Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática
Programa de doctorado en ciencias de la educación

Tesis Doctoral

Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto

José Antonio Fernández Plaza

Granada, 2015

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática
Programa de doctorado en ciencias de la educación

Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto

Memoria de Tesis Doctoral realizada bajo la dirección de los doctores D. Luis Rico Romero, D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo y D. Enrique Castro Martínez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta D. José Antonio Fernández Plaza para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada con mención internacional.

Fdo.: D. José Antonio Fernández Plaza

V^{O}B^{O} de los Directores

Fdo.: Dr. D. Luis Rico Romero

Fdo.: Dr. D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Fdo.: Dr. D. Enrique Castro Martínez

El doctorando **José Antonio Fernández Plaza** y los directores de la tesis **D. Luis Rico Romero, D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo y D. Enrique Castro Martínez**, garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada, a 15 de abril de 2015

Doctorando

Fdo.: D. José Antonio Fernández Plaza

Director/es de la Tesis

Fdo.: D. Luis Rico Romero

Fdo.: D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Fdo.: D. Enrique Castro Martínez

A mis padres, José Antonio y María, por su paciencia, inestimables refuerzos y continuo apoyo

A mis hermanos, Ángela y Jesús, por su cariño y admiración

A mi abuela, María, referente en bondad y humildad

A mis profesores, por la cultura y valores que me han transmitido

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a las personas que han contribuido a la culminación del trabajo de tesis doctoral que se presenta.

En primer lugar, al director Luis Rico por su dedicación y entrega, su paciencia en los momentos en los que estaba bloqueado, redirigiendo los caminos no acertados con maestría y por sus sabios consejos. Digno de agradecimiento es también facilitarme la incorporación a un grupo de trabajo en el que me he sentido como uno más durante estos cuatro años.

En segundo lugar, doy gracias al codirector Juan Francisco Ruiz por su inestimable apoyo en los momentos de máxima tensión y desconsuelo, y por complementar con eficacia la tarea del director. Agradezco también su valioso compañerismo dentro de la profesión docente que he podido ejercer junto a él.

En tercer lugar, agradezco al tercer director Enrique Castro su imprescindible ayuda para la obtención y gestión académica de la beca FPU AP2010-0906 que ha financiado la realización de esta tesis doctoral, sin menospreciar sus valiosos aportes metodológicos al trabajo y publicaciones derivadas.

No menos importante, agradezco al Departamento de Didáctica de la Matemática, y en particular, al equipo directivo, su gestión para iniciarme en la profesión docente; tareas con las que he complementado mi formación investigadora. Agradezco también a mis compañeros de departamento que me han dado valiosos consejos en la gestión de las tareas docentes desempeñadas en los últimos dos años.

Finalmente, expreso mi más sincero agradecimiento al profesor D. Miguel Ángel Sola Torres y a su grupo de estudiantes durante el curso 2010/2011 sin cuya colaboración este trabajo no habría sido posible.

Cierro esta sección de agradecimientos, resaltando la valiosa amistad y apoyo de mi gran familia latinoamericana, Marlene, Ángel, Mariel, Elisabeth, Emilse, Hilbert, Carmen Gloria, Danellys, Nielka y Rosa.

Presentación

La tesis doctoral desarrollada en esta memoria se presenta en la modalidad de agrupación de publicaciones. Las publicaciones seleccionadas que se detallan a continuación cumplen, al menos tres de ellas, con los indicios de calidad requeridos por el Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada:

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2013). Concept of Finite Limit of a Function at a Point: Meanings and Specific Terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 699-710.

Indicios de calidad:

a) Revista indexada en Scopus. Índice SJR (2013) 0.295. Posición en *Education* 497/1035 (Cuartil 3). Posición en *Applied Mathematics* 222/263 (Cuartil 4).

b) Revista indexada en MathSciNet (2013). Índice MCQ 0.01

c) Clasificación Integrada de Revistas Científicas (CIRC): B

d) Revista indexada en Astrophysics Data System; Australian Education Index; British Education Index; British Library Inside; Current Index to Statistics; EBSCO Databases; Education Research Abstracts; ERIC/Current Index to Journals in Education; H W Wilson Education Index; IBZ (International Bibliography of Periodical Literature in the Fields of Art + Humanities + Social Sciences); Mathematical Reviews/MathSciNet; New Jour; SciBase; Scopus; Zentralblatt MATH/Mathematics Abstracts; and Zetoc.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 211-229.

Indicios de calidad:

a) Índice de impacto 0,1 en JCR-SSCI (2013). Posición de la revista 212/219 en la categoría *Education & Education Research.* Cuartil 4.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2013). Análisis conceptual de términos específicos. Concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la RSME*, *16*(1), 131-145.

Indicios de calidad:

a) Revista indexada en Latindex. Características cumplidas/no cumplidas 25/8.
b) Revista indexada en MathSciNet (2013). Índice MCQ 0.05
c) Clasificación Integrada de Revistas Científicas (CIRC): C
d) Revista indexada en Zentralblatt MATH

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L., y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, *7*(3), 117-131.

Indicios de calidad:

a) Revista con el sello de calidad ARCE de la FECYT
b) Revista indexada en las bases de datos: CBNE, DICE, DRJI, FECYT, Global Impact Factor, INRECS, IRESIE, Latindex y RESH.
c) IN-RECS: Área educación, Factor impacto 0.028. Posición 95/119.
d) Categoría ANEP: C
e) Clasificación Integrada de Revistas Científicas (CIRC): C
f) Edición impresa con tirada trimestral, disponible online (www.pna.es), revisión anónima por pares y comité asesor internacional.

Como requisitos para optar a la mención internacional esta memoria incluye un resumen y conclusiones en inglés, asimismo el doctorando realizó una estancia de 3 meses (1 de Septiembre a 1 de Diciembre de 2013) en *Durham University* (Durham, Reino Unido) bajo la supervisión del profesor Dr. Adrian Simpson.

Índice

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN 1
1.1. Pensamiento Matemático Avanzado 2
1.1.1. Caracterización del Pensamiento Matemático Avanzado 3
1.1.2. Transición entre Pensamiento Matemático Elemental y Avanzado ... 4
1.1.3. Modelos cognitivos 4
1.2. Área Problemática 5
1.2.1. Caracterización de concepciones analíticas de estudiantes acerca del límite e influencia del lenguaje coloquial 5
1.2.2. Propuesta de definiciones alternativas y concepciones sintéticas 8
1.2.3. Investigaciones acerca de coherencia entre concepciones de los estudiantes 10
1.3. Objetivos de la investigación 10
CAPÍTULO 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA 13
2.1. Significado de un concepto matemático. Antecedentes y delimitación conceptual 14
2.1.1. Nociones clásicas de la teoría semántica de Frege 14
2.1.2. Significado de un concepto matemático escolar 16
2.1.3. Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud. Síntesis comparativa 19
2.2. Comunicación y significado 22
2.3. Análisis conceptual de términos específicos 23
2.3.1. Análisis conceptual del término "aproximar" 24
2.3.2. Análisis conceptual del término "tender" 25
2.3.3. Análisis conceptual del término "converger" 27
2.3.4. Análisis conceptual del término "alcanzar" 28
2.3.5. Análisis conceptual del término "rebasar" 29
2.3.6. Análisis conceptual del término "límite" 30
2.4. Concepciones y Definiciones. Noción de Coherencia 30
2.4.1. Aspectos estructurales de las definiciones individuales acerca del Concepto de límite finito de una función en un punto 31

CAPÍTULO 3. FUNDAMENTACIÓN METODOLÓGICA 33
3.1. Diseño del instrumento de recogida de información 33
3.1.1. Tareas de los cuestionarios 34
3.1.2. Tareas analíticas 35
3.1.3. Tareas de aplicación de la definición individual 36
3.2. Selección y organización de los participantes 37
3.2.1. Instrucción previa 38
3.3. Descripción del trabajo de campo 42
3.4. Método de análisis de los datos 43
3.4.1. Organización y técnica de análisis de los datos correspondientes a la tarea analítica 43
3.4.2. Organización y técnica de análisis de los datos correspondientes a la tarea sintética 44
3.4.3. Organización y análisis de los datos correspondientes a la tarea analítica/aplicada. 46
CAPÍTULO 4. ESTRUCTURA DEL COMPENDIO DE PUBLICACIONES 49
4.1. Estructura y encuadre del artículo 1 50
4.2. Estructura y encuadre del artículo 2 50
4.3. Estructura y encuadre del artículo 3 51
4.4. Estructura y encuadre del artículo 4 53
CAPÍTULO 5. ANÁLISIS CONCEPTUAL DE TÉRMINOS ESPECÍFICOS. CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO 55
5.1. Problema de investigación 56
5.1.1. Marco Teórico y Antecedentes 57
5.1.2. Análisis conceptual de términos específicos relacionados con el concepto de límite 60
5.2. Diseño del estudio 63
5.2.1. Instrumento 63
5.2.2. Sujetos 64
5.3. Resultados 64
5.3.1. Primera fase: Uso y recuento de términos específicos en los registros escritos 65
5.3.2. Segunda fase: Discusión del uso de los términos específicos 66
5.3.3. Tercera fase: Perfiles de respuesta 67
5.4. Conclusiones 69
5.5. Referencias 70

CAPÍTULO 6. CONCEPT OF FINITE LIMIT OF A FUNCTION AT A POINT: MEANINGS AND SPECIFIC TERMS 73
6.1. INTRODUCTION 74
6.2. RESEARCH PROBLEM 74
6.3. BACKGROUND 75
6.3.1. Review of the uses of specific terms 76
6.3.2. Prior Research 77
6.4. METHOD 78
6.4.1. Subjects 78
6.4.2. Instrument 78
6.5. RESULTS 79
6.5.1. Use and counting of effective terms in the written records 79
6.5.2. General discussion 85
6.5.3. Summary of results from the second phase of analysis 85
6.6. CONCLUSIONS 86
6.7. REFERENCES 88
CAPÍTULO 7. DEFINICIONES PERSONALES Y ASPECTOS ESTRUCTURALES DEL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO 91
7.1. ANTECEDENTES Y MARCO TEÓRICO 93
7.1.2. Concepciones y Aspectos Estructurales 94
7.2. MÉTODO 95
7.2.1. Sujetos 95
7.2.2. Instrumento y aplicación 95
7.3. RESULTADOS 96
7.3.1. Selección y caracterización de los aspectos estructurales 97
7.3.2. Caracterización de las definiciones personales 98
7.3.3. Grado de coincidencia entre las respuestas a los reactivos específicos y las definiciones 101
7.4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES 103
7.5. REFERENCIAS 104
CAPÍTULO 8. RAZONAMIENTOS BASADOS EN EL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO 107
8.1. INTRODUCCIÓN 109
8.2. MARCO CONCEPTUAL Y PROCEDIMIENTAL 110
8.2.1. Concepciones y definiciones 111
8.2.2. Modelo para detectar concepciones 112
8.2.3. Significado de un concepto matemático 113
8.2.4. Sistemas de representación. Modelos gráficos del concepto de límite 114

8.2.5. Coherencia entre concepciones y definiciones, tipos y análisis 116
8.3. Método 117
8.3.1. Instrumento y aplicación 118
8.3.2. Contexto y participantes 119
8.4. Organización y análisis de los datos 119
8.5. Discusión 120
8.5.1. Interpretaciones gráficas generales. Concepciones elementales 120
8.5.2. Perfiles de desempeño general de la tarea 123
8.6. Resultados 125
8.6.1. Estudio de la coherencia de los argumentos 125
8.7. Conclusiones 128
8.8. Referencias 130
CAPÍTULO 9. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES 133
9.1. Significado del concepto de límite finito de una función en un punto 133
9.1.1. Estructura conceptual del concepto de límite finito de una función en un punto 134
9.1.2. Sistemas de representación del concepto de límite finito de una función en un punto 136
9.1.3. Sentidos y fenómenos asociados al concepto de límite finito de una función en un punto 139
9.2. logro de los objetivos específicos 141
9.3. Limitaciones y Cuestiones Abiertas 145
10. REFERENCIAS 147
SUMMARY 153

Índice de Figuras

Figura 3.1. Gráficas empleadas para la aplicación de la definición individual 35
Figura 3.2. Representación gráfico-lineal de entorno y entorno reducido........ 39
Figura 3.3. Representaciones de los límites laterales de una función en un punto 40
Figura 3.4. Contraejemplo para la igualdad entre límite e imagen 41
Figura 5.1. Respuesta a la actividad A.2 con término efectivo “no llegar” incluida en el grupo “Alcanzar” 66
Figure 6.1. Examples of answers from question A.1 including effective terms related to the specific term ‘to approach’ 83
Figure 6.2. Examples of answers from question A.1. including effective term ‘to tend’ 84
Figura 8.1. Modelos gráficos de límite de una función en un punto........ 116
Figura 8.2. Enunciado de la tarea número 2 (Cuestionario A) 118
Figura 8.3. Argumentos de existencia e inexistencia de límite........ 121
Figura 9.1. Modelos gráficos de límite de una función en un punto........ 138
Figura 9.2. Modelo gráfico de la caracterización épsilon-delta de límite finito de una función en un punto 138

Índice de Tablas

Tabla 1.1. Correspondencia entre la definición formal y la de aproximación óptima........ 9
Tabla 2.1. Tabla comparativa del modelo de significado propuesto y la teoría de los campos conceptuales........ 21
Tabla 3.1. Caracterización de la tarea de aplicación de la definición individual........ 36
Tabla 3.2. Composición del subgrupo A en función de género y edad........ 37
Tabla 3.3. Composición del subgrupo B en función de género y edad........ 38
Tabla 5.1. Ideas clave de las actividades de los cuestionarios A y B........ 64
Tabla 5.2. Términos específicos y agrupación de los términos efectivos asociados........ 65
Tabla 5.3. Grupos de respuestas y frecuencias alcanzadas en el uso de los términos efectivos vinculados a los específicos “Alcanzar” y “Rebasar” para la actividad A.2........ 66
Tabla 5.4. Frecuencia de respuestas en cada uno de los perfiles de respuesta para la actividad A.2........ 68
Table 6.1. Specific terms and groupings of related effective terms associated........ 80
Table 6.2. Frequencies of use of the effective terms connected to ‘to reach’ and ‘to exceed’ for questions A.2 and B.1........ 81
Tabla 7.1. Familia de definiciones según los aspectos estructurales resaltados y ejemplos representativos........ 99
Tabla 7.2. Medida del grado de coincidencia entre las respuestas a los reactivos específicos y las definiciones........ 102
Tabla 8.1. Información que proporcionan o no las tareas........ 114
Tabla 8.2. Caracterización de la tarea de aplicación de la definición individual........ 118
Tabla 8.3. Frecuencia absoluta de las categorías o concepciones elementales........ 123
Tabla 8.4. Perfiles y variedades de perfiles........ 125
Tabla 8.5. Tipos de coherencia desglosados por apartados de la tarea........ 127
Tabla 9.1. Niveles de estratificación de definiciones individuales según sentidos de la noción de límite........ 143

Capítulo 1

Introducción

La aproximación al problema de investigación se llevó a cabo en una primera etapa del proceso de formación del investigador, mediante la planificación y diseño de una unidad didáctica acerca del tópico de límite y continuidad para el primer nivel de Bachillerato dentro de un programa de formación inicial de profesores de secundaria en el curso académico 2009-2010 (Fernández-Plaza, 2010). Este trabajo se fundamentó como aplicación práctica del método *análisis didáctico* (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Una síntesis de ese mismo estudio, recogida en Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013), destacó momentos relevantes del desarrollo histórico del concepto y las ideas centrales del tópico mediante su análisis de significado que incluyó: identificar y relacionar los conceptos y procedimientos que determinan la correspondiente estructura matemática, mostrar los diferentes sistemas de representación utilizados para su reflexión, expresión y comunicación, junto con la identificación de aquellos contextos, fenómenos y situaciones que dan sentido al tópico. Este análisis de contenido fue seguido por un análisis cognitivo que abarcó un registro de las expectativas y prioridades de aprendizaje sobre el tema para los escolares de bachillerato, una identificación de errores y dificultades junto con una verificación de las previsibles oportunidades de aprendizaje. Finalmente, se llevó a cabo un análisis de instrucción mediante diseño de tareas matemáticas escolares sobre convergencia de una función en un punto y el concepto de límite finito, seguido por la planificación de secuencias didácticas, la elección de materiales y recursos y la gestión de trabajo escolar en el aula.

Además, se establecieron criterios e instrumentos de evaluación de la unidad didáctica elaborada.

En una segunda etapa, iniciada durante la realización del Máster de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en el curso 2010-2011, la revisión de investigaciones relacionadas con errores y dificultades sobre el concepto de límite finito de una función en un punto (v.g., Blázquez y Ortega, 2000) suscitó mi interés por profundizar en los diversos modos en que los estudiantes entienden las nociones de límite y continuidad tras la instrucción ordinaria recibida y, de este modo, contrastar y actualizar las investigaciones previas. No fue objeto prioritario de consideración en ese estudio evaluar el uso técnico de procedimientos o definiciones alcanzado por los estudiantes como resultado de la instrucción previa. Nuestro propósito estuvo en observar la comunicación de ideas referidas a propiedades relevantes del concepto, en interpretar la relación entre diversas representaciones del concepto, e incluso considerar la aplicación de definiciones "alternativas" propuestas por los propios estudiantes (Fernández-Plaza, 2011).

En los siguientes apartados describimos el área problemática, los antecedentes más relevantes y la formulación del problema de investigación, objeto de esta tesis.

1.1. Pensamiento Matemático Avanzado

Bajo la denominación "Pensamiento Matemático Avanzado" se considera un extenso ámbito de investigación que aborda problemas relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos que tienen un desarrollo epistemológico y didáctico de cierta complejidad, que se subraya mediante el término de "avanzados" y que han recibido atención continuada y coordinada por parte de un grupo destacable de investigadores.

Los primeros trabajos realizados en esta agenda de investigación se sitúan en 1985, dentro del seno del PME (*International Group for the Psychology of Mathematics Education*). El grupo de trabajo creado en dicho grupo "Advanced Mathematical Thinking" ha producido diferentes publicaciones centradas en delimitar las características del Pensamiento Matemático Avanzado y el campo de problemas que aborda (Harel, Selden, y Selden, 2006; Tall, 1991). Tras 30 años de estudio, la investigación acumulada en este ámbito es relevante en número y perspectivas. Destacamos algunos aspectos de la investigación realizada en Pensamiento Matemático Avanzado.

1.1.1. Caracterización del Pensamiento Matemático Avanzado

La expresión "Pensamiento Matemático Avanzado" presenta una ambigüedad que dio lugar desde sus comienzos a dos perspectivas desde las que se abordó su estudio, según donde el término "avanzado" pusiera el énfasis (Selden y Selden, 2005).

Cuando se enfatiza el carácter avanzado del "pensamiento matemático" Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) concibieron diversas formas de pensamiento (o actividades) avanzadas acerca de cualquier contenido matemático. En esta línea, Azcárate y Camacho (2003) sostuvieron que los procesos cognitivos importantes son *representar* y *abstraer* como procesos psicológicos, y *definir*, *demostrar* y *formalizar* como procesos matemáticos. Tall (1992) caracterizó el pensamiento matemático avanzado como el razonamiento deductivo a partir de definiciones de los objetos matemáticos. El papel de *la definición* es fundamental en esta caracterización del Pensamiento Matemático Avanzado.

Harel y Sowder (2005) consideraron que el carácter avanzado es relativo a una determinada forma de pensamiento y no a todas en general, dado que cada forma de pensamiento puede presentar diferentes niveles de adquisición para un mismo estudiante. Estos autores definieron el carácter avanzado de una forma de pensamiento cuando cumpliera alguna de las condiciones establecidas para ser considerado como *obstáculo epistemológico,* con lo cual involucraron características del correspondiente concepto matemático. La primera condición fue que se dispusiera de evidencias sobre el desarrollo histórico de tal concepto matemático. La segunda condición estableció que se tratase de una pieza de conocimiento que produjese resultados adecuados en algunos contextos, pero provocase conflicto en otros contextos diferentes. La tercera condición fue que tal pieza de conocimiento fuera resistente al cambio por un mejor conocimiento, es decir, que establecer un nuevo conocimiento no implicase la ruptura del conocimiento anterior.

Por otro lado, otras alternativas consideraron el énfasis en el carácter avanzado del contenido matemático, por ejemplo, Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) consideran que los conceptos avanzados son aquellos cuyas definiciones no tienen "representaciones" tangibles para los estudiantes.

En particular el concepto de límite cumple con las condiciones para ser considerado como propio del Pensamiento Matemático Avanzado, desde las dos perspectivas consideradas. Desde el punto de vista cognitivo, porque presenta obstáculos epistemológicos (Cornu, 1991; Sierpinska, 1987) y desde el punto de vista conceptual, porque la definición formal del mismo presenta conflictos con las representaciones habituales del concepto (Edwards et al., 2005).

1.1.2. Transición entre Pensamiento Matemático Elemental y Avanzado

Existe un amplio consenso en la dificultad de delimitar la transición entre el Pensamiento Matemático Elemental y el Pensamiento Matemático Avanzado (Tall, 1992; Azcárate, Camacho y Sierra, 1999; Zaskis y Applebaum, 2007; Edwards, Dubinsky y Mc Donald, 2005).

Tall (1992) consideró que la transición entre el Pensamiento Matemático Elemental y el Avanzado consiste en pasar de considerar los conceptos con una base intuitiva fundadamentada en la experiencia a manejar los conceptos mediante definiciones y reconstruir sus propiedades a partir de deducciones lógicas. Dicho periodo de tránsito lo caracterizó por la presencia simultánea de experiencias previas y sus propiedades dentro de un cuerpo de conocimiento deductivo que se va desarrollando.

En relación con el concepto de límite finito de una función en un punto, consideramos como zona probable de transición entre el conocimiento elemental y avanzado del mismo cuando el estudiante es capaz de sintetizar una definición "intuitiva" (véase capítulo 7) y contrastarla en otras situaciones (véase capítulo 8).

1.1.3. Modelos cognitivos

Existe una variedad de modelos teóricos desde los que intentar describir los modos en que los estudiantes aprenden matemáticas, sobre todo, las propias del pensamiento matemático avanzado. Sin ánimo de ser exhaustivos describiremos los siguientes modelos, que no consideraremos para esta investigación:

- *APOE*. Basado en las ideas de Piaget, Cottrill et al. (1996) emplearon un modelo cognitivo basado en cuatro etapas, *acciones, procesos, objetos y esquemas.* Emplearon el constructo *descomposición genética* para modelar una trayectoria de aprendizaje del estudiante para un determinado concepto. En particular, ejemplificaron una descomposición genética para el concepto de límite finito de una función en un punto.
- *Concepciones operacionales y estructurales.* Sfard (1991) consideró que los conceptos matemáticos se pueden comportar como objetos y procesos según el nivel cognitivo del estudiante y la situación en la que se enmarcan. Consideró concepciones *operacionales* a toda acción, algoritmo o proceso dinámico y *estructurales*, a la abstracción y transformación de las concepciones operacionales en estructuras, si bien, ambas concepciones son complementarias, pero la concepción operacional ha de preceder siempre a la estructural. Consideró tres etapas en el aprendizaje, *interiorización, condensación, reificación.*

El modelo cognitivo que por su sencillez estructural convino más para este trabajo fue el desarrollado por Tall y Vinner (1981) y Vinner (1983). Este modelo se presentará con más detalle en los capítulos 5 y 7. Tiene en cuenta dos componentes:

- *Imagen conceptual.* Describe la estructura cognitiva global del estudiante, es decir, las representaciones internas, propiedades, intuiciones, relacionadas con el concepto matemático en estudio.
- *Definición conceptual.* Se concibe como la expresión verbal de una definición formal o reconstrucción subjetiva por el estudiante.

Nosotros consideraremos la imagen conceptual de manera equivalente a estos autores, sin embargo, vemos conveniente desglosar el constructo de definición conceptual en dos componentes, la primera de ellas consistente en la expresión de lo que el estudiante responde en situaciones concretas. La segunda componente contempla la expresión de una definición individual que surge de la síntesis de todas las propiedades que el estudiante considera esenciales para describir su concepción de límite.

1.2. Área Problemática

Es extensa la investigación acumulada acerca del aprendizaje del límite funcional por los estudiantes de los niveles pre-universitario y universitario. Vamos a revisar las investigaciones más relevantes para nuestro trabajo y los problemas que en ellas se han abordado.

1.2.1. Caracterización de concepciones analíticas de estudiantes acerca del límite e influencia del lenguaje coloquial

La influencia patente del uso coloquial de los términos empleados para describir el concepto de límite, que son “Aproximar”, “Converger”, “Tender”, “Alcanzar”, “Rebasar” y “Límite” en las concepciones de los estudiantes acerca del límite empleado ha sido analizada principalmente por Cornu (1991) y Monaghan (1991).

Cornu (1991) caracterizó las concepciones de los estudiantes acerca de la tendencia y el propio término límite en virtud de su no rebasabilidad (en el sentido habitual de “restricción”). Sin embargo, detectó ambas posiciones acerca de la alcanzabilidad, de hecho, discute que posturas como las de Newton o Jurin admitan que el límite (razón de cantidades infinitesimales) se alcance en el momento justo anterior en que las cantidades se “desvanecen”, mientras que la no alcanzabilidad esté presente en definiciones posteriores como las de

D'Alembert quien exige que en ningún momento el límite sea igual a ninguna de las cantidades que se aproximan.

La no alcanzabilidad del límite se deriva de una concepción dinámica que considera el carácter infinito potencial del proceso, por ejemplo, "0.999... es estrictamente menor que 1" (Tall, 1980). Romero (1997) también atribuye esa ruptura a que la notación decimal correspondiente al periodo 9 no procede de la división entera. Otras dificultades reportadas se deben al orden de los miembros de la igualdad, en particular, Fischbein (2001) constató que los estudiantes son capaces de establecer que 1/3=0'3333... (se deduce mediante división), sin embargo, no recuperan que 0'3333...=1/3, sino que 0'333...tiende a 1/3.

La propiedad de no alcanzabilidad puede también manifestarse en el caso de límite finito de una función en un punto. Tall y Vinner (1981) destacaron un uso conflictivo de "tender" cuando "x tiende a x_0 implica que $x \neq x_0$", se induce a las propiedades de la tendencia de $f(x)$ a L.

Desde otra perspectiva, se clasificaron las concepciones en *monótonas, dinámicas, estáticas* (destacan la cualidad de cercanía de las aproximaciones en torno al límite, es decir, localización en un entorno del mismo), y *estacionarias* (la función toma el mismo valor que el límite en un entorno del punto).

Monaghan (1991) actualizó y profundizó en los resultados de Cornu (1991) y obtuvo nuevas evidencias, tales como la equivalencia entre "tender" y "aproximar", y consideró concepciones acerca del término "converger" para lo cual ha de haber dos objetos, y no solo uno (según tales concepciones no tenía sentido afirmar que una sucesión converge a su límite). No obstante, existe una distinción entre el "límite" y los verbos "tender" y "aproximar" que expresan un proceso o movimiento hacia un "fin", pero no alcanzan tal "fin", de ahí que consideren que 0'9, 0'99, 0'999, ... tienden hacia 0'99... que es justo anterior a 1 que es una cota o límite de dicho proceso.

Oehrtman (2009) consideró las siguientes metáforas ligadas a las propiedades que los estudiantes atribuyen al límite de procesos infinitos variados:

- La metáfora "*colapso*" se observa cuando identifican la longitud de un segmento con el límite de las áreas de los rectángulos con base dicho segmento cuando las alturas tienden a 0, es decir, la medida k-dimensional del límite geométrico se sustituye por la medida (k-1)-dimensional de dicho límite. Del mismo modo, en relación con sucesiones de rectángulos cuya área permanece constante y geométricamente convergen a una recta el paso al límite de las áreas de los rectángulos (la constante) no coincide con el área del límite que es nula.

- La metáfora "*aproximación*" se observa en la concepción de límite con el proceso de aproximarlo indefinidamente.
- La metáfora "*cercanía*" se aprecia cuando consideran el límite como el punto más cercano a los valores de la función alrededor del punto, por ejemplo, "1 es el valor más cercano a 0'999...".
- Finalmente observa la metáfora "*limitación física*", cuando los estudiantes expresan que debido al umbral de percepción (desde la escala natural hasta la escala subatómica) el límite se identificará con las aproximaciones, si bien, otros asumen el carácter infinitesimal del proceso, por ejemplo, la distancia entre 0'999... y 1 se supone infinitamente pequeña, pero no nula.

Planteó la cuestión acerca de los modos en que los estudiantes interpretaron los términos "arbitrariamente" y "suficientemente". Explicó que, teóricamente, la arbitrariedad se aplica a la tolerancia de error de la aproximación al límite (épsilon) que puede tomar cualquier valor, mientras que suficiencia se aplica a la cercanía "necesaria" al valor del punto $x=a$, para que los valores de f aproximen el límite con la cota de error prefijada. Sin embargo, constató que los estudiantes utilizaron tales términos porque reprodujeron la definición del profesor, sin entender realmente su significado. Detectamos aquí la necesidad de indagar los modos de uso de estos términos que manifiestan los estudiantes.

Sierpinska (1987) caracterizó las concepciones de los estudiantes acerca del límite de procesos infinitos según obstáculos epistemológicos que se manifestaron en términos de tres aspectos que dieron lugar a un análisis más fino de las concepciones:

- Carácter *definido* o *indefinido* del límite, es decir, si el valor de límite se puede calcular de manera exacta o únicamente se pueden dar aproximaciones.
- Actitud *finitista* o *infinitista* frente a los procesos infinitos. Las posturas finitistas niegan el infinito, o bien, consideran que lo infinito no está acotado (todo proceso acotado ha de ser necesariamente finito). Por otro lado, las posturas infinitistas admiten el carácter infinito tanto en procesos acotados como no acotados.
- Posturas *empiricistas* o *discursivas,* los estudiantes empiricistas consideran que todo procedimiento matemático es una construcción personal y temporal (un algoritmo), asumiendo la existencia únicamente del infinito potencial, mientras que las discursivas consideran procedimientos de "paso al límite" ya establecidos (actualización del proceso infinito no relacionado con la práctica). Dentro de la actualización de los procesos de paso al límite se discriminan *modelos*

acotados (0, 1, 0, 1, 0,... tiene dos límites 0 y 1, 1'99, 1'999,... tiene límite 2) y los *modelos infinitesimales* (por ejemplo, la distancia entre 0'999... y 1 es infinitamente pequeña).

El enfoque epistemológico también lo emplearon Sierra, González y López (2000) al identificar que las concepciones de los estudiantes acerca del límite funcional se deben tanto a la instrucción recibida como a las trazas del desarrollo histórico del concepto de límite que pueden impregnar las concepciones. Bagni (2005) consideró que podría existir una relación entre el desarrollo cognitivo de la comprensión de límite y el desarrollo histórico correspondiente.

Los enunciados empleados por Williams (1991) y Lauten, Graham, y Ferrini-Mundi (1994) en su instrumento de recogida de datos, los consideramos "representativos" de las concepciones que con más frecuencia se han caracterizado en la literatura, por lo que los valoramos como apropiados para realizar un primer estudio exploratorio que revise las concepciones intuitivas de los estudiantes.

Más concretamente, establecemos un primer foco problemático para indagar los modos de uso de la terminología específica relacionada con el concepto de límite de forma espontánea por los estudiantes, una postura inversa a la de Monaghan (1991) que acota los términos sobre los que los estudiantes han de discutir. Así mismo pretendemos incorporar un marco interpretativo para entender las concepciones de los estudiantes, que compartan y actualicen elementos de investigaciones previas. Este marco interpretativo se fundamenta en la noción de significado de un concepto matemático escolar (Rico, 2012). Este foco problemático se concreta en los capítulos 5 y 6 de esta memoria.

Como indica el título del apartado, las concepciones reportadas en la literatura las denominaremos *analíticas*, dado que describen las creencias, propiedades, intuiciones, el uso de nociones básicas o descripciones del concepto de límite que manifiestan los escolares en respuesta a diversos estímulos que no responden de momento a un proceso de síntesis mediante una definición.

1.2.2. Propuesta de definiciones alternativas y concepciones sintéticas

Otras investigaciones propusieron definiciones alternativas a la definición formal, pero sin perder el rigor a la hora de caracterizar el concepto de límite, exigiendo que fuera más atractiva, fácil de comprender para los estudiantes y que perdurase en el tiempo. Los trabajos más relevantes fueron los de Blázquez (2000), Blázquez, Gatica y Ortega (2009) y Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006). La definición alternativa que estos autores propusieron se denominó "aproximación óptima", caracterizada por el cambio de *cotas de error*, presentes en la definición métrico-formal, por *aproximaciones*, de tal forma que establezcan una equivalencia entre la definición formal y la definición alternativa para límite de una función en un punto, reflejada en la Tabla 1.1.

Además, Blázquez, Gatica y Ortega (2009) critican una selección de definiciones correspondientes a diversas etapas históricas en el desarrollo del concepto y en libros de texto recientes, enfatizando que gran parte de ellas incluyen términos "subjetivos" (tanto como se quiera, se dice...) o "imprecisos" (acercarse suficientemente) como características de debilidad.

Por otro lado, en otros trabajos se caracterizaron los modos en que los estudiantes pueden reconstruir (Swinyard, 2011) la definición formal o seleccionar definiciones adecuadas mediante recursos didácticos. En particular, Roh (2010) caracterizó el modo en que estudiantes previamente instruidos en el manejo de una "ε-banda" (banda horizontal transparente de anchura ε) y representaciones gráficas de diferentes clases de sucesiones discriminan entre dos definiciones "posibles" de límite de una sucesión "(a) L es límite de x_n cuando hay infinitos puntos de x_n en cualquier ε-banda centrada en y=L y (b) L es límite de x_n cuando hay un número finito de puntos x_n fuera de cualquier ε-banda centrada en y=L" (Roh, 2010, p.268), siendo (b) la definición adecuada.

Tabla 1.1. Correspondencia entre la definición formal y la de aproximación óptima (Blázquez et al., 2006, p. 196)

Asociación de las unidades significantes elementales	
Definición métrico-formal	Definición como aproximación óptima
Para todo $\varepsilon > 0$	Para toda aproximación $K \neq L$
existe $\delta > 0$	Existe una aproximación $H \neq a$
los x tales que $\|x-a\| < \delta$	Los x tales que mejoran la aproximación H de a
$\|f(x)-L\| < \varepsilon$	Las imágenes $f(x)$ mejoran la aproximación K de L

Claros (2010) y Sánchez-Compaña (2012) detectaron dos fenómenos relacionados con la definición formal, tanto de límite de una sucesión como de una función en un punto. Particularizando para el concepto de límite finito de una función en un punto, el primero de los fenómenos lo denominaron "aproximación intuitiva", que responde a que valores de x cada vez más cercanos al punto $x=a$ se corresponden con valores de $f(x)$ cada vez más cercanos a un valor L que se considera "candidato". El segundo de ellos lo denominaron de "ida-vuelta", dado que fijado ese "candidato" y cualquier entorno suyo, es necesario determinar un entorno reducido del punto $x=a$

("Proceso de ida"), de manera que se aplica mediante *f* ("Proceso de vuelta") en dicho entorno. Tal entorno reducido del punto $x=a$ dependerá del entorno de L y de la función *f*, por lo que describieron dos relaciones de dependencia en sentido opuesto.

El fenómeno de aproximación intuitiva permitió proporcionar un candidato (valor numérico) al resultado de la tendencia, mientras que el fenómeno de ida-vuelta permitió validar dicho candidato como límite.

En nuestro trabajo, más que indagar los modos en que los estudiantes interpretan o entienden diversas definiciones de un concepto, nos interesa explorar en qué grado son capaces de sintetizar una definición individual o concepción sintética a partir de propiedades que emergen de sus concepciones analíticas, que es objeto del capítulo 7.

1.2.3. Investigaciones acerca de coherencia entre concepciones de los estudiantes

Diferentes investigaciones destacaron que pueden darse contradicciones entre concepciones de un mismo estudiante, dado que pueden reaccionar de manera diferente a estímulos "equivalentes" salvo cambios de representación (Garbín y Azcárate, 2002; Dufour-Janvier, Bednarz, y Belanger, 1987, p.114; Tirosh, 1990).

Por ese motivo, consideramos pertinente revisar si las concepciones sintéticas (como representantes de las ideas provocadas por los estímulos previos) provocan o no discrepancias respecto de las nuevas concepciones analíticas que pueden manifestar los estudiantes al abordar otras tareas que involucren otros sistemas de representación o modos de uso. Este problema se abordará en el capítulo 8 de este trabajo.

1.3. Objetivos de la investigación

El objetivo general de la investigación es caracterizar el significado que un grupo de estudiantes de Bachillerato atribuye al concepto de límite finito de una función en un punto con posterioridad a la recepción de la instrucción ordinaria correspondiente. Consideramos que el significado que comunica un estudiante se puede analizar en los mismos términos que el significado de cualquier concepto matemático escolar. Dicho análisis considera tres componentes principales, *referencia o estructura conceptual* (conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con el concepto), *sistemas de representación* (comprenden tanto los modos de expresión de las propiedades del concepto que emplean los estudiantes, así como las relaciones que éstos establecen entre modos diferentes de expresión) y *sentidos*, modos de uso del concepto, así como situaciones y contextos en los que el estudiante aplica el concepto (Rico, 2003; Rico, 2012; Rico y Fernández-Cano, 2013).

Consideramos la noción de *concepción* para referirnos a aquellas "parcelas" de significado (significados parciales) que emergen de la respuesta de los estudiantes ante la demanda que plantean tareas particulares. Una concepción presenta una referencia, sistemas de representación y sentidos propios. El carácter subjetivo de esta respuesta la diferencia del concepto matemático correspondiente.

Para abordar este objetivo general, consideramos tres formas "básicas" en que los estudiantes pueden manifestar sus concepciones, de manera *analítica* (cuando identifican, expresan o discuten diversas propiedades del concepto), *sintética* (cuando sintetizan las características para ellos imprescindibles del concepto en una definición individual) y *aplicada* (cuando una definición individual u otras nociones son aplicadas en otros contextos, es decir, contrastan su definición). Junto con otros matices establecemos los siguientes objetivos específicos:

O.1. Diseñar un cuestionario de respuesta abierta para recoger información relativa a las concepciones de los estudiantes en sus aspectos analítico, sintético y aplicado.

O.2. Caracterizar las concepciones analíticas de los estudiantes cuando discuten la veracidad o falsedad de enunciados relacionados con el concepto de límite finito de una función en un punto. Analizar los modos de uso de los términos específicos "aproximar", "tender", "alcanzar", "rebasar" y "límite".

O.3. Caracterizar las concepciones sintéticas (definiciones individuales) de los estudiantes. Establecer sus aspectos estructurales y analizar el grado de interrelación entre concepciones sintéticas y analíticas.

O.4. Caracterizar las concepciones que resultan de las argumentaciones acerca de la existencia de límite de funciones definidas gráficamente, así como la coherencia respecto de la definición individual. Identificar las definiciones inconsistentes o carentes de aplicabilidad.

El objetivo específico O.1. es común a todos los artículos que integran esta memoria (Capítulos 5, 6, 7 y 8). El objetivo O.2. es abordado en los dos primeros artículos (Capítulos 5 y 6), el O.3. se aborda en el tercer artículo (Capítulo 7) y el O.4. es abordado en el cuarto artículo (Capítulo 8).

Capítulo 2

Fundamentación Teórica

En este capítulo describimos el marco conceptual estructurado en tres apartados, el primero de ellos está relacionada con el *significado* de un concepto matemático escolar y la *comunicación* del mismo, que proporciona un marco conceptual general y amplio para los cuatro artículos de esta tesis.

El segundo apartado se refiere al *análisis conceptual* de nociones y términos específicos del concepto matemático de límite finito de una función en un punto, que permite precisar los modos de uso de la terminología relacionada con el concepto matemático de límite finito de una función en un punto, a saber, “tender”, “aproximar”, “alcanzar”, “rebasar” y “límite”. Este apartado sirve de marco conceptual para los dos primeros artículos de esta tesis.

Finalmente, el tercer apartado introduce y establece una cuidadosa distinción entre las nociones de *concepción* y *definición.* Para describir la relación entre las concepciones del estudiante y su definición individual introducimos la noción de *coherencia.* Este apartado proporciona la base teórica para los dos últimos artículos de la tesis.

2.1. Significado de un concepto matemático. Antecedentes y delimitación conceptual

La delimitación conceptual de la noción de significado ha sido abordada en profundidad desde una amplia variedad de posiciones filosóficas, lingüísticas y científicas (Skovsmose, 2005; Romero, 1997; Rico, 2003, 2012). Nuestro marco sobre significado conceptual en matemáticas se basa en los trabajos realizados por Frege en el siglo XIX, no obstante, consideramos pertinente indagar semejanzas y diferencias con otras posiciones teóricas, entre ellas, la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. Esta sección se divide a su vez en tres sub-apartados. En el primero describimos las nociones clásicas de la teoría de significado de Frege, en el segundo, la intepretación de estas nociones realizada por Rico (2003, 2012) que sigue una estructura similar y en el tercer apartado una breve comparación entre este marco conceptual y la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud.

2.1.1. Nociones clásicas de la teoría semántica de Frege

En el trabajo *Sobre Sentido y Referencia* (Frege, 2013) se introducen las nociones de *signo*, *sentido* y *referencia* y establece la relación entre las mismas.

La *referencia* la define Frege en dos contextos relacionados. En primer lugar describe la noción de *referencia* de un término, como el objeto formal que denota dicho término. En segundo lugar, establece la *referencia* de un enunciado, como el valor de verdad de dicho enunciado.

Por otro lado, una determinada referencia puede venir dada por diferentes signos, en tal caso, introduce la noción de *sentido* del signo, como el modo en que un signo designa la referencia, lo cual permite discriminar entre diferentes modos de uso de una referencia común.

En el trabajo *Sobre Concepto y Objeto*, la noción de concepto de Frege es puramente lógica, aunque él admite la existencia de otras perspectivas pero no pretende realizar ninguna comparación o elección de la perspectiva más idónea. Tampoco pretende definir completamente lo que es un concepto, sino dar explicaciones indirectas para mostrar lo que es.

Un *concepto* tiene un papel predicativo (nunca sujeto), por otro lado un *objeto*, designado por un nombre propio nunca puede ser predicado gramatical. Para explicar la diferencia entre ambos constructos, explica dos sentidos del uso del verbo “ser”.

- *Cópula.* Afirmar que algo es Alejandro Magno, Planeta Venus, número 4, no añade información predicativa sino que denota objetos.
- *Concepto.* Afirmar "Algo es verde" equivale a expresiones como "algo verdea", al contrario que en el caso anterior. La función del verbo "ser" es establecer que un objeto cae bajo un concepto en este caso, "verde".

Por otro lado, "El lucero de la mañana es Venus" expresa únicamente una igualdad de la referencia correspondiente a dos nombres propios "lucero de la mañana" y "Venus", sin embargo, "El lucero de la mañana no es otro que Venus" expresa que existe un concepto "lucero de la mañana" bajo el que cae un único objeto "Venus", y "Venus es un planeta", expresa que Venus es un objeto que cae bajo el concepto "planeta", no dándose la relación recíproca.

Un concepto se describe formalmente mediante una función veritativa de un argumento, si bien, puede generalizarse a múltiples argumentos, por ejemplo, una relación binaria en un conjunto. Dicha función consta de un enunciado predicativo *insaturado* o *incompleto*, que requiere de un objeto para obtener sentido completo el enunciado correspondiente. El valor de verdad de los enunciados es el valor de la función para tal objeto. Es primordial que para cualquier objeto se determine inequívocamente si cae (valor verdadero) o no cae (valor falso) bajo un concepto, es decir, el valor de verdad del enunciado característico de la función (p.119).

Al conjunto de todos objetos que cae bajo un concepto, aquéllos para los cuales el valor de la función característica del concepto es verdadero se les denomina *extensión del concepto*. Dos conceptos serán equivalentes si tienen la misma extensión, por tanto, sus nombres son substituibles en cualquier momento, al igual que los nombres propios de los objetos. Sin embargo, la sustitución sólo conserva la referencia, no el sentido o pensamiento que pueden ser diferentes.

La relación entre conceptos puede darse de dos formas diferentes según Frege:

- *Concepto cae bajo otro Concepto.* Frege percibe cierta jerarquía en la clase de los conceptos, pudiendo darse que un concepto funciona como objeto dentro de otro Concepto de "nivel superior". Por ejemplo, el objeto - concepto "es cuadrado" cae bajo el concepto "tiene instancias". Frege percibe que el término "el concepto" se emplea para denotar un objeto no un concepto, por ejemplo, "el concepto *triángulo equilátero*" designa un objeto, dado que no tiene naturaleza predicativa, por otro lado, "el planeta Neptuno", designa un objeto que cae bajo el concepto "planeta".

- *Subordinación de un concepto a otro.* Un concepto X está subordinado a un concepto Y, si todo objeto que cae bajo el concepto X cae bajo el concepto Y. Por ejemplo, el concepto "continuidad" está subordinado al concepto "límite finito de una función en un punto" que, a su vez, está subordinado a los conceptos "límite lateral por la derecha" y "límite lateral por la izquierda".

2.1.2. Significado de un concepto matemático escolar

Rico (2012, pp. 52-53) describe un modelo de significado de un concepto matemático escolar basado en la estructura ternaria de Frege como un marco interpretativo del conocimiento matemático de los estudiantes que responde a preguntas básicas como ¿Sobre qué conceptos, propiedades, definiciones o relaciones los estudiantes argumentan y comunican sus ideas matemáticas?, ¿qué signos emplean para ello?, ¿qué modos de uso se identifican en el concepto?, ¿qué situaciones o contextos enmarcan sus ideas matemáticas o están en su origen? Introducimos las componentes de dicho modelo.

- La *estructura conceptual*, que comprende la red de conceptos, definiciones y propiedades, junto con aquellos argumentos, normas y otros procedimientos de los que derivan sus reglas de razonamiento y sus criterios de veracidad. La referencia sobre la cual los estudiantes construyen su conocimiento viene sintetizada mediante su definición individual.
- Los *sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto, muestran sus propiedades y lo relacionan con otros.
- Los *sentidos*, que incluye aquellos modos de uso, contextos, situaciones y problemas que están en el origen del concepto y lo dotan de carácter funcional.

Las tres componentes del modelo de significado pueden sintetizarse en un mapa conceptual en el que se destacan los focos prioritarios y las relaciones entre diversos conceptos y procedimientos (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 16).

Describimos con mayor nivel de detalle cada una de las componentes de significado.

Estructura Conceptual

Sobre el término "estructura" existen múltiples perspectivas que abordan su estudio tal como refleja Piaget; sin embargo, este autor establece tres pilares que comparten todas ellas:

- *Totalidad.* El todo "estructurado" no debe considerarse como un mero agregado de partes, sino que sus elementos han de estar

relacionados, las propiedades del todo son de naturaleza diferente a la de sus partes (Piaget, 1968, p.12).
- *Transformaciones.* La estructura ha de presentar leyes que regulen las operaciones que se realizan entre elementos de la misma, por tanto, una estructura engloba un conjunto de elementos, una variedad de transformaciones o relaciones dentro del mismo, y las leyes que regulan dichas transformaciones o relaciones (p. 14).
- *Autorregulación.* Es natural exigir a una estructura la propiedad de conservación y cierre, en el sentido en que toda transformación de elementos produce "nuevos" elementos en el mismo conjunto. Además Piaget sostiene que estructuras pueden funcionar como subestructuras dentro de otras más grandes (p. 17).

La noción de estructura conceptual que planteamos cumple las tres características anteriores:
- *Totalidad.* Porque el conocimiento de la estructura no se puede reducir a un agregado de piezas de conocimiento aisladas.
- *Transformaciones.* Dentro de dicha estructura conceptual existen diversidad de relaciones entre conceptos o representaciones de los mismos, por ejemplo, relaciones de subordinación ("Todo cuadrado es un rectángulo") y de equivalencia ("Todo grupo finito es isomorfo a un grupo de permutaciones").
- *Autorregulación.* Por ejemplo, la estructura conceptual relacionada con el número natural, tiene varias subestructuras dependiendo de los contextos a los que este concepto da respuesta (cardinal, ordinal, medida, etc.). También una estructura conceptual puede funcionar dentro de otra más grande, por ejemplo, la estructura conceptual relacionada con aplicaciones que tienen a funciones como variables independientes, incluyen a la estructura conceptual relacionada con la noción de función.

Sistemas de Representación

Acerca de los sistemas de representación existen diversidad de perspectivas en Educación Matemática desde las que abordar su estudio (Janvier, 1987; Rico, 2009). Todas ellas sostienen, entre otros supuestos, que todo concepto matemático requiere de una variedad de representaciones para su captación, comprensión y estructuración, de ahí la necesidad de establecer relaciones entre distintos sistemas de representación. Todo sistema de representación enfatiza unas propiedades del concepto y dificulta la percepción/comprensión de otras, es decir, no agota el concepto (Janvier, 1987, p.69).

Se consideran *representaciones* a las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes (Castro y Castro, 1997).

Según Duval (2006), las relaciones entre representaciones, se pueden dar dentro de un mismo sistema de representación, lo que él denomina *tratamiento,* o entre diferentes sistemas de respresentación, denominadas *conversiones* o *traducciones* entre representaciones de dichos sistemas.

Una estructura conceptual puede funcionar como "sistema de representación" de otra. Por ejemplo, Kaput (1987) ejemplifica que todo grupo puede representarse mediante un grupo de permutaciones, es decir, la estructura conceptual de grupo se puede reducir a la estructura conceptual de los grupos de permutaciones; resultado conocido como Teorema de Cayley (Cohn, 2003, p. 32).

Fenomenología

La delimitación conceptual de la *fenomenología didáctica* tiene su principal exponente en los trabajos de Freudenthal. Destacamos de manera particular Freudenthal (1983) donde desarrolla su teoría con bastante detalle.

La fenomenología consiste en analizar la relación entre dos entidades, *noúmenos*, que designa cualquier objeto del pensamiento, y *fenómeno*s, que engloba la experiencia sensible. Los noúmenos permiten organizar diferentes fenómenos.

Más concretamente, Freudenthal establece que la fenomenología de un concepto matemático, estructura o idea matemática, es describir el noúmeno en relación con los fenómenos de los cuales funciona como medio de organización, indicando a cuáles otros fenómenos puede extenderse y de qué manera actúa sobre tales fenómenos. La fenomenología didáctica se deriva de explicitar el elemento didáctico de la organización de los fenómenos, es decir, analizar la relación entre noúmeno y fenómenos dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Desde esta perspectiva el proceso de aprendizaje del concepto no parte de la estructura formal del mismo y luego de los fenómenos que organiza sino, justamente, al contrario, partiendo de fenómenos que requieran el uso de determinados rudimentos mentales y realizar el proceso de abstracción paulatina de los mismos. Sin embargo, tales procesos dependen de la madurez cognitiva del escolar.

Nosotros adoptamos una perspectiva diferente abordando la fenomenología de un concepto matemático como *modos de uso*, dentro de un enfoque funcional de la matemática escolar (Lupiáñez, 2013, pp. 87-88; Rico, Marín, Lupiáñez, y Gómez, 2008, pp. 17-19). Estos modos de uso responden a dos aspectos:

- *Situaciones.* El medio en el cual se enmarcan problemas y cuestiones matemáticas que se plantean a los escolares. En el marco del proyecto PISA se proponen cuatro tipo de situaciones, *personales, ocupacionales, sociales y científicas.*
- *Contextos.* Marco en el que los conceptos y estructuras matemáticas atienden a diversas funciones y necesidades como instrumentos de conocimiento. Los contextos asociados a una determinada estructura matemática surgen de establecer las cuestiones básicas a los que ésta da respuesta.

La noción de *sentido* de un concepto que establece Frege, la consideramos como precursor material y formal de su análisis fenomenológico, dado que el sentido se refiere a la información que un signo proporciona de la referencia o modo de darse la misma. Por ejemplo, el número natural 7 puede denotar al mismo tiempo, la cantidad de elementos de un conjunto o la posición de un elemento dentro de una lista. Por otro lado, un mismo sentido o forma de darse un objeto, puede venir expresado por variedad de signos.

El sentido de un enunciado no lo identifica Frege con la referencia (su valor de verdad) sino con el pensamiento que contiene. Por ejemplo, "Ulises llegó a Ítaca" no tiene referencia porque no tiene sentido plantear la cuestión acerca de su veracidad o falsedad, pero tiene un pensamiento completo o sentido. Afirmar que "4 es primo" es un enunciado falso, pero tiene sentido definido (¿Existe una factorización de 4 en factores primos?).

Finalmente, el análisis fenomenológico se puede dar en dos niveles, uno *externo*, como las relaciones que se establecen entre fenómenos de la experiencia sensible y la estructura conceptual correspondiente, incorporando modos de actuar frente a situaciones, para procesar información y modelizar e *interno,* que toma en consideración la relación interna entre diversos conceptos y procedimientos de dicha estructura conceptual que refuerzan la objetividad y potencial argumentativo, que en última instancia, promueven herramientas para establecer nuevas conexiones externas.

2.1.3. Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud. Síntesis comparativa

Vamos a describir brevemente los constructos que caracterizan la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud. Después estableceremos diferencias y semejanzas respecto de la noción de significado presentada en el apartado anterior.

En primer lugar, Vergnaud considera un *campo conceptual*, como un conjunto heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición (Moreira, 2002, p.2). Otras definiciones dadas por el propio Vergnaud lo considera como un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de tipos diferentes pero íntimamente relacionados (Vergnaud, 1983b, p.127, citado por Moreira, 2002). Considera además tres argumentos que posiblemente justifican la necesidad de esta teoría:

- La amplia variedad de situaciones a las que un mismo concepto da respuesta,
- la amplia variedad de conceptos vinculados a una misma situación,
- las conexiones erróneas entre situaciones, signos y conceptos, son la razón de que la construcción y apropiación de las propiedades de un concepto o situación tome bastante tiempo para el escolar.

Vergnaud define un *concepto* como una terna que se compone de los siguientes elementos:

- *Referente.* Conjunto de situaciones que dan sentido al concepto.
- *Significado.* Conjunto de invariantes (objetos, propiedades, relaciones) con los que el escolar aborda las situaciones del primer conjunto y dotan al concepto de carácter operativo.
- *Significante.* Conjunto de representaciones (simbólicas, lenguaje natural, gráficos, diagramas) con los que se expresan dichos invariantes y las situaciones a la que estos dan respuesta.

El referente del concepto es externo al estudiante, mientras que el par “Significado - Significante” es característico del estudiante y sujeto a variación.

La *situación* para Vergnaud viene dada por una combinación de tareas que requieren el uso de determinados conceptos. La variedad de situaciones moldea los procesos cognitivos y respuestas de los estudiantes. El historial de situaciones que experimenta el estudiante a lo largo del aprendizaje es clave, dado que los estudiantes responden a nuevos retos desde posiciones anteriores acertadas o erróneas que lograron modificar o reforzar.

Las situaciones carecen de sentido por sí mismas. Tal sentido procede de la mirada bajo la óptica de los invariantes conceptuales que la organizan y explican. Por otro lado, los conceptos sin situaciones asociadas carecen de aplicabilidad.

Una organización invariante del comportamiento del estudiante frente a una determinada clase de situaciones, entendiendo por invariante la abstracción y organización de diversos comportamientos particulares y contextualizados, recibe el nombre de *esquema.* Los esquemas son clasificados por Vergnaud en *perceptivo-gestuales* (contar objetos, realizar diagramas o gráficos), *verbales* (comunicar) y los *algoritmos o habituales-ordinarios.* Los esquemas presentan otros elementos que ayudan a caracterizarlos:

- *Invariantes operatorios.* Los teoremas o conceptos que estructuran la situación generando metas y reglas de acción pertinentes.
- *Metas y anticipaciones.*
- *Reglas de acción.* Estructuras lógicas "si esto ocurre, entonces..." y criterios de control del proceso.
- *Posibilidades de inferencia.* Extensión del esquema a otras situaciones de diferente naturaleza o establecer "clases" de situaciones.

Los invariantes operatorios son abstracciones de dos tipos de conocimiento dentro de un esquema:

- *Teorema en acto.* Toda proposición verdadera enunciada acerca de una situación.
- *Concepto en acto.* Todo objeto, predicado o categoría de pensamiento relevante de dicha situación.

Los teoremas en acto necesitan de conceptos en acto, pero un concepto en acto no tiene sentido si no procede de proposiciones verdaderas en la situación, por lo tanto son entidades complementarias.

Los invariantes operatorios suelen ser implícitos, dado que los estudiantes pueden tener dificultad para explicitar los teoremas o conceptos en acto, sin embargo, a lo largo el tiempo, tales conceptos y teoremas en acto pueden dar lugar a conceptos y teoremas explícitos, que no dependan de la situación de la que proceden.

En la tabla 2.1. se incluyen características que comparten y diferencian la noción de significado que adoptamos y la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud.

Tabla 2.1. Tabla comparativa del modelo de significado propuesto y la teoría de los campos conceptuales

Semejanzas	
Modelo de Significado	Teoría de los Campos Conceptuales
Comparten los elementos básicos de significado (estructura ternaria), aunque difieren en la terminología empleada	
Diferencias	
Centra la atención en el contenido expresado por los escolares, más que en los procesos cognitivos implicados	Centra atención en los procesos cognitivos (esquemas)

Discrimina entre situación y contexto, entendiendo como contexto la cuestión básica a la que un concepto da respuesta, mientras que la situación responde al ambiente circundante al contexto	No existe dicha discriminación
Carece de la noción teorema en acto, concepto en acto, dado que los elementos conceptuales proceden de abstracciones de las respuestas del estudiante a cuestiones específicas	Considera teoremas y conceptos dentro de una situación dada, en vez de realizar una abstracción de los mismos
Es un modelo teórico sujeto a revisión empírica, que no requiere medir desarrollo del aprendizaje	Es un modelo empírico que intenta describir procesos cognitivos y su desarrollo

2.2. Comunicación y significado

La forma de acceder al significado que un estudiante posee acerca de un concepto matemático es mediante la comunicación; mediada por múltiples instrumentos (cuestionarios, entrevistas, observación de actuaciones, experiencia de aula, gestualidad, etc.).

Von Glasersfeld (1987) discute que en un acto de comunicación básico (emisor, receptor, código y canal), el emisor de un determinado mensaje posee un “significado intencional” que codifica (gestos, signos escritos, etc.) en dicho mensaje. El receptor recibe el mensaje codificado y lo interpreta según su propia experiencia y, por lo tanto, proporciona un “significado efectivo”, que puede ser correspondido en un mensaje de vuelta al emisor, produciéndose un intercambio de información. Este autor sostiene que la eficacia de la comunicación reside no en que las representaciones internas de ambos interlocutores sean “equivalentes” sino que el campo de experiencias (situaciones evocadas por los términos o signos compartidos) no entren en conflicto, es decir, la comunicación efectiva implica compatibilidad fenomenológica, más que de sistemas de representación o estructura conceptual.

En caso de conflictos, es necesario explorar lo que Arias (2014, p.74) define como *negociación de significado*, como la ampliación, desviación, modificación, reinterpretación o confirmación de los significados que poseen los interlocutores acerca de determinada noción. Arias contextualiza el acto de comunicación entre un tutor y un grupo de estudiantes. En nuestro trabajo contextualizamos el acto de comunicación entre los investigadores y cada estudiante, mediado por el cuestionario empleado para la recogida de información.

Las destrezas comunicativas que se espera los estudiantes pongan en juego al abordar las tareas de los cuestionarios las obtenemos y adaptamos de los estándares curriculares y de evaluación de la asociación estadounidense National Council of Teacher of Mathematics (NCTM, 1989, p. 214):

- Entienden, interpretan y evalúan la veracidad de enunciados acerca de propiedades del concepto de límite finito de una función en un punto.
- Construyen argumentos de manera coherente para discutir la existencia o no existencia de límite de funciones dadas gráficamente.
- Utilizan vocabulario apropiado para expresar su definición individual del concepto de límite finito de una función en un punto.

2.3. Análisis conceptual de términos específicos

El análisis conceptual es un método no empírico y, por tanto, se puede considerar parte de un marco metodológico que se emplea para delimitar los modos de uso e interconexiones de términos y nociones teóricas, sobre todo cuando se emplean en varios ámbitos (Rico, 2001; Scriven, 1998).

El análisis conceptual lo consideramos útil para delimitar, organizar y precisar los diversos modos de uso que los términos "aproximar", "tender", "alcanzar", "rebasar" y "límite" adoptan en esta investigación y anticipar aquéllos que los estudiantes pudieran poner de manifiesto. En primer lugar, las razones por las que seleccionamos estos términos y consideramos pertinente abordar su análisis conceptual vienen explicadas en Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2013):

> Los términos tienen un significado técnico y formal en matemáticas y en el ámbito escolar, pero también usos convencionales y coloquiales no vinculados con las matemáticas.
>
> Aparecen de manera frecuente en la literatura revisada, tanto en la definición del concepto de límite como en la caracterización de las dificultades y errores asociados, poniendo de manifiesto conflictos que surgen entre los usos formales y coloquiales.
>
> Ayudan al diseño, selección y caracterización de las tareas que incluyen estos términos destinadas a la recogida de información de los estudiantes,
>
> Los sujetos del estudio los emplean, junto con sinónimos, para expresar distintas interpretaciones del concepto de límite, ya sea de manera técnica (terminología adquirida por la instrucción mediada por el profesor, el libro de texto o el propio instrumento de recogida de datos) o informal (sus propias interpretaciones personales).

> De acuerdo a nuestra noción de significado de un concepto matemático descrita anteriormente, cada uno de los términos se refiere parcialmente a propiedades y modos de uso asociados al concepto de límite y, junto con otras nociones, contribuyen a delimitar su significado.
>
> Es necesario fijar un marco interpretativo para analizar los usos y los significados de dichos términos puestos de manifiesto por los sujetos de nuestro estudio (p. 135).

En los siguientes apartados describimos brevemente un análisis conceptual de los términos específicos anteriormente mencionados, extendiendo el propuesto en los dos primeros trabajos de esta tesis (capítulos 5 y 6).

2.3.1. Análisis conceptual del término "aproximar"

El término "aproximar" tiene las siguientes acepciones en el diccionario de la Real Academia Española [RAE] (RAE, 2001):

> " Aproximar (De próximo)
>
> 1. tr. Arrimar, acercar. U. t. c. Prnl.
>
> 2. tr. Obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado. U. t. c. prnl."

Para buscar acepciones del término "aproximar" en los diccionarios de *Oxford* (Oxford University Press [OUP], 2014) y *Collins* (Collins, 2014), emplearemos dos términos diferentes de la lengua inglesa "approximate" y "approach". Consultando el diccionario de Oxford encontramos:

> "Approximate
>
> 1. Estimate or calculate (a quantity) fairly accurately. *"I had to approximate the weight of my horse"*
>
> Approach
>
> 2. Come near or nearer to someone or something in distance or time. *"The train approached the main line", "Winter was approaching".* "(OUP, 2014)

Consultando el diccionario Collins estos términos tienen las siguientes acepciones:

> Approximate
>
> 1. (usually followed by to) to come or bring near or close; be almost the same (as)
>
> 2. (mathematics) to find an expression for (some quantity) accurate to a specified degree.
>
> Approach
>
> 1. To come nearer in position, time, quality, character, etc, to (someone or something) (Collins, 2014)

Se observa que "approximate" y "approach" tienen usos diferentes en inglés, mientras que en castellano "aproximar" abarca ambos usos. En matemáticas, las diferencias de uso son las siguientes:

- *Estático-operador.* Esta característica corresponde a "approximate" al emplearse esencialmente en el sentido de estimar una cantidad con una precisión requerida. Este sentido también lo adquiere el término "aproximar", "*Aproximo raíz de 2 con 1'41 / hasta las centésimas*" , equivalentemente, "*1'41 aproxima raíz de 2 hasta las centésimas*".
- *Dinámico.* Por otro lado, "approach" se refiere a la propiedad de una sucesión de estimaciones sucesivas con error decreciente, sentido que también adquiere el término "aproximar", por ejemplo, "*La sucesión 0'9, 0'99, 0'999, … se aproxima a 1*" o "*0'9, 0'99, 0'999,… se aproximan a 1*", es una forma equivalente de afirmar que "*0'99 aproxima a 1 mejor que 0'9, y 0'999 aproxima a 1 mejor que 0'99 (estáticamente)…*"

Identificamos la referencia del término "aproximar" en el contexto particular de límite finito de una función en un punto en términos de dos estructuras:

- *Relación de orden aproximativo basado en la métrica y el orden usuales.* El valor del límite (L) determina una relación de orden en el conjunto cociente de $\mathbb{R}$ (Identificando elementos simétricos respecto de L, es decir, [a]={a, 2L-a} es la clase correspondiente de cada real a). La relación de orden viene dada por la siguiente regla:

  "[a] *aproxima mejor o igual* L que [b]", si y sólo si, $|a-L|\leq|b-L|$

  Esta relación está bien definida, es reflexiva, antisimétrica y transitiva, propiedades que se deducen inmediatamente de las propiedades del orden usual $(\mathbb{R},\leq)$. Denominaremos a esta relación *orden de aproximación respecto de L.*
- *Analítica.* Se dice que una sucesión x_n de números reales se aproxima a L si para cualquier N existe un natural N_0 tal que para $n\geq N_0$, x_n aproxima mejor L que x_N o $x_N=L$ (Adaptada de Blázquez, 2000). En términos intuitivos, cualquier estimación de L por elementos de la sucesión x_n distinta de L es mejorable por términos de la misma sucesión de uno en adelante. Admitimos que algún término de la sucesión sea igual a L, para que tenga sentido afirmar que la sucesión constante se aproxima a su límite. No hay forma viable de extender esta noción a una variable continua sin implicar tendencia.

2.3.2. Análisis conceptual del término "tender"

El término "tender" tiene las siguientes acepciones en el diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2001):

Tender

8. tr. Dicho de una persona o de una cosa: Tener una cualidad o característica no bien definida, pero sí aproximada a otra de la misma naturaleza.

11. tr. Mat. Dicho de una variable o de una función: Aproximarse progresivamente a un valor determinado, sin llegar nunca a alcanzarlo

Consultando el diccionario de Oxford, pues el diccionario Collins no añade más información, encontramos:

"Tend

1. Go or move in a particular direction.

2. (tend to) Mathematics (of a variable) approach a given quantity as a limit." (OUP, 2014)

Analicemos detenidamente el enunciado "*aproximarse progresivamente a un valor*". Detectamos una ambigüedad patente, porque denota tanto la posibilidad de que la aproximación dada por cualquier valor de la sucesión sea mejorable (*0'9, 0'99, 0'999... se aproxima progresivamente a 2, dado que cualquier aproximación de la forma 0'999..(n).9 es mejorable por los términos de la sucesión de uno en adelante*), pero también que dicho valor tiene aproximaciones arbitrariamente cercanas (*0'9, 0'99, 0'999,... se aproxima progresivamente a 1, porque cualquier aproximación diferente de 1 es mejorable por los términos de la sucesión de uno en adelante*), este último enfoque es el que ha de corresponder al término tender.

Otra expresión intuitiva que puede malinterpretarse es "*aproximarse cada vez más a un valor*". Si una sucesión x_n se aproxima cada vez más a L, quiere decir que x_{n+1} está más cerca de L que x_n, lo cual no es siempre cierto al hablar de tendencia de x_n a L o incluso de una sucesión constante.

La expresión intuitiva que describe mejor la idea de tendencia es "*aproximarse más que cualquier aproximación dada*" o "*aproximarse en menos de cualquier cota de error dada*"

Podemos describir la referencia del término "tender" en el contexto particular de límite finito de una función en un punto en términos de dos estructuras.

- *Relación de orden aproximativo basado en la métrica usual.* Empleamos la misma relación de orden que el dado para el término "aproximar".
- *Analítica.* Se dice que una sucesión x_n de números reales tiende a L si para cualquier $\varepsilon>0$ existe un natural N_0 tal que para $n\geq N_0$, x_n aproxima mejor L que L+ε y L-ε. Para una función $f(x)$ definida en un entorno de x_0, se dirá que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a, si para cualquier aproximación L' de dicho límite, existe una aproximación *a'* diferente de *a* de manera que toda aproximación *a''* de *a* que mejore *a'*, *f(a'')* mejorará L'.

A diferencia de la dualidad del término "aproximar", el término "tender" sólo tiene un sentido dinámico, pues el estático carece de sentido, el expresar *"f(x)* *tiende a L cuando x tiende a 0"* podemos matizar ese carácter dinámico de dos formas equivalentes :

- *Discreto.* Cualquier sucesión de valores x_n con límite 0, manifiesta el sentido discreto de la referencia "x tiende a 0", sin embargo, "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a 0" se manifiesta cuando la sucesión $\{f(x_n)\}$ tiene por límite L con independencia de la sucesión $\{x_n\}$ con límite 0.
- *Continuo.* El sentido anterior equivale también a que fijado cualquier entorno de L, encontramos un entorno reducido de 0 que se aplica mediante f en él.

2.3.3. Análisis conceptual del término "converger"

Aunque en los capítulos 5 y 6 no se incluye un análisis conceptual del término "converger" consideramos apropiado incluirlo, dado que tiene conexiones con "tender" cuando se aplica al límite de una sucesión.

Las acepciones generales de este término según el diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2001) son:

Converger

1. intr. Dicho de dos o más líneas: Dirigirse a unirse en un punto.

2. intr. Dicho de los dictámenes, opiniones o ideas de dos o más personas: Concurrir al mismo fin.

11. intr. Mat. Dicho de una sucesión: Aproximarse a un límite.

Seco, Andrés y Ramos (1999) añaden las siguiente acepción:

" Converger

1. Reunirse en un punto cosas en movimiento."

La convergencia, en cuanto a su uso coloquial se refiere, se emplea para indicar la relación entre dos objetos que "coinciden" o "llegan eventualmente a coincidir", tales objetos no necesariamente son dinámicos, por ejemplo, "Los programas políticos convergen en los grandes temas". Los usos coloquiales de tender no se encuadran en este contexto.

En el contexto matemático, "converger" se aplica a la tendencia de una sucesión al límite, pero también establece relaciones entre sucesiones, por ejemplo, "$\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ convergen" implica no sólo que $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tienen límite, sino que tienden al mismo límite. Por otro lado "$\{x_n\}$ converge" indica únicamente que tiene límite.

La convergencia se puede extender a la descripción de relaciones entre funciones f y g. Por ejemplo, "$f(x)=1/x$ y $g(x)=e^{-x}$ convergen (implícitamente se toma límite cuando x tiende a infinito) a $y=0$". En relación con el concepto de límite finito de una función en un punto, se puede decir " $f(x)=x$ y $g(x)=-x$ convergen en $x=0$", es decir, que tienen el mismo límite en $x=0$.

También tiene sentido afirmar que los procesos infinitos laterales en un entorno de un punto convergen al límite de la función en dicho punto.

Concluimos que el término “converger” se puede emplear con el concepto de límite finito de una función en un punto con expresiones del tipo “$f(x)$ converge a L en $x=a$”, “f(x) converge a L cuando x converge a a”.

2.3.4. Análisis conceptual del término “alcanzar”

El término “alcanzar” tiene las siguientes acepciones en el diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2001):

> “ Alcanzar
>
> 1. tr. Llegar a juntarse con alguien o algo que va delante.
>
> 2. tr. Llegar a tocar, golpear o herir a alguien o algo.
>
> 11. tr. Llegar a igualarse con alguien en algo.
>
> 13. intr. Llegar hasta cierto punto o término.”

El término alcanzar se aplica a la evolución de un fenómeno; a la posibilidad de que el fenómeno adopte cierto *estado*, por ejemplo, “la temperatura del agua alcanzó el punto de ebullición”. En relación con el concepto de límite finito de una función en un punto, la referencia de este término se basa en la respuesta a si *la función f(x) alcanza su límite L en el punto* x_0. Este enunciado admite dos referencias diferentes de alcanzabilidad.

- *Alcanzabilidad puntual.* Responde a los términos coloquiales “tocar” o “llegar a tocar”, “pasar”. Si consideramos el proceso determinado por la sucesión $\{f(x_n)\}$ donde $\{x_n\}$ tiende a x_0 con $x_n \neq x_0$ para todo n, la alcanzabilidad puntual del límite consiste en la existencia de algún n_0 tal que $L=f(x_0)$, dependiendo de la sucesión $\{x_n\}$, el valor de n_0 podría ser arbitrariamente grande pero siempre finito. En este sentido, {0’9, 0’99, 0’999,…} no alcanza puntualmente el límite 1 (coloquialmente, la sucesión no llega a tocar el límite), sin embargo, {0’9, 1, 0’99, 0’999,…} si alcanza puntualmente el límite 1 (coloquialmente, la sucesión llega a tocar el límite). Sin embargo, no tiene sentido afirmar que la *sucesión llega hasta el límite* porque no existe un estado final de la sucesión. En relación con la función, se dice que la función alcanza puntualmente el límite en x_0 si dicho límite es imagen de un valor x distinto de x_0.
- *Alcanzabilidad terminal.* Responde a los términos coloquiales “llegar a” o “llegar hasta”. Si consideramos la actualización del proceso $\{f(x_n)\}$ donde $\{x_n\}$ tiende a x_0 con $x_n \neq x_0$ para todo n, interpretando la actualización como la adición a dicho proceso del “valor de la sucesión $f(x_n)$ en el punto ∞, el punto $x_\infty = x_0$”, es decir, el valor del límite de la función en x_0. Se puede afirmar realmente que el proceso alcanza terminalmente el límite y

que *la sucesión llega hasta el límite* porque introducimos un estado final a la sucesión. Igualmente afirmamos que la función alcanza terminalmente el límite en x_0 si existe dicho límite. En la sección 5.1.2 se incluye una caracterización similar basada en la construcción de los números reales mediante sucesiones de Cauchy de números racionales.

La estructura matemática que subyace en todo caso es la relación de igualdad/desigualdad entre el límite y el proceso "iterativo" (Alcanzabilidad puntual) o "completo" (Alcanzabilidad terminal).

Veamos en qué fenómenos se observan los distintos tipos de alcanzabilidad.

- La cuestión sobre la *alcanzabilidad puntual* se observa en la paradoja de Zenón de la dicotomía. El extremo del trayecto nunca se alcanza en un número finito de pasos.
- La cuestión sobre la *alcanzabilidad terminal* se observa en que a pesar de que el proceso es infinito, puede "completarse", es decir, el extremo es alcanzado en el instante "transfinito".
- Dado que tal extremo se alcanza en un tiempo finito, se observa que la distancia recorrida en un tiempo T coincide con el límite del proceso iterativo anterior, por lo que la alcanzabilidad terminal se complementa con la continuidad.

2.3.5. Análisis conceptual del término "rebasar"

El término "rebasar" tiene las siguientes acepciones en el diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2001):

> " Rebasar
>
> 1. tr. Pasar o exceder de cierto límite.
>
> 2. tr. En una marcha, progresión, etc., dejar atrás, adelantar." (RAE, 2001)

El término "rebasar", al igual que "alcanzar", se aplica también a la evolución de un fenómeno; a la posibilidad de que los valores de un fenómeno tomen valores superiores o inferiores a cierta *cota*, por ejemplo, "el conductor rebasó la tasa de alcoholemia". La cota puede establecerse por *convenio* (tasa de alcoholemia, límite de velocidad, plazo de solicitudes) o estar *determinada* (límite de una magnitud física o capacidad física de un ser humano).

En relación con el concepto de límite finito de una función en un punto, la referencia de este término se basa en la respuesta a si *la función f(x) rebasa su límite L en el punto x_0*. Este enunciado da lugar a una única referencia: La función rebasará el límite L cuando la función tome valores tanto superiores o inferiores a dicho límite en un entorno reducido del punto x_0.

La estructura matemática que subyace es la relación de orden usual entre el límite y los valores del proceso iterativo.

2.3.6. Análisis conceptual del término "límite"

El término "límite" tiene variedad de acepciones como se observa en el diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2001).

> 1. m. Línea real o imaginaria que separa dos terrenos, dos países, dos territorios.
>
> 2. m. Fin, término. U. en aposición en casos como dimensiones límite, situación límite.
>
> 3. m. Extremo a que llega un determinado tiempo. *El límite de este plazo es inamovible.*
>
> 4. m. Extremo que pueden alcanzar lo físico y lo anímico. *Llegó al límite de sus fuerzas.*
>
> 5. m. Mat. En una secuencia infinita de magnitudes, magnitud fija a la que se aproximan cada vez más los términos de la secuencia.

El *vocabulario científico y técnico* (Real Academia de las Ciencias [RAC], 1990) recoge varias entradas que incluyen el término "límite" pero en sentido general se tiene que:

> "Límite. Estado al que puede aproximarse cuanto sea deseable una variable o un fenómeno || Estado extremo en el que el comportamiento de determinados sistemas o fenómenos cambia bruscamente" (p.425)

El término límite en lo que a su sentido cómun y coloquial se refiere, denota un sustantivo que expresa restricción, acotación o frontera que, en ocasiones, viene determinado por un proceso de aproximación. Por otro lado, en el contexto científico, el límite juega un papel de estado de cambio brusco, como umbral.

El uso técnico en matemáticas está vinculado con el de función y se habla del "límite de una función $y = f(x)$ en un punto x_0, o cuando x tiende a x_0" con una caracterización técnica específica ya definida anteriormente, cuya referencia es muy diferente de los usos coloquiales mencionados. Como veremos, los sentidos coloquial y técnico del concepto de límite resultan contraintuitivos.

2.4. Concepciones y Definiciones. Noción de Coherencia

En este trabajo establecemos una cuidadosa distinción entre la noción de concepción y definición individual que aparece íntegramente descrita en el capítulo 8 de esta memoria (sección 8.2). Aunque, toda definición individual es una concepción subrayamos los siguientes criterios diferenciadores:

- Las concepciones están íntimamente relacionadas con el estímulo concreto que las provocan, es decir, dos estímulos que sean equivalentes desde la perspectiva formal pueden evocar concepciones formalmente contrapuestas, pero coherentes desde la perspectiva del estudiante. Por otro lado, una definición individual se acomoda a la diversidad de situaciones a que el estudiante ha sido expuesto, no necesariamente a las cuestiones del instrumento de recogida de información.

- Las concepciones del estudiante establecen nuevas conexiones que la definición individual, por sí misma, no permite establecer. Por lo cual la definición individual puede considerarse como representación del estado de conocimiento anterior al que emerge de la nueva situación.
- La noción de coherencia descrita en el capítulo 8 permite contrastar el grado en que las concepciones del estudiante se derivan lógica y consecuentemente de la definición individual previamente planteada por el estudiante, mientras que la falta de una definición individual no permite comparar las concepciones entre sí.

2.4.1. Aspectos estructurales de las definiciones individuales acerca del Concepto de límite finito de una función en un punto

Dado que una definición individual puede recoger características que las concepciones analíticas han destacado, aparte de otras no consideradas, pretendemos caracterizar las definiciones individuales de los estudiantes en términos de las concepciones previamente evocadas u otras nuevas, organizadas en *aspectos estructurales.* Los aspectos estructurales se definen como propiedades del concepto de límite finito de una función en un punto que han sido reportadas en la literatura, o bien, son emergentes. La caracterización de estos aspectos estructurales está desarrollada en la sección 7.3.1, pero en este apartado los describimos en líneas generales.

- *Aspecto estructural Objeto/Proceso.* Este aspecto se refiere al estatus ontológico de su idea de límite (un objeto, un proceso o una interpretación dual).
- *Aspecto estructural Destrezas prácticas de cálculo.* Este aspecto se refiere a la mención explícita del procedimiento práctico de cálculo (tabla de valores, sustitución directa, etc.)
- *Aspecto estructural Alcanzabilidad/Rebasabilidad.* Este aspecto se refiere a la relación entre el resultado límite y el proceso infinito de tendencia, es decir, si se considera o no parte del proceso, o si acota o no el mismo superior/inferiormente.
- *Aspecto estructural Reproducción.* Este aspecto responde a que el estudiante replica la definición de referencia dada por la instrucción recibida.

Capítulo 3

Fundamentación Metodológica

Este trabajo es un estudio descriptivo y explicativo, basado en el método de encuesta. Es descriptivo ya que se propone detallar y documentar características y componentes de una familia de fenómenos didácticos: “las concepciones de escolares de bachillerato sobre la noción de límite finto de una función en un punto”. Es explicativo porque se propone desarrollar marcos interpretativos sobre dichos fenómenos, identificar factores que los expliquen, entender cambios o conjeturar relaciones entre ellos.

En este capítulo se detalla la elaboración del instrumento de recogida de información, la elección de los sujetos participantes, la implementación de la encuesta, la organización de la información recogida y la obtención de datos, y los métodos de análisis empleados.

3.1. Diseño del instrumento de recogida de información

Empleamos un cuestionario como instrumento único de recogida de información para la obtención de datos. La finalidad del mismo es diagnóstica, es decir, pretende recoger información de los estudiantes acerca de sus intuiciones generales (adecuadas, erróneas, incompletas, informales, etc.) acerca de ciertos aspectos del concepto de límite finito de una función en un punto que permanecen al poco tiempo de recibir la instrucción. Las tareas no persiguen la evaluación del uso técnico de procedimientos o definiciones que se recogen en la instrucción, sino promover la comunicación de ideas matemáticas acerca de otras propiedades relevantes del concepto, la interpretación y relación entre diversas representaciones del concepto, incluso la propuesta y aplicación de su definición personal del concepto en estudio. En definitiva, describir, intrepretar y explicar los modos en que los estudiantes transforman la instrucción recibida en conocimiento coherente, útil y explícito.

Diseñamos dos opciones del cuestionario (cuestionarios A y B) con los que abarcamos la mayor variedad de aspectos conceptuales, de sistemas de representación y de sentidos del concepto. Cada cuestionario consistió en cinco tareas; sin embargo, consideramos para esta memoria sólo tres tareas del cuestionario A y dos tareas del cuestionario B, exclusivamente. El cuestionario se aplicó mediante división aleatoria del grupo de estudiantes en dos grupos equivalentes, cada uno de los cuales respondió a una de las opciones.

El formato de presentación de los cuestionarios fue un cuadernillo que incluyó la siguiente información aparte de los enunciados de las tareas correspondientes:

- Datos de identificación de la institución que realiza el estudio, presentación del objetivo del mismo, solicitud de ayuda, instrucciones de cumplimentación y agradecimientos al encuestado.
- Datos de identificación del encuestado: edad, nombre, centro y curso.

3.1.1. Tareas de los cuestionarios

Ambos cuestionarios incluyeron una tarea común, con el siguiente enunciado:

> Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

La expresión "con tus propias palabras" en la formulación de esta tarea es esencialmente importante para incentivar que los estudiantes reprodujeran otras definiciones diferentes a la definición recibida en la instrucción (*definición de referencia*), o bien, describieran la definición de referencia con sus propia terminología e intuición.

Esta tarea tuvo un carácter sintético ya que pretendió resumir la idea general de cada estudiante sobre el concepto. Dado el carácter simplificado de una definición, fue imposible caracterizar completamente las concepciones de los estudiantes mediante un análisis aislado de las definiciones que plantearon, las cuales, a su vez, incluyeron deficiencias lógicas o fueron descripciones parciales del concepto (o de ciertos signos).

3.1.2. Tareas analíticas

Las tareas que se describirán a continuación tienen dos fines en relación con esta tarea común:

- *Analítico.* Ofrecer a los estudiantes una diversidad de propiedades del concepto sobre las que discutir y valorar su pertinencia para incorporarlas a su definición personal.
- *Aplicado.* Ofrecer oportunidades a los estudiantes para poner a prueba su definición personal en nuevas situaciones.

Las tareas analíticas previas a la tarea común anterior tuvieron la siguiente formulación:

> Rodea la V o la F en cada uno de los siguientes ennunciados, según sea verdadero o falso. Justifica en el recuadro tu elección:

Los enunciados adaptados y traducidos de Lauten et al. (1994, p. 229) se distribuyeron entre las dos opciones de cuestionario, los enunciados correspondientes al cuestionario A se denotan como A1, A2 y A3, y los correspondientes al B, como B1, B2 y B3:

> (A1). Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hasta cierto punto
>
> (A2). Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.
>
> (A3). Un límite se determina probando con valores de x cada vez más cerca de un número hasta que el límite se alcanza.
>
> (B1). Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza.
>
> (B2). Un límite es una aproximación que puede hacerse tan precisa como se quiera.
>
> (B3). Un límite es un número al cual los valores de una función f(x) pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de x.

Cada enunciado responde a diferentes sentidos y contextos, es decir, variantes en el modo de uso del concepto de límite que aportan diferentes significados:

- *Sentido conceptual intuitivo.* Los enunciados identifican hechos o datos que ejemplifican una idea intuitiva de límite, relacionados con algún uso coloquial del término límite expresados por los términos “alcanzar” y “rebasar” referidos al hecho o datos mencionados (A2 y B1). Estos enunciados refuerzan el uso coloquial del término límite como valor tangible e identificable, representable mediante un signo o notación los cuales, a su vez, expresan que ese valor está sometido a algún tipo de restricción en su tamaño o cantidad.
- *Sentido procedimental.* Los enunciados A3, B2 y B3 identifican un modo o procedimiento plausible para comprobar que “un

determinado valor o cantidad no puede rebasarse"; se relacionan con el procedimiento práctico de cálculo y sus propiedades.

- *Sentido contextual.* El enunciado A1 expresa una situación para responder a la cual es necesaria la noción de límite, por otro lado, los enunciados A3 y B2 se plantean en un contexto discreto, mientras que el A2, B1 y B3 corresponden a un contexto continuo.

3.1.3. Tareas de aplicación de la definición individual

La tarea de aplicación de la definición individual se realizó posteriormente a la tarea común. El único cuestionario que la incluyó fue la opción A. La formulación de esta tarea es la siguiente:

> Aplica tu definición personal de límite finito de una función en un punto a las funciones definidas por las siguientes gráficas (Figura 3.1) y explica en cada caso si existe el límite en el punto indicado:

G1. $\lim_{x\to 3} f(x)$ G2. $\lim_{x\to 1} h(x)$ G3. $\lim_{x\to -2} g(x)$

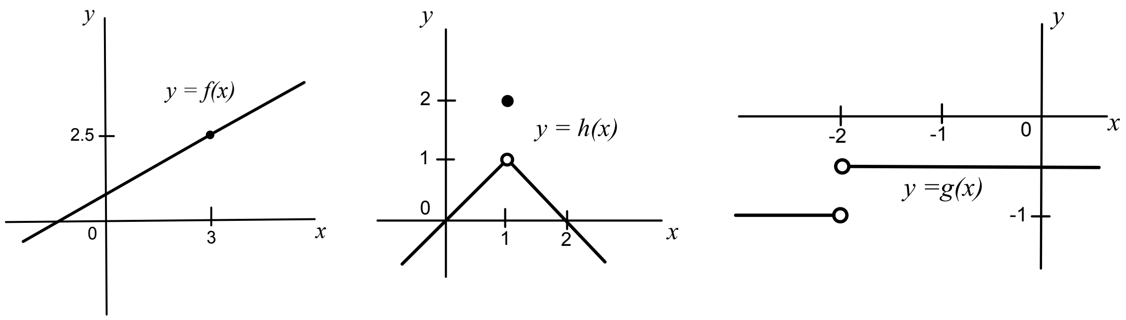


Figura 3.1. Gráficas empleadas para la aplicación de la definición individual

La estructura de esta pregunta atendió a una serie de consideraciones y de variables. Así, en la tabla 3.1. se recoge una caracterización de las gráficas propuestas en términos de la definición en el punto, el modelo de límite que representa (véase figura 9.1 y sección 9.1.2) y propiedades del valor del límite como la rebasabilidad y alcanzabilidad.

Tabla 3.1. Caracterización de la tarea de aplicación de la definición individual

Tarea/gráfica	Definición en el punto	Modelo de límite/continuidad	Propiedades
G1	Definida f(3)=2.5	Continuo	Alcanzable/Rebasable
G2	Definida f(1)=2	hueco	No alcanzable/No rebasable
G3	No definida	Salto	No existe límite

Esta tarea aunque se puede caracterizar como tarea de aplicación, es un estímulo de tipo analítico/diagnóstico pues se centró en explorar relaciones entre el sistema de representación gráfico y el verbal en el cual se expresó la definición del escolar o, incluso, entre el sistema de representación gráfico y otras intuiciones del escolar expresadas en sus argumentos. Por otro lado, el disponer de las definiciones individuales permite caracterizar los errores en que los estudiantes pudieran incurrir en la tarea, en confrontación con su propia definición.

3.2. Selección y organización de los participantes

La investigación se realizó con un grupo académico de 1º Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología de un Instituto de Educación Secundaria (Ciencias y Tecnología) de la provincia de Granada durante el curso 2010/2011. Constaba de 36 estudiantes. Estos estudiantes fueron seleccionados intencionalmente y por disponibilidad.

El centro se encuentra en una localidad de economía fundamentalmente rural, que recibe estudiantes de los pueblos de la comarca que encabeza dicha localidad para su formación desde 3º. ESO hasta el Bachillerato, por lo que la población estudiantil consta de amplia variedad demográfica. El nivel socio-económico de las familias es medio-bajo, con un número generalmente pequeño de alumnado extranjero.

Este grupo lo dividimos aleatoriamente en dos subgrupos A y B a los que asignamos sendas opciones de cuestionario.

Las tablas 3.2 y 3.3 muestran la composición del grupo participante en función de género y edad.

Tabla 3.2. Composición del subgrupo A en función de género y edad

Edad	Género		Total
	Hombre	Mujer	
16 años	9	5	14
17 años	1	2	3
18 años	1		1
Total	11	7	N=18

Tabla 3.3. Composición del subgrupo B en función de género y edad

Edad	Género		Total
	Hombre	Mujer	
16 años	7	4	11
17 años	4	1	5
18 años	1		1
No consta	1		1
Total	13	5	N=18

3.2.1. Instrucción previa

Describimos sumariamente la formación recibida por los estudiantes sobre el tópico de esta investigación "Límite finito de una función en un punto" a través de un análisis de los apuntes empleados por el profesor del grupo. No tenemos evidencias acerca de la implementación de estos apuntes en el aula, por tanto, nuestra descripción abarca únicamente la fase de planificación. Además de los apuntes, el profesor emplea el libro de texto *Matemáticas I* (Vizmanos et al., 2008) como fuente de referencia teórica y de tareas.

Previo al desarrollo de la unidad didáctica, el profesor fija los objetivos y contenidos que se propone impartir. Destacamos aquellos objetivos y contenidos relacionados con el tópico de este estudio.

Objetivos:

- Entender el concepto intuitivo de límite de una función en un punto y conocer su definición.

- Calcular de manera sistemática límites de funciones polinómicas, racionales e irracionales.

- Entender el concepto intuitivo de límite lateral de una función en un punto y conocer su definición.

- Conocer la relación que existe entre límite y límites laterales.

- Calcular límites de funciones definidas a trozos.

Contenidos:

1. Límite de una función.

    1.1. Entorno de un punto.

    1.2. Límites laterales de una función en un punto.

    1.3. Límite de una función en un punto.

    1.4. Relación entre el límite y los límites laterales.

2. Propiedades de los límites.

2.1. Propiedades de los límites.

2.2. Método general de cálculo de límites.

2.3. Indeterminaciones

3. Cálculo de límites de funciones racionales

3.1. Límites de funciones polinómicas

3.2. Límites de funciones racionales en un punto

Presentamos a continuación partes del desarrollo planificado de los contenidos fundamentalmente relacionados con la introducción al concepto (Punto 1), dado que el dominio que los estudiantes muestren de las técnicas algorítmicas de cálculo no es foco de nuestro interés. No obstante, consideramos apropiado describir el punto 2.2. en el que se introduce el método general de cálculo, por la influencia que puede tener en la concepciones de los estudiantes que queremos detectar y caracterizar (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro, 2013, p. 122).

Desarrollo planificado de los contenidos

El profesor considera como nociones iniciales de la introducción al concepto de límite finito de una función en un punto, las nociones topológicas de entorno y entorno reducido, empleando representaciones simbólico-verbales, numéricas y gráfico-lineales (Figura 3.2).

> Dado un número real a y un número positivo r, llamaremos entorno de centro a y radio r y lo expresamos por $E_r(a)$, al intervalo abierto (a-r, a+r).
> Llamaremos entorno reducido de centro a y radio r, y lo expresamos por $E^*_r(a)$, al entorno $E_r(a)$ del que excluimos el centro, es decir, $E^*_r(a)= E_r(a)$-{a}" [Representación simbólico-verbal]
> "$E_{0,5}(3)$=(2'5, 3'5)... $E^*_{0,5}(3)$= (2'5, 3'5)-{3}"[Representación numérica]

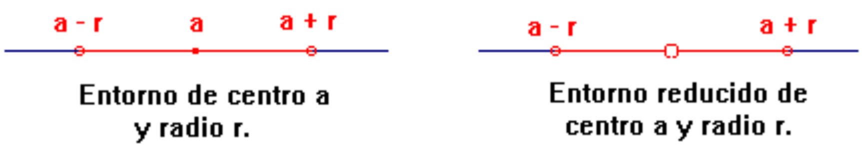


Figura 3.2. Representación gráfico-lineal de entorno y entorno reducido

La noción de entorno no vuelve a aparecer en el desarrollo de los siguientes contenidos. Considera posteriormente la noción de límites laterales previa a la introducción principal del concepto de límite finito de una función en un punto. Emplea los diferentes sistemas de representación (Figura 3.3.) :

En general, si una función *f(x)* se *aproxima infinitamente* a un nº real L, $+\infty$ o $-\infty$ cuando x se aproxima infinitamente a x_0 por la izquierda, diremos que L, $+\infty$ o $-\infty$ respectivamente es el límite por la izquierda de *f(x)* en el punto x_0, y lo expresamos por:

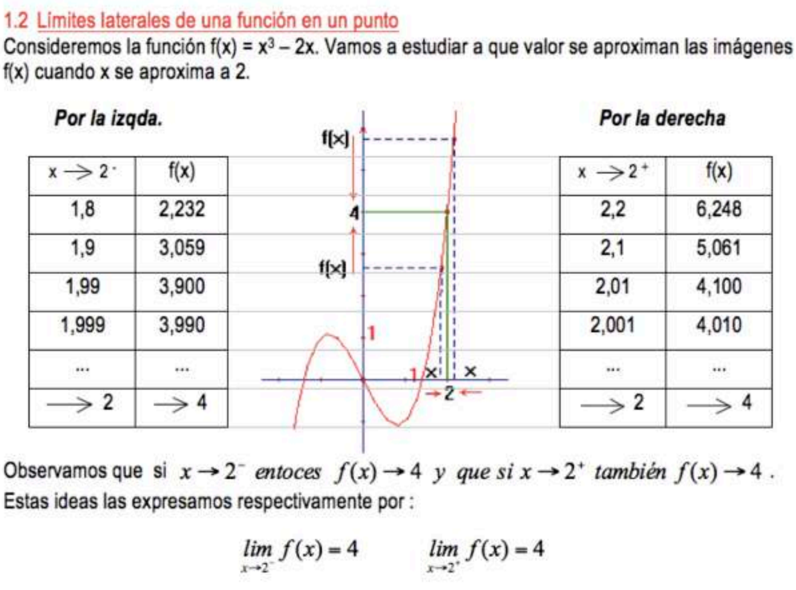
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L, +\infty, -\infty$$

Análogamente, si una función *f(x)* se aproxima infinitamente a un nº real L, $+\infty$ o $-\infty$ cuando x se aproxima infinitamente a x_0 por la derecha, diremos que L, $+\infty$ o $-\infty$ respectivamente es el límite por la izquierda de *f(x)* en el punto x_0, y lo expresamos por:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L, +\infty, -\infty$$

Observamos que en la descripción simbólico-verbal emplea los términos izquierda y derecha dentro de la definición en vez de explicar el sentido ordinal de la aproximación con valores mayores (límite por la derecha) y con valores menores (límite por la izquierda), si bien este sentido se refleja en las representaciones numéricas adjuntas.

Recalcamos el término “aproximarse infinitamente” porque algunos estudiantes lo emplean para expresar que el límite jamás es alcanzable (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2013, p. 141). Nótese también que la función de ejemplo es monótona en un entorno del punto, aunque no lo sea globalmente, lo cual pudiera ser un factor conflictivo para los estudiantes que resalten el carácter no rebasable de los límites laterales o del límite correspondiente (Ibídem, p.142).


1.2 Límites laterales de una función en un punto

Consideremos la función f(x) = x³ – 2x. Vamos a estudiar a que valor se aproximan las imágenes f(x) cuando x se aproxima a 2.

Por la izqda.

$x \to 2^-$	f(x)
1,8	2,232
1,9	3,059
1,99	3,900
1,999	3,990
...	...
$\to 2$	$\to 4$

Por la derecha

$x \to 2^+$	f(x)
2,2	6,248
2,1	5,061
2,01	4,100
2,001	4,010
...	...
$\to 2$	$\to 4$

Observamos que si $x \to 2^-$ *entoces* $f(x) \to 4$ *y que si* $x \to 2^+$ *también* $f(x) \to 4$.
Estas ideas las expresamos respectivamente por :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

Figura 3.3. Representaciones de los límites laterales de una función en un punto

El uso del término "aproximarse infinitamente" se refleja en la introducción de la definición intuitiva de límite finito de una función en un punto.

> En la función $f(x) = x^3 - 2x$, observamos que cuando x se aproxima a 2 ($x \to 2$), las imágenes $f(x)$ se aproximan a 4 ($f(x) \to 4$). Esta idea la expresamos diciendo que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 4 y lo escribimos así: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$
>
> En general, si una función $f(x)$ se aproxima infinitamente a un nº real L , $+\infty$ o $-\infty$ cuando x se aproxima infinitamente a x_0, diremos que L , $+\infty$ o $-\infty$ respectivamente, es el límite de f(x) en el punto x_0, y lo expresamos por:
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = L, +\infty, -\infty$$

El uso del término "tender" se limita a denotar el concepto más que en expresar una propiedad relevante del mismo. A esta noción intuitiva añade una observación en la que ejemplifica que el límite de la función en un punto no coincide necesariamente con la imagen (Figura 3.4).

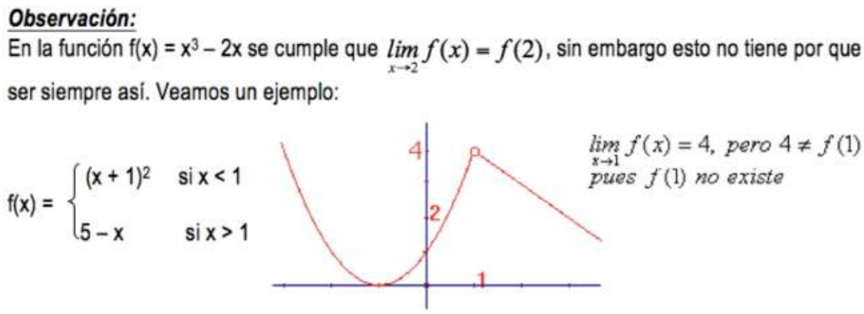


Figura 3.4. Contraejemplo para la igualdad entre límite e imagen

Finalmente, establece la relación entre límite de una función en un punto y los límites laterales. En ella vuelve a recuperar la noción de entorno, pero no menciona que sea reducido.

> Sea $f(x)$ una función definida en un entorno de un punto x_0. Teniendo en cuenta las definiciones de los límites laterales y la definición de límite, resulta evidente que se cumple:
>
> $$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad y \quad \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$
>
> Es decir, una función tiene límite en un punto x_0 si y sólo si existen los dos límites laterales en x_0 y son iguales.

Del punto 2.2, resaltamos la forma en la que introduce el "método general de cálculo de límites", pues todo el desarrollo anterior se resume en que para calcular el límite en un punto, sólo hay que sustituir el valor del punto en la expresión algebraica de la función. Este procedimiento puede ser sobregeneralizado por los estudiantes al identificar límite e imagen (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro, 2013, p.122).

> “ Mediante la aplicación de las propiedades de los límites es posible calcular límites de funciones. Ejemplo:
>
> $$\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+4)=\lim_{x\to 2}3x^2-\lim_{x\to 2}5x+\lim_{x\to 2}4=3\lim_{x\to 2}x^2-5\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}4=$$
> $$=3(\lim_{x\to 2}x)^2-5\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}4=3\cdot 2^2-5\cdot 2+4=6$$
>
> Observamos entonces que para calcular el límite de una función en un punto a ∈ R, a=+∞ ó -∞, se sustituye el valor de a en la expresión algebraica de la función.”

3.3. Descripción del trabajo de campo

El trabajo de campo se desarrolló durante el curso 2010/2011. Describimos la implementación del cuestionario en el contexto de investigación descrito en la sección 3.2.

Un día antes de la aplicación del cuestionario el investigador se presentó a los estudiantes y les explicó en qué iba a consistir el trabajo con el cuestionario.

La aplicación del cuestionario tuvo lugar el 12 de abril de 2011 en el rango horario de 13:45-14:45 (6ª hora), en un Instituto de Educación Secundaria de la provincia de Granada, en el Salón de Actos habilitado al efecto. Se organizaron 36 mesas en 3 columnas de 12 mesas, dejando una columna libre entre cada dos con el fin de que no estuvieran demasiado juntos. Los cuestionarios A y B se colocaron en las mesas de manera alternada en cada columna antes de que llegaran los participantes, de manera que se pudieran colocar en el lugar que quisieran, con el correspondiente cuestionario asignado, logrando así un reparto aleatorio de los cuestionarios. El investigador proporcionó las instrucciones para su cumplimentación.

El profesor del grupo acompañó al investigador durante todo el proceso de realización y recogida de cuestionarios. No hubo ninguna incidencia relevante durante la sesión. Investigador y profesor resolvieron dudas intentando no influir demasiado en la resolución.

Se recogieron al final 18 cuestionarios de la opción A y 18 cuestionarios de la opción B. El investigador agradeció su colaboración a los participantes y al profesor correspondiente.

3.4. Método de análisis de los datos

En este apartado desarrollamos la técnica de organización y análisis de la información recogida mediante los cuestionarios. Dividimos este apartado en tres partes, una para cada una de las tareas presentadas en el apartado anterior.

Como técnica general de análisis de datos cualitativos seguimos un proceso de *análisis inductivo*, en términos de McMillan y Schumacher (2005, p.480), consistente en un procedimiento cíclico de volcado de respuestas, categorización (establecimiento de temas o términos clave, agrupación de temas en categorías emic/etic), construcción de un modelo y la eventual representación visual. Este método se inserta dentro de un marco metodológico de *teoría fundamentada* (Corbin y Strauss, 1990).

En las secciones 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 concretamos las particularidades de la técnica de análisis de datos seguida.

3.4.1. Organización y técnica de análisis de los datos correspondientes a la tarea analítica

Para cada enunciado A1, A2 o A3, del cuestionario A, y respectivamente, B1, B2 o B3, del cuestionario B, volcamos las respuestas de los 18 estudiantes y las expresamos de forma (x, y), atendiendo a dos variables. La variable x expresó el valor veritativo escogido por cada estudiante para el enunciado, empleando los códigos V, para el valor verdadero, y F, para el valor falso. La variable y recogió el argumento correspondiente que proporcionó cada estudiante tanto en forma verbal, como mediante uso de ilustraciones o símbolos.

Parecería que el argumento y predeterminó el valor veritativo del enunciado. No fue así. En algunos casos se encuentran argumentos expresados en términos similares que contribuyeron a justificar valores veritativos opuestos. Por ese motivo, fue necesario considerar la variable x, para discriminar el sentido de los diferentes argumentos.

Descartamos para nuestro trabajo aquellas respuestas que únicamente consideraron el valor veritativo sin la correspondiente argumentación.

El análisis de los datos se realizó en tres etapas que se desarrollan en los capítulos 5 y 6 de esta memoria:

Uso y recuento de términos específicos

Centramos la atención en los términos clave que los estudiantes emplean en sus argumentos y que están relacionados con “tender”, “aproximar”, “alcanzar”, “rebasar” y “límite”, que son los términos específicos vinculados al concepto de límite finito de una función en un punto. El análisis conceptual (secciones 2.3, 5.1.2 y 6.3.1) de estos términos específicos nos permitió realizar agrupaciones de los términos efectivos de los estudiantes y realizar los pertinentes recuentos. Los detalles de esta etapa del análisis se desarrollan en las secciones 5.3.1 y 6.5.1.

Discusión del uso de los términos específicos
Centramos la atención en la interrelación de los términos. En el capítulo 5, discutimos que el enunciado que se refería a la rebasabilidad del límite (enunciado A2) recoge argumentos que emplearon términos relacionados con alcanzar (no llega, no toca, etc.), por tanto, se puede inferir que la no rebasabilidad del límite se da conjuntamente con su no alcanzabilidad (sección 5.3.2). Por otro lado, en el capítulo 6 observamos que hay referencias a la alcanzabilidad y rebasabilidad del límite cuando los estudiantes discutieron acerca de otros enunciados no directamente relacionados con dichas propiedades (enunciados A1, A3 y B2). Éstas se concretan en la sección 6.5.1.

Establecimiento de perfiles de argumentos y concepciones analíticas
En primer lugar, clasificamos los argumentos en dos familias generales, según el valor veritativo del enunciado que sostuvieron (V y F). Dentro de cada familia discriminamos los diferentes argumentos según la variedad de propiedades que enfatizaron y algunos aspectos del enunciado al que dieron respuesta, que ayudaron a dotar de sentido al argumento. En el capítulo 5 se describen los perfiles de respuesta correspondientes al enunciado A2, mientras que en el capítulo 6 se hace una síntesis de este análisis resumiendo las concepciones analíticas subyacentes de la tarea (Véanse las secciones 5.3.3 y 6.5.3 respectivamente). La descripción en profundidad de estos perfiles puede consultarse en Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2012).

3.4.2. Organización y técnica de análisis de los datos correspondientes a la tarea sintética

Una vez realizado el volcado de las 36 definiciones individuales que plantearon la totalidad de los estudiantes llevamos a cabo el análisis de las mismas en dos etapas diferenciadas que vienen completamente desarrolladas en el capítulo 7 de esta memoria:

Caracterización de las definiciones individuales mediante aspectos estructurales
Considerando una definición individual como una n-tupla, definimos cada componente como un *aspecto estructural* de la definición (véanse secciones 2.5.2 y 7.3.2), la caracterización de dichas componentes está concretada en el capítulo 7 pero la resumimos en cuatro tipos:

- Aspecto estructural *objeto/proceso.*
- Aspecto estructural *destrezas prácticas de cálculo.*
- Aspecto estructural *alcanzabilidad/rebasabilidad*
- Aspecto estuctural *reproducción de la definición de referencia*

En el capítulo 7 se desglosan estos aspectos estructurales en indicadores específicos (sección 7.3.1).

La clasificación de las definiciones se realiza estableciendo una jerarquía que considera los aspectos estructurales de la siguiente forma:

- En un nivel bajo de elaboración aislamos las definiciones que presentan el aspecto estructural *reproducción de la definición de referencia.*
- En un segundo nivel de elaboración, consideramos las definiciones según el aspecto estructural *alcanzabilidad/rebasabilidad* que aparezca de manera exclusiva.
- En un tercer nivel, consideramos las definiciones que presentan el aspecto estructural *objeto/proceso.* Este nivel presenta diferentes subniveles según la matización en términos de los aspectos estructurales *destrezas prácticas de cálculo* y *alcanzabilidad/rebasabilidad.*

Según estos criterios clasificamos las definiciones en 11 familias que se resumen en 7 tipologías de definición (Detalladas en Sección 7.3.2).

Grado de coincidencia entre concepciones analíticas y definiciones individuales

En esta etapa queremos obtener evidencias acerca de si los estudiantes se han apoyado en los enunciados analíticos (A1, A2, A3, B1, B2, B3) o en las concepciones analíticas subyacentes a sus argumentos, para construir su definición individual, es decir, establecer el grado de condicionamiento de las definiciones formuladas a las tareas analíticas previas.

Este condicionamiento se puede establecer mediante tres indicadores:

- *Definición adaptada o textual.* La definición se construye adaptando o insertando textualmente los argumentos asociados a algunos de los enunciados A1, A2, A3, B1, B2, B3.
- *Definición-reactivo.* La definición incluye una adaptación o copia textual del enunciado concreto, no del argumento, que de hecho puede estar en "blanco".
- *Definición original.* La definición incorpora otras propiedades diferentes a las que emergen de sus argumentos.

La tabulación de estos resultados se realizó recontando en primer lugar las definiciones originales asociadas a cada cuestionario. La tabulación de definiciones adaptadas o textuales / reactivo se realizó según cada enunciado teniendo especial precaución para el recuento, ya que una determinada definición se puede considerar al mismo tiempo *adaptada* de varios enunciados y/o de tipo *reactivo*, por lo que el recuento global no se puede realizar con la suma por filas y por columnas, tal y como se observa en la Tabla 7.2.

3.4.3. Organización y análisis de los datos correspondientes a la tarea analítica/aplicada.

El análisis de los argumentos que los 18 estudiantes plantearon para discutir la existencia o inexistencia del límite a partir de la información proporcionada por 3 gráficas se realizó en tres etapas diferenciadas que vienen desarrolladas en el capítulo 8 de esta memoria. Describimos a continuación cada una de estas etapas:

Caracterización de los argumentos o concepciones elementales asociadas a cada gráfica

En primer lugar, excluimos del análisis las definiciones individuales formuladas por los estudiantes y nos centramos en caracterizar las concepciones que subyacen en los argumentos a favor de la existencia o inexistencia del límite gráfica a gráfica.

Para cada gráfica se construyó un sistema de categorías de los argumentos respectivos y finalmente se obtuvo un sistema general de categorías que englobó a las tres gráficas. Las categorías se construyeron de manera inductiva a partir de las propiedades que los argumentos enfatizaron de la gráfica, considerándolas *concepciones elementales*. La lista de categorías (*concepciones elementales*) (pueden solaparse) obtenida fue la siguiente, que está detallada en el capítulo 8 (sección 8.5.1):

- *Análisis y comparación de límites laterales*
- *Por continuidad visual / alcanzabilidad*
- *Confusión del papel de las variables*
- *Rebasabilidad del candidato a límite*
- *No alcanzabilidad del candidato a límite*
- *Identificación entre límite e imagen*
- *Necesidad de definición*
- *Cambio de sentido en las aproximaciones laterales*

La organización de los resultados se realizó en una tabla de tres columnas (número de gráficas), dividida en dos partes, según el sentido del argumento *existencia de límite* o *inexistencia de límite.* Las filas de cada subtabla se identificaron con cada una de las categorías correspondientes, teniendo en cuenta que el recuento por filas no coincide con la suma, dado que hay solapamiento de categorías (Tabla 8.3).

Caracterización de concepciones emergentes de la tarea general

Se consideraron las ternas de argumentos correspondientes a cada estudiante. Para clasificar dichas ternas se empleó un criterio consistente en identificar qué categoría/s fueron mayoritariamente manifestadas por cada estudiante en respuesta a las gráficas (empleadas en dos o las tres gráficas), las cual dio nombre al perfil de terna. El resultado de aplicar este criterio de clasificación fue similar al tratamiento estadístico de estos datos mediante un análisis de conglomerados bietápico mediante software estadístico IBM SPSS Statistics (v.20)® . Las 18 ternas finalmente se clasificaron en cinco grupos que se detallan en el capítulo 8 (sección 8.5.2 y tabla 8.4), resumidas en estas líneas:

- Perfil "*Límites laterales*"
- Perfil "*Continuidad visual*"
- Perfil "*Límite-imagen*"
- Perfil "*Rebasabilidad-alcanzabilidad*"
- Perfil "*Sentido de tendencia contrario*"

Caracterización de la coherencia entre las concepciones analíticas y sintéticas

Es natural plantearse en qué medida los argumentos (concepciones analíticas) se derivan lógica y consecuentemente de la definición individual (concepción sintética), hecho que denominamos *coherencia* (véase sección 8.3.5), y ver qué gráficas incentivan u obstaculizan esta relación. Los detalles de ese análisis se incluyen en el capítulo 8 de esta memoria (sección 8.6.1 y tabla 8.5). Delimitamos tres grados de coherencia que se describen y ejemplifican en dicho capítulo:

- *Coherencia plena, general o de 1º nivel*
- *Coherencia de 2º nivel*
- *Coherencia de 3º nivel*
- *Incoherencia*

La cuestión acerca de la coherencia no puede plantearse si la definición individual es *inconsistente*. Por tanto, para caracterizar la coherencia, descartamos aquellos argumentos que estuvieron asociados a definiciones inconsistentes.

Capítulo 4

Estructura del Compendio de Publicaciones

En este capítulo describimos la estructura interna del compendio de publicaciones, es decir, la manera en que los artículos se relacionan entre sí y contribuyen al problema de investigación planteado. Para ello, describiremos los aspectos más relevantes de cada artículo que determinan su especificidad y al mismo tiempo, su relación con los otros artículos.

En primer lugar, enumeramos los artículos del compendio que vienen íntegramente desarrollados en los capítulos 5, 6, 7 y 8 de esta memoria:

- Artículo 1. *Análisis Conceptual de términos específicos. Concepto de límite finito de una función en un punto* (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2013).
- Artículo 2. *Concept of finite limit of a function at a point: Meanings and Specific terms* (Fernández-Plaza, Rico y Ruiz-Hidalgo, 2013) .
- Artículo 3. *Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto* (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico y Castro, 2013).
- Artículo 4. *Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto* (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2015).

4.1. Estructura y encuadre del artículo 1

En el artículo 1 se describe la agenda de investigación "Pensamiento Matemático Avanzado" que encuadra el problema de investigación, así como los antecedentes más relevantes relacionados con el mismo. Su marco conceptual se compone de la introducción detallada de la noción de significado de un concepto matemático y su contraste con el modelo cognitivo de Concepto imagen/Concepto Definición de Vinner (1983). Su principal aporte estuvo en establecer la necesidad del análisis conceptual de términos específicos relacionados con el concepto de límite. Se particularizó dicho análisis a "rebasar" y "alcanzar", cuyo usos coloquiales tuvieron influencia en las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de límite según los antecedentes recopilados.

En cuanto a los resultados, se obtuvieron evidencias acerca de los términos efectivos que emplearon los estudiantes para comunicar sus intuiciones acerca de las propiedades de rebasabilidad/alcanzabilidad del límite, así como la caracterización de las concepciones analíticas subyacentes de los escolares. Se concluyó que ambas propiedades están íntimamente relacionadas y se planteó la conjetura de que el uso excesivo de representaciones gráficas con monotonía lateral en la enseñanza podría hacer patente esa asociación.

4.2. Estructura y encuadre del artículo 2

El artículo 2 describió con mayor profundidad y amplió los resultados del artículo 1. Proporcionó un análisis conceptual de los términos "tender", "aproximar" y "límite" que completó el proporcionado por el artículo 1 y describió en profundidad las concepciones analíticas que manifestaron los escolares cuando argumentaron la veracidad o falsedad de enunciados acerca de ciertas propiedades del concepto de límite. Igualmente, mostró los modos de uso de los términos efectivos empleados por los estudiantes para expresar sus ideas.

Conjuntamente, los artículos 1 y 2 proporcionaron las características de las concepciones analíticas que resumimos en los siguientes puntos.

- Las concepciones se clasificaron en *concepciones proceso*, si los estudiantes asociaron su idea de límite a las propiedades de un procedimiento (cálculo rutinario, iteración, etc.), *concepciones objeto*, si expresaron propiedades del concepto con independencia de un determinado procedimiento y *concepciones duales*, a una concepción intermedia entre las dos anteriores.

- La no rebasabilidad/no alcanzabilidad se manifestaron en las concepciones de los estudiantes y aparecieron asociadas. Un número reducido de estudiantes fueron capaces de proporcionar contraejemplos. En consecuencia, el uso coloquial del concepto fue patente.
- Las concepciones se caracterizaron también atendiendo al carácter potencial del proceso infinito implícito o la finitud del procedimiento intuitivo y práctico de cálculo cuando se argumenta acerca de si el límite puede aproximarse con cualquier grado de precisión, es decir, las respuestas de los estudiantes atendieron al contexto en el que se planteó dicha cuestión, práctico o formal.
- Finalmente, las concepciones se posicionaron acerca del carácter exacto o indefinido del valor límite. El carácter indefinido del valor límite permitió atribuir un carácter procesual a las concepciones subyacentes.

A modo de síntesis, los artículos 1 y 2 conformaron un bloque en el que se organizaron y describieron las concepciones de tipo analítico que manifestaron los estudiantes de Bachillerato con apoyo del análisis conceptual de los modos de uso de los términos específicos relacionados con el concepto de límite, a saber, "tender", "aproximar", "alcanzar", "rebasar" y "límite", y los términos efectivos asociados con los que los estudiantes expresaron sus ideas acerca del concepto.

4.3. Estructura y encuadre del artículo 3

El artículo 3 cambió el enfoque de la caracterización de las concepciones de los estudiantes. Dentro de la diversidad de aspectos que engloban las concepciones analíticas de los estudiantes (contenido de los artículos 1 y 2), buscó las definiciones o enunciados básicos con los que los estudiantes sintetizaron las propiedades más importantes del concepto de límite finito de una función en un punto. En este artículo se describieron lo que denominamos concepciones sintéticas.

Dentro del marco conceptual, se introdujeron preliminarmente la noción de concepción y la de definición personal (nociones que se precisarán mejor en el artículo 4). Estas nociones se basaron en el modelo concepto imagen/concepto definición de Tall y Vinner (1981). Es parte fundamental del marco conceptual la noción de *aspectos estructurales*, como aquellas propiedades, términos y nociones relacionadas documentadas en la literatura y que proporcionaron un marco interpretativo para caracterizar las concepciones analíticas (artículos 1 y 2) y las definiciones individuales de los estudiantes.

En cuanto a los resultados obtenidos, se observó que las definiciones individuales de los estudiantes incluyeron una adaptación o copia textual de concepciones analíticas caracterizadas en los artículos 1 y 2, y aportaron una cuantificación del grado de coincidencia entre las definiciones individuales y las concepciones analíticas relacionadas. Asimismo, las definiciones individuales que reprodujeron la definición dada por el profesor o el libro de texto fueron mínimas (un 25%), lo cual indicó que las definiciones individuales reflejaron con mayor o menor rigor las destrezas de síntesis que manifiestan los estudiantes.

En relación con los artículos 1 y 2, el artículo 3 proporcionó las siguientes evidencias:

- Existen definiciones individuales que destacaron el procedimiento intuitivo de cálculo, lo cual reforzó el carácter procesual de las concepciones analíticas que manifestaron tales estudiantes. Por otro lado, surgieron definiciones que atribuyeron al objeto límite otra naturaleza (recta, lugar del plano, conjunto infinito de puntos, etc.), por lo que se matizaron las concepciones objeto relacionadas.
- Las propiedades relacionadas con la alcanzabilidad y rebasabilidad del límite fueron enfatizadas en gran parte de las definiciones individuales, lo cual estableció que son propiedades fundamentales del conocimiento del estudiante acerca del concepto de límite.
- El sistema de representación gráfico se empleó como soporte para sintetizar algunas definiciones individuales, lo cual dio indicios de cuáles sistemas de representación fueron más relevantes para el estudiante para comunicar su idea de límite.
- La conexión o independencia entre el límite y la imagen del punto fue un aspecto emergente en las definiciones individuales, dado que en las concepciones analíticas este aspecto no fue discutido. Esto puso de manifiesto que la síntesis puede evocar propiedades que en un enfoque analítico pueden permanecer ocultas.
- Otro aspecto emergente en las definiciones individuales fue la descoordinación entre los procesos en dominio y en el rango de la función; los estudiantes se refieren exclusivamente a la variable x.

4.4. Estructura y encuadre del artículo 4

El artículo 4 ilustró la complementariedad de los enfoques adoptados para explorar y describir las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de límite finito de una función en un punto, analítico (Artículos 1 y 2) y sintético (Artículo 3).

Una vez evocadas las concepciones analíticas y sintetizadas en definiciones individuales se caracterizaron los modos en que las definiciones individuales evocaron de manera "coherente" las mismas concepciones "analíticas", u otras diferentes que serán específicas de la nueva situación.

En un contexto de discutir razonadamente la existencia o no de límite a partir de funciones definidas gráficamente desde la definición individual, el análisis de las respuestas de los estudiantes se dividió en dos partes:

- Caracterización de las concepciones que manifestaron los estudiantes al abordar esta tarea, con independencia de la definición individual de referencia, dado que existían argumentos sin una definición individual explicitada o con inconsistencia lógica.
- Evaluación de los razonamientos de los estudiantes en contraste con su propia definición individual. Para ello se introdujo y se definió el constructo de *coherencia*, con el que se estableció el mayor o menor grado en que un determinado argumento deriva lógicamente de la definición individual de referencia.

De este artículo destacamos las siguientes implicaciones:

- La aparición de incoherencias en la aplicación de la definición individual en nuevas situaciones (interpretación gráfica) pudo sugerir que tales situaciones proporcionan propiedades que la definición individual, construida sobre una situación "anterior", no haya podido considerar.
- En relación con el concepto de continuidad, la malinterpretación del sistema de representación simbólico pudo conducir a concepciones erróneas relacionadas con la identificación entre límite e imagen, mientras que la malinterpretación del sistema de representación gráfico pudo inducir que la existencia de límite se identificase con la inexistencia de huecos en la gráfica. Es decir, determinados signos pudieron condicionar la referencia a la que designan.
- Como línea de continuidad, proporciona la oportunidad de volver a sintetizar una definición individual a partir de las reflexiones que suscita la nueva situación, ya que proporciona evidencias de revisión o resistencia de las concepciones previas del estudiante.

Capítulo 5

Análisis conceptual de términos específicos. Concepto de límite finito de una función en un punto

José Antonio Fernández-Plaza[1], Juan Francisco Ruiz-Hidalgo[1] y Luis Rico[1]

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

La Gaceta de la RSME (2013), *16*(1), 131-145

La publicación transcrita en este capítulo ha sido realizada con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906, MEC-FEDER), del proyecto "Modelización y representaciones en educación matemática"(EDU2009-11337) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico) del 3.er Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI). Se dispone de la debida autorización del comité editorial de la revista para su uso en esta tesis doctoral.

La citación de la totalidad o parte de este capítulo se hará con mención exclusiva a la publicación correspondiente

Resumen
En este trabajo exponemos algunos de los resultados de un estudio exploratorio llevado a cabo con estudiantes de bachillerato, referido a los distintos usos que dichos estudiantes realizan de términos como "aproximar", "tender", "alcanzar", "rebasar" y "límite", con los que se describen propiedades del concepto de límite finito de una función en un punto. Para ello, hemos llevado a cabo un análisis conceptual de estos términos, el cual ha proporcionado un marco interpretativo para inferir qué significados asocian los estudiantes a los términos principales utilizados en sus respuestas. La información se recogió a partir de un cuestionario. Presentamos la discusión de los resultados solo para los términos "alcanzar" y "rebasar". Concluimos que los estudiantes hacen uso coloquial y poco elaborado de estos términos, y expresan conexiones relevantes entre la alcanzabilidad y la rebasabilidad del límite.

5.1. Problema de investigación

Este trabajo se enmarca en la problemática del aprendizaje del cálculo en Bachillerato. En esta etapa educativa, la enseñanza del cálculo, y en particular del concepto de límite de una función en un punto, se caracteriza por la transmisión de una serie de destrezas rutinarias, introducidas mediante una definición intuitiva y sin ningún contexto real de referencia, eludiendo los significados y concepciones personales que los estudiantes pueden asociar a tales definiciones y destrezas. Moreno (2005) describe una situación similar para el ámbito universitario.

En este contexto, presentamos un trabajo exploratorio y descriptivo sobre los significados que los estudiantes de bachillerato (16–17 años) asocian al concepto de límite finito de una función en un punto. Concretamente, nuestro objetivo es describir cómo los estudiantes expresan verbalmente sus concepciones intuitivas sobre la noción de límite finito de una función en un punto para discutir la veracidad o falsedad de propiedades referidas a dicha noción, con especial énfasis en las propiedades de alcanzabilidad y rebasabilidad del límite. De esta forma, profundizamos y extendemos el trabajo de Fernández-Plaza (2011), que debe considerarse como documento de referencia. En dicho estudio, se analizaron los significados desarrollados por estudiantes de Bachillerato ante una propuesta de innovación curricular sobre la noción de límite llevada a cabo durante el período de investigación tutelada del Máster de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato (Fernández-Plaza, 2010).

Como antecedentes hemos revisado investigaciones que han profundizado en la caracterización de los conflictos cognitivos ligados a las nociones de número real, límite, infinito y continuidad de una función (Cornu, 1991; Davis & Vinner, 1986; Monaghan, 1991; Tall, 1992; Tall & Vinner, 1981), así como a su tratamiento dentro del campo de la innovación curricular (Blázquez, 2000; Romero, 1997). En este ámbito, la definición que se tome de límite funcional cumple un importante papel, tal como reportan Blázquez, Gatica y Ortega (2009). De entre esas investigaciones, destacamos las que subrayan que los significados que los estudiantes atribuyen a términos específicos del lenguaje del cálculo infinitesimal, como "límite", "aproximar", "tender", "converger", "alcanzar" y "rebasar", vienen condicionados por el uso coloquial de los mismos (Cornu, 1991; Monaghan, 1991; Tall y Vinner, 1981).

Nuestro referente teórico fundamental es el análisis conceptual de términos específicos, que delimita el significado y uso matemático en contraste con sus significados cotidianos (Rico, 2001) y es útil para interpretar la concepción de los sujetos. Pero, dado que no solo basta con conocer los significados de los términos, un segundo referente fundamental es el análisis específico del modo en que los escolares hacen uso efectivo de estos términos con sus significados personales.

5.1.1. Marco Teórico y Antecedentes

Este estudio se sitúa en la agenda de investigación conocida como Pensamiento Matemático Avanzado (*Advanced Mathematical Thinking*), tal como se presenta y considera en las publicaciones del grupo internacional Psychology of Mathematics Education (Gutiérrez y Boero, 2006). Se trata de un extenso ámbito de investigación que da lugar a diferentes interpretaciones o modos de abordar su estudio (Harel y Sowder, 2005; Selden y Selden, 2005; Zaskis y Applebaum, 2007). Existe un amplio acuerdo en cuanto a la dificultad de delimitar la transición entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado (Azcárate, Camacho y Sierra, 1999; Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005; Tall, 1992; Zaskis y Applebaum, 2007). Azcárate y Camacho (2003) señalan cómo determinados procesos cognitivos caracterizan el pensamiento matemático avanzado, aun no siendo exclusivos de él. Entre ellos destacan, y adquieren mayor importancia en los cursos superiores, *representar* y *abstraer* como procesos cognitivos psicológicos, y *definir*, *demostrar* o *formalizar* como procesos matemáticos. Para establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas, estos autores subrayan la importancia de las definiciones que son propias de las matemáticas avanzadas, mientras que en las elementales los objetos se describen apoyándose en la experiencia. Por tanto, la etapa educativa de bachillerato supone un periodo de transición en el que los estudiantes abordan con técnicas elementales contenidos matemáticos cuyo desarrollo histórico, epistemológico y didáctico merecen el estatus de avanzados.

Como en cualquier investigación sobre aprendizaje, es necesario un marco explicativo que describa e interprete cómo los estudiantes entienden, definen y utilizan determinados conceptos y procedimientos. Asumimos que la noción de significado de un concepto matemático, según viene desarrollada por los trabajos de Rico (2012), proporciona un modelo interpretativo para dicha noción con un planteamiento más elaborado que el modelo cognitivo basado en la dualidad *imagen conceptual / definición conceptual* de Vinner (1983).

El modelo de Vinner se basa fundamentalmente en la interacción existente entre las imágenes mentales que la enseñanza de un concepto, mediante su definición y ejemplos, evoca en los estudiantes (concepto imagen o imagen conceptual), y el modo en que los estudiantes expresan tales imágenes mentales cuando abordan tareas (concepto definición o definición conceptual). Así, por ejemplo, un alumno tiene un concepto de sistema de coordenadas porque lo ha visto en varias situaciones y para él son dos rectas perpendiculares. Posteriormente, cuando el profesor introduce sistemas de coordenadas no ortogonales, pueden ocurrir tres situaciones con la imagen conceptual del alumno: a) cambia su concepto imagen para incluir la no perpendicularidad; b) el concepto imagen continúa inalterado y terminará influyendo en las respuestas del alumno sobre la definición conceptual; o c) ambos conceptos se mantienen inalterados sin interacción.

Nosotros consideramos un modelo interpretativo que procede de la adaptación al ámbito de la matemática escolar de la relación semántica lógica y formal entre *signo o término*, *referencia o concepto y sentido*. Este modelo, que puede consultarse en Rico (2012, pp. 51-53), considera las siguientes componentes:

- Los *sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto y lo relacionan con otros.
- La *estructura conceptual*, que comprende conceptos y propiedades, los argumentos y proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- La *fenomenología*, que incluye aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que están en el origen del concepto y le dan sentido.

Por ejemplo, en el caso del número natural, la estructura conceptual asociada a este concepto incluye los objetos formales dados mediante los axiomas de Peano o cualquier otra construcción formal cardinal u ordinal “uno, dos, tres...; primero, segundo, tercero...”, que vienen representados por diferentes sistemas de representación tales como el simbólico (1, 2, 3...; 2 + 5; 2 × 52) o figurativo (Diagramas de Venn; Configuraciones puntuales (números triangulares, cuadrangulares...)). Afirmaciones como “7 es el número del jugador", "7 es el número de días de la semana", "Llegó en séptima posición"denotan fenómenos que dan sentido al número natural 7; enfatizan su uso como código, cardinal u ordinal respectivamente.

De este modo, nuestro análisis se desplaza desde la consideración del simple manejo eficiente de una definición formal mediante representaciones adecuadas, hacia el estudio del conocimiento y uso de un concepto a través de los fenómenos que le dan sentido, que no se restringen a un dominio puramente matemático, sino que profundizan en otros campos del mundo físico, cultural y social. De esta manera, el modelo contempla el estudio de las competencias de modelización y resolución de problemas. Claros (2010) y Sánchez (2012) avanzan en la caracterización de fenómenos matemáticos relacionados con el límite finito de una sucesión y de una función en un punto, respectivamente, que se extraen de las definiciones intuitiva y formal a partir del análisis de libros de texto, producciones escritas de estudiantes y comentarios de profesores en ejercicio.

En lo que se refiere a antecedentes, Tall (1980) documenta que, cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y posteriormente la definición formal, la imagen conceptual se "contamina" con ciertas propiedades que no forman parte de la definición formal. Esto pone de manifiesto la complejidad de significados que una misma definición puede evocar en los estudiantes. Un ejemplo de esto lo encontramos en los estudiantes que conciben la noción de límite como proceso dinámico y no la identifican con un valor numérico. En contraste, Romero (1997) incide en la fuerte resistencia de los estudiantes a entender y aceptar la notación decimal periódica para un número cuando el periodo es 9:

> "Por un lado, en cuanto a su existencia ya que no procede de una división; por otro lado en cuanto a su conversión en un decimal exacto" (p. 177).

Blázquez, Gatica y Ortega (2009) realizan una revisión crítica de definiciones de límite funcional procedentes de libros de texto. Estos autores, al resaltar en algunas de estas definiciones rasgos de subjetividad e imprecisión, justifican así la pertinencia de proponer una definición alternativa que salve las debilidades encontradas. En particular, Blázquez (2000) enfatiza la necesaria distinción entre los términos "tender" y "aproximarse" que es imperceptible para algunos estudiantes en un contexto matemático.

Monaghan (1991) explora las intuiciones personales de los estudiantes sobre los términos "tender a", "aproximarse a", "converger a" y "límite". Estas intuiciones se describen e interpretan en dos contextos: espontáneas (expresión libre del sujeto) y mediante apoyo gráfico (discusión de gráficas facilitadas). Los resultados muestran diferencias relevantes de significado y uso entre tales términos. En nuestro trabajo no pedimos a los estudiantes definir los términos;

estimulamos su uso libre, haciendo las inferencias de significado oportunas a partir de sus producciones, lo cual permite explorar la amplitud y precisión del vocabulario utilizado por los estudiantes cuando hablan de límite funcional y de los matices que le asocian.

5.1.2. Análisis conceptual de términos específicos relacionados con el concepto de límite

Siguiendo las ideas de Chantal (2002) sobre la delimitación conceptual entre los vocablos “términos” y “palabras”, entenderemos por *términos* aquellas palabras dotadas de significado válido para su uso en la disciplina o contexto particular, si bien, estos términos pueden ser *específicos* de una única disciplina, *comunes* a varias disciplinas, aunque con diferente significado, o *importados* del vocabulario general y coloquial del castellano. En este trabajo nos referiremos genéricamente con *términos específicos* a los que tienen uso técnico en cálculo, sean o no sean propios de dicha rama matemática, y emplearemos el vocablo *términos efectivos* para referirnos a los vocablos utilizados por los escolares pudiendo coincidir en algún momento con los específicos.

Para el logro del objetivo de este estudio realizamos un análisis conceptual de ciertos términos específicos asociados a los procesos de paso al límite. Estos términos son “aproximarse”, “tender”, “alcanzar”, “rebasar” y “límite”.

El análisis conceptual es un procedimiento para ubicar el significado y el uso de un término matemático. Distinguimos entre los vocablos significado y uso: para un término dado, llamamos uso del término al sentido con el cual se utiliza en un determinado contexto (matemático, cotidiano, etc.), mientras que significado del término consiste en su interpretación mediante un sistema de signos, una referencia a componentes estructurales, y un sentido. Éste último identificado por los contextos o fenómenos asociados a tal término. De hecho, son tales contextos y fenómenos los que marcan la pertinencia o no del uso del término. Ubicamos el significado y el uso formal de estos términos en contraste con sus significados y usos cotidianos (Rico, 2001) no sólo a nivel formal, sino también el que se instituye en la escuela. Esto es necesario para interpretar la concepción de los sujetos, si bien, en ocasiones, es necesaria información adicional.

Hemos seleccionado los términos anteriores por las siguientes razones:

- Los términos tienen un significado técnico y formal en matemáticas y en el ámbito escolar, pero también usos convencionales y coloquiales no vinculados con las matemáticas.
- Aparecen de manera frecuente en la literatura revisada, tanto en la definición del concepto de límite como en la caracterización de las

dificultades y errores asociados, poniendo de manifiesto conflictos que surgen entre los usos formales y coloquiales.

- Ayuda al diseño, selección y caracterización de las tareas que incluyen estos términos destinadas a la recogida de información de los estudiantes.
- Los sujetos del estudio los emplean, junto con sinónimos, para expresar distintas interpretaciones del concepto de límite, ya sea de manera técnica (terminología adquirida por la instrucción mediada por el profesor, el libro de texto o el propio instrumento de recogida de datos) o informal (sus propias interpretaciones personales).
- De acuerdo a nuestra noción de significado de un concepto matemático descrita anteriormente, cada uno de los términos se refiere parcialmente a propiedades y modos de uso asociados al concepto de límite y, junto con otras nociones, contribuyen a delimitar su significado.
- Es necesario fijar un marco interpretativo para analizar los usos y significados de dichos términos puestos de manifiesto por los sujetos de nuestro estudio.

Una revisión de los diccionarios de la Real Academia Española (RAE) (2001), el María Moliner (1998), el *Vocabulario Científico y Técnico* de la Real Academia de las Ciencias (1996) y el Oxford Dictionary (2011), proporcionan las acepciones comunes y, en ocasiones, matemáticas que tienen cada uno de los términos: “aproximar”, “tender”, “rebasar”, “alcanzar” y “límite”; la revisión de algunas investigaciones permiten refinar las acepciones de manera apropiada para esta investigación. Mostramos únicamente el análisis conceptual relativo a los términos “alcanzar” y “rebasar”. El análisis conceptual completo puede consultarse en Fernández-Plaza (2011).

Análisis conceptual del término “alcanzar”

“Alcanzar”es intuitivamente “llegar a” o “llegar a tocar”(Moliner, 1998; Oxford University Press, 2011; RAE, 2001). Se define “alcanzar”, en cuanto a su uso matemático se refiere, en tres sentidos, no necesariamente excluyentes:

1. Una función *alcanza el límite* si el valor límite es la imagen del punto en el que se estudia el límite (continuidad).
2. Una función *alcanza el límite* si el límite coincide con la imagen de cualquier otro punto del dominio distinto del propio punto donde se lleva a cabo el estudio (no necesariamente la función ha de ser continua: considérese, por ejemplo, la función $f(x)=sen(x)$ si $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, y $f(0)=1$. Dicha función no es continua en $x=0$, pero tiene límite 0 en ese punto, y este es alcanzable en todos los puntos de la forma en $x=k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$).

3. Una función *alcanza el límite* en cualquier caso, con independencia que la función esté definida o no en el punto donde se realiza el estudio, porque la definición formal de límite se puede reformular de la siguiente manera[1]

   Dadas cualesquiera dos sucesiones de Cauchy de racionales $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ representantes propios del número real x = a, si las sucesiones de números reales $\{f(x_n)\}$ y $\{f(y_n)\}$ son de Cauchy y equivalentes, mediante la extensión natural de la relación definida para el caso racional, entonces el número real l correspondiente a esta clase de equivalencia será el límite de f(x) en x = a.

   En definitiva, dentro de este aparato formal asumimos que la función alcanza el límite, pues el límite es la imagen del punto $x =$ a, salvo la relación de equivalencia definida.

Es pertinente enfatizar que los sentidos 1 y 2 se relacionan con un uso coloquial del término "alcanzar" mientras que el sentido 3 representa un uso técnico y formal, diferente al coloquial.

Análisis conceptual del término "rebasar"

El término "rebasar" tiene un sentido coloquial de "quedar por encima de una cota superior" (RAE, 2001). En lo que se refiere al uso matemático proponemos dos sentidos no excluyentes para este término.

1. Con *carácter local.* El límite no es rebasable si es un extremo relativo de la función en el punto donde se lleva a cabo el estudio, ya sea máximo o mínimo.
2. Con *carácter global.* El límite no es rebasable si es un extremo absoluto de la función en el punto donde se lleva a cabo el estudio, ya sea máximo o mínimo. Este sentido es afín al cotidiano: la función no rebasa el valor del límite si queda siempre por encima o por debajo de dicho valor.

Como en la etapa de bachillerato, los estudiantes, en general, aún no han desarrollado el concepto abstracto de función, el campo de ejemplificaciones para este concepto puede estar restringido, ya sea por la enseñanza recibida o por su desarrollo cognitivo natural, lo cual puede llevarles a expresar afirmaciones de carácter general como "El límite nunca es rebasable / siempre es rebasable", "El límite nunca es alcanzable / siempre es alcanzable", o afirmaciones de carácter particular tales como "Existen ejemplos donde el límite

[1] Considerando la construcción de los números reales por clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales, los números reales no son "directamente operativos", sino que necesitan de la representación por sucesiones de Cauchy de racionales equivalentes con las que se opera, siempre que tales operaciones conserven la relación de equivalencia definida por: *Dos sucesiones de Cauchy de racionales son equivalentes si la sucesión diferencia tiende a* 0 *en el sentido usual.*

es rebasable / alcanzable y otros donde no", dependiendo de la menor o mayor amplitud de su campo de ejemplificaciones.

5.2. Diseño del estudio

Este estudio es de tipo exploratorio y descriptivo. Es exploratorio ya que se ha planificado con la intención de recoger información sobre la comprensión de los estudiantes y dicha información se va a utilizar para planificar una propuesta de innovación curricular basada en datos y evidencias empíricas sobre este campo de la matemática escolar. El estudio es descriptivo puesto que pretendemos describir el modo en que los estudiantes entienden, utilizan e interpretan determinadas nociones y conceptos. La muestra es intencional y por disponibilidad; no pretende generalizar resultados en contextos más amplios, sino particularizarlos para profundizar sobre ellos en un contexto determinado.

5.2.1. Instrumento

El instrumento que utilizamos para inferir los significados que los estudiantes asocian a los términos específicos es un cuestionario con seis actividades de respuesta abierta adaptadas y traducidas de (Lauten, Graham, y Ferrini-Mundy, 1994, p. 229). Agrupamos las actividades en dos bloques, de modo que cada bloque se centra en aspectos diferentes del concepto de límite finito de una función en un punto. Así, tres de ellas conforman el cuestionario A y las otras tres el cuestionario B. Puede consultarse el cuestionario completo en (Fernández-Plaza, 2011); a modo de ejemplo, mostramos a continuación algunas de las actividades utilizadas. Cada actividad plantea la opción de calificar como verdadero (V) o falso (F) el enunciado de una propiedad relativa al límite de una función en un punto y, a continuación, se pide una justificación de la opción elegida.

Ejemplos de actividades del cuestionario A

(A.1) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto.

(A.2) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.

(A.3) Un límite se determina probando[2] con valores de x cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza.

[2] Habría sido más adecuado sustituir "probando"por "calculando f(x)"para evitar que solo se refirieran a la variable x.

Ejemplos de actividades del cuestionario B

(B.1) Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza.

(B.2) Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como se quiera.

(B.3) Un límite es un número al cual los valores de una función f(x) pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de x.

La tabla 5.1 resume las ideas clave de estas actividades:

Tabla 5.1. Ideas clave de las actividades de los cuestionarios A y B

Cuestionario/Actividad	Idea clave de la actividad
A.1	Movimiento de la función
A.2	No rebasar
A.3	Probar valores y alcanzar
B.1	Acercarse pero no alcanzar
B.2	Aproximación tan precisa como se quiera
B.3	Acercarse arbitrariamente

5.2.2. Sujetos

Seleccionamos de manera intencional y por disponibilidad a 36 estudiantes de primer curso de Bachillerato (16–17 años) matriculados en la asignatura Matemáticas I. Según la información suministrada por el profesor responsable de la asignatura, quien autorizó la implementación del cuestionario al grupo, los estudiantes han recibido instrucción previa sobre los conceptos de límite de una función en un punto y de límite de una sucesión durante el curso 2009/2010, antes de la aplicación del cuestionario. Consideramos esta circunstancia favorable para nuestra investigación ya que los sujetos puede que hagan un uso técnico más o menos elaborado de la terminología, definiciones y ejemplificaciones del concepto de límite introducidas en el aula, al menos de manera temporal, o bien describan con una terminología informal y personal sus interpretaciones del conocimiento recibido en la instrucción, pudiendo en algún caso hacer prevalecer sus concepciones originales.

Durante el trabajo de campo, 18 sujetos respondieron al cuestionario A y otros 18 sujetos al cuestionario B. La aplicación se llevó a cabo en una sesión ordinaria de clase de matemáticas con duración no superior a 60 minutos.

5.3. Resultados

Ejemplificamos el análisis de los datos para la actividad (A.2) *Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.* Dicho análisis se llevó a cabo en tres fases.

5.3.1. Primera fase: Uso y recuento de términos específicos en los registros escritos

En la primera fase identificamos y contabilizamos los usos de los términos específicos "aproximar", "tender", "alcanzar" y "rebasar"[3] en los registros escritos proporcionados por los estudiantes, sin hacer inferencias de significado.

Dado que los términos efectivos de un registro escrito no tienen por qué ser los específicos, realizamos agrupaciones de los mismos según el análisis conceptual realizado, considerando como "representante específico del grupo" a cada uno de los términos destacados[4]. Agrupamos tanto antónimos como sinónimos de los términos específicos de referencia tal como se recoge en el tabla 5.2.

Tabla 5.2. Términos específicos y agrupación de los términos efectivos asociados

Términos específicos	Términos efectivos relacionados de los registros escritos
Aproximar	*Aproximarse, dirigirse, acercarse, moverse, desplazarse*
Tender	*Tender*
Rebasar	*Rebasar, sobrepasar, limitar, exceder, tope numérico, máximo*
Alcanzar	*Alcanzar, llegar, tocar, exacto*

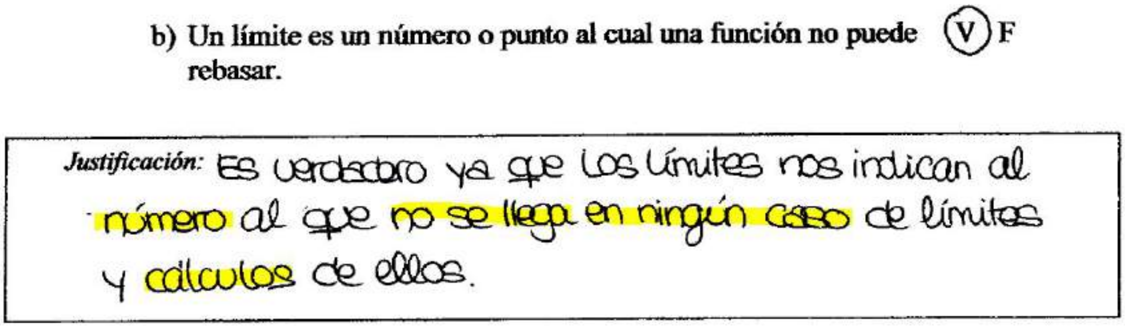
Los estudiantes deben dar un juicio sobre una propiedad del límite de una función, de ahí que nos centremos, en primer lugar, en su presencia y en el uso que les dan en tales juicios; aunque con la información disponible no es posible inferir, por ejemplo, si los estudiantes distingue entre "aproximarse" y "tender".

[3] El término "límite"es usado por los escolares para denominar el concepto sobre el que discuten, es decir, no describe ninguna propiedad del concepto. Otra cosa es que se utilicen términos derivados como el verbo "limitar", por ejemplo, "El límite es un número que limita la función", expresando una propiedad de límite como no rebasable.

[4] El término "tender" es más preciso que "aproximar". El único término que podemos asociarle es "converger", pero ningún escolar de nuestro estudio ha hecho uso alguno de este, puesto que no se ha introducido en la enseñanza; los escolares hacen un uso exclusivo del término tender.

La tabla 5.3 muestra el recuento de los usos que se realizaron de términos que estaban relacionados con los términos específicos "rebasar" y "alcanzar"para responder a la cuestión seleccionada para este trabajo y que dieron lugar a tres grupos de respuestas, según se refirieran únicamente a rebasar, a alcanzar o a ambos caracteres (grupo mixto).

La figura 5.1 ejemplifica el uso de los términos efectivos asociados a los específicos "rebasar" y "alcanzar" hecho por un estudiante al responder a la cuestión seleccionada.



b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

Justificación: Es verdadero ya que los Límites nos indican al número al que no se llega en ningún caso de límites y calculos de ellos.

Figura 5.1. Respuesta a la actividad A.2 con término efectivo "no llegar" incluida en el grupo "Alcanzar"

Conviene puntualizar que registramos tanto el uso afirmativo o negativo de un término, pero el grupo al que pertenece es el mismo en cualquier caso. Junto a los términos efectivos correspondientes a "alcanzar" y "rebasar" aparecen referencias al proceso infinito con términos como aproximarse, por ejemplo, "La función se aproxima pero no llega al límite".

Tabla 5.3. Grupos de respuestas y frecuencias alcanzadas en el uso de los términos efectivos vinculados a los específicos "Alcanzar" y "Rebasar" para la actividad A.2

Grupos	Términos efectivos asociados	Número de respuestas
Alcanzar	*Llegar*	1(Afirmativo)/2(Negativo)
	Aproximarse/no llegar	2
Rebasar	*Rebasar*	1
	Sobrepasar	1
Mixto	*Aproximarse/no tocar/no rebasar*	1
Otras/No respuesta		10
Total		18

5.3.2. Segunda fase: Discusión del uso de los términos específicos

En una segunda fase, iniciamos inferencias de significado puesto que las cuestiones tiones pueden provocan el uso de términos que a priori no se esperan, como en el caso de la actividad A.2. Se ha detectado una frecuencia alta de referencias a la alcanzabilidad (6 de 8 válidas, es decir, que proporcionan información útil). Las 10 restantes no proporcionan información útil cuando se requería a los sujetos que solamente argumentaran sobre rebasabilidad (2 de 8 válidas). Esto permite conjeturar que para estos alumnos la no rebasabilidad del límite se debe, principalmente, a su no alcanzabilidad.

5.3.3. Tercera fase: Perfiles de respuesta

El análisis de términos efectivos permite clasificar las diferentes respuestas en varios perfiles. Comenzamos diferenciando dos partes en el enunciado de la actividad A.2:

Primera parte: *Objeto*; se identifica qué tipo de objeto es un límite: **Un límite es un número o punto** al cual un punto no puede rebasar.

Segunda parte: *Propiedad*; se destaca una característica asociada a uno de los significados de la noción de límite, pues las ideas de fin, de frontera y de irrebasable son propiedades establecidas en el uso común y coloquial del término límite, recogidas en nuestro análisis conceptual: **Un límite** es un número o punto al cual una función **no [se] puede rebasar**.

La cuestión se plantea en términos de justificar la aceptación o rechazo de esta propiedad para el objeto límite de una función. No existe restricción en el dominio[5], por lo cual la variedad de argumentos puede ser más amplia de lo esperado. El valor infinito del límite no es objeto de nuestro estudio; excluimos aquellos argumentos de esta índole. En general, los argumentos propuestos por los estudiantes se ajustan a dos opciones:

- *Perfil I: Límite no rebasable.* Se caracteriza por el valor lógico verdadero. Los argumentos afirman que el valor del límite no es rebasable. Por ejemplo, "*Verdadero, si el límite de una función es 4, un resultado de esa función no puede ser 5*". Dentro de este perfil, destacamos tres subperfiles:
    - *Subperfil I.1: Límite no alcanzable / Proceso numérico infinito.* Los argumentos supeditan la no rebasabilidad a la no alcanzabilidad del valor del límite. Las afirmaciones sobre el carácter no rebasable e inalcanzable es general (para todas las funciones). Podemos reconocer que el motivo por el que estos sujetos sostienen la inalcanzabilidad del límite es el proceso numérico infinito correspondiente, por ejemplo, explícitamente

[5] No requerimos a los estudiantes que razonaran sobre límite finito de una función en un punto, factor que no controlamos, pero a cambio obtenemos una visión más general de cómo interpretan la no rebasabilidad del límite en cualquier caso, tanto en $x = a$, como en $+\infty$ y $-\infty$, aunque el caso infinito no sea foco central de nuestro estudio.

"*Verdadero porque un límite es un punto al que una función se aproxima infinitamente sin llegar a él*" e implícitamente "*Porque el límite nunca llega al punto*", el cual puede deberse a la exclusión del punto donde se estudia el límite, por ejemplo, "*Verdadero, ya que con el límite no se puede realizar la operación de la función*". Es probable que estos argumentos estén provocados por un uso excesivo de ejemplos de funciones estrictamente monótonas durante la enseñanza previa recibida.

  - *Subperfil I.2: Límite alcanzable.* Los argumentos admiten la alcanzabilidad del valor del límite, por ejemplo, "*Verdadero, ya que el límite nos dice hasta qué punto llega o pasa*".

- *Perfil II: Límite rebasable.* El valor lógico en este caso es falso. Incluye argumentos que justifican que el valor del límite es rebasable en casos particulares, de hecho, se proponen ejemplos donde el límite es rebasable, por ejemplo, "*Falso, ya que poniendo el ejemplo de una función a la cual se le aplican valores a la x, podemos obtener por ejemplo 1,0002 y 0,991; el límite es 1, pero podemos ver cómo ha sido rebasado*". Dentro de este perfil encontramos un único subperfil:
  - *Subperfil II.1: Límite alcanzable.* Argumentos que consideran el límite alcanzable en determinadas ocasiones, por ejemplo, "*Falso, puede ser menor, igual o mayor. El límite simplemente es un punto de referencia*".

La tabla 5.4 recoge las frecuencias de las respuestas a la actividad A.2 incluidas en cada uno de los subperfiles.

Tabla 5.4. Frecuencia de respuestas en cada uno de los perfiles de respuesta para la actividad A.2

Perfiles	Subperfiles	Frecuencia
Perfil I	Subperfil I.1	6
	Subperfil I.2	1
	Otras	3
Perfil II	Subperfil II.1	1
	Otras	4
Otras/No respuesta		3
Total		18

A partir de la tabla 5.4 se observa que la mayoría de los estudiantes (6 de 18) justifica la no rebasabilidad por su no alcanzabilidad, por lo que conjeturamos una predominancia de ejemplos específicos donde la función es estrictamente monótona creciente en un entorno del punto, o en el caso infinito, es equiparable a la creencia de que la función nunca corta a la asíntota, quedando dicha función por encima o por debajo de tal recta.

Este resultado es relevante porque las propiedades de alcanzabilidad y rebasabilidad son independientes, es decir, el límite de una función en un punto las puede tener o no tener.

Conjeturamos, con vistas a una futura planificación de una experiencia de aula, que las respuestas del primer perfil pueden venir inducidas por un uso inadecuado de ejemplos donde la convergencia es estrictamente monótona y el valor del límite es, de hecho, una cota superior y, por tanto, inalcanzable, con lo cual es de esperar que excluyan de su razonamiento la imagen del punto donde se está haciendo el estudio, incluso si esta coincide con el límite.

5.4. Conclusiones

Consideramos que el objetivo propuesto para este estudio, *describir cómo los estudiantes expresan verbalmente sus concepciones intuitivas sobre la noción de límite finito de una función en un punto para discutir la veracidad o falsedad de propiedades referidas a dicha noción, con especial énfasis en las propiedades de alcanzabilidad y rebasabilidad del límite*, se ha logrado conforme a las siguientes conclusiones:

- El análisis conceptual ha permitido, por un lado, reconocer posibles concepciones debidas al uso coloquial y cotidiano de los términos específicos que inducen errores en la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. Por otro lado, ha servido para describir los perfiles empleados para interpretar las respuestas de los estudiantes.
- De los resultados obtenidos del análisis del uso de términos específicos concluimos que los estudiantes han utilizado un lenguaje poco elaborado y preciso, caracterizado por un uso amplio de la terminología proporcionada por los ítems del cuestionario, aunque mezclado con algunos términos sinónimos originales. El análisis detallado de las categorías de respuesta para el ítem A.2, con el que hemos ejemplificado el estudio, pone de manifiesto la persistencia del carácter no rebasable y no alcanzable del límite, confirmando la fuerte influencia que tiene el uso coloquial e informal del término límite en las concepciones de los estudiantes.

- El instrumento diseñado ha permitido recoger información y realizar un análisis satisfactorio, aunque con algunas limitaciones que una adecuada revisión y secuenciación de las tareas puede subsanar.
- En el futuro, nos proponemos analizar las reflexiones de los estudiantes acerca de cada uno de los términos de los cuáles hemos realizado el análisis conceptual, con el fin de contrastar empíricamente dicho análisis conceptual. También esperamos construir un modelo que explique con más profundidad las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de límite de una función.

5.5. Referencias

Azcárate, C., y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Venezolana*, *10*(2), 135-149.

Azcárate, C., Camacho, M., y Sierra, M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: Investigación en didáctica del análisis. En T. Ortega (Coord.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 283-293), Valladolid: SEIEM.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Blázquez, S., Gatica, N., y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME, 12*(1), 145-168.

Chantal, M. (2002). Explotación de los córpora textuales informatizados para la creación de bases de datos terminológicas basadas en el conocimiento. *Estudios de Lingüística del Español, 18.* Recuperado de http://elies.rediris.es/elies18/.

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de sucesiones: Fenómenos que organiza.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. *The Journal of Mathematical Behavior, 5*(3), 281-303.

Edwards, B. S., Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 15-25.

Fernández-Plaza, J. A. (2010). *Unidad didáctica: Límite y Continuidad de Funciones.* Memoria final del Máster Universitario de profesorado de Educación Secundaria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de

Idiomas (Especialidad de Matemáticas). Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Ant_Fernandez.pdf

Fernández-Plaza, J. A. (2011). Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio. Trabajo de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Fernandez%20Plaza_TrabInvTut.pdf

Gutiérrez, A., & Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education.* Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Natural and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 27-50.

Lauten, A. D., Graham, K., & Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator, *The Journal of Mathematical Behavior, 13*(2), 225-237.

Moliner, M. (1998). *Diccionario del uso del español,* 2ª ed., vol. 2, Madrid: Gredos.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics, 11*(3), 20-24.

Moreno, M. M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX* (pp. 81-96). Córdoba: SEIEM.

Oxford University Press (2011). *Oxford Dictionaries.* Oxford: Author. Recuperado de http://oxforddictionaries.com

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1996). *Vocabulario Científico y Técnico,* Madrid: Espasa-Calpe.

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la Lengua Española,* 22ª ed, Madrid: el autor. Recuperado de http://www.rae.es

Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* Granada : Universidad de Granada.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM), 1,* 39-63.

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en educación secundaria: Una experiencia de investigación-acción.* Granada: Comares.

Sánchez, M. T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Selden, A., & Selden, J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 1-13.

Tall, D. O. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). New York: MacMillan.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Zaskis, R., & Applebaum, M. (2007). Advancing Mathematical Thinking: Looking back at one Problem. In D. Pitta-Pantazi & G. Philipou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2389-2397), Cyprus: ERME.

Capítulo 6

Concept of finite limit of a function at a point: meanings and specific terms

José Antonio Fernández-Plaza[1], Luis Rico[1] y Juan Francisco Ruiz-Hidalgo[1]

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology (iJMEST) (2013), *44*(5), 699-710

The publication hereby transcribed was performed with aid and financing from Fellowship FPU AP2010-0906 (MEC-FEDER), Projects EDU2009-11337 and EDU2012-33030 of the National Plan for R&D&R (MICIN), Subprogram EDUC and Group FQM-193 of the 3rd Andalusian Research Plan (PAIDI). We have been authorized by the editorial board to include this publication in this doctoral dissertation.

Abstract
In this paper, we present some results of an exploratory study performed with students aged 16-17. We investigate the different uses that these students make of terms such as 'to approach', 'to tend', 'to reach', 'to exceed' and 'limit' that describe the basic notions related to the concept of the finite limit of a function at a point. We use the interpretive framework of conceptual analysis to infer the meanings that students associate with these specific terms in connection with the effective use of terms in their answers.
Keywords: finite limit of a function at a point; pecific terms; effective use of terms; conceptions; conceptual analysis; non-compulsory secondary education

6.1. Introduction

This paper presents an exploratory, descriptive study that focuses on the meanings that Spanish students in Bachillerato[1] (16–17 years old) associate with the concept of the finite limit of a function at a point (Fernández-Plaza, 2011).

We base our study on prior research on cognitive conflicts related to the concepts of real number limit, notion of infinity and continuity of a function (Cornu, 1991; Davis & Vinner, 1986; Monaghan, 1991; Tall & Vinner, 1981).

In contrast to the everyday meanings, we analyse conceptually both the mathematical meaning and the students' use of the key terms. This analysis provides a productive way to interpret the understanding that the subjects have of the concept of finite limit of a function at a point.

6.2. Research problem

We will describe:

- How students express verbally their intuitive conceptions of the notion of finite limit of a function at a point.
- How students interpret this concept and perform tasks related to it by analysing the meaning of specific terms that express different facets of the concept of limit.

6.3. Background

This study forms part of the research agenda for *Advanced Mathematical Thinking* in the international research group on the Psychology of Mathematics Education (Gutiérrez & Boero, 2006, pp. 147-172). We know about the difficulty of defining the transition from elementary to advanced mathematical thinking.

Azcárate and Camacho (2003) stress the importance of the definitions in advanced mathematics as a characteristic that distinguishes elementary from advanced mathematics. In elementary mathematics, descriptions built on students' experience are enough.

The educational stage analysed assumes a period of transition from elementary techniques to advanced mathematical contents.

We assume that the meaning of a mathematical concept is given by its sign, sense and reference, as is developed by Rico (2001, 2012). We analyse the *Conceptual Structure* (given by concepts and properties, propositions or theorems, with their criteria of veracity), *Systems of Representation* (given by sets of signs, graphics and rules to present the concept and establish relationships with other sets) and *Phenomenology* (including phenomena in which the concept originates and that give sense to it). Our model of the meaning of a mathematical concept is different from some cognitive models, such as the *Concept image/Concept definition* (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983) or *APOS Theory* (Cottrill et al., 1996).

Following Chantal (2002) on the conceptual distinction between 'terms' and 'words', we understand *terms* as words whose meaning is valid for use in a specific disciplinary or technical context. These terms can be *specific* to the discipline itself, *common*, if they are used in several disciplines but with different meaning, or *imported* from the general and colloquial vocabulary of a language. In this paper, we use *specific terms* generically to indicate those with a technical use in calculus, regardless of their origin. We use *effective terms* to indicate the terms used by students, admitting the possibility that these may coincide with the specific terms.

To achieve our study goals, we specify the uses of some terms associated with limiting processes. The terms are 'to approach', 'to tend', 'to reach' and 'to exceed'. All of these terms are linked to the concept of limit and contribute to defining and understanding its meaning, due to the several senses they give to the concept. The definition of these terms contributes to the conceptual analysis of the concept of limit. *Conceptual analysis* is a procedure to establish the mathematical meaning and usefulness of a concept; not only formally, but also in the institutional, educational context and in its historical development, as opposed to its everyday uses (Rico, 2001, 2012; Scriven, 1998). To achieve this analysis of the concept of 'limit', we explore the conceptions that the subjects have of these terms, even though we may eventually need to provide additional information.

We describe the common uses of the specific terms chosen in order to establish how students employ them and to contrast them with their mathematical use or their use in other disciplines. Our review provides different conceptions of these terms that students are likely to consider.

6.3.1. Review of the uses of specific terms

We will describe the terms 'to approach', 'to tend', 'to reach', and 'to exceed'; we also provide the colloquial meaning of the term 'limit'. We chose these terms for the following reasons:

- They are terms with a technical and formal meaning in mathematics, but they also have ordinary colloquial uses not connected to their mathematical meanings.
- They appear frequently in the literature, both in the definition of the concept of limit and in the characterization of the associated difficulties and errors; they illustrate conflicts between formal and colloquial uses.
- The subjects in this study used these terms, as well as synonyms, to express different interpretations of the concept of limit, both technically (terminology acquired through instruction mediated by the profesor, the textbook or the instrument for data collection), and informally (in their own personal and coloquial interpretation).
- In the historical development of the concept of limit, Zeno's Paradoxes of *Dichotomy* and of *Achilles and the Tortoise* considered some properties of motion related to the specific terms 'to reach' and 'to exceed' (Cajori, 1915).
- Each of the terms refers in part to properties and modes of usage associated with the concept of limit.

We follow the dictionaries of the Spanish Royal Academy (Real Academia Española [RAE], 2001), the Spanish Royal Academy of Science [RAC] (1996) and the *Oxford Dictionary* (Oxford University Press [OUP], 2011) to establish the accepted, common and mathematical meanings of the following terms in Spanish: 'to approach', 'to tend', 'to exceed', 'to reach' and 'limit'.

'To tend' means *to approach gradually but never reach the value* [15] and expresses a very specific form of approach. Blázquez, Gatica and Ortega (2009) argue that a sequence of numbers approaches a number *if the error decreases gradually*, but they argue that a sequence 'tends toward a limit' *if the limit can be measured by the terms in the sequence, that is, for any approximation of the limit there exists one term of the sequence, after which all the terms are closer to the limit than that approximation.* We establish a distinction between these two terms.

The correct use of the term 'to tend toward' should be determined using the variable x and not $f(x)$, since the expression '$f(x)$ tends toward L, when x tends toward a' can cause cognitive conflicts. That is, since x never equals a, students may generalize this property to the relationship between $f(x)$ and L, that is contrary to the formal definition in the case of $f\ (x)$ is constantly L, as Tall and Vinner (1981) note.

'To reach' is intuitively *to arrive at or to come to touch* (RAE, 2001; OUP, 2011). We interpret 'reach' mathematically to mean that a function reaches the limit *if the limit value is the image of the point at which the limit is studied – continuity*; by extension, *the limit can be the value of any other point in the domain.*

Colloquially, 'to exceed' means *to be above a limit*, (RAE, 2001) excluding the meaning *to be below a lower bound.* We say that the limit of a function is exceeded *if we can construct two successive monotones of images that converge at the limit, one ascending and the other descending, for appropriate sequences of x-values that converge at the point at which the limit is studied.*

The reachability and exceedability of the finite limit of a function can be easily interpreted as global or local concepts, but there is no logical derivation between both concepts.

The term 'limit' has colloquial meanings that interfere with students' conceptions of this term, such as ideas of ending, boundary and what cannot be exceeded (RAE, 2001; OUP, 2011). The term's scientific-technical use is related in some disciplines to a subject matter or extreme state in which the behaviour of specific systems changes abruptly (RAC, 1996).

6.3.2. Prior Research

Monaghan (1991) studies the influence of language on the ideas that students have about the terms 'to tend', 'to approach', 'to converge' and 'limit', as these terms are employed in conjunction with different graphs of functions provided by the researcher and examples provided by school students. We stress as a limitation that the specific terms that the students were asked to use were defined *a priori*, instead of enabling students to use their own words freely and spontaneously and to infer the appropriate nuances *a posteriori*.

6.4. Method

This is a descriptive study based on a survey method with semi-open response questions, whose design is summarized below.

6.4.1. Subjects

The sample was composed of 36 Spanish students in the first year of non-compulsory secondary education, 16-17 years of age, who were taking Mathematics for the Science and Technology track. The students were chosen deliberately based on their availability.

6.4.2. Instrument

We used a questionnaire of three semi-open response questions, adapted and translated from (Lauten, Graham, & Ferrini-Mundy, 1994). Two different versions of the questionnaire were called A and B. The respondent was asked to evaluate as true (T) or False (F) the statement of a property related to the concept of the limit of a function at a point and then to justify the option chosen. The questions are described below:

> General instruction: *Circle T or F for each of the following statement, depending on whether it is true or false. Use the box to explain your choice:*
>
> (A.1) *A limit describes how a function moves as x moves towards a certain point.*[2]
>
> (A.2) *A limit is a number or point past which the function cannot go.*
>
> (A.3) *A limit is determined by plugging in numbers closer and closer to a given number until the limit is reached.*
>
> (B.1) *A limit is a number or point the function gets close to but never reaches.*
>
> (B.2) *A limit is an approximation that can be made as accurate as you wish*

(B.3) *A limit is a number that the y-values of a function can be made arbitrarily closet o by restricting x-values.*

The survey was administered in the middle of the 2010/2011 academic year. The subjects had received prior instruction on the concept of limit. Of the total of 36 subjects, 18 answered questionnaire A and the other 18 answered questionnaire B. (This was because both questionnaires included four more tasks, and we did not wish to tire the students). The survey was administered during a regular session of their math class. We allowed the students to use their own words freely and spontaneously to infer the appropriate nuances a posteriori in reference to the specific terms.

6.5. Results

We analysed the students' answers to the tasks described above in two phases. The next section describes the first phase. The second phase consisted of characterizing the categories of response, available at (Fernández-Plaza, 2011; Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, & Rico, 2012).

6.5.1. Use and counting of effective terms in the written records

We identified and tabulated the different uses of the effective terms in the students' written answers, without making inferences from their meaning. The groupings of effective terms were developed from the review described above, as shown in Table 6.1. Since we did not require the students to define the specific terms, we focus on the presence/absence of these terms or synonyms, and on the use the students make of the terms as they articulate their decisions. For the terms 'to approach' and 'to tend', Figures 6.1 and 6.2 show answers where the related effective terms are used.

In focusing on the terms 'to exceed' and 'to reach' (those directly related to questions A.2 and B.1), we see in Table 6.2 the frequency of some effective terms related to reachability and/or exceedability to characterize the value of the limit. The answers may also include references to the process of convergence through terms related to 'to approach' and 'to tend'. We consider three natural groups of answers: *reachability, exceedability and mixed.*

Table 6.1. Specific terms and groupings of related effective terms associated[a]

Specific terms	Effective terms associated from written records
To approach	*Aproximarse* [to approach] *dirigirse* [to head] *acercarse* [to get close] *moverse, desplazarse* [to move]
To tend	*Tender* [to tend][b]
To exceed	*Rebasar, exceder* [to exceed] *sobrepasar* [to surpass] *limitar* [to limit] *tope numérico* [numerical bound] *máximo* [maximum]
To reach	*Alcanzar* [to reach] *llegar* [to arrive] *tocar* [to touch] *exacto* [exact]

[a] We include the effective terms in their original language (Spanish) together with a non-univocal translation into English, in the following form: Spanish [English translation].
[b] The term 'to tend' has a technical use in mathematics, so it appears as the only effective term associated.

We show three examples provided by the students from different groups that involve their uses of the effective terms associated with 'to reach' and 'to exceed'.

- First, we give a sample answer from *Reachability group*, where the underlined expression includes the effective terms *approach/not reach*:
  Example 1 (Answer to question A.2). '*True. Because a limit is a point that a function approaches infinitely without reaching it'*.[3]

- Second, we present a sample answer within the Exceedability group with effective term *surpass*:
  Example 2 (Answer to question B.1). '*False. A function can indeed surpass a limit, since in many cases to find out the limit we have to give x-values that correspond to bigger images*'.[4]

- Finally, we give the following sample answer from the group classified as *Mixed* due to the uses of the effective terms *reach/not surpass*:

Example 3 (Answer to question B.1). '*False. The function reaches the limit, but it cannot surpass it* '.[5]

Table 6.2. Frequencies of use of the effective terms connected to 'to reach' and 'to exceed' for questions A.2 and B.1

Groups	Términos efectivos asociados	A.2	B.1
Reachability	to reach		2
	to arrive	1(Affirm.)/2 (Neg.)[a]	
	to get close/not reach		4
	to get close/not arrive		1
	to get close/not touch		1
	to approach/not reach		1
	to approach/to be inexact	2	2
	to tend/ to be inexact		1
Exceedability	to exceed	1	
	to surpass	1	
Mixed	to reach/not touch/not exceed	1	
	to reach/not surpass		2
Otras/no answer		10	4
Total		18	18

[a]Affirm. and neg. mean affirmative and negative forms of the effective term 'to arrive' in the sentences.

Questions A.2 and B.1 are not the only ones in which students used effective terms related to 'to reach' and 'to exceed'. These terms also appear in a few answers to other questions, such as A.1, A.3 and B.2. We can thus infer additional meanings of the specific terms 'to reach' and 'to exceed', as follows:

(A.1.) *A limit describes how a function moves as x moves towards a certain point.*

This question tries to find out how students interpret the concept of limit, whether as a process (students accept that the limit describes the movement of the function) or as an object (students refuse the statement and consider the limit only as the point toward which the function moves, and it does not say anything about the movement itself). The following answer states that the unreachability of the limit is a reason that the limit cannot describe the movement of the function:

Example 4. '*False. A limit is an approximate number which a function gets close to without an exact result*'.[6]

The underlined expression 'without an exact result' establishes a particular connection with the unreachability of the limit.

(A.3.) *A limit is determined by plugging in numbers closer and closer to a given number until the limit is reached.*

This question tries to determine, first, whether the plugging in process is finite or infinite, and, second, whether or not the limit can be reached. It is significant that only 2 out of 18 valid answers considered the unreachability of the limit. For example:

> **Example 5.** '*False. The limit cannot be reached, but only approximated and from those approximations we can get the limit'.*[7]

The underlined expression 'cannot be reached' establishes a particular connection with the unreachability of the limit and the infinite process of plugging in.

B.2.) *A limit is an approximation that can be made as accurate as you wish.*

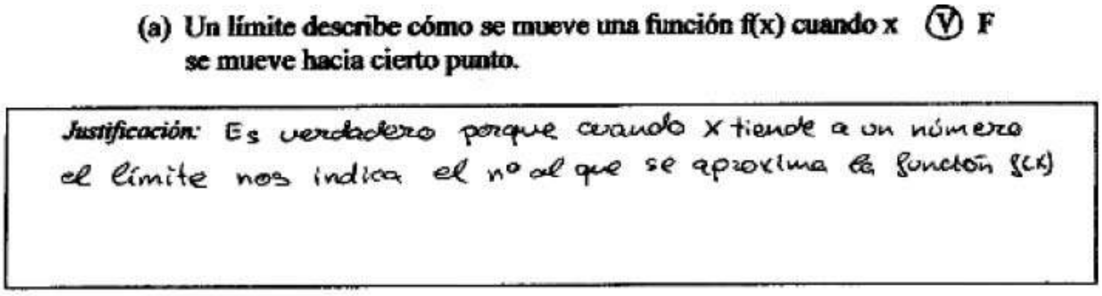
This question, like A.3, tries to determine whether the process of approximation is finite or infinite, and whether or not the subjects consider the approximate nature of the limit value. Two examples of answers are:

> **Example 6.** '*False. A limit is a numerical bound and it is not approximate, but concrete*'.[8]

The underlined expression 'numerical bound' establishes a particular connection with the non-exceedability of the limit. The underlined expression 'concrete' is used to reject the approximate character of the limit.

> **Example 7.** '*True. The line determined by the function can approach infinitely but it will never arrive at the limit, for example, 0.5; 0.05; 0.005; 0.0005*'.[9]

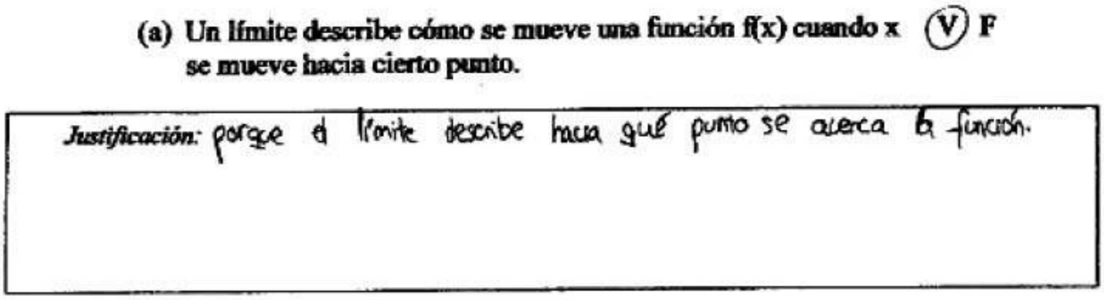
The underlined expressions 'approach infinitely' and 'it will never arrive' establish a particular connection with the unreachability of the limit, and this issue is related to the arbitrary precision of the approximation of the limit value.



(a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. V F

Justificación: Es verdadero porque cuando x tiende a un número el límite nos indica el nº al que se aproxima la función f(x)

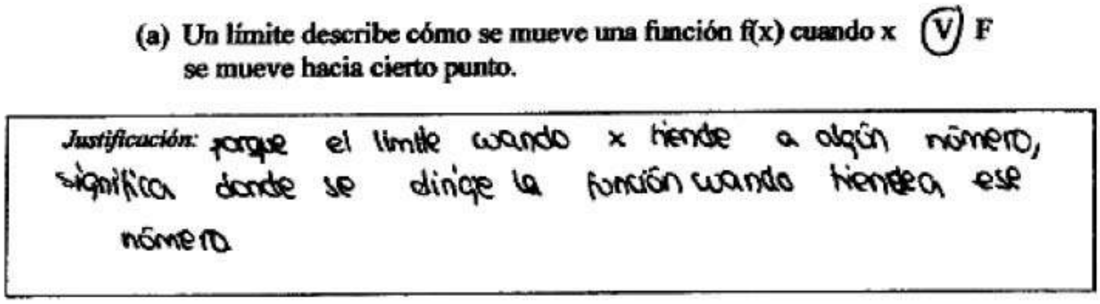
(a) Effective term "to approach." Translation: "It is true because when x tends toward a number the limit shows us the number that the function $f(x)$ approaches."



(a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. V F

Justificación: porque el límite describe hacia qué punto se acerca la función.

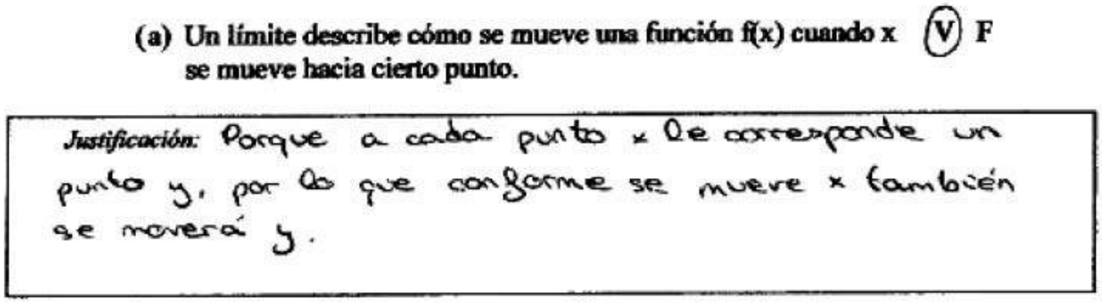
(b) Effective term "to get close." Translation: "True. Because the limit describes the point which the function gets close to."



(a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. V F

Justificación: porque el límite cuando x tiende a algún número, significa donde se dirige la función cuando tiende a ese número

(c) Effective term "to head." Translation: "True. Because the limit when x tends toward a number means where the function heads when it tends to that number."

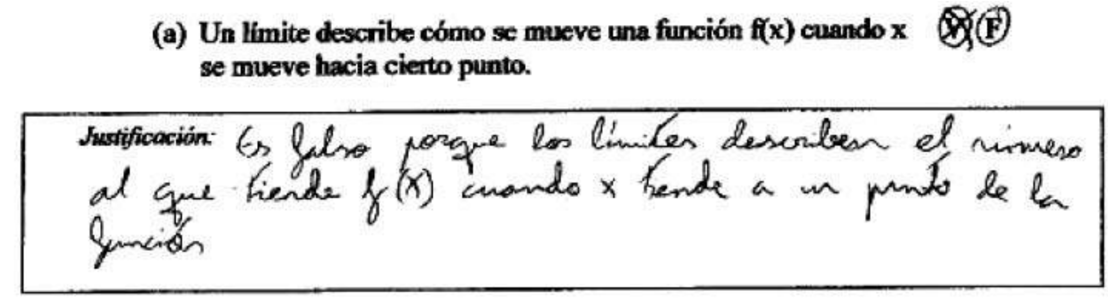


(a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. V F

Justificación: Porque a cada punto x le corresponde un punto y, por lo que conforme se mueve x también se moverá y.

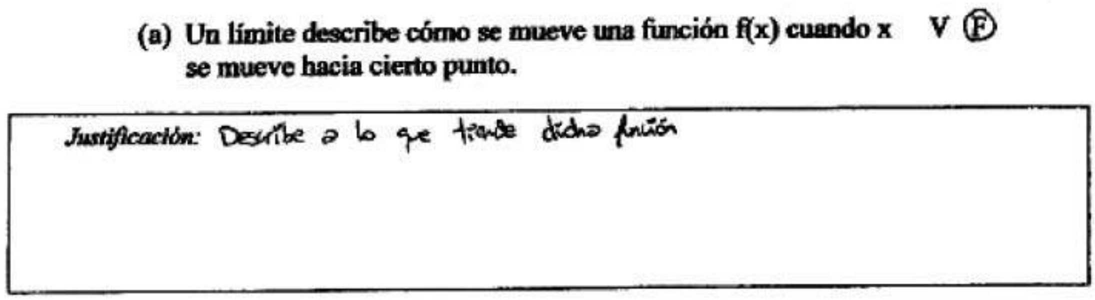
(d) Effective term "to move." Translation: "True. Because each point 'x' corresponds to a point 'y', so if 'x' moves, 'y' will move too."

Figure 6.1. Examples of answers from question A.1. including effective terms related to the specific term 'to approach'.


(a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. V F

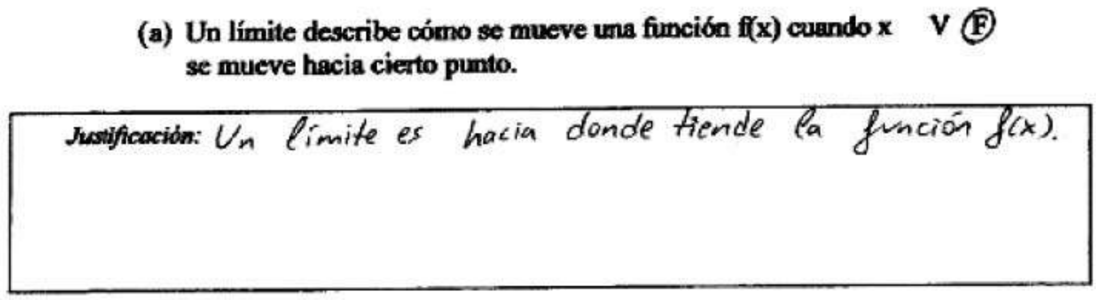
Justificación: Es falso porque los límites describen el número al que tiende f(x) cuando x tiende a un punto de la función

(a) Translation: "It is false because limits describe the number a function $f(x)$ tends toward when x tends toward a point of the function."


(a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. V F

Justificación: Describe a lo que tiende dicha función

(b) Translation: "False. It describes what a function tends toward."


(a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. V F

Justificación: Un límite es hacia donde tiende la función f(x).

(c) Translation: "False. A limit is where a function $f(x)$ tends toward."

Figure 6.2. Examples of answers from question A.1. including effective term 'to tend'

6.5.2. General discussion

The results provide a great variety of effective terms for interpretation as they relate to the specific terms selected in connection with the concept of limit and its mathematical meaning introduced above.

On the one hand, for question A.2, references to reachability predominate. Table 6.2 shows six out of eight valid answers when the subjects are required to argue about exceedability, whereas two out of eight valid answers refer to exceedability only. On the other hand, for question B.1, only 2 out of 14 valid references refer to the non-exceedability of the limit (both answers state that the limit is reachable), in contrast to 12 out of 14 valid references to reachability. This result shows a connection between the two properties.

Some answers from questions A.1, A.3 and B.2 suggest the following implications for the unreachability or non-exceedability of the limit:

- The impossibility that the limit describe the movement of a function, at least at the point where the study is carried out, due to unreachability.
- The arbitrary precision of the approximation to the limit is due to unreachability.
- The limit is not an approximate but an exact number; however, it cannot be exceeded. We speculate that students suggest this relationship due to the imprecise use of examples, in which convergence is strictly monotone and the value of the limit is, in fact, an upper bound and thus unreachable. Such use of examples excludes from the student's reasoning the image of the point at which the study is made, even when that image coincides with the limit.

6.5.3. Summary of results from the second phase of analysis

From the second phase of analysis, we summarize the findings related to the discussion of the categories of response, which are developed more fully in (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, & Rico, 2012):

- *Discrimination between process conceptions, object conceptions and dual conceptions of the concept of limit.* As *process conceptions*, we consider those examples which suggest that a limit is closely related to the procedures a student uses to find it; as *object conceptions*, those where a student is able to identify the properties of the limit without depending on the process involved; while intermediate conceptions between these two are called *dual conceptions*. Thus, when students were requested to discuss the statement A.1, 'The limit describes how a function $f(x)$ moves when x moves to certain point', most of their arguments could be classified as one of these three options depending on whether students interpreted the limit as 'how' (process conceptions) or 'where' (object and dual conceptions) a function moves.
- *Persistence of misconceptions related to the limit as a non-exceedable and unreachable value.* Some of students' arguments for questions A.2 and B.1 are consistent with considerations from Cornu (1991) and Monaghan (1991). Our results go beyond these earlier studies, however, in that some students suggested that limit is not exceedable because it is not reachable. Such responses indicate that this kind of misconception

could arise from overgeneralization of the particular case of monotone convergence.

- *Conflicts with the arbitrary precision of approximation to the limit.* The expression 'limit can be approximated as much as you wish' (question B.2) led some students to affirm that as the practical process is finite, so is precision. In question A.3, we can also see that students make a crucial distinction between the potentially infinite character of the process and its implementation in practice. Students conceive the arbitrariness of the process of approximating the limit (question B.3) in different ways. For example: 'False. They approach the limit in an approximate way, but not in an arbitrary way' (arbitrariness implies the reachability of the limit). Or: 'False. The values do not approach to the limit in an arbitrary way, depending on the x-values, the $f(x)$-values get close to the limit or move away from it' (arbitrariness implies that for every x-value, an $f(x)$-value approaches the limit).
- *Conflicts with the exact or indefinite character of the limit value.* Some students considered a limit to be an exact number, whereas others considered the limit an 'approximate' number. We suggest that the latter do not know what the limit is and therefore only think of approximations.

6.6. Conclusions

In analysing the results, we draw the following conclusions concerning the two aims proposed:

Aim 1. *To describe how students express verbally their intuitive conceptions of the notion of finite limit of a function at a point.* The conclusions are as follows:

- Conceptual analysis permits us to recognize possible conceptions that arise from the colloquial and everyday use of specific terms. These uses induce errors in students' understanding of the concept of finite limit of a function at a point. The conceptual analysis helps us to interpret these responses.
- Students use relatively undeveloped and imprecise language, characterized by the use of the terminology provided by the questions, as well as some original synonyms and specific terms. Their characterization of the limit as non-exceedable or unreachable persists, confirming the

influence of older colloquial and informal uses of the word ‘limit’ in the students’ conceptions, as indicated by Cornu (1991).

Aim 2. *To describe how students interpret this concept and perform tasks related to it by analysing the meaning of specific terms that express different facets of the concept of limit.* The conclusions are as follows:

- The unreachability of the limit is considered by most of the students to be a cause of its non-exceedability, and the possibility of exceeding or reaching the limit is deduced through the use of examples. Although we find the use of expressions similar to ‘$f(x)$ tends toward a number, when x tends toward...’, we do not find evidence to verify the presence of the semantic conflicts reported in other Research (Tall & Vinner, 1981; Blázquez, Gatica, & Ortega, 2009).
- Moreover, students occasionally relate these issues to the arbitrary precision of approximation, the impossibility of the limit describing the movement of the function, and the negation of the approximate character of the limit value.

Notes

1. Non-Compulsory Secondary Education.
2. The expression ‘A limit describes how a function moves as x moves towards a certain point.’ is related to a dynamic conception of function, in which the graph is drawn in the axis of Cartesian coordinates, or the study of phenomena, such as the trajectory of a projectile.
3. Original answer : ‘Verdadero. Porque un límite es un punto al que una función se aproxima infinitamente sin llegar a él’
4. Original answer: ‘Falso. Una función sí puede sobrepasar un límite, ya que muchas veces para averiguar el límite se dan valores que dan lugar a números más altos’.
5. Original answer: ‘Falso. La función alcanza al límite, pero no puede sobrepasarlo’.
6. Original answer: ‘Falso. Un límite es un número aproximado al que se acerca una función sin resultado exacto’.
7. Original answer: ‘Falso. El límite no se puede alcanzar, pero sí aproximar y a partir de esas aproximaciones sacar el límite’.
8. Original answer: ‘Falso. Un límite es un tope numérico y no es aproximativo, sino concreto’.

9. Original answer: 'Verdadero. La línea determinada por la función puede acercarse infinitamente pero nunca llegará, ej: 0.5; 0.05; 0.005; 0.0005'.

6.7. References

Azcárate, C., y Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Venezolana*, *10*(2), 135-149.

Blázquez, S., Gatica, N., y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME, 12*(1), 145-168.

Cajori, F. (1915). The history of Zeno's arguments on motion: phases in the development of the theory of limits. Part I. *American Mathematical Monthly, 22*(1), 1-6.

Chantal, M. (2002). Explotación de los córpora textuales informatizados para la creación de bases de datos terminológicas basadas en el conocimiento. *Estudios de Lingüística del Español, 18.* Recuperado de http://elies.rediris.es/elies18/.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. *The Journal of Mathematical Behavior, 5*(3), 281-303.

Fernández-Plaza, J. A. (2011). Significados puestos de manifiesto por estudiantes de Bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio. Post-graduate Study. Granada: Universidad de Granada. Retrieved from http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Fernandez%20Plaza_TrabInvTut.pdf

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2012). The concept of finite limit of a function at one point, as explained by students of non-compulsory secondary education. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2, pp. 235-242. Taipei, Taiwan: PME.

Gutiérrez, A., & Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education.* Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Lauten, A. D., Graham, K., & Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator, *The Journal of Mathematical Behavior, 13*(2), 225-237.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics, 11*(3), 20-24.

Oxford University Press [OUP] (2011). *Oxford Dictionaries.* Oxford: Author. Retrieved from http://oxforddictionaries.com

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales [RAC] (1996). *Vocabulario Científico y Técnico,* Madrid: Espasa-Calpe.

Real Academia Española [RAE] (2001). *Diccionario de la Lengua Española,* 22ª ed, Madrid: Author. Retrieved from http://www.rae.es

Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 179-193). Granada: Universidad de Granada.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM), 1,* 39-63.

Scriven, M. (1998). Philosophical inquiry methods in education. In M. Jaeger (Ed.), *Complementary methods for research in education* (pp. 131-183). Washington: AERA.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Capítulo 7

Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto

José Antonio Fernández-Plaza[1], Juan Francisco Ruiz-Hidalgo[1], Luis Rico[1] y Enrique Castro[1]

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

PNA (2013), *7*(3), 117-131

La publicación transcrita en este capítulo ha sido realizada con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto “Modelización y representaciones en educación matemática” (EDU2009-11337) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico) del Tercer Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI). Se dispone de la debida autorización del comité editorial de la revista para el uso de esta publicación en esta tesis doctoral. **La citación de la totalidad o parte de este capítulo se hará con mención exclusiva a la publicación correspondiente.**

Resumen

Describimos e interpretamos las definiciones aportadas por un grupo de estudiantes de bachillerato sobre el concepto de límite finito de una función en un punto en términos de aspectos estructurales, compilados y sintetizados de investigaciones previas. Los aspectos estructurales son la interpretación como objeto o como proceso de la noción de límite, los algoritmos y las destrezas prácticas para su cálculo, su alcanzabilidad y su rebasabilidad. A partir de ellos, analizamos las definiciones recogidas. Entre los resultados, destacamos la riqueza de significado de estas definiciones por razón del carácter no alcanzable y no rebasable atribuido al límite y por su consideración dual como objeto o proceso.

Términos clave: Aspectos estructurales del concepto de límite; Concepciones personales; Dualidad objeto/proceso; Límite de una función en un punto; Límite finito.

Personal Definitions and Structural Aspects of the Concept of Finite Limit of a Function at one Point

Abstract

We describe and interpret the individual definitions of a group of non-compulsory secondary education students related to the concept of finite limit of a function at one point in terms of structural aspects compiled and synthesized from prior research. These aspects are the interpretation of the limit notion as an object or a process, its exact or approximate character, the algorithms and practical skills for its calculation, its reachability and its possibility of being exceeded. Among the results we point out the richness of meaning from these definitions by the not reachable and not exceedable attributed character of the limit, and also by the dual consideration of the limit as an object or process.

Keywords: Finite limit; Limit of a function at one point; Object/process duality; Personal conceptions; Structural aspects of the concept of limit

El inicio de esta investigación surge de la preocupación por la mejora de la enseñanza y aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad de una función, que parte de una aproximación al tema mediante el diseño de una unidad didáctica sobre este tópico (Fernández-Plaza, 2010). Este trabajo se llevó a cabo siguiendo el procedimiento del análisis didáctico (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Rico, 1997). Posteriormente, realizamos otro trabajo centrado en la exploración de los significados y concepciones que un grupo de estudiantes de bachillerato proporcionaron acerca del concepto de límite finito de una función en un punto (Fernández-Plaza, 2011).

Es objeto general de este informe avanzar y profundizar en la interpretación de las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. Las características estructurales que subyacen en las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de límite están documentadas por diversos autores. Así es el caso de la dualidad objeto/proceso (Tall, 1980) y el carácter inalcanzable y/o irrebasable atribuido al valor del límite para una función en un punto (Cornu, 1991; Cottrill, Dubinsky, Schwingedorf, Thomas, Nichols y Vidakovic, 1996; Monaghan, 1991; Tall y Vinner, 1981).

Indagar sobre las relaciones entre las concepciones expresadas por los estudiantes y las características estructurales citadas ofrece la oportunidad de revisar, discutir y actualizar las interpretaciones hechas por los autores citados. El objetivo de este trabajo consiste en describir e interpretar cómo las características estructurales mencionadas forman parte de las definiciones personales de los estudiantes derivadas de los usos particulares del lenguaje.

7.1. Antecedentes y Marco Teórico

La riqueza y diversidad de procesos de paso al límite y de sus clasificaciones forma parte de la tradición del Análisis Matemático (Rey Pastor, 1952). Los procesos de paso al límite tienen una fundamentación métrica y otra topológica, más general. De entre ellos, el currículo para el primer curso de bachillerato especifica procesos discretos como la tendencia de sucesiones de números reales, y procesos continuos como la tendencia al límite, continuidad, la derivación y la integración de funciones reales de variable real (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007).

Tall (1980) documenta que, cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y posteriormente la definición formal, la imagen conceptual se contamina con ciertas propiedades que no forman parte de la definición formal. Encontramos un ejemplo de esto en los estudiantes que conciben la noción de límite como proceso dinámico y no la identifican con un valor numérico. En contraste, Romero (1997) incide en la fuerte resistencia de los estudiantes a entender y aceptar la notación decimal periódica para un número cuando el periodo es nueve: “Por un lado, en cuanto a su existencia ya que no procede de una división; por otro lado en cuanto a su conversión en un decimal exacto” (p. 177).

Blázquez, Gatica y Ortega (2009) realizan una revisión crítica de definiciones de límite funcional procedentes de libros de texto. Estos autores, al resaltar en algunas de estas definiciones rasgos de subjetividad e imprecisión, justifican la pertinencia de proponer una definición alternativa que salve las debilidades encontradas. En particular, Blázquez (1999, 2000) enfatiza la necesidad de distinguir entre los términos "tender" y "aproximarse", que es imperceptible para algunos estudiantes en un contexto matemático.

7.1.2. Concepciones y Aspectos Estructurales

Consideramos idealmente una *concepción personal* como la descripción que proporciona un sujeto de parte o toda su imagen conceptual asociada a un concepto dado, no necesariamente evocada o activada por una definición[1]. En la práctica por concepción personal, entendemos la interpretación fundada de lo que el sujeto comunica sobre su imagen conceptual, independientemente de que el mensaje transmitido por el sujeto pueda ser incompleto o defectuoso. La triangulación entre investigadores a la hora de interpretar los enunciados proporciona confianza sobre la validez de las interpretaciones. Las definiciones que dan los estudiantes en contextos informales manifiestan sus concepciones personales. Empleamos el término *definiciones personales* en un sentido análogo al del término definición conceptual de Tall y Vinner (1981).

Llamamos *aspectos estructurales* a aquellas características, propiedades, nociones, términos, etc., documentados en la literatura. Son parte de la estructura conceptual del concepto o conceptos en consideración, pero no la saturan. Dada la complejidad del concepto de límite trabajamos aquí con tres de sus aspectos estructurales relevantes. Estos aspectos fueron elegidos porque permiten describir e interpretar las concepciones personales declaradas por los estudiantes de bachillerato sobre la noción de límite.

A partir de los trabajos sobre el modelo cognitivo imagen conceptual/definición conceptual de Tall y Vinner, establecemos las siguientes premisas para estudiar las definiciones personales aportadas por los estudiantes para el concepto de límite finito de una función en un punto.

[1] Se llama *imagen conceptual* de un concepto al conjunto de representaciones mentales del concepto y de las propiedades que el sujeto asigna a tales representaciones, en definitiva, la estructura cognitiva global asociada a tal concepto (Tall y Vinner, 1981). Nuestra noción de concepción personal extiende la noción empleada por estos autores de definición conceptual, como la explicación que el sujeto proporciona de la imagen conceptual evocada por una definición de referencia, tanto de manera rutinaria, como por reconstrucción subjetiva.

- Las definiciones recogidas tratan de sintetizar, resaltar aspectos relevantes o ampliar algunas concepciones particulares de los escolares provocadas por la instrucción previa y otras cuestiones.
- El análisis aislado de estas definiciones no proporciona indicadores suficientes para describir dichas concepciones, dado que no logran abarcar toda la imagen conceptual subyacente, sobre todo cuando reproducen la definición dada por el profesor o el libro de texto.
- La consideración de las dos premisas anteriores requiere de una selección y descripción de los aspectos estructurales subyacentes, de manera que sirvan para interpretar toda la gama de matices que aparecen en las definiciones planteadas.

Para lograr el objetivo de este trabajo valoramos la pertinencia de los aspectos estructurales para describir e interpretar las definiciones personales declaradas por un grupo de estudiantes de bachillerato.

7.2. Método

El estudio se enmarca dentro de los estudios descriptivos basados en el método de encuesta con reactivos abiertos. Resumimos su diseño a continuación. Destacamos los sujetos y el instrumento y el procedimiento para la recogida de datos.

7.2.1. Sujetos

Seleccionamos, de manera intencional y por disponibilidad, a 36 estudiantes españoles de un grupo de primer curso de bachillerato, con edades comprendidas entre los 16 y 17 años, matriculados en la asignatura de Matemáticas de la moda- lidad de Ciencias y Tecnología. Estos estudiantes habían recibido instrucción previa por parte de su profesor sobre la aproximación numérica intuitiva y la interpretación gráfica del concepto de límite, salvo las técnicas específicas de cálculo. Como guía de ejercicios y referencia teórica, utilizamos el libro de texto *Matemáticas.1 Bachillerato (Ciencias y Tecnología)* (Vizmanos, Alcaide, Hernández, Moreno y Serrano, 2008) y los apuntes propios del profesor.

7.2.2. Instrumento y aplicación

El instrumento utilizado fue un cuestionario que se puede consultar en Fernández-Plaza (2011). De este, nos centramos en una pregunta abierta con el siguiente enunciado:

> Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite de una función en un punto.

La recogida de datos se llevó a cabo a mediados del curso académico 2010-2011. El cuestionario se aplicó durante una sesión ordinaria de trabajo en la clase de matemáticas.

Se elaboraron dos modelos de cuestionario, A y B, incluyendo con anterioridad a la pregunta citada, algunos reactivos específicos —adaptados y traducidos de Lauten, Graham y Ferrini-Mundi (1994)—, que a continuación se presentan.

El análisis de las respuestas a los mismos puede consultarse en Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2012). De los sujetos participantes, 18 respondieron al cuestionario A y 18 al cuestionario B. Nótese que los dos cuestionarios A y B no comparten una estructura común porque cada uno de ellos se centra en características diferentes del concepto de límite. Estas cuestiones se refieren a diferentes sentidos del uso de la noción de límite finito de una función en un punto.

> Rodea la V o la F en cada uno de los siguientes enunciados, según sea verdadero o falso. Justifica en el recuadro tu elección.
>
> (A.1) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto.
>
> (A.2) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar .
>
> (A.3) Un límite se determina probando con valores de x cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza.
>
> (B.1) Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza.
>
> (B.2) Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como se quiera.
>
> (B.3) Un límite es un número al cual los valores de una función f(x) pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de x.

En virtud de las premisas anteriormente consideradas, es necesario provocar las intuiciones básicas de los sujetos con el fin de controlar el fenómeno de reproducción de la definición de referencia.

7.3. Resultados

En primer lugar, elaboramos un listado mediante volcado con las definiciones personales de los 36 sujetos. Para la interpretación fundada de las respuestas, buscamos aquellos aspectos estructurales que las discriminan, sin destacar errores o aciertos. A continuación, detallamos las categorías de análisis que han sido establecidas conforme a las premisas explicitadas en el apartado de antecedentes y marco teórico.

7.3.1. Selección y caracterización de los aspectos estructurales

Cada uno de los aspectos teóricos y sus variantes se identifica mediante un código que aparece entre paréntesis. Los ejemplos se muestran en la tabla 1. Los códigos sirven para identificar las variantes de los aspectos considerados.

Aspecto estructural objeto/proceso

Este aspecto identifica las consideraciones generales realizadas por los estudiantes sobre el concepto de límite como objeto, como proceso o bien, una interpretación dual (Cottrill et al., 1996; Sfard, 1991; Tall, 1980). Dentro de este aspecto estructural consideramos distintas variantes no excluyentes entre sí, que presentamos a continuación.

- *Tipo de objeto/proceso (OP).* Se reconoce cuando los estudiantes establecen distintas referencias para el *objeto límite* (lugar del plano, conjunto de puntos, recta, etc.); en algunos casos, se destaca también su dualidad procesual (aproximación).
- *Vinculación entre límite e imagen (LI).* Cuando el escolar asigna al límite un valor de imagen se observa una *Identificación* (de manera general), una *Conexión* (en casos particulares) o bien una *Independencia* entre dicho límite y el valor imagen de la función (Blázquez y Ortega, 1998).
- *Descoordinación de los procesos en el dominio y en el rango de la función (Desc).* Los escolares sólo se refieren a la variable x (Blázquez y Ortega).
- *Referencia explícita a un sistema de representación distinto al numérico o simbólico (SR).* Empleo de términos para el objeto/proceso límite relacionados con un sistema de representación diferente al numérico o simbólico.

Aspecto estructural destrezas prácticas de cálculo

Este aspecto está relacionado con los modos que tienen los escolares de interpretar los procesos infinitos formales mediante técnicas finitas de determinación del valor del límite, basadas en la continuidad y en las propiedades algebraicas del concepto de límite. Entre esas tres técnicas destacamos las siguientes:

- *Evaluación en el punto (sustitución directa) (Eval.).* No necesariamente implica la vinculación entre límite e imagen.

- *Tabla de valores (TVal.).* Los escolares expresan acciones similares a "dar valores a x".
- *Condiciones de lateralidad y doble convergencia (CLDC).* Los escolares expresan que los procesos de cálculo del límite, bien por la izquierda o bien por la derecha, deben dar el mismo resultado.

Aspecto estructural alcanzabilidad y rebasabilidad (Alcanz. y Reb.)
La posibilidad o no de alcanzar o rebasar el límite puede ser expresada por los escolares en sus definiciones (Cornu, 1991; Monaghan, 1991).

Reproducción de la definición de referencia (Ref.)
También hay que tener en cuenta aquellas definiciones que reproducen la dada bien por el profesor o por el libro de texto y no tienen otros elementos característicos.

7.3.2. Caracterización de las definiciones personales

Utilizamos los siguientes criterios para establecer y clasificar las definiciones personales.

Localización de aspectos estructurales subyacentes y sus relaciones
En el ejemplo "Es el conjunto de puntos..." de la primera fila de la tabla 1 hay presentes dos aspectos relacionados: un tipo de objeto (conjunto de puntos del plano) y referencia a un sistema de representación distinto al numérico y simbólico (la referencia puntos del plano alude implícitamente a un sistema de representación gráfico-geométrico). Estos dos aspectos estructurales dan nombre a la familia I (OP-SR).

Discriminación de definiciones dentro de una misma familia mediante aspectos estructurales no compartidos
El ejemplo "Es el lugar del plano..." pertenece a la familia I (OP-SR), pero añade dos matices, el carácter no alcanzable y el no rebasable del límite, determinando una subfamilia I.1 (No Alcanz.-No Reb.).

Agrupación de familias por aspectos estructurales comunes
En el ejemplo, la variante estructural OP define un grupo que incluye las familias I, II.

Obtenemos así 11 familias de definiciones organizadas en siete grupos, con sus correspondientes subfamilias, que se resumen en la tabla 1. Prescindimos del análisis estadístico descriptivo dado el pequeño tamaño de la muestra, fijándonos únicamente en la existencia de enunciados para las familias consideradas. Por cuestiones de espacio, sólo mostramos las definiciones más completas.

La descripción general de cada familia y subfamilia se hace en términos de los aspectos estructurales que la determinan (ver apartado 7.3.1.).

Tabla 7.1. Familia de definiciones según los aspectos estructurales resaltados y ejemplos representativos

Familias de definiciones Aspectos estructurales comunes	Subfamilias de definiciones Aspectos estructurales diferenciadores
I. OP-SR "Es el conjunto de puntos del plano a los que se aproxima una función cuando x tiende a un número..."	
II. OP-Desc.	I.1. Alcanz. "... todos aquellos valores que puede adquirir la incógnita x hasta llegar al punto dado" II.2. No Alcanz. "... todos aquellos números que se acercan a dicho punto pero sin llegar a alcanzarlo"
III. Desc. "Es el número al que se va aproximando x"	
IV. Identidad LI	IV.1. No Alcanz. "Sería el valor que toma una función, al acercarse a un valor, pero nunca lo alcanza"
V. Conexión LI-Eval. "... es aquel punto al que tiende la función siendo sustituida en la función la x por un número dado"	
VI. Independencia LI-CLDC "... No hace falta que el límite tenga imagen. El límite por la derecha y por la izquierda tiene que ser el mismo número"	
VII. SR-TVal. "... es un número situado en una gráfica al cual se pretende acercar mediante valores de x"	

Tabla 7.1. Familia de definiciones según los aspectos estructurales resaltados y ejemplos representativos

Familias de definiciones Aspectos estructurales comunes	Subfamilias de definiciones Aspectos estructurales diferenciadores
VIII. SR-No Alcanz. "... es aquel que no permite que la función se represente gráficamente"	
IX. No alcanz.	IX.1. No Reb. "... es aquel punto donde la función no puede llegar nunca a sobrepasar o tocar, se puede aproximar pero nunca tocar o pasar..." IX.2. CLDC-Tval. "... En estos casos se haría una tabla de valores para ver qué números son los que se acercan por la izquierda y por la derecha"
X. No Reb.	X.1. Alcanz. "... es el número límite al cual puede llegar la función"
XI. Ref. "... es el número al que se aproxima *f(x)* cuando x se acerca a ese punto"	

En los siguientes resultados resumimos el alcance de las definiciones personales de los estudiantes en cuanto a las características estructurales se refiere:

- las atribuciones personales de objeto al límite —límite de la variable x (Blázquez y Ortega, 1998), recta, lugar del plano, conjunto infinito de puntos, etc.— corresponden a las familias I, II y III;
- las atribuciones personales de proceso al límite (aproximación) (Tall, 1980) corresponden a la familia II;
- la alcanzabilidad y la rebasabilidad como atribuciones personales al objeto en relación al proceso (Cornu, 1991; Monaghan, 1991) corresponden a las subfamilias de I, II, IV, IX y X y a las familias IX y X;
- la relación de identidad, conexión o independencia entre los objetos límite e imagen (Blázquez y Ortega, 1998; Sierra, González y López, 2000) corresponde a las familias IV, V y VI;

- las destrezas prácticas de cálculo (tabla de valores y evaluación) y condiciones de lateralidad y doble convergencia corresponden a las familias V, VI y VII; el proceso de definir con apoyo en el sistema de representación gráfico corresponde a las familias I, VII y VIII; y
- un 25% de las definiciones son reproducciones de la definición de referencia. Por lo tanto, creemos que el sesgo debido a la instrucción previa no es relevante.

7.3.3. Grado de coincidencia entre las respuestas a los reactivos específicos y las definiciones

Las premisas consideradas sostienen que puede haber cierto condicionamiento de las definiciones formuladas a las respuestas a los reactivos específicos propuestos previamente. Medimos ese condicionamiento en términos de los siguientes criterios:

Definición adaptada o textual

La definición incluye, entre otros matices, una adaptación o copia textual de la respuesta a uno o varios de los reactivos previos (ejemplos 1 y 2).

Ejemplo 1 (definición adaptada de las respuestas a los reactivos A1 y A3). "*Límite de una función en un punto es aquel punto donde la función no puede llegar nunca a sobrepasar o tocar, se puede aproximarse pero nunca tocar o pasar. El límite describe a lo que tiende dicha función*".

Los siguientes son subejemplos de este ejemplo.

- "*Verdadero. Describe a lo que tiende dicha función*" (respuesta al reactivo A1).
- "*Falso. El límite no se puede alcanzar, pero sí aproximar y a partir de esas aproximaciones sacar el límite*" (respuesta al reactivo A3).

Ejemplo 2 (definición adaptada de la respuesta al reactivo A2). "*El límite de una función en un punto es un número al cual la función se acerca pero nunca llega a tocar ese número*".

El siguiente es un subejemplo de este ejemplo como respuesta al reactivo A2: "*Verdadero. Porque el límite es un número al cual la función se aproxima sin llegar al punto o al número*".

Definición-reactivo

La definición incluye, entre otros matices, una adaptación o copia textual del enunciado de uno o varios de los reactivos, no de su respuesta, que de hecho puede estar "en blanco" (ejemplo 3).

Ejemplo 3 (definición que incluye copias textuales de los reactivos B.2 y B.3). "*Un límite es un número o punto al que la función alcanza, se puede hacer tan precisa como se quiera. Es un número al cual los valores de f(x) pueden acercarse de manera arbitraria mediante los valores de x, es decir, dándole valores a la x.*"

Definiciones originales

No existen indicios de coincidencia, bien porque expresa otras propiedades o porque ha dejado en blanco las respuestas a los reactivos específicos previos (ejemplo 4).

Ejemplo 4 (definición original sin coincidencia explícita con respuestas a los reactivos previos). "*El límite de una función en un punto es el número o punto al que una función se aproxima en dicho punto, es decir, es el valor de y para un determinado x.*"

Subejemplo 4.1 (respuesta al reactivo B1). "Verdadero. El límite de una función es el número o punto al que se acerca sin llegar a alcanzarlo."

Subejemplo 4.2 (respuesta al reactivo B2). "Falso. Un límite es una aproxima- ción que puedes hacer hasta cierto punto de precisión."

Subejemplo 4.3 (respuesta al reactivo B3). "Falso. Un límite es un número al cual los valores de *f(x)* pueden acercarse de manera creciente y arbitraria me- diante restricciones de los valores de *x*."

La tabla 7.2 resume el grado de coincidencia entre las respuestas de los sujetos a los reactivos específicos y sus definiciones personales, teniendo en cuenta que una definición puede ser adaptada de varios reactivos, e incluso pertenecer a varias categorías con reactivos diferentes.

Tabla 7.2. Medida del grado de coincidencia entre las respuestas a los reactivos específicos y las definiciones

	Reactivos A				Reactivos B			
Grado de coincidencia	A.1	A.2	A.3	Total	B.1	B.2	B.3	Total
Definición adaptada	7	4	2	11	8	3		9
Definición reactivo	1	2		3	3	1	2	4
Total/reactivo	8	6	2	13	11	4	2	13
Definición original				4				5
Sin Respuesta								

Nota. Los totales no proceden de la suma de los elementos de la misma fila debido a que una definición puede ser a la vez adaptación y reactivo para diferentes cuestiones. Por ejemplo, la definición procedente del ejemplo 1 es "adaptada" de los reactivos A.1 y A.3 y "definición reactivo" del A.2. Por esta razón, la suma de los totales adaptados y definición reactivos (16) no coincide con el total de definiciones clasificadas entre las dos categorías (13).

Se observa que para cada uno de los cuestionarios A y B, 13 de 18 definiciones han incluido concepciones básicas en sus enunciados. Esto hace patente el condicionamiento de las definiciones a los reactivos específicos previos. Los reactivos más destacados del cuestionario A fueron A.1 y A.2, mientras que del cuestionario B fue el reactivo B.1. Esto nos conduce a que las definiciones de los sujetos contienen en su mayoría referencias a la alcanzabilidad (reactivo B.1), rebasabilidad (reactivo A.2) y a la naturaleza objeto/proceso del límite (reactivo A.1). Por otro lado percibimos que las definiciones originales —cuatro de 18 (cuestionario A) y cinco de 18 (cuestionario B)— reproducen la definición de referencia o añaden otras propiedades. Sostenemos que esto se debe a que no dan respuesta a los reactivos específicos o que no consideran las respuestas dadas como parte de su definición.

7.4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Extraemos conclusiones para dar continuidad al trabajo e implicaciones para la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de límite. En primer lugar, la riqueza de definiciones personales se debe al trabajo previo realizado con reactivos específicos. Es decir, ofrecer una gama de propiedades del concepto de límite a los estudiantes incentiva la generación de definiciones diferentes a la de referencia y más complejas.

Son relevantes los modos de "ver" un mismo concepto sutilmente distintos al modo intuitivo de introducirse en el aula. El registro gráfico constituye un apoyo alternativo para construirlas.

Los aspectos estructurales alcanzabilidad y rebasabilidad subyacen en la mayoría de las familias de definiciones obtenidas, enfatizando la importancia que los escolares les dan como propiedades del concepto de límite. Formulamos la conjetura de que los ejemplos gráficos empleados en la enseñanza pueden estar pronunciando la percepción intuitiva de los estudiantes sobre estas propiedades. La planificación y diseño de una propuesta didáctica debería incluir medidas de detección y tratamiento de estos aspectos.

De esta investigación emergen otras conjeturas. La identificación o conexión del límite con la imagen se debe a una comprensión insuficiente de la evaluación como destreza práctica de cálculo del límite; es decir, a la generalización de su uso practicado en un contexto continuo a otros que carecen de esa propiedad. Mientras que la identificación del límite como límite de la variable x, fruto de la descoordinación de los procesos en dominio y rango de la función, se debe a la resistencia a aceptar la no existencia de límite en contextos determinados. Esta conjetura fue contrastada por Blázquez y Ortega (1998) en el caso particular de funciones con límites laterales finitos y distintos.

De este modo se alcanza el objetivo al mostrar la pertinencia de los aspectos considerados para organizar las definiciones personales e interpretarlas según ideas claves o familias de definiciones basadas en los aspectos estructurales convenientemente afinados.

7.5. Referencias

Blázquez, S. (1999). Sobre la noción del límite en las matemáticas aplicadas a las ciencias sociales. En T. Ortega (Ed.), *Investigación en Educación Matemática III* (pp. 167-184). Valladolid, España: SEIEM.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis doctoral no publicada. Valladolid, España: Universidad de Valladolid.

Blázquez, S., Gatica, N., y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *La Gaceta de la RSME*, *12*(1), 145-168.

Blázquez, S., y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula*, *10*, 119-135.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167- 192.

Fernández-Plaza, J. A. (2010). Unidad didáctica: límite y continuidad de funciones. Documento no publicado. Granada, España: Universidad de Granada.

Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio.* Trabajo de fin de master no publicado, Universidad de Granada, España.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2012). The concept of finite limit of a function at one point as explained by students of non-compulsory secondary education. En T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 235-242). Taipei, Taiwan: PME.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Lauten, A. D., Graham, K., y Ferrini-Mundy, J. (1994). Students' understanding of basic calculus concepts: interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(2), 225-237.

Lupiáñez, J. L (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Ley Orgánica 1467/2007 de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE, 266*, 45381-45477.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20-24.

Rey Pastor, J. (1952). *Elementos de la teoría de funciones.* Madrid, España: Autor.

Rico, L. (Ed.). (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* Madrid, España: Síntesis.

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en educación secundaria: una experiencia de investigación-acción.* Granada, España: Comares.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sierra, M., González, M. T., y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(1), 71-75.

Tall D. O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 170-176). Berkeley, CA: PME.

Tall, D. O. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Vizmanos, J. R., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas. 1 Bachillerato (Ciencias y Tecnología).* Madrid, España: Editorial SM.

CAPÍTULO 8

RAZONAMIENTOS BASADOS EN EL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

José Antonio Fernández-Plaza[1], Juan Francisco Ruiz-Hidalgo[1] y Luis Rico[1]

[1] Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

Enseñanza de las Ciencias (2015), *33*(2), 211-229

La publicación transcrita en este capítulo ha sido realizada con ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto "Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación" (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico). Se dispone de la debida autorización por parte del comité editorial de la revista para el uso de esta publicación en esta tesis doctoral.

La citación de la totalidad o parte de este capítulo se hará con mención exclusiva a la publicación correspondiente.

Resumen

Este artículo analiza las concepciones de los estudiantes de bachillerato acerca del concepto de límite finito de una función en un punto a partir de su representación gráfica. Las concepciones emergen de los argumentos que los estudiantes expresan cuando aplican sus definiciones individuales a una selección de modelos gráficos del concepto. La bondad de los razonamientos observados se caracteriza en términos de tres niveles de coherencia entre los argumentos de cada estudiante y una definición individual elaborada previamente. Los resultados muestran concepciones reconocidas en estudios previos. También este estudio detecta concepciones particulares, tales como la necesidad de que exista la imagen de una función en un punto para discutir acerca de su límite en dicho punto. Asimismo, detectamos un equilibrio entre argumentos plenamente coherentes y los incoherentes con la definición individual.

Palabras clave: concepción, definición, límite finito de una función en un punto, coherencia de una argumentación.

Reasoning based on the concept of finite limit of a function at a point

Abstract

This article analyses the students' conceptions in Non-Compulsory Secondary Education about the concept of finite limit of a function at a point from its graphical representation. Conceptions emerge from the arguments students express when applying their individual definitions to a selection of graphical models of the concept. The goodness of observed students' argumentations is characterized in terms of three levels of coherence between single student's arguments and his individual definition previously developed. The results show conceptions recognized in previous studies. This study also detects particular conceptions, such as, necessity for image existence of a function at a point to discuss on its limit at that point. Likewise, we detect a balance between fully coherent arguments and incoherent ones with the individual definition.

Keywords: Conception, definition, finite limit of a function at a point, consistency of an argument.

8.1. Introducción

Abordar el aprendizaje del concepto de límite y el dominio de su definición sitúan a este estudio en la agenda de investigación del Pensamiento Matemático Avanzado (Gutiérrez y Boero, 2006, pp. 147-172). Concretamente, el papel de las definiciones es un criterio importante para diferenciar entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado (Azcárate y Camacho, 2003; Edwards, Dubinsky, y McDonald, 2005; Tall, 1992). Se trata, este último, de un extenso ámbito de investigación que provoca diferentes interpretaciones y modos de abordar su estudio (Harel y Sowder, 2005; Selden y Selden, 2005).

Al interrogarnos sobre la concepción que los estudiantes de bachillerato tienen de la noción de límite finito de una función en un punto, se plantean cuestiones como ¿qué significado le atribuyen a esa noción? Las descripciones que los estudiantes realizan del concepto ¿son "definiciones"? ¿Son coherentes las respuestas ante determinadas tareas respecto a la descripción que los estudiantes hacen del concepto?

Para analizar las definiciones de un concepto matemático aportadas por los estudiantes, requerimos distinguir adecuadamente entre las nociones de definición y de concepción. En este sentido, Von Glasersfeld (1987) prescribió la pertinencia de describir la noción de concepción desde dos puntos de vista: uno interno al sujeto, como elementos que moviliza para dar una determinada respuesta (gestual, simbólica, gráfica, etc.); y otro externo, entendido como la interpretación de los investigadores acerca de lo que comunica el sujeto de estudio (p. 13).

Con la intención de establecer un vínculo entre la deducción formal y la intuición, mostramos que el trabajo de los estudiantes con tareas analíticas/diagnóstico, que tratan propiedades específicas del concepto de límite finito de una función en un punto, incentiva la tarea de sintetizar una definición individual, lo cual atenúa notablemente la tendencia a reproducir la definición del profesor o del libro de texto de referencia (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico, y Castro, 2013).

Para explorar la relación entre las concepciones y la definición de un estudiante acerca de un determinado concepto matemático, se implementaron tareas de aplicación de la definición, que implicaron diversas relaciones entre sistemas de representación. La noción de representación juega aquí un papel fundamental. Esta noción surge del interés por comprender la naturaleza del conocimiento matemático, la comprensión de conceptos y modos de pensamiento, y las diversas formas de expresión y comunicación de las ideas matemáticas (Janvier, 1987; Rico, 2009).

Son varios los antecedentes encontrados de investigaciones que han estudiado las concepciones de estudiantes y profesores según distintos sistemas de representación del concepto de límite finito de una función en un punto (Blázquez, 2000; Blázquez y Ortega, 1998; Swinyard, 2011; Valls, Pons, y Llinares, 2011; Ward, Inzunsa, Hernández, y López, 2013).

En un estudio más amplio, encaminado a describir los significados que los estudiantes atribuyen al concepto de límite finito de una función en un punto, caracterizamos las definiciones individuales de los estudiantes participantes en términos de aspectos estructurales basados en las dicotomías objeto/proceso, proceso finito/infinito potencial, carácter exacto/aproximado del límite, su rebasabilidad y su alcanzabilidad (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico, y Castro, 2013).

En este trabajo se constata la capacidad de los estudiantes para relacionar las representaciones verbales con las que expresan su definición de límite y cómo la aplican para justificar la existencia o no de límite de funciones definidas gráficamente. Fijamos los siguientes objetivos específicos de este estudio:

- O.1. Describir las concepciones de los estudiantes manifestadas por la aplicación de su definición individual en una tarea de interpretación de gráficas de funciones relacionadas con el concepto de límite finito en un punto.
- O.2. Valorar la coherencia entre la definición individual sobre límite finito de una función y los argumentos aportados acerca de su existencia en un punto, a partir de la información contenida en las gráficas.

En la siguiente sección describiremos nociones generales teóricas que sustentan el trabajo, entre ellas, las nociones de concepción, definición, significado de un concepto matemático, representación y la noción específica de coherencia entre un argumento y una definición.

8.2. Marco conceptual y procedimiental

Como se expresa en la introducción, el trabajo se sustenta en las nociones de definición y concepción que diferenciamos claramente; en los procedimientos para detectar las concepciones de los estudiantes; en una caracterización semántica del significado de un concepto matemático escolar; en las funciones de los sistemas de representación matemáticos; y, por último, en una caracterización de la coherencia entre distintas propiedades junto con un método para su valoración.

8.2.1. Concepciones y definiciones

Aunque las nociones de concepción y definición se refieren a descripciones de una entidad y cada definición se puede considerar como variante de una concepción, durante el trabajo consideramos ambas nociones con significados diferenciados.

Un primer dato diferenciador entre ambas nociones es que la definición ha de poseer un carácter formal, inequívoco, conciso y exacto; peculiaridades que no tienen por qué exigirse para una concepción. Las definiciones son la expresión verbal de los conceptos utilizados por una comunidad lingüística, de un grupo científico e incluso de un equipo de investigación particular, mientras que las concepciones son individuales, dado que existen diferencias entre concepciones de una persona a otra en referencia al mismo objeto. Por tanto, la definición tiene un papel distintivo del uso técnico de un constructo en contraste con sus usos intuitivos y coloquiales (Vinner, 1991).

Una *definición* en matemáticas es un conjunto de propiedades lógicamente consistente (sin circularidad ni contradicciones internas) de un concepto matemático, a partir de las cuales se deducen otras propiedades del mismo, la veracidad o falsedad de afirmaciones acerca de dicho concepto, o se identifican ejemplos (al menos uno) y contra-ejemplos del objeto matemático (Harel, Selden, y Selden, 2006, p.151).

Existen características de un concepto matemático que no están prefijadas por su definición, pero pueden venir condicionadas por el contexto en el que se emplean (Pecharromán, 2013, p.129), por ejemplo, la definición formal de límite no prefija aspectos como la no rebasabilidad del límite, el valor que toma la función en el punto, o la alcanzabilidad del objeto límite; propiedades que los estudiantes sí manipulan y asocian a su idea de límite, alterando así el campo de ejemplos que abarca la definición del profesor o del libro de texto. En la matemática formal, la definición se puede considerar como la mejor representación de un determinado concepto, en el sentido de ser sintética y completa, pues todas las propiedades del concepto se deducen lógicamente de ella. A la caracterización o descripción de un concepto en la que un estudiante se propone interpretar y sintetizar las propiedades “definitorias” se le denominará *definición individual*, con el fin de distinguirlas de aquéllas otras propuestas por el profesor o el libro de texto.

Son varias las investigaciones centradas en el rol de la definición durante el proceso de aprendizaje de los estudiantes (Blázquez, Gatica, y Ortega, 2009; De

Villiers, 1998; Swinyard, 2011; Zandieh, Roh, y Knapp, 2014; Zaslavsky y Shir, 2005).

La noción de *concepción* la consideraremos desde dos puntos de vista siguiendo a Von Glasersfeld (1987, p.13). El primero de ellos desde el estudiante, como la descripción interna e individual de aspectos particulares del concepto. Desde el punto de vista del investigador, la concepción del estudiante se define como la interpretación fundada de un conjunto de respuestas (verbal, gráfico, simbólico, gestual, etc.) que proporciona un estudiante a una serie de estímulos para lo cual moviliza aspectos de su concepción interna, inobservable directamente. Asimismo, compartimos elementos de Roth y Thom (2009, pp.186-187), que modelan una concepción como una red de experiencias de un estudiante acerca de un concepto y postulan que el conocimiento de un concepto se identifica con la interconexión adecuada entre los diferentes nodos de experiencia. Las concepciones evolucionan cuando existen condiciones que las contradicen o evocan un nuevo punto de vista e incluso pueden recoger matices del desarrollo epistemológico del concepto (Sierra, González y López, 2000).

8.2.2. Modelo para detectar concepciones

Una concepción se puede generar a partir de concepciones elementales que proceden de la respuesta del estudiante frente a estímulos específicos. Es un hecho observable que las concepciones elementales puedan ser contradictorias entre sí, porque un estudiante es capaz de reaccionar de manera diferente a estímulos equivalentes salvo cambios de representación (Garbín y Azcárate, 2002; Dufour-Janvier, Bednarz, y Belanger, 1987, p.114; Tirosh, 1990). Para interpretar y organizar las concepciones elementales se elabora un modelo que recoge inevitablemente elementos conceptuales de los propios investigadores, no del estudiante (Von Glaserfeld, p. 13). Para detectar las concepciones de los estudiantes empleamos dos tipos de tareas, para cuya respuesta los estudiantes emplean dos tipos de procedimientos:

- *Sintético / Definidor*. Se le demanda al estudiante que sintetice una serie de propiedades del concepto en un enunciado o definición, bien directamente, o de forma indirecta mediante discusión de ejemplos del concepto. Por tanto, toda definición individual es una concepción del estudiante.
- *Analítico / Diagnóstico*. Se le demanda al estudiante la identificación, uso de ciertas propiedades de un concepto dado o aplicación de su definición individual.

La reflexión sobre qué tipo de información proporciona o no cada variante de tarea para estudiar las concepciones de los estudiantes sobre un determinado concepto se detalla en la Tabla 8.1. Esa tabla muestra la complementariedad de los dos tipos de tarea, de modo que la interpretación de las concepciones de los estudiantes provocadas por estímulos analíticos/diagnóstico se debe acompañar de la interpretación de las definiciones de los estudiantes mediante estímulos sintéticos que establecerán los pilares o puntos de anclaje en los que se apoya el estudiante.

Podemos concluir que la noción de concepción está generalmente condicionada por situaciones específicas que la evocan e involucra diversas relaciones entre representaciones del concepto; mientras que la definición individual se caracteriza por un nivel superior de abstracción y estabilidad, aunque las inferencias de los estudiantes pueden contradecir su definición individual; sobre todo si surgen nuevas situaciones a las que la definición individual no puede dar respuesta.

Extendemos así la relación entre los constructos *Concepto Imagen/Concepto Definición* (Tall y Vinner, 1981) postulando un eslabón intermedio entre la definición de referencia (concepto definición) y las concepciones analíticas (concepto imagen), que denominamos *concepciones sintéticas* o *definiciones individuales.*

8.2.3. Significado de un concepto matemático

La noción de significado de un concepto matemático (Rico, 2012, pp. 51–53) se concibe como un marco interpretativo del conocimiento de los estudiantes que responde a preguntas básicas como ¿Sobre qué conceptos, propiedades, definiciones o relaciones los estudiantes argumentan y comunican sus ideas matemáticas?, ¿qué signos emplean para ello?, ¿qué modos de uso se identifican en el concepto?, ¿qué situaciones o contextos enmarcan sus ideas matemáticas o están en su origen? Como respuesta a estas preguntas, describimos tres componentes de significado.

- Los *sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto, muestran sus propiedades y lo relacionan con otros.
- La *estructura conceptual*, que comprende la red de conceptos, definiciones y propiedades, junto con aquellos argumentos, normas y otros procedimientos de los que derivan sus reglas de razonamiento y sus criterios de veracidad. La referencia sobre la cual los estudiantes construyen su conocimiento viene sintetizada mediante su definición individual.

- Los *sentidos*, que incluye aquellos modos de uso, contextos, situaciones y problemas que están en el origen del concepto y lo dotan de carácter funcional.

Tabla 8.1. Información que proporcionan o no las tareas

Tipo de tarea	Proporciona información sobre	No proporciona información
Sintético / Definidor	- Recoge información general del conocimiento del estudiante sobre el concepto, sobre todo sus propiedades más relevantes. - La definición de un estudiante, siempre y cuando sea adecuada, es un criterio de valoración "intrasujeto" de otras respuestas.	- Escasez de relaciones entre sistemas de representación. - Riesgo de reproducción de la propuesta por el profesor y/o el libro de texto. - Posibles imprecisiones o sin consistencia - Restricción del campo de propiedades que los estudiantes pueden incorporar de otras situaciones.
Analítico / Diagnóstico	- Recoge información específica sobre algún aspecto destacable del concepto. - Conectan informaciones procedentes de diferentes sistemas de representación. - Permite detectar y corregir errores en la aplicación de la definición individual, sobre todo si es imprecisa o reproduce la definición de referencia.	- Desconocimiento del punto de anclaje que pudiera adoptar el estudiante para elaborar su respuesta. - Criterios de valoración de errores "externos" al sujeto, sin contraste con la definición individual.

8.2.4. Sistemas de representación. Modelos gráficos del concepto de límite

Existen diferentes alternativas conceptuales de la noción de representación recogidas en trabajos de Janvier (1987) y Rico (2009). Todas ellas sostienen, entre otros supuestos, que todo concepto matemático requiere de una variedad de representaciones para su captación, comprensión y estructuración, de ahí la necesidad de establecer relaciones entre distintos sistemas de representación. Todo sistema de representación enfatiza unas propiedades del concepto y dificulta la percepción/comprensión de otras, es decir, no agota el concepto (Janvier, 1987, p.69).

El sistema gráfico de representación para las funciones se sustenta en un sistema de coordenadas cartesiano y ortogonal; una asignación de los valores de la variable independiente al eje horizontal o de abscisas; una asignación de los valores de la variable dependiente al eje vertical o de ordenadas; una interpretación de cada punto del plano dado mediante un valor de la abscisa y el correspondiente valor de su ordenada. Este es el sistema gráfico de representación usual en el nivel curricular de bachillerato para el concepto analítico de función (Rey Pastor, 1952, pp. 22-23). Con las siguientes particularidades para representar el límite de una función en un punto:

- La gráfica de la función es continua en un entorno reducido del punto x0, en el que se aborda el estudio del límite.
- El comportamiento de la función en x_0 se considera irrelevante, es decir, cómo está definida en el punto, o si no lo está.
- El concepto de límite involucra un proceso dinámico para el cual el sistema de representación gráfico es limitado y usualmente necesita de otros signos externos complementarios, tales como señales y movimientos de dedo, flechas, software dinámico, etc. para dotarle de carácter dinámico.

La figura 8.1 muestra diversos modelos gráficos de límite (Apostol, 1985, pp. 155, 166, 171). Entre estos modelos, el de oscilación se suele excluir por su excesiva complejidad para el nivel de Bachillerato, asumiendo la existencia de ambos límites laterales (finitos o infinito). El sistema de representación gráfico enfatiza aspectos topológicos de la tendencia, "entornos del límite se corresponden con entornos reducidos de x_0", con la limitación de que pudiera enfatizar otras propiedades no relevantes monotonía, acotación y no alcanzabilidad; propiedades intuitivas para los estudiantes.

Bajo los supuestos anteriormente descritos, podemos describir las concepciones de los estudiantes en términos de la relación que éstos establecen entre dos o más sistemas de representación (Duval, 2006, p.111). En este estudio, establecemos tres tipos de relaciones entre sistemas de representación:

- *Definición individual (Verbal) - Gráficas (Gráfico).* Esta relación está mediada por la verbalización de los argumentos correspondientes que formulan los estudiantes.
- *Definición individual (Verbal) - Argumento (Verbal).* Adquiere especial importancia plantear si el argumento correspondiente es una aplicación "coherente" de la definición. Describiremos la noción de coherencia en el siguiente apartado.
- *Argumento (Verbal) - Gráficas (Gráfico).* Esta relación tiene importancia cuando se carece de la definición individual del estudiante.

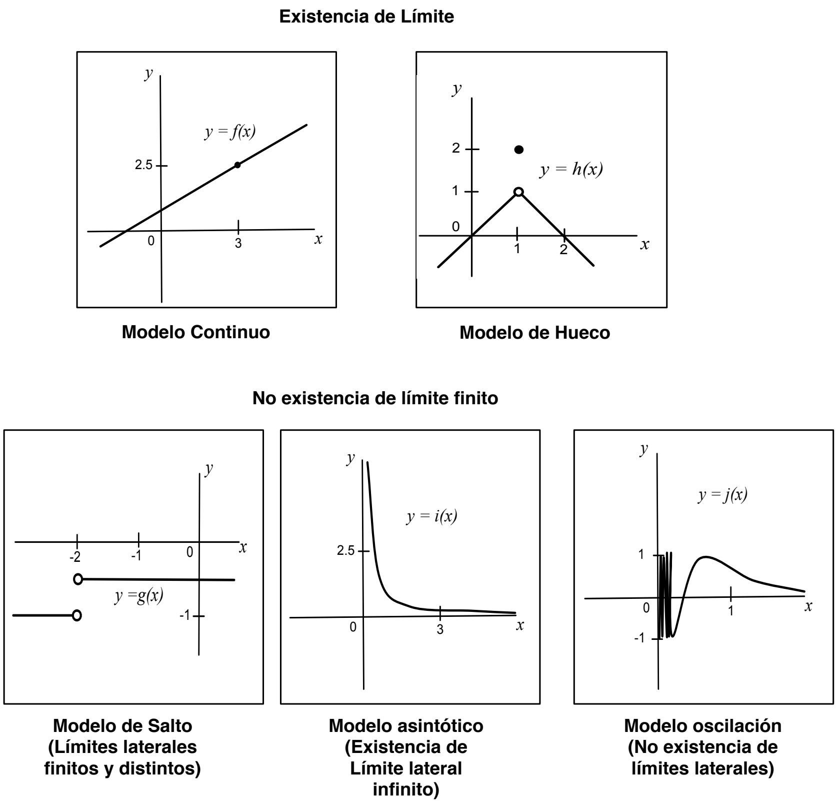


Figura 8.1. Modelos gráficos de límite de una función en un punto (Elaboración propia)

8.2.5. Coherencia entre concepciones y definiciones, tipos y análisis

Vamos a precisar la noción de coherencia que se emplea en la interpretación de los resultados de esta investigación. En primer lugar, esta noción será específica para el siguiente contexto:

- Describir la coordinación entre diferentes concepciones elementales; por un lado, la que emerge de la definición individual de un estudiante en respuesta a una tarea sintética; y por otro, las concepciones que emergen de los argumentos que éste plantea al decidir la existencia o no existencia de límite a partir de la interpretación de gráficas. Planteamos la cuestión sobre la pertinencia del constructo coherencia argumento-definición mediante la revisión de fuentes de información sobre la delimitación semántica del término "coherencia".

Con carácter general, el sentido que más conviene para el contexto específico descrito anteriormente es "actitud lógica y consecuente con una posición anterior" (RAE, 2001), es decir, caracterizar si el argumento de un estudiante se deriva lógica y consecuentemente de la posición anterior determinada por su definición individual.

Garbín y Azcárate (2002) emplean el término *incoherencia* para expresar que un estudiante responde de manera diferente a tareas equivalentes, salvo cambios de representación. Ese sentido de coherencia no se ajusta a nuestro contexto.

Vamos a definir el constructo coherencia argumento-definición basándonos en la noción de *coherencia referencial* (Alturo, 2010), mediante la cual dos fragmentos de texto son coherentes si comparten la misma referencia.

Los argumentos empleados en una deducción formal y la definición de la cual se derivan, no tienen que ser lógicamente equivalentes, sino que existe una relación de subordinación. Considerando que la propiedad característica de la definición es *D* (necesaria y suficiente), la propiedad característica de un argumento existencial es *P* y la propiedad característica de un argumento no existencial es *no P'*, expresamos en términos de relaciones de subordinación la noción de coherencia argumento- definición :

- *Uso coherente de condiciones suficientes de existencia.* Responde a la estructura lógica "f(x) verifica *P*, luego f(x) verifica *D*" es verdadera para toda función f(x) que satisfaga *P*.
- *Uso coherente de condiciones necesarias de existencia.* Responde a la estructura lógica "f(x) verifica no P', luego f(x) verifica no *D*" es verdadera para toda función f(x) que no satisface P'.

En tal caso, consideramos que existe *coherencia de primer nivel o plena* entre argumento y definición. Si no se satisfacen ninguna de las condiciones anteriores, puede ocurrir que los argumentos sean válidos en casos específicos, por lo que añadimos dos niveles más de coherencia:

- *Coherencia de 2º nivel.* Se caracteriza por el uso lógicamente inadecuado de propiedades necesarias o suficientes de existencia.
- *Coherencia de 3º nivel.* Se caracteriza por el uso lógicamente inadecuado de propiedades de existencia que no son necesarias ni suficientes.

Si un argumento contradice la definición individual en un caso específico, es *incoherente* respecto a esta.

8.3. Método

Se trata de un estudio descriptivo e interpretativo, basado en el método de encuesta con reactivos abiertos y cerrados. El cuestionario completo y las condiciones de su aplicación se encuentran detalladas en Fernández-Plaza (2011).

8.3.1. Instrumento y aplicación

La recogida de información se realizó mediante una batería de 10 tareas repartidas en dos cuestionarios de 5 tareas (cuestionarios A y B). Todos los sujetos realizaron la tarea común siguiente, si bien, únicamente los del cuestionario A serán los que la apliquen en la discusión de las gráficas:

> Escribe una definición personal, con tus propias palabras, para límite finito de una función en un punto.

Seleccionamos para este artículo la tarea número 2 del cuestionario A (figura 8.2.) que explicamos a continuación:

> Aplica tu definición personal de límite finito de una función en un punto a las funciones definidas por las siguientes gráficas y explica en cada caso si existe el límite en el punto indicado:

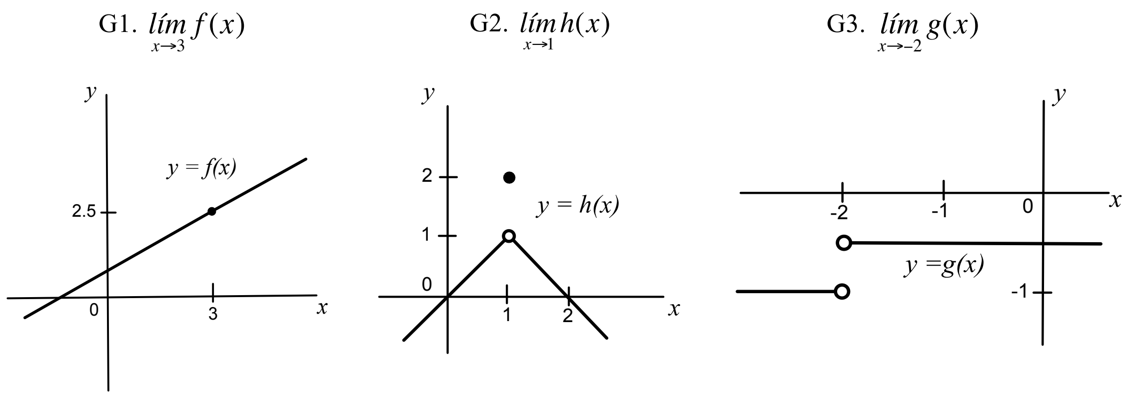


Figura 8.2. Enunciado de la tarea número 2 (Cuestionario A)

La estructura de esta pregunta responde a una serie de consideraciones y de variables. Así, en la tabla 8.2 se recoge una caracterización de las gráficas propuestas en términos de la definición en el punto, el modelo de límite que representa y propiedades del valor del límite como la rebasabilidad y alcanzabilidad.

Tabla 8.2. Caracterización de la tarea

Tarea/gráfica	Definición en el punto	Modelo de límite/continuidad	Propiedades
G1	Definida f(3)=2.5	Continuo	Alcanzable/Rebasable
G2	Definida f(1)=2	hueco	No alcanzable/No rebasable
G3	No definida	Salto	No existe límite

Sostenemos que una definición individual es más accesible para el estudiante que otra de referencia, noción que podría resultar incomprensible (Tall y Vinner, 1981). También facilita manifestar otras concepciones relacionadas, sin olvidar que la aplicación rigurosa de una definición requiere un mayor esfuerzo cognitivo.

Según la anterior caracterización de concepciones y definiciones, esta tarea es analítico/diagnóstica porque explora relaciones entre el sistema de representación gráfico y el verbal, en el que se expresan los argumentos y definición del estudiante. Disponer de las definiciones individuales previas permite caracterizar los errores de los estudiantes en confrontación con su definición individual.

8.3.2. Contexto y participantes

Seleccionamos de manera intencional y por disponibilidad a 36 estudiantes de la provincia de Granada de primer curso de Bachillerato, con edades comprendidas entre los 16 y 17 años, matriculados en un mismo grupo académico de la asignatura de Matemáticas de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Estos estudiantes recibieron instrucción previa ordinaria por parte de su profesor sobre la aproximación numérica intuitiva y la interpretación gráfica del concepto de límite, salvo las técnicas específicas de cálculo. Como guía de ejercicios y referencia utilizaron el libro de texto *Matemáticas 1 Bachillerato (Ciencias y Tecnología)* (Vizmanos y cols., 2008) y los apuntes propios del profesor.

La recogida de datos se llevó a cabo a mediados del curso académico 2010-2011 por el método de encuesta. El cuestionario se aplicó durante una sesión ordinaria de trabajo en la clase de matemáticas. 18 estudiantes del grupo seleccionados aleatoriamente realizaron el cuestionario A, que incluyó la tarea objeto de este estudio y los 18 restantes realizaron el cuestionario B, que no incluía dicha tarea y cuyo análisis no forma parte de este estudio.

8.4. Organización y análisis de los datos

Las unidades de análisis fueron los argumentos explicativos formulados por los estudiantes de manera independiente. Los datos se recogieron de los cuestionarios y se organizaron según el procedimiento que a continuación presentamos.

Por cada uno de los participantes se obtuvo una cuaterna formada por su definición, y los argumentos a favor de la existencia o no existencia de límite por cada una de las gráficas G1, G2 y G3. La información se organizó en forma de tabla de 18 filas, incluyendo en ellas las cuaternas de cada uno de los 18 estudiantes participantes en este estudio.

El análisis de los datos se realizó de forma cualitativa y cuantitativa en las siguientes fases.

- *Caracterización exhaustiva de los argumentos formulados por los estudiantes sin tener en cuenta su definición individual.*
- Nos centramos después en el *análisis de las ternas de argumentos*, con el fin de establecer perfiles. Un análisis clúster permite resumir la información disponible.
- Con el fin de confrontar los argumentos de los estudiantes con su definición individual, analizamos el *grado de coherencia entre la definición y el argumento*, registrando además si la definición no es válida para su aplicación por ser inconsistente.

Pasamos a describir el modo en que se obtuvieron los resultados del estudio.

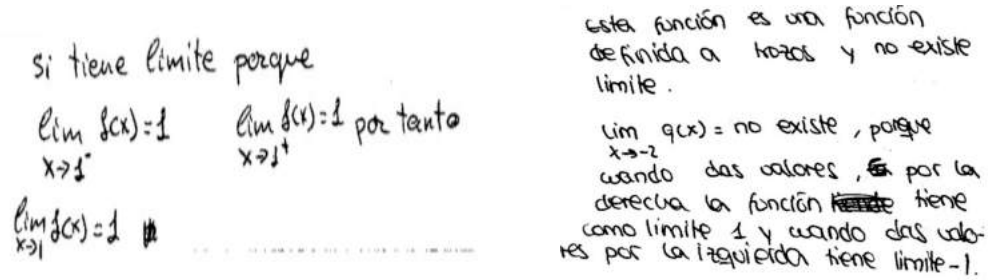
8.5. Discusión

Describimos el proceso seguido para obtener las categorías con las que organizar los argumentos identificados y recogidos en las respuestas de los estudiantes. Este proceso se hizo en cuatro pasos.

8.5.1. Interpretaciones gráficas generales. Concepciones elementales

Por el carácter exhaustivo de este análisis, las categorías empleadas emergen directamente de los datos y de conjeturas sobre qué puede originar tales argumentos. Este análisis se realiza para identificar las concepciones elementales de los estudiantes, sobre todo las de aquéllos que no han proporcionado una definición o la misma carece de aplicabilidad. Los argumentos acerca de la existencia y no existencia del límite de las funciones definidas por las gráficas G1, G2 y G3, se organizan en las siguientes categorías o concepciones elementales, que ejemplificamos:

- *Análisis y comparación de límites laterales* (Lim_Lat). Los argumentos describen la aproximación implícita o explícitamente lateral al punto en el que se realiza el estudio del límite, decidiendo la existencia o no existencia del límite por la igualdad o desigualdad de los límites laterales. Es el argumento característico de la instrucción recibida por los estudiantes y el del libro de texto (Ejemplos 1 y 2, figura 8.3).


si tiene límite porque

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ $\quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ por tanto

$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

esta función es una función definida a trozos y no existe límite.

$\lim_{x \to -2} g(x) =$ no existe, porque cuando das valores, por la derecha la función tiene como límite 1 y cuando das valores por la izquierda tiene límite -1.

Figura 8.3. Argumentos de existencia (Ejemplo 1, izquierda) e inexistencia (Ejemplo 2, derecha) de límite

- *Por continuidad visual / alcanzabilidad* (Cont_visual). Existe una interferencia provocada por la continuidad visual consistente en que la existencia de límite únicamente se corresponde con un modelo "continuo" o de "hueco completado", es decir, límite alcanzable. Se excluye el modelo de hueco (límite no alcanzable) (Ejemplo 3).

Ejemplo 3. [De no existencia, gráfica G2] "No existe límite, porque el número al que tiende el 1 no está en la función, sino que es un punto aparte"

- *Confusión del papel de las variables* (Var). Se considera que el límite es el valor de la variable independiente x, aunque el proceso puede involucrar ambas variables, afirmando sistemáticamente la existencia de límite con referencia a otras propiedades como la alcanzabilidad o la existencia de un salto (cambio brusco) (Ejemplo 4).

Ejemplo 4. [De existencia, gráfica G3] "Sí existe el límite de esta función a trozos ya que hay un punto dónde concluyen las dos rectas"

- *Rebasabilidad del candidato a límite* (Reb). Existen dos interpretaciones de esta propiedad:
    - *Rebasabilidad reducida.* Se busca la cota de la función en un entorno del punto excluyendo dicho punto (entorno reducido) y se comprueba si esa cota corresponde al punto, en tal caso existe el límite y es igual a dicha cota (Ejemplo 5).
    - *Rebasabilidad no reducida.* Consiste en la anterior interpretación y, además, comparar ese candidato con la imagen del punto (Ejemplo 6).

Ejemplo 5. [De existencia, gráfica G2] " Existe límite porque al llegar al punto 1 cambia de dirección la línea" (Su definición de límite es el número máximo que puede dar como resultado)

Ejemplo 6. [De no existencia, gráfica G2] " No es límite ya que aunque la función llega y pasa x=1 y no toca en ella en y=1, en y=2 un punto de la función aparece en x=1, por lo que no sería límite"

- *No alcanzabilidad del candidato a límite* (No Alcanz). Los argumentos son exactamente opuestos al de continuidad visual, el límite existe si y sólo si responde a un modelo de hueco, aunque se acompañan de una confusión de variables (Ejemplo 7) o la propiedad de no rebasabilidad (Ejemplo 8).

Ejemplo 7. [De existencia, gráfica G3] "Sí es el punto x=–2, ya que nunca tocará o pasará por ese punto"

Ejemplo 8. [De existencia, gráfica G2] " El límite sería 1 en esta función, ya que nunca llegaría a tocar o pasar por ese punto la función"

- *Necesidad de definición* (Img_Nec). Algunos argumentos ponen de manifiesto que es necesaria la definición en el punto para abordar la cuestión de límite (Ejemplo 9). Esta categoría no está relacionada con la denominada *Identificación entre límite e imagen* (Img), definida por la clásica consideración de la imagen como valor del límite en el punto.

Ejemplo 9. [De no existencia, gráfica G3] "No tiene límite porque para x= –2 no tiene imagen y por tanto no pertenece a g(x)" [*Este sujeto no atribuye el valor 2 al límite de la gráfica G2 sino su valor adecuado 1, por eso no interpretamos la identificación entre límite e imagen.*]

- *Cambio de sentido en las aproximaciones laterales* (Tend), es decir, identifican tender por la izquierda como tendencia a $-\infty$ y tender por la derecha como tender a $+\infty$, así las funciones G1 y G3 no tienen límite, y la función (b) sí tiene límite $-\infty$ (Ejemplos 10 y 11).

Ejemplo 10. [De existencia, gráfica G2] "Tiende a $-\infty$"

Ejemplo 11. [De no existencia, gráfica G1] "Por la izquierda es $-\infty$ y por la derecha es $+\infty$"

La tabla 8.3 resume las frecuencias de las categorías de argumentos identificados, relacionadas con cada una de las gráficas, teniendo en cuenta que algunas de ellas se pueden solapar.

Los datos ponen de manifiesto que el argumento basado en los límites laterales es mayoritariamente empleado para justificar la existencia de límite en las gráficas G1 y G2 (4 y 5 de 18, respectivamente), y poco utilizado (3 de 18) para discutir la no existencia de límite en la gráfica G3. La gráfica G3 ha provocado la mayor parte de los argumentos (6 de 18) que denotan una confusión de las variables (Categoría Var). El uso de la no rebasabilidad del límite (Categoría Reb) es relevante para justificar la no existencia de límite en la gráfica G1 (4 de 18). Las demás categorías de argumentos se dan con una baja frecuencia y constituyen casos singulares.

Tabla 8.3. Frecuencia absoluta de las categorías o concepciones elementales

Categorías	Gráficas		
	G1	G2	G3
Existencia			
Lim_Lat	4	5	0
Cont_visual	2	0	0
No Reb	0	2	1
No Alcanz	0	1	3
Var	1	0	6
Img	2	2	0
Tend	1	2	0
Total Existencia	9	11	6
No existencia			
Lim_Lat	0	0	3
Reb	4	1	0
Tend	1	0	1
Cont_visual	0	2	0
Img_Nec	0	0	2
Img	0	0	2
Total No existencia	5	3	8
NS/NC	4	4	4

8.5.2. Perfiles de desempeño general de la tarea

Al considerar las distintas concepciones elementales que expresan cada uno de los estudiantes observamos la presencia de distintas ternas de argumentos. Procedemos a la clasificación y análisis de las ternas de argumentos que los estudiante han asignado a las gráficas G1, G2 y G3. Con la identificación de esas regularidades se obtienen los perfiles, observando qué categoría o categorías de argumentos descritos en el apartado anterior emplea cada estudiante en al menos dos de las gráficas propuestas, siendo tales categorías las que dan nombre al perfil.

Los distintos perfiles detectados se muestran en la tabla 4 y los describimos a continuación:

- *Perfil "Límites laterales"*. Engloba a los sujetos que en la mayoría de sus argumentos hacen referencia al análisis de los límites laterales para decidir sobre la existencia del límite. Adicionalmente, introducen otros elementos de discusión como la rebasabilidad (gráfica G1), la necesidad de estar definida o reducción a la variable x para marcar un cambio de tendencia o corte en la gráfica (gráfica G3). Dentro de este perfil hemos encontrado 4 variedades de terna que organizan a 5 de los 18 estudiantes participantes.

- *Perfil "Continuidad visual"*. Engloba a los sujetos que en relación a las gráficas G1 y G2, únicamente tiene límite la función "visualmente continua" correspondiente a la gráfica G1. Paradójicamente, la función dada por la gráfica G3 evoca otras concepciones erróneas ligadas a la atribución de un valor límite a $x=-2$ donde existe un salto de tendencia. Dentro de este perfil existen dos variedades de terna correspondientes a 2 de los 18 estudiantes participantes. Aunque la categoría "Confusión de variables" (Var) es también frecuente, esta concepción es transversal a varios perfiles.
- *Perfil "Límite-Imagen"*. Los argumentos se caracterizan por la atribución sistemática de la imagen del punto al valor del límite en el mismo en las gráficas G1 y G2. Existe una única variedad de terna que organiza a 2 de los 18 estudiantes participantes.
- *Perfil "Rebasabilidad-Alcanzabilidad"*. Los argumentos se caracterizan por relacionar la existencia de límite con condiciones particulares de rebasabilidad y/o alcanzabilidad. Dentro de este perfil existen tres variedades de terna que corresponden a los 3 de los 18 estudiantes participantes. Es relevante que la categoría Var está presente en los argumentos de todos los estudiantes de este perfil correspondientes a la gráfica G3.
- *Perfil "Sentido de tendencia contrario"*. Singularmente, algunos sujetos consideran que la tendencia por la izquierda o por la derecha se corresponde con la tendencia a $-\infty$ y $+\infty$ respectivamente. No encontramos una conjetura razonable que explique esta malinterpretación de las gráficas. Las dos variedades de terna que presentan este perfil se corresponde con 2 de 18 estudiantes.

Estos perfiles abarcan las respuestas de 14 estudiantes. Los 4 estudiantes restantes no han dado respuesta a ninguna de las gráficas. Los perfiles organizan a la totalidad de los estudiantes que han respondido a los tres apartados de la tarea.

La tabla 8.4 consta de cinco columnas, la primera indica los nombres de los perfiles, la segunda numera las variedades de ternas de argumentos que incluye cada perfil, y las tres últimas denotan cada una de las gráficas G1, G2 y G3.

Cada fila muestra una terna de argumentos divididos por categorías (únicas o diversas) que abarcan las columnas (gráficas) en que se manifiestan, resaltando en gris las categorías predominantes, en función de las cuales se establecen los cinco perfiles resultantes que describimos. Esta tabla es similar a la obtenida mediante un análisis de conglomerados bietápico mediante el software estadístico IBM SPSS Statistics (v. 20)®.

Tabla 8.4. Perfiles y variedades de perfiles

<table>
<tr><th rowspan="2">Perfil
(frecuencia/total)</th><th rowspan="2">Variedad
de terna</th><th colspan="3">Gráficas</th></tr>
<tr><th>G1</th><th>G2</th><th>G3</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Límites laterales
(5/18)</td><td>(1)</td><td colspan="3">Lim_Lat</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>Reb</td><td colspan="2">Lim_Lat</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td colspan="2">Lim_Lat</td><td>Img_Nec</td></tr>
<tr><td>(4)</td><td colspan="2">Lim_Lat</td><td>Var</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Continuidad
Visual
(2/18)</td><td>(5)</td><td colspan="2">Cont_visual</td><td>Img_Nec</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(6)</td><td colspan="2">Cont_visual</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Var</td></tr>
<tr><td>Límite-Imagen
(2/18)</td><td>(7)</td><td colspan="3">Img</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Rebasabilidad/
Alcanzabilidad
(3/18)</td><td rowspan="3">(8)</td><td colspan="3">Reb</td></tr>
<tr><td colspan="3">Alcanz</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Var</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(9)</td><td colspan="2">Reb</td><td>Alcanz.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Var</td></tr>
<tr><td>(10)</td><td colspan="2">Reb</td><td>Var</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sentido de tendencia
Contrario
(2/18)</td><td>(11)</td><td colspan="3">Tend</td></tr>
<tr><td>(12)</td><td colspan="2">Tend</td><td>Var</td></tr>
</table>

8.6. Resultados

Consideramos los resultados y destacamos la coherencia de los argumentos con la definiciones personales.

8.6.1. Estudio de la coherencia de los argumentos

Hasta el momento no se ha tomado en consideración de qué manera las definiciones han sido aplicadas a cada una de las gráficas G1, G2 y G3. En este apartado analizamos la coherencia entre argumentos y definición, ya descrita en el marco del estudio.

Ejemplificamos tres grados de coherencia:

- *Coherencia de primer nivel o general.* Como se observa en el ejemplo 12, el argumento considera la negación adecuada de una condición necesaria de existencia de límite a la vista de la definición individual; en este caso la no rebasabilidad del límite.

  Ejemplo 12. [Definición] "Límite es el lugar del plano [asume que el límite puede ser x=1 o y=1] en el cual la función f(x) no llega a tocar o pasar. Límite se averigua dándole valores a x"

  [Gráfica G1] "No existe el límite ya que la función sigue hacia el infinito tras pasar por x=3" [*Uso en negación coherente de la no rebasabilidad por condición necesaria.*]

- *Coherencia de segundo nivel.* El ejemplo 13 muestra un argumento que es formalmente inadecuado al emplear una condición exclusivamente necesaria como suficiente de existencia, sin embargo, la gráfica no produce conflicto al aplicarse la definición individual.

  Ejemplo 13. [Definición] "Límite es el lugar del plano en el cual la función f(x) no llega a tocar o pasar. Límite se averigua dándole valores a x"
  [Gráfica G3] "Es límite ya que la función f(x) está en x=–2 pero no en –2 concretamente sino en los números cercanos a x=–2 como: –2'001 o –1'999" [*La no alcanzabilidad se emplea inadecuadamente como condición suficiente de existencia de límite, cuando además se requiere la no rebasabilidad del límite, aspecto que se contempla pues la función está acotada, por tanto, definición y argumento son coherentes exclusivamente en este caso*]

- *Coherencia de tercer nivel.* El ejemplo 14 muestra el énfasis de propiedades no necesarias ni suficientes para la veracidad de la definición individual, concretamente, la no rebasabilidad del límite, que no se deriva lógicamente de la definición que únicamente trata la aproximación y la no alcanzabilidad del mismo, sin embargo, la gráfica G1 no produce contradicción entre el argumento y la definición.

  Ejemplo 14. [Definición] "El límite de una función en un punto, es un número al cual la función se acerca pero nunca llega a tocar ese número"

  [Gráfica G1] "...No existe porque la función se extiende infinitamente" [*La rebasabilidad no es necesaria ni suficiente para que la definición sea cierta, sin embargo, en este caso definición y argumento justifican la no existencia de límite.*]

- *Incoherencia.* El ejemplo 15 muestra que la gráfica G3 provoca una contradicción entre el argumento y la definición individual, dado que justifican hechos opuestos.

  Ejemplo 15. [Definición] "Límite de la función en un punto, es aquel punto al que tiende la función siendo sustituida en la función la x por un número dado (x→a)"

  [Gráfica G3] "Es una función con desarrollo lineal discontinuo. Sí existe el límite ya que hay un punto donde concluyen las dos rectas" [*Incoherente, porque según la definición el límite no existe*]

- *Inconsistencia de la definición.* La cuestión sobre la coherencia argumento-definición no tiene lugar. Definiciones como "Cuando una función tiende a un número da su límite", (¿qué es tender?), "El límite de una función en un punto es el número que limita la función al tender la x de un número", (límite es lo que limita, pero ¿es realmente lo que acota?) presentan debilidades lógicas, entre ellas, circularidad y términos con ambigüedad de sentido.

La tabla 8.5 incluye el análisis descriptivo de frecuencias de los diversos tipos de coherencia y definiciones inconsistentes encontrados.
A la vista de las tablas 8.4 y 8.5 formulamos que aquellos estudiantes que han planteado una definición inconsistente (5 de 18) (no expresan adecuadamente la referencia), teóricamente han aportado argumentos a partir de su propia intuición o se apoyan en otros conocimientos previos.

Tabla 8.5. Tipos de coherencia desglosados por apartados de la tarea

Tipo de coherencia	Gráfica G1	Gráfica G2	Gráfica G3
Coherencia de 1º Nivel	5	6	4
Coherencia de 2º Nivel	0	0	1
Coherencia de 3º Nivel	2	0	2
Incoherencia	5	6	5
Definición inconsistente	5		
No definición	1		

Los argumentos con coherencia de 2º Nivel son escasos, al igual que los de 3º nivel. Sin embargo, ambos tipos de argumentos no contradicen la definición en ejemplos específicos, de ahí que reconozcamos su coherencia. Interpretamos que los estudiantes hacen uso de otras intuiciones que "se añaden" *ad hoc* a su definición individual.

Por otro lado, los argumentos incoherentes o contradictorios con la definición individual dan cuenta de interferencias en la relación entre el signo (gráficas) y la referencia (propiedades emergentes de la definición individual). Es posible que las gráficas propuestas hayan promovido otras intuiciones que la definición individual previa no ha podido controlar, por ejemplo, la confusión de las variables provocada por la función G3 contradice la definición individual de límite como "Límite es el valor que se obtiene de sustituir x por un número dado" (Ejemplo 13).

8.7. CONCLUSIONES

Presentamos un balance del estudio según los objetivos de investigación propuestos.

O.1. Describir las concepciones de los estudiantes manifestadas por la aplicación de su definición individual en una tarea de interpretación de gráficas relacionadas con el concepto de límite finito de una función en un punto.

En la primera parte del análisis hemos definido 7 categorías de argumentos en las concepciones elementales que los estudiantes emplean para justificar la existencia, o no, de límite con las gráficas G1, G2 y G3 (véase tabla 8.3). Estas categorías no requieren la definición individual de los estudiantes, que podría no existir.

En la segunda parte del análisis de datos, las ternas de concepciones elementales (cada gráfica moviliza al menos una concepción elemental) se resumen en 5 perfiles de sujetos según las categorías predominantes (véase tabla 8.4), algunos de los cuales podemos expresar como pares antagónicos:

- Análisis y discusión de límites laterales (Perfil "Límites laterales") - Alteración del sentido de la tendencia lateral (Perfil "Tendencia en sentido contrario")
- Conexión entre límite e imagen (Perfil "Límite-Imagen") - Conexión entre límite y continuidad de la gráfica (Perfil "Continuidad visual")
- Propiedades de rebasabilidad o alcanzabilidad del candidato al límite (Perfil "Rebasabilidad-Alcanzabilidad")

La descoordinación de variables y la correspondiente identificación del valor del límite con la abscisa del punto en el cual se estudia el límite (Categoría Var) es transversal a casi todos los perfiles (véase tabla 8.4).

Planteamos las siguientes conjeturas como continuidad del estudio:

- El perfil "Límite-Imagen" (Ejemplo 9) puede venir fomentado por la malinterpretación de la relación entre los conceptos de límite finito de una función en un punto y su continuidad en el punto dada simbólicamente $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, ya que puede derivarse erróneamente la regla de asignar a cualquier función la imagen como límite. Estos sujetos transforman en continua cualquier función definida en un punto.

- Por otro lado, el perfil "Continuidad-Visual" (Ejemplo 3) puede ser fruto de la malinterpretación de la relación entre los conceptos de límite finito de una función en un punto y su continuidad dada gráficamente, evocando las creencias "Límite es siempre alcanzable"; "no existen huecos"; "siempre hay continuidad".
- La tendencia en sentido contrario (Ejemplos 10 y 11) pudiera deberse a malinterpretación del lenguaje simbólico empleado para los límites laterales o a la resistencia a aceptar la no existencia de límite (Blázquez y Ortega, 1998). Algunos estudiantes parecen asociar el significado de límite como "instante en el se produce un cambio brusco del comportamiento de un sistema o relación funcional" como se percibe en la gráfica G3.

O.2. Valorar la coherencia entre la definición individual sobre límite finito de una función y los argumentos aportados acerca de su existencia en un punto, a partir de la información contenida en las gráficas.

En la tercera parte del análisis de datos, profundizamos en la aplicación de la definición individual estableciendo diferentes niveles de coherencia entre argumento y definición. Los niveles de coherencia se caracterizan mediante las nociones lógicas de condición suficiente y necesaria, contradicción e inconsistencia de la definición. Es relevante que exista el mismo número de estudiantes que aplican coherentemente su definición individual (Coherencia de primer nivel), que de aquellos que la aplican con contradicción (Incoherencia) para cada una de las gráficas G1, G2 y G3, y estudiantes que plantean una definición inconsistente (véase tabla 8.5).

La aplicación incoherente de la definición individual justifica la insuficiencia de dicha definición para sostener otras concepciones evocadas por la gráfica que la contradicen. Las aplicaciones con coherencia de segundo y tercer nivel también manifiestan otras concepciones, pero las gráficas particulares no provocan contradicción entre la definición individual (aplicada por los investigadores) y la concepción (la interpretación de la respuesta concreta del estudiante).

Como implicación práctica, consideramos que el procedimiento de definir debiera introducirse con tareas que involucren el análisis y discusión de propiedades de los conceptos en diversidad de sistemas de representación seguidas de tareas que obliguen a la síntesis de qué propiedades caracterizan el concepto y cuáles son superfluas. Evidencias de esta necesidad son las incoherencias entre los argumentos que planteaban los estudiantes (concepciones elementales) y su definición individual (concepción sintética), aparte de las debilidades lógicas de su definición individual que obligaron a los estudiantes a recurrir a otras intuiciones para construir sus argumentos.

8.8. Referencias

Alturo, N. (2010). Coherencia Discursiva: Dimensiones Contextual, Conceptual y Gramatical. *Círculo de Lingüística Aplicada a la Comunicación*, *41*, 3-30.

Apostol, T. M. (1985). Calculus (2ª ed.). Barcelona: Reverté.

Azcárate, C., y Camacho, M. (2003) Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 135-149.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*. Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Blázquez, S., y Ortega, T. (1998). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula*, *10*, 119-135.

Blázquez, S., Gatica, N., y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *12*(1), 145-168.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22th PME International Conference*, vol. 2, pp. 248–255. Stellenbosch, South Africa: PME.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In Janvier, C. (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Edwards, B. S., Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 15-25.

Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio Exploratorio*. Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J.F., Rico, L., y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, *7*(3), 117-131.

Garbín, S., y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, *20*(1), 87-113.

Gutiérrez, A. & Boero, P. (Eds.) (2006). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education : Past, Present and Future.* Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 27-50.

Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking: Some PME Perspectives. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 147-172). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Pecharromán, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: Representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(3), 121-134.

Real Academia Española [RAE] (2001). *Diccionario de la lengua española* (22ª Ed). Madrid: Autor. Recuperado de http://www.rae.es

Rey Pastor, J. (1952). *Elementos de la teoría de funciones.* Madrid: el Autor.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39-63.

Roth, W.M., & Thom, J.S. (2009). Bodily experience and mathematical conceptions: From classical views to a phenomenological reconceptualization. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 175-189.

Selden, A., & Selden, J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 1-13.

Sierra, M., González, M.T., y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de bachillerato y curso de orientación universitaria sobre límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *3*(1), 71-75.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, *7*(4), 765-790.

Tall, D.O. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). New York: MacMillan.

Tall D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *12,* 111-129.

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vizmanos, J.R., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., y Serrano, E. (2008). *Matemáticas. 1 Bachillerato (Ciencias y Tecnología).* Madrid, España: Editorial SM.

Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a Constructive Activity. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 3-17). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Ward, E., Inzunsa, S., Hernández, S., y López, F. (2013). Conceptualización y uso de representaciones sobre el concepto de límite en docentes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 523-533). Bilbao: SEIEM.

Zandieh, M., Roh, K. H., & Knapp, J. (2014). Conceptual blending: Student reasoning when proving "conditional implies conditional" statements. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 209-229.

Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' Conceptions of a Mathematical Definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 317-346.

Capítulo 9

Discusión y Conclusiones

En este capítulo detallamos los aportes, limitaciones y líneas de continuidad más relevantes de la investigación reportada en esta memoria. Los aportes se organizan en primer lugar en la revisión y profundización del modelo teórico de significado de un concepto matemático escolar para el concepto de límite finito de una función en un punto. El análisis conceptual de los términos específicos relacionados (véase sección 2.3) complementa el estudio de los sentidos o modos de uso del concepto de límite finito de una función en un punto. En segundo lugar, resumimos los aportes empíricos y el grado de consecución de los objetivos específicos propuestos. Finalmente detallamos algunas de las limitaciones que han surgido en este estudio y las cuestiones abiertas que dan continuidad al trabajo.

9.1. Significado del concepto de límite finito de una función en un punto

Concretamos el modelo de significado correspondiente al concepto de límite finito de una función en un punto para la etapa educativa de Bachillerato, que consta de la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología concebida como los sentidos o modos de uso de dicho concepto.

9.1.1. Estructura conceptual del concepto de límite finito de una función en un punto

Podemos establecer tres niveles de análisis de la estructura conceptual relacionada con la noción de límite finito de una función en un punto.

En un primer nivel *algebraico* de estudio se encuentra la estructura conceptual correspondiente a la noción de función real de variable real. Esta estructura destaca los hechos y destrezas relacionados con la variable independiente, la variable dependiente y la regla de correspondencia, así como la estructura operatoria correspondiente a las operaciones de suma, producto y producto por escalares entre las funciones reales de variable real. Disponemos por tanto de una función f: A→B, $y=f(x)$.

Este primer nivel algebraico de la estructura conceptual se completa considerando que aquellas sucesiones cuyos términos son elementos del dominio de la función (valores de la variable independiente $\{x_n\}$ en A) se transforman mediante la regla de correspondencia de la función f en sucesiones $\{f(x_n)\}$ en B.

Un segundo nivel de análisis es el *topológico*, cuyo foco se centra en el conjunto $\mathbb{R}$ y en cualquiera de sus subconjuntos. Para dotar de entidad matemática a las nociones de cercanía, aproximación o tendencia en dicho conjunto, consideramos su estructura *topológico-métrica*. Esta estructura viene establecida bien por una topología general, o bien por una distancia o métrica. En el nivel curricular de bachillerato, la topología no viene establecida por un sistema fundamental de entornos arbitrario sino que la establece la métrica, dada por la distancia usual en $\mathbb{R}$ (valor absoluto de la diferencia), cuyos entornos básicos son los intervalos abiertos centrados en un punto, de radio positivo no nulo.

La estructura topológico-métrica permite definir la noción de punto de *acumulación* de un conjunto A y de tendencia a dicho punto, es decir, cualquier entorno del punto incluye puntos del dominio diferentes a dicho punto. Dicho en términos intuitivos, podemos encontrar en el dominio aproximaciones del punto para cualquier orden de aproximación (ajuste a las décimas, centésimas, milésimas, etc.). Si a es un punto de acumulación del dominio funcional, la notación $x \to a$ expresa que dado cualquier orden de aproximación o cota de error existe un entorno reducido del punto $x=a$ que mejora dicha aproximación o cota de error. En particular, existe una familia de sucesiones $\{x_n\}$ con $x_n \neq a$, tal que $\{x_n\}$ converge a $x=a$. Si integramos estos dos primeros niveles, disponemos por tanto de la función f: A→B y un punto de acumulación $x=a$ de A, y de la tendencia de la variable independiente x al punto $x=a$. Enfatizamos que la tendencia se debe en un primer aspecto al *orden* de los elementos x_n que induce el conjunto $\mathbb{N}$, y en un segundo aspecto a las propiedades de la *topología* subyacente en el conjunto A.

En un tercer nivel de análisis, una vez dotado el conjunto B de otra estructura topológico-métrica, que en el nivel de bachillerato es la misma que la del conjunto A, observamos que el conjunto imagen $f(\mathrm{A})$, por sí mismo carece de "dinamismo". Esto quiere decir que no siempre se puede hablar de acumulación dentro del mismo, por ejemplo, si es un punto aislado en el caso de que f sea una función constante.

Para ello, en este tercer nivel, que integra a las estructuras algebraica y topológica, consideramos la correspondencia entre sucesiones de elementos $\{x_n\}$ y sucesiones de elementos de la imagen dada por $\{f(x_n)\}$. En este caso, tiene sentido considerar la tendencia de las sucesiones $\{f(x_n)\}$ en el conjunto B, con independencia de la tendencia de la sucesión $\{x_n\}$ en A.

Sin embargo, el concepto de límite de una función en un punto requiere que la tendencia de $\{x_n\}$ al punto $x=a$ con x_n distinto de a se transfiera mediante la regla de correspondencia f a la tendencia de $\{f(x_n)\}$ a un mismo valor L. Esta estructura corresponde con una representación *discreta.* Se puede demostrar que basta exigir únicamente la convergencia de $\{f(x_n)\}$ para cualquier sucesión $\{x_n\}$ convergente al punto $x=a$ con x_n distinto de a, para deducir que la convergencia de tales sucesiones es hacia el mismo punto.

Por otro lado, cualquier entorno V de L tiene una antiimagen $f^{-1}(\mathrm{V})$ que es un subconjunto del dominio funcional. La caracterización anterior permite afirmar que la antiimagen ha de contener un entorno reducido de $x=a$. Esta es la representación *continua.*

Para refinar todas las relaciones del tercer nivel introducimos otra noción asociada al concepto de límite de una función en un punto, que es la noción de *límite lateral*, consistente en introducir sendas topologías (más finas que la de los entornos centrados en $x=a$), cuyas bases fundamentales de abiertos sean semientornos de extremo superior (límite lateral por la izquierda) o inferior (límite lateral por la derecha) $x=a$, respectivamente. La existencia del límite de una función en un punto se caracteriza entonces como la existencia e igualdad de los límites laterales correspondientes.

La estructura algebraica del conjunto de las funciones con un mismo dominio A dota al espacio de funciones convergentes en $x=a$ punto de acumulación de A de estructura de $\mathbb{R}$-álgebra para la suma, producto por escalares, y producto usual. Además, el operador $\lim\limits_{x\to a}(\_)$ que asocia a cada función convergente el correspondiente límite en $x=a$ conserva la estructura. La división en este espacio no es cerrada "en general" cuando el límite del divisor en $x=a$ es 0.

Existen otras dos estructuras que se emplean de manera "transversal" para resaltar propiedades del concepto en ejemplos concretos, que suelen ser generalizadas inadecuadamente por los escolares.

- *Estructura bornológica.* El orden usual $\mathbb{R}$ permite referir a la propiedad de rebasabilidad o no del límite, empleando términos como "limitar", "rebasar", "sobrepasar" o "superar". Toda función que tenga límite finito en un punto está localmente acotada, es decir, está acotada en cualquier entorno reducido del punto de radio más pequeño que un cierto valor. No siempre los supremos e ínfimos son iguales al límite sino que suelen diferir en cualquier cantidad arbitrariamente pequeña. Por ejemplo, la función $f(x)=x^2$ está localmente acotada en cualquier entorno reducido de $x=0$, $(-\delta, \delta)-\{0\}$, por los valores 0 (cota inferior y límite) y δ^2 (cota superior), sin embargo, en $x=1$, las cotas inferior y superior son $(1-\delta)^2$ y $(1+\delta)^2$. Este hecho suele interpretarse con que el límite es un valor que no se puede alcanzar ni rebasar.
- *Estructura relacional de igualdad.* Se refiere a la propiedad de alcanzabilidad o no del límite, empleando términos como "tocar", "llegar", o "llegar a tocar", que corresponden a si los valores de los procesos $\{f(x_n)\}$ pueden tomar el valor del límite, equivalentemente, si el límite es imagen de algún valor $x\neq$a. Si f(a) es igual al límite, se entenderá como *alcanzabilidad por continuidad.*

9.1.2. Sistemas de representación del concepto de límite finito de una función en un punto

Los sistemas de representación del concepto de límite finito de una función en un punto se clasifican como *verbal, numérico*, *simbólico y gráfico.*

El sistema de representación verbal comprende los enunciados que incluyen como términos básicos "converger", "aproximar", "tender", "alcanzar", "rebasar" y "límite".

El sistema de representación numérico describe una discretización del concepto. Si se estudia el límite de una función en el punto $x=0$, el sistema de representación numérico emplea una cantidad discreta de valores de x que tienden a 0, por ejemplo, 0'1, 0'01, 0'001, … y se observa que los valores f(0'1), f(0'01), f(0'001)… tienden a L. Sin embargo, es insuficiente para explorar el comportamiento global de la función en un entorno de $x=0$, es decir, es insuficiente para describir que para cualquier $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$, tal que $f((-\delta, \delta)-\{0\})$ está contenido en $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

El sistema de representación simbólico se caracteriza por la notación específica del límite, $\lim_{x \to x_0} f(x)$, y de los límites laterales, $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, derecha y $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, izquierda, las reglas de cálculo de límites y la definición formal de límite. Este sistema se ha de coordinar con el numérico, que permite intuir el límite, porque la definición formal únicamente indica criterios bajo los cuales un determinado valor es límite de la función en un punto, pero no la existencia del mismo (Sánchez-Compaña, 2012).

El sistema gráfico de representación para las funciones se sustenta en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal; una asignación de los valores de la variable independiente al eje horizontal o de abscisas; una asignación de los valores de la variable dependiente al eje vertical o de ordenadas; una interpretación de cada punto del plano dado mediante un valor de la abscisa y el correspondiente valor de su ordenada. Éste es el sistema gráfico de representación usual en el nivel curricular de bachillerato para el concepto analítico de función (Rey Pastor, 1952, pp. 22-23).

Este sistema presenta las siguientes particularidades para representar el límite de una función en un punto:

- La gráfica de la función es visualmente continua en un entorno reducido del punto x_0, en el que se aborda el estudio del límite.
- El comportamiento de la función en x_0 se considera irrelevante, es decir, cómo está definida en el punto, o si no lo está.
- El concepto de límite involucra un proceso dinámico para el cual el sistema de representación gráfico es limitado y usualmente necesita de otros signos externos complementarios, tales como señales y movimientos de dedo, flechas, software dinámico, etc. para dotarle de dinamismo.

La figura 9.1 muestra diversos modelos gráficos de límite (Apostol, 1985, pp. 155, 166, 171). Entre estos modelos, el de oscilación se suele excluir por su excesiva complejidad para el nivel de Bachillerato, asumiendo la existencia de ambos límites laterales (finitos o infinito).

El sistema de representación gráfico enfatiza aspectos topológicos de la tendencia, “entornos del límite se corresponden con entornos reducidos de x_0”, reflejando el carácter continuo del proceso, no obstante, las gráficas que incluyen los libros de texto, suelen mostrar tendencias laterales monótonas que pudieran potenciar una interpretación del límite como no rebasable o no alcanzable.

Un modo alternativo de introducir representaciones gráficas sugerida por Guzmán (1997) y Blázquez, Gatica y Ortega (2009) que pudieran superar esta debilidad lo adaptamos en el siguiente enunciado:

Dada una banda de anchura épsilon colocada horizontal centrada en L, la condición para que el límite de $f(x)$ en x sea L es que exista una banda de anchura delta colocada verticalmente y centrada en x_0, de manera que, la gráfica de la función entre y salga por los lados laterales de la región rectangular acotada correspondiente, es decir, la intersección entre las dos bandas, y nunca por encima o por debajo, pudiendo adoptar la forma arbitraria entre el extremo de entrada y el de salida (Figura 9.2).

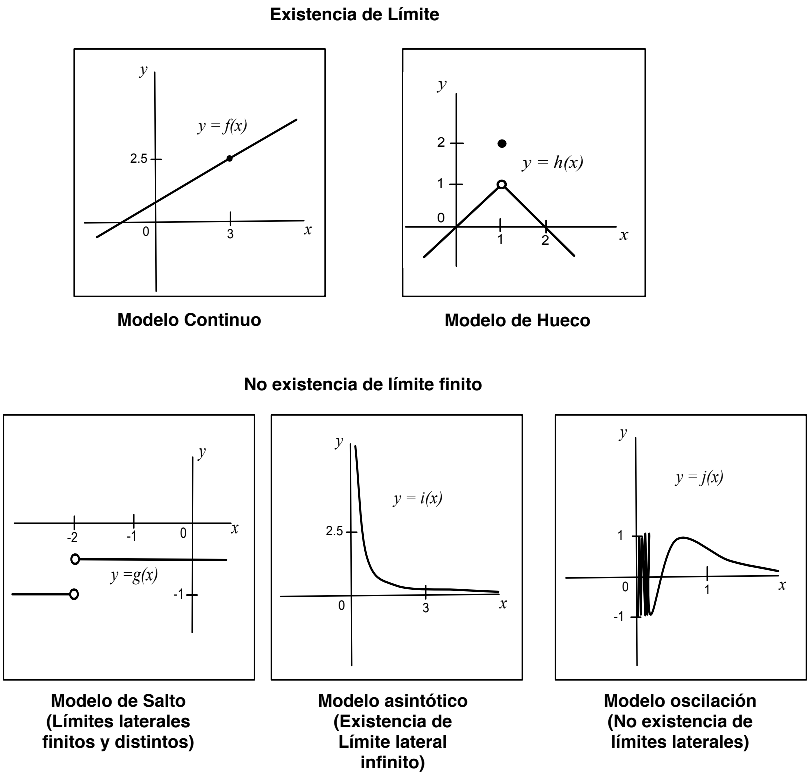


Figura 9.1. Modelos gráficos de límite de una función en un punto (Elaboración propia)

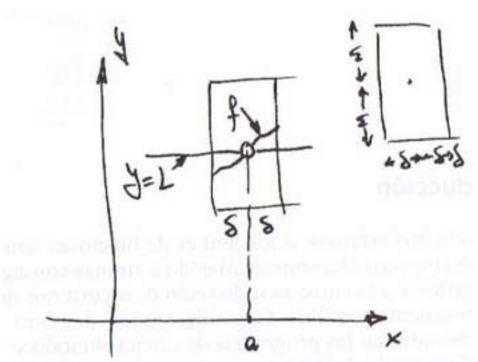


Figura 9.2. Modelo gráfico de la caracterización épsilon-delta de límite finito de una función en un punto (Guzmán, 1997, p. 160).

Finalmente, Hitt (2003) señala limitaciones del uso de la tecnología para abordar la represesentación gráfica de funciones, tales como el umbral de percepción del observador o inferencias erróneas debidas a las dimensiones restringidas de la "ventana de representación". Para el caso del concepto de límite finito de una función en un punto, detectamos que algunos softwares dinámicos (v.g., Geogebra) no distinguen gráficamente entre el modelo continuo y el de hueco, siendo tal distinción establecida exclusivamente en el registro algebraico (imposibilidad de evaluar en el punto de discontinuidad evitable; Geogebra devuelve *indefinido*).

9.1.3. Sentidos y fenómenos asociados al concepto de límite finito de una función en un punto

Podemos establecer tres sentidos o modos de uso escolares relacionados con la noción de límite finito de una sucesión o de una función en un punto.

Un primer sentido lo denominamos de *convergencia* o *dinámico.* Se expresa mediante los términos "tender" y "aproximar", por ejemplo, "una variable real x tiende a L" responde a que cualquier aproximación de L es mejorable por los valores de la variable x distintos de L, o bien, que hay un procedimiento o secuencia de valores que aproxima arbitrariamente el valor L. En el caso del límite L de una función f en $x=a$, existe un procedimiento que relaciona aproximaciones de a con aproximaciones de L vía f. Los estudiantes manifiestan este sentido cuando ejemplifican situaciones dinámicas de aproximación progresiva al límite, si bien, pueden incurrir en una descoordinación de los procesos de convergencia de las variables que llevan a identificar el límite únicamente con el valor de la abscisa del punto o considerar que la variable dependiente de forma aislada se aproxima al valor del límite. Los límites laterales de una función en un punto a son casos particulares de convergencia para topologías con bases fundamentales de entornos mas finas que las de los entornos abiertos centrados en el punto a, bien por semi-abiertos a la derecha o a la izquierda de dicho punto.

Un segundo sentido se denomina *estático* o de *valor de la función.* Se contempla cuando el límite de una función en un punto se obtiene mediante la evaluación de la función en dicho punto; sin embargo, el fundamento de dicho procedimiento es dinámico ya que se basa en el sentido de *convergencia.* Hemos comprobado que los estudiantes que consideran este sentido de manera sistemática suelen presentar dificultades para argumentar el sentido de convergencia que lo fundamenta.

Un tercer sentido es el de *restricción.* El límite en ejemplos concretos presenta la pecularidad de no ser rebasable, es decir, L$\leq$ min(f) o L$\geq$ max(f) expresable con los términos "no exceder", "no sobrepasar", "no pasar de", "máximo", o bien de no ser alcanzable (L $\notin$ Img(f)) expresable con los términos "no llega", "no alcanza", "no toca". Los estudiantes pueden considerar también este sentido de manera sistemática.

Estos tres sentidos pueden encontrarse combinados de manera simultánea en las definiciones que los estudiantes proponen para explicar el límite finito de una función en un punto.

Por otro lado, el concepto de límite finito de una función en un punto se identifica en dos tipos de fenómenos, de existencia y de no existencia, que a su vez se representan mediante sistemas de notaciones discretas o continuas.

En los fenómenos de existencia, aunque la imagen en el punto no tiene ninguna relevancia, podemos incluirla para discriminar entre el *modelo continuo* y el *modelo de hueco* (si la función no está definida en el punto o de forma diferente al límite). Consideramos dos modos de uso para fenómenos de existencia, que se identifican por los sistemas de representación utilizados.

- *Discreto.* El sistema de representación numérico, por limitaciones físicas, refleja únicamente la correspondencia entre una familia discreta de valores de x que se aproximan al punto y sus imágenes que se aproximan al límite. Este enfoque presenta debilidad para caracterizar la existencia del límite, pero en una introducción al concepto, resulta ilustrativo para intuir el límite. De todas formas, este nivel es necesario en un contexto formal para proponer un candidato a límite, tal y como propone Sánchez-Compaña (2012).
- *Continuo.* Los sistemas de representación simbólico y gráfico reflejan el proceso "completo" relacionado con el concepto de límite. Reflejan la correspondencia entre entornos arbitrarios del límite y entornos reducidos centrados en el punto y que caracterizan la existencia de límite.

Por otro lado, los fenómenos de no existencia responden a una mayor variedad de comportamientos de una función en un entorno reducido del punto. En este caso adquiere especial relevancia la toma en consideración de los límites laterales cuya casuística da lugar a tres tipos de representaciones.

- *Salto de la función en el punto.* Los dos límites laterales existen y son finitos pero son diferentes. Este hecho se puede interpretar tanto en su sentido discreto como continuo.
- *Comportamiento lateral asintótico.* Al menos uno de los dos límites laterales es infinito. Este hecho también se puede interpretar en su sentido discreto y continuo.
- *Oscilación en el punto.* No existe alguno de los límites laterales. Por ejemplo, $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$. Se observa que las sucesiones $\{2/\pi \mathrm{n}\}$ y $\{1/\pi \mathrm{n}\}$ tienden a 0 por la derecha, pero $\{sen(\pi \mathrm{n}/2)\}$ oscila tomando valores 1, -1 y 0, mientras que $\{sen(\pi \mathrm{n})\}$ es constantemente 0. La función de Dirichlet, definida como 1 en los racionales y -1 en los irracionales, no es

continua en ningún punto, y la única forma de abordarla es mediante discretizaciones apropiadas.

Una conveniente discretización de los mismos justifica la no existencia de límite, pero para discriminar entre los modelos de salto y asintótico se necesita interpretar de manera continua (determinar los límites laterales finitos e infinitos respectivamente), sin embargo, el modelo de oscilación únicamente requiere de discretizaciones laterales que converjan a límites diferentes para discriminarlos.

Finalmente, en contextos de modelización, una misma situación puede modelarse atendiendo tanto a un modelo continuo como discontinuo, por ejemplo, las funciones elementales (modelos continuos) graficadas en el ordenador están discretizadas (modelo de salto), pero esta discretización es imperceptible a cierta distancia del observador que lo interpretará de manera continua.

9.2. LOGRO DE LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS

En relación con el objetivo general de esta investigación encaminada a caracterizar el significado que un grupo de estudiantes de Bachillerato atribuye al concepto de límite finito de una función en un punto con posterioridad a la recepción de la instrucción ordinaria correspondiente, detallamos el grado de consecución de los objetivos específicos establecidos:

O.1. Diseñar un cuestionario de respuesta abierta para recoger información relativa a las concepciones de los estudiantes en sus aspectos analítico, sintético y aplicado.

En el capítulo 3 se detalla el diseño del cuestionario y la caracterización del mismo en términos del modelo teórico de significado que presentamos en el apartado anterior y del tipo de información que se pretende recabar.

De los capítulos 5 y 6 concluimos que aunque los enunciados A1, A2, A3, B1, B2 y B3 proceden de investigaciones previas, su implementación en el contexto particular de esta investigación produce resultados que concuerdan con tales investigaciones, las precisan y les añaden nuevas aportaciones.

Del capítulo 7 concluimos que la cuestión que requiere plantear una definición personal recoge *a priori* información específica de la idea general de límite funcional que expresan los estudiantes, y *a posteriori*, la singular influencia de las respuestas a las cuestiones anteriores hace que el instrumento recoja información relativa a la síntesis de una definición individual a partir de algunas propiedades anteriormente discutidas.

Finalmente del capítulo 8 concluimos que la cuestión que requiere aplicar una definición individual a la discusión de gráficas recoge *a priori* argumentos acerca de la existencia o inexistencia de límite con independencia de la respuesta dada o no a la cuestión acerca de la definición individual, y *a posteriori,* la disponibilidad tanto de argumentos como de la definición individual hace que el instrumento recoja información relativa al grado en que un determinado argumento se deriva lógica y consecuentemente de la definición individual.

Concluimos finalmente que el instrumento empleado muestra la potencia del marco teórico seguido, lo cual ha permitido identificar, describir e interpretar una mayor variedad y riqueza de significados que los inicialmente previstos; la fuerza y capacidad del instrumento de observación y el marco de análisis han permitido recoger y documentar más información de la inicialmente prevista.

O.2. Caracterizar las concepciones analíticas de los estudiantes cuando discuten la veracidad o falsedad de enunciados relacionados con el concepto de límite finito de una función en un punto. Analizar los modos de uso de los términos específicos "aproximar", "tender", "alcanzar", "rebasar" y "límite".

En el capítulo 2 se detalla el análisis conceptual de los términos específicos "aproximar", "tender", "converger", "alcanzar", "rebasar", "límite", que proporcionan un marco interpretativo para clasificar los términos efectivos que los estudiantes han empleado para expresar sus argumentos.

Este objetivo específico se aborda en los capítulos 5 y 6 cuyos resultados acerca de las concepciones analíticas resumimos a continuación:

- Existen concepciones que manifiestan un *sentido dinámico o de convergencia* de la noción de límite, las cuales presentan las siguientes características discriminantes:
    - Que incluyan referencia concreta a las condiciones laterales de dicha convergencia.
    - Que incurran en una descoordinación de los procesos de convergencia en ambas variables, identificando el límite funcional con el límite de las abscisas, o bien, con el valor de la función en el punto empleando expresiones imprecisas tales como "valor al que se aproxima la función".
    - Que consideren el límite como un proceso en vez de como un resultado del mismo.

  - Que enfaticen las restricciones sobre la precisión de la aproximación al límite debidas al procedimiento de cálculo en la práctica sin asumir el carácter infinito potencial del proceso de convergencia.
- Existen concepciones que manifiestan un *sentido estático o de valor de la función en el punto* al enfatizar que el límite se alcanza con un número finito de aproximaciones o bien evaluando la expresión funcional en el punto.
- Finalmente, se contemplan las concepciones que manifiestan un *sentido de restricción* con las siguientes características discriminantes:
  - Conectan el carácter no rebasable y no alcanzable del valor límite.
  - Asumen que el límite puede ser eventualmente alcanzable pero persiste la restricción debida a su no rebasabilidad.
  - La justificación de la no alcanzabilidad del límite involucra también elementos que proceden del carácter infinito potencial del proceso; se establece así un vínculo con el sentido dinámico o de convergencia.

O.3. Caracterizar las concepciones sintéticas (definiciones individuales) de los estudiantes. Establecer sus aspectos estructurales y analizar el grado de interrelación entre concepciones sintéticas y analíticas.

Este objetivo específico se aborda en el capítulo 7 cuyos resultados acerca de la caracterización de las concepciones sintéticas en términos de aspectos estructurales refinamos en la tabla 9.1.

Tabla 9.1. Niveles de estratificación de definiciones individuales según sentidos de la noción de límite

Nivel 0		
Sentido: Restricción	**Sentido: Dinámico**	**Sentido: Dinámico+Restricción**
Enfatizan exclusivamente las propiedades de no alcanzabilidad y/o no rebasabilidad. Singularmente, la restricción se concreta en la representación gráfica donde por el umbral de percepción, no se puede concretar la valoración en un entorno del	Enfatizan el proceso dinámico expresado por los términos aproximarse, acercarse y tender, pero no concretan la coordinación entre la tendencia de ambas variables, se observan por tanto dos matices diferenciados: - **Dinámica en variable y.** Se expresa mediante “f(x) o la función se aproxima/acerca/tiende...” - **Dinámica en variable x.** Se	Una combinación de las dos anteriores “se puede aproximar pero nunca tocar o pasar” Se observa singularmente que, si bien se acepta la alcanzabilidad del límite, su no rebasabilidad persiste (“puede llegar a él pero no puede superarlo”).

Tabla 9.1. Niveles de estratificación de definiciones individuales según sentidos de la noción de límite

punto.	expresa mediante "valor al que se aproxima/acerca x"	

Nivel 1	
Sentido: Restricción+Procedimiento	**Sentido: Dinámico+Procedimiento**
Enfatizan las propiedades de no alcanzabilidad o no rebasabilidad, pero mencionan el procedimiento práctico de cálculo dado por la tabla de valores o por evaluación directa.	Enfatizan el proceso dinámico sin llegar a una coordinación entre la tendencia de ambas variables, pero sí manifiestan un procedimiento de cálculo práctico.

Nivel 2	
Sentido: Dinámica coordinada	**Sentido: Dinámica coordinada + Restricción**
Concretan la coordinación entre los procesos de tendencia de las variables dependiente e independiente. Por ejemplo, "Un número al que se aproxima f(x) cuando x se acerca a ese punto".	La concepción anterior se complementa con características relacionadas con la no alcanzabilidad y/o no rebasabilidad. Por ejemplo, "Es un número que limita la función al tender la x a un número".

Nivel 3
Sentido: Dinámica coordinada + Procedimiento
Se concreta la coordinación entre las tendencias de las variables dependiente e independiente y el procedimiento de cálculo. "Número al que tiende dicha función, ya que dándole valores a la x se obtienen resultados que tienden a un mismo número"

Nivel 4
Sentido: Dinámica coordinada + Propiedades
Se concreta la coordinación entre las tendencias de la variable dependiente e independiente, además añade propiedades diferentes a las restrictivas, tales como la diferenciación entre límite e imagen, o bien, la superación de restricciones. "Es el número al que tiende "y" cuando "x" se desplaza [dinámica coordinada]. No hace falta que el límite tenga imagen [Propiedad]. El límite por la derecha y por la izquierda tiene que ser el mismo[Propiedad]" "Es un número al que la función alcanza, se puede hacer tan precisa como se quiera, al cual los valores de f(x) pueden acercarse de manera arbitraria mediante valores de x, es decir. Dándole valores a la x."

Observamos que la interrelación entre las definiciones individuales y las concepciones analíticas reportadas en cumplimiento del objetivo O.2. se manifiesta en la construcción de la tabla 9.1, dado que se emplean los tres sentidos descritos anteriormente. La cuantificación de esta interrelación se incluye en el capítulo 7.

O.4. Caracterizar las concepciones que resultan de las argumentaciones acerca de la existencia de límite de funciones definidas gráficamente, así como la coherencia respecto de la definición individual. Identificar las definiciones inconsistentes o carentes de aplicabilidad.

Este objetivo específico se aborda en el capítulo 8. Uno de los principales aportes del mismo es la distinción entre las concepciones de un estudiante y la definición individual correspondiente y los medios para su estimulación y estudio.

Se observa tras la consecución del objetivo específico O.3. que la definición individual se puede considerar como representativa de la experiencia previa del estudiante acerca del concepto, siempre y cuando tenga consistencia lógica, es decir, aplicabilidad.

Por otro lado, las concepciones relacionadas con el objetivo O.4. refuerzan las concepciones previas (objetivo específico O.2.) que se derivan lógicamente en mayor o menor grado de la definición individual correspondiente (coherencia) o establecen rupturas (incoherencia) con la misma, por la restricción del campo de experiencias que resume la definición individual.

Remarcamos finalmente que el sistema de representación gráfico evoca, aparte de algunas de las concepciones ya caracterizadas, otras concepciones específicas tales como la *alteración del sentido de la tendencia lateral* (interpretación divergente de los límites laterales) y la *continuidad visual* (existencia de límite identificada con el modelo continuo).

9.3. Limitaciones y cuestiones abiertas

Recogemos algunas de las limitaciones que se han presentado durante la realización de la investigación. La primera de ellas se refiere a la validez externa del estudio por las condiciones del contexto particular en el que se ha realizado, que no permite generalizar los resultados. Sin embargo, la muestra de estudiantes se puede considerar típica de las características sociodemográficas que satisfacen, lo cual permite sostener que los resultados muestran un rango de significados del concepto de limite finito de una función en un punto característico y específico para dicha población. Por otro lado, la validez interna del estudio está suficientemente acreditada al haber planificado y llevado a término sistemáticamente el proceso de diseño, recogida y análisis de los datos. El marco de la *teoría fundamentada* respalda el diseño del trabajo.

Una segunda limitación se refiere a la influencia de la instrucción efectiva recibida por los estudiantes y a una falta de control del tiempo transcurrido entre la finalización de la misma y el trabajo de campo que estimamos en una semana. Compensamos la falta de información acerca de estos aspectos describiendo la planificación prevista de la unidad didáctica que nos facilitó el profesor. De hecho, algunos de los resultados reportados pueden atribuirse a las características de dicha planificación, por ejemplo, las definiciones o términos específicos empleados por el docente y las características de las representaciones empleadas podrían explicar parcialmente el comportamiento de los estudiantes.

Una tercera limitación se debe a que las tareas empleadas no abarcan otros sistemas de representación (simbólico y numérico) y sus relaciones, que pudieran revelar nuevas concepciones que han permanecido ocultas. Además no se incluyeron situaciones personales, educativas, públicas o científicas susceptibles de ser modelizadas por el concepto de límite finito de una función en un punto.

En relación con las cuestiones abiertas que dan continuidad a este estudio planteamos las siguientes:

- Caracterizar el significado que los estudiantes de bachillerato atribuyen a la noción de tendencia, tanto de una variable real x como de la relación funcional correspondiente $x \rightarrow f(x)$, cuando explican y representan tales nociones, dado que en esta investigación dicho significado ha sido empleado de manera técnica por los estudiantes.
- Diseñar e implementar tareas de modelización con el fin de indagar los usos prácticos que los estudiantes realizan del concepto de límite y completar el estudio teórico acerca de las situaciones a las que el mismo da respuesta.
- Diseñar e implementar una propuesta de innovación curricular acerca del tópico de estudio que tome en consideración el estudio teórico realizado sobre el significado del concepto. Dicha innovación trata de solventar las flaquezas o desviaciones, así como desarrollar y potenciar las concepciones de los escolares.

10.

Referencias

Apostol, T. M. (1985). *Calculus* (2ª ed.). Barcelona: Reverté.

Arias, M. (2014). *Actuación de los tutores y su relación con el proceso de aprendizaje de los profesores de matemáticas en un programa de formación.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Azcárate, C., y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 135-149.

Azcárate, C., Camacho, M., y Sierra, M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: Investigación en didáctica del análisis. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 283-293), Valladolid: SEIEM.

Bagni, G. T. (2005). The historical roots of the limit notion: Cognitive development and the development of representation registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 5*(4), 453-468.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales.* Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 331-354). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Blázquez, S., Gatica, N., y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la RSME*, *12*(1), 145-168.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. N., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Relime, 9*(2), 189-209.

Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de sucesiones: Fenómenos que organiza.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Cohn, P. M. (2003). *Basic Algebra. Groups, Rings and Fields.* London: Springer.

Collins (2014). *Collins English Dictionary.* Disponible en http://www.collinsdictionary.com.

Corbin, J., & Strauss, A. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative sociology*, *13*(1), 3-21.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwinngendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of mathematical behavior*, *15*, 167-192.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Edwards, B. S., Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), pp. 15-25.

Fernández-Plaza, J. A. (2010). *Unidad didáctica: Límite y Continuidad de Funciones*. Trabajo final del Máster de Secundaria. Granada: Universidad de Granada.

Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio Exploratorio*. Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Fernández-Plaza, J. A., Rico, L., & Ruiz-Hidalgo, J. F. (2013). Concept of Finite Limit of a Function at a Point: Meanings and Specific Terms. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 699-710.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2012). The Concept of Finite Limit of a Function at one Point as explained by Students of Non-Compulsory Secondary Education. In Tso, T.Y. (Ed.). *Proceedings of the*

36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 235-242. Taipei, Taiwan: PME.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L., y Castro, E. (2013). Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto. *PNA*, *7*(3), 117-131.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2013). Análisis conceptual de términos específicos. Concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la RSME*, *16*(1), 131-145.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 211-229.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *2-3*(48), 309-329.

Frege, G. (2013). *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica.* Madrid: Tecnos.

Garbín, S., y Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, *20*(1), 87-113.

Guzmán, M. (1997). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático.* Madrid: Pirámide.

Harel, G. & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development, *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 27-50.

Harel, G., Selden, A., & Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking: Some PME Perspectives. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 147-172). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 213-223.

Janvier, C. (1987). *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Kaput, J. (1987). Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Lauten, A. D., Graham, K. & Ferrini-Mundy, J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior*, *13*(2), 225-237.

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico: La planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 81-101). Granada: Comares.

McMillan, J. H. & Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa* (5ªed.). Madrid: Pearson.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the learning of mathematics*, *11*(3), 20-24.

Moreira, M. A. (2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências, 7*(1), 55-75. Traducción en castellano recuperada de http://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf

NCTM (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(4), 396-426.

Oxford University Press (2014). *Oxford Dictionaries.* Disponible en http://www.oxforddictionaries.com.

Piaget, J. (1968). *El estructuralismo. Estudios y ensayos fundamentales.* Buenos Aires: Proteo.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 51-73.

Real Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales [RAC] (1990). *Vocabulario científico y técnico.* Madrid: Espasa-Calpe.

Real Academia Española [RAE] (2001). *Diccionario de la Lengua Española* (22ª ed.). Disponible en http://www.rae.es .

Rey Pastor, J. (1952). *Elementos de la teoría de funciones.* Madrid: Autor.

Rico, L. (2003). *Matemática y Educación en la Academia.* Granada: Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, *1*, 39-63.

Rico, L., y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y la metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada: Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58*, 7-23.

Roh, K. H. (2010). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 263– 279.

Romero, I. (1997). *La introducción del número real en educación secundaria: una experiencia de investigación-acción.* Madrid: Comares.

Ruiz-Hidalgo, J. F., y Fernández-Plaza, J. A. (2013). Planificación de unidades didácticas en enseñanza secundaria mediante uso del Análisis Didáctico. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 231-252). Granada: Comares.

Sánchez-Compaña, M. T. (2012). *Límite finito de una función: Fenómenos que organiza.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Scriven, M. (1998). Philosophical inquiry methods in education. In M. Jaeger (Ed.), *Complementary methods for research in education* (pp. 131-183). Washington: AERA.

Seco, M., Andrés, O., y Ramos, G. (1999). *Diccionario del Español Actual.* Madrid: Aguilar.

Selden, A., & Selden, J.(2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 1-13.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematic*s, *22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(4), 371-397.

Skovsmose, O. (2005). Meaning in Mathematics Education. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose, & P. Valero (Eds.). *Meaning in Mathematics Education* (pp. 83-100). New York: Springer.

Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, *7*(4), 765-790.

Tall, D. O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In R. Karplus, (Ed.), Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, (pp. 170-176). Berkeley: PME.

Tall, D. O. (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. O. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). New York: NCTM/Macmillan.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *12*, 111-129.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Vizmanos, J. R., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M., y Serrano, E. (2008). *Matemáticas. 1º Bachillerato (Ciencias y Tecnología).* Madrid, España: Editorial SM.

Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a Constructive Activity. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representations in the teaching and learning of mathematics* (pp. 3-17). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associated.

Williams, S. R. (1991). Models of Limit held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236.

Zazkis, R., & Applebaum, M. (2007). Advancing mathematical thinking: Looking back at one problem. In Pitta-Pantazi, D. & Philippou, G. (Eds.), *European Research in Mathematics Education: Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2389-2397). Larnaca, Cyprus: ERME.

STUDENT MEANINGS OF THE CONCEPT OF FINITE LIMIT OF A FUNCTION AT A POINT

SUMMARY

INTRODUCTION

The researcher approaches the research problem during a first stage in his training process, through planning and design of a didactic unit on the topic of limit and continuity for the first year of *Bachillerato* (first year of noncompulsory Spanish secondary education) at an initial training program for secondary school teachers in academic year 2009-2010 (Fernández-Plaza, 2010). This study is grounded theoretically as a practical application of the method of *didactic analysis* (Rico & Fernández-Cano, 2013), a summary of which may be found in Ruiz-Hidalgo and Fernández-Plaza (2013).

The second stage, a review of research on errors and difficulties with the concept of finite limit of a function at a point (see Blázquez & Ortega, 2000), sparked my interest in developing deeper knowledge of the different ways students understand the notions of limit and continuity after the ordinary instruction received, and thus in contrasting and updating prior studies. The goal was to observe the communication of ideas that refer to properties relevant to the concept and to interpret the relationship between different representations of the concept, including the application of "alternative" definitions proposed by the students themselves (Fernández-Plaza, 2011).

Field of Research

We highlight the most relevant research perspectives on and antecedents to undergraduates' learning about a functional limit.

Characterization of students' analytic conceptions of the limit and the influence of colloquial language

The patent influence of colloquial language of the terms used to describe the concept of limit, "to approximate/approach," "to converge," "to tend toward," "to reach," "to exceed," and "limit" in students' conceptions of the limit used have been analyzed primarily by Cornu (1991) and Monaghan (1991).

Cornu (1991) characterizes students' conceptions of tendency and of the term limit itself as not exceedable (in the common sense of "restriction") but detects both positions on reachability. Monaghan (1991) updates these concepts and develops them in greater depth.

Oehrtman (2009) considers the following metaphors linked to the properties that students attribute to the limit of various infinite processes:

- The metaphor "*collapse*"
- The metaphor "*approximation*"
- The metaphor "*closeness*"
- The metaphor "*physical limit*"

Sierpinska (1987) characterizes students' conceptions about the limit of infinite processes according to epistemological obstacles in terms of the three aspects that gave rise to more fine-grained analysis of the conceptions:

- Definite vs. indefinite character of the limit
- *Finitist* vs. *infinitist* attitude to infinite processes
- Empiricist vs. *discursive* stances

Sierra, González and López (2000) also adopt an epistemological focus. Bagni (2005) considers as possible a relationship between cognitive development of comprehension of limit and corresponding historical development.

We establish an initial problem focus to investigate the ways students use the specific terminology related to the concept of limit spontaneously. We also incorporate an interpretive framework to understand the students' conceptions, which share and update elements from prior studies. This interpretive framework is grounded in the notion of the meaning of a school mathematics concept (Rico, 2012).

We call the conceptions reported in the literature *analytic*, as they describe the beliefs, properties, intuitions, use of basic notions, and descriptions of the concept of limit that the students demonstrate in response to various stimuli that do not correspond at the moment to a process of synthesis through a definition.

Proposal of alternative definition and synthetic conceptions

Other studies propose alternatives to the formal definition, while maintaining rigor in characterizing the concept of limit and requiring that this definition be more attractive, easier for students to understand, and more lasting. The most relevant studies are Blázquez (2000), Blázquez, Gatica and Ortega (2009), and Blázquez, Ortega, Gatica and Benegas (2006). The alternative definition that these authors propose is called "optimal approximation" and is characterized by change *error levels* present in the metric definition by *approximations*, such that they establish equivalence between the formal definition and the alternative definition of the limit of a function at a point.

Other studies characterize the ways in which students can reconstruct (Swinyard, 2011) the formal definition or select appropriate definitions using pedagogical resources. Specifically, Roh (2010) characterizes the way students with previous instruction in the use of an "ε-band" (clear horizontal band with a width ε) and graphic representations of different classes of sequence distinguish between two "possible" definitions of the limit of a sequence.

Claros (2010) and Sánchez-Compaña (2012) detect two phenomena related to the formal definition, both of limit of a sequence and of a function at a point. If we focus specifically on the concept of finite limit of a function at a point, the phenomena that they describe are *aproximación intuitiva* (intuitive approach) and *ida y vuelta* (round trip). The phenomenon of intuitive approach provides a candidate (numerical value) for the result of the tendency, while the phenomenon of round trip enables validation of this candidate as limit.

Our interest is in exploring the degree to which students are able to synthesize an individual definition or synthetic conception beginning with properties that emerge from their analytic conceptions.

Studies on consistency of students' conceptions

Different studies stress that there can be contradictions among the different conceptions held by the same student, since students can react differently to "equivalent" stimuli unless there are changes in representation (Garbín & Azcárate, 2002; Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987, p.114; Tirosh, 1990).

We thus consider it relevant to review whether or not the synthetic conceptions (as representative of the ideas generated by the prior stimuli) create discrepancies in the new analytic conceptions that students demonstrate when they tackle other tasks that involve other representation systems or other modes of use.

Research objectives

The general goal of the research is to characterize the meaning that a group of students in *Bachillerato* attributes to the concept of finite limit of a function at a point after receiving ordinary instruction on this topic. We believe that the meaning a student communicates can be analyzed in the same terms used for the meaning of any other school mathematics concept. This analysis includes three main components: *reference* or *conceptual structure* (concepts, definitions, and properties related to the concept), *representation systems* (which include both the modes of expressing the properties of the concept that the students use and the relationships that they establish between different modes of expression), and *senses*, modes of using the concept, as well as situations and contexts in which the student applies the concept (Rico, 2003; Rico, 2012; Rico & Fernández-Cano, 2013).

We use the notion of *conception* to refer to those "parts" of meaning (partial meanings) that emerge from the students' response to the requirement posed by specific tasks. A conception presents a reference, representation systems, and its own senses. The subjective character of this response differentiates it from the corresponding mathematical concept.

To tackle this general goal, we consider three "basic" ways the students can demonstrate their conceptions: *analytically* (when they identify, express, or discuss various properties of the concept), *synthetically* (when they synthesize the characteristics they view as crucial to the concept in an individual definition), and *as applied* (when an individual definition of other notions is applied in other contexts, that is, when they contrast their definition). In addition to other nuances that may emerge, we establish the following specific objectives:

O.1. To design an open response questionnaire to gather information about the analytic, synthetic, and applied aspects of the students' conceptions.

O.2. To characterize the students' analytic conceptions when they discuss the truth or falsehood of statements related to the concept of finite limit of a function at a point, analyzing the modes of use of the specific terms such as "to approximate/approach," "to tend toward," "to reach," "to exceed," and "limit".

O.3. To characterize the students' synthetic conceptions (individual definitions), establishing their structural aspects and analyze the degree of interrelation between synthetic and analytic conceptions.

O.4. To characterize the conceptions that result from argumentation about the existence of limit of graphically defined functions, as well as their consistency relative to the individual definition. To identify inconsistent definitions and those that cannot be applied.

Theoretical Grounding

Meaning of a school mathematics concept

Rico (2012, pp. 52-53) describes a model of meaning for a school mathematics concept as an interpretive framework for the mathematical knowledge of students answering basic questions such as, "About what concepts, properties, definitions, or relationships do the students discuss and communicate their mathematical ideas?" "What signs do they use to do this?" and "What modes of use are identified in the concept?", "What situations or contexts frame their mathematical ideas, or give rise to them?". We will now introduce the components of this model.

- The *conceptual structure*, which includes the network of concepts, definitions, and properties, as well as the arguments, guidelines, and other procedures from which students' rules for reasoning and their criteria of truth derive. The reference based on which the students construct their knowledge is synthesized through their individual definition.
- The *representation systems*, defined by the sets of signs, figures, and rules that present the concept, illustrate its properties, and relate it to other concepts.
- The *senses*, which include the modes of use, contexts, phenomena, situations, and problems in which the concept originates and that give it functional character.

We now describe each of the components of meaning in greater detail.

Conceptual Structure

Multiple perspectives have been used in studying the term "structure," as Piaget shows. Piaget establishes, however, three fundamental elements shared by all of these perspectives:

- *Totality.* The "structured" whole should not be considered a mere aggregate of parts; rather, their elements must be related; the properties of the whole are of a different nature than those of its parts (Piaget, 1968, p.12).

- *Transformations.* The structure must present laws that regulate the operations performed between its elements; a structure thus encompasses a set of elements, a variety of transformations or relationships within it, and the laws that regulate these transformations or relationships (p. 14).
- *Self-regulation.* It is natural to require a structure to have the property of conservation and closure, such that any transformation of its elements produces “new” elements in the same whole. Piaget also holds that structures can function as substructures within other larger structures (p. 17).

Representation Systems

Mathematics Education offers varied perspectives from which to study representation systems (Janvier, 1987; Rico, 2009). All of these perspectives hold, among other assumptions, that all mathematics concepts require a variety of representations from which to grasp, comprehend, and structure them, hence the need to establish relationships between different representation systems. Any singular representation system emphasizes certain properties of the concept and makes it difficult to perceive or comprehend others; that is, no system exhausts the concept (Janvier, 1987, p.69).

We consider as *representations* the symbolic or graphic notations, specific to each notion, through which mathematical concepts and procedures, as well as their most relevant characteristics and properties, are expressed (Castro and Castro, 1997).

Sense

The definition of the sense of a concept is explained primarily in the studies of *pedagogical phenomenology* by Freudenthal (1983), in which this theory is developed in considerable detail.

We adopt a different perspective when tackling the sense of a mathematical concept such as its *modes of use* within a functional focus of school mathematics (Lupiáñez, 2013, pp. 87-88; Rico, Marín, Lupiáñez, & Gómez, 2008, pp. 17-19). Modes of use have two aspects:

- *Situations.* The way in which problems and mathematical questions are posed to the students. The framework of the PISA Project proposes four types of situations: *personal, occupational, social, and scientific.*
- *Contexts.* Framework in which the concepts and mathematical structures play different roles and meet different needs as instruments of knowledge. The contexts associated with a specific mathematical structure emerge from the response to the question, what are these notions used for?

By way of contrast, Table 1 includes characteristics shared by the notion of meaning that we adopt and Vergnaud's theory of conceptual fields, as well as the characteristics that differentiate them (Moreira, 2002; Vergnaud, 1983b, cited by Moreira, 2002).

Table 1. Table comparing the model of meaning proposed and the theory of conceptual fields

Similarities	
Model of Meaning	Theory of Conceptual Fields
Share the basic elements of meaning (ternary structure), although they differ in the terminology applied	
Differences	
Focuses on content expressed by students rather than on cognitive processes involved	Focuses on cognitive processes (schemas)
Distinguishes between situation and context, where context is the basic question to which a concept responds, while the situation corresponds to the environment around the context	Does not make this distinction
Lacks the notion of theorem-in-action, concept-in-action, since the conceptual elements are derived from abstractions from the student's answer to specific questions	Considers theorems and concepts within a given situation, instead of abstracting from them
Is a theoretical model subject to empirical revision, which does not require measuring development of learning	Is an empirical model that attempts to describe cognitive processes and their development

Conceptual analysis of specific terms

Conceptual analysis is a nonempirical method and can thus be considered part of a methodological framework used to define the modes of use and interconnections of terms and theoretical notions, especially when they are used in different areas (Rico, 2001; Scriven, 1998).

We believe conceptual analysis is useful for defining, organizing, and specifying the different modes of use that the terms "to approximate/approach," "to tend toward," "to reach," "to exceed," and "limit" adopt in this study and anticipate those modes that students can demonstrate.

We include the conceptual analysis of one of these terms as an example.

Conceptual analysis of the term "aproximar"

"Aproximar" has the following definitions in the dictionary of the Spanish Royal Academy (Real Academia Española [RAE]) (RAE, 2001)[7]:

> Aproximar (De próximo)
>
> 1. tr. Arrimar, acercar. U. t. c. Prnl.
>
> 2. tr. Obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado. U. t. c. prnl.

To find definitions of the term "*aproximar*" in the *Oxford* (Oxford University Press [OUP], 2014) and *Collins* (Collins, 2014) dictionaries, we use two different English terms, "to approximate" and "to approach." In consulting the Oxford dictionary, we find:

> Approximate
>
> 1. Estimate or calculate (a quantity) fairly accurately. *"I had to approximate the weight of my horse"*
>
> Approach
>
> 2. Come near or nearer to someone or something in distance or time. *"The train approached the main line", "Winter was approaching"* (OUP, 2014).

In consulting the Collins dictionary, we find the following definitions:

> Approximate
>
> 1. (usually followed by to) to come or bring near or close; be almost the same (as)
>
> 2. (mathematics) to find an expression for (some quantity) accurate to a specified degree.
>
> Approach
>
> 1. To come nearer in position, time, quality, character, etc., to (someone or something) (Collins, 2014)

We observe that "to approximate" and "to approach" have different uses in English, whereas Spanish "*aproximar*" includes both uses. In mathematics, the differences in use are the following:

- *Static-operator.* This characteristic corresponds to "to approximate," since it is used essentially in the sense of estimating a quantity with the precision required. The term "*aproximar*" also acquires this sense: "*I approximate the square root of 2 as 1.41 / to the hundredths place,*" and "*1'41 approximates the square root of 2 to the hundredths place.*"
- *Dynamic.* "To approach," on the other hand, refers to the property of a sequence of successive estimations with decreasing error, a sense also

[7] "Approach (from "proximate")

1. tr. Place next to or close to. Also used reflexively.

tr. Obtain a result as close as possible to exact as needed for a specific purpose. Also used reflexively."

included in the term "*aproximar.*" For example, "*The sequence 0.9, 0.99, 0.999, … approaches 1*" or "*0.9, 0.99, 0'.999,… approach 1*" is equivalent to affirming that "*0.99 approximates 1 more closely than 0.9, and 0.999 approximates 1 more closely than 0.99…*"

We identify reference to the term "*aproximar*" in the specific context of finite limit of a function at a point in terms of two structures:

- *Relation of approximate order based on customary measurement and order.* The value of the limit (L) determines a relationship of order in the quotient set of $\mathbb{R}$ (Identifying elements symmetrical with respect to L, that is, $[a]=\{a, 2L-a\}$ is the class corresponding to each real a). The relationship of order is given by the following rule:

  "[a] *approximates* L more closely than or equally to [b]", if and only if
  $$|a-L|\leq|b-L|$$
  This relationship is well defined, reflexive, anti-symmetrical, and transitive— properties deduced immediately from the properties of usual order ($\mathbb{R}$, $\leq$). We call this relationship *order of approximation with respect to L.*
- *Analytic.* We say that there is a sequence x_n of real numbers that approaches L if, for any value N, there is a natural number N_0 such that, for $n\geq N_0$, x_n approximates L better than x_N or $x_N=L$ (adapted from Blázquez, 2000). In intuitive terms, any estimation of L by elements of the sequence x_n different from L can be improved by terms from the same sequence from one onward. We let some term in the sequence be equal to L, so that it makes sense to affirm that the constant sequence approaches its limit. There is no viable way of extending this notion to a continuous variable without implying tendency.

Conceptions and definitions: Notion of consistency

In this study, we establish a careful distinction between the notions of conception and individual definition. Although all individual definitions are conceptions, we stress the following differentiating criteria:

- Conceptions are intimately related to the concrete stimulus that produces them; that is, two stimuli that are equivalent from the formal perspective can evoke formally opposed conceptions that are coherent from the student's perspective. An individual definition, on the other hand, accommodates the diversity of situations to which the student has been exposed, not necessarily the questions of the instrument used for gathering information.
- The student's conceptions establish new connections that the individual definition in itself does not permit him or her to establish. The individual

definition can thus be considered a representation of the state of knowledge prior to that which emerges from the new situation.

- The notion of consistency permits contrast of the degree to which the student's conceptions derive logically and consequently from the individual definition previously proposed by the student, whereas lack of an individual definition will not permit comparison of the conceptions to each other.

Since an individual definition can include characteristics that the analytic conceptions have stressed, in addition from others not considered, we attempt to characterize the students' individual definitions in terms of the conceptions mentioned previously and other, new ones organized into *structural aspects*. The structural aspects are defined as properties of the concept of finite limit of a function at a point that have been reported in the literature or that are emerging. We describe the general lines of the structural aspects in the following points:

- *Structural aspect Object/Process.* This aspect refers to the ontological status of the student's idea of limit (an object, a process, or dual interpretation).
- *Structural aspect Practical calculation skills.* This aspect refers to the explicit mention of the practical procedure of calculus (table of derivatives, direct substitution, etc.)
- *Structural aspect Reachability/Exceedability.* This aspect refers to the relationship between the resulting limit and the infinite process of tendency, that is, whether or not it is considered part of the process, or whether it is restricted by the limit from above/below.
- *Structural aspect Reproduction.* This aspect corresponds to whether the student replicates the reference definition given in the instruction received.

Methodological Grounding

This research involves a descriptive, explanatory study based on the survey method. It is descriptive in that it proposes to detail and document characteristics and components of a family of phenomena: "the conceptions that students in *Bachillerato* have of the notion of finite limit of a function at a point." It is explanatory in that it proposes to develop interpretive frameworks about these phenomena, identify factors that explain them, and understand changes, or conjecture about relationships between them.

The research was performed with an academic class from the first year of the Sciences and Technology specialization of *Bachillerato* at a secondary school in the province of Granada in academic year 2010-2011. The class consisted of 36 students. These students were selected intentionally based on availability.

We used a questionnaire as the only data collection instrument. The goal was diagnostic, that is, to gather information from students concerning their general intuitions (correct, incorrect, incomplete, informal, etc.) about certain aspects of the finite limit of a function at a point concept that they held a short time after receiving instruction.

We designed two versions of the questionnaire (Questionnaires A and B) to cover the greatest variety in conceptual aspects, representation systems, and senses of the concept. Each questionnaire consisted of five tasks, but this report includes only three tasks from Questionnaire A and two from Questionnaire B. The questionnaire was administered by dividing the class randomly into two equivalent groups, each of which answered one version of the questionnaire.

Questionnaire tasks

Both questionnaires included the following common synthetic task, with the following statement:

In your own words, write a personal definition of the limit of a function at a point.

The tasks, described in the following, have two goals related to this common task:

- *Analytic.* To provide students with a variety of properties of the concept with which to discuss and evaluate whether these properties belong to and are to be incorporated into their personal definition.
- Applied. To provide the students with opportunities to test their personal definition in new situations.

The analytic tasks prior to the common task were formulated as follows:

Circle T or F for each of the following statements, depending on whether it is true or false. Use the box to explain your choice:

(A1). A limit describes how a function f(x) moves as x moves toward a certain point.

(A2). A limit is a number or point past which a function cannot go.

(A3). A limit is determined by plugging in numbers closer and closer to a given number until the limit is reached.

(B1). A limit is a number or point the function gets close to but never reaches.

(B2). A limit is an approximation that can be made as accurate as you wish.

(B3). A limit is a number that the y-values of a function f(x) can be made arbitrarily close to, by restricting x-values.

The task of applying the individual definition was performed after the common task. The only questionnaire that included this application was version A. The task was formulated as follows:

> Apply your personal definition of finite limit of a function at a point to the functions defined by the following figures (Figure 1) and explain in each case whether the limit exists at the point indicated:

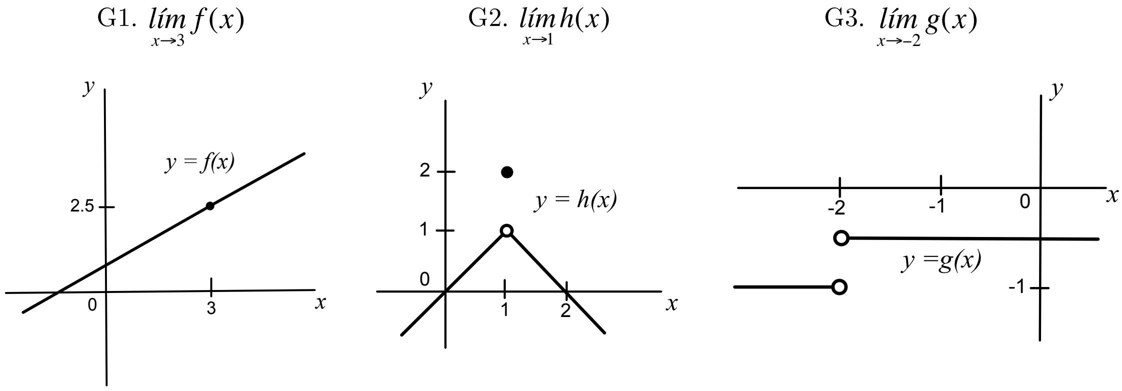


Figure 1. Figures used for application of the individual definition

Organization and techniques for data analysis

As general technique for qualitative data analysis, we followed a process of *inductive analysis*, as established by McMillan and Schumacher (2005, p.480), which is consistent with a cyclical procedure of breakdown of responses, categorization (establishing key topics or terms, grouping topics into categories emic/etic), construction of a model, and possible visual representation. This method is inserted into the methodological framework of *grounded theory* (Corbin & Strauss, 1990).

Analysis of the data corresponding to the analytic tasks

We used the following general outline:

- Use and counting of specific terms
- Discussion of the use of specific terms
- Establishment of profiles for arguments and analytic conceptions

Analysis of the data corresponding to the synthetic task (individual definitions)

We used the following general outline:

- Characterization of the individual definitions according to structural aspects
- Degree of coincidence between analytic and individual conceptions

Analysis of the data on the analytic/applied task

We used the following general outline:

- Characterization of the arguments of elemental conceptions associated with each figure
- Characterization of emerging conceptions of the general task
- Characterization of consistency between the analytic and synthetic conceptions

Structure of the Compendium of Publications

The articles in the compendium of publications are the following:

- Article 1. *Análisis Conceptual de términos específicos. Concepto de límite finito de una función en un punto* (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, & Rico, 2013) (Chapter 5).
- Article 2. *Concept of finite limit of a function at a point: Meanings and specific terms* (Fernández-Plaza, Rico, & Ruiz-Hidalgo, 2013) (Chapter 6).
- Article 3. *Definiciones personales y aspectos estructurales del concepto de límite finito de una función en un punto* (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo, Rico, & Castro, 2013) (Chapter 7).
- Article 4. *Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto* (Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo & Rico, 2015) (Chapter 8).

Structure and frame of Article 1

Article 1 describes the research agenda of "Advanced Mathematical Thinking," which frames the research problem, as well as the most relevant antecedents related to it. Its conceptual framework is composed of the detailed introduction of the notion of the meaning of a mathematical concept and its contrast with the cognitive model of Image Concept/Definition Concept developed in Vinner (1991) and the conceptual analysis of the terms "to exceed" and "to reach".

As to the results, the authors obtain evidence on the effective terms that the students used to communicate their intuitions about the properties of exceedability/ reachability of the limit and concluded that the two properties are intimately related. They conjecture that the excessive use of graphic representations with lateral monotony in instruction could make this association obvious.

Structure and frame of Article 2

Article 2 describes the results of Article 1 in greater depth and extends them. It provides a conceptual analysis of the terms "to tend toward", "to approach/approximate" and "limit" that complements the one provided in Article 1 and describes in depth the analytic conceptions that the students demonstrated when they argued the truth or falsehood of statements about certain properties of the concept of limit. The article also shows the modes of use of the effective terms employed by the students to express their ideas.

Taken together, Articles 1 and 2 provide the characteristics of the analytic conceptions we summarize in the following points.

- Conceptions: process, object, and dual
- Association of non-exceedability of the limit with its unreachability
- Restriction of the precision of approximation of the limit through characteristics of the practical procedure of calculus.
- Exact or indefinite character of the limit value.

To synthesize, Articles 1 and 2 compose a unit in which the analytic conceptions demonstrated by the students in *Bachillerato* were organized and described with the support of conceptual analysis of the modes of use of the specific terms related to the concept of limit—"to tend toward," "to approximate/approach," "to reach," "to exceed," and "limit," and the effective terms associated with those that the students used to express their ideas about the concept.

Structure and frame of Article 3

Article 3 changes the focus of the characterization of the students' conceptions. Within the variety of aspects encompassed by the students' analytic conceptions (contained in Articles 1 and 2), it seeks the definitions or basic statements with which the students synthesized the most important properties of the concept of finite limit of a function at a point. This article describes what we call synthetic conceptions.

Relative to Articles 1 and 2, Article 3 provides the following evidence:

- There are individual definitions that reinforce the procedural vs. object character of the analytic conceptions that these students demonstrate.
- The properties related to the reachability and exceedability of the limit form a fundamental part of the student's knowledge about the concept of limit.
- The graphic representation system was used as support for synthesizing some individual definitions.
- The connection vs. independence between the limit and the image of the point was an aspect that emerged in the individual definitions, since the analytic conceptions did not discuss this aspect.

- Another aspect that emerged in the individual definitions was the lack of coordination between the processes of the domain and range of the function.

Structure and frame of Article 4

Article 4 shows the complementarity of the focuses adopted to explore and describe the students' conceptions about the concept of limit of a function at a point—analytic (Articles 1 and 2) and synthetic (Article 3).

After evoking the analytic and synthetic conceptions in the individual definitions, we characterized the ways in which the individual definitions evoke the same "analytic" conceptions in a "coherent" way, or other, different ones that would be specific to the new situation.

We stress the following implications of this article:

- The appearance of inconsistencies in applying the individual definition in new situations (graphic interpretation) can suggest that these situations provide properties that the individual definition, constructed on the "preceding" situation, could not have included.
- In relation to the concept of continuity, misinterpretation of the symbolic representation system could lead to mistaken conceptions of the identification of limit with image, whereas misinterpretation of the graphic representation system could lead to identifying the existence of limit with the nonexistence of gaps in the figure.
- As a follow up argument, it provides the opportunity to resynthesize an individual definition from the reflections that the new situation inspires, since it provides evidence of revision or resistance of the students' prior conceptions.

Discussion and conclusions

The contributions are organized first into the revision and development in greater depth of the theoretical model of the meaning of a school mathematics concept for the concept of finite limit of a function at a point. The conceptual analysis of the specific terms related (see Section 2.3) complements the study or modes of use of the concept of finite limit of a function at a point. Second, we summarize the empirical contributions and the degree to which we have achieved the specific objectives proposed. Finally, we detail some of the limitations that have arisen in this study and the open questions that can extend it.

Meaning of the concept of finite limit of a function at a point

We specify the model of meaning that corresponds to the concept of finite limit of a function at a point for the educational level of *Bachillerato*, which consists of the conceptual structure, representation systems, and the senses and modes of use of this concept.

Conceptual structure of the concept of finite limit of a function at a point

We can establish three levels of analysis of the conceptual structure related to the notion of finite limit of a function at a point.

At the first, *algebraic* level of study, we find the conceptual structure corresponds to the notion of real function of a real variable. This first, algebraic level of the conceptual structure is fulfilled by considering that the sequences whose terms are elements of the domain of the function (values of the independent variable $\{x_n\}$ in A) are transformed through the rule of correspondence of the function f in sequences $\{f(x_n)\}$ in B.

The second level of analysis is *topological*, focusing on the set IR and any of its subsets. To give mathematical entity to the notions of closeness, approach/approximation, or tendency toward in this set, we give it a *topological-metric* structure. On the curricular level of *Bachillerato*, the topology is established by the metric, given by the usual distance in IR (absolute value of the difference).

The topological-metrical structure permits definition of the notion of point of *accumulation* of a set A and of tendency toward this point, if a is a point of accumulation of the functional domain. The notation $x \rightarrow a$ expresses that, given any order of approximation or margin of error, there is a small environment of the point $x=a$ that improves this approximation or margin of error. Specifically, there is a family of sequences $\{x_n\}$ with $x_n \neq a$, such that $\{x_n\}$ converges at $x=a$.

On a third level of analysis, once Set B is given another topological-metrical structure, which at the level of *Bachillerato* is the same as that of Set A, we consider the correspondence between sequences of elements $\{x_n\}$ and sequences of elements of the image given by $\{f(x_n)\}$. The concept of limit of a function at a point requires that the tendency of $\{x_n\}$ toward point $x=a$ with x_n different from a be transferred through the rule of correspondence f to the tendency of $\{f(x_n)\}$ toward the same value L.

On the other hand, any environment V of L has an anti-image $f^{-1}(\mathrm{V})$ that is a subset of the functional domain. The prior characterization permits affirmation that the anti-image must contain a small environment of $x=a$. This is the *continuous* representation.

To refine all of the third-level relationships, we introduce another notion associated with the concept of limit of a function at a point—the notion of *lateral limit.* The existence of the limit of a function at a point is then characterized as the existence and equality of the corresponding lateral limits.

Two more structures are used "transversally" to highlight properties of the concept in specific examples and that students usually generalize inadequately.

- *Bornological Structure.* The usual order IR permits reference to the property of exceedability/ unexceedability of the limit, using terms such as "to limit," "to exceed," "to surpass" or "to go beyond." Any function that has finite limit at a point is locally bounded. This fact is usually interpreted to mean that the limit is a value that cannot be reached or exceeded.
- *Relational structure of equality.* Refers to the property of reachability/unreachability of the limit, using terms such as "to touch," "to arrive at," or "to come to touch," which correspond to whether the values of the sequence $\{f(x_n)\}$ can take the value of the limit or the limit is the image of some value $x \neq$ a.

Representation systems of the concept of finite limit of a function at a point

Representation systems of the concept of finite limit of a function at a point are classified as *verbal, numerical, symbolic, and graphic.*

The verbal representation system comprehends the statements that include such basic terms as "to converge," "to approximate/approach," "to tend toward," "to reach," "to exceed," and "limit."

The numerical representation system describes a discretization of the concept. If we study the limit of a function at the point x=0, the numerical representation system uses a discrete quantity of values of x that tend toward 0, for example, 0.1, 0.01, 0.001… and we see that the values f(0.1), f(0.01), f(0.001)… tend toward L.

The symbolic representation system is characterized by the specific notation of the limit, $\underset{x\to x_0}{lím} f(x)$, and of the lateral limits, $\underset{x\to x_0^+}{lím} f(x)$, right and $\underset{x\to x_0^-}{lím} f(x)$, left, the rules for calculation of limits, and the formal definition of limit. This system must be coordinated with the numerical one, which permits intuition of the limit, since the formal definition indicates only the criteria under which a specific value is the limit of the function at a point, but not its existence (Sánchez-Compaña, 2012).

The graphic representation system for functions is grounded in a system of orthogonal Cartesian coordinates, assigning values of the independent variable to the horizontal axis, or the abscissa, and the values of the dependent variable to the vertical axis, or ordinate, an interpretation of each point on the plane given by a value on the abscissa and the corresponding value on the ordinate.

This is the customary graphic representation system at the curricular level of *Bachillerato* for the analytic concept of function (Rey Pastor, 1952, pp. 22-23).

Figure 1 shows various graphic models of limit (Apostol, 1985, pp. 155, 166, 171). The oscillation model is usually excluded as too complex for the level of *Bachillerato*, since it assumes the existence of both lateral limits (finite or infinite).

The graphic representation system emphasizes topological aspects of the tendency, “environments of the limit correspond to small environments of x_0”, showing the continuous character of the process. The figures included in textbooks, however, usually show monotonous lateral tendencies that can strengthen an interpretation of the limit as unexceedable or unreachable.

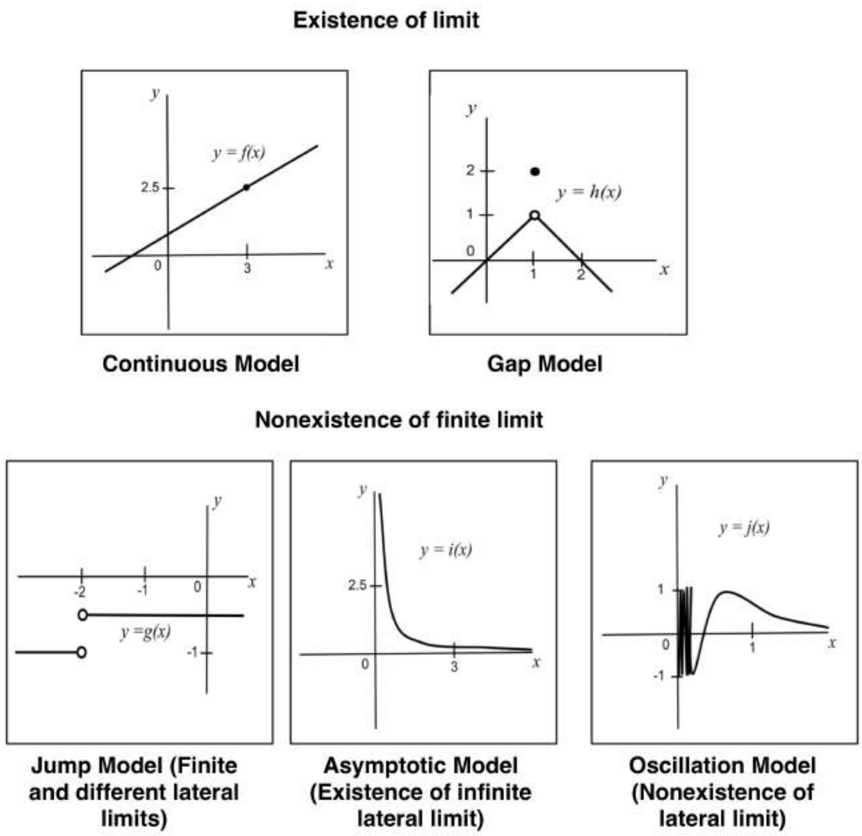


Figure 1. Graphic models of limit of a function at a point (Developed by the author)

Senses and modes of use associated with the concept of finite limit of a function at a point

We can establish three student senses or modes of use related to the notion of finite limit of a sequence or of a function at a point.

We call a first sense *convergent* or *dynamic*. It is expressed through the terms “to tend toward” and “to approach;” for example, “a real variable x tends toward L” corresponds to the idea that any approximation of L can be improved by the values of the variable x different from L, or that there is a sequence of values that approaches the value L arbitrarily. In the case of the limit L of a function f at $x=a$, there is a procedure that relates approximations of a to approximations of L via f. The students demonstrate this meaning when they exemplify dynamic situations of progressive approach to the limit, although these can lead to lack of coordination of the variables' processes of convergence. The lateral limits of a function at a point a are particular cases of convergence.

A second sense is called *static*, or that *of value of the function*. This sense is considered when the limit of a function at a point is obtained through evaluation of the function at this point; the foundation of this procedure is dynamic, however, since it is based on the sense of *convergence*. We have confirmed that the students who consider this sense systematically usually have difficulty arguing the sense of convergence that grounds it.

A third sense is that of *restriction*. The limit in concrete examples is peculiar in that it cannot be exceeded, that is, $L \leq \min(f)$ or $L \geq \max(f)$ as expressed by the terms "not to exceed", "not to surpass", "not to go beyond", "maximum"; or not reachable ($L \notin \mathrm{Img}(f)$), as expressed by terms like "does not arrive at," "does not reach," "does not touch." The students can also consider this sense systematically.

These three senses can be found combined simultaneously in the definitions that the students propose to explain the finite limit of a function at a point.

On the other hand, the concept of finite limit of a function at a point is identified in two types of phenomena, of existence and nonexistence, which in turn are represented through discrete or continuous notation systems (Figure 1).

Achievement of the objectives specified

To assess fulfillment of the general study goal of characterizing the meaning that a group of students in *Bachillerato* attributes to the concept of finite limit of a function at a point after receiving ordinary instruction on this topic, we now detail the degrees to which the specific objectives established were achieved:

O.1. To design an open-ended response questionnaire to gather information on the students' conceptions of analytic, synthetic, and applied aspects of limit.

First, we conclude that, although statements A1, A2, A3, B1, B2, and B3 come from previous studies, implementing them in the particular context of this research produces results that agree with those studies, develop them more specifically, and make new contributions.

Second, the question that requires proposing a personal definition includes *a priori* specific information on the general idea of the functional limit that the students express, while, *a posteriori*, the single influence of the answers to the prior questions causes the instrument to gather information related to the synthesis of an individual definition from some properties discussed above.

Third, the question that requires applying an individual definition to the discussion of the graphics includes *a priori* arguments on the existence/nonexistence of limit independently of whether or not the student answers the question about the individual definition and, *a posteriori,* the availability both of arguments and of how the individual definition causes the instrument to gather information related to the degree to which a specific argument derives logically and consequentially from the individual definition.

We conclude that the instrument used shows the power of the theoretical framework employed, which has permitted identification, description, and interpretation of greater variety and richness of meanings than those originally foreseen; the strength and capability of the observation instrument and the analytic framework have permitted inclusion and documentation of more information than initially expected.

O.2. To characterize students' analytic conceptions when they discuss the truth or falsehood of statements related to the concept of finite limit of a function at a point, analyzing the modes of use of the specific terms "to approach/approximate," "to tend toward," "to reach," "to exceed," and "limit."

The conceptual analysis of the specific terms "*to approach/approximate", "to tend toward," "to reach," "to exceed,"* and *"limit"* provides an interpretive framework for classifying effective terms that the students have used to express their arguments.

We summarize the results about the analytic conceptions detected and characterized as follows:

- There are conceptions that demonstrate a *dynamic or convergent sense* of the notion of limit, which show the following distinguishing characteristics:
    - They include specific reference to the lateral conditions of this convergence.
    - They lead to lack of coordination of the processes of convergence in both variables.
    - They consider the limit as a process instead of as the result of a process.
    - They emphasize the restrictions on the precision of the approximation of the limit due to the calculation procedure in the

practice, without assuming the infinite potential character of the convergence process.

- There are conceptions that demonstrate *a static sense of the value of a function at a point* by emphasizing that the limit is reached by a finite number of approximations or by evaluating the functional expression at the point.
- Finally, we consider the conceptions that demonstrate a *sense of restriction* with the following distinguishing characteristics:
    - They connect the unexceedable and unreachable character of the limit value.
    - They assume the potential reachability of the limit, but the restriction remains due to its unexceedability.
    - Justification of unreachability of the limit involves aspects of the potentially infinite character of the process; we thus establish a link with the dynamic and convergent sense.

O.3. To characterize the students' synthetic conceptions (individual definitions), establishing their structural aspects and analyzing the degree of interrelation between synthetic and analytic conceptions.

Table 2 summarizes the results corresponding to the characterization of the individual definitions proposed by the students.

We observe that the interrelation between the individual definitions and analytic conceptions reported to fulfill Objective O.2. are underscored in the construction of Table 2, since they use the three singular senses described above.

Table 2. Levels of stratification of individual definitions according to sense of the notion of limit

Level 0		
Sense: Restriction	**Sense: Dynamic**	**Sense: Dynamic+Restriction**
Emphasize exclusively the properties of unreachability and/or unexceedability. In particular, the restriction takes concrete form in the graphic representation in	Emphasize the dynamic process expressed by the terms to approach, to near, and to tend toward, but do not specify the coordination between the tendency of the two variables. We therefore observe two different nuances:	A combination of the two preceding "Can approach but never touch or pass" We see especially that, even if we accept the reachability

Table 2. Levels of stratification of individual definitions according to sense of the notion of limit

<table>
<tr><td colspan="2">which, for the threshold of perception, one cannot specify the evaluation of an environment of the point.</td><td colspan="2">- Dynamic at variable y. Expressed by “f(x) or the function approaches/nears/tends toward...”
- Dynamic at variable x. Expressed by “value at which it approaches/nears x”</td><td colspan="2">of the limit, its unexceedability persists (“can reach the limit but not surpass it”).</td></tr>
<tr><td colspan="6" align="center">Level 1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sense: Restriction+Procedure</td><td colspan="3">Sense: Dynamic+Procedure</td></tr>
<tr><td colspan="3">Emphasize the properties of unreachability or unexceedability but mention the practical calculation procedure given by the table of derivatives or by direct evaluation.</td><td colspan="3">Emphasize the dynamic process without reaching coordination between the tendencies of both variables, but showing a practical calculation procedure.</td></tr>
<tr><td colspan="6" align="center">Level 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Sense: Dynamic coordinated</td><td colspan="3">Sense: Dynamic coordinated + Restriction</td></tr>
<tr><td colspan="3">Specify the coordination between the processes of tendency of the dependent and independent variables.
For example, “A number that f(x) approaches when x nears that point.”</td><td colspan="3">The preceding conception is complemented by characteristics related to unexceedability and/or unreachability.
For example, “Is a number that limits the function as it tends toward the x at a number.”</td></tr>
<tr><td colspan="6" align="center">Level 3</td></tr>
<tr><td colspan="6" align="center">Sense: Dynamic coordinated + Procedure</td></tr>
<tr><td colspan="6">Specifies the coordination between the tendencies of the dependent and independent variables and the calculation procedure.
“Number to which this function tends, since giving the x values obtains results that tend toward the same number”</td></tr>
<tr><td colspan="6" align="center">Level 4</td></tr>
<tr><td colspan="6" align="center">Sense: Dynamic coordinated + Properties</td></tr>
<tr><td colspan="6">Specifies the coordination between the tendencies of the dependent and independent variable, in addition to adding different properties to the restrictive ones, such as the differentiation between limit and image, or overcoming restrictions.
“It is the number to which the “y” tends when “x” is displaced [dynamic coordinated]. It is not</td></tr>
</table>

Table 2. Levels of stratification of individual definitions according to sense of the notion of limit

necessary for the limit to have an image [Property]. The limit on the right and the limit on the left must be the same [Property]”
“It is a number that the function reaches, which can be made as precise as one wishes, that the values of f(x) can come closer to arbitrarily through x values, that is, by giving the x value.”

O.4. To characterize the conceptions that result from the argumentation about the existence of limit of graphically defined functions, as well as the consistency of the individual definition. To identify the inconsistent definitions and those that cannot be applied.

We present a theoretical contribution on a distinction between the student’s conceptions and the corresponding individual definition, and a way to stimulate and study these.

Through the achievement of specific Objective O.3, we observe that the individual definition can be considered representative of the student’s prior experience of the concept whenever it is logically consistent, that is, applicable.

On the other hand, the conceptions related to Objective O.4 reinforce the prior conceptions (specific Objective O.2) that derive logically, to a greater or lesser extent, from the corresponding individual definition (consistent) or break with it (inconsistent), due to the limited field of experience that the individual definition summarizes.

Finally, we note that the graphic representation system evokes, in addition to some of the conceptions already characterized, other specific conceptions, such as *alteration of the sense of the lateral tendency* (divergent interpretation of the lateral limits) and the *visual continuity* (existence of limit identified with the continuous model).

Limitations and open questions

We now present some of the limitations that have arisen as we performed the research. The first refers to the external validity of the study: the conditions of the particular context in which it was performed, which do not permit generalization from the results. The sample of students can be considered typical of the sociodemographic characteristics they satisfy, which permits us to claim that the results show a range of meanings of the concept of finite limit of a function at a point characteristic of and specific to this population. The study’s internal validity is sufficiently justified, since the process of design, collection, and analysis of the data was planned and completed systematically. The *grounded theory* framework strengthens the choice of the sample.

A second limitation refers to the influence of the effective instruction received by the students and a lack of control of the time that passed between the end of their instruction and the fieldwork.

A third limitation stems from the fact that the tasks used do not tackle other representation systems (symbolic and numerical) and their relationships, which could reveal new conceptions that have remained undetected.

Among the open questions that may deserve to continue this study, we underline the following:

- To characterize the meaning that the students in *Bachillerato* attribute to the notion of tendency toward, both of a real variable x and of the corresponding functional relation $x \rightarrow f(x)$, when they explain and represent these notions.
- To design and implement modelling tasks
- To design and implement a proposal for curricular innovation on the study topic that takes into consideration the theoretical analysis performed of the meaning of the concept.