UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Trabajo fin de máster

CONOCIMIENTO PROFESIONAL DE UN GRUPO DE PROFESORES SOBRE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

Ana Isabel Márquez García

Granada, 2013

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

CONOCIMIENTO PROFESIONAL DE UN GRUPO DE PROFESORES SOBRE LA DIVISIÓN DE FRACCIONES

Trabajo de fin de máster realizado bajo la dirección del Dr. Pablo Flores Martínez y la Dra. Aurora Inés del Río Cabeza, ambos del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Ana Isabel Márquez García para optar al máster de Didáctica de la Matemática impartido por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Ana Isabel Márquez García

Los directores:

Dr. D. Pablo Flores Martínez   Dra. Dª. Aurora Inés del Río Cabeza

Granada, 2013

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento especialmente a los directores de este trabajo, D. Pablo Flores Martínez y Dª Aurora del Río Cabeza, por su paciencia, dedicación y consejos bridados a este trabajo.

También al resto de profesores y profesoras del Departamento de Didáctica de la Matemática que nos han brindado su conocimiento, experiencia y apoyo durante el desarrollo del máster de Didáctica de la Matemática.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

La Didáctica de la Matemática se ocupa de indagar metódica y sistemáticamente sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sostener los planes para la cualificación profesional de los educadores matemáticos y proporcionar fundamentación teórica y empírica (Rico, 2012). En otras palabras, la investigación en Educación Matemática se rige por el objetivo de mejorar la calidad de la educación, es decir, de los procesos de enseñanza-aprendizaje en los distintos niveles educativos.

El proceso de enseñanza-aprendizaje puede considerarse como un binomio indivisible que puede ser investigado desde diversas perspectivas. Si nos centramos en el aprendizaje del estudiante, nos podemos situar en estudiar diferentes metodologías de aprendizaje, materiales y recursos, dificultades y errores, etc. Sin embargo, este aprendizaje va ligado a la enseñanza por parte de profesor, ya que éste es fundamental en el proceso de aprendizaje del estudiante.

Parece lógico pensar, que un profesor debe conocer el contenido que va a enseñar a sus alumnos. Pero, ¿le basta a un profesor con ese conocimiento? Las investigaciones dentro de la línea de "Conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas" han mostrado que no es tan simple. Un profesor debe de tener un conocimiento profesional especializado para una enseñanza de las matemáticas con calidad. El grupo de investigación de la Universidad de Michigan dirigido por Deborah Ball, ha desarrollado un modelo para describir este tipo de conocimiento, basándose en las ideas de Shulman. Consideran que hay dos grandes dominios de conocimiento: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Didáctico del Contenido, cada uno de los cuales se subdivide en tres subdominios, incorporando conocimiento curricular, de los estudiantes, conocimiento común de los contenidos, etc. Por tanto, un profesor debe de poseer diferentes tipos de conocimiento para desarrollar su labor docente con calidad.

Partiendo de considerar al profesor de matemáticas como un profesional que posee un conocimiento especializado para la enseñanza de la materia, resulta interesante comprender qué tipo de conocimiento tienen los profesores de Educación Secundaria sobre algún contenido matemático.

Por otro lado, revisando el Currículo español de Matemáticas, observamos que un contenido que se desarrolla durante el tercer ciclo de primaria y toda la etapa de secundaria, son las fracciones y sus operaciones. La importancia de este contenido dentro de la educación básica no se limita a representar situaciones o resolver problemas mediante los números racionales y sus operaciones, sino que tiene una implicación directa con las matemáticas superiores, por ejemplo, al resolver ecuaciones racionales o trabajar con fracciones algebraicas. Es por esto que no basta que el estudiante conozca los números racionales y sus operaciones, sino que los aprenda con significado, de modo que puedan serles útiles en otros contextos más avanzados.

Dentro de las fracciones y sus operaciones, probablemente el algoritmo de la división sea uno de los más sencillos de aplicar y recordar por los estudiantes. Sin embargo, su aplicación a la resolución de problemas o a otras situaciones esencialmente distintas a las de aprendizaje no es tan simple, ya que se trata de un aprendizaje mecánico que resulta insuficiente cuando se aplica en contextos diferentes. Considerando que uno de los ejes vertebrales del Currículo es la resolución de problemas, es evidente que este contenido debe ser enseñado con significado, de forma que permita a los estudiantes enfrentarse a diversas situaciones y poder solucionarlas.

A partir de estos hechos y como muestran diferentes investigaciones en otros países (Ma, 1999; Flores, 2002; Flores, Turner & Bachea, 2005; Lo & Luo, 2012; Nillas, 2003; Perlwitz, 2004, 2005; Peck & Wood, 2008; Gregg, & Gregg, 2007), es necesario que los profesores posean un conocimiento especializado para la enseñanza de la división de fracciones.

Durante el curso 2008/2009, se desarrolló un curso de formación a distancia para profesores de matemáticas. En él se pretendía, entre otros propósitos, mostrar la utilidad y el interés educativo de utilizar materiales y recursos. El uso de materiales y recursos para la enseñanza de un contenido requiere conectar los conocimientos matemáticos formales con acciones, lo que implica una mayor comprensión de dicho contenido. Para la evaluación del primer tema de este curso, se propuso a los participantes una tarea sobre división de fracciones. Ésta consistía en estudiar la validez de diferentes algoritmos propuestos para la división de fracciones, interpretar el significado de la división por cada uno de los algoritmos y proponer problemas solubles mediante esta operación que mostrasen el significado de los diferentes algoritmos.

Basándonos en la tarea anterior, hemos realizado nuestro trabajo fin de máster para comprender qué tipo de conocimiento profesional tienen estos profesores sobre la división de fracciones, centrándonos en el Conocimiento del Contenido. En este informe presentamos el trabajo, comenzando en el Capítulo 1 con la delimitación del área problemática en la que se sitúa nuestro estudio, justificando su pertinencia y enunciando los objetivos que perseguimos. A lo largo del Capítulo 2, desarrollaremos el marco teórico en el que se sustenta este trabajo, contemplando diferentes núcleos. En el siguiente capítulo, mostraremos las características y el contexto de la investigación, describiendo el tipo de trabajo, la técnica de análisis de datos utilizada, la muestra y el proceso de análisis de los datos. Durante el Capítulo 3 mostraremos los resultados parciales y globales. El último capítulo está dedicado a exponer las conclusiones obtenidas, las limitaciones halladas y las posibles vías de continuación del trabajo.

Este trabajo se ha desarrollado dentro del grupo de investigación “FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” (fqm193.ugr.es/), del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y bajo el proyecto de investigación EDU2012-33030, Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación, de la Dirección General de Investigación Científica y Técnica del Ministerio de Comercio e Innovación de España

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este primer capítulo vamos a definir el área problemática en la que se centra nuestro trabajo. Además justificaremos su pertinencia basándonos en el Currículo actual español correspondiente a la enseñanza obligatoria. Finalmente, enunciaremos los propósitos que perseguimos con este estudio.

1.1 Resolución de problemas y división de fracciones en el Currículo

La resolución de problemas puede considerarse como uno de los ejes vertebrales en los que se sustenta el Currículo de Matemáticas en España. En objetivo principal de las Matemáticas, y del resto de las ciencias, además de la creación, el desarrollo y la trasmisión del conocimiento, es utilizar este dominio para la resolución de problemas que surgen a lo largo de la vida. Por otro lado, la resolución de problemas no es sólo una actividad científica, sino que también constituye una tarea educativa que debe ocupar una posición destacada en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los niños, adolescentes y estudiantes en general (Castro, 2008).

La resolución de problemas forma parte del currículo español en las diferentes etapas. Uno de los objetivos generales de la Educación Primaria señala el inicio de la instrucción:

> "*Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana."(*Orden ECI/2211/2007)

De hecho, se considera que los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa.

Análogamente, la resolución de problemas en la etapa de Educación Secundaria se considera uno de los núcleos temáticos principales que se debe trabajar de forma transversal durante el desarrollo de todos objetivos de la etapa:

> *"La resolución de problemas debe concebirse en este contexto como un aspecto fundamental para el desarrollo de las capacidades y competencias básicas en el área de matemáticas y como elemento esencial para la construcción del conocimiento matemático. Es por ello fundamental su incorporación sistemática y metodológica a los contenidos de dicha materia."* (Orden, 10 de agosto de 2007)

Una gran parte de los problemas que forman parte del desarrollo del Currículo son los problemas de estructura multiplicativa. La multiplicación y la división son contenidos fundamentales durante los primeros años de la etapa de Educación Primaria. El comienzo se realiza con el uso de números naturales, y se va extendiendo hasta llegar a la realización de estas operaciones con números racionales. Estas operaciones aisladamente tienen poco significado dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que deben enseñarse a través de la resolución de problemas.

Por este motivo forma parte del Currículo de los dos últimos ciclos de la Educación Primaria el reconocimiento de situaciones problemáticas que impliquen el uso de la multiplicación y división de fracciones en su resolución. Ésta constituye una primera aproximación a la resolución de problemas mediante el uso de la división de fracciones, que se desarrollará en profundidad y se consolidará en la etapa de Educación Secundaria. Lo importante en esta etapa es la comprensión de las operaciones, que permita el uso razonable de las mismas en situaciones que las requieran. De hecho, en los cuatro cursos que comprenden la Educación Secundaria Obligatoria se pretende desarrollar la capacidad de resolución de problemas utilizando distintos tipos de números y las cuatro operaciones: suma, resta, multiplicación y división.

- **Primer curso:** *"Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto."*

- **Segundo curso***:* *"Utilizar números enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria."*

- **Tercer curso:** *"Utilizar los números racionales, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria."*

- **Cuarto curso (opción B):** *"Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico."* (Real Decreto 1631/2006)

Hay que tener en cuenta también, que el aprendizaje de las fracciones y sus operaciones durante estas primeras etapas de la educación no se limitará a la resolución de problemas mediante la aplicación directa de las mismas. El aprendizaje de estos contenidos desarrollará habilidades y capacidades en los estudiantes que posteriormente les serán útiles en el trabajo con fracciones algebraicas, con radicales, resolución de ecuaciones racionales, etc., necesarias en etapas de educación superiores. Por ello, no basta un aprendizaje memorístico de los algoritmos de realización de operaciones con fracciones, que pierden su eficacia cuando cambia el contexto de aplicación.

1.2 Área problemática del estudio

La división de fracciones está considerada en muchas investigaciones como una operación que se realiza con un algoritmo de fácil aplicación pero de compleja comprensión. Como se ha mostrado en el epígrafe anterior, el objetivo que persigue el Currículo español es que los estudiantes desarrollen la capacidad de resolver problemas de la vida diaria y los requeridos por otras áreas de conocimiento durante su etapa de formación, mediante el uso de los diferentes tipos de números y sus operaciones, entre las que se encuentra la división de fracciones. Por tanto, no basta con la memorización de una regla para realizar esta operación, sino que se hace necesario un aprendizaje significativo, con comprensión, que permita a los estudiantes su aplicación en los contextos y situaciones que la requieran.

Para llevar a cabo esta enseñanza con comprensión, el conocimiento de los profesores tampoco puede limitarse al simple conocimiento técnico de un algoritmo y su aplicación directa. Diversos estudios han investigado sobre la división de fracciones y el conocimiento profesional necesario para su enseñanza con significado (Ma, 1999; Flores, 2002; Flores, Turner & Bachea, 2005; Contreras, 2012; Kribs-Zaleta, 2006; Lo & Luo, 2012; Nillas, 2003; Perlwitz, 2004, 2005; Peck & Wood, 2008; Gregg, & Gregg, 2007). Sin embargo, en España no hay una investigación amplia sobre el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas acerca de la división de fracciones.

Cada día se están desarrollando nuevos materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas, que también pueden resultar útiles para la compresión del propio docente. Durante el curso 2008/2009, a través de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, se desarrolló un curso sobre materiales y recursos en el aula de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. Este era un curso de formación continua a distancia, dirigido a profesores de Matemáticas (la mayoría de los que participaron en ejercicio de la docencia). En el primer tema de este curso se abordaba la necesidad de relacionar el contenido matemático formal (conceptos y procedimientos), con acciones, de manera que sobre estas acciones se pudieran asentar los conocimientos formales. Esta idea servía para mostrar la importancia de contar con elementos para realizar estas acciones, es decir, disponer y seleccionar materiales didácticos adecuados. Para ejemplificar esta reflexión se emplearon como contenido las fracciones, y durante el desarrollo de esta unidad se les presentaron diferentes recursos y materiales para la enseñanza de este contenido, sin hacer alusión a la división. La tarea de evaluación de esta unidad consistía en que los profesores analizasen la validez general de procedimientos alternativos al clásico (invertir el divisor y multiplicar) para realizar la división de fracciones. Además se les pedía que estudiaran su mayor o menor relación con los problemas que se resuelven mediante esta operación, dado que para emplear materiales se requiere traducir los procedimientos a tareas de aprendizaje, que partan de situaciones contextualizadas. En este trabajo se pretende describir el grado de compresión que tienen estos profesores sobre la división de fracciones, a través de las justificaciones propuestas, las interpretaciones que asocian a cada procedimiento y el grado en que relacionan los problemas con los diferentes algoritmos.

1.3 Objetivos

El principal interés de este estudio se sitúa en analizar qué conocimiento profesional tienen profesores españoles de matemáticas sobre la división de fracciones. Más concretamente, siguiendo el modelo de conocimiento desarrollado por el grupo de investigación dirigido por Deborah Ball (Universidad de Michigan) sobre el Conocimiento Matemático para la Enseñanza, se centra en el dominio del Conocimiento del Contenido.

Los profesores de matemáticas de secundaria tienen, generalmente, estudios superiores, la mayoría son licenciados en matemáticas. Los participantes en el curso tenían diversa experiencia docente, aunque la mayoría eran profesores jóvenes que buscabam mejorar sus condiciones laborales mediante títulos que le certifiquen su actitud favorable al desarrollo profesional. La disposición a implicarse en aspectos que colaboren a mejorar su práctica les debe llevar a dar sentido a su acción.

En esta situación, y considerando que el fin fundamental de la división de fracciones es la solución de situaciones problemáticas que lo requieran, nos ha parecido importante analizar en qué grado son capaces los docentes de establecer relaciones entre diferentes algoritmos que se les proponen y los diversos tipos de problemas que ellos mismos planteen. Comprender cómo relacionan los algoritmos con los problemas nos lleva a percibir las conexiones que el profesor establece entre los conceptos formales y sus aplicaciones en situaciones concretas (Ma, 1999). Por todo esto, queremos comprender el conocimiento profesional de profesores de Matemáticas de Educación Secundaria sobre la división de fracciones.

Objetivo general:

Caracterizar el conocimiento profesional puesto de manifiesto por profesores de Matemáticas de Educación Secundaria para analizar tres algoritmos propuestos para la división de fracciones y estudiar cómo relacionan dos de éstos con los diferentes tipos de problemas de estructura multiplicativa solubles mediante dicha operación.

Objetivos específicos:

Este objetivo general se concreta en los objetivos específicos siguientes:

1. Analizar qué justificaciones dan lo profesores sobre si son válidos los tres algoritmos propuestos para realizar la división de fracciones.
2. Describir las interpretaciones que los profesores asignan a cada procedimiento.
3. Establecer en qué grado asocian cada algoritmo a un tipo de problema.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El marco teórico en el que se encuadra este trabajo consta de cinco núcleos principales. En primer lugar, dado que la investigación se sitúa dentro de los números racionales y la división de los mismos, desarrollamos la construcción formal de Q incluyendo una definición de la operación en estudio. El segundo núcleo se centra en presentar diferentes algoritmos que han surgido a lo largo del desarrollo histórico de las matemáticas, diferenciando los procedimientos generales y los que sólo se pueden realizar bajo ciertas condiciones. De todos estos métodos, destacaremos tres, que serán relevantes en el desarrollo de nuestro trabajo. Dado que uno de los objetivos principales de las matemáticas es la resolución de problemas, como hemos comentado anteriormente, el tercer núcleo está formado por los diferentes tipos de problemas solubles mediante la división de fracciones, destacando su relación con los tres algoritmos seleccionados. Los sujetos de nuestra investigación son profesores de matemáticas en ejercicio, por lo que la cuarta parte versa sobre el Conocimiento Profesional del Profesor, desde una visión general hasta el Conocimiento necesario para la Enseñanza de las Matemáticas, situándonos en los trabajos realizados en la Universidad de Michigan, por Deborah Ball y su equipo. En el quinto y último bloque se describe el proceso de revisión bibliográfica llevado a cabo, con el fin de establecer el estado actual de las investigaciones acerca del conocimiento profesional sobre la división de fracciones.

2.1 Construcción formal de los números racionales

Los conceptos matemáticos se basan en situaciones y problemas (Vergnaud, 1988, p.142). Así, la aparición de nuevos problemas y retos ha dado lugar al desarrollo de las diferentes ramas de las matemáticas y a los diferentes conjuntos numéricos.

Aunque la construcción formal de Q se realiza basándose en la estructura de los números enteros, el hombre hizo uso de los números racionales antes que de los números enteros. La introducción de las fracciones está ligada a la resolución de problemas de la vida real relacionados con la medida, ya que se hace necesario representar partes de la unidad elegida como patrón.

Un ejemplo de este tipo de problemas lo podemos encontrar en el Papiro de Rhind o Papiro de Ahmes, en el que los primeros seis problemas consisten en el reparto de una, dos, seis, siete, ocho o nueve hogazas de pan entre diez hombres (Boyer, 2003). En este histórico documento del antiguo Egipto, aparecen resueltos estos problemas, entre otros, haciendo uso de fracciones unitarias.

Desde el punto de vista estrictamente matemático, los números racionales surgen ante las limitaciones de los números enteros a la hora de resolver ecuaciones del tipo

$$a \cdot x = b, \qquad \forall a, b \in \mathrm{Z}$$

Como vemos, para encontrar solución a esta ecuación en todos los casos, debemos ampliar el conjunto de los números enteros, dando lugar así al conjunto de los números racionales.

Para la construcción formal del conjunto de los números racionales consideramos el conjunto de pares ordenados $\mathrm{Z} \times Z^* = \left\{ (a,b), \quad a \in \mathrm{Z}, \quad b \in Z^* \right\}$, con $Z^* = \mathrm{Z} - \{0\}$.

Cada uno de estos pares (a,b) se denomina fracción y se escribe normalmente como a/b, siendo *a* el numerador y *b* el denominador.

Dentro del conjunto $\mathrm{Z} \times Z^*$, se define la siguiente relación

$$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

que es una relación de equivalencia, por ser reflexiva, simétrica y transitiva.

Por tanto, al ser *R* una relación de equivalencia produce en $\mathrm{Z} \times Z^*$ una clasificación en clases de equivalencia. Al conjunto cociente $\mathrm{Z} \times Z^* / R$ se le denomina conjunto de los números racionales y se denota por Q. Se llama número racional a cada una de las clases de equivalencia, que denotaremos por $\overline{(a,b)}$ y por $\frac{a}{b}$ a un representante de la clase de equivalencia $\overline{(a,b)}$.

El conjunto cociente $Z\times Z^{*}/R$ adquiere estructura de cuerpo junto con las operaciones suma y producto definidas como sigue y sus propiedades.

Se define la suma de racionales como:

$$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(ad+bc,bd)}$$

que así definida es una operación interna, asociativa, conmutativa, con existencia de simétricos y con elemento neutro la clase de equivalencia $\overline{(0,b)}$.

Se define el producto de racionales de la siguiente forma:

$$\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}=\overline{(ac,bd)}$$

que así definida es una operación interna, asociativa, conmutativa, con elemento neutro la clase de equivalencia $\overline{(b,b)}=\overline{(1,1)}$ y con existencia de elementos simétricos, denominados inversos. Además, es sencillo comprobar que se verifica la propiedad distributiva del producto con respecto a la suma.

El inverso de un número racional $\overline{(a,b)}$, es otro número racional $\overline{(c,d)}$ tal que

$$\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}=\overline{(1,1)}\Leftrightarrow\overline{(ac,bd)}=\overline{(1,1)}\Leftrightarrow ac=bd\Leftrightarrow\overline{(c,d)}=\overline{(b,a)}$$

Por tanto, el inverso de un número racional es $\overline{(a,b)}^{-1}=\overline{(b,a)}$.

Una vez definido el inverso de un número racional, una forma de definir la división de racionales es como la multiplicación del dividendo por el inverso del divisor:

$$\overline{(a,b)}\div\overline{(c,d)}:=\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}^{-1}=\overline{(a,b)}\cdot\overline{(d,c)}\Leftrightarrow\overline{(ad,bc)}$$

Si aplicamos la definición a representantes de dichas clases, obtenemos el algoritmo de invertir y multiplicar (IM), usualmente enseñado en las escuelas:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

A partir de esta definición de la división de racionales mediante clases de equivalencia, resulta evidente la propiedad fundamental de la división:

$$a \div b = (a \cdot m) \div (b \cdot m) \quad \forall a, b, m \in Q$$

A continuación, se presentan diversos procedimientos para realizar la división de fracciones que han surgido a lo largo de la historia y que son menos populares.

2.2 Algoritmos para la división de fracciones

El término algoritmo es comúnmente usado en la ciencia, sobre todo en la informática y las matemáticas. En matemáticas se suele usar para denotar algoritmos de lápiz y papel.

> *Un algoritmo es una serie finita de reglas a aplicar en un determinado orden a un número finito de dato, para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades) en un número finito de etapas a cierto resultado, y esto independientemente de los datos* (Gómez, 1988, p. 105).

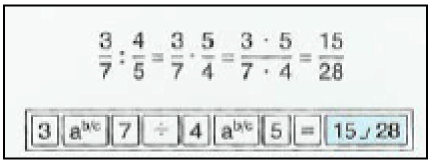
Podríamos decir que, básicamente, son las instrucciones a seguir para llegar a una solución específica.

Nuestro aprendizaje de las distintas operaciones está tan ligado a su algoritmo que se suele confundir cada operación con el algoritmo usual que lo resuelve. Por esto mismo, resulta a veces extraño comprobar que hay varias técnicas distintas para resolver una misma operación.

Por otro lado, se tiene una visión estática de los algoritmos, con la creencia de que siempre se han llevado a cabo del mismo modo. Contreras (2004) realiza una revisión histórica a través del análisis de libros de texto sobre los diferentes algoritmos de la división de fracciones. Aunque no hay indicios claros sobre el origen de la división de fracciones, en el Antiguo Egipto la utilizaban para solucionar problemas relacionados con el reparto de herencias, usando la descomposición de fracciones como suma de fracciones unitarias. En la Antigua China usaban fracciones de considerable dificultad, llegando a realizar divisiones del tipo $119000 \div 182\frac{5}{8}$, multiplicando en primer lugar por 8. Durante la Edad Media, se tiene la idea de que las fracciones sólo se pueden operar con fracciones, por lo que para realizar la división $\frac{2}{3} \div 4$, la transformaban en una multiplicación del tipo $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$. Todos estos algoritmos son clasificados como particulares por Contreras (2012). Es a partir del nacimiento de la imprenta cuando tenemos constancia de diversos algoritmos para llevar a cabo esta operación. Los algoritmos generales que clasifica Contreras a partir de su análisis son seis y se muestran en la tabla 2.1.

Tabla 2.1

Algoritmos para la división (Contreras, 2012)

ALGORITMO	EJEMPLO
Reducción de las fracciones a común denominador y división de los numeradores (Atribuido a Chuquet, 1484)	$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{12} \div \frac{9}{12} = \frac{8}{9}$
Productos cruzados	$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$
Inversión de la multiplicación	$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$
Uso de la unidad fraccionada	Se han comprado 3/8 de Hg de azafrán por 7/9 de peseta. ¿A cuánto cuesta el Hg? Sol. Si 3/8 valen 7/9 de pta. 1/8 vale $\frac{7}{9 \cdot 3}$ y 8/8 valen $\frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 3} = \frac{56}{27} = 2{,}074$ ptas.
Conversión de las fracciones a decimales	$\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = 0{,}5 + 0{,}75 = \frac{50}{75} = \frac{4}{6}$
Uso del protocolo de la calculadora científica	

Además de la clasificación de los diferentes algoritmos en particulares y generales, incluye un análisis sobre los algoritmos más utilizados en distintas épocas históricas.

Tabla 2.2

Algoritmos usados en diversas épocas históricas (Contreras, 2012, p.64)

Período	Subperíodo	Algoritmo
Hasta el siglo XVI		Productos cruzados
Los siglos XVII, XVIII y XIX	Siglos XVII y XVIII	Productos cruzados
	Siglo XIX	Invertir y multiplicar
Siglo XX	Siglo XX hasta 1970	Invertir y multiplicar Reducción a común denominador Método analítico razonado
	1970-1990	Invertir y multiplicar Multiplicar por la inversa de la fracción divisor
	Época actual	Productos cruzados Invertir y multiplicar Conversión de fracciones en decimales Uso del protocolo de la calculadora

Hay otro algoritmo, que no aparece recogido en los trabajos de Contreras, pero que resulta fundamental para este estudio. Este enfoque diferente para realizar la división de fracciones se puede encontrar en Ma (1999) y Flores (2008). Consiste en la división de numeradores y denominadores entre sí, método que puede ser interpretable a partir del algoritmo utilizado para realizar la multiplicación de fracciones.

$$\frac{4}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{4 \div 2}{15 \div 3} = \frac{2}{5}$$

Si no se puede realizar esta división directamente, se buscarán otros representantes de los números racionales, de forma que sea posible. De forma general, el algoritmo sería:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c \cdot d}{b \cdot c \cdot d} \div \frac{c}{d} = \frac{(a \cdot c \cdot d) \div c}{(b \cdot c \cdot d) \div d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

De esta amplia gama de algoritmos para llevar a cabo la división de fracciones, se destacan tres que serán significativos en este trabajo:

- <u>Igualar denominadores y dividir numeradores (ID)</u>

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \div \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

- <u>Invertir y multiplicar (IM)</u>

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Como se ha comentado anteriormente, este procedimiento para obtener el resultado de una división de fracciones se puede obtener fácilmente a partir de la definición formal de dicha operación. A partir de este, han surgido una serie de procedimientos para memorizar cómo llevar a cabo el algoritmo, lo que se consideran como reglas mnemotécnicas:

Tabla 2.3

Reglas mnemotécnicas asociadas a IM. (Flores, 2008, p. 31)

Multiplicar en cruz	Regla del Sanwidch	XX
$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}$	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\begin{bmatrix}\frac{a}{b}\\ \frac{c}{d}\end{bmatrix}=\frac{a.d}{b.c}$	$\frac{a}{b}\;\frac{c}{d}\;\frac{a.d}{b.c}$

- <u>División de numeradores y denominadores entre sí (DND)</u>

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\div c}{b\div d}$$

2.3 Problemas de división de fracciones

Rico (2012), apoyándose en Frege, establece la noción de significado de un concepto, centrándose en el ámbito escolar, atendiendo a tres dimensiones: los sistemas de representación, la estructura conceptual y la fenomenología.

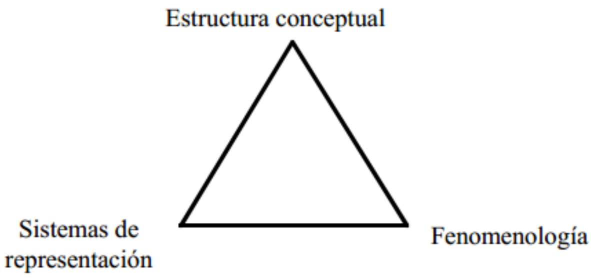


Figura 2.4: Triángulo semántico de un concepto matemático escolar (Rico, 2012, p. 52)

Estas tres componentes determinan el significado de un concepto matemático en educación:

- Los *sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente dicho concepto y lo relacionan con otros.
- La *estructura conceptual*, que comprende conceptos y propiedades, los argumentos y proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- La *fenomenología*, que incluye aquellos fenómenos (contextos, situaciones y problemas) que están en el origen del concepto y que le dan sentido.

Atendiendo a este triángulo, una fracción es una representación correspondiente a un contenido matemático, que adquiere sentido cuando se introduce en un contexto adecuado que permita mostrar su papel a partir de la resolución de problemas. Lo mismo sucede con el algoritmo para la división de fracciones, carece de sentido si no es para resolver un problema.

Como la división es la operación inversa de la multiplicación (se define como la multiplicación por el inverso), al intentar caracterizar los problemas que pueden ser resueltos mediante una división de fracciones se deben de tener en cuenta también aquellos en los que aparece implicada la multiplicación de fracciones. Greer (1992) realiza un exhaustivo estudio sobre los problemas de estructura multiplicativa en diferentes conjuntos numéricos: los enteros y los racionales.

Comienza con la noción de reparto en grupos iguales, en la que considera que hay dos modelos de división: la división partitiva (se quiere averiguar el número de grupos entre los que se reparte) y la división medida o cuotitiva (se desea conocer la cantidad que recibe cada grupo). Los problemas de comparación multiplicativa, producto cartesiano y área de rectángulo completan esta clasificación.

Al extender los problemas de los números enteros a las fracciones, éstos pueden ser de cuatro tipos (Greer, 1992):

Tabla 2.5

Ejemplos problemas de división de fracciones (Traducción en Flores, 2008, p. 30)

Clases	Problemas de multiplicación	División (con multiplicador)	División (con multiplicando)
Razón	Un barco se mueve con una velocidad de 4,2 metros por segundo. ¿Cuánto se mueve en 3,3 segundos?	Un barco se mueve 13,9 metros en 3,3 segundos. ¿Cuál es la velocidad media en metros por segundo?	¿Qué tiempo tarda un barco en recorrer 13,9 metros si va a una velocidad media de 4,2 metros por segundo?
Comparación multiplicativa	El hierro es 0,88 veces más pesado que el cobre. Si una pieza de cobre pesa 4,2 kg. ¿Cuánto pesa una pieza de hierro del mismo tamaño?	El hierro es 0,88 veces más pesado que el cobre. Si una pieza de hierro pesa 3,7 kg, ¿cuánto pesa una de cobre del mismo tamaño?	Si piezas del mismo tamaño de hierro y cobre pesan 3,7 kg y 4,2 kg, respectivamente, ¿cuántas veces es más pesado el hierro que el cobre?
Parte/todo	En un colegio superan un examen 3/5. Se hacen el examen 80 estudiantes, ¿cuántos lo superan?	En un colegio superan un examen 3/5. Si lo han superado 48, ¿cuántos han hecho el examen?	En un colegio superan un examen 48 de los 80 estudiantes. ¿Qué fracción de estudiantes superan el examen?
Área del rectángulo	¿Cuál es el área de un rectángulo de 3,3 metro de base y 4,2 metros de altura?	Si el área de un rectángulo es 13,9 m^2, y su base es 3,3, ¿cuál es la altura?	

El objetivo de los algoritmos de división de fracciones es la resolución de problemas, por lo que entendemos que los procedimientos para obtener la división también deben relacionarse con los problemas que ayudan a resolver. Con lo visto hasta ahora, queda establecido que existen cuatro tipos de situaciones que pueden ser resueltas mediante la división de fracciones y hemos destacado tres de los variados algoritmos expuestos. Flores (2008) realiza un análisis de sobre las relaciones que pueden ser establecidas entre los algoritmos y las situaciones que pueden resolver y establece qué algoritmo resulta más intuitivo para cada tipo de problema.

Se pueden identificar en cada tipo de problema los términos que hacen más intuitivo cada uno de los algoritmos:

- **Problemas de razón:** *Se pintan 2/5 de habitación en ¾ de hora. ¿Cuánto se pintará en una hora?*

$$\frac{2}{5}:\frac{3}{4}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}\begin{matrix}\text{Habitación}\\ \text{Horas}\end{matrix}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}}{1}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}$$

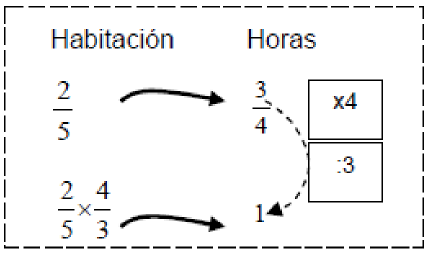


Figura 2.6: Ejemplo de resolución de problemas de razón (Flores, 2008, p. 33)

Este problema, como indica el esquema, puede ser resuelto por proporcionalidad, buscando la correspondencia a la unidad. Por esto, para pasar de ¾ de hora a 1 hora, dividimos por 3 para saber qué ocurre en ¼ de hora y posteriormente multiplicamos por 4 para saber lo que sucede en la hora completa. En realidad, estamos multiplicando por 4/3, que es el inverso del divisor. Por tanto, el algoritmo de I.M. se aplica con bastante sentido para resolver problemas de razón.

- **Problemas de comparación multiplicativa:** *¿Cuántas raciones de 2/3 de galleta se pueden obtener con 5 galletas?*(Flores, 2008, p. 34)
  Como lo que se pretende hacer es comparar fracciones, lo más intuitivo es convertirlas en cantidades de veces la misma unidad fraccionaria: ¿Cuántas raciones de 2/3 de galleta se pueden obtener con 15/3 de galleta? El problema se ha reducido a comparar 15 veces 1/3 de galleta con 2 veces 1/3 de galleta, es

decir, 15 con 2. Si se tienen 15 y se hacen raciones de 2, tendremos un total de 15/2 raciones o, lo que es lo mismo 7 y ½. Luego la comparación resulta más sencilla cuando comparamos cantidades de la misma unidad, es decir, con igual denominador, I.D.

- **Problemas de relación entre parte y todo:** *¿Cuántos alumnos forman una clase si 18 chicas son los ¾ de la clase?*

  Este tipo de problemas se corresponden con el algoritmo de invertir y multiplicar (I.M.), ya que tienen un esquema de resolución similar al de la figura 2.6.

$$18:\frac{3}{4}=\frac{18}{\frac{3}{4}}=18.\frac{4}{3}=\frac{18}{3}.4=6.4=24$$

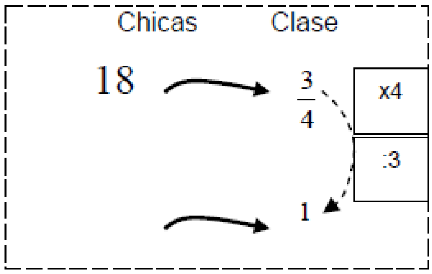


Figura 2.7: Ejemplo de resolución de problemas de relación parte-todo (Flores, 2008, p. 35)

- **Problemas de áreas de rectángulos:** *¿Cuánto mide la altura de un rectángulo cuya superficie es 1/6 m^2 y su base 1/3 m?*

  Podemos plantear una ecuación del tipo $\frac{1}{3}\cdot x=\frac{1}{6}$, por lo que tendremos que buscar los números que multiplicados por el numerador y el denominador nos dan la nueva fracción. Para ello, se dividen numeradores y denominadores entre sí (D.N.D.).

$$\frac{1}{6}:\frac{1}{3}=\frac{1:1}{6:3}=\frac{1}{2}$$

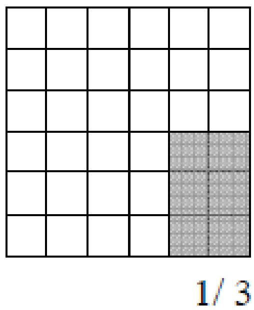


Figura 2.8: Ejemplo resolución problemas de áreas de rectángulos (Flores, 2008, p.36)

En la tabla 2.9 hay un resumen de los diferentes tipos de problemas de división de fracciones asociados al algoritmo que resulta más intuitivo para su resolución.

Tabla 2.9

Asociación entre algoritmos y problemas (Flores, 2008, p.37)

Clases	Problemas de multiplicación	División (con multiplicador)	División (con multiplicando)	Algoritmo
Razón	Un pintor pinta 8/15 de habitación en una hora ¿Cuánto pintará en ¾ de hora?	Un pintor pinta 2/5 de habitación en ¾ de hora ¿Cuánto pintará en una hora? (Tirosch, 2000)	Un pintor pinta 8/15 de habitación en 1 hora ¿Cuánto tiempo tardará en pintar los 2/5 de la habitación?	Inverso Cruz **(I.M.)**
Comparación multiplicativa	Hemos hecho 7 raciones y media (15/2 raciones) de 2/3 de galleta ¿Cuántas raciones hemos empleado?	¿Qué porción de galleta corresponde a cada ración si se han hecho 7 ½ raciones (15/2 raciones) con 5 galletas?	¿Cuántas raciones de 2/3 de galleta se pueden obtener con 5 galletas?	Igualar denominadores **(I.D.)**
Parte/todo	En una clase de 24 alumnos, ¾ son chicas. ¿Cuántas chicas hay?	En un clase hay 18 chicas, que son ¾ del total de alumnos, ¿cuántos alumnos hay en la clase?	En un clase hay 18 chicas de 24 alumnos. ¿Qué fracción de chicas hay?	Inverso Cruz **(I.M.)**
Área de rectángulo	¿Cuál es el área de un rectángulo de 1/5 metros de altura y 15/4 metros de base?	Si el área de un rectángulo es ¾ m^2, y su base es 1/5m, ¿cuál es la altura?		Dividir numeradores y denominadores **(D.N.D.)**

La profundización realizada en los problemas de división de fracciones supone un análisis de sus significados y un estudio de los procedimientos que resuelven cada problema de una manera más intuitiva. Se realiza con idea de comprender mejor cómo son los problemas de división de fracciones, qué complejidad tiene cada uno de ellos, en qué sentido el procedimiento refleja las acciones implicadas en los problemas, etc. Todo ello puede ayudar al profesor de matemáticas, quien al tener la responsabilidad de enseñar la división de fracciones, tiene que ocuparse de darle sentido, de forma que pueda hacer que los estudiantes también puedan dárselo. Es por esto que nos interesa saber en qué grado este razonamiento forma parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, del que nos ocupamos a continuación.

2.4 Conocimiento profesional de profesor de matemáticas

Los siguientes epígrafes se centran en el conocimiento profesional del profesor. La primera parte versa sobre el conocimiento del profesor en general, centrándose en la segunda parte, en el conocimiento especializado que debe poseer un profesor para la enseñanza de las matemáticas.

2.4.1 Conocimiento profesional

Puede parecer obvio creer que un profesor posee conocimientos suficientemente sólidos sobre la materia que va a enseñar en su labor docente. Este pensamiento era bastante común en las investigaciones realizadas hace aproximadamente dos décadas. Antes de los años ochenta, las investigaciones en educación se centraban en aspectos puramente pedagógicos, de organización y gestión del aula, de evaluación, de reconocimiento de las diferencias individuales, etc. sin prestar atención a los conocimientos que los profesores poseían sobre la materia a impartir. Esto es lo que Shulman, en 1986, define como el "paradigma perdido", el lugar vacío que ocupan los contenidos. Los trabajos de Shulman no pretenden despreciar el papel de las habilidades pedagógicas, sino reclamar la importancia del conocimiento de los profesores acerca de la materia a enseñar. Así, Shulman y colaboradores proponen la existencia de un conocimiento del contenido específico de la enseñanza. Por otro lado, resaltan la importancia de la compresión del contenido por parte de los profesores como un conocimiento clave en la profesión de la enseñanza. En la comprensión está la habilidad para transformar un conocimiento en enseñanza: "Sólo los que comprenden, enseñan" (Shulman, 1986, p.14).

Con estas ideas y con la especialización profesional que impone la sociedad moderna, comienza a emerger la hipótesis de que hay un conocimiento profesional matemático específico del profesor, entendiendo por éste la conjunción de todos los saberes y experiencias que posee un profesor y de los que hace uso en el desarrollo de su labor docente, que va construyendo desde su formación inicial y durante toda su carrera profesional (Climent, 2002). Tiene un carácter práctico, dinámico y evolutivo, un saber reflexivo, que permite abordar nuevas situaciones y es capaz de ofrecer autonomía (Carrillo, 1998).

Este trabajo se centra en un conocimiento más específico: el conocimiento matemático de los profesores acerca de la división de fracciones y de la resolución de problemas con dicha operación.

2.4.2 Conocimiento para la enseñanza de las matemáticas

Una instrucción de alta calidad en Matemáticas requiere de un conocimiento especializado, profesional, que va más allá de reglas simples, de aplicar recetas memorizadas. Partiendo de esta idea y de las contribuciones de Shulman sobre el papel de los contenidos en la enseñanza y la compresión de los mismos como un conocimiento clave, Deborah Ball y sus colaboradores han venido desarrollando un modelo para estructurar el conocimiento matemático para la enseñanza. Este modelo lo construyen a través de un enfoque práctico, considerando que es obvio que los profesores deben saber el contenido y centrándose en cómo necesitan saberlo, es decir, cuáles son los conocimientos necesarios para llevar a cabo la labor de enseñanza de las matemáticas (Ball, Thames y Phelps, 2008).

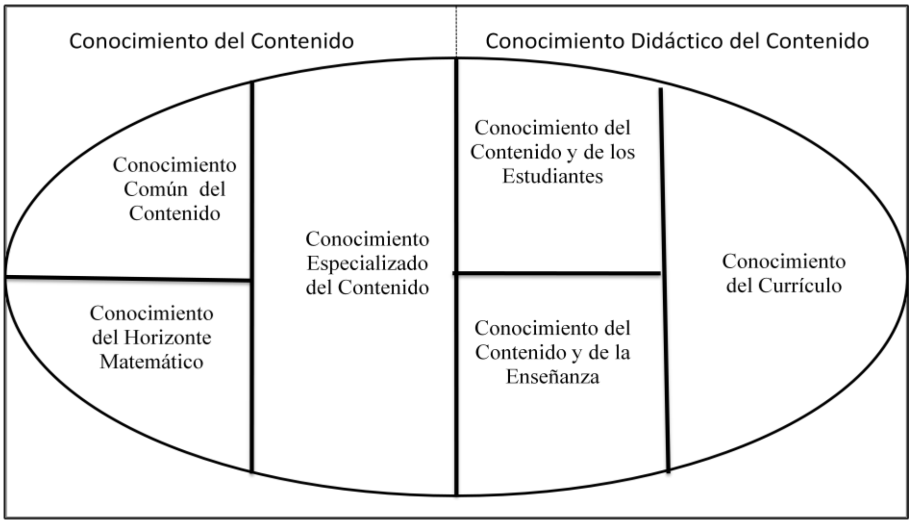


Figura 2.10: Dominios de Conocimiento para la Enseñanza de las Matemáticas

Este modelo del conocimiento matemático para la enseñanza lo divide en dos amplios dominios: Conocimiento del Contenido (denominado por Shulman conocimiento de la materia) y Conocimiento Didáctico del Contenido. Estos dos dominios se dividen en tres subdominios cada uno, que se describen a continuación.

Dentro del Conocimiento Didáctico del Contenido encontramos el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes que entrelaza el conocimiento sobre cómo aprenden los estudiantes con el conocimiento del contenido; también está incluido el Conocimiento de los Contenidos y la Enseñanza, que abarca el conocimiento de un contenido matemático desde la perspectiva de la estrategias para enseñarlo; el último y tercer subdominio es el Conocimiento del Currículo, aludiendo a los objetivos, contenidos, orientaciones metodológicas, criterios de evaluación y recursos establecidos para que el profesor se guíe en su labor de enseñanza.

El Conocimiento del Contenido está compuesto por el Conocimiento Común del Contenido, que no es propio de la enseñanza, sino que se refiere al conocimiento y la habilidad matemática utilizados por los que tienen cierta base matemática, incluyendo entornos externos a la enseñanza; por el Conocimiento del Horizonte Matemático, que corresponde al conocimiento de las relaciones existentes entre los distintos temas matemáticos y a la forma en que el aprendizaje de los temas va evolucionando en los distintos niveles educativos; y por el Conocimiento Especializado del Contenido, que es el conocimiento que permite a los docentes participar en las tareas de enseñanza, abarcando las formas de representación, explicaciones claras y eficaces, métodos de resolución de problemas, etc.

El tipo de conocimiento profesional que se trata de estudiar en este trabajo, se sitúa en el dominio izquierdo, en el Conocimiento del Contenido. Los diferentes subdominios no tienen unas fronteras claras, por lo que se puede afirmar que el conocimiento del que se habla integra parte de estos tres subdominios, centrándose en el contenido de la división de fracciones.

2.5 Antecedentes de la investigación

Como se ha venido comentando, la compresión profunda de un concepto es necesaria para llevar a cabo un proceso de enseñanza-aprendizaje significativo del mismo. Muchos investigadores han sido conscientes de que uno de los contenidos complejos de enseñar/aprender con comprensión es la división de fracciones, como se ha podido comprobar tras realizar una revisión de los antecedentes en esta línea. Para ello, se ha realizado una búsqueda a través de varios repositorios con las palabras clave *división*, *dividir* y *fracciones,* tanto en castellano como en inglés. Los repositorios y bases de datos consultados son: *Funes*, *ZDM* y *Dialnet*. También se han consultado las revistas españolas *UNO*, *PNA* y *Números*. Finalmente se utilizaron los descriptores mencionados anteriormente en un buscador de internet, lo que nos permitió ampliar nuestros antecedentes con trabajos de tercer ciclo y tesis doctorales relacionadas. Cabe mencionar que entre los estudios hallados, no hay ninguno sobre el conocimiento de la división de fracciones que tienen los profesores españoles de matemáticas.

Se muestran, a continuación, algunas investigaciones llevadas a cabo dentro de esta línea, consideradas bastante relacionadas con la que ocupa este informe:

- Ball (1990) presenta parte de una investigación más amplia realizada con 19 futuros profesores de primaria y secundaria. En este artículo presenta los resultados correspondientes a la comprensión que tienen los participantes sobre la división en tres contextos: división de fracciones, división por cero y división en ecuaciones algebraicas. En cuanto a la división de fracciones, los futuros profesores debían resolver $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ y plantear una situación problemática que respondiese a este enunciado. Los resultados mostraron que la compresión de los profesores acerca de la división por fracciones es limitada, consistiendo, en la mayoría de los casos, en la memorización de reglas particulares de cálculo.

- Ma(1999) utiliza la misma cuestión que Ball (1990) para examinar la compresión sobre la división de fracciones que tienen los profesores norteamericanos y los chinos. Los resultados mostraron que los chinos tenían una base más sólida sobre la división de fracciones que les permitía proponer representaciones pedagógicamente correctas para el enunciado dado, mientras que una comprensión inadecuada del procedimiento de los norteamericanos les impedía propones situaciones problemáticas adecuadas. La autora concluye que "para tener una representación pedagógicamente poderosa de un tema, un profesor debe tener una compresión exhaustiva de éste".
- Nillas (2003) investiga los procesos de resolución de problemas de futuros profesores para determinar su comprensión conceptual y procedimental acerca de la división de fracciones. Para ello 10 profesores respondieron a cinco problemas de diferentes tipos sobre división de fracciones y los resultados mostraron que, a pesar de que utilizaban diversas estrategias, carecían de una sólida comprensión del significado de la división de fracciones. Este estudio a apoya la necesidad de una sólida formación de los profesores en contenidos enfocada a proceso de enseñanza-aprendizaje con comprensión.
- Lo & Luo (2012) exploran el conocimiento profesional acerca de la división de fracciones que tiene un grupo de 45 futuros profesores taiwaneses al inicio de un curso de formación en métodos matemáticos. La naturaleza de las diversas estrategias llevadas a cabo por los participantes ofrece una ilustración del sólido conocimiento común acerca de este contenido matemático. Sin embargo, los resultados también muestran que las tareas de representación de la división de fracciones, ya sea a través de problemas o de diagramas pictóricos es un reto para estos futuros profesores.
- Kribs-Zaleta (2006) realiza un estudio para describir las estrategias de cálculo desarrolladas por estudiantes de sexto año de educación primaria, maestros en formación y maestros en ejercicio para la resolución de problemas de división de

fracciones. Los resultados revelaron el uso de métodos de dos etapas para problemas de división de fracciones cuotitiva y partitiva, métodos que añaden el paso de unitización (conversión de las fracciones a unidades por medio de la multiplicación) a las estrategias desarrolladas en los números enteros.

- Contreras (2012) realiza un amplio estudio sobre la enseñanza y aprendizaje de los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Mediante el análisis de textos identifica los problemas escolares de división de fracciones, caracterizando los principales modelos de división y las variables que intervienen en la resolución de problemas de cada tipo. Posteriormente realiza un estudio con estudiantes de cuarto de secundaria para establecer una relación entre las actuaciones de los estudiantes y las variables de los problemas anteriormente mencionadas. Algunas conclusiones afirman que las estructura y los modelos semánticos de los problemas influyen en su resolución y que los estudiantes, cuando no reconocen que el problema es de división de fracciones recurren a procedimientos alternativos, como por ejemplo, la regla de tres.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación vamos a describir la línea metodológica de nuestro estudio. Comenzaremos por una descripción de la metodología utilizada, caracterizando nuestro estudio. Posteriormente, dibujaremos el contexto en el que se desarrolla y el proceso de selección de los datos. Finalizaremos presentando la técnica de análisis de datos utilizada y describiendo el proceso realizado.

3.1 Descripción general

Los diferentes enfoques metodológicos presentes en la investigación en Educación Matemática son cualitativos, cuantitativos y mixtos. Colás (1998) describe las principales características del paradigma cualitativo, entre las que se encuentran:

- *"El principal objetivo será la comprensión de los fenómenos.*
- *El objetivo de la investigación no es llegar a abstracciones universales, sino a concretas y específicas universalidades. Se pretende averiguar lo que es generalizable a otras situaciones y lo que es único y específico en un contexto determinado.*
- *La simultaneidad de los fenómenos e interacciones mutuas en el hecho educativo hace imposible distinguir las causas de los efectos."*

Considerando los objetivos de nuestra investigación y las características de éste enfoque, podemos determinar que nos situamos dentro de la metodología cualitativa, ya que nuestro propósito principal es comprender, no evaluar, el conocimiento profesional que tiene un grupo de profesores acerca de la división de fracciones. No pretendemos generalizar ni establecer relaciones de causa-efecto.

Cohen y Manion (1990), de acuerdo con Best, consideran que la investigación descriptiva se preocupa de *"las condiciones o relaciones que existen; de las prácticas que prevalecen; de las creencias, puntos de vista o actitudes que se mantienen; de los procesos en marcha; de los efectos que se sienten o de las tendencias que se desarrollan."*

La presente investigación es de tipo descriptivo, ya que pretendemos identificar qué conocimiento tienen los profesores sobre la división de fracciones, sin intención evaluadora.

Además, podemos afirmar que es un estudio descriptivo transversal, ya que éste es considerado como "*aquel que produce una fotografía instantánea de una población en un momento determinado*" (Cohen & Manion, 1990), y los datos en los que se basa este estudio fueros recogidos en un momento puntual, ya que corresponden a la tarea de evaluación en un curso de formación a distancia durante el curso 2008/2009.

Por último, podemos situar este estudio dentro de la línea de investigación de Formación de profesores, centrándose en el conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

3.2 Contexto de la investigación

Los datos sobre los que se apoya este estudio son tareas realizadas por profesores en un curso de formación continua a distancia. Este curso, denominado "Materiales y recursos en el aula de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato", se desarrolló a lo largo del curso 2008/2009, con una duración de 100h desde octubre hasta junio. Estaba organizado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales y el Centro de Informática Científica de Andalucía y subvencionado por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía. Los participantes en este curso eran, en su gran mayoría, profesores de Matemáticas de Secundaria en ejercicio, con deseo de mejorar su formación y desarrollarse como profesionales.

La metodología seguida en el desarrollo del curso se basa en la realización de actividades a distancia, utilizando Internet como herramienta. El primer tema de este curso, "Enseñanza de las Matemáticas en el aula", abordaba la necesidad de relacionar los contenidos y procedimientos formales con acciones, mediante el uso de recursos y herramientas. Durante el desarrollo de esta primera unidad se ejemplifica el papel de los recursos, presentando una serie de materiales y recursos útiles en la enseñanza de esta materia, que se centraron en el aprendizaje de las fracciones. La tarea de evaluación de este tema consistía, entre otras tareas, en que los profesores analizasen la validez de tres procedimientos para realizar la división de fracción (Dividir numeradores y denominadores entre sí, Invertir y multiplicar e Igualar denominadores y dividir los numeradores), que interpretasen cada uno de los métodos y que los relacionasen con problemas resolubles mediante división de fracciones (enunciado en Anexo I). Es necesario mencionar que, durante el desarrollo de este primer tema del curso, no se trató específicamente la división de fracciones ni la resolución de problemas. Los trabajos entregados por los profesores para esta evaluación conformarán nuestros datos, que han sido suministrados por uno de los tutores del presente trabajo, Dr. D. Pablo Flores, que fue profesor del mencionado curso.

3.3 Muestra y Selección de los datos

Los sujetos que forman la población en estudio son profesores de matemáticas de Educación Secundaria. La muestra elegida para este estudio es intencional. Está formada por 26 profesores de matemáticas de Educación Secundaria, la mayoría de ellos en ejercicio, que se matricularon en el curso sobre recursos y materiales para el aula.

Los datos en los que se basa este estudio corresponden a la tarea de evaluación del primer tema de este curso. Esta tarea consiste en:

a) Justificar la validez general de los tres algoritmos seleccionados anteriormente: DND (Juanito), IM (Antoñito) e ID (Pepe) y analizar qué significado tiene la división de fracciones cuando se lleva a cabo por cada uno de los algoritmos.
b) Enunciar problemas de división de fracciones para los algoritmos de DND e ID e interpretar a partir de ellos el significado de la división de fracciones cuando se realiza por estos algoritmos

Los datos iniciales son los 26 trabajos realizados por los profesores que forman la muestra. De éstos se desecharon los trabajos incompletos, es decir, aquellos que no incluyen ninguna justificación y/o no incluyen ninguna referencia al planteamiento de problemas. Tras esta selección fueron eliminados tres trabajos totalmente incompletos y seis que no planteaban problemas ni hacían alusión a ellos, quedando los datos reducidos a 17 trabajos.

3.4 Proceso de análisis de los datos

En nuestro trabajo, como hemos comentado, los datos son producciones realizadas por profesores en ejercicio durante un curso de formación, por tanto, son datos de tipo cualitativo. Para su análisis, dado que nuestra intención es comprender el conocimiento profesional que tienen los profesores de matemáticas acerca de la división de fracciones, debemos utilizar una técnica de investigación que nos permita conocer la estructura interna de sus producciones, establecer relaciones y poder elaborar inferencias válidas (Rico & Fernández-Cano, en prensa). Para llevar a cabo la tarea propuesta, una de las herramientas más potentes que nos permite analizar cualquier tipo material escrito es el análisis de contenido. Cohen, Manion & Morrison (2011) lo definen como "un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos." La aplicación de esta técnica a la investigación educativa, puede ayudarnos a descubrir patrones en el discurso, contrastar hipótesis o inferir significados interpretativos en un texto (Rico & Fernández-Cano, en prensa), actividad que nos ocupa.

A continuación, describimos las etapas realizadas durante el análisis de las producciones de los profesores mediante la aplicación de esta técnica, basándonos en los pasos propuestos por Krippendorff (1990), una vez que hemos seleccionado los datos como se especifica en el epígrafe anterior.

- La primera fase consiste en identificar las unidades de análisis. Para ello comenzamos por dividir cada una de las tareas en dos bloques: un primer bloque incluye las justificaciones propuestas para cada uno de los procedimientos, las interpretaciones que los participantes asignan a cada uno y el nuevo o los nuevos procedimientos propuestos para realizar la división de fracciones; el segundo bloque estará formado por los problemas propuestos por los docentes y las relaciones que establecen entre los enunciados y los tres algoritmos. Posteriormente, subdividimos el primer bloque en tres partes. Una primera compuesta por las justificaciones, la segunda compuesta por las interpretaciones y una tercera en la que se incluyen los nuevos métodos, si los hay. Posteriormente decidimos definir como unidades de análisis las frases con sentido completo que responden a cada una de las cuestiones planteadas. Apreciamos que éstas son las correspondientes a las justificaciones, entre los que distinguimos si aceptan la validez del método y los que no. También se señalan las frases relativas a las interpretaciones dadas al primer y tercer método por separado, y las que describen los nuevos procedimientos. Para el segundo bloque se considerarán las frases en que establecen relaciones y, posteriormente, los enunciados de problemas.

- La segunda fase corresponde a la construcción de las categorías. Para ello analizamos las formas de responder a las cuestiones, según los estudios presentados en el Capítulo 2. De esta forma aparece un sistema de categorías a priori, que validamos llevando a cabo una revisión inicial de trabajos, y completamos hasta apreciar que cubre todas las respuestas posibles, mediante un sistema de categorías disjuntas.

  Por tanto, vamos a obtener un sistema de categorías dividido en secciones, correspondientes a cada uno de los apartados de la tarea propuesta, como se muestra en la figura 3.1.

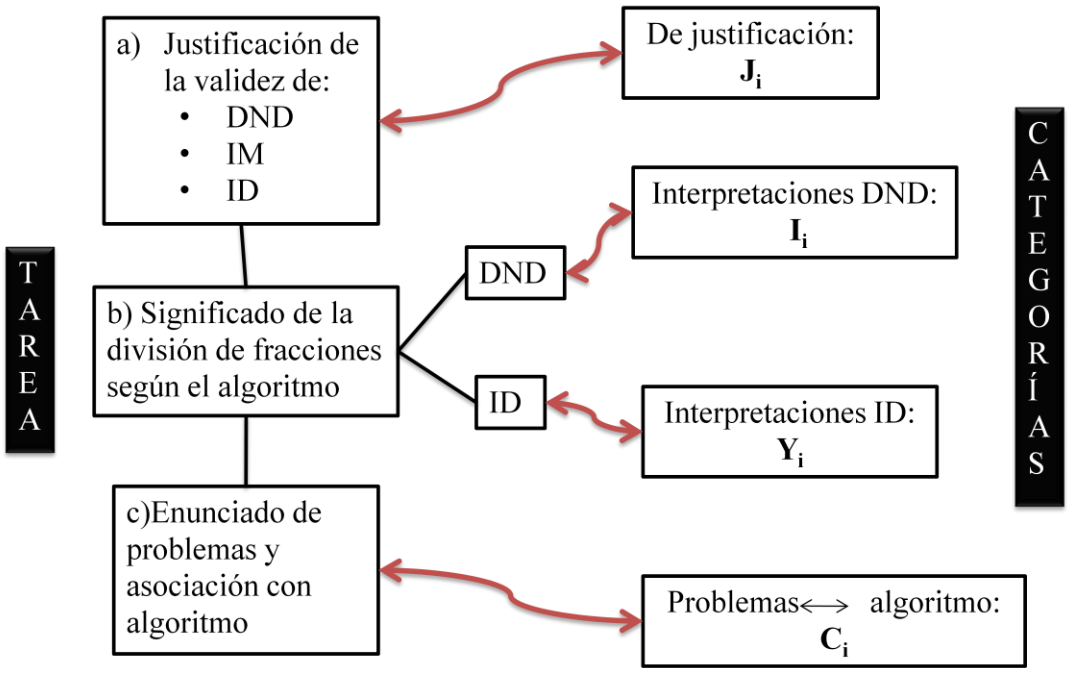


Figura 3.1: Relación entre la tarea y el sistema de categorías

A continuación, describimos el conjunto de categorías correspondiente a cada uno de los apartados de la tarea.

a) Justificación de la validez de tres algoritmos: DND, IM e ID. Para este primer apartado, obtenemos cinco categorías generales para las justificaciones de los tres métodos, una de ellas dividida en dos subcategorías. Los profesores se basan en:

- **J_1** : Usar la definición formal de la división en Q.
- **J_2**: Operatividad, alusión a la posibilidad de poder realizar las operaciones que involucra el algoritmo. Tiene dos subcategorías:
  - **$J_{2,+}$:** Operatividad positiva, es decir, se pueden realizar todos los cálculos que implica el algoritmo.
  - **$J_{2,-}$:** Operatividad negativa, es decir, sólo se pueden realizar en algunos casos los cálculos que implica el procedimiento.
- **J_3:** Usar fracciones equivalentes para superar la operatividad negativa que pueda tener el algoritmo, sin concluir si efectivamente se obtiene como resultado el cociente de las fracciones.
- **J_4:** Afirmar la validez general de un algoritmo porque éste convierte la división de fracciones en una división equivalente de números naturales o enteros.
- **J_5:** Aceptar sin justificación, alegando que es "obvio", "tradicional" o "claramente equivalente", entre otras cosas.

Por ejemplo, si un profesor razona: *"El método de Antoñito funciona siempre con todas las fracciones, mientras que el de Juanito sólo puede utilizarse cuando hay una relación de divisibilidad entre los numeradores y los denominadores de las fracciones implicadas",* su justificación del algoritmo de IM (Antoñito) estaría en la categoría **J_5**, ya que acepta este procedimiento sin exponer razones y la del algoritmo de DND (Juanito) la asignamos a **$J_{2,-}$**, ya que alude a que sólo puede utilizarse cuando ocurren determinadas circunstancias, que es cuando se pueden realizar las operaciones que involucra este método. Si el razonamiento es *"El tercer caso también vale para todas las fracciones ya que al trabajar con fracciones equivalentes con el mismo denominador lo que hacemos es repartir la unidad en las mismas partes y repartir 4\9 entre 6\9 es lo mismo que tomar 4 partes de 6 en que hayas dividido la unidad",* asignaremos la justificación del algoritmo ID a la categoría **J_3**, ya que sólo alude al uso de fracciones equivalentes.

b) Analizar el significado de la división de fracciones cuando se realiza por cada uno de los procedimientos. Las categorías emergidas para las diferentes interpretaciones aparecen separadas según el algoritmo al que corresponden.

Para el algoritmo de invertir y multiplicar no se ha construido un conjunto de categorías por no haber encontrado ninguna respuesta.

b.1) Categorías para el algoritmo DND, consistentes en interpretarlo como:

- **I_1**: Inverso del algoritmo de la multiplicación de fracciones.
- **I_2**: Cálculo de cuántas veces contiene el dividendo al divisor
- **I_3**: Sustracción repetida (contar cuántas veces se pueden sustraer numerador y denominador de los de la fracción dividendo)
- **I_4**: Cambio en la división de la unidad
- **I_5**: Otras/ En blanco.

Si la interpretación que propone el docente *es "cuando realizamos la división por el método de Juanito, entiendo que a 4 le vamos restando 2 unidades, así esta resta la llevamos a cabo 2 veces. Y a 9 le restamos 3 unidades. O dicho de otro modo, ¿Cuántas veces cabe 2 en 4 y cuántas veces cabe 3 en 9*?", éste se encuentra en la categoría de comparación, es decir, cuántas veces cabe una fracción en otra, categoría **I_2**.

b.2) Categorías para el algoritmo ID, consistentes en interpretarlo como:

- **Y_1:** Cálculo de cuántas veces contiene el dividendo al divisor
- **Y_2:** División de números naturales
- **Y_3:** División es independiente del número de elementos del conjunto de referencia ("trozos en que se divide la unidad") (Aplicación de la propiedad fundamental de la división, $a \div b = (a \cdot m) \div (b \cdot m)$)
- **Y_4:** Otras/ En blanco.

Si la interpretación propuesta es *"El método de Pepe: se basa en el hecho de que el conjunto de fracciones con un denominador fijo dado posee la misma aritmética que el conjunto de los naturales"*, podemos afirmar que está interpretando la división de fracciones por éste método como una división de naturales, por lo que estaría en la categoría **Y_2**.

c) Enunciar problemas de división de problemas asociados a los procedimientos de DND e ID. Cada una de las categorías referentes a los problemas tendrá dos componentes. La primera señala si se ha establecido relación y con qué algoritmo; la segunda alude al tipo de problema propuesto. Así, si un profesor enuncia un problema de área relacionándolo con el algoritmo de dividir numeradores y denominadores entre sí, aparecerá la categoría

DividirNumeradorDenominador_Área. Las combinaciones que aparecen en los trabajos analizados, se detallan en la tabla 3.2:

Tabla 2.2

Combinaciones tipo de problema-algoritmo

Tipo de problema	DND	ID	No relación (NR)
Área [A]	DND_[A]		
Razón [R]			NR_[R]
Comparación multiplicativa [CM]	DND_[CM]	ID_[CM]	NR_[CM]
Parte/todo [PT]			NR_[PT]
Reparto [Re]	DND_[Re]		
Otros [O]			NR_[O]

Aparecen los procedimientos de dividir numerador y denominador entre sí (DND) y de igualar denominadores (ID), y “No relación”, que significa que el profesor a enunciado un problema pero sin asociarlo a ninguno de los algoritmos planteados.

Por otro lado, al analizar el tipo de problema, hemos encontrado un tipo de problema que no estaba recogido anteriormente. Lo hemos llamado de reparto (González & Block, 2005) y en ellos aparece una división de una fracción entre un entero. Un ejemplo de problema de reparto sería: “Cuatro hermanos compran ¾ partes de una finca. ¿Qué parte del total de la finca le corresponde a cada uno?”. En la componente de tipos de problemas “Otros”, están incluidos todos los problemas que no son de división de fracciones, como los de multiplicar o los que no tienen sentido. Los profesores proponen más de un problema por lo que estas categorías básicas aparecen combinadas. Por ejemplo, si un profesor propone un problema de área para el algoritmo de DND y uno de comparación multiplicativa para el de ID, estará en la categoría DND_[A]& ID_[CM], que sería la deseada, según Flores (2008). Si aparece sólo uno, simboliza que el profesor ha propuesto uno o varios problemas del mismo tipo y estableciendo la misma relación. Por ejemplo, si un profesor no establece ninguna asociación y enuncia dos problemas de comparación multiplicativa, pertenece a la categoría NR_[CM]; si plantea un solo problema de comparación multiplicativa sin establecer relación con los algoritmo, también pertenece a esta categoría.

Así, las categorías que han emergido tras el análisis de los problemas propuestos por los profesores son las siguientes:

- **C_1:** DND_[A]& ID_[CM]
- **C_2:** ID_[CM]
- **C_3:**DND_[Re]&DND_[O]&DND_[CM]
- **C_4:** NR_[CM]&NR_[R]
- **C_5:** NR_[CM]&NR_[O]
- **C_6:**NR_[CM]
- **C_7:**NR_[PT]
- **C_8:**NR_[O]

- La última fase corresponde a establecer relaciones entre las diferentes clases de categorías: justificaciones, interpretaciones y problemas, y relacionarlas con nuestros objetivos de investigación.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

En este capítulo vamos a mostrar los resultados que hemos obtenido tras el proceso de análisis de contenido. Para ello, en primer lugar, vamos a describir las diversas justificaciones e interpretaciones para cada uno de los tres algoritmos: DND, IM e ID. Mostraremos las frecuencias de las diferentes categorías, acompañadas de ejemplos procedentes de los trabajos y realizaremos una valoración global destacando algunos casos interesantes.

Posteriormente, se muestran los resultados obtenidos acerca de los problemas planteados por los profesores y el nivel de asociación que presentan para cada uno de ellos con los algoritmos.

Finalmente, extraeremos algunos resultados globales estableciendo relaciones entre los diferentes sistemas de categorías: justificaciones, interpretaciones y problemas.

Como hemos comentado anteriormente, el análisis de contenido se basa en la adscripción de las unidades de análisis a las diferentes categorías. El sistema de categorías construido para este estudio se describe en el epígrafe 3.4 y en la tabla 4.1 se incluye un resumen de dichas categorías.

Tabla 4.1

Cuadro-resumen del sistema de categorías

Apartado de la tarea		Categorías
Justificaciones		**J_1** : Usar la definición formal de la división en Q. **J_2**: Operatividad. Tiene dos subcategorías: **$J_{2,+}$:** Operatividad positiva **$J_{2,-}$:** Operatividad negativa **J_3:** Usar fracciones equivalentes **J_4:** Conversión de la división de fracciones en una división equivalente de números naturales o enteros. **J_5:** Aceptar sin justificación.
Interpretaciones	DND	**I_1**: Inverso del algoritmo de la multiplicación de fracciones. **I_2**: Cálculo de cuántas veces contiene el dividendo al divisor **I_3**: Sustracción repetida **I_4**: Cambio en la división de la unidad **I_5**: Otras/ En blanco.
	ID	**Y_1:** Cálculo de cuántas veces contiene el dividendo al divisor **Y_2:** División de números naturales **Y_3:** División es independiente del número de elementos del conjunto de referencia **Y_4:** Otras/ En blanco.
Problemas		**C_1:** DND_[A]& ID_[CM] **C_2:** ID_[CM] **C_3:**DND_[Re]&DND_[O]&DND_[CM] **C_4:** NR_[CM]&NR_[R] **C_5:** NR_[CM]&NR_[O] **C_6:**NR_[CM] **C_7:**NR_[PT] **C_8:**NR_[O]

4.1 Análisis de las justificaciones y las interpretaciones

La primera parte de la tarea de evaluación propuesta a los profesores en el curso consiste en justificar la validez de los tres algoritmos seleccionados en el epígrafe 2.2 y analizar qué significa la división de fracciones cuando se realiza por cada uno de los procedimientos. A continuación, mostramos las justificaciones proporcionadas por los profesores y sus interpretaciones para cada uno de los algoritmos.

4.1.1 Análisis del algoritmo Dividir Numeradores y Denominadores entre sí (DND)

Este procedimiento, que consiste en realizar la división de dos fracciones dividiendo entre sí los numeradores y denominadores de dividendo y divisor, es el primero que se les plantea a los profesores. Es un algoritmo que no suele aparecer en la mayoría de los libros actuales, por lo que, posiblemente, fuese totalmente desconocido para muchos.

Justificaciones. La primera tarea consiste en que los profesores justifiquen la validez general del procedimiento. Es un algoritmo que no deja indiferente a ninguno de los profesores participantes, ya que todos razonan sobre su validez. Parece que todos consideran que es un procedimiento válido para dividir, siempre que se pueda hacer, viéndolo como un procedimiento inverso del de la multiplicación. El problema se plantea cuando se discute su grado de generalidad.

Tabla 1.2

Justificaciones del algoritmo DND

Categorías		**J_1**	**J_2**		**J_3**	**J_4**	**J_5**	**Total**
			$J_{2,+}$	$J_{2,-}$				
ACEPTAN	**Nº Prof.**	1	1	0	4	0	0	6
	%	6%	6%	0%	23%	0	0	35%
NO ACEPTAN	**Nº Prof.**	0	0	11	0	0	0	11
	%	0%	0%	65%	0%	0	0	65%
	Total	1 / 6%	1 / 6%	11 / 65%	4 / 23%	0	0	17

De los 17 participantes, sólo 6 (35%) acepta la validez general de este procedimiento, mientras que el resto (65%) alega que sólo resulta válido en determinadas divisiones.

A pesar de que la mayoría de los profesores tiene una amplia formación matemática, sólo uno recurre a la definición formal de la división de fracciones, para justificar que este procedimiento es válido siempre:

> P7**: *"Juanito*** *Por otra parte, atendiendo a la propuesta de Juanito, para dos fracciones cualesquiera tendríamos:*
>
> $$\frac{x}{y}:\frac{a}{b}=\frac{x:a}{y:b}=(x:a):(y:b)=\frac{x}{a}:\frac{y}{b}$$
>
> *Si aplicamos una vez más la definición de división de fracciones,*
>
> $\frac{x}{a}:\frac{y}{b}=\frac{x}{a}\bullet\left(\frac{y}{b}\right)^{-1}=\frac{x}{a}\bullet\frac{b}{y}=\frac{x\bullet b}{a\bullet y}$*, que coincide con el deducido al principio aplicando la definición de fracciones,* $\frac{x\bullet b}{y\bullet a}$*, por verificarse la propiedad conmutativa del producto con números enteros (en el denominador)."*

Otro de los profesores, utiliza la notación de fracción como una división y justifica que se obtiene el mismo resultado que si lo hiciésemos por el algoritmo clásico de "Invertir y Multiplicar", procedimiento aceptado por él:

> P12: "*Juanito* $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}=\frac{a.d}{b.c}$ "

El resto de los profesores, tanto los que aceptan como los que no, basan sus argumentos en razones operatorias liadas a si se pueden llevar a cabo las operaciones. Recordando el ejemplo que se les plantea a los participantes, $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4:2}{9:3}=\frac{2}{3}$, se puede observar que en este caso no existen problemas de operatividad, ya que el numerador y el denominador del dividendo son múltiplos de los correspondientes en el divisor.

Los profesores que aceptan este algoritmo como general, alegan que cuando no estemos en esta situación idónea (numeradores y denominadores divisibles entre sí) se deben utilizar fracciones equivalentes para obtener la divisibilidad deseada, sin cuestionarse sobre si el resultado de este procedimiento es el cociente de las dos fracciones. Estos profesores identifican división de fracciones con la división de racionales, ya que como muestra el siguiente ejemplo, al buscar fracciones equivalentes, están realizando una división de racionales.

> P6: *"El algoritmo que emplea Juanito (dividir el numerador del dividendo por el del divisor y el denominador del dividendo por el del divisor) es válido y fácil de utilizar sobre todo cuando el numerador y el denominador del dividendo son múltiplos del numerador y del denominador del divisor, respectivamente.*
> *Ejemplos:*
> $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$ $\quad \frac{35}{16}:\frac{5}{8}=\frac{7}{2}$ $\quad \frac{12}{25}:\frac{6}{5}=\frac{2}{5}$ $\quad \frac{88}{21}:\frac{11}{7}=\frac{8}{3}$
> *En el caso en el que, el numerador del dividendo, el denominador o ambos no fueran múltiplos de los del divisor, como en*
> $$\frac{1}{5}:\frac{2}{3} \text{ o } \frac{7}{9}:\frac{3}{5}$$
> *se podría escribir una fracción equivalente al dividendo (p. e. multiplicando por el producto del numerador y el denominador del divisor) de modo que su numerador y su denominador fueran múltiplos del numerador y del denominador de divisor, respectivamente.*
> $\frac{1}{5}:\frac{2}{3}=\frac{6}{30}:\frac{2}{3}=\frac{3}{10}$ $\quad \frac{7}{9}:\frac{3}{5}=\frac{105}{135}:\frac{3}{5}=\frac{35}{27}$ *"*

No obstante, como se puede observar en la tabla 4.2, más de la mitad de los profesores rechazan que este procedimiento sea válido para realizar la división de dos fracciones cualesquiera, alegando que sólo es posible llevar a cabo este algoritmos cuando el numerador y denominador del dividendo sean múltiplos de sus correspondientes en el divisor, ya que si se obtiene un número racional como numerador o denominador del cociente, el resultado no es una fracción:

> P15: *"El método de Juanito es válido siempre que el cociente de los numeradores y el de los denominadores sea un número entero [...] En divisiones como* $\frac{5}{2}:\frac{3}{8}$*, sería prácticamente inaplicable."*
> P5: *"El primer procedimiento no es válido para todas las fracciones porque requiere que podamos dividir los numeradores y los denominadores separadamente; lo cual no siempre es posible. Por ejemplo, este método no es válido para efectuar 4/5:3/2."*

Es llamativo, que sólo uno de los profesores, P21, que no acepta como general este procedimiento, adhiriéndose a la operatividad negativa, utiliza la división formal de la división de fracciones para justificar que este procedimiento es válido siempre que se den las condiciones para poder llevar a cabo el algoritmo: *"siempre que el numerador y el denominador de la segunda fracción fueran divisores del numerador y del denominador de la primera respectivamente",* P21.

Interpretaciones. El siguiente apartado de la tarea pide que analicen qué significa la división de fracciones cuando se realiza por cada uno de los métodos. Para las interpretaciones correspondientes a este procedimiento de dividir numerador y denominador (DND), han surgido las categorías descritas en el epígrafe 3.4.

La distribución de los datos con respecto a estas categorías se muestra en la tabla 4.3, en la que aparecen diferenciados, aquellos que aceptan el algoritmo como general y los que sólo lo consideran válido en ciertos casos:

Tabla 4.3

Interpretaciones del algoritmo DND

Categorías		I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	Total
ACEPTAN	**Nº Prof.**	3	0	1	0	2	6
	%	17%	0%	6%	0%	12%	35%
NO ACEPTAN	**Nº Prof.**	1	1	1	1	7	11
	%	6%	6%	6%	6%	41%	65%
	Total	4 / 23%	1 / 6%	2 / 12%	1 / 6%	9 / 53%	17 / 100%

Podemos observar que 4 de los 11 profesores, a pesar de rechazar este algoritmo como general, le atribuyen diferentes interpretaciones para los casos en los que sea posible aplicarlo, es decir, que se puedan realizar las divisiones de números enteros que este algoritmo involucra.

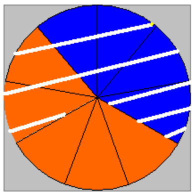
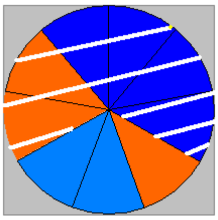
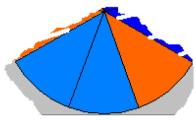
La mayoría de los profesores que establecen una interpretación lo hacen aludiendo a la multiplicación de fracciones ($\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$), dado que para realizar la multiplicación de dos fracciones se multiplican los numeradores y denominadores de los factores entre sí.

P13 (Acepta): *"El procedimiento de Juanito puede responder a la extensión del algoritmo de la multiplicación de fracciones a la división de las mismas, operando numeradores entre si y denominadores entre sí."*
P5 (No acepta): *"Este método se basa en que la multiplicación y la división son operaciones inversas y en que para multiplicar fracciones se multiplican los numeradores y denominadores separadamente."*

Otros dos profesores identifican este procedimiento para dividir con la resta repetida:

> P6 (Acepta): *"En el primer caso el significado de la división puede ser el de la división como sustracción repetida."*
> P11 (No acepta): *"Cuando realizamos un producto de fracciones por un entero* *4.*$\frac{3}{5}=\frac{3+3+3+3}{5}$*; Podemos considerar que la cantidad 3 la tenemos que sumar 4 veces. De forma análoga, cuando realizamos la división por el método de Juanito, entiendo que a 4 le vamos restando 2 unidades, así esta resta la llevamos a cabo 2 veces. Y a 9 le restamos 3 unidades. O dicho de otro modo ,¿Cuántas veces cabe 2 en 4 y cuántas veces cabe 3 en 9?."*

Destaca una interpretación dada por uno de los profesores que rechaza el procedimiento, alegando que se trata de un cambio en la división de la unidad.

> P21: "*El significado que otorgaré al procedimiento de Juanito es un "cambio en la división de la unidad".* $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}$ *significa que trabajaré con la tercera parte de la unidad, mi "nueva representación de la unidad será la tercera parte de la representación inicial de la unidad", y tomaré la mitad de las partes que antes tomé.*
> *Vamos por partes:*
> *"mi "nueva representación de la unidad será la tercera parte de la representación inicial de la unidad"", o sea que 9:3=3, me quedo con tres de las nueve partes y eso es mi nueva representación de la unidad.*
>
> 
>
> 
>
> *Luego "y tomaré la mitad de las partes que antes tomé", o sea que antes tenía 4 partes y ahora me quedo con 4:2, dos partes. En suma la nueva representación de la unidad está dividida en 3 partes iguales y he tomado 2 de ellas, la fracción que representan es 2/3."*
>
> 

Podemos considerar que interpreta la fracción como una relación parte-todo y, posteriormente, relaciona las dos fracciones involucradas en la división. Sin embargo, no otorga ningún significado a la división de fracciones, sino que se limita a describir lo que ha sucedido al aplicar el procedimiento.

Uno de los profesores, que no acepta este procedimiento como general, lo interpreta como una comparación:

> P9: *"En el primero de los procedimientos, la división hecha de ese modo se puede interpretar como el número de veces que cabe una fracción dentro de otra. Para ello se ve cuantas veces cabe el numerador de la primera en el numerador de la segunda dividiendo y del mismo modo con los denominadores."*

Está afirmando que para averiguar cuántas veces cabe una fracción en otra se hace a través del número de veces que cabe el numerador de una en el de la otra y de forma análoga para los denominadores. Parece que está tratando la fracción como dos partes distintas: numerador y denominador, en lugar de como un único número. Esto puede estar relacionado con que en la multiplicación de fracciones se operan de manera independiente los dos términos de las fracciones.

En último lugar, uno de los participantes, a pesar de aceptar el algoritmo como general (limitándose a que se obtiene el mismo resultado que por el método de invertir y multiplicar), reconoce que no conoce forma de justificar este modo de realizar la operación:

> P12: *"No soy capaz de encontrar una explicación que justifique esta forma de hacer la división"*

4.1.2 Análisis del algoritmo de invertir y multiplicar (I.M.)

Este algoritmo de invertir y multiplicar junto con las reglas mnemotécnicas asociadas a él (multiplicar en cruz, regla del sándwich, etc.) es el más conocido, ya que suele ser el que se viene enseñando en las escuelas y el que aparece en la mayoría de los libros de texto actuales. Como hemos comentado en el Capítulo 2, este algoritmo se puede obtener directamente de la definición formal de la división de racionales, definiendo esta operación como la multiplicación del dividendo por el inverso del divisor (epígrafe 2.1)

<u>Justificación:</u> Debido a lo anterior, los 17 profesores participantes en el estudio aceptan este algoritmo como general.

Tabla 4.4

Justificaciones del algoritmo IM

Categorías	**J_1**	**J_2**		**J_3**	**J_4**	**J_5**	**Total**
		$J_{2,+}$	**$J_{2,-}$**				
Nº Prof.	5	2	0	0	0	10	17
%	29%	12%	0	0	0	59%	100%

Podemos observar en la tabla 4.4, que además de ser aceptado por el cien por cien de los profesores, un alto porcentaje (59%), no tiene la necesidad de dar justificación acerca de la validez de este procedimiento, dando razones como:

> P15: *"El método de Antoñito es, obviamente, cierto".*
> P5: *"[...] son siempre válidos. El segundo es el que "tradicionalmente" se nos ha enseñado en el colegio".*

Por otro lado, un 29% de los participantes incluye la definición formal de la división de fracciones y la utiliza para garantizar la validez general de este procedimiento:

> P7: ***"Antoñito*** *Comenzaré por la propuesta de Antoñito, según el cual, al multiplicar el cruz obtendríamos:*
> $\frac{x}{a}:\frac{y}{b}=\frac{x\bullet b}{a\bullet y}$*, resultado que coincide con el obtenido aplicando la definición."*

Llama la atención que dos profesores justifiquen la veracidad atendiendo a que dos números siempre se pueden multiplicar, afirmación que debe estar influenciada por las realizadas en el algoritmo de DND.

> P9: *"El segundo es válido ya que lo único que hacemos es multiplicar numerador por denominador y denominador por numerador."*
> P24: *"El procedimiento que lleva a cabo Antoñito es válido. Ya que dos números cualesquiera siempre se pueden multiplicar".*

<u>Interpretaciones:</u> Como se ha comentado, sólo una minoría de los profesores realiza interpretaciones u observaciones con respecto a este algoritmo, la mayoría lo aceptan pues lo consideran como la definición. Haciendo referencia al proceso de enseñanza-aprendizaje de este concepto matemático, un profesor alude a la necesidad de tener conocimientos previos, algunos de ellos contemplados en el paquete de conocimientos propuesto por Ma (1999, p.97):

> P23: *"En el segundo caso tienen que conocer el inverso de los números quebrados y que la división como operación es a su vez la inversa de la multiplicación. Así dividir será multiplicar por el inverso."*

Este profesor está mostrado que son necesarias ciertas ideas básicas para la comprensión de la división de fracciones, como muestra Alfinio Flores (2002). Es decir, hay que partir de la definición de la división como multiplicación por el inverso, y requiere identificar el inverso como la fracción permutada.

En esta misma línea, teniendo en cuenta el aprendizaje de los estudiantes, dos profesores reconocen que:

> P13: *"Este concepto no es propio de los contextos en que se suele ubicar un niño e implica conocer que el inverso de una fracción puede construirse intercambiando denominadores y numeradores, por lo que podíamos arriesgarnos a suponer que este procedimiento está desvinculado de los conocimientos conceptuales que llevan a él"*

También el profesor P21 asegura que es un procedimiento válido que el niño podrá utilizar, pero que no podrá justificar por qué. Ambos llevan el debate a la enseñanza, indicando que el algoritmo de la división no está suficientemente justificado en la misma.

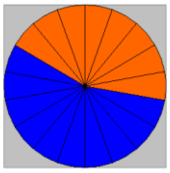
Recordemos que en el primer tema del curso de formación a distancia en el que participan estos profesores se presentaban una serie de recursos ymateriales para la enseñanza de las fracciones. Utilizando algunos de estos materiales, el profesor P2 utiliza el diagrama de Freudenthal para interpretar lo que significa hacer una división de fracciones por este algoritmo.

P2: *"El segundo caso vale para todas las fracciones ya que dividir $\frac{4}{9}$ entre $\frac{2}{3}$ significa calcular 4 veces 1\9 de 3\2 que si utilizamos dos diagramas de Freudenthal sería poner 3 barras que representen 1\2 poner debajo las piezas que dividan esto como si fuese la unidad en 9 partes iguales que corresponden con las barras de 1\18 (estas hay que hacerlas) y 4 veces esto corresponde a 12 partes de las 18 con respecto a la unidad"*

Apreciamos que en su propuesta destaca el empleo del diagrama, pero no lleva a cabo una división, sino una multiplicación, en la que ha transformado la división previamente (ha pasado de $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}$, a $\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}$).

De forma similar lo hace otro docente:

P21: *"Al multiplicar en cruz está duplicando las partes iguales entre las que está dividida la unidad 9.2=18, y triplicando las "partes que toma" 4.3=12.*
Antes había tomado 4 de las nueve partes iguales (4/9) y ahora tomo 12 de las "nuevas" partes iguales (12/18)."



En este caso, el profesor busca dar sentido al resultado de la división, no al proceso de llegar a este resultado.

Estos dos últimos trabajos le están dando el sentido de uso al algoritmo de invertir y multiplicar propuesto por Contreras (2012): 'Hacer el dividendo tantas veces menor como indica el numerador del divisor y tantas veces mayor como indica el denominador del divisor.'

En último lugar, se recuerda que en la tarea propuesta a los profesores se les pedía además que buscasen o propusiesen otro procedimiento válido para realizar la división de fracciones. En el enunciado de la tarea entregado a los participantes, Antoñito afirmaba que la división se hace multiplicando en cruz. En este trabajo se considera que la multiplicación en cruz es una regla mnemotécnica para recordar el algoritmo de multiplicar por el inverso o invertir y multiplicar (Flores, 2008). Aunque históricamente estos algoritmos hayan surgido como diferentes, actualmente todos se derivan directamente de la definición formal de la división en cruz.

Sin embargo, resulta llamativo que 9 de los 17 profesores (53%), proponen como nuevo algoritmo "multiplicar el dividendo por la inversa del divisor". De ellos, solamente uno reconoce que se trata del mismo algoritmo propuesto por Antoñito (IM), mientras que el resto lo consideran esencialmente diferente.

4.1.3 Análisis del algoritmo de Igualar Denominadores (ID)

El último de los métodos propuestos a los profesores consiste en obtener fracciones equivalentes al dividendo y al divisor de forma que ambos tengan el mismo denominador, con lo que el cociente será otra fracción con numerador el del dividendo y con denominador el numerador del divisor.

Justificaciones: En la tabla 4.5 mostramos las justificaciones expuestas por los profesores:

Tabla 4.5

Justificaciones del algoritmo ID

Categorías		J_1	J_2		J_3	J_4	J_5	**Total**
			$J_{2,+}$	$J_{2,-}$				
ACEPTAN	**Nº Prof.**	2	0	0	3	1	10	16
	%	12%	0	0	23%	6%	59%	94%
NO ACEPTAN	**Nº Prof.**	0	0	1	0	0	0	1
	%	0	0	6%	0	0	0	6%
	Total	2 / 12%	0	1 / 6%	3 / 23%	1 / 6%	10 / 59%	17 / 100%

Hay un profesor que no acepta como válido este procedimiento en general, alegando que no siempre es posible obtener fracciones equivalentes:

> P9: *"El tercer método tampoco es válido ya que es necesario para igualar los denominadores, que estos sean uno múltiplo del otro y eso no siempre es posible."*

Podemos interpretar a partir del ejemplo propuesto en la tarea $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4}{9}:\frac{6}{9}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, que el profesor ha interpretado que sólo se busca una fracción equivalente a una de las que intervienen en la división. De hecho, propone como nuevo procedimiento para dividir fracciones el mismo que se le dio a justificar (el de Pepe, ID), explicitando que se deben usar fracciones equivalentes:

> P9: *"Otra manera distinta de hacer la división de dos fracciones y que sirva para cualesquiera dos fracciones sería escribiendo fracciones equivalentes a las dadas, pero con el mismo denominador. Es decir, calcular el mínimo común múltiplo o un múltiplo común de los denominadores poner los correspondientes numeradores de las fracciones equivalentes correspondientes y luego procedemos a dividir como en el tercer método."*

Al igual que en las justificaciones propuestas para los otros algoritmos, sólo dos profesores recurren al uso de la definición formal para garantizar la validez general del procedimiento, razonando que por este método se obtiene siempre el mismo resultado que aplicando la definición.

> P7: *"Finalmente, la versión de Pepe nos dice que para resolver* $\frac{x}{y} : \frac{a}{b}$*, comenzamos igualando los denominadores de las dos fracciones, lo que se conseguiría multiplicando numerador y denominador de cada fracción por el denominador de la otra fracción, es decir:*
>
> *- para* $\frac{x}{y}$ *obtendríamos la fracción equivalente:* $\frac{x \bullet b}{y \bullet b}$
>
> *- para* $\frac{a}{b}$*, obtendríamos la fracción equivalente:* $\frac{a \bullet y}{b \bullet y}$
>
> *Si ahora dividimos los numeradores de las dos fracciones obtenidas:* $\frac{x \bullet b}{a \bullet y}$*, habremos llegado una vez más al resultado original de división de fracciones (teniendo en cuenta una vez más la propiedad conmutativa del producto de números enteros en el denominador."*

De forma análoga al procedimiento de DND, hay algunos docentes (23%), que se limitan a justificar la validez señalando que basta usar fracciones equivalentes, sin asegurar que el resultado obtenido sea realmente el cociente de la división que se está realizando:

> P11: *"También válido para todas las fracciones, ya que utiliza fracciones equivalentes."*

Sin embargo, el docente P15 alude a que lo que se hace al aplicar este procedimiento es convertir la división de fracciones en una división equivalente de números naturales.

> P15: *"El método de Pepe es intuitivo e interesante: al igualar el número de "trozos" en el que dividimos cada fracción, convertimos la división de fracciones en una división de naturales."*

Esto muestra la habilidad de los profesores para emplear la notación de fracción con diferentes sentidos, no sólo como fracción, sino como división, especialmente en casos operatorios. Es muy utilizada en Matemáticas para denotar la división debido a que facilita las operaciones y simplificaciones, por ejemplo, cuando se trabaja con radicales, o con expresiones algebraicas.

En último lugar, cabe resaltar, que de forma similar al algoritmo de IM, más de la mitad de los profesores (59%) lo acepta como general sin cuestionarlo:

> P25: *"El procedimiento para resolver Pepe la división de fracciones he probado con distintas fracciones y el resultado es siempre el mismo que si se hace multiplicando el dividendo por el inverso del divisor."*
> P5: *"[…] el tercero es claramente equivalente al segundo (IM)"*

Posiblemente, este método resulte más familiar que el de DND, por lo comentado anteriormente, que implica emplear la notación fraccionaria para denotar una división y operar y simplificar el dividendo y divisor, tal como se hace en otras partes de la matemática escolar y superior.

Interpretaciones: Al igual que para los otros métodos, tras justificar la validez de los procedimientos, se les pedía que analizasen qué significa la división de fracciones cuando se lleva a cabo por cada uno de los métodos. Para las interpretaciones correspondientes a este algoritmo de igualar denominadores (ID), han emergido las categorías descritas en el epígrafe 3.4.

En la tabla 4.6, se muestra la distribución de los datos analizados con respecto a este procedimiento. Se subdividen, al igual que en el caso de dividir numeradores y denominadores entre sí (DND), entre los profesores que aceptan como general el procedimiento y los que lo rechazan, aunque, como hemos visto anteriormente, sólo uno de los profesores rechaza este procedimiento.

Tabla 4.6

Interpretaciones del algoritmo ID

Categorías		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	**Total**
ACEPTAN	**Nº Prof.**	6	2	1	7	16
	%	35%	12%	6%	41%	94%
NO ACEPTAN	**Nº Prof.**	0	0	0	1	2
	%	0	0	0	6%	6%
	Total	6 / 35%	2 / 12%	1 / 6%	7 / 41%	17 / 100%

Aproximadamente la tercera parte de los participantes relacionan este método para realizar la división con la comparación, con averiguar cuántas veces cabe la fracción divisor en la fracción dividendo:

> P19: *"Reducir a común denominador y luego dividir los numeradores es una de las formas más intuitivas por estar más relacionada con el concepto de división como reparto, o como número de veces que un número contiene a otro, que ya conocen de la división de naturales."*
> P6: *"En el tercer caso se realiza la división por comparación, igualando denominadores."*

Otros dos profesores relacionan este algoritmo de división de fracciones con la división de números naturales:

> P5: *"Este método se basa en el hecho de que el conjunto de fracciones con un denominador fijo dado posee la misma aritmética que el conjunto de los naturales."*

Este profesor está identificando las operaciones en un conjunto de fracciones con el mismo denominador con las operaciones en los números naturales, lo que puede ser interpretado como el establecimiento del isomorfismo N≅ $\left\{\frac{a}{b}, a \in N\right\}$, b fijo. Esto es cierto para la suma y la resta, pero no está tan claro para la multiplicación y la división. Si multiplicamos dos fracciones con igual denominador, el producto no tiene el mismo denominador que los factores, por lo que no pertenece a este conjunto. De forma análoga ocurre cuando realizamos la división de dos fracciones con el mismo denominador. En esta situación, se está mezclando el concepto de fracción con la notación fraccionaria para la división.

Uno de los profesores interpreta este algoritmo como una justificación de que la división de dos fracciones es independiente del conjunto de referencia con respecto al cual están expresadas, es decir, del número de partes iguales en que está dividida la unidad.

> P7: *"[…] al pasar de la división de fracciones* $\frac{96}{4}:\frac{3}{4}$ *a la fracción de los numeradores,* $\frac{96}{3}$*, lo que utiliza es que la división de dos valores numéricos es independiente del nº de elementos del conjunto de referencia con respecto al cual están dadas dichas cantidades. Es decir, las siguientes divisiones serían todas equivalentes:* $\frac{96}{4}:\frac{3}{4}=\frac{96}{1}:\frac{3}{1}=\frac{96}{10}:\frac{3}{10}=\frac{96}{23}:\frac{3}{23}$ *=………..."*

Este planteamiento, parecido al propuesto por los que consideran que resulta una división de números naturales, necesita una matización.[1] En realidad, podemos interpretar que está haciendo uso de la propiedad fundamental de la división:

$$a \div b = (a \cdot m) \div (b \cdot m)$$

Por último, casi la mitad de los participantes (47%) no dan interpretaciones significativas, se limitan a repetir cómo se realiza el procedimiento o, simplemente, no dan ninguna:

> P9 (No acepta): *"En el tercero de los procedimientos, la división hecha de este modo se puede interpretar como que dividir una fracción por otra es lo mismo que dividir la primera por otra fracción equivalente a la segunda, pero con el denominador de la primera."*

Incluso, hay un profesor que sugiere que no es necesario obtener fracciones equivalentes con denominador común, destacando que esto puede complicar este procedimiento cuando hay otros que no necesitan hacerlo, por lo que resulta más sencilla su aplicación.

[1] Es cierto que la división es independiente de los denominadores, pero siempre y cuando éstos sean iguales. Si para realizar la división de dos fracciones debemos obtener fracciones equivalentes a las dadas pero con el mismo denominador, también cambiarán los numeradores, por lo que el cociente de la división si depende del conjunto de referencia con respecto al que se expresan dividendo y divisor. Por ejemplo, si realizamos la división $\frac{3}{4}\div\frac{5}{6}$ por este método, si el resultado no dependiese de los denominadores como afirma esta profesora, éste sería $\frac{3}{5}$, sin embargo $\frac{3}{4}\div\frac{5}{6}=\frac{9}{10}\div\frac{10}{12}=\frac{9}{10}$, y $\frac{3}{5}\neq\frac{9}{10}$. Por tanto, hay que explicitar que será independiente cuando éstos sean iguales.

> P24: *"Pepe afirma que es necesaria la construcción de fracciones equivalentes con denominador común, cosa que realmente no lo es. Al procedimiento no le encuentro pega, al menos aún, tan sólo que no es necesaria la transformación a fracciones equivalentes con denominador común."*

Su razonamiento se basa en un problema en el que interviene una división de una fracción por un número natural, que el profesor lo resuelve por el método de invertir y multiplicar, por lo que no llega a demostrar que no es necesario obtener fracciones equivalentes para aplicar este procedimiento, sino que hay otro procedimiento en el que no es necesario calcularlas, el método clásico.

4.1.4 Resultados parciales

Para concluir con el análisis de la primera parte de los trabajos, veamos un resumen global de los tres algoritmos. En primer lugar, recordemos que teníamos un conjunto de categorías común para las justificaciones de todos los procedimientos.

Tabla 4.7

Justificaciones de los tres algoritmos

Categorías/ Algoritmos	**J_1**	**J_2**		**J_3**	**J_4**	**J_5**	**Total**
		$J_{2,+}$	**$J_{2,-}$**				
DND	1	1	11	4	0	0	17
IM	5	2	0	0	0	10	17
ID	2	0	1	3	1	10	17
Total	8 / 16%	3 / 6%	12 / 23%	7 /14%	1 / 2%	20/ 39%	51/100%

En la tabla 4.7, se puede observar, que la categoría con mayor frecuencia es la J_5, que corresponde a la aceptación sin justificación. Esta categoría aparece en el procedimiento clásico y en el de igualar denominadores, probablemente por ser los que aparecen usualmente en los libros o se utilicen en el álgebra. Sin embargo, ningún profesor queda indiferente al algoritmo de dividir numeradores y denominadores entre sí, aunque una mayoría lo rechaza alegando que no siempre es posible llevarlo a cabo, sin considerar la posibilidad de obtener fracciones equivalentes para poder realizarlo, algo muy común en los algoritmos de sumar y restar fracciones.

No obstante, un 14% de las justificaciones hacen alusión al uso de fracciones equivalentes, lo que significa que los profesores son conscientes de la relación entre los racionales y las fracciones, es decir, identifican una división de fracciones con una de racionales.

En último lugar, recordemos que los participantes son profesores de secundaria en ejercicio, por lo que tienen una amplia formación matemática, lo que justifica que aparezca el uso de la definición como medio de justificación.

En cuanto al significado atribuido a los diferentes algoritmos podemos extraer también algunas conclusiones. En primer lugar, que hay un alto porcentaje que no necesita dar ningún tipo de interpretación, en especial, para el algoritmo clásico de invertir y multiplicar. Por otro lado, la única interpretación que aparece simultáneamente para el algoritmo DND e ID, es la comparación: averiguar cuántas veces cabe el divisor en el dividendo. Está interpretación es fácilmente aplicable al concepto de división de números enteros en numerosos problemas, mientras que otras no, lo que puede justificar su aparición en ambos métodos.

Sin embargo, cabe resaltar la interpretación dada por uno de los profesores para la división de fracciones en general, sin relacionar dicha interpretación con ningún algoritmo. P26 propone dos etapas previas a la división de dos fracciones cualesquiera:

P26: *"El problema de dividir fracciones podríamos enfocarlo en tres etapas:*

a) Dividir una fracción por un número natural: ¿Qué significa dividir 7/4 entre 3? Obviamente, hacerlo 3 partes iguales. Para ello, cada cuarto lo hacemos 3 trozos y el resultado sería 7/12. Igualmente, podríamos hacer 3 trozos el 7 y obtendríamos $\frac{3'\widehat{3}}{4}$ *que, aunque correcto, nos aleja del concepto de fracción como hacer partes y tomar partes. ¿Sólo serviría entonces para los casos en que el numerador es múltiplo del divisor? Dejémoslo así, por ahora, para retomarlo más tarde.*

b) Dividir una fracción por una parte de la unidad: ¿Cuántas veces contienen 7/4 a 1/5? 7 unidades contienen 35 veces a 1/5, pero, como las hemos hecho 4 partes, serán 35/4. También, en este caso, podríamos haberlo aplicado al denominador: la quinta parte de 4 es 0'8, y obtener $\frac{7}{0'8}$ *¿sirve este procedimiento aunque use números decimales?*

c) Dividir una fracción por otra: ya no tenemos problemas para dividir 7/4 entre 3/5 si lo consideramos como una doble operación de dividir primero entre 3 y, luego, entre 1/5. El resultado sería 35/12 si consideramos los procedimientos que garantizan números enteros o $\frac{3'\widehat{3}}{0'8}$*, si admitimos la otra opción."*

Este proceso de división de fracciones relaciona esta operación con conocimientos previos, ya que, en cierto modo, va extendiendo el concepto de división de los números naturales de repartir en partes iguales, hasta el uso de dos números racionales. Este modo de entender y de construir la división de fracciones puede tener mucho potencial pedagógico, salvando que no es matemáticamente correcto usar "fracciones" en las que numerador y denominador no sean números enteros.

4.2 Análisis de la asociación problemas-algoritmos

La última parte de la tarea y la más significativa, consiste en enunciar problemas que sean resolubles mediante la división de fracciones y asociarlos a los tres algoritmos propuestos, de modo que cada tipo de problema se asocie al procedimiento que resulte más intuitivo para su resolución.

Recordamos que había cuatro tipos de problemas solubles mediante división de fracciones (Greer, 1992):

- Problemas de razón
- Problemas de comparación multiplicativa
- Problemas de parte/todo
- Problemas de área de rectángulos

De todos los algoritmos descritos con Contreras (2012), se propone tres a los profesores: Dividir numerador y denominador entre sí (DND, Juanito en la tarea), el clásico de invertir y multiplicar (ID, Antoñito) e igualar denominadores y obtener como numerador del cociente el numerador de la primera y como denominador el numerador del divisor (ID, Pepe). Flores (2008) establece una relación entre estos tres procedimientos y los diferentes tipos de problemas según las características de éstos, como vimos en el epígrafe 2.3.

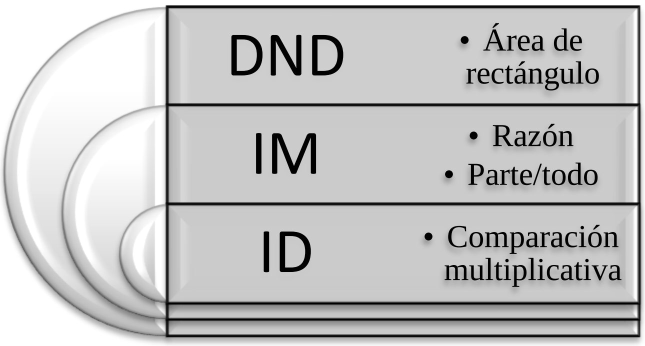


Figura 4.8: Asociación algoritmos-problemas

De los 17 trabajos analizados, 7 profesores establecen relación entre los problemas que plantean y los procedimientos, mientras que el resto se limita a proponer problemas y resolverlos por uno o varios métodos. Teniendo en cuenta las categorías construidas y descritas en el epígrafe 3.4, podemos observar que las categorías en las que los profesores establecen algún tipo de asociación son las tres primeras: $C_{1,}$ C_2 y $C_{3.}$

Veamos la distribución de los trabajos según las categorías:

Tabla 4.9

Categorías problemas-algoritmos

Categorías	**C_1**	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**C_6**	**C_7**	**C_8**	**Total**
Nº Prof.	3	3	1	1	2	5	1	1	17
%	18%	18%	6%	6%	11%	29%	6%	6%	100%

Teniendo en cuenta la figura 4.8 en el que se resumen las relaciones establecidas por Flores (2008), la categoría C1 sería la deseable. Un 18% de los participantes se encuentra en esta categoría, como por ejemplo:

> P5: *"- De un rectángulo de área 15/16 sabemos que uno de sus lados mide 5/4 ¿cuánto mide el otro? [Método de Juanito, DND].*
> *- Una botella de refresco contiene 3/4 de litro. Si compramos 7 botellas y tenemos vasos cuya capacidad es 1/3 de litro ¿cuántos vasos podemos llenar? [Método de Pepe, ID]."*

Propone un problema de área para el procedimiento de DND, a pesar de no aceptar este procedimiento como general y otro de comparación multiplicativa para el de ID.

Otro 18% realiza una asociación parcial, proponiendo sólo problemas para el último de los procedimientos propuestos. Dos de estos profesores no aceptan como general el primer algoritmo, lo que puede justificar que no enuncien problemas asociados a él. El tercero de los profesores de esta categoría, que sí lo acepta, no propone ningún tipo de problema para él. Los problemas propuestos son:

> *-En una tienda de tejidos hay dos trozos de tela iguales. Del primero se ha vendido por la mañana la mitad y del segundo se han vendido por la tarde las 3/5 partes. ¿Cuántas veces cabe el primer trozo en el segundo trozo?*
> *-¿Cuántas veces contiene 4/9 a 2/3?*
> *-¿Cuántos botes de 1/10 litro se llenan con tres botellas de medio litro?*

Cabe resaltar que el tercero de los problemas es compuesto, ya que implica una multiplicación y una división y que el segundo se limita a realizar una comparación entre números, en un contexto puramente matemático.

En uno de los trabajos, como ya se ha comentado anteriormente, se ha encontrado un tipo de problema no contemplado inicialmente, que hemos denominado de reparto, ya que realiza una división de racional entre entero (González & Block, 2005). El P21 asocia este tipo de problemas a DND. No obstante, este profesor propone diversos tipos de problemas para este algoritmo:

> P21: *"-Una familia que vive en Montevideo alquila una casa en Pirlápolis para sus vacaciones. Cuando salen de Montevideo el indicador de combustible le marca que tienen 4/5 de tanque, llegar a Pirlápolis les consumió la mitad del combustible, ¿Qué indica ahora el marcador de combustible?*
> *-Una persona recibe 6/7 de una herencia y la reparte en partes iguales entre sus tres hijos. Ayúdate con el Diagrama de Freundenthal para determinar qué parte de la herencia le corresponde a cada hijo.*
> *-Laura quiere utilizar como unidad de medida una varilla que mide 7/8 de metros y medir con ella una calle de 1421/16 metros. Indica con esta nueva unidad cuántas "varillas" mide la calle."*

El primero de ellos corresponde a la categoría "Otros", ya que propone un problema que se puede resolver mediante una multiplicación $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}$ o mediante la división de una fracción entre un entero $\frac{4}{5} : 2$. El segundo es el que hemos denominado de reparto y el tercero de los propuestos de comparación multiplicativa. El enunciado de diferentes tipos de problemas para un mismo algoritmo se puede interpretar como que no ha establecido un proceso de asociación entre problemas y algoritmos. Hay que resaltar también, que este profesor enuncia problemas asociados al algoritmo de IM, siendo uno de ellos de multiplicar y el otro de comparación multiplicativa, lo que refuerza la interpretación anterior.

En la cuarta categoría se encuentra el único profesor que ha propuesto un enunciado correspondiente a un problema de razón y otro de comparación multiplicativa, sin asociarlos a ningún procedimiento:

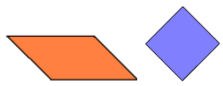
> P11:- *¿Cuántas botellas de ¾ de litro puedes llenar con 3 litros de agua?*
> *-Si 3/7 de tarta pesan 9/14 de kilo, ¿Cuánto pesa una tarta entera?*

Con la categoría C_8 ocurre algo similar, encontramos el único problema de relación parte todo que encontramos. El profesor ha tenido que proponer dos clases de atributos (división de la tableta, cada una ilustrada con un animal), para que aparezcan al menos una fracción como miembros de la división, aunque el reparto lo lleva a dividir entre entero ($\frac{1}{6}: 4$):

> P24: *"Una tableta de chocolate Jungly de Nestlé viene dividida de fábrica en 6 porciones idénticas en área pero cada sexto de la tableta representa mediante un grabado a un animal distinto. Cada niño quiere una porción de cada animal. Si deseamos repartirla entre cuatro niños de forma que cada uno reciba la misma cantidad del dulce ¿Qué proporción corresponde a cada niño? "*

Como se comentó en las justificaciones del algoritmo ID, este profesor proponía este problema para mostrar que en el algoritmo de Pepe no es necesario igualar denominadores para llevarlo a cabo, lo que no queda justificado.

La mayoría de los problemas propuestos por los profesores son de comparación multiplicativa, por lo que en la sexta categoría se sitúan casi una tercera parte de los profesores, proponiendo enunciados diversos, aunque la mayoría de ellos corresponden a repartir cierta cantidad de líquido en recipientes de determinada capacidad.

> P6*: "-Observa la siguiente figura cuya área es 1/2, ¿cuántos paralelogramos de área 1/8 son necesarios para construirla?*
>
> 
>
> *-Si un Km equivale a 5/8 de milla aproximadamente. ¿Cuántos kilómetros se recorren en las 500 millas de Indianápolis? Si un Km equivale a 5/8 de milla aproximadamente. ¿Cuántos kilómetros se recorren en las 500 millas de Indianápolis?"*
> P15: *"Se quiere envasar ¾ de litro de perfume en botes de 1/8 de litro. ¿Cuántos botes necesitamos?"*
> P2: *"Tenemos un bote de tomate de 3/4 de kilogramo si queremos distribuirlo en tarros de 1/6 de kilogramo para hacer salsa. ¿Cuántos botes utilizaremos de 1/6 de kilogramo?"*

Por último, cabe destacar que algunos participantes propone problemas de multiplicar en lugar de dividir o problemas que no tienen sentido.

P2: *"Estamos en una situación de sequia y en el pantano que abastece de agua a la comarca del Barcelonés (Barcelona) sólo le quedan 2/5 de su capacidad. Las autoridades han decidido racionar esta agua en proporción a la cantidad de población que hay en cada una de las ciudades tomando la decisión de dividir esto entre 2/3 para consumo de la ciudad, el resto de las poblaciones y dejar en reserva. ¿Qué proporción del total corresponde? ¿Cómo interpretas el resultado? ¿Cuál es el error?"*
P21: *"En el balneario "La Floresta" (lugar donde estoy veraneando) se ha dividido un terreno en 8 lotes para rematar. Una persona quiere comprar ¾ del terreno, ¿cuántos lotes debe rematar?"*
P9: *"Halla las 4/9 partes de 3/2."*

4.2.1 Resultados parciales

Como hemos venido describiendo, la mayoría de los problemas que aparecen son de comparación, apareciendo solamente tres de área de rectángulos, que Flores (2008) asocia al algoritmo de dividir numeradores y denominadores entre sí. Además, aparecen uno de razón y otro de parte todo. Sin embargo, cabe desatacar que aparece un nuevo tipo de problemas, problemas de reparto, no contemplados inicialmente por tratarse de la división de una fracción en un entero. No obstante, podemos ampliar la asociación tipo de problema-algoritmo. El profesor que propone este problema, lo asocia al primer procedimiento, DND.

P21: *Una persona recibe 6/7 de una herencia y la reparte en partes iguales entre sus tres hijos. Ayúdate con el Diagrama de Freundenthal para determinar qué parte de la herencia le corresponde a cada hijo.*

Sin utilizar el diagrama de Freundenthal, la operación asociada a la resolución de este problema sería $\frac{6}{7} \div 3$. Según este profesor, resulta intuitivo repartir los 6 entre los tres hermanos, sin considerar si son sétimos, octavos o medios, por lo que podríamos asociarle el algoritmo DND: $\frac{6}{7} \div 3 = \frac{6 \div 3}{7} = \frac{2}{7}$. Sin embargo, también puede ser interpretado como que a cada hermano recibirá un tercio de la herencia, con lo que resulta intuitivo también el algoritmo de Invertir y Multiplicar (ID), cuando se trate de una división por un entero: $\frac{6}{7} \div 3 = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$. Concluyendo, podemos ampliar la tabla 2.9 con el tipo de problema de reparto asociado a DND o IM.

4.3 Resultados globales

Una vez descritas las tres partes de la tarea: justificaciones, interpretaciones y problemas, vamos a analizar las posibles relaciones que hay entre ellas. En la siguiente tabla, se muestra una clasificación de los datos, separada por los algoritmos planteados, divididas en justificaciones e interpretaciones y su relación con las categorías de los problemas. Cada fila corresponde a la respuesta de un profesor.

Tabla 4.10

Clasificación general de los datos en las categorías

Profesor	DND		IM	ID		Problemas
	Just.	Inter.	Just.	Inter.	Just.	
P5	$J_{2,-}$	I_1	J_5	J_5	Y_2	
P19	J_3	I_1	J_1	J_5	Y_1	C_1
P13	J_3	I_1	J_1	J_5	Y_1	
P26	$J_{2,-}$	I_5	J_5	J_5	Y_4	
P12	$J_{2,+}$	I_5	J_5	J_5	Y_1	C_2
P25	$J_{2,-}$	I_5	J_5	J_5	Y_4	
P21	$J_{2,-}$	I_4	J_1	J_1	Y_4	C_3
P11	$J_{2,-}$	I_3	J_5	J_3	Y_1	C_4
P7	J_1	I_5	J_1	J_1	Y_3	C_5
P2	$J_{2,-}$	I_5	J_5	J_3	Y_3	
P9	$J_{2,-}$	I_2	$J_{2,+}$	$J_{2,-}$	Y_4	
P6	J_3	I_3	J_5	J_5	Y_1	
P16	$J_{2,-}$	I_5	J_5	J_5	Y_1	C_6
P15	$J_{2,-}$	I_5	J_5	J_4	Y_2	
P18	$J_{2,-}$	I_5	J_5	J_3	Y_4	
P24	$J_{2,-}$	I_5	$J_{2,+}$	J_5	Y_4	C_7
P23	J_3	I_1	J_1	J_5	Y_4	C_8

A partir de esta clasificación podemos establecer algunas relaciones. En primer lugar, cabe resaltar que sólo dos profesores utilizan el mismo argumento para justificar la validez de los tres algoritmos. Uno de ellos utiliza la definición formal de la división (J_1), haciendo uso de notación algebraica y el otro se limita a razonar considerando la operatividad (J_2), es decir, estudiando si en todos los casos se pueden realizar los cálculos que el algoritmo involucra.

Podemos observar también, que los tres profesores que argumentan la validez del procedimiento de igualar denominadores, ID, mediante el uso de fracciones equivalentes (J_3), rechazan DND alegando que sólo se puede utilizar cuando el numerador y denominador del dividendo sean múltiplos de sus correspondientes en el divisor ($J_{2,-}$), sin contemplar el uso de fracciones equivalentes.

Por otro lado, cabe destacar que los tres únicos profesores que plantean un problema de área de rectángulos asociados al algoritmo DND, es decir, se sitúan en la categoría C_1, interpretan este procedimiento a partir del algoritmo de multiplicación de fracciones (I_1).

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este último capítulo realizaremos un balance sobre los resultados obtenidos en relación a los objetivos que nos habíamos propuesto y considerando el modelo de Conocimiento para la Enseñanza de las Matemáticas desarrollado en la Universidad de Michigan. Describimos también las dificultades o limitaciones con las que nos hemos encontrado durante el desarrollo de este trabajo, considerándolas como posibles vías de continuación de estudio, junto con otras sugerencias de ampliación de esta investigación.

5.1 Conclusiones generales

Recordemos que el objetivo principal de este trabajo es caracterizar el conocimiento profesional que tienen los profesores de matemáticas sobre la división de fracciones, partiendo de la conjetura de que los diferentes algoritmos que existen para realizar dicha operación adquieren significado a través del tipo de problemas para los que resultan más intuitivos (Flores, 2008).

Este conocimiento profesional que pretendemos comprender, se sitúa dentro del dominio Conocimiento de los Contenidos según el modelo de Conocimiento para la Enseñanza de las Matemáticas propuesto por Ball el al.(2008), como hemos comentado anteriormente. En este dominio, encontramos tres subdominios: Conocimiento Común del Contenido, Conocimiento Especializado del Contenido y Conocimiento del Horizonte Matemático, que fueron descritos en el epígrafe 2.4.2. Por tanto, el conocimiento profesional que tiene nuestro grupo de profesores acerca de la división de fracciones, debería estar compuesto por conocimiento de estos subdominios.

En estas circunstancias, consideraremos que un profesor tiene que disponer de un conocimiento que le permita desarrollar el proceso de aprendizaje-enseñanza de este contenido de forma efectiva y con significado.

En primer lugar, un profesor debe conocer diferentes procedimientos para realizar las operaciones, en nuestro caso, para llevar a cabo la división de dos fracciones, conocimiento que podemos situar en el subdominio de Conocimiento Especializado. En esta investigación, se proponía a los profesores participantes tres algoritmos distintos: Dividir Numeradores y Denominadores entre sí, el clásico de Invertir y Multiplicar e Igualar Denominadores, tres procedimientos conocidos por los profesores chinos (Ma, 1999). De estos métodos el clásico es conocido y aceptado por todos; sin embargo, el primero de ellos, DND, es rechazado por la mayoría como un procedimiento general para realizar esta operación. El ID también es aceptado por la mayoría, en muchas ocasiones, sin ofrecer ningún tipo de razonamiento. Por tanto, podemos concluir que el conocimiento que tiene nuestro grupo de profesores sobre los diferentes algoritmos no es muy extenso, aunque la mayoría dispone, al menos, de dos métodos diferentes. A partir de esto, sería interesante estudiar cuántos algoritmos se enseñan en las escuelas, si son más de uno, y cuáles son.

En matemáticas, en el campo de las operaciones, se distingue entre la definición de las mismas, los diferentes procedimientos de cálculo y las reglas mnemotécnicas que surgen para recordar dichos procedimientos. Un profesor competente dispone de razones para diferenciarlos, un tipo de conocimiento que se podría situar en el subdominio de Conocimiento en el Horizonte Matemático. En la división de fracciones, una de las posibles definiciones es la multiplicación del dividendo por el inverso del divisor, muy relacionada con el procedimiento de invertir y multiplicar, que se asocia con diferentes reglas mnemotécnicas como multiplicar en cruz o la regla del sándwich, indicadas en la Tabla 2.3. Una gran parte de nuestro grupo de profesores, tiene dificultades para distinguir entre definición, el procedimiento de invertir y multiplicar y multiplicar en cruz, como hemos podido comprobar al sugerirles que expusiesen un procedimiento distinto a los planteados en el enunciado.

Continuando en el subdominio de Conocimiento Especializado del Contenido, dado que uno de los principales propósitos de las matemáticas es la resolución de problemas, deben disponer de diferentes estrategias para la resolución de los mismos, en este caso para la resolución de problemas sobre división de fracciones. En esta investigación, no hemos obtenido la información suficiente acerca de las estrategias utilizadas por los profesores para resolver este tipo de problemas, lo que puede ser una vía de continuidad.

El primer apartado de la tarea de evaluación consistía en justificar la validez de los tres algoritmos anteriormente citados. El conocimiento que debe poseer un profesor para justificar la validez, lo podemos situar en los diferentes subdominios según el grado de relaciones que tenga que establecer. Si la justificación se limita a razones basadas en procedimientos, como por ejemplo, que siempre se pueden realizar las operaciones que el algoritmo involucra o acepta el algoritmo porque es el que se suele enseñar en las escuelas y el que aparece en los libro de texto, estaríamos en el Conocimiento Común. Si el profesor alude a tipos de problemas de división, distinguiendo sus elementos, disponiendo de modelos para resolver estos problemas con significado, se sitúa en el Conocimiento Especializado. Emplea conocimiento en el Horizonte Matemático si utiliza razonamientos más avanzados que puedan solventar problemas de operatividad y que se basen en contenidos previos, utiliza un procedimiento de justificación formal, basándose en razones matemáticas formales y haciendo uso de notación algebraica. En nuestro estudio, encontramos que la mayoría de los profesores tiene un buen Conocimiento Común, asemejándose los resultados obtenidos por Lo & Luo (2012) con futuros profesores taiwaneses quienes mostraron un sólido Conocimiento Común. La mayoría expone razones basadas en operatividad del los algoritmos, es decir, si se pueden realizar las operaciones que éste implica o aceptan el algoritmo porque lo consideran obvio al ser el que suele aparecer en los libros de texto, como es el caso del algoritmo clásico. Este puede ser uno de los motivos por los que en la escuela, en la mayoría de las ocasiones, los profesores se limitan a enseñar el algoritmo sin explicar por qué es así. Sólo una minoría hace alusión a que en la división de fracciones se pueden usar fracciones equivalentes, lo que muestra que tiene conocimiento acerca de la relación entre los números racionales y las fracciones. Sólo un profesor utiliza un razonamiento formal para justificar la validez de los tres procedimientos. Por otro lado, teniendo en cuenta que los profesores están en ejercicio y que tiene contacto con los estudiantes, es de destacar que ninguno ha hecho alusión a los problemas de división de fracciones para ofrecer la justificación de alguno de los métodos. Con éste análisis de las justificaciones hemos alcanzado el primer objetivo propuesto.

Interpretar los nuevos procedimientos que se le presentan en la tarea, con su conocimiento sobre la estructura multiplicativa de los números racionales, ayuda a que los profesores les den mayor significado, manifestando un mejor Conocimiento del Horizonte Matemático. En la segunda parte, se les pedía que interpretasen cada uno de los algoritmos. La mayoría de ellos no da ninguna interpretación para el algoritmo clásico de invertir y multiplicar. Un alto porcentaje, asocia el algoritmo de igualar denominadores con un proceso de comparación de fracciones y sólo los que interpretan el algoritmo de dividir numeradores y denominadores entre sí a partir del algoritmo de multiplicación de fracciones, consiguen relacionar este método con problemas de área de rectángulos. Por tanto, hemos cumplido el objetivo 2 al describir las diferentes interpretaciones dadas por los docentes.

Como ya se ha dicho anteriormente, el significado de cualquier conocimiento matemático está incompleto si carece sentido, es decir, de contextos, situaciones o problemas en los que aparece y resulta de utilidad (Rico, 2012). Por tanto, un profesor debe ser capaz de reconocer diferentes situaciones en las que aparezca un contenido matemático elemental y también plantear dichas situaciones, mostrando un Conocimiento Especializado del Contenido. En nuestra investigación, se pedía a los profesores que planteasen diferentes problemas de división de fracciones, relacionándolos con los algoritmos DND e ID, de modo que hiciesen una interpretación de los mismos a través del tipo de problema al que son más afines. En nuestro estudio hemos podido apreciar que, sólo unos pocos establecen dicha relación, habiendo sólo tres profesores que lo realizan para los dos procedimientos anteriormente mencionados. La mayoría de ellos interpretan los algoritmos basándose en los procedimientos, en las operaciones que aparecen, más que en los significados a través de situaciones problemáticas. Esto contrasta con los resultados obtenido por Ma (1999) para los profesores chinos, quienes poseen una habilidad para generar representaciones empleando una rica variedad de temas y distintos modelos de división de fracciones. Por otro lado, teniendo en cuenta el tipo de problemas que aparecen, los más abundantes son los de comparación multiplicativa, y apareciendo sólo tres problemas de área de rectángulo, por lo que sería interesante estudiar el tipo de problemas sobre división de fracciones que aparecen en los libros de texto actuales. Por tanto, hemos cumplido el objetivo 3 analizando los problemas propuestos por los profesores y estudiando las asociaciones que hacen con los distintos algoritmos.

En definitiva, podemos concluir que el conocimiento de este grupo de profesores acerca de la división de fracciones se centra más en lo procedimental que en lo conceptual, lo que se refleja en dificultad para proponer diferentes situaciones problemáticas que involucren la división de fracciones, limitándose en su mayoría a problemas de comparación multiplicativa. Por tanto, hemos cumplido el objetivo de caracterizar el conocimiento profesional que tiene este grupo de profesores acerca de la división de fracciones, atendiendo al análisis de sus justificaciones sobre la validez de los algoritmos y a la asociación establecida entre los mismos y los tipos de problemas enunciados por los docentes.

5.2 Limitaciones del estudio

La muestra de nuestro estudio es intencional y pequeña, ya que está formada por un grupo de profesores en ejercicio que realizaban un curso a distancia durante el curso 2008/2009. Por otro lado, teniendo en cuenta que el curso era a distancia y que se desarrolló hace varios años, no ha sido posible entrevistar a algunos de los participantes para aclarar información o ampliarla en algunos apartados. También hay que tener en cuenta que la tarea a partir de cual hemos obtenido los datos para el estudio no estaba diseñada con el propósito de alcanzar los objetivos, por lo que en futuras investigaciones habrá que diseñar el proceso de toma de datos de una manera más acorde con la investigación.

5.3 Sugerencias para futuras investigaciones

Las propias limitaciones nos sugieren nuevos estudios, repitiendo este mismo trabajo con una muestra de mayor tamaño, con un instrumento diseñado para estos objetivos y con la posibilidad de realizar entrevistas posteriores. En este caso, se podría incluir el planteamiento de problemas asociados al algoritmo clásico y realizar un análisis estadístico correlacional para establecer relaciones.

Por otro lado, en este trabajo nos hemos limitado al Conocimiento del Contenido sobre la división de fracciones, por lo que puede ser ampliado al otro dominio de conocimiento, el conocimiento didáctico. Esto se puede llevar a cabo mediante un nuevo estudio o analizando la segunda parte de la tarea de evaluación de este curso, consistente en realizar una propuesta para la enseñanza de este contenido.

Durante el desarrollo de este de trabajo, ha surgido otra vía de investigación, no directamente relacionada con la división de fracciones. Ésta consiste en determinar en qué ámbitos o contextos se utiliza la notación fraccionaria para una fracción y cuándo se usa para denotar a una división. Este es un campo amplio, pero muy interesante, que abre un estudio de profundización en significados de conceptos matemáticos, y de cómo repercute en la enseñanza y aprendizaje de los números racionales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for research in mathematics education*, Vol. 21, nº 2, 132-144.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*; 389.

BOJA (2007). Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el Currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.

Boyer, C.B. (2003). *Historia de la matemática* [Versión de Mariano Martínez Pérez]. Madrid: Alianza Editorial.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Tesis Doctoral. Universidad de Huelva.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo, R.; Gómez, B.; Camacho, M.; Blanco, L. (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. España.

Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativ*a. Madrid: La Muralla.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*. London: Routledge.

Colás, M.P. (1998). La metodología cualitativa. En Colás, P.; Buendía, L. *Investigación educativa*. (pp. 249-277). Sevilla: Ed. Alfar.

Contreras, M. (2004). La división de fracciones: un algoritmo misterioso. Comunicación en *VI Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana*. Societat "Al−Khwarizmi".

Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje*. Tesis doctoral. Universidad de Valencia.

Flores, A., Turner, E. & Bachean, R.C. (2005). Posing problems to develop conceptual understanding: two teachers make sense of division of fractions. *Teaching Children Mathematics*, October 2005, 117-121.

Flores, A. (2002). Profond understanding of division of fractions. In B. Litwiller & G. Bright, (Eds.), *Making sense of fractions, ratios and proportions*. 237-246. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

Flores, P. (2008). El algoritmo de la división de fracciones. *Epsilon*, 70, 27-40.

González, N. R., & Block, D. (2005). La división de una fracción entre un número natural: análisis de una experiencia didáctica. *Educación Matemática*, *17* (2), 59-88.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D.A. Grouw (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan.

Gregg, J., & Gregg, D. U. (2007). Measurement and Fair-Sharing Models for Dividing Fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *12*(9), 490-496.

Gómez, B. (1988). *Numeración y Cálculo*, Madrid, Síntesis.

Kribs-Zaleta, C. M. (2006). Estrategias construidas para la división de fracciones. En Bolea, M. P.; Moreno, M.; González, M. J. (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 154-160). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y prática.* Barcelona: Paidós Comunicación.

Lamon, S.J. (2007) Racional numbers and proporcional reasoning. In F.J.J. Lester, (ed.) *Second Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 629-667). National Council of teachers of Mathematics.

Lo, J.J. & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(6), 481-500.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teacher' understanding of fundamental mathematics in China and the United Status.* Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, NJ.

MEC (2006). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

MEC(2007). Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el Currículo y se regula la ordenación de la Educación Primaria.

Nillas, L. (2003). Division of Fractions: Preservice Teachers' Understanding and Use of

Problem Solving Strategies. *The Mathematics Educator, 7*(2), 96 – 113.

Peck, S., & Wood, J. (2008). Elastic, Cottage Cheese, and Gasoline: Visualizing Division of Fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*,*14*(4), 208-212.

Perlwitz, M.D. (2004). Two students' constructed strategies to divide fractions. *Mathematics teaching in the middle school*, Vol. 10, No. 3. 122-126.

Perlwitz, M.D. (2005). Dividing fractions: Reconciling Self-generated solutions with algorithmic answers. *Mathematics teaching in the middle school*, Vol. 10, No 6. 278-283.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 1, 39-63.

Rico, L. & Fernández-Cano, A. (En prensa). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J.L. Lupiáñez & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática.* Granada: Universidad de Granada.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15. 4-14.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in de middle grades* (pp. 141- 161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

ANEXO I: Enunciado tarea propuesta a los profesores

Tema 1 Enseñanza de las Matemáticas en el aula

Actividades obligatorias de evaluación Tema 1

Actividad 1: Resolución de situaciones utilizando el material

Revisa la siguiente situación y responde a las cuestiones planteadas:

Juanito dice que para hacer una división de fracciones hay que dividir el numerador del dividendo por el del divisor, y el denominador del dividendo por el del divisor. Así, hace:

$$\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4:2}{9:3}=\frac{2}{3}$$

Antoñito le dice a Juanito que la división se hace multiplicando en cruz, es decir:

$$\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 3}{9\cdot 2}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

Ante la duda, Juanito y Antoñito le preguntan a su vecino Pepe cómo se hace la división de fracciones, quien les dice que para poder dividir fracciones primero hay que igualar denominadores y luego se dividen los numeradores de las fracciones obtenidas, es decir:

$$\frac{4}{9}:\frac{2}{3}=\frac{4}{9}:\frac{6}{9}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

a) Estudia si los tres procedimientos valen para todas las fracciones. Busca otra forma de hacer la división de fracciones que sea válida para todas las fracciones.

b) Analiza qué significa la división de fracciones cuando se hace por cada uno de los procedimientos. Para ello enuncia problemas de división de fracciones y resuélvelos con los procedimientos de Juanito y Pepe, utilizando materiales didácticos. A partir de ello analiza qué significa dividir fracciones según estos procedimientos.