cada uno de los objetivos anteriores.

1.- NOCIONES BÁSICAS Y CONOCIMIENTOS ELEMENTALES		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Identificar sistemas equivalentes mediante transformaciones elementales							✸	
2	Justificar si dos o más sistemas son equivalentes a partir de las soluciones		✸						
3	Identificar los diferentes elementos que componen un S.E.L. en sus diferentes representaciones	✸					✸	✸	
4	Representar un mismo S.E.L. en las distintas notaciones.						✸	✸	✸

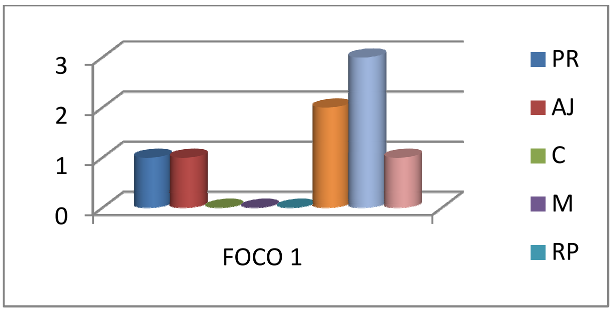
2.- CLASIFICACIÓN Y DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
5	Aplicar el Teorema de Rouché para identificar la compatibilidad de S.E.L. y razonar e interpretar las posibles		✸	✸		✸			

	soluciones.								
6	Clasificar y resolver el S.E.L. en función de los valores de un parámetro e interpretar la solución.	✶		✶		✶		✶	

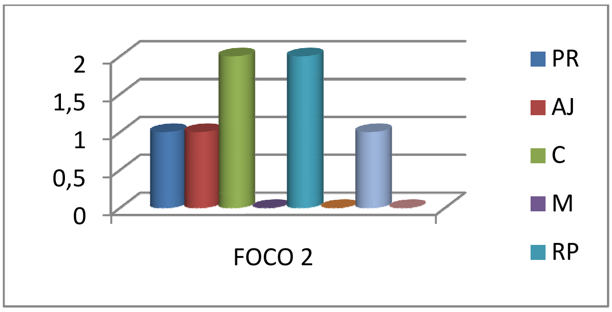
3.- RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES		**PR**	**AJ**	**C**	**M**	**RP**	**R**	**LS**	**HT**
7	Resolver un S.C.I., identificando el número de parámetros de la solución	✶				✶		✶	
8	Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales e interpretar las soluciones de los sistemas correspondientes.	✶			✶	✶		✶	
9	Inventar una situación real que se modelice/exprese matemáticamente a partir de unas soluciones o un S.E.L. dado.	✶		✶	✶				
10	Resolver S.E.L. usando el Método de Gauss, el Método de Cramer o de forma matricial, y justificar la elección del método en cada caso		✶			✶		✶	

4.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES		**PR**	**AJ**	**C**	**M**	**RP**	**R**	**LS**	**HT**
11	Representar gráficamente un S.E.L. para clasificar, calcular e interpretar las soluciones.			✶			✶		
12	Emplear los recursos TIC's para representar los S.E.L., clasificarlos e interpretar sus soluciones			✶			✶		✶

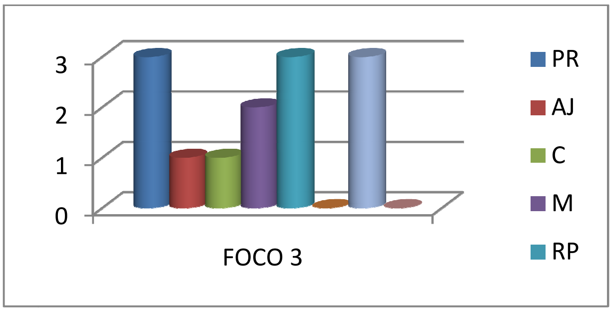
En las siguientes gráficas podemos observar el balance de la contribución a cada una de las competencias por cada uno de los focos prioritarios que hemos destacado:



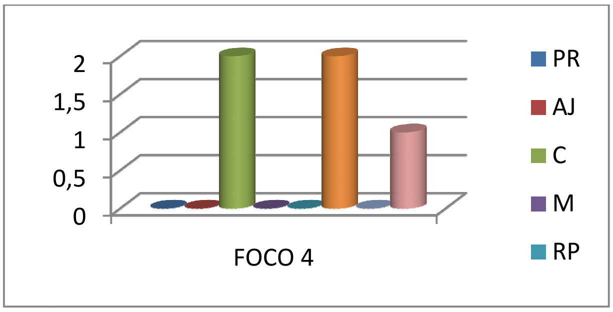
De este gráfico podemos deducir que en el primer foco, dedicado a las "*nociones básicas y conocimientos elementales*", la competencia que más enfatizamos es la del "Uso del Lenguaje y Operaciones Simbólicas, Formal y Técnicas" (LS).



En el foco segundo las competencias que más desarrollamos son las de “Comunicar” (C) y la de “Plantear y Resolver Problemas” (RP). La primera de ellas, apoyándose en la segunda para poder llegar a un resultado final, nos va a ayudar a que los alumnos adquieran soltura a la hora expresarse y de transmitir conocimientos matemáticos.

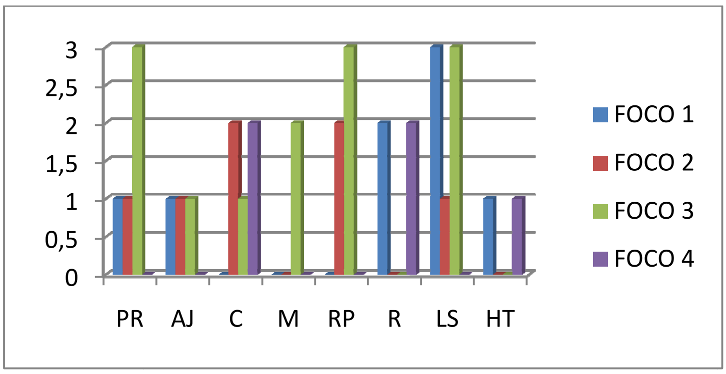


En el foco de *“resolución de S.E.L.”* podemos observar que las competencias que más desarrollamos son las de “Pensar y Razonar” (PR), “Plantear y Resolver Problemas” (RP) y el “uso del Lenguaje Simbólico” (LS).



Finalmente, para el foco de *“Representación Gráfica de S.E.L.”* destacarían las competencias de “Representar” (R) y “Comunicar” (C). También destacaríamos la aparición de la competencia de la “Utilización de Herramientas Tecnológicas” (HT).

En esta última gráfica aparecen recogidos todos los focos:



Según esto, podemos hacer un balance general para saber cuáles son las que más vamos a desarrollar:

Competencia	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Nº de apariciones	**5**	**3**	**5**	**2**	**5**	**4**	**7**	**2**

Vemos que la competencia más desarrollada es el "Uso del Lenguaje y Operaciones Simbólicas, Formal y Técnicas" (LS), pero este resultado era de esperar puesto que nos encontramos en un tema algebraico en el que la aparición del lenguaje simbólico es imprescindible.

Las otras tres competencias más desarrolladas son la de "Pensar y Razonar" (PR), "Comunicar" (C) y "Plantear y Resolver Problemas" (RP).

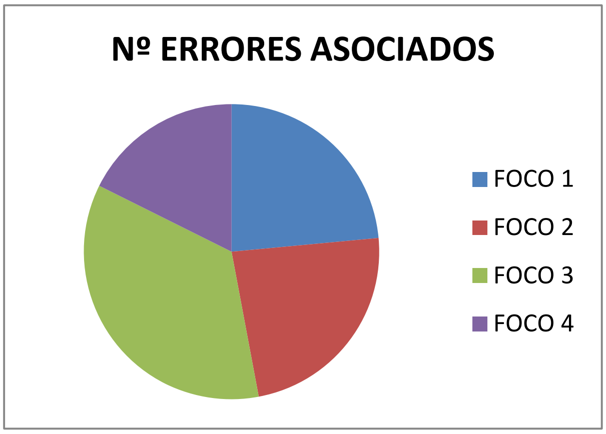
2. ANÁLISIS DE LAS LIMITACIONES

En este apartado nos vamos a centrar en los posibles errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje. Además nos servirá para recabar información acerca de en qué aspectos del tema que estamos trabajando pueden surgir situaciones que frenen o ralenticen el aprendizaje del alumnado.

En la siguiente tabla hemos recogido los principales errores y dificultados que pensamos que pueden aparecer, así como los objetivos a los que están asociados.

ERRORES Y DIFICULTADES		OBJETIVOS ASOCIADOS
E_1	Desconexión entre la representación gráfica y la representación simbólica de un S.E.L.	3, 11, 12
E_2	En la resolución de un S.E.L. por el método de Gauss, realizar transformaciones elementales por columnas	5, 10
E_3	Utilizar el método de Cramer para resolver un S.E.L. sin saber si es compatible o no.	10
E_4	Considerar aisladamente el valor de las incógnitas de un sistema y no como una n-upla.	3, 6, 7, 8, 11, 12
E_5	Considerar que los parámetros son variables independientes.	3, 5, 6, 7, 10
E_6	Aislar la solución de un sistema del fenómeno que éste modeliza.	8, 9
E_7	Incorrecta interpretación de los resultados obtenidos con las TIC's	12
E_8	Errores de cálculo de la matriz inversa de la matriz de coeficientes de un sistema	10
E_9	En la búsqueda de sistemas equivalentes, aplicar los criterios de equivalencia a sólo uno de los miembros de la igualdad.	1
E_{10}	Aplicación incorrecta del Teorema de Rouché a la hora de estudiar la compatibilidad de un sistema.	5

En la gráfica siguiente podemos apreciar el número de errores o dificultades de la tabla anterior que están relacionados con cada uno de los cuatro focos prioritarios.



Podemos ver que el foco al que más errores se le asocian es el de “Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales”. Para ayudar a corregir estos errores es importante que establezcamos una buena base en lo que a estrategias de resolución y cálculo algebraico se refiere.

3. OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

Vamos a exponer algunos ejemplos de tareas que nos ayudarían a alcanzar algunas de las expectativas que hemos propuesto, así como a superar o a trabajar en las limitaciones que hemos expuesto anteriormente.

➨ **Tareas para superar algunas expectativas:**

TAREA 1

Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=-2 \\ -\lambda x+3y+z=-7 \\ x+2y+(\lambda+2)z=-5 \end{array}\right\}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

b) Resuelve el sistema para los valores de λ que sea compatible.

Analizando esta tarea podemos llegar a la conclusión de que nos ayuda a superar varios objetivos.

Así, el primer apartado, nos ayudaría a alcanzar el objetivo número seis (Clasificar y resolver el S.E.L. en función de los valores de un parámetro e interpretar la solución).

Mientras que con el segundo apartado contribuimos a alcanzar dos objetivos: el 7 (Resolver un S.C.I., identificando el número de parámetros de la solución) y el 10 (Resolver un S.E.L. usando el Método de Gauss, el Método de Cramer o de forma matricial, y justificar la elección del método en cada caso).

Además, con él contribuiremos al desarrollo de las competencias: “Pensar y Razonar” (PR) y “Lenguaje Simbólico” (LS).

TAREA 2

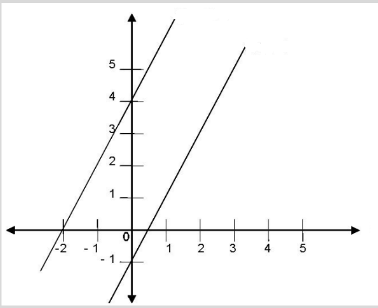
La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era tripe que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, entre los tres sumarán 150 años. ¿Qué edad tenía *el padre cuando nacieron sus hijos?*

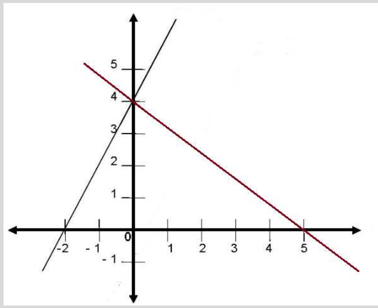
Con este ejercicio queremos superar varias expectativas. La principal sería el objetivo 8 (Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales e interpretar las soluciones de los sistemas correspondientes). Sin embargo, también les ayudará a mejorar en lo concerniente al objetivo 10 (Resolver un S.E.L. usando el Método de Gauss, el Método de Cramer o de forma matricial, y justificar la elección del método en cada caso).

Mediante la realización de esta actividad estaremos favoreciendo al desarrollo de las competencias: "Plantear y Resolver Problemas" (RP) y "Pensar y Razonar" (PR)

➡ **Tareas para subsanar algunas limitaciones:**

TAREA 1
Escribe los sistemas de ecuaciones correspondientes a las situaciones y las rectas representadas en la figura:





Con esta tarea pretendemos que el alumnado que tenga problemas en relacionar la representación gráfica y la representación simbólica de un S.E.L. trabaje en ello, por tanto, la limitación que queremos subsanar es: E_1. Desconexión entre la representación gráfica y la representación simbólica de un sistema.

TAREA 2
En el siguiente proceso de resolución del sistema por el método de Gauss comprueba si hay algún error. En caso afirmativo, localízalo y justifica por qué es error.

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y-z=5 \\ x+2y+z=-3 \\ 2x-4y-z=8 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1^a) \\ (2^a)-2\cdot(1^a) \\ (3^a)-(1^a) \\ (4^a)-2\cdot(1^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)-3\cdot(2^a) \\ (4^a)-2\cdot(2^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \\ (4^a)+(3^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)+(2^a) \\ (4^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-2z=5 \\ 9z=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

Esta actividad está destinada a subsanar el error número 2 (E_2. En la resolución de un S.E.L. por el método de Gauss, realizar transformaciones elementales por columnas) Pretendemos que ellos sean capaces de darse cuenta de que hay un error de ese tipo y por qué.

C. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

Este análisis se centra en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad didáctica que se está planificando.

Según Marín (2009) la estructura del análisis de instrucción se articula en torno a 7 componentes clave que siempre tienen a las tareas como elemento organizador: *adecuación, complejidad, resolución de problemas y modelización, empleo de materiales y recursos, secuenciación, evaluación y gestión del aula.*

Sin embargo, a la hora de realizar este análisis vamos a intentar seguir el esquema propuesto por P. Gómez en la asignatura de "aprendizaje y enseñanza de las matemáticas" del Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

En primer lugar, diseñamos las tareas y las proponemos en una secuencia que ordenamos según su aparición en las sesiones. La descripción detallada de cada una de estas tareas la podemos ver en el **anexo I**. En este anexo estudiaremos una **descripción resumida de cada tarea** de forma esquemática y donde incluimos las siguientes variables: nombre, instrucciones, recursos, agrupamiento, interacción, situación, sistemas de representación, meta, contribución a expectativas, limitaciones, complejidad, finalidad y fase.

A continuación, procederemos al análisis de la secuenciación propuesta atendiendo a los siguientes factores: contribución a superar las expectativas, contribución a la detección y superación de errores, coherencia respecto a complejidad, coherencia en las fases y coherencia en la finalidad.

Así, en primer lugar, vamos a ver en qué medida las tareas propuestas nos ayudarán a **superar las expectativas** que habíamos planteado en el análisis cognitivo.

De la siguiente tabla podemos deducir que con la secuenciación propuesta quedan cubiertas todas las expectativas. Resaltaremos que los objetivos que más se van a trabajar en el tema, son:

5. Aplicar el Teorema de Rouché para identificar la compatibilidad de S.E.L. y razonar e interpretar las posibles soluciones.
10. Resolver S.E.L. usando el Método de Gauss, el Método de Cramer o de forma matricial, y justificar la elección del método en cada caso.
8. Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales e interpretar las soluciones de los sistemas correspondientes.

Los dos primeros hacen referencia a las estrategias más importantes que aparecen en el tema, y que nos ayudarán a discutir y resolver los sistemas de ecuaciones lineales, por lo que pensamos que son expectativas que es necesario enfatizar. De igual modo, hacemos más hincapié en el octavo objetivo porque queremos resaltar el enfoque funcional que las matemáticas tienen actualmente.

(Nota 1: La tarea 25 es un conjunto de tareas más simples que sirven de repaso y refuerzo a algunos de los contenidos del tema)

CUBRIMIENTO DE EXPECTATIVAS

	OBJETIVOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
TAREAS	1								✶	✶			
	2								✶				
	3	✶	✶	✶	✶							✶	
	4	✶											
	5		✶	✶	✶							✶	
	6											✶	
	7					✶							
	8					✶							
	9					✶							
	10					✶							
	11					✶	✶						
	12					✶	✶						
	13					✶	✶		✶				
	14					✶	✶						
	15							✶		✶	✶	✶	
	16					✶	✶		✶		✶		
	17							✶			✶	✶	
	18					✶					✶	✶	
	19					✶			✶		✶		
	20										✶		✶
	21								✶		✶		
	22				✶						✶		
	23				✶				✶		✶		
	24										✶		✶
	25[1]	✶	✶		✶	✶	✶	✶	✶		✶		
	26												✶
TOTAL		3	3	2	5	12	6	3	8	2	11	6	3

Otro aspecto importante a la hora de considerar que la secuenciación propuesta es adecuada es que nos ayude a **solventar en la medida de lo posible, todas las limitaciones de aprendizaje** que habíamos destacado en el análisis anterior. Observemos la siguiente tabla:

CUBRIMIENTO DE LIMITACIONES

ERRORES	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1						✶				
2						✶				
3	✶								✶	
4									✶	
5	✶									
6	✶									
7										✶
8										✶
9										✶
10										✶

TAREAS	11	✶									✶
	12	✶									✶
	13		✶	✶	✶	✶					✶
	14		✶	✶	✶	✶					✶
	15	✶	✶								
	16		✶		✶	✶	✶				✶
	17	✶	✶								
	18	✶		✶							✶
	19			✶	✶		✶				✶
	20							✶			
	21		✶	✶	✶		✶				
	22								✶		
	23				✶		✶		✶		
	24							✶			
	25		✶	✶	✶	✶	✶		✶		✶
	26							✶			
TOTAL		8	7	6	7	4	7	3	3	2	12

De la tabla anterior deducimos que todas las dificultades o limitaciones que pueden surgir en la realización de las diversas tareas por los alumnos quedan cubiertas por alguna tarea.

Asimismo, advertimos que, al igual que ocurría en el cubrimiento de las expectativas, el error que más aparece está relacionado con la discusión de sistemas de ecuaciones lineales con la ayuda del Teorema de Rouché.

En relación a la **complejidad de las tareas presentadas**, el Proyecto PISA (OCDE, 2005 a, pp. 40-41) propone tres grados distintos dependiendo del esfuerzo cognitivo que tengan que realizar los escolares para poder realizar la tarea. Estos niveles son: reproducción, conexión y reflexión.

Vamos a analizar las tareas de la secuenciación desde el punto de vista de la complejidad de las distintas competencias matemáticas PISA. Así, intentaremos discernir qué competencias nos ayuda a mejorar y a qué nivel de complejidad cada una de las tareas propuestas. Esto nos ayudará a distinguir si se trata de una secuenciación coherente en lo que a la complejidad se refiere.

Observando la siguiente tabla (coherencia. complejidad) vemos que todas las competencias han sido tratadas en la secuenciación.

Advertimos también, que las tres competencias que más tratadas van a ser son: “Pensar y Razonar” (PR), “Plantear y Resolver Problemas” (Rp) y “Uso del Lenguaje y Operaciones Simbólicas, Formal y Técnicas” (LS). Estas son también las que más aparecían en el estudio de los objetivos realizado en el análisis cognitivo.

Al principio de la secuenciación, la complejidad de las tareas es de un nivel más bajo, la mayoría de las competencias son tratadas a un nivel de reproducción y a medida que descendemos en la tabla, la complejidad aumenta hasta conexión e incluso reflexión.

Por todo ello, podemos concluir que la secuenciación es coherente en la complejidad de las tareas.

COHERENCIA. COMPLEJIDAD

COMPETENCIAS		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
TAREAS	1			Rp	Rp	Rp			
	2				Rp	Rp		Rp	
	3			Rp			Rp		
	4			Rp			Rp	Rp	
	5			Rp		Rp	Rp	Rp	
	6	Rp		Rp			Cn		
	7	Rp				Rp		Rp	
	8	Cn							
	9	Cn	Cn						
	10	Cn	Cn						
	11	Cn	Rp					Cn	
	12	Cn				Rp		Rp	
	13	Rf			Cn	Cn		Cn	
	14	Rf			Cn	Cn		Cn	
	15			Rp		Rp	Cn	Rp	
	16	Rf			Cn	Rf		Cn	
	17			Cn		Rp	Cn		
	18			Rp		Rp	Cn	Cn	
	19	Cn			Cn	Cn			
	20								Rp
	21	Rf			Rf	Rf			
	22						Cn	Rp	
	23	Cn			Cn	Cn			
	24								Rp
	25	Rf	Cn		Rf	Rf		Cn	
	26								Rp
TOTAL		14	4	8	9	15	8	13	3

Niveles de Complejidad: Rp: Reproducción; Cn: Conexión; Rf: Reflexión

Pero la coherencia de una secuenciación se puede estudiar también desde el punto de vista de la **finalidad que tiene cada una de las actividades que la componen**. Cuando un profesor propone una determinada tarea y no otra, se debe a que pretende conseguir algo concreto en los alumnos. En la siguiente tabla podemos ver la finalidad que perseguimos con cada una de las tareas propuestas.

COHERENCIA. FINALIDAD

FINALIDAD		Aprendizajes Previos	Motivar y Realidad	Exploración	Construcción de significados	Aplicación	Ejercitación	Síntesis
	1	✶	✶					
	2	✶	✶					
	3			✶	✶			
	4			✶	✶			
	5			✶	✶			
	6					✶		

TAREAS	7					✸		
	8					✸		
	9					✸		
	10					✸		
	11					✸		
	12					✸		
	13					✸		
	14						✸	
	15					✸		
	16					✸		
	17						✸	
	18					✸		
	19					✸		
	20		✸			✸		
	21						✸	
	22					✸		
	23					✸		
	24		✸			✸		
	25						✸	✸
	26		✸					✸

Vemos que la distribución de la tabla se acerca a su diagonal, por lo que podemos concluir que la secuenciación propuesta es coherente en lo que a las finalidades de las tareas se refiere.

Estudiando con más detalle la tabla anterior advertimos que hay puntos que se salen de una diagonal hipotética. Y que serían por ejemplo, las tareas 20, 24 y 26 con la finalidad de *motivar*. ¿A qué se debe esto? Para la realización de estas tareas se proponen la utilización de herramientas tecnológicas como la calculadora gráfica o programas informáticos, y pensamos que la introducción de instrumentos distintos a los habituales nos ayudará a aumentar la motivación del alumnado.

Otro aspecto que queremos comentar es la intercalación que aparece entre las columnas de *aplicación* y de *ejercitación*. Consideramos que son tareas con la finalidad de ejercitación aquellas que tienen similitud con otras tratadas en clase, y que normalmente son propuestas para casa, de ahí que se intercalen con las de aplicación.

Finalmente vamos a estudiar la **distribución de las tareas en sesiones y fases**.

Hemos intentado que haya más o menos el mismo número de tareas por sesión y proponer una o dos más para que los alumnos trabajen en casa. Así, la aparición de una misma tarea en dos sesiones distintas se debe a que se propone en una sesión y se corrige en la siguiente.

La fase inicial está compuesta por una única sesión y la fase de cierre por dos sesiones, la séptima, que aparece recogida en la tabla siguiente, y la octava, que no aparece recogida en la tabla porque es la destinada a la realización de la prueba escrita. El resto de sesiones componen la fase de desarrollo.

SESIONES Y FASES

FASE		INICIAL	DESARROLLO					CIERRE
SESIÓN		1	2	3	4	5	6	7
TAREAS	1	✸						
	2	✸	✸					
	3	✸						
	4	✸						
	5	✸	✸					
	6		✸					
	7		✸					
	8		✸					
	9		✸	✸				
	10		✸	✸				
	11			✸				
	12			✸				
	13			✸				
	14			✸	✸			
	15				✸			
	16				✸			
	17				✸	✸		
	18					✸		
	19					✸		
	20					✸		
	21					✸	✸	
	22						✸	
	23						✸	
	24						✸	
	25						✸	✸
	26							✸

ANÁLISIS DE LA EVALUACIÓN

Dentro del análisis de instrucción, además del diseño de las tareas tiene gran importancia el diseño de las tareas mediante las cuales pretendemos evaluar a nuestros escolares.

En primer lugar queremos dejar claro las estrategias de evaluación que vamos a seguir.

Así, la evaluación de los alumnos la vamos a realizar de manera formativa y sumativa:

Evaluación inicial. Se llevará a cabo sobre todo en la primera sesión, puesto que la mayoría de los conocimientos que la conforman deberían de conocerlos los alumnos de cursos anteriores. Con esta sesión nos haremos una idea de los conocimientos previos que tienen los alumnos respecto del tema que vamos a tratar. Concretamente, las tareas 1 y 2, nos indicarán el nivel de los alumnos a la hora de plantear y resolver sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas, por lo que suponen un nivel de complejidad inferior al que se va a tratar en el tema.

Evaluación continua: Tomará gran relevancia en el desarrollo de la unidad, puesto que se evaluará el trabajo diario de los alumnos tanto en el aula como fuera de ella. Aquí, utilizaremos también la *observación directa* como estrategia de evaluación. Valoraremos aspectos como: participación en clase, progreso del aprendizaje diario, realización de las tareas y prácticas propuestas, comportamiento en clase,…

Evaluación final: Se llevará a cabo en la última sesión de la unidad didáctica y consistirá en una prueba escrita en la que se abarcaran los conocimientos elementales que se han desarrollado en las sesiones anteriores.

Además, en la séptima sesión se les recomienda visitar una página web en la que aparecerán múltiples aplicaciones a modo de *autoevaluación*.

En el **anexo II** encontramos una propuesta de la prueba escrita que se realizaría en la octava y última sesión.

A continuación queremos analizar las tareas que componen la prueba escrita propuesta, para ver en qué medida nos permitirá evaluar la superación de las expectativas propuestas y la mejora de las competencias matemáticas.

Esta información queda recogida en la siguiente tabla.

Tarea	Puntuación	Objetivos	Competencias	Complejidad
1	1	4,3,10	RP , LS	Reproducción
2	2	1,2,10	RP, LS	Conexión
3	2	10, 11,7	PR, AJ, LS	Conexión
4	2.5	5,9	PR, C, M, LS	Reflexión
5	2.5	5,6,8	PR, M, RP, LS	Reflexión

La evaluaremos de 0 a 10 y supondremos superada si obtienen como mínimo un 5.

Podemos ver que en esta prueba escrita se estudiarán todos los objetivos propuesto excepto el 12, que es el referido a las herramientas TIC’s por lo que su evaluación se realizará con la tarea informática propuesta en la sesión 7 y con la observación de los tareas con calculadoras gráficas realizadas en clase.

Advertimos que también se trabajan los tres niveles de complejidad. La primera de las tareas es la única destinada al nivel de complejidad de reproducción, las dos siguientes al de conexión y las dos últimas al de reflexión. Como vemos en la tabla es posible superar la prueba realizando correctamente las tres primeras tareas correspondientes a los dos niveles más bajos de complejidad. Pensamos que para darla por aprobada es necesario que los alumnos sean capaces de realizar tareas al nivel de complejidad de conexión, no nos basta que sean capaces de reproducir estrategias.

En lo que respecta a las competencias matemáticas, es evidente que la que más influencia tiene es la de *lenguaje simbólico*, puesto que, el tema tratado es algebraico. No aparece la competencia de *Uso de Herramientas Tecnológicas* por la misma razón que no se ha tratado el objetivo 12.

4. UNIDAD DIDÁCTICA: DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE S.E.L.

A. CONTENIDOS:

CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
▪ Sistema de Ecuaciones Lineales ▪ Expresión matricial de un sistema de ecuaciones ▪ Solución de un sistema ▪ Sistemas equivalentes ▪ Criterios de equivalencia ▪ Sistemas compatible determinado ▪ Sistema compatible indeterminado ▪ Sistema incompatible ▪ Sistema homogéneo ▪ Teorema de Rouché ▪ Sistemas de ecuaciones dependientes de un parámetro ▪ Método de Gauss ▪ Método de Cramer	▪ Reconocimiento del tipo de sistema de que se trata. ▪ Interpretación geométrica de sistemas de ecuaciones y sus soluciones. ▪ Aplicación del Teorema de Rouché a la discusión de S.E.L. dependientes o no de uno más parámetros. ▪ Traducción a sistemas de ecuaciones de problemas cotidianos y de otras áreas del conocimiento. ▪ Resolución de sistemas por el método de Gauss ▪ Resolución de sistemas por el método de Cramer ▪ Resolución de sistemas empleando la matriz inversa. ▪ Interpretación de las soluciones obtenidas ▪ Resolución de sistemas homogéneos. ▪ Utilización del lenguaje matricial como herramienta algebraica	▪ Hábito de analizar las soluciones de un sistema de ecuaciones para contrastar lo razonable o no del resultado obtenido. ▪ Apreciación de la utilidad del lenguaje simbólico en matemáticas para solventar problemas relacionados con la vida cotidiana. ▪ Gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos. ▪ Interés por entender los resultados obtenidos y las estrategias seguidas en la resolución de tareas.

B. OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

Los objetivos específicos que vamos a tratar de superar en esta unidad didáctica son:

1. Identificar sistemas equivalentes mediante transformaciones elementales.
2. Justificar si dos o más sistemas son equivalentes a partir de las soluciones.
3. Identificar los diferentes elementos que componen un S.E.L. en sus diferentes representaciones.
4. Representar un mismo S.E.L. en las distintas notaciones.
5. Aplicar el Teorema de Rouché-Fröbenius para identificar la compatibilidad de S.E.L. y razonar e interpretar las posibles soluciones.
6. Clasificar y resolver el S.E.L. en función de los valores de un parámetro e interpretar la solución.
7. Resolver un S.C.I., identificando el número de parámetros de la solución.

8. Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales e interpretar las soluciones de los sistemas correspondientes.
9. Inventar una situación real que se modelice/exprese matemáticamente a partir de unas soluciones o un Sistema de Ecuaciones Lineales dado.
10. Resolver S.E.L. usando el Método de Gauss, el Método de Cramer o de forma matricial, y justificar la elección del método en cada caso.
11. Representar gráficamente un S.E.L. para clasificar, calcular e interpretar las soluciones.
12. Emplear los recursos TIC's para representar los S.E.L., clasificarlos e interpretar sus soluciones.

C. METODOLOGÍA:

En primer lugar vamos a considerar los *conocimientos previos* de los alumnos puesto que será esa la base de la que partamos para aplicar nuestra unidad didáctica. Además tendremos en cuenta el *ritmo de aprendizaje* de cada alumno.

Centraremos la atención diaria en los escolares, intentando que sean ellos los principales actores de las sesiones y que descubran ciertos conceptos por si mismos, lo que nos llevará a una *perspectiva constructivista* del proceso de aprendizaje.

Además, pretendemos que los escolares tengan una actitud crítica y que realicen tareas en el desarrollo de las clases, por lo que llevaremos a cabo una *metodología activa y participativa.*

Siguiendo el currículo oficial vigente, intentaremos enfatizar el *enfoque funcional* de las Matemáticas caracterizado porque el conocimiento nos permite modelizar situaciones reales y está orientado a la resolución de cuestiones y problemas en diferentes contextos.

Buscaremos que los alumnos se expresen oral, escrita y gráficamente con un vocabulario específico de términos y nociones matemáticas.

No podemos olvidar tampoco, que nos situamos en un nivel post-obligatorio por lo que debemos proporcionarles la preparación básica para un alumnado de Ciencias o Ingeniería y que cubra las necesidades que puedan tener en otras asignaturas.

En lo que respecta a la *atención a la diversidad* proporcionaremos el material que sea necesario en cada caso, como pueden ser tareas de refuerzo o de ampliación.

Finalmente, le daremos una gran importancia a la utilización de las *tecnologías de la información y comunicación*, que permitirán que los alumnos se adapten con más facilidad al entorno social en que se desenvuelven, un entorno cada vez más tecnológico e informatizado.

D. RECURSOS:

Actualmente contamos con numerosos recursos y herramientas manipulativas que nos ayudan a diseñar tareas matemáticas que ponen en juego capacidades de los alumnos que de otro modo sería complicado lograr (Lupiañez, 2009).

En el desarrollo de nuestra unidad didáctica, vamos a utilizar como recursos: las calculadoras gráficas y los ordenadores con acceso a internet.

E. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD:

REFUERZO: Contaremos con una batería de tareas destinadas al refuerzo de los alumnos, con la finalidad de que ejerciten y trabajen más en la materia estudiada. Ejemplos de este tipo de tareas son las que aparecerán en la séptima sesión propuestas para su realización en casa (Tarea 25 del anexo I).

AMPLIACIÓN: Al igual que en el caso anterior contaremos con una relación de tareas con un nivel de dificultad un poco más elevado que las tratadas durante las sesiones de clase. Estas no serán calificadas puesto que se trabaja con una complejidad mayor que la que se pide para la superación de la unidad didáctica. Además, consideramos la séptima sesión como ampliación.

NECESIDADES ESPECÍFICAS DE APOYO EDUCATIVO: En clase contamos con un alumno con una discapacidad auditiva leve, por lo que atenderemos a sus necesidades tomando medidas como sentarlo en primera fila de la clase para facilitarle la escucha y atención en el aula. Procuraremos hablarle de frente para que la comprensión de las explicaciones le resulte más fácil. Además, designaremos a un compañero de clase para que le sirva de ayuda y, antes de trabajar en el aula de informática, le informaremos de los contenidos que vamos a tratar o de las páginas que vamos a visitar para que se prepare con antelación.

ACTIVIDADES GRADUADAS: Las tareas que hemos propuesto a lo largo de las sesiones descritas son graduadas para los diferentes niveles. Con ello se pretende atender a las posibles necesidades que tengan los alumnos.

F. EVALUACIÓN:

CRITERIOS DE EVALUACIÓN:

1. Identifica sistemas equivalentes mediante transformaciones elementales y a partir de sus soluciones.

2. Reconoce los diferentes elementos que componen un S.E.L. en sus diferentes representaciones.

3. Expresa un mismo sistema en las distintas notaciones.

4. Aplica el Teorema de Rouché para dilucidar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales y razonar e interpretar las posibles soluciones.

5. Discute y resuelve un sistema de ecuaciones lineales dependiente de parámetros e interpreta la solución.

6. Resuelve un sistema compatible indeterminado identificando el número de parámetros de la solución.

7. Expresa algebraicamente un enunciado mediante un sistema de ecuaciones, lo resuelve e interpreta la solución dentro del contexto del enunciado.

8. Enuncia situaciones reales que se expresan algebraicamente mediante un sistema de ecuaciones lineales dado o a partir de unas soluciones.

9. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales usando el Método de Gauss, el Método de Cramer o de forma matricial, y justifica la elección del método en cada caso.

10. Representa gráficamente sistemas de ecuaciones para catalogarlos e interpretar sus soluciones.

11. Domina los recursos TIC's para trabajar con los sistemas de ecuaciones lineales.

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN: A la hora de evaluar a nuestros alumnos nos vamos a ayudar de múltiples instrumentos, para que su evaluación sea lo más completa posible. Así utilizaremos:

- Escalas de observación: para evaluar las actuaciones diarias de cada alumno en clase, como puede ser su comportamiento, su participación,…
- Cuaderno de clase.
- Prueba final escrita. En el segundo anexo se puede ver un ejemplo de este instrumento de evaluación, y en el análisis de instrucción del capítulo anterior se ha realizado su valoración.
- Prácticas en ordenador. Un ejemplo es la tarea propuesta para enviar en la sesión 7ª.
- Tareas propuestas diariamente.

ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN:

- Observación directa
- Evaluación inicial
- Evaluación continua
- Evaluación final
- Autoevaluación (propuesta dentro de la página web recomendada en la sesión 7).

Dentro del Análisis de Evaluación que se realizó en el capítulo anterior se explican más detalladamente estas estrategias.

CRITERIOS DE CALIFICACIÓN:

La nota final que cada alumno obtenga vendrá dada por los siguientes porcentajes:

- Cuaderno de trabajo y realización de las tareas propuestas diariamente: 5%
- Comportamiento y participación en clase 5%
- Práctica de ordenador: 10%
- Prueba escrita: 80%. La calificación de las distintas tareas que componen la prueba escrita puede verse en el análisis de instrucción del capítulo anterior y en el anexo II.

G. TEMPORALIZACIÓN:

Esta unidad didáctica se llevará a cabo durante la segunda quincena de octubre, y tendrá una duración total de 8 sesiones, es decir, dos semanas.

En el siguiente apartado veremos la estructuración y desarrollo completo de las distintas sesiones.

DESARROLLO DETALLADO DE TODAS LAS SESIONES

SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN Y CONOCIMIENTOS ELEMENTALES. SISTEMAS EQUIVALENTES

CONTENIDOS BÁSICOS: Sistemas de ecuaciones lineales, notación ordinaria de un sistema, notación matricial, solución de un sistema de ecuaciones lineales, sistemas equivalentes, criterios de equivalencia, representación gráfica de sistemas.

SITUACIONES: Educativa.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN: Simbólico y Gráfico

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

Las capacidades a desarrollar en esta sesión son:

1. Identificar sistemas equivalentes mediante transformaciones elementales.
2. Justificar si dos o más sistemas son equivalentes a partir de las soluciones.
3. Identificar los diferentes elementos que componen un S.E.L. en sus diferentes representaciones.
4. Representar un mismo S.E.L. en las distintas notaciones.
8. Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales e interpretar las soluciones de los sistemas correspondientes.
9. Inventar una situación real que se modelice/exprese matemáticamente a partir de unas soluciones o un Sistema de Ecuaciones Lineales dado.
11. Representar gráficamente un S.E.L. para clasificar, calcular e interpretar las soluciones.

Las competencias en las que vamos a trabajar son:

Pensar y Razonar (PR), Modelizar (M), Lenguaje Simbólico (LS), Representar (R) y Comunicar (C).

INTENCIONES DE LA PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN

Pretendemos, en primer lugar introducir el tema con un ejemplo sencillo, tarea 1, que les ayude a relacionar el tema con la vida real y que les sirva de motivación. Después introduciremos los conceptos correspondientes a esta sesión. Acabaremos la sesión con dos tareas que recogen la mayor parte de los conceptos vistos y con una propuesta de tareas para su realización en casa.

ENMARQUE DE LA SESIÓN

Esta es la primera sesión por lo que nos servirá de introducción del tema. El alumno conoce la mayor parte de los contenidos que se van a dar en ella de cursos anteriores, de ahí que en el número de contenidos y definiciones que se darán sea elevado, puesto que no les debe de suponer de un gran esfuerzo cognitivo. Realmente, se puede decir que se trata de un repaso de conceptos en su mayor parte.

SECUENCIACIÓN:

- **TAREA 1**

Resuelve e interpreta las siguientes situaciones:

- Una empresa aceitera ha embasado 3000 litros de aceite en 1200 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase ha embasado?
- Expón una situación similar que se resuelva usando un sistema de ecuaciones.

Duración: 7 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor expone la primera parte de la tarea al grupo clase. Pregunta cómo se resolvería y deja un tiempo para que salga un alumno a realizarlo a la pizarra. Después pide dos o tres ejemplos de situaciones similares para completar el segundo ejercicio del apartado. Irá anotando las respuestas en la pizarra.

Materiales y Recursos: Ninguno específico.

- **TAREA 2 (Propuesta para casa)**

CURIOSIDADES:

Diofanto fue un matemático griego que vivió entre el 200 y el 290 d.C.
Su vida se desconoce por completo, sin embargo ha llegado hasta nosotros un texto escrito por él llamado "La Aritmética" en el que se plantean y resuelven 189 problemas de álgebra que hoy resolveríamos utilizando ecuaciones primero y segundo grado y sistemas de ecuaciones. Por este hecho se le conoce como el padre del álgebra.
Sobre su tumba a manera de epitafio uno de sus alumnos escribió:
"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad"

¿Podrías resolver el problema y encontrar cuántos años vivió Diofanto?

Duración: 2 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor propondrá esta tarea que servirá también como motivación inicial y para conocer los conocimientos previos de los alumnos. Los escolares tomarán nota y realizarán esta tarea fuera del horario de clase.

Materiales y recursos: Ninguno específico.

- **Explicación de notación ordinaria y notación matricial. Nombramos cada uno de los elementos de las distintas notaciones: incógnitas, coeficientes, términos independientes, matriz de coeficientes, matriz ampliada, matriz de incógnitas y matriz de términos independientes. Ejemplos para pasar de una a otra. (Duración:** 10 minutos aproximadamente)
- **Definición de solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas y sistemas de ecuaciones equivalentes. Ejemplos de sistemas de ecuaciones equivalentes. (Duración:** 8 minutos aproximadamente.)
- **Criterios de equivalencia con ejemplos (Duración:** 10 minutos aproximadamente**)**

- **TAREA 3**

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$(S)\ \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+6y=7 \\ 6x+9y=12 \end{cases}$$

- Determina un sistema de ecuaciones lineales equivalentes a S.
- Representa ambos sistemas gráficamente ¿Qué ocurre?
- Represéntalo usando notación matricial.
- Nombra cada uno de los elementos que han aparecido en el apartado anterior.

Duración: 10 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor propone la tarea, y los alumnos la realizan individualmente. El profesor irá siguiendo la realización e irá solventando las dudas que puedan presentarse. Finalmente, se expondrán algunos de los resultados obtenidos para que sirva a modo de corrección.

Materiales y Recursos: Regla milimetrada, aunque no es imprescindible.

- **TAREA 4**

En los siguientes casos estudia los distintas parejas de sistemas:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{cases} x+y=12 \\ 2y+2z=16 \\ x-y=2 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$ y $\begin{cases} 6x+7y+8z=9 \\ 2x+3y+4z=5 \end{cases}$

¿Son equivalentes? Justifica tu respuesta en cada caso.
Observando el caso b) ¿puedes llegar a alguna conclusión?

Duración: 8 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor propone la tarea al grupo clase. Los alumnos la realizarán individualmente, y luego comentarán razonadamente los resultados obtenidos con un compañero (por parejas). Después dos alumnos (cada uno un apartado) expondrán sus resultados en la pizarra, justificando el por qué de su respuesta.

Materiales y Recursos: Ninguno específico.

- **TAREA 5 (Propuesta para casa)**

a) Determina a, b para que los siguientes sistemas sean equivalentes.

$$\begin{cases} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-ay=-3 \\ 2b+3y=-3 \end{cases}$$

b) Transcribe cada uno de los sistemas a notación matricial, nombrando cada uno de los elementos que lo componen.

c) Represéntalos gráficamente. ¿Se cortan en el mismo punto? ¿Por qué?

SESIÓN 2: DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES I. TEOREMA DE ROUCHÉ.

CONTENIDOS BÁSICOS: Sistema compatible determinado, sistema compatible indeterminado, sistema incompatible, sistema homogéneo, teorema de Rouché, representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales.

SITUACIONES: Educativa.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN: Simbólico y Gráfico

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

En esta sesión vamos a trabajar principalmente el objetivo número cinco:

5. Aplicar el Teorema de Rouché-Fröbenius para identificar la compatibilidad de S.E.L. y razonar e interpretar las posibles soluciones.

También se tratará aunque levemente el objetivo 11:

11. Representar gráficamente un S.E.L. para clasificar, calcular e interpretar las soluciones.

Las competencias en las que vamos a trabajar son:

Pensar y Razonar (PR), Argumentar y Justificar (AJ), Plantear y Resolver Problemas (RP), Lenguaje Simbólico (LS), Representar (R) y Comunicar (C).

INTENCIONES DE LA PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN

En esta sesión queremos que los alumnos comprendan y aprendan el Teorema de Rouché, así como los resultados que se derivan de él, con la finalidad de que sean capaces de discutir y clasificar correctamente un determinado sistema atendiendo a los conceptos implicados en dicho teorema: rango de la matriz de coeficientes, rango de la matriz ampliada, número de ecuaciones independientes, número de incógnitas,…

ENMARQUE DE LA SESIÓN

Esta es la segunda sesión de la secuenciación. Los alumnos ya tienen cierta soltura en los conocimientos básicos necesarios en el tema puesto que se practicaron en la sesión anterior. En la siguiente sesión seguiremos discutiendo sistemas gracias aumentando la complejidad debido a la introducción de parámetros desconocidos en los sistemas.

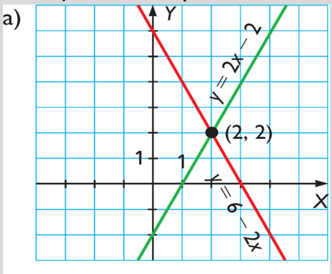
SECUENCIACIÓN:

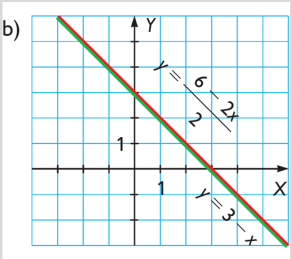
- **Repaso de los principales contenidos y conceptos de la sesión anterior. Aclaración de las dudas que aparezcan y corrección de ejercicios. (Duración:** 10 minutos aproximadamente**)**

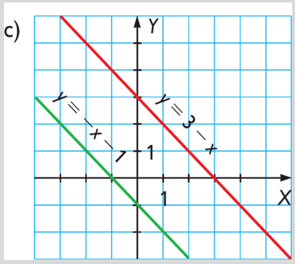
- **Clasificación de los sistemas dependiendo del número de soluciones que tengan: sistemas incompatibles, sistemas compatibles indeterminados y sistemas compatibles determinados. Definición y ejemplo de un sistema homogéneo. (Duración:** 10 minutos aproximadamente**)**

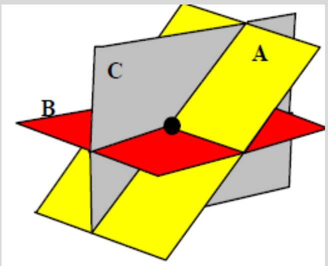
- **TAREA 1**

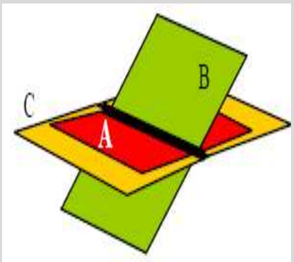
a) ¿Qué tipo de sistema representan las siguientes imágenes? ¿Por qué?

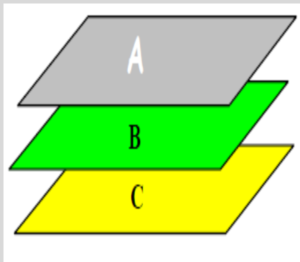












b) Busca un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que represente las tres primeras situaciones.

Duración: 8 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: En los primeros cinco minutos se pasará una copia de cada uno de las representaciones a los alumnos o bien el profesor dibujará las distintas situaciones en la pizarra. Después se dirá que tipo es cada una de las imágenes. En los minutos restantes los alumnos irán proponiendo sistemas que representen las tres primeras situaciones.

Materiales y recursos: Ninguno específico.

- **Explicación el Teorema de Rouché, así como de los resultados derivados de este. (Duración:** 12 minutos aproximadamente**)**

- **TAREA 2**

Estudiar la compatibilidad y el número de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

Duración: 10 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor propone la tarea al grupo clase e irá siguiendo su realización dando respuesta a las cuestiones y dudas que se le planteen. Después lo corregirán en la pizarra.

Materiales y Recursos: Ninguno específico.

- **TAREA 2**

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

Se pide:

- Añádele una ecuación para que el sistema sea incompatible
- Añádele una ecuación para que el sistema sea compatible indeterminado
- Añádele una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Duración: 5 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor propone la tarea, deja un par de minutos con cada apartado y luego pide a algunos alumnos que expongan su resultado en la pizarra.

Materiales y Recursos: Ninguno específico.

- **TAREA 3 (PROPUESTA PARA CASA)**

El siguiente sistema de ecuaciones lineales, S, es compatible determinado:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

a) Si se prescinde en S de una de las ecuaciones, ¿cómo es el sistema que resulta?
b) ¿Qué ecuación se debe quitar para que el nuevo sistema tenga entre sus soluciones la (0,0,0)?
c) Si se añade una nueva ecuación a S, el sistema resultante puede ser:
   I. ¿Compatible determinado?
   II. ¿Compatible indeterminado?
   III. ¿Incompatible?

Justifica tu respuesta en cada caso, y pon un ejemplo cuando sea posible.

- **TAREA 4 (PROPUESTA PARA CASA)**

Sea un sistema homogéneo AX=0. De las siguientes afirmaciones, justificar las que sean ciertas, o poner algún contraejemplo de las que sean falsas.

- Un sistema homogéneo siempre es compatible determinado.
- Si x_1 y x_2 son soluciones de AX=0, una combinación lineal de estas también es solución.

Si consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ estudia la compatibilidad del sistema AX=0.

SESIÓN 3: DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES II.

CONTENIDOS: Teorema de Rouché, sistemas dependientes de parámetros.

SITUACIONES: Educativa, Personal y Pública.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN: Simbólico

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

Las capacidades a desarrollar en esta sesión son:

5. Aplicar el Teorema de Rouché para identificar la compatibilidad de S.E.L. y razonar e interpretar las posibles soluciones.
6. Clasificar y resolver el S.E.L. en función de los valores de un parámetro e interpretar la solución.
8. Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales e interpretar las soluciones de los sistemas correspondientes.

Las competencias en las que vamos a trabajar son:

Lenguaje Simbólico (LS), Pensar y Razonar (PR), Argumentar y Justificar (AJ), Plantear y Resolver Problemas (RP) y Modelizar (M).

INTENCIONES DE LA PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN

En esta sesión vamos a seguir utilizando el Teorema de Rouché como vía para estudiar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales, pero a diferencia de la anterior vamos a introducir parámetros en los sistemas, por lo qué, supondrá un mayor esfuerzo cognitivo para los escolares.

ENMARQUE DE LA SESIÓN

Esta es la tercera sesión de la unidad didáctica. En la anterior comenzamos a discutir la compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales (sin parámetros) y en la siguiente vamos a comenzar los métodos de resolución de los sistemas, concretamente empezaremos por el método de Gauss.

SECUENCIACIÓN:

- ❖ **Repaso de los principales contenidos, haciendo énfasis en el Teorema de Rouché, y conceptos de la sesión anterior. Aclaración de las dudas que aparezcan y corrección de ejercicios. (Duración:** 15 minutos aproximadamente**)**

- ❖ **Explicación de sistemas de ecuaciones lineales con parámetros. (Duración:** 5 minutos aproximadamente**)**

- ❖ **TAREA 1**

Considera los siguientes sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ -\alpha x + 3y + z = -7 \\ x + 2y + (\alpha + 2)z = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + \alpha y - z = 1 \\ 2x + y - \alpha z = 2 \\ x - y - z = \alpha - 1 \end{cases}$$

Clasifica los sistemas según los valores del parámetro α.
Justifica tus resultados y compáralos con los de tu compañero.

Duración: 15 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor propone la tarea. Los alumnos intentarán realizarla individualmente. Una vez concluida se pondrán por parejas, con su compañero más cercano y compararán los resultados, justificando entre ellos por qué han obtenido tales resultados. Finalmente el profesor expondrá la solución correcta en la pizarra y solventará las dudas que hayan surgido.

Materiales y recursos: Ninguno específico.

- **TAREA 2**

Dado el sistema:

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$$

Hallar m para que:

- No tenga solución
- Tenga infinitas soluciones
- Tenga solución única.
- Tenga una solución en la que x=3.

Duración: 8 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor propone la tarea al grupo clase. Los alumnos intentarán realizarla individualmente. Una vez acabada, saldrá a la pizarra el alumno que el profesor considere oportuno.

Materiales y recursos: Ninguno específico.

- **TAREA 3.**

Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un video-juego por un total de 6384€. El precio del original era de 2€, pero también ha vendido copias defectuosas con un descuento del 30% y copias “pirata” a un precio que todavía no se ha podido determinar (Supongamos que son “k”€/ejemplar). Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del original.

- Plantea un sistema de ecuaciones (en función de “k”) para averiguar la cantidad vendida de cada tipo de copia (No es necesario resolver el sistema)
- Estudia la compatibilidad del sistema, en función de “k”. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido las copias “pirata”?

Duración: 12 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor dictará la tarea al grupo clase. Irá supervisando su resolución puesto que es el primero que realizan de este tipo. Al final lo resolverá un alumno voluntario y el resto lo corregirá.

Materiales y recursos: Ninguno específico.

- **TAREA 4 (PROPUESTA PARA CASA)**

PROBLEMA 1:

Juan adquirió en el mercado ciertas cantidades de mandarinas, cerezas y kiwis. El precio de las mandarinas es de 0,78 euros/kg, el de cerezas es de 1,02 euros/kg, pero el de los kiwis no los recuerda (supongamos que son m euros/kg). El importe total de la compra fue de 5,71 euros y el peso total de la misma fue de 7 kg. Además, Juan compró 1 kg más de mandarinas que de cerezas.

- Plantea un sistema de ecuaciones (en función de “m”) para determinar la cantidad comprada de cada producto.
- Estudia la compatibilidad del sistema, en función de “m”. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber comprado los kiwis?

PROBLEMA 2:

Un agente inmobiliario puede realizar 3 tipos de operaciones: venta de un piso nuevo, venta de un piso usado y alquiler. Por la venta de cada piso nuevo recibe una prima de 720 euros. Si la operación es la venta de un piso usado recibe 360 euros. Se desconoce la prima cuando la operación es un alquiler.
Este mes el número total de operaciones fue 5, la prima total por la venta de pisos fue superior en 1200 euros a la obtenida por alquileres y la prima total por venta de pisos nuevos fue el tripe que por alquileres.

- Plantea un sistema de ecuaciones (sin resolverlo) para obtener el número de operaciones realizadas (en función del valor desconocido de la prima de alquiler)
- Indica una prima a la que es imposible que se hayan pagado los alquileres.
- Indica tres primas a las que es posible que se hayan pagado los alquileres.

- **REPASO EN CASA**

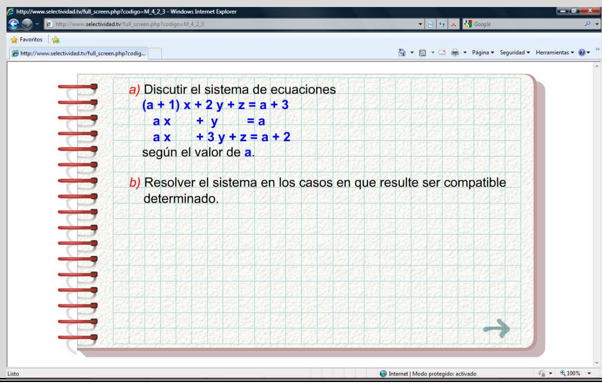
Visita la pagina web:

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/sistemas_de_ecuaciones_lineales_2bcnt/discusion_por_el_teorema_de_rouche.htm

Esto ayudará a repasar los contenidos vistos en la sesión anterior y en esta.

Visita la siguiente pagina web donde encontrarás un nuevo ejemplo de discusión de sistemas de ecuaciones lineales con parámetros:

http://www.selectividad.tv/full_screen.php?codigo=M_4_2_3



SESIÓN 4: MÉTODO DE GAUSS

CONTENIDOS BÁSICOS: Método de Gauss, representación gráfica de sistemas de ecuaciones lineales.

SITUACIONES: Educativa y Pública

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN: Simbólico y Gráfico

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE:

Las capacidades a desarrollar en esta sesión son:

5. Aplicar el Teorema de Rouché para identificar la compatibilidad de S.E.L. y razonar e interpretar las posibles soluciones.
6. Clasificar y resolver el S.E.L. en función de los valores de un parámetro e interpretar la solución.
7. Resolver un S.C.I., identificando el número de parámetros de la solución.
8. Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales e interpretar las soluciones de los sistemas correspondientes.
9. Inventar una situación real que se modelice/exprese matemáticamente a partir de unas soluciones o un Sistema de Ecuaciones Lineales dado.
10. Resolver S.E.L. usando el Método de Gauss, el Método de Cramer o de forma matricial, y justificar la elección del método en cada caso.
11. Representar gráficamente un S.E.L. para clasificar, calcular e interpretar las soluciones.

Las competencias en las que vamos a trabajar son:

Comunicar (C), Lenguaje Simbólico (LS), Pensar y Razonar (PR), Plantear y Resolver Problemas (RP), Representar (R) y Modelizar.

INTENCIONES DE LA PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN

En esta sesión pretendemos que los alumnos aprendan el Método de Gauss para facilitar la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Además, pretendemos que sean capaces de plantear y resolver problemas derivados de situaciones reales cuya resolución se va a basar en la utilización de dicho método.

ENMARQUE DE LA SESIÓN

Es la tercera sesión de esta unidad didacta. Sigue a la destinada a discutir un sistema de ecuaciones lineales en el que aparecen parámetros desconocidos, y precede a otra sesión destinada a otro método de resolución, el Método de Cramer.

SECUENCIACIÓN:

- **Resolución de dudas y corrección de los dos problemas propuestos en la sesión anterior. (Duración:** 10 minutos aproximadamente**)**

- **Explicación del Método de gauss y ejemplo de su utilización en un S.C.D, S.C.I y S.I. (Duración:** 15 minutos aproximadamente**)**

- **TAREA 1**

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el Método de Gauss,

(a) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y = -3 \\ 3x + y - 2z = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y - 3z = -2 \\ 3x - 3z = 1 \end{cases}$

   Identifica el número de parámetros de la solución si los hay.
2. Busca un posible enunciado relacionado con la vida real cuyo planteamiento matemático venga dado por la expresión simbólica de (a).
3. Representa gráficamente los sistemas anteriores. ¿Qué ocurre en cada caso?

Nota: la resolución de (a) y (b) se puede ver también en los siguientes videos resp.:
http://www.youtube.com/watch?gl=ES&hl=es&v=ETDx4PgxUvo
http://www.youtube.com/watch?v=SrzqI9x_LZQ&feature=fvwrel

Duración: 15 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: Esta tarea se va a realizar a modo de ejemplo de la explicación anterior. Para ello, el profesor va a elegir a un alumno para cada uno de los apartados. La elección de los alumnos se va a basar en el conocimiento previo que el alumno tiene de sus capacidades. Así, se elegirán a aquellos dos qué el docente considere que les cuesta más trabajo comprender esta parte de la materia.

Para la segunda parte del ejercicio se les dejara un tiempo breve para que lo piense. Después se pide a un escolar que diga su enunciado al grupo clase, y deben decidir si es válido o no y porqué.

A continuación, dos nuevos alumnos realizaran la representación gráfica de cada uno de los enunciados y que interpreten los resultados obtenidos.

Una vez finalizados, se les puede recomendar que para su repaso en casa visiten las direcciones electrónicas que aparecen en el enunciado.

Materiales y Recursos: Ninguno específico. Puede que sea necesaria una regla milimetrada para que la representación quede más o menos clara.

- **TAREA 2**

Una empresa manda sus pedidos por correo ordinario o bien utilizando un servicio de mensajeros. Cada paquete enviado por correo ordinario supone un coste a la empresa de 20 ptas., y el coste de cada paquete enviado por mensajero es una cantidad A que establece el servicio de mensajeros cada mes. Cierto mes el número total de paquetes enviados fue de 1200 y el coste total de los mismos fue de 33000 ptas.

a. Plantea un sistema de ecuaciones para determinar el número de paquetes enviados por correo ordinario y el número de los enviados por mensajero.
b. Estudia su compatibilidad aplicando el Teorema de Rouché. Si se sabe que el coste por mensajero es superior al coste por correo, ¿el sistema tiene solución única?
c. Resuelve el sistema si A=35 ptas, usando el Método de Gauss.

Duración: 12 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor propone el ejercicio y deja tiempo para que les consulten las dudas que les puedan ir surgiendo. Intentará hacer un seguimiento de los errores más generalizados en la ejecución de esta tarea.

Materiales y Recursos: Ninguno específico.

❖ **TAREA 3 (PARA PRACTICAR EN CASA)**

➡ Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss. En el caso de que se trate de un Sistema Compatible Indeterminado indica el número de parámetros.

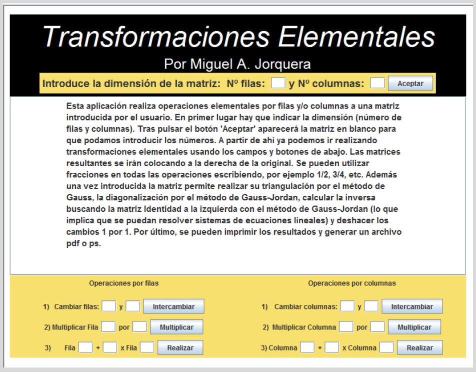
➡ ¿Qué representa geométricamente cada uno de los sistemas?

(a) $\begin{cases} x+y+3z=10 \\ 2x-y+z=6 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -x-2y+3z=0 \\ 2x+3y+2z=4 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ 4x-2y+6z=12 \\ 2x-y+3z=3 \end{cases}$

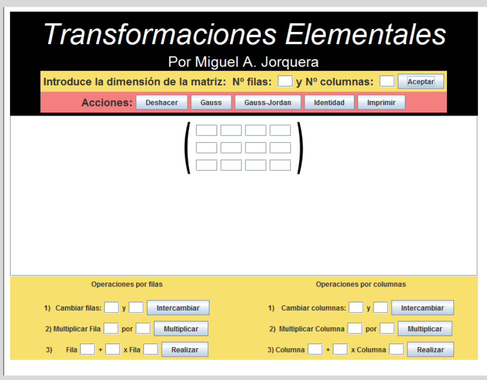
❖ **PARA PRACTICAR EN CASA.** Con la siguiente aplicación podrás calcular fácilmente la triangulación por el Método de Gauss de la matriz ampliada de un sistema.

Sería interesante realizar los ejercicios individualmente y luego comprobar con la aplicación. Lo importante es que la matriz escalonada final sea igual que la de vuestros ejercicios. Los pasos intermedios pueden variar dependiendo de las operaciones que realicéis.

Visita la pagina web:
http://www.orospeda.es/jorquera/tem.html

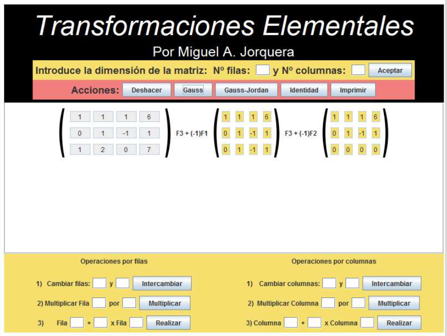


Obtendrás una página como la de la derecha, donde podrás obtener la triangulación por el Método de Gauss de la matriz ampliada.



A continuación, introduce el número de filas y el número de columnas de la matriz ampliada del sistema, y pulsa el botón Aceptar.
Por ejemplo, si se trata de un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, tendrás que introducir 3 filas y 4 columnas, puesto que no debemos de olvidar la columna formada por el vector de términos independientes.
Llegaremos a una nueva pantalla como la de la figura.

Ya sólo tienes que introducir la matriz correctamente y pulsar el botón Gauss y saldrá todo el proceso detallado.



SESIÓN 5: MÉTODO DE CRAMER.

CONTENIDOS BÁSICOS: Sistemas de Cramer, Método de Cramer.

SITUACIONES: Educativa, Personal

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN: Simbólico y Gráfico

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE:

Las capacidades a desarrollar en esta sesión son:

5. Aplicar el Teorema de Rouché para identificar la compatibilidad de S.E.L. y razonar e interpretar las posibles soluciones.
8. Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales e interpretar las soluciones de los sistemas correspondientes.
10. Resolver S.E.L. usando el Método de Gauss, el Método de Cramer o de forma matricial, y justificar la elección del método en cada caso.
11. Representar gráficamente un S.E.L. para clasificar, calcular e interpretar las soluciones.
12. Emplear los recursos TIC's para representar los S.E.L., clasificarlos e interpretar sus soluciones.

Las competencias en las que vamos a trabajar son:

Lenguaje Simbólico (LS), Comunicar (C), Representar (R), Pensar y Razonar (PR), Modelizar (M), Plantear y Resolver Problemas (RP) y Uso de Herramientas Tecnológicas (HT).

INTENCIONES DE LA PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN

Esta sesión la vamos a dividir en tres bloques.

En el primero de ellos corregiremos los ejercicios propuestos. En el segundo, nos dedicaremos a trabajar la resolución de sistemas por el Método de Cramer. Y en el tercero vamos a utilizar la calculadora gráfica para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

ENMARQUE DE LA SESIÓN

Es la quinta sesión de la unidad didáctica. La anterior estaba dedicada al estudio del método de Gauss. En la siguiente veremos la tercera y última forma de resolución que vamos a tratar en este tema: usando la matriz inversa.

SECUENCIACIÓN:

- **Resolución de dudas y corrección de los sistemas propuestos en la sesión anterior. (Duración:** 10 minutos aproximadamente**)**

- **Definición de Sistema de Cramer. Explicación Método de Cramer. (Duración:** 10 minutos.**)**

- **TAREA 1:**

➡ Discute los siguientes sistemas de ecuaciones para demostrar que son sistemas compatibles.

(a) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 13 \\ 2x + 3y + z = 10 \\ 3x + y - 2z = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

➡ Resuélvelos aplicando el método de Cramer.

➡ Intenta representarlos gráficamente. ¿Qué ocurre en los dos casos?

En la siguiente página podrás comprobar si lo resultados obtenidos son correctos.
http://www.vadenumeros.es/actividades/sistemas-regla-de-cramer.htm

Duración: 12 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula:

El profesor propone el ejercicio y deja tiempo para que les consulten las dudas que les puedan ir surgiendo. Intentará hacer un seguimiento de los errores más generalizados en la ejecución de esta tarea y solventará todas las dudas.

Con el último apartado del ejercicio pretendemos que el alumno tenga una visión espacial correcta de la representación del sistema, comunique los resultados obtenidos y sea capaz de darse cuenta si se corresponde con el resultado que ha obtenido de la resolución simbólica.

Al final, se expondrá el resultado correcto.

Materiales y Recursos: Ninguno específico. Si lo desean pueden utilizar regla milimetrada para la representación pero no es obligatorio.

- **TAREA 2**

La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, entre los tres sumarán 150 años.

➡ Plantea el sistema de ecuaciones correspondiente

➡ ¿Cómo es dicho sistema?

➡ ¿Qué edad tenía el padre cuando nacieron sus hijos?

Duración: 12 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: Se propone la tarea y se deja tiempo para que se resuelva individualmente. Al final se hace una puesta común sobre los resultados obtenidos.

Materiales y Recursos: Ninguno específico.

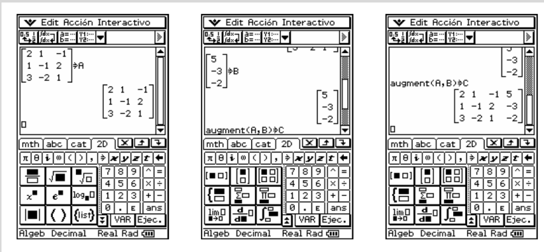
- **TAREA 3: USANDO LA CALCULADORA GRÁFICA.**

PARTE 1: INTRODUCCIÓN

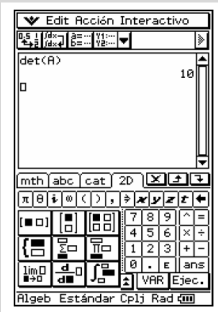
Resolución de un sistema compatible determinado por el Método de Cramer:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

Creamos la matriz del sistema y el vector de los términos independientes. Combinándolos mediante la función *augment* obtenemos la matriz ampliada.

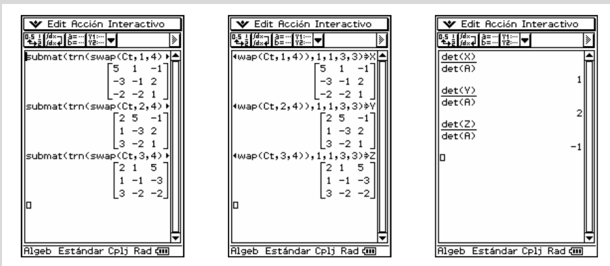


Hallamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada con la función *det.*



Como el rango de la matriz de coeficientes es máximo (3 en este caso), porque det A≠0, y coincide con el número de incógnitas, el sistema de ecuaciones es compatible determinado.
Podemos aplicar el Método de Cramer.

Para ello procedemos como sigue:



La solución será:
(x,y,z)= (1, 2, -1).

PARTE 2:

USANDO LA CALCULADOR GRÁFICA.
Comprueba que los resultados obtenidos en las tareas 1 y 2 son correctos.

Duración: 10 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula:

El profesor al grupo clase le explica con un ejemplo (parte 1) cómo funciona la calculadora gráfica para aplicar el Método de Cramer.

Los alumnos realizarán individualmente la parte 2. En el caso de no contar con el número suficiente de calculadoras se colocarán por grupos. No es recomendable más de 4 personas por grupo.

Materiales y Recursos: calculadora gráfica.

- **TAREA 4 (PROPUESTA PARA CASA)**

PROBLEMA 1:
Un almacén distribuye cierto producto que fabrican 3 marcas distintas: A, B y C. La marca A lo envasa en cajas de 250 gramos y su precio es de 100 euros, la marca B lo envasa en cajas de 500 gramos a un precio de 180 euros y la marca C lo hace en cajas de 1 kilogramo a un precio de 330 euros.
El almacén vende a un cliente 2.5 kilogramos de este producto por un importe de 890 euros. Sabiendo que el lote iba envasado en 5 cajas, plantea un sistema para determinar cuántas cajas de cada tipo se han comprado y resuelve el problema.

PROBLEMA 2:
Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda una partida entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno de ellos posea en ese momento. Cada uno perdió una partida y al final cada uno tenía 24 euros. ¿Cuánto dinero tenía cada jugador al comenzar el juego?

SESIÓN 6: RESOLUCIÓN USANDO LA MATRIZ INVERSA.

CONTENIDOS BÁSICOS: Notación matricial, matriz regular, matriz adjunta, matriz inversa.

SITUACIONES: Educativa

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN: Simbólico y Gráfico.

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE:

Las capacidades a desarrollar en esta sesión son:

4. Representar un mismo S.E.L. en las distintas notaciones.
8. Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales e interpretar las soluciones de los sistemas correspondientes.
10. Resolver S.E.L. usando el Método de Gauss, el Método de Cramer o de forma matricial, y justificar la elección del método en cada caso.

12. Emplear los recursos TIC's para representar los S.E.L., clasificarlos e interpretar sus soluciones.

Además en los ejercicios de repaso que aparecen al final de la sesión se trabajaran los objetivos 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 y 10.

Las competencias en las que vamos a trabajar son:

Pensar y Razonar (PR), Plantear y Resolver Problemas (RP), Lenguaje Simbólico (LS), Representar (R), Modelizar (M) y Uso de Herramientas Tecnológicas (HT)

INTENCIONES DE LA PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN

Esta sesión la vamos a dividir en tres bloques.

En el primero de ellos corregiremos los ejercicios propuestos. En el segundo, nos dedicaremos a trabajar la resolución de sistemas por la matriz inversa. Y en el tercero vamos a utilizar la calculadora gráfica para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

ENMARQUE DE LA SESIÓN

Esta es la quinta sesión de la unidad didáctica. La anterior estaba destinada a resolver sistemas utilizando la Regla o Método de Cramer. En esta nos centraremos en la resolución por matriz inversa y volveremos a utilizar la calculadora gráfica para resolverlos.

SECUENCIACIÓN:

- **Resolución de dudas y corrección de la tarea propuesta en la sesión anterior.** Dado que los alumnos podían intentar resolverlos tanto por el método de Gauss como por el método de Cramer corregiremos uno de cada forma. Si hay alguna duda se realizarán los dos métodos. **(Duración:** 10 minutos aproximadamente**)**

- **Recordatorio cómo se calcula la matriz inversa de una matriz. Explicación de la resolución de sistemas por la matriz inversa (Duración:** 10 minutos aproximadamente**)**

- **TAREA 1:**

Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, realiza las operaciones que se indican a continuación:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+y-z=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y-2z=9 \\ 2x-y+4z=4 \\ 2x-y+6z=-1 \end{cases}$$

- ➡ Transcríbelo a notación matricial.
- ➡ Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes.
- ➡ Resuelve el sistema.

Duración: 8 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula:

El profesor propone la tarea y los escolares lo van realizando. Una vez finalizado, algunos alumnos expondrán sus resultados.

Materiales y Recursos: Ninguno específico.

- **TAREA 2**

PROBLEMA 1
En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.
a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se

compran a la semana.
b) Transcribe el sistema a notación matricial.
c) Resuelve, por la matriz inversa, el sistema planteado en el apartado anterior.

PROBLEMA 2
Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de los hombres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión? Resuélvelo usando la matriz inversa.

Duración: 15 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula:

El profesor propone la tarea y deja unos minutos para que los estudiantes piensen en ella y la resuelvan. Después la corregirán entre todo el grupo clase, y el profesor dará el visto bueno.

Materiales y Recursos: Ninguno específico.

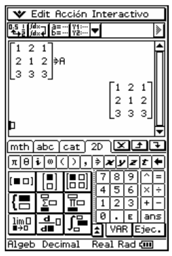
- **TAREA 3**

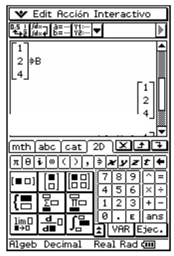
PARTE 1:

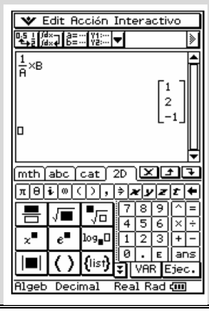
Resolución de un sistema compatible determinado por la matriz inversa.

$$\begin{cases} 2x+y-z=5 \\ x-y+2z=-3 \\ 3x-2y+z=-2 \end{cases}$$

Creamos la matriz de coeficientes del sistema (A) y el vector de términos independientes (B)







A.X=B ⇔ X=A^{-1}.B

Y por lo tanto, la solución es: X=(1, 2, -1)

PARTE 2:

USANDO LA CALCULADOR GRÁFICA.
Comprueba que los resultados obtenidos en las tareas 1 y 2 son correctos.

Además, resuelve los sistemas siguientes:

(a) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + y - z = 15 \\ 5x - y + 5z = 16 \\ x + 4y + z = 20 \end{cases}$

Duración: 10 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula:

El profesor al grupo clase le explica con un ejemplo (parte 1) cómo funciona la calculadora gráfica para resolver un sistema de ecuaciones lineales por la matriz inversa.

Los alumnos realizarán individualmente la parte 2. En el caso de no contar con el número suficiente de calculadoras se colocarán por grupos. No es recomendable más de 4 personas por grupo.

El profesor servirá de guía para la correcta utilización de esta herramienta.

Materiales y Recursos: calculadora gráfica.

- **TAREA 4 (PROPUESTOS PARA CASA): Realizar la secuencia de tareas de refuerzo y repaso que componen la TAREA 25 que aparece en el anexo I.**

SESIÓN 7: RECURSOS INFORMÁTICOS

CONTENIDOS BÁSICOS: Aplicaciones informáticas.

SITUACIONES: Educativa

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN: Simbólico y gráfico

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE:

En esta sesión vamos a centrarnos básicamente en:

12. Emplear los recursos TIC's para representar los S.E.L., clasificarlos e interpretar sus soluciones.

Por lo tanto la competencia en la que más vamos a trabajar es: Uso de Herramientas Tecnológicas (HT).

INTENCIONES DE LA PLANIFICACIÓN DE LA SESIÓN

Con esta sesión pretendemos que a la vez que los alumnos repasan ejercicios relacionados con el tema estudiado, aprendan a utilizar otros recursos tecnológicos.

Así, la primera parte de la clase la dedicaremos a corregir los ejercicios de repaso propuestos en la sesión anterior.

Después trabajaremos con recursos informáticos, concretamente, vamos a usar el programa de álgebra computacional en línea que con propósitos educativos ofrece la junta de Andalucía de forma gratuita. Además, les propondremos un trabajo que nos ayudará en su evaluación.

ENMARQUE DE LA SESIÓN

Es la última sesión antes de la evaluación. La anterior estaba destinada al último de los métodos de resolución que vamos a estudiar en este tema.

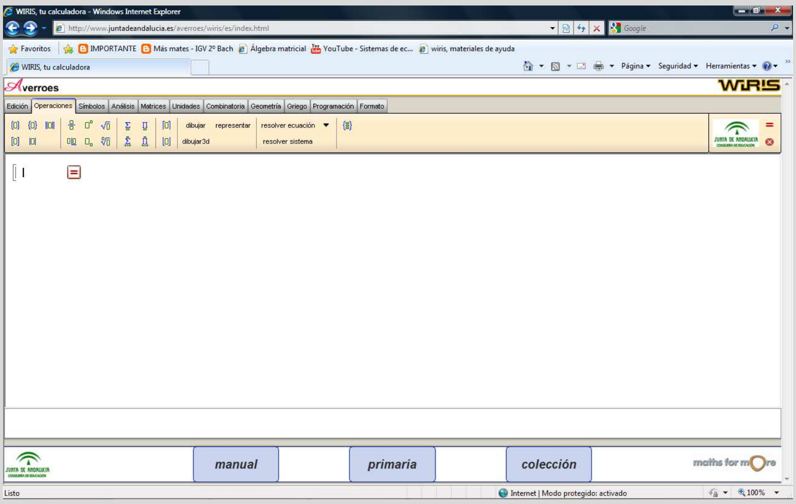
SECUENCIACIÓN:

- **Resolución de las actividades propuestas. Haremos énfasis en aquellas que a los alumnos les hayan resultado más difíciles o les surgiese algún problema a la hora de su resolución (Duración:** 20 minutos aproximadamente**)**
- **USANDO WIRIS: CÁLCULO MATEMÁTICO ONLINE DE ACCESO LIBRE.**

TAREA:

Accederemos a la página web de la Junta de Andalucía desde donde se puede usar de forma gratuita.
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/wiris/es/index.html

- Pulsa el botón “colección” que aparece en la parte inferior de la ventana o escribe la siguiente dirección: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/collection/. Elige la opción Matemáticas 2 y realiza los cuatro ejercicios que aparecerán dentro del bloque Sistemas de Ecuaciones.
- Busca sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas distintos de forma que al representarlos individualmente, obtengas todas las posiciones posibles de tres planos en el espacio. ¿Cuántas posibilidades existen?
- Guarda los resultados y envíalos a la cuenta de correo del profesor para su posterior calificación.
- Los ejercicios deberán de ser recibidos en el plazo máximo de una semana después de esta sesión.



Duración: 35 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor introducirá qué es y para qué se usa esta calculadora de acceso libre. A continuación los alumnos pasarán a realizar las actividades. En el caso de que no terminen en clase, deben de hacerlo en casa y enviarlo a la cuenta de correo del profesor en el plazo de una semana después de esta sesión, puesto que servirán para su calificación.

Materiales y Recursos: Aula de informática con acceso a internet.

- **REPASO EN CASA.**

Para ayudarse a la hora de preparar la evaluación de la próxima sesión les recomendamos a los alumnos que accedan a la página web:
http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/mem2000/algebra/index.html

En esta podrán repasar los contenidos esenciales del tema tratado, realizar más actividades sobre él, realizar una autoevaluación, para ello pulsar en el botón Sistemas de Ecuaciones.
Además se recomienda realizar la autoevaluación que aparece en ella.

SESIÓN 8: PRUEBA ESCRITA

Durante los 55 minutos que dura esta sesión se va a proceder a evaluar a los alumnos con una prueba escrita. Un ejemplo de este tipo de prueba puede verse en el **anexo II.**

H. COMPETENCIAS BÁSICAS QUE DESAROLLAREMOS CON LA UNIDAD DIDÁCTICA:

Con la aplicación de esta unidad didáctica, mejoraremos principalmente en la *competencia matemática*, ya que es dentro de esta materia en la que se va a aplicar.

También trabajaremos la competencia en *comunicación lingüística*, puesto que pretendemos que los alumnos se expresen y comenten los resultados obtenidos.

Otra competencia que trabajaremos es en el *conocimiento y la interacción en el mundo físico*, mediante la modelización de problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo que los rodea.

Con el uso de las herramientas tecnológicas estaremos mejorando en el *tratamiento de la información y competencia digital* y con la realización de actividades por parejas y en grupo clase trabajaremos la competencia social y ciudadana.

Además, en todo el proceso de aprendizaje subyace la competencia de *aprender a aprender*.

Finalmente, con la realización de tareas individuales y trabajos propuestos trabajaremos en la competencia de *autonomía e iniciativa personal*.

5. CONCLUSIÓN

Para poder dar por finalizado este trabajo, haremos una valoración de los aspectos más relevantes de su realización.

En su elaboración, han sido imprescindibles los conocimientos adquiridos en el módulo específico del máster. Así, por ejemplo, la elección de estudiar este tema en concreto se debe a que fue el asignado a nuestro grupo de trabajo en la asignatura de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. Además, ha sido en esta asignatura donde hemos adquirido la base fundamental para la realización del análisis didáctico.

A continuación, comentaremos brevemente cada una de las partes de este análisis.

En primer lugar, durante la realización del análisis de contenido podemos decir que lo que más dificultad nos ha costado comprender ha sido la parte del análisis fenomenológico, puesto que como hemos comentado en varias ocasiones los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para modelizar fenómenos de índole muy distinta, por lo que resultaba un poco ambiguo. Sólo después de comentarlo con el supervisor de este trabajo, J.L. Lupiáñez, conseguimos concretar un contexto fundamental para los sistemas y que englobase a todos los fenómenos que puedan requerir de esta estructura.

En lo que respecta al análisis cognitivo, intentamos que las expectativas que propusimos cubriesen todos los aspectos fundamentales del tema y estuviesen dotadas del enfoque funcional que tienen las matemáticas hoy en día. Si bien, puede parecer que el primer foco no está directamente relacionado con el tema de discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, pero consideramos que son conocimientos esenciales para que el alumno tenga una base adecuada para poder resolver y discutir los sistemas, por lo que nos pareció adecuado incluirlos dentro de las expectativas.

Dentro de este mismo análisis, cuando pensamos en las limitaciones que pueden surgir y que dificulten el proceso de aprendizaje, intentamos concretar bien los errores. Está claro que se trata de un tema algebraico muy importante a nivel de segundo de Bachillerato, y que engloba conocimientos de otros temas, por lo que en su desarrollo pueden surgir otro tipo de errores relacionados con matrices, errores de cálculo de determinantes,… Pero así, la gama de errores era muy amplia, por lo que decidimos fijar nuestra atención en aquellos que estaban directamente relacionados con el tema que se trataba y con los métodos de resolución que se iban a ver a posteriori.

Otro aspecto que ha resultado dificultoso ha sido, dentro del análisis de instrucción, decidir qué competencias se mejoraban con cada una de las tareas propuestas. También ha sido muy difícil decidir qué nivel de complejidad tenía cada una de las competencias matemáticas que se trabajan. Por ejemplo, en "Uso del Lenguaje y Operaciones Formales, Técnicas y Simbólicas" la mayoría de las tareas presentan un nivel de complejidad de reproducción o conexión, pero ¿eso quiere decir que no supone una escritura algebraica realmente "complicada"? No, lo que ocurre es que dado que el tema es esencialmente algebraico y dentro de un nivel bastante avanzado, se supone que los alumnos ya dominan la mayoría de las operaciones algebraicas que son necesarias.

Por otra parte, en la distribución de fases, puede que la inicial resulte algo breve, pero en este tema se incluyen muchos métodos nuevos y estrategias, como el Teorema de Rouché, que no han sido tratados en cursos anteriores y por lo que requieren una explicación y asimilación por parte de los alumnos que necesitará bastante tiempo. Como consecuencia, decidimos que el grueso de las sesiones correspondiese a la fase de desarrollo, quedando una sola para la fase inicial y dos para la fase de cierre.

El método de evaluación que se propone, pensamos que es el más recomendable, puesto que nos permite calificar a los alumnos de formas muy diversas (evaluación continua, observación directa, evaluación final,…) no simplemente mediante la realización de un examen.

Después de la realización de este análisis completo, pasamos a la concreción de la unidad didáctica. Como podemos observar la mayor parte de la información como los objetivos específicos, los contenidos, las estrategias de evaluación,… proceden de los análisis realizados con anterioridad.

Dentro del desarrollo completo de la unidad didáctica, para realizar la descripción de cada una de las sesiones, podemos decir que una vez realizado el análisis de instrucción, y por tanto tener todas las tareas diseñadas y ordenadas, ha sido de gran ayuda, la experiencia recopilada del período de prácticas. Si bien, no hemos llegado a impartir este tema en concreto, si que tomamos de ellas el ejemplo de cómo gestionar un aula e intercalar las explicaciones con las tareas propuestas. Además, hemos intentado que cada cierto tiempo, normalmente no superior a veinte minutos, cambiásemos de actividad para conseguir mantener la atención del alumnado.

También, vamos a comentar la utilización de recursos y herramientas dentro de este trabajo. Una vez cursada la asignatura de Innovación Docente e Investigación Educativa (parte específica) nos dimos cuenta de la importancia de introducir instrumentos distintos a los habituales en el proceso de enseñanza-aprendizaje para favorecer el pensamiento lógico-matemático, la motivación e incluso el auto aprendizaje. Podemos ver que a lo largo de la secuenciación se han propuesto numerosos videos, páginas web, aplicaciones,… que les va a ayudar a los alumnos a estudiar el tema en casa de una manera más dinámica y amena. Además, hacemos hincapié en el manejo de las calculadoras gráficas puesto que pensamos que, una vez conocidos los aspectos fundamentales del tema, les puede servir de gran ayuda y facilitar el trabajo.

Sin embargo, podemos ver, que aunque se recomiendan para casa numerosas actividades interactivas, el trabajo en clase en el medio informático se engloba todo en una misma sesión. Esto se debe a que, después de haber realizado las prácticas en un instituto público, pensamos que es muy difícil aplicar una secuenciación en la que se realicen tareas interactivas en la mayoría de las sesiones, puesto que actualmente, no todas las aulas de bachillerato disponen de ordenadores para todos los alumnos y no todos ellos tienen por qué tener ordenadores para llevar a clase. Por eso, decidimos reducir la utilización de programas informáticos a una única sesión, que se podría realizar en el aula de informática del centro.

Comentar también, que nos hemos decantado por la utilización de "WIRIS" como programa informático por su versatilidad tanto para representar, resolver o estudiar los sistemas de ecuaciones y por el hecho de que es una aplicación gratuita ofrecida, en este caso, por la Junta de Andalucía.

En conclusión, pensamos que la unidad didáctica ha quedado bastante completa, que los contenidos se tratan con el nivel de profundidad adecuado para el curso al que está destinada y que es posible llevarla a cabo con la distribución temporal propuesta, si bien, no lo podemos asegurar puesto que no ha habido la oportunidad de llevarla a la práctica.

6. BIBLIOGRAFIA

Colera, J., García, R., Oliveira, M.J. Matemáticas II. *Editorial Anaya.*

Consejería de Educación (2008). DECRETO 416/2008, de 22 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes al Bachillerato en Andalucía. *BOJA, 149, 8-15*

Díaz Domínguez, E. *La calculadora gráfica como recurso didáctico en la enseñanza de las matemáticas: resolución de sistemas de ecuaciones lineales.* Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Diciembre 2007. Nº 12, pp.157-170.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Luzardo, D., Peña, A.J. *Historia del Álgebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX*. Divulgaciones Matemáticas Vol. 14 Nº 2(2006), pp. 153-170.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE, 266*, 45381-45477.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.

Pérez, P. *Álgebra Lineal. Notas de Clase*. Vol I. Universidad Politécnica de Valencia.

Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Vizmanos, J.R., Anzola, M., "Ciencias de la Naturaleza y de la Salud/Tecnología, Algoritmo Matemáticas 2º", Editorial *SM Bachillerato.*

Wussing, H. (1979). *Lecciones de la historia de las Matemáticas*. Traducido por Ausejo, E., Escorihuela, J.L., Hormigón, M., Kara-Murzá, D., Millán, A. ed Siglo XXI de España editores 1stf ed. Veb Deutscher Verlag der Wissenchaften

PÁGINAS WEBS VISITADAS:

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html

http://www.emis.de/journals/DM/v14-2/art6.pdf

http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Problemas/09-02-p-SisEcuProblemas.html http://docencia.udea.edu.co/GeometriaVectorial/uni1/seccion13.html

http://fcm.ens.uabc.mx/~matematicas/algebralineal/I%20SEL/al_sel_aplicaciones.htm

http://www.conalep.edu.mx/work/sites/Conalep/resources/LocalContent/7031/4/Material_HM.pdf

http://fresno.pntic.mec.es/amaa0011/BH2/04_Sistemas.htm

http://www.aulamatematica.com/BS2/04_Sistemas/Sistemas_index04.htm

http://www.dmae.upct.es/~juan/2bachiller/sel/sel.htm

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/wiris/es/index.html

http://ntic.educacion.es/w3//eos/MaterialesEducativos/mem2000/algebra/index.html

7. ANEXO I: DESCRIPCIÓN ORDENADA DE LAS TAREAS

En este anexo queremos incluir la descripción de todas las tareas que han aparecido en el desarrollo de las distintas sesiones y cuyo diseño y análisis forman una parte fundamental del análisis de instrucción, pero que debido a la extensión de este estudio no lo hemos incluido dentro de dicho análisis.

SESIÓN 1: INTRODUCCIÓN Y CONOCIMIENTOS ELEMENTALES. SISTEMAS EQUIVALENTES

TAREA 1:

Resuelve e interpreta las siguientes situaciones:

- ➡ Una empresa aceitera ha embasado 3000 litros de aceite en 1200 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase ha embasado?
- ➡ Expón una situación similar que se resuelva usando un sistema de ecuaciones.

Descripción de la tarea 1:

Nombre	Introduciendo los sistemas.
Instrucciones	Léase el enunciado detenidamente.
Recursos	Pizarra
Agrupamiento	Grupo clase
Interacción	En grupo clase con el profesor. Los alumnos intentarán resolverlo de los conocimientos que ya tenían de otros cursos y serán guiados por el profesor que va apuntando las notas en la pizarra
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales. Inventar una situación real que se modelice/exprese matemáticamente a partir de unas soluciones o un S.E.L. dado.
Contribución a expectativas	Objetivos 8 y 9
Limitaciones	E_6.
Complejidad	- Plantear y Resolver Problemas (RP):reproducción - Modelizar (M): reproducción - Comunicar(C): reproducción
Finalidad	- Conocer los aprendizajes previos - Motivar y relacionar con la realidad.
Fase	Inicial

TAREA 2: El epitafio de Diofanto:

Diofanto fue un matemático griego que vivió entre el 200 y el 290 d.C.
Su vida se desconoce por completo, sin embargo ha llegado hasta nosotros un texto escrito por él llamado "La Aritmética" en el que se plantean y resuelven 189 problemas de álgebra

que hoy resolveríamos utilizando ecuaciones primero y segundo grado y sistemas de ecuaciones. Por este hecho se le conoce como el padre del álgebra.
Sobre su tumba a manera de epitafio uno de sus alumnos escribió:
"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad"

¿Podrías resolver el problema y encontrar cuántos años vivió Diofanto?

Descripción de la tarea 2:

Nombre	El epitafio de Diofanto
Instrucciones	Léase el enunciado detenidamente.
Recursos	Papel y lápiz
Agrupamiento	Individual
Interacción	Propuesta para casa. Corrección en la siguiente sesión.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales.
Contribución a expectativas	Objetivo 8
Limitaciones	E_6.
Complejidad	Plantear y Resolver Problemas (RP):reproducción Modelizar (M): reproducción Lenguaje Simbólico(LS): reproducción
Finalidad	- Conocer los aprendizajes previos - Motivar y relacionar con la realidad.
Fase	Inicial

TAREA 3:

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$(S)\begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+6y=7 \\ 6x+9y=12 \end{cases}$$

- ➡ Determina un sistema de ecuaciones lineales equivalentes a S.
- ➡ Representa ambos sistemas gráficamente ¿Qué ocurre?
- ➡ Represéntalo usando notación matricial.
- ➡ Nombra cada uno de los elementos que han aparecido en el apartado anterior.

Descripción de la tarea 3:

Nombre	Trabajando con sistemas equivalentes y distintas representaciones.

Instrucciones	Léase detenidamente el enunciado de la tarea.
Recursos	pizarra, papel, lápiz, regla milimetrada
Agrupamiento	Individual
Interacción	El alumno la realizará de forma escrita e individualmente en primera sesión. La corregirá el profesor en la pizarra, que previamente ha ido haciendo un breve seguimiento de las dificultades que se hayan presentado.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico y Gráfico
Meta	Introducir sistemas de ecuaciones lineales equivalentes. Utilizar distintos sistemas de representación
Contribución a expectativas	Objetivos 1, 2, 3, 4 y 11.
Limitaciones	E_1 y E_9.
Complejidad	- Representar (R): reproducción. - Comunicar (C): reproducción
Finalidad	- Exploración: interrogación y cuestionamiento. - Construcción de significados
Fase	Inicial

TAREA 4:

En los siguientes casos estudia los distintas parejas de sistemas:

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{cases} x + y = 12 \\ 2y + 2z = 16 \\ x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}$ y $\begin{cases} 6x + 7y + 8z = 9 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \end{cases}$

¿Son equivalentes? Justifica tu respuesta en cada caso.
Observando el caso b) ¿puedes llegar a alguna conclusión?

Descripción de la tarea 4:

Nombre	Sistemas equivalentes
Instrucciones	Las del enunciado
Recursos	Papel y Lápiz
Agrupamiento	Por parejas
Interacción	El profesor propone la tarea al grupo clase. Los alumnos la realizarán y luego comentarán razonadamente los resultados obtenidos con un compañero. Después se expondrá el resultado en la Pizarra.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Justificar si dos sistemas de ecuaciones son equivalentes.
Contribución a expectativas	Objetivo 1.
Limitaciones	E_9
Complejidad	- Lenguaje Simbólico (LS): reproducción - Comunicar (C): reproducción

	- Representación (R): reproducción
Finalidad	Exploración: interrogación y cuestionamiento Construcción de significados
Fase	Inicial

TAREA 5:

d) Determina a, b para que los siguientes sistemas sean equivalentes.

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - ay = -3 \\ 2b + 3y = -3 \end{cases}$$

e) Transcribe cada uno de los sistemas a notación matricial, nombrando cada uno de los elementos que lo componen.

f) Represéntalos gráficamente. ¿Se cortan en el mismo punto? ¿Por qué?

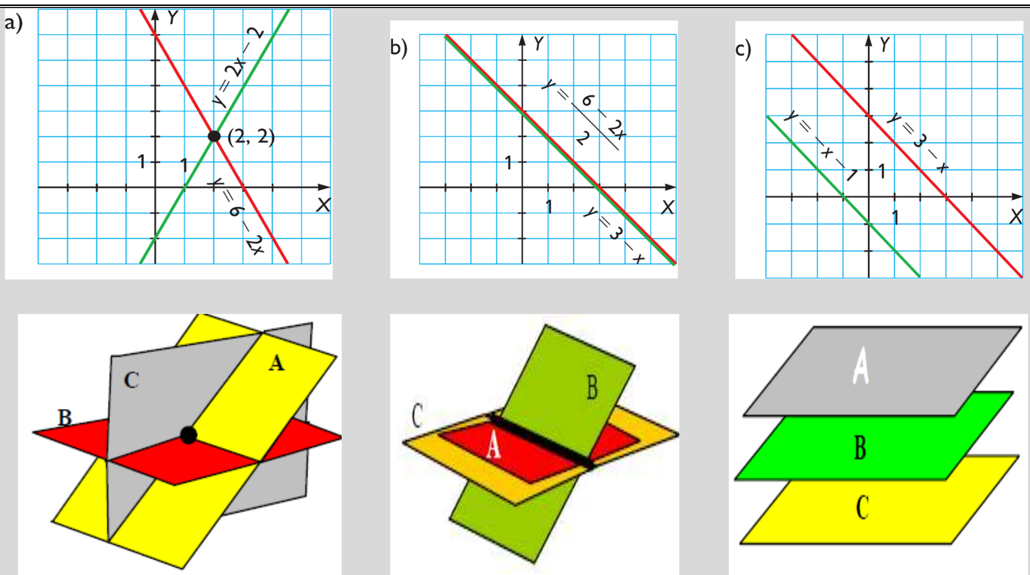
Descripción de la tarea 5:

Nombre	Adivinando coeficientes
Instrucciones	Leer detenidamente el enunciado.
Recursos	Papel, lápiz y regla milimetrada
Agrupamiento	Individual
Interacción	Propuesta para casa. Corrección en la siguiente sesión.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico y Gráfico
Meta	Trabajar con sistemas de ecuaciones equivalentes en diferentes representaciones.
Contribución a expectativas	Objetivos 2, 3, 4 y 11
Limitaciones	E_1
Complejidad	- Lenguaje simbólico (LS): reproducción - Representar (R): reproducción. - Comunicar (C): reproducción - Plantear y Resolver Problemas (RP): reproducción
Finalidad	Exploración: interrogación y cuestionamiento Construcción de significados
Fase	Inicial

SESIÓN 2: DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES I. TEOREMA DE ROUCHÉ.

TAREA 6:

c) ¿Qué tipo de sistema representan las siguientes imágenes? ¿Por qué?



d) Busca un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que represente las tres primeras situaciones.

Descripción de la tarea 6:

Nombre	Representando sistemas.
Instrucciones	Las que se dan en el enunciado
Recursos	Ninguno específico.
Agrupamiento	En grupo clase
Interacción	El profesor pasará una copia con las distintas imágenes o bien dibujaras las situaciones en la pizarra. Entre todos irán determinando que tipo de sistema es en cada caso.
Situación	Educativa.
Sistema de Representación	Gráfico
Meta	Reconocer los distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales según sus soluciones de forma gráfica.
Contribución a expectativas	Objetivo 11.
Limitaciones	E_1
Complejidad	- Representar (R): conexión - Comunicar (C): reproducción - Pensar y Razonar (PR): reproducción
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 7:

Estudiar la compatibilidad y el número de soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$$

Descripción de la tarea 7:

Nombre	Discutiendo sistemas I
Instrucciones	Las del enunciado
Recursos	Papel y lápiz
Agrupamiento	Grupo clase
Interacción	El profesor propone la tarea al grupo clase y va siguiendo su realización contestando a todas las preguntas y dudas que se le planteen.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Discutir un sistema de ecuaciones lineales utilizando el Tª de Rouché
Contribución a expectativas	Objetivo 5
Limitaciones	E_{10}
Complejidad	- Lenguaje Simbólico (LS): reproducción. - Pensar y Razonar (PR): reproducción. - Plantear y Resolver Problemas (RP): reproducción
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 8:

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ 4x + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

Se pide:

- ➡ Añádele una ecuación para que el sistema sea incompatible
- ➡ Añádele una ecuación para que el sistema sea compatible indeterminado
- ➡ Añádele una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Descripción de la tarea 8:

Nombre	Añadir ecuaciones.
Instrucciones	Las del enunciado
Recursos	Papel y lápiz
Agrupamiento	Grupo clase
Interacción	El profesor propone la tarea, deja un par de minutos con cada apartado y luego pide a algunos alumnos que expongan su resultado en la pizarra.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Utilizar el Teorema de Rouché para discutir la compatibilidad de un sistema
Contribución a expectativas	Objetivo 5
Limitaciones	E_{10}
Complejidad	Pensar y Razonar (PR): conexión.
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 9:

El siguiente sistema de ecuaciones lineales, S, es compatible determinado:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

d) Si se prescinde en S de una de las ecuaciones, ¿cómo es el sistema que resulta?

e) ¿Qué ecuación se debe quitar para que el nuevo sistema tenga entre sus soluciones la (0, 0, 0)?

f) Si se añade una nueva ecuación a S, el sistema resultante puede ser:

IV. ¿Compatible determinado?

V. ¿Compatible indeterminado?

VI. ¿Incompatible?

Justifica tu respuesta en cada caso, y pon un ejemplo cuando sea posible.

Descripción de la tarea 9:

Nombre	Trabajando con un sistema
Instrucciones	Las que se dan en el enunciado
Recursos	Papel y lápiz
Agrupamiento	Individual
Interacción	Propuesta para casa. Corrección en la próxima sesión.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Trabajar el Teorema de Rouché en un sistema dado para estudiar su compatibilidad en las distintas situaciones propuestas.
Contribución a expectativas	Objetivo 5
Limitaciones	E_{10}
Complejidad	- Pensar y Razonar(PR): conexión - Argumentar y Justificar (AJ): conexión
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 10:

Sea un sistema homogéneo AX=0. De las siguientes afirmaciones, justificar las que sean ciertas, o poner algún contraejemplo de las que sean falsas.

- Un sistema homogéneo siempre es compatible determinado.
- Si x_1 y x_2 son soluciones de AX=0, una combinación lineal de estas también es solución.

Si consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ estudia la compatibilidad del sistema AX=0.

Descripción de la tarea 10:

Nombre	Sistemas homogéneos
Instrucciones	Las que se dan en el enunciado

Recursos	Papel y lápiz
Agrupamiento	Individual
Interacción	Propuesta para casa. Corrección en la próxima sesión.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Trabajar con sistemas de ecuaciones homogéneos y estudiar su compatibilidad. Estudiar las soluciones de un sistema de ecuaciones.
Contribución a expectativas	Objetivo 5
Limitaciones	E_{10}
Complejidad	-Pensar y Razonar (PR): conexión -Argumentar y justificar (AJ): conexión
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

SESIÓN 3: DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES II.

TAREA 11:

Considera los siguientes sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=-2 \\ -\alpha x+3y+z=-7 \\ x+2y+(\alpha+2)z=-5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+\alpha y-z=1 \\ 2x+y-\alpha z=2 \\ x-y-z=\alpha-1 \end{cases}$$

Clasifica los sistemas según los valores del parámetro α.
Justifica tus resultados y compáralos con los de tu compañero.

Descripción de la tarea 11:

Nombre	Discutiendo sistemas II
Instrucciones	Las del enunciado
Recursos	Papel y lápiz
Agrupamiento	Individual, grupos de dos, grupo clase
Interacción	Los alumnos realizarán la tarea individualmente. Luego se agruparán por parejas para comentar los resultados obtenidos. Finalmente, se expondrá al grupo clase los resultados finales y el profesor solventará las dudas en el caso de haberlas.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Discutir un sistema de ecuaciones lineales con parámetros utilizando el Tª de Rouché
Contribución a expectativas	Objetivo 5 y 6
Limitaciones	E_5 y E_{10}
Complejidad	- Lenguaje Simbólico (LS): conexión. - Pensar y Razonar (PR): conexión. - Argumentar y Justificar (AJ): reproducción.
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 12:

Dado el sistema:

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$$

Hallar m para que:
- ➡ No tenga solución
- ➡ Tenga infinitas soluciones
- ➡ Tenga solución única.
- ➡ Tenga una solución en la que x=3.

Descripción de la tarea 12:

Nombre	Sistemas con un parámetro desconocido
Instrucciones	Las que se dan en el enunciado
Recursos	Lápiz y papel
Agrupamiento	Individual
Interacción	El profesor propone la tarea al grupo clase. Los alumnos intentarán realizarla individualmente. Una vez acabada, saldrá a la pizarra el alumno que el profesor considere oportuno.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Discutir sistemas de ecuaciones lineales en los que aparece un parámetro desconocido
Contribución a expectativas	Objetivos 5 y 6
Limitaciones	E_5 y E_{10}
Complejidad	- Lenguaje Simbólico (LS): reproducción. - Pensar y Razonar (PR): conexión. - Plantear y Resolver Problemas (RP): reproducción
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 13:

Una tienda ha vendido 600 ejemplares de un video-juego por un total de 6384€. El precio del original era de 2€, pero también ha vendido copias defectuosas con un descuento del 30% y copias "pirata" a un precio que todavía no se ha podido determinar (Supongamos que son "k"€/ejemplar). Sabiendo que el número de copias defectuosas vendidas fue la mitad del original.
- ➡ Plantea un sistema de ecuaciones (en función de "k") para averiguar la cantidad vendida de cada tipo de copia (No es necesario resolver el sistema)
- ➡ Estudia la compatibilidad del sistema, en función de "k". ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido las copias "pirata"?

Descripción de la tarea 13:

Nombre	Discutiendo situaciones reales I
Instrucciones	Plantea el sistema y estudia su compatibilidad en función del parámetro m
Recursos	- Lápiz y papel - Calculadora
Agrupamiento	Individual
Interacción	El profesor dictará la tarea al grupo clase. Irá supervisando su resolución. Después lo resolverá un alumno voluntario y el resto lo corregirá.
Situación	Educativa, Personal y Pública
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales. Discutir la compatibilidad de un sistema de ecuaciones con parámetros.
Contribución a expectativas	Objetivos 5, 6 y 8
Limitaciones	E_2, E_3, E_4, E_5 y E_{10}
Complejidad	- Pensar y Razonar (AJ): Reflexión - Lenguaje Simbólico (LS): Conexión - Modelizar (M): Conexión - Plantear y Resolver Problemas (RP): Conexión
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 14:

PROBLEMA 1:
Juan adquirió en el mercado ciertas cantidades de mandarinas, cerezas y kiwis. El precio de las mandarinas es de 0,78 euros/kg, el de cerezas es de 1,02 euros/kg, pero el de los kiwis no los recuerda (supongamos que son m euros/kg). El importe total de la compra fue de 5,71 euros y el peso total de la misma fue de 7 kg. Además, Juan compró 1 kg más de mandarinas que de cerezas.

- Plantea un sistema de ecuaciones (en función de “m”) para determinar la cantidad comprada de cada producto.
- Estudia la compatibilidad del sistema, en función de “m”. ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber comprado los kiwis?

PROBLEMA 2:
Un agente inmobiliario puede realizar 3 tipos de operaciones: venta de un piso nuevo, venta de un piso usado y alquiler. Por la venta de cada piso nuevo recibe una prima de 720 euros. Si la operación es la venta de un piso usado recibe 360 euros. Se desconoce la prima cuando la operación es un alquiler.
Este mes el número total de operaciones fue 5, la prima total por la venta de pisos fue superior en 1200 euros a la obtenida por alquileres y la prima total por venta de pisos nuevos fue el tripe que por alquileres.

- Plantea un sistema de ecuaciones (sin resolverlo) para obtener el número de operaciones realizadas (en función del valor desconocido de la prima de alquiler)
- Indica una prima a la que es imposible que se hayan pagado los alquileres.
- Indica tres primas a las que es posible que se hayan pagado los alquileres.

Descripción de la tarea 14:

Nombre	Discutiendo situaciones reales
Instrucciones	Plantea el sistema y estudia su compatibilidad en función del parámetro m
Recursos	- Lápiz y papel - Calculadora
Agrupamiento	- Individual
Interacción	Propuesta para casa. Corrección en la próxima sesión.
Situación	Educativa, Personal y Pública
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales. Discutir la compatibilidad de un sistema de ecuaciones con parámetros.
Contribución a expectativas	Objetivos 5, 6 y 8
Limitaciones	E_2, E_3, E_4, E_5 y E_{10}.
Complejidad	- Pensar y Razonar (AJ): Reflexión. - Lenguaje Simbólico (LS): Conexión. - Modelizar (M): Conexión - Plantear y Resolver Problemas (RP): Conexión
Finalidad	Ejercitación
Fase	Desarrollo

SESIÓN 4: MÉTODO DE GAUSS

TAREA 15:

4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el Método de Gauss,

(b) $\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y=-3 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-3z=-2 \\ 3x-3z=1 \end{cases}$

Identifica el número de parámetros de la solución si los hay.

5. Busca un posible enunciado relacionado con la vida real cuyo planteamiento matemático venga dado por la expresión simbólica de (a).
6. Representa gráficamente los sistemas anteriores. ¿Qué ocurre en cada caso?

Nota: la resolución de (a) y (b) se puede ver también en los siguientes videos resp.:
http://www.youtube.com/watch?gl=ES&hl=es&v=ETDx4PgxUvo
http://www.youtube.com/watch?v=SrzqI9x_LZQ&feature=fvwrel

Descripción de la tarea 15:

Nombre	Método de Gauss
Instrucciones	Las que se dan en el enunciado.
Recursos	Papel y lápiz Regla milimetrada

Agrupamiento	Individual y en grupo clase.
Interacción	El profesor propone dos alumnos para que resuelvan el ejercicio. Se admiten sugerencias del resto de los compañeros. Para el segundo apartado, se pide a otro alumno que diga su enunciado y se permite que el resto de los compañeros sean quienes digan si es válido o no. Después dos nuevos compañeros realizarán la parte 3 del ejercicio.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico y Gráfico
Meta	Saber aplicar correctamente el método de Gauss, buscar enunciados verbales para un sistema en notación ordinaria y representar gráficamente sistemas de ecuaciones lineales para interpretar las soluciones.
Contribución a expectativas	Objetivos 7, 9, 10 y 11.
Limitaciones	E_1 y E_2
Complejidad	- Lenguaje Simbólico (LS): reproducción. - Comunicar (C): reproducción. - Representar (R): conexión. - Plantear y Resolver Problemas (RP): reproducción
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 16:

Una empresa manda sus pedidos por correo ordinario o bien utilizando un servicio de mensajeros. Cada paquete enviado por correo ordinario supone un coste a la empresa de 20 ptas., y el coste de cada paquete enviado por mensajero es una cantidad A que establece el servicio de mensajeros cada mes. Cierto mes el número total de paquetes enviados fue de 1200 y el coste total de los mismos fue de 33000 ptas.

d. Plantea un sistema de ecuaciones para determinar el número de paquetes enviados por correo ordinario y el número de los enviados por mensajero.
e. Estudia su compatibilidad aplicando el Teorema de Rouché. Si se sabe que el coste por mensajero es superior al coste por correo, ¿el sistema tiene solución única?
f. Resuelve el sistema si A=35 ptas, usando el Método de Gauss.

Descripción de la tarea 16:

Nombre	Resolviendo problemas
Instrucciones	Las que se dan en el enunciado.
Recursos	Papel y lápiz Calculadora.
Agrupamiento	Individual
Interacción	El profesor plantea la tarea y deja tiempo para que la resuelvan y le consulten las dudas que les puedan ir surgiendo. Intentará hacer un seguimiento de los errores más generalizados en la ejecución de esta tarea.
Situación	Educativa, Pública.
Sistema de Representación	Simbólico

Meta	Expresar simbólicamente enunciados sobre situaciones reales e interpretar las soluciones de los sistemas correspondientes. Discutir y resolver el sistema planteado usando el Método de Gauss.
Contribución a expectativas	Objetivos 5, 6, 8 y 10.
Limitaciones	E_2, E_4, E_5, E_6 y E_{10}.
Complejidad	- Lenguaje Simbólico (LS): conexión. - Plantear y Resolver Problemas (RP): reflexión. - Modelizar (M): conexión. - Pensar y Razonar (PR): reflexión
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 17:

- ➡ Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de Gauss. En el caso de que se trate de un Sistema Compatible Indeterminado indica el número de parámetros.
- ➡ ¿Qué representa geométricamente cada uno de los sistemas?

(b) $\begin{cases} x+y+3z=10 \\ 2x-y+z=6 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} -x-2y+3z=0 \\ 2x+3y+2z=4 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 2x-y+3z=6 \\ 4x-2y+6z=12 \\ 2x-y+3z=3 \end{cases}$

Descripción de la tarea 17:

Nombre	Método de Gauss
Instrucciones	Las que se dan en el enunciado
Recursos	Papel y lápiz
Agrupamiento	Individual.
Interacción	Propuesta para casa. Corrección en la próxima sesión.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Utilizar el método de Gauss para resolver sistemas y relacionarlos con su representación geométrica
Contribución a expectativas	Objetivos 7, 10 y 11.
Limitaciones	E_1 y E_2
Complejidad	- Comunicar (C): conexión. - Representar (R): conexión. - Plantear y Resolver Problemas (RP): reproducción
Finalidad	Ejercitación
Fase	Desarrollo

SESIÓN 5: MÉTODO DE CRAMER.

TAREA 18:

- Discute los siguientes sistemas de ecuaciones para demostrar que son sistemas compatibles.

(b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 13 \\ 2x + 3y + z = 10 \\ 3x + y - 2z = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 5 \\ x + 2y + z = 2 \\ 3x + 2y = -5 \end{cases}$

- Resuélvelos aplicando el método de Cramer.
- Intenta representarlos gráficamente. ¿Qué ocurre en los dos casos?

Descripción de la tarea 18:

Nombre	Método de Cramer
Instrucciones	Las que se dan en el enunciado.
Recursos	Papel y lápiz Regla milimetrada
Agrupamiento	Individual
Interacción	El profesor propone el ejercicio y deja tiempo para que les consulten las dudas que les puedan ir surgiendo. Intentará hacer un seguimiento de los errores más generalizados en la ejecución de esta tarea y solventará todas las dudas.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Resolver sistemas compatibles determinados aplicando el método de Cramer.
Contribución a expectativas	Objetivos 5, 10 y 11.
Limitaciones	E_1, E_3 y E_{10}.
Complejidad	- Lenguaje Simbólico (LS): conexión. - Comunicar (C): reproducción - Representar (R): conexión - Plantear y Resolver Problemas (RP): reproducción
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 19:

La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, entre los tres sumarán 150 años.

- Plantea el sistema de ecuaciones correspondiente
- ¿Cómo es dicho sistema?
- ¿Qué edad tenía el padre cuando nacieron sus hijos? (Aplica Método de Cramer)

Descripción de la tarea 19:

Nombre	Adivinando edades
Instrucciones	Lea cuidadosamente el enunciado del problema. Indiqué explícitamente cuál es el resultado obtenido.
Recursos	Papel y lápiz Calculadora
Agrupamiento	Individual, en grupo
Interacción	Los alumnos hacen individualmente el ejercicio, teniendo en cuenta que el profesor les puede solventar todas las dudas que surjan. Después se exponen los resultados obtenidos.
Situación	Educativa, Personal
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Expresar simbólicamente enunciados relacionados con la vida real e interpretar los resultados obtenidos.
Contribución a expectativas	Objetivos 5, 8 y 10.
Limitaciones	E_3, E_4, E_6 y E_{10}.
Complejidad	- Pensar y Razonar (PR): conexión - Modelizar (M): conexión - Plantear y Resolver Problemas (RP): conexión
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 20:

USANDO LA CALCULADOR GRÁFICA: MÉTODO DE CRAMER Comprueba que los resultados obtenidos en las tareas 18 y 19 son correctos.

Descripción de la tarea 20:

Nombre	La calculadora gráfica
Instrucciones	Lea las introducciones dadas o esté atento a la explicación del profesor para saber cómo se usa esta herramienta para aplicar el Método de Cramer.
Recursos	Calculadora gráfica
Agrupamiento	Individual, en grupo
Interacción	Los alumnos individualmente (o en grupo en el caso de no contar con el material necesario) van a comprobar los resultados obtenidos en las dos tareas anteriores mediante la utilización de la calculadora gráfica. El profesor servirá de guía para un correcto uso.
Situación	Educativa.
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Utilizar las Tecnologías de la Información y la comunicación en la resolución de sistemas de ecuaciones de Cramer.
Contribución a expectativas	Objetivos 10 y 12.
Limitaciones	E_7
Complejidad	- Herramientas Tecnológicas (HT): reproducción
Finalidad	- Motivar - Aplicación

Fase	Desarrollo

TAREA 21:

PROBLEMA 1:
Un almacén distribuye cierto producto que fabrican 3 marcas distintas: A, B y C. La marca A lo envasa en cajas de 250 gramos y su precio es de 100 euros, la marca B lo envasa en cajas de 500 gramos a un precio de 180 euros y la marca C lo hace en cajas de 1 kilogramo a un precio de 330 euros.
El almacén vende a un cliente 2.5 kilogramos de este producto por un importe de 890 euros. Sabiendo que el lote iba envasado en 5 cajas, plantea un sistema para determinar cuántas cajas de cada tipo se han comprado y resuelve el problema.

PROBLEMA 2:
Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda una partida entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno de ellos posea en ese momento. Cada uno perdió una partida y al final cada uno tenía 24 euros. ¿Cuánto dinero tenía cada jugador al comenzar el juego?

Descripción de la tarea 21:

Nombre	Resolviendo Problemas
Instrucciones	Lea atentamente los enunciados de los problemas. Indiqué explícitamente cuál es el resultado obtenido.
Recursos	Papel y lápiz Calculadora
Agrupamiento	Individual
Interacción	Propuesta para casa. Corrección en la próxima sesión
Situación	Educativa o personal
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Expresar simbólicamente enunciados relacionados con la vida real, resolver los sistemas e interpretar los resultados obtenidos.
Contribución a expectativas	Objetivos 8 y 10.
Limitaciones	E_2, E_3, E_4 y E_6.
Complejidad	- Pensar y Razonar (PR): reflexión - Modelizar (M): Reflexión - Plantear y Resolver Problemas (RP): reflexión
Finalidad	Ejercitación
Fase	Desarrollo

SESIÓN 6: RESOLUCIÓN USANDO LA MATRIZ INVERSA

TAREA 22:

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+y-z=2 \end{cases}$$

- Transcríbelo a notación matricial.
- Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes.
- Resuelve el sistema.

Descripción de la tarea 22:

Nombre	Matriz Inversa
Instrucciones	Las que se dan en el enunciado
Recursos	Papel y lápiz
Agrupamiento	Individual
Interacción	El profesor propone este ejercicio y los alumnos lo realizan individualmente en su libreta. Luego, algunos exponen sus resultados.
Situación	Educativa
Sistema de Representación	Simbólico y gráfico.
Meta	Resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando la matriz inversa e interpretar gráficamente los resultados obtenidos.
Contribución a expectativas	Objetivos 4 y 10.
Limitaciones	E_8.
Complejidad	- Lenguaje Simbólico (LS): reproducción - Representación (R): conexión
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 23:

PROBLEMA 1
En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.
b) Transcribe el sistema a notación matricial.
c) Resuelve, por la matriz inversa, el sistema planteado en el apartado anterior.

PROBLEMA 2
Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple del número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de los hombres. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión? Resuélvelo usando la matriz inversa.

Descripción de la tarea 23:

Nombre	Helados y excursiones.
Instrucciones	Lea atentamente el enunciado de la tarea y dejé explícito la solución de cada apartado
Recursos	Papel y lápiz Calculadora
Agrupamiento	Individual
Interacción	El profesor propone la tarea y deja unos minutos para que los estudiantes piensen en ella y la resuelvan. Después la corregirán entre todo el grupo clase, y el profesor dará el visto bueno.
Situación	Educativa o personal
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Expresar simbólicamente enunciados relacionados con la vida real, resolver los sistemas utilizando la matriz inversa e interpretar los resultados obtenidos.
Contribución a expectativas	Objetivos 4, 8 y 10.
Limitaciones	E_4, E_6 y E_8
Complejidad	- Pensar y Razonar (PR): conexión - Modelizar (M): conexión - Plantear y Resolver Problemas (RP): conexión
Finalidad	Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 24:

USANDO LA CALCULADOR GRÁFICA: MATRIZ INVERSA.
Comprueba que los resultados obtenidos en las tareas 22 y 23 son correctos.

Además, resuelve los sistemas siguientes:

(b) $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x + y - z = 15 \\ 5x - y + 5z = 16 \\ x + 4y + z = 20 \end{cases}$

Descripción de la tarea 24:

Nombre	La calculadora gráfica
Instrucciones	Lea las introducciones dadas o esté atento a la explicación del profesor para saber cómo se usa esta herramienta.
Recursos	Calculadora gráfica
Agrupamiento	Individual, en grupo
Interacción	Los alumnos individualmente (o en grupo en el caso de no contar con el material necesario) van a comprobar los resultados obtenidos en las dos tareas anteriores mediante la utilización de la calculadora gráfica. El profesor servirá de guía para un correcto uso.
Situación	Educativa.
Sistema de Representación	Simbólico

Meta	Utilizar las Tecnologías de la Información y la comunicación en la resolución de sistemas de ecuaciones de Cramer.
Contribución a expectativas	Objetivos 10 y 12.
Limitaciones	E_7
Complejidad	- Herramientas Tecnológicas (HT): reproducción
Finalidad	- Motivar - Aplicación
Fase	Desarrollo

TAREA 25:

I. En el siguiente proceso de resolución del sistema por el Método de Gauss comprueba si hay algún error. En caso afirmativo, localízalo y justifica por qué es error.

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y-z=5 \\ x+2y+z=-3 \\ 2x-4y-z=8 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1^a) \\ (2^a)-2\cdot(1^a) \\ (3^a)-(1^a) \\ (4^a)-2\cdot(1^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)-3\cdot(2^a) \\ (4^a)-2\cdot(2^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{(1^a) \\ (2^a) \\ (3^a) \\ (4^a)+(3^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1^a) \\ (2^a) \\ (3^a)+(2^a) \\ (4^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ y-2z=5 \\ 9z=-18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=-2 \end{cases}$$

II.

➡ Verifica que la Regla de Cramer no se puede aplicar en la resolución del siguiente sistema de ecuaciones lineales, ¿por qué?:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 6 \\ 6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$$

➡ Resuelve el sistema

III. Resuelve los siguientes sistemas, en el caso que se pueda, por los métodos de Gauss, Cramer y matriz inversa.

$$\begin{cases} 6x + 5y = 27 \\ 8x - 2y = 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 1 \\ \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - ay - z = 0 \\ (2 - 2a)x + 5y + z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$$

Explica por qué has elegido un determinado método de resolución.

IV. Pon un ejemplo, cuando sea posible, de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que sea:
a) compatible determinado
b) compatible indeterminado
c) incompatible
Justifica en cada caso tus respuestas.

V. Determina a, b y c para que los siguientes sistemas sean equivalentes.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + 4z = 6 \\ 3x + 3z + by = 27 \\ 2x + 2y - cz = 15 \end{cases}$$

VI. -¿Es posible resolver el siguiente sistema por la matriz inversa? ¿Por qué?
-Resuélvelo.
-Transcríbelo a notación matricial
-Halla otro sistema de ecuaciones equivalente.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x = 1 \end{cases}$$

VII. Cierto supermercado hace le mismo pedido a tres proveedores diferentes A, B y C. Dicho pedido contiene ciertas cantidades de arroz, lentejas y garbanzos (expresadas en t). Cada uno de los proveedores marca para los distintos productos los precios recogidos en la tabla siguiente (expresadas en miles de euros/t).

	ARROZ	LENTEJAS	GARBANZOS
PROVEEDOR A	1.5	3	4
PROVEEDOR B	2	3	3.5
PROVEEDOR C	2	3	4

El pedido que recibe del proveedor A le cuesta 1600€, el que recibe del B le cuesta 500€ más que el anterior, y el que recibe del C le cuesta 500 euros más que este último.

- Formular el problema y determinar la composición del pedido. Este sistema, ¿de qué tipo es?

VIII. En la combustión del metano (CH_4) con oxígeno (O_2) se obtiene como productos, dióxido de carbono (CO_2) y agua (H_2O). La reacción es la siguiente

$$aCH_4 + bO_2 \rightarrow cCO_2 + dH_2O$$

¿Podrías ajustarla? Comprueba la solución e indica en cada caso el número de moléculas de cada compuesto que intervienen en la reacción.

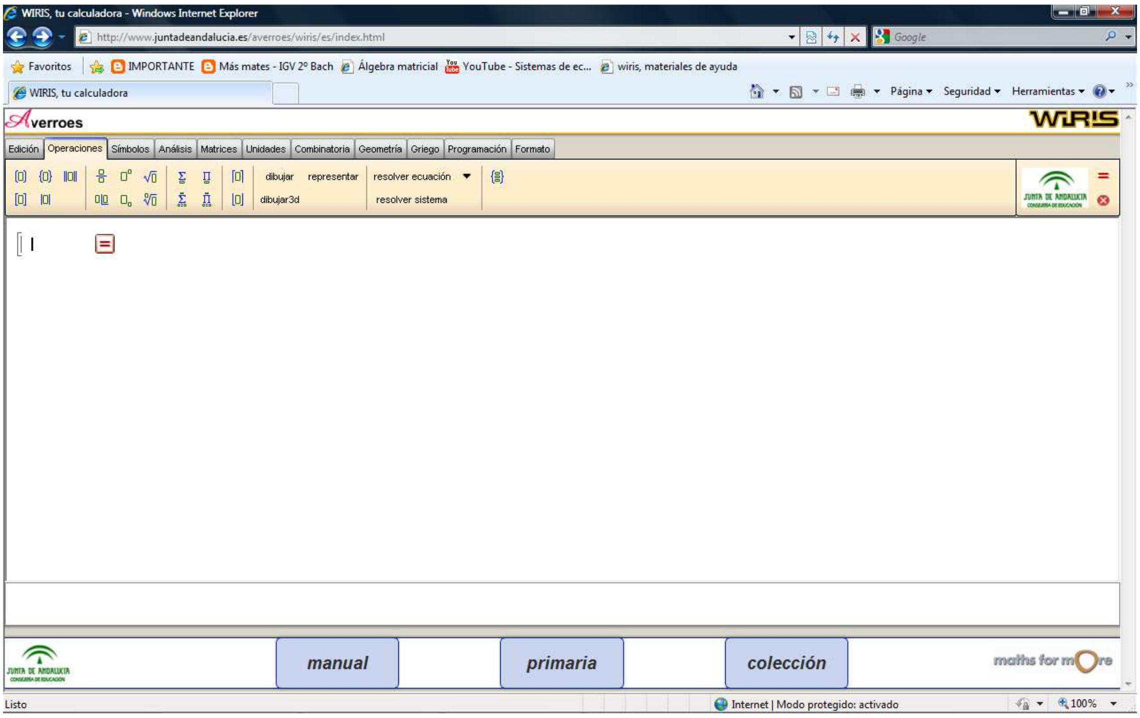
Descripción de la tarea 25:

Nombre	Ficha para repasar algunos aspectos
Instrucciones	Las que se dan en cada uno de los ejercicios que componen esta ficha.
Recursos	Papel y lápiz
Agrupamiento	Individual
Interacción	Propuesta por el profesor para corregir en la siguiente sesión.
Situación	Educativa, pública y científica.
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Repasar algunos de los contenidos dados que aparecen en el tema.
Contribución a expectativas	Objetivos 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10

Limitaciones	E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_8 y E_{10}
Complejidad	Argumentar y Justificar (AJ): conexión Pensar y Razonar (PR): reflexión Modelizar(M): reflexión Plantear y Resolver Problemas (RP): reflexión Lenguaje Simbólico(LS): conexión
Finalidad	Ejercitación Síntesis
Fase	Cierre

SESIÓN 7: RECURSOS INFORMÁTICOS

TAREA 26:



Accederemos a la página web de la Junta de Andalucía desde donde se puede usar de forma gratuita.
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/wiris/es/index.html

- Pulsa el botón “colección” que aparece en la parte inferior de la ventana o escribe la siguiente dirección: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/collection/. Elige la opción Matemáticas 2 y realiza los cuatro ejercicios que aparecerán dentro del bloque Sistemas de Ecuaciones.
- Busca sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas distintos de forma que al representarlos individualmente, obtengas todas las posiciones posibles de tres planos en el espacio. ¿Cuántas posibilidades existen?
- Guarda los resultados y envíalos a la cuenta de correo del profesor para su posterior calificación.
- Los ejercicios deberán de ser recibidos en el plazo máximo de una semana después de esta sesión.

Descripción de la tarea 26:

Nombre	Usando Wiris: cálculo matemático online de acceso libre
Instrucciones	Las que aparecen en el enunciado.
Recursos	Ordenador con acceso a internet
Agrupamiento	Individual, o en el caso de que no haya suficientes ordenadores para todos los alumnos nos colocaremos por parejas.
Interacción	El profesor introducirá qué es y para qué se usa esta calculadora de acceso libre. A continuación los alumnos pasarán a realizar las actividades.
Situación	Educativa.
Sistema de Representación	Simbólico
Meta	Emplear los recursos TIC's.
Contribución a expectativas	Objetivo 12.
Limitaciones	E_7.
Complejidad	Uso de Herramientas Tecnológicas (HT): reproducción.
Finalidad	Síntesis.
Fase	Cierre

8. ANEXO II: PROPUESTA DE PRUEBA ESCRITA

En este apartado presentamos una propuesta de la prueba escrita que se les pondría a los alumnos en la sesión octava. Su análisis aparece dentro del análisis de instrucción, puesto que las tareas de evaluación son una parte imprescindible de dicho análisis.

EXAMEN: DISCUSIÓN Y RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES
1.- [1 punto] Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2\mathrm{y} - \mathrm{z} = 3(1-\mathrm{x}) \\ 2\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + 10 = 4\mathrm{z} \\ \mathrm{x} - \mathrm{y} + 3\mathrm{z} = \mathrm{y} + 1 \end{cases}$ - Transcríbelo a notación matricial y especifica cada uno de los elementos que lo componen. [0.25 puntos] - Resuélvelo usando la matriz inversa [0.75 puntos] 2.- [2 puntos] Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales: (S) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$ - ¿Es equivalente a alguno de los sistemas siguientes? ¿Por qué? [0.75 puntos] (1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 2z = -2 \\ 3x + 4y + 3z = 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ y - 4z = -4 \\ y + z = 1 \end{cases}$ - ¿Es posible eliminar alguna ecuación y obtener un sistema equivalente a (S)? ¿Por qué? [0.5 puntos]. - Resuelve el sistema S utilizando el Método de Cramer si es posible. [0.75 puntos] 3.- [2 puntos] - Dado el siguiente sistema de ecuaciones, resuélvelo por el método de Gauss. En el caso de tener infinitas soluciones, indica el número de parámetros que tiene la solución y da concretamente 2 posibles soluciones. [0.75 puntos] $\begin{cases} -x + 2y - 3z = -2 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ x + 5y - z = -3 \end{cases}$ - ¿Qué nombre recibe este tipo de sistemas según el número de soluciones? [0.25 puntos] - A la vista de los resultados, representa gráficamente e interpreta geométricamente el sistema. [0.5 puntos] - ¿Podrías aplicar el método de Cramer? ¿Y el de la matriz inversa? Razona tu respuesta y justifícala. [0.5 puntos] 4.- [2.5 puntos] I. Enuncia el Teorema de Rouché y todas las observaciones derivadas de éste que conozcas. [0.5 puntos]

II. Pon un ejemplo de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que sea incompatible y donde el rango de la matriz ampliada sea 2. [0.5 puntos]

III. Pon un ejemplo de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que sea compatible determinado. [0.5 puntos]

IV. Busca un posible enunciado relacionado con la vida real cuyo planteamiento matemático venga dado por la expresión simbólica de (III). [0.5 puntos]

V. Pon un ejemplo de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas y que tenga como solución la terna: (1,-2,3). [0.5 puntos]

5.- [2.5 puntos]

Una editorial dispone de tres textos diferentes para Matemáticas II. El texto A se vende a 9 € el ejemplar; el texto B a 11 €, pero el precio de C no está reflejado en el ordenador central y no se recuerda (supongamos que son “k” €).

Se revisan las facturas y se observa que en una de ellas la editorial ingresó, en concepto de ventas de estos libros, 8400 €; sabiendo que el libro A se vendió tres veces más que el libro C, y que el B se vendió tanto como el A y el C juntos:

- Plantea un sistema de ecuaciones (en función de “m”) que te permita averiguar cuántos se vendieron de cada tipo de libro. [0.75 puntos]
- Estudia la compatibilidad del sistema, en función de “m”. [1 punto]
- ¿Puedes dar algún precio al que sea imposible haber vendido cada ejemplar del libro C? [0.75 puntos]