



Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

Tesis Doctoral

ESTIMACIÓN DE CANTIDADES CONTINUAS: LONGITUD Y SUPERFICIE

Jesús Jorge Castillo Mateo

Granada, 2012



Departamento de Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

ESTIMACIÓN DE CANTIDADES CONTINUAS:

LONGITUD Y SUPERFICIE

Tesis doctoral que presenta

JESÚS JORGE CASTILLO MATEO

Dirigida por los doctores:

Dr. D. ISIDORO SEGOVIA ALEX

Dr. D. ENRIQUE CASTRO MARTÍNEZ

Dra. Dña. MARTA MOLINA GONZÁLEZ

Granada, 2012

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en educación matemática” del Plan Nacional de Investigación, desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Para la realización del mismo su autor ha disfrutado de una licencia por estudios de seis meses de duración (de enero a junio del 2012) de la Dirección General del Profesorado y Gestión de Recursos Humanos de la Consejería de Educación.

A Alejandro.

*Espero que algún día tú también seas capaz de realizar una
y, si no la realizas, que seas feliz que es lo más importante.*

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que en algún momento me animaron a iniciar o continuar con el trabajo, pues han sido varios los momentos en los que me he visto tentado a dejarlo.

Al director, el Dr. Isidoro Segovia Alex, por animarme a continuar, por su paciencia en épocas en que mi vida personal o laboral no me permitían avanzar a un ritmo adecuado, por estar siempre disponible y afable, por poner a mi disposición su experiencia y conocimientos, y por el tiempo que ha dedicado a la revisión y supervisión del mismo.

Al codirector, el Dr. Enrique Castro Martínez, por aportar su sabiduría y experiencia en momentos de incertidumbre.

A la codirectora, la Dr. Marta Molina González, por sus ánimos en momentos difíciles, por su aporte a esta investigación enfocándola metodológicamente, por su ayuda con la revisión del trabajo, porque la sabiduría y la edad no siempre van unidas de la mano y por aportar esa sonrisa que alegraba las reuniones.

A los miembros del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, pues siempre que he solicitado ayuda se han mostrado serviciales. En particular, me gustaría agradecer al Dr. José Miguel Contreras su ayuda proporcionándome materiales para realizar el estudio estadístico y por sus consejos con esta parte de la investigación.

A los compañeros del I.E.S. “Algazul” que de una forma u otra colaboraron en la fase empírica de esta investigación.

A mi padre y hermanas que siempre me han apoyado y animado en esto como en otras facetas de la vida.

Y finalmente, y no por ello menos importantes, a Yolanda y Alejandro, los más perjudicados por el tiempo que he dedicado para la realización de la misma. “Alejandro, vente y deja a papá que está estudiando” es la frase que más he oído en los últimos meses.

ÍNDICE GENERAL

Presentación.....	1
Capítulo 1: Planteamiento del Problema y Objetivos de la Investigación	4
1. Origen y Planteamiento del Problema.....	5
2. Objetivos de la Investigación	6
3. Pertinencia de la Investigación.....	7
3.1. La Estimación en el Currículo Escolar	8
3.1.1. La Estimación en el Currículo de Primaria.....	8
3.1.2. La Estimación en el Currículo de Secundaria	10
3.2. La Estimación en Otros Documentos Curriculares	12
3.3. La Estimación Contribuye a la Adquisición de Competencias	15
3.4. La Estimación es de Utilidad en la Vida Real	16
3.5. La Estimación es un Campo Novedoso para la Investigación.....	17
3.6. La Estimación Conecta con la Resolución de Problemas.....	17
3.7. La Estimación es una Herramienta para la Enseñanza de Otros Conceptos	18
Capítulo 2: Descripción del área Problemática y su Didáctica	20
1. Magnitud: Conceptualización y Epistemología.....	20
1.1. Clasificación de las Magnitudes.....	22
1.2. Conceptos Relacionados	23
2. Medida: Conceptualización y Epistemología.....	24
2.1. Unidad de Medida	25
2.2. Conceptos Relacionados	26
3. Estimación: Conceptualización y Epistemología	27
3.1. Tipos de Estimación	28
3.2. Conceptos Relacionados	29
3.3. Necesidad de la Estimación	30
3.4. Situaciones de Estimación en Medida	32
4. Enseñanza y Aprendizaje de la Medida y la Estimación.....	34
4.1. Enseñanza y Aprendizaje de las Magnitudes y su Medida.....	34
4.1.1. La aportación de Piaget, Inhelder y Szeminska.....	34

4.1.2. La aportación de Inskeep	34
4.1.3. La aportación de Chamorro	36
4.1.4. La aportación de Callís	37
4.1.5. La aportación de Lehrer	40
4.2. Enseñanza y Aprendizaje de la Estimación	42
4.2.1. La aportación de Bright	42
4.2.2. La aportación de Hildreth.....	44
4.2.3. La aportación de Siegel	46
4.2.4. La aportación de Segovia, Castro, Rico y Castro	49
4.2.5. La aportación de Callís	52
Capítulo 3: Revisión de Antecedentes.....	54
1. Revisión de Investigaciones sobre la Precisión en la Estimación en Medida	54
2. Revisión de Investigaciones sobre las Estrategias de la Estimación en Medida.....	56
3. Revisión de Investigaciones sobre Enseñanza-Aprendizaje en la Estimación en Medida	61
4. Otras Investigaciones en el campo de la Estimación en Medida.....	64
5. Clasificación de Investigaciones en Estimación.....	66
Capítulo 4: Componentes y Errores en la Estimación en Medida.....	69
1. Componentes de la Estimación en Medida.....	69
1.1. Componentes Asociadas a la Magnitud.....	71
1.2. Componentes Asociadas a la Medida	76
1.3. Componentes Asociadas a la Estimación.....	80
2. El Error en la Estimación en Medida.....	84
2.1. Diferentes Concepciones sobre el Error	84
2.2. Clasificaciones de los Errores.....	86
2.3. El Error en la Estimación	88
Capítulo 5: Metodología.....	91
1. Investigación de Diseño.....	92
1. El Centro	93
1.1. Los Grupos Flexibles.....	96
1.2. Los Sujetos	98

1.3. Participación de los Sujetos	100
3. Variables de Tarea	101
4. Descripción de las Sesiones.....	104
4.1. Descripción de la 1ª Sesión: Evaluación Inicial	106
4.1.1. Justificación	106
4.1.2. Metodología	107
4.1.3. Desarrollo de la 1ª Sesión	113
4.1.4. Primer Análisis de la Evaluación Inicial	114
4.2. Descripción de la 2ª Sesión	116
4.2.1. Justificación	116
4.2.2. Metodología	117
4.2.3. Desarrollo de la 2ª Sesión	129
4.3. Descripción de la 3ª Sesión	131
4.3.1. Justificación	131
4.3.2. Metodología	133
4.3.3. Desarrollo de la 3ª Sesión	136
4.4. Descripción de la 4ª Sesión	136
4.4.1. Justificación	136
4.4.2. Metodología	137
4.4.3. Desarrollo de la 4ª Sesión	138
4.5. Descripción de la 5ª Sesión	139
4.5.1. Justificación	139
4.5.2. Metodología	140
4.5.3. Desarrollo de la 5ª Sesión	145
4.6. Descripción de la 6ª Sesión	146
4.6.1. Justificación	146
4.6.2. Metodología	147
4.6.3. Desarrollo de la 6ª Sesión	150
4.7. Descripción de la 7ª Sesión	151
4.7.1. Justificación	151
4.7.2. Metodología	152

4.7.3. Desarrollo de la 7ª Sesión	154
4.8. Descripción de la 8ª Sesión: Evaluación Final	154
4.8.1. Justificación	154
4.8.2. Metodología	155
4.8.3. Desarrollo de la 8ª Sesión	156
4.9. Recogida de Datos Complementaria: Entrevistas Individuales	156
4.9.1. Justificación	156
4.9.2. Metodología	157
4.9.3. Desarrollo de las Entrevistas	157
4.10. Implicación de las Componentes de la Estimación en Medida en el Diseño de las Sesiones	158
Capítulo 6: Análisis Cuantitativo de la Evaluación Inicial y Final	161
1. Criterios para la Consideración de Resultados	162
2. Categorización de Respuestas	163
3. Análisis Cuantitativo de la Evaluación Inicial	164
3.1. Análisis de las Tareas de Estimación de Longitudes	165
3.1.1. Consideración de Resultados	165
3.1.2. Clasificación de los Resultados Considerados	167
3.1.3. Análisis Estadístico	168
3.1.4. Análisis de la Influencia del Factor Nacionalidad	173
3.1.5. Conclusiones	174
3.2. Análisis de las Tareas de Estimación de Superficies	175
3.2.1. Consideración de Resultados	175
3.2.2. Clasificación de los Resultados Considerados	177
3.2.3. Análisis Estadístico	179
3.2.4. Análisis de la Influencia del Factor Nacionalidad	180
3.2.5. Conclusiones	182
3.3. Comparación de los Resultados de la Estimación de Longitudes y Superficies	183
4. Análisis Cuantitativo de la Evaluación Final	183
4.1. Análisis de las Tareas de Estimación de Longitudes	184
4.1.1. Consideración de Resultados	184

4.1.2. Clasificación de los Resultados Considerados.....	185
4.1.3. Análisis Estadístico	187
4.1.4. Análisis de la Influencia del Factor Nacionalidad.....	191
4.1.5. Conclusiones.....	193
4.2. Análisis de las Tareas de Estimación de Superficies	193
4.2.1. Consideración de Resultados	193
4.2.2. Clasificación de los Resultados Considerados.....	195
4.2.3. Análisis Estadístico	196
4.2.4. Análisis de la Influencia del Factor Nacionalidad.....	200
4.2.5. Conclusiones.....	202
4.3. Comparación de los Resultados de la Estimación de Longitudes y Superficies	202
5. Comparativa entre la Evaluación Inicial y Final	203
5.1. Comparación de las Estimaciones de Longitudes.....	203
5.2. Comparación de las Estimaciones de Superficies.....	204
Capítulo 7: Análisis Cualitativo de la Evaluación Inicial y Final	207
1. Análisis de Errores en la Evaluación Inicial y Final	207
1.1. Tipos de Errores Asociados a la Estimación de Cantidades Continuas.....	208
1.2. Análisis de Errores en la Evaluación Inicial	219
1.2.1. Análisis de las Tareas de Estimación de Longitudes	219
1.2.2. Análisis de las Tareas de Estimación de Superficies	221
1.2.3. Comparativa entre las Tareas de Estimación de Longitudes y las de Superficie.....	223
1.3. Análisis de Errores en la Evaluación Final.....	225
1.3.1. Análisis en las Tareas de Estimación de Longitudes	225
1.3.2. Análisis en las Tareas de Estimación de Superficies	226
1.3.3. Comparativa entre las Tareas de Estimación de Longitudes y las de Superficie.....	228
1.4. Comparativa del Análisis de Errores entre la Evaluación Inicial y Final.....	229
1.4.1. Para las Tareas de Estimación de Longitudes	229
1.4.2. Para las Tareas de Estimación de Superficies	230
1.5. Resumen de Resultados del Análisis de Errores	231

1.6. Conclusiones del Análisis de Errores	233
2. Análisis Estrategias de Estimación.....	234
2.1. Elementos que Articulan las Estrategias.....	234
2.1.1. Criterios para la Consideración de la Unidad de Medida	234
2.1.2. Criterios para la Consideración de los Referentes.....	235
2.1.3. Procesos y Estrategias de Estimación	235
2.2. Análisis de Estrategias en la Evaluación Inicial	244
2.2.1. Análisis de Tareas de Estimación de Longitudes.....	244
2.2.2. Análisis de Tareas de Estimación de Superficies.....	247
2.3. Análisis de Estrategias en la Evaluación Final.....	249
2.3.1. Análisis de Tareas de Estimación de Longitudes.....	249
2.3.2. Análisis de Tareas de Estimación de Superficies.....	251
2.4. Comparativa del Análisis de Estrategias entre la Evaluación Inicial y Final.....	253
2.4.1. Para las Tareas de Estimación de Longitudes	253
2.4.2. Para las Tareas de Estimación de Superficies	254
2.5. Resumen y Conclusiones del Análisis de Estrategias.....	255
Capítulo 8: Análisis de la Evolución Individual de los Alumnos	257
1. Escalas y Tareas para Valorar la Precisión y la Tendencia	258
1.1. Escalas para Valorar la Precisión y la Tendencia en las Estimaciones en Longitud	259
1.1.1. Escala para Valorar la Precisión de las Estimaciones en Longitud.....	259
1.1.2. Escala para Valorar la Tendencia a la Subestimación o Sobrestimación en Longitud.....	259
1.2. Escalas para Valorar la Precisión y la Tendencia en las Estimaciones en Superficie	260
1.2.1. Escala para Valorar la Precisión de las Estimaciones en Superficie.....	260
1.2.2. Escala para Valorar la Tendencia a la Subestimación o Sobrestimación en Superficie.....	261
1.3. Tareas Seleccionadas para Valorar la Precisión y Tendencia	262
2. Valoraciones Individuales de Precisión y Tendencia	264
2.1. Valoraciones de Precisión y Tendencia en Longitud	264
2.2. Valoraciones de Precisión y Tendencia en Superficie.....	268

3. Análisis Individualizado	272
3.1. Análisis Individual de la Capacidad Estimativa en Longitud	273
3.2. Análisis Individual de la Capacidad Estimativa en Superficie	279
4. Clasificación de los Alumnos: Determinación de Perfiles.	285
4.1. Perfiles según la Capacidad Estimativa en Longitud.....	285
4.2. Perfiles según la Capacidad Estimativa en Superficie.....	292
4.3. Comparativa de la Capacidad Estimativa en Longitud y en Superficie.....	296
5. Conclusiones del Análisis Individual	299
Capítulo 9: Conclusiones, Aportaciones y Líneas de Investigación Abiertas.....	301
1. Conclusiones del Trabajo Empírico	301
2. Conclusiones Relativas a la Metodología.....	312
3. Aportaciones de la Investigación.....	313
4. Limitaciones de la Investigación	314
5. Líneas de Investigación Abiertas.....	315
Referencias	317
Apéndices	334
Apéndice A: Tabla con Características Individuales de los Alumnos que forman la Muestra	335
Apéndice B: Tabla de Participación del Alumnado	338
Apéndice C: Fichas de Trabajo	342
Apéndice C.1: FICHA DE EVALUACIÓN INICIAL	343
Apéndice C.2: FICHA 1.....	349
Apéndice C.3: FICHA 2.....	351
Apéndice C.4: FICHA 3.....	357
Apéndice C.5: FICHA 4.....	360
Apéndice C.6: FICHA 5.....	363
Apéndice C.7: FICHA 6.....	367
Apéndice C.8: FICHA 7.....	376
Apéndice C.9: FICHA 8.....	383
Apéndice C.10: FICHA 9	387
Apéndice C.11: FICHA 10	391

Apéndice C.12: FICHA DE EVALUACIÓN FINAL	396
Apéndice D: Transcripción de Grabaciones en Video de las Sesiones	402
Apéndice D.1: Transcripción de las Grabaciones en Video de la 2ª Sesión.....	402
Apéndice D.2: Transcripción de las Grabaciones en Video de la 4ª Sesión.....	408
Apéndice E: Transcripción de Entrevistas Individuales.....	412
Apéndice E.1: Transcripción de la Entrevista Individual al Alumno A5	412
Apéndice E.2: Transcripción de la Entrevista Individual al Alumno A6	415
Apéndice E.3: Transcripción de la Entrevista Individual al Alumno A23	421
Apéndice F: Tipos de Errores Detectados	426
Apéndice F.1: Tipos de Errores Detectados en las Tareas Tipo A de la Evaluación Inicial	426
Apéndice F.2: Tipos de Errores Detectados en las Tareas Tipo A de la Evaluación Final	427
Apéndice G: Unidades de Medida Utilizadas por los Alumnos.....	428
Apéndice G.1: Unidades de Medida Utilizadas para Expresar el Resultado en las Tareas de Estimación Tipo A de la Evaluación Inicial	428
Apéndice G.2: Unidades de Medida Utilizadas para Expresar el Resultado en las Tareas de Estimación Tipo A de la Evaluación Final	430
Apéndice H: Referentes Utilizados en las Comparaciones	431
Apéndice H.1: Referentes Utilizados en las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.....	431
Apéndice H.2: Referentes Utilizados en las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final	432
Apéndice I: Estrategias Utilizadas por los Alumnos	434
Apéndice I.1: Estrategias Utilizadas en las Tareas de Estimación Tipo A de la Evaluación Inicial.....	434
Apéndice I.2: Estrategias Utilizadas en las Tareas de Estimación Tipo A de la Evaluación Final	435
Apéndice J	436
Apéndice J.1: Cuadro Resumen de Respuestas a las Tareas Usadas para Valorar la Capacidad Estimativa en Longitud.....	436
Apéndice J.2: Cuadro Resumen de Respuestas a las Tareas Usadas para Valorar la Capacidad Estimativa en Superficie.....	443

Apéndice K.....	449
Apéndice K.1: Observaciones Relativas a la Magnitud Longitud de las Producciones de los Alumnos en las Fichas.	449
Apéndice K.2: Observaciones Relativas a la Magnitud Superficie de las Producciones de los Alumnos en las Fichas.	460

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. 1. Clasificación de las Tareas Tipo A.....	33
Tabla 1. 2. Clasificación de las Tareas Tipo B.....	33
Tabla 3. 1. Revisión de Estrategias de Estimación en Medida.....	59
Tabla 3. 2. Clasificación de Trabajos e Investigaciones sobre Estimación en Medida..	68
Tabla 4. 1. Diferentes Criterios Adoptados Respecto del Error en Estimación	90
Tabla 5. 1. Distribución del Alumnado del IES “Algazul” durante el Curso 2007/08... 94	
Tabla 5. 2. Distribución del Alumnado en la Materia de Lengua Castellana.....	96
Tabla 5. 3. Distribución del Alumnado en la Materia de Matemáticas.	96
Tabla 5. 4. Porcentaje de Participación del Alumnado.....	101
Tabla 5. 5. Intervalos de Tamaño.	103
Tabla 5. 6. Intervalos de Valor Numérico.	104
Tabla 5. 7. Fichas Trabajadas en Cada Sesión.	106
Tabla 5. 8. Características de las Tareas Tipo A de la Ficha de Evaluación Inicial.....	111
Tabla 5. 9. Relación Tarea-Objetivos Concretos en la Ficha de Evaluación Inicial. ...	111
Tabla 5. 10. Dificultades Detectadas en la Evaluación Inicial para cada Alumno.....	115
Tabla 5. 11. Tabla Presentada en la Tarea 2.11.....	123
Tabla 5. 12. Relación Tarea-Objetivos Concretos en las Fichas 1, 2, 3 y 4.....	127

Tabla 5. 13. Distribución de los Alumnos en Pequeño Grupo.	129
Tabla 5. 14. Relación Tarea-Objetivos Concretos en la Ficha 5.	134
Tabla 5. 15. Características de las Tareas Tipo A de la Ficha 5.....	135
Tabla 5. 16. Tabla Presentada en la Tarea 7.8.....	141
Tabla 5. 17. Tabla Presentada en la Tarea 7.9.....	141
Tabla 5. 18. Tabla Presentada en la Tarea 7.10.....	142
Tabla 5. 19. Tabla Presentada en la Tarea 7.19.....	143
Tabla 5. 20. Tabla Presentada en la Tarea 7.20.....	143
Tabla 5. 21. Relación Tarea-Objetivos Concretos en la Ficha 7.	144
Tabla 5. 22. Relación Tarea-Objetivos Concretos en la Ficha 8 y 9.	149
Tabla 5. 23. Características de las Tareas Tipo A de la Ficha 8.....	149
Tabla 5. 24. Relación Tarea-Objetivos Concretos en la Ficha 5.	153
Tabla 5. 25. Relación de las Componentes de la Estimación en Medida con los Objetivos Instruccionales de cada Sesión.....	159
Tabla 6. 1. Datos Considerados, Valores Atípicos y Porcentaje de Error para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.....	165
Tabla 6. 2. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 1ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.	166
Tabla 6. 3. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 2ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.	167
Tabla 6. 4. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según el 3er Nivel de Análisis, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial....	168
Tabla 6. 5. Estadísticos Descartando Valores Atípicos para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.	168
Tabla 6. 6. Contraste de Hipótesis H_0 , I.1, Ev. Inicial	171
Tabla 6. 7. Contraste de Hipótesis H_0 , I.3, Ev. Inicial	172
Tabla 6. 8. Contraste de Hipótesis H_0 , I.5, Ev. Inicial	172

Tabla 6. 9. Contraste de Hipótesis H_0 , I.7, Ev. Inicial	172
Tabla 6. 10. Estadísticos para el Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Inicial Agrupados según la Variable Nacionalidad.....	173
Tabla 6. 11. Prueba de Homogeneidad de Varianzas para la Variable Dependiente Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Inicial Agrupados según la Variable Nacionalidad.....	174
Tabla 6. 12. Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad en la Variable Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes en la Evaluación Inicial.....	174
Tabla 6. 13. Datos Considerados, Valores Atípicos y Porcentaje de Error para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Inicial.....	175
Tabla 6. 14. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 1ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Inicial.	177
Tabla 6. 15. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 2ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.	177
Tabla 6. 16. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 3ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Inicial.	178
Tabla 6. 17. Estadísticos para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Inicial.....	179
Tabla 6. 18. Estadísticos para el Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Inicial Agrupados según la Variable Nacionalidad.....	181
Tabla 6. 19. Prueba de Homogeneidad de Varianzas para la Variable Dependiente Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Inicial Agrupados según la Variable Nacionalidad.....	181
Tabla 6. 20. Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad en la Variable Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies en la Evaluación Inicial.....	182

Tabla 6. 21. Cuadro Resumen de Clasificación de las Tareas y Porcentaje del Error en Valor Absoluto para la Evaluación Inicial.	183
Tabla 6. 22. Datos Considerados, Valores Atípicos y Porcentaje de Error para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final.....	184
Tabla 6. 23. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 1ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final... ..	185
Tabla 6. 24. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, la 2ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final.....	186
Tabla 6. 25. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según el 3er Nivel de Análisis, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final.....	186
Tabla 6. 26. Estadísticos descartando valores atípicos para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.	187
Tabla 6. 27. Contraste de Hipótesis H_0 , I.1, Ev. Final.....	189
Tabla 6. 28. Contraste de Hipótesis H_0 , I.3, Ev. Final.....	190
Tabla 6. 29. Contraste de Hipótesis H_0 , I.5, Ev. Final.....	190
Tabla 6. 30. Contraste de Hipótesis H_0 , I.7, Ev. Final.....	191
Tabla 6. 31. Estadísticos para el Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Final Agrupados según la Variable Nacionalidad.....	192
Tabla 6. 32. Prueba de Homogeneidad de Varianzas para la Variable Dependiente Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Final Agrupados según la Variable Nacionalidad.	192
Tabla 6. 33. Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad en la Variable Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes en la Evaluación Final.	192
Tabla 6. 34. Datos Considerados, Valores Atípicos y Porcentaje de Error para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final.....	193
Tabla 6. 35. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 1ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final... ..	195

Tabla 6. 36. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 2ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final...	195
Tabla 6. 37. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 3ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final...	196
Tabla 6. 38. Estadísticos para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final.....	197
Tabla 6. 39. Contraste de Hipótesis H_0 , II.1, Ev. Final.....	199
Tabla 6. 40. Contraste de Hipótesis H_0 , II.3, Ev. Final.....	199
Tabla 6. 41. Contraste de Hipótesis H_0 , II.5, Ev. Final.....	200
Tabla 6. 42. Estadísticos para el Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Final Agrupados según la Variable Nacionalidad.....	200
Tabla 6. 43. Prueba de Homogeneidad de Varianzas para la Variable Dependiente Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Final Agrupados según la Variable Nacionalidad.....	201
Tabla 6. 44. Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad en la Variable Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies en la Evaluación Final.....	201
Tabla 6. 45. Cuadro Resumen de Clasificación de las Tareas y Porcentaje del Error en Valor Absoluto para la Evaluación Inicial.....	203
Tabla 7. 1. Clasificación de los Tipos de Error	217
Tabla 7. 2. Frecuencias Absolutas de los Tipos de Error en la Evaluación Inicial para Tareas de Estimación de Longitudes.....	220
Tabla 7. 3. Frecuencias Absolutas de Otras Categorías en la Evaluación Inicial para Tareas de Estimación de Longitudes.....	220
Tabla 7. 4. Frecuencias Absolutas de la Tipología de Errores en la Evaluación Inicial para las Tareas de Estimación de Superficies.....	221

Tabla 7. 5. Frecuencias Absolutas de Otras Categorías en la Evaluación Inicial para las Tareas de Estimación de Superficies.	222
Tabla 7. 6. Frecuencias Absolutas de los Tipos de Error en la Evaluación Final para Tareas de Estimación de Longitudes.	225
Tabla 7. 7. Frecuencias Absolutas de Otras Categorías en la Evaluación Final para Tareas de Estimación de Longitudes.	225
Tabla 7. 8. Frecuencias Absolutas de la Tipología de Errores en la Evaluación Final para las Tareas de Estimación de Superficies.	226
Tabla 7. 9. Frecuencias Absolutas de Otras Categorías en la Evaluación Final para las Tareas de Estimación de Superficies.	227
Tabla 8. 1. Tareas Utilizadas para Valorar la Capacidad Estimativa en Longitud.	262
Tabla 8. 2. Tareas Utilizadas para Valorar la Capacidad Estimativa en Superficie.	263
Tabla 8. 3 Puntuación en Precisión de cada Alumno Usando las Escalas Descritas en el Apartado 1.1.	264
Tabla 8. 4. Clasificación de las Respuestas, y Puntuación en Precisión de cada Alumno Usando las Escalas Descritas en el Apartado 1.1.	266
Tabla 8. 5. Puntuación en Precisión y Tendencia de cada Alumno Usando las Escalas Descritas en el Apartado 1.1.	268
Tabla 8. 6. Clasificación de las Respuestas, y Puntuación en Precisión de cada Alumno Usando las Escalas Descritas en el Apartado 1.2.2.	270
Tabla 8. 7. Relación entre las Características Estudiadas y las Componentes.	273
Tabla 8. 8. Evolución de la Capacidad Estimativa en Longitud.	274
Tabla 8. 9. Evolución de la Capacidad Estimativa en Superficie.	279
Tabla 8. 10. Calificaciones Medias de las Estimaciones de Longitudes en la Evaluación Inicial y Final.	287
Tabla 8. 11. Historial de Conglomeración Obtenido a partir de las Calificaciones Medias de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Inicial y Final.	287

Tabla 8. 12. Calificaciones Medias de las Estimaciones de Superficies en la Evaluación Inicial y Final..... 292

Tabla 8. 13. Historial de Conglomeración Obtenido a partir de las Calificaciones Medias de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Inicial y Final..... 293

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2. 1. Tipos de Estimación..... 29

Figura 2. 2. Modelo de Estimación (1ª Parte) 47

Figura 2. 3. Modelo de Estimación (2ª Parte). 48

Figura 2. 4. Modelo de Estimación (Leyenda). 49

Figura 2. 5. Estrategias de Estimación en Medida. 51

Figura 5. 1. Distribución del Alumnado del IES “Algazul” durante el Curso 2007/08. 95

Figura 5. 2. Distribución de la Muestra por Sexo..... 99

Figura 5. 3. Distribución del Alumnado de la Muestra por Nacionalidad..... 99

Figura 5. 4. Esquema del Grado de Accesibilidad de la Cantidad a Estimar. 103

Figura 5. 5. Fotografía de la Mesa del Profesor. 108

Figura 5. 6. Detalle del Grosor de la Mesa. 109

Figura 5. 7. Fotografía del Pegamento en Barra..... 109

Figura 5. 8. Fotografía de la Cuerda 109

Figura 5. 9. Fotografía de la Pizarra, la Diana y el Mapa de España. 110

Figura 5. 10. Rectángulo presentado en la tarea 2.1..... 120

Figura 5. 11. Triángulo Presentado en la Tarea 2.2..... 120

Figura 5. 12. Circunferencia Presentada en la Tarea 2.3..... 121

Figura 5. 13. Poliedro Presentado en la Tarea 2.4..... 121

Figura 5. 14. Pirámide presentada en la Tarea 2.5.	121
Figura 5. 15. Polígono Presentado en la Tarea 2.6.	122
Figura 5. 16. Línea Curva Cerrada Presentada en la Tarea 2.7.	122
Figura 5. 17. Cilindro Presentado en la Tarea 2.8.	122
Figura 5. 18. Cono Presentado en la Tarea 2.9.	123
Figura 5. 19. Esfera Presentada en la Tarea 2.10.	123
Figura 5. 20. Rectángulo Presentado en la Tarea 3.1.	124
Figura 5. 21. Triángulo Presentado en la Tarea 3.2.	124
Figura 5. 22. Círculo Presentado en la Tarea 3.3.	124
Figura 5. 23. Figura Presentada en la Tarea 3.6.	125
Figura 5. 24. Fotografía del Cubo de Cartulina (Objeto 1).	125
Figura 5. 25. Fotografía del Prisma de Cartulina (Objeto 2).	125
Figura 5. 26. Fotografía de la Pirámide de Cartulina (Objeto 3).	126
Figura 5. 27. Fotografía del Cilindro de Cartulina (Objeto 4).	126
Figura 5. 28. Fotografía del Cono de Cartulina (Objeto 5).	126
Figura 5. 29. Imagen del MP4 Presentada en la Tarea 4.6.	127
Figura 5. 30. Imagen de la Tarjeta de Memoria Presentada en la Tarea 4.7.	127
Figura 5. 31. Mapa Presentado en la Tarea 8.6.	148
Figura 6. 1. Esquema de Clasificación de Respuestas a Tareas Tipo A.	164
Figura 6. 2. Frecuencias Relativas en Porcentaje de la Subestimación/Sobrestimación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.	168
Figura 6. 3. Diagrama de Cajas y Bigotes para Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Inicial.	170
Figura 6. 4. Frecuencias Relativas en Porcentaje de las Subestimaciones/Sobrestimaciones, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Inicial.	178

Figura 6. 5. Diagramas de Cajas y Bigotes para Estimaciones de Superficies de la Evaluación Inicial.....	180
Figura 6. 6. Frecuencias Relativas en Porcentaje de las Subestimaciones/Sobrestimaciones, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final.....	187
Figura 6. 7. Diagramas de Cajas y Bigotes para Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Final.....	188
Figura 6. 8. Frecuencias Relativas en Porcentaje de las Subestimaciones/Sobrestimaciones, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final.....	196
Figura 6. 9. Diagramas de Cajas y Bigotes para Estimaciones de Superficies de la Evaluación Final.....	198
Figura 7. 1. Respuesta del Alumno A25 en la Tarea II.3 de la Evaluación Final	208
Figura 7. 2. Respuesta del Alumno A1 en la Tarea II.1 de la Evaluación Inicial	209
Figura 7. 3. Respuesta del Alumno A5 en la Tarea I.3 de la Evaluación Inicial.....	209
Figura 7. 4. Respuesta del Alumno A23 en la Tarea I.1 de la Evaluación Inicial.....	210
Figura 7. 5. Respuesta del Alumno A12 en la Tarea II.1 de la Evaluación Inicial	210
Figura 7. 6. Respuesta del Alumno A13 en la Tarea II.1 de la Evaluación Inicial	211
Figura 7. 7. Respuesta del Alumno A6 en la Tarea I.1 de la Evaluación Inicial.....	211
Figura 7. 8. Respuesta del Alumno A21 en la Tarea I.7 de la Evaluación Inicial.....	213
Figura 7. 9. Respuesta del Alumno A14 en la Tarea I.7 de la Evaluación Final.....	213
Figura 7. 10. Respuesta del Alumno A11 en la Tarea I.1 de la Evaluación Final.....	214
Figura 7. 11. Respuesta del Alumno A10 en la Tarea I.3 de la Evaluación Inicial.....	214
Figura 7. 12. Respuesta del Alumno A4 en la Tarea II.1 de la Evaluación Inicial	215
Figura 7. 13. Respuesta del Alumno A21 en la Tarea II.3 de la Evaluación Final	216
Figura 7. 14. Respuesta del Alumno A15 en la Tarea I.3 de la Evaluación Inicial.....	218
Figura 7. 15. Respuesta del Alumno A9 en la Tarea I.1 de la Evaluación Inicial.....	219

Figura 7. 16. Frecuencias Relativas de los Distintos Tipos de Error Detectados en la Evaluación Inicial.	224
Figura 7. 17. Frecuencias Relativas de los Distintos Tipos de Error Detectados en la Evaluación Final.	229
Figura 7. 18. Frecuencias Relativas de los Tipos de Error en las Tareas de Estimación de Longitudes, de la Evaluación Inicial y Final.	230
Figura 7. 19. Frecuencias Absolutas de los Tipos de Error en las Tareas de Estimación de Superficies, de la Evaluación Inicial y Final.	231
Figura 7. 20. Diagrama de Flujo de Estrategias de Estimación de Longitudes y Superficies.	236
Figura 7. 21. Leyenda del Diagrama de Flujo.	237
Figura 8. 1. Dendrograma de Conglomerados Jerárquico Obtenido a partir de Calificaciones Medias de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Inicial y Final.	288
Figura 8. 2. Calificaciones Medias de las Estimaciones de Longitudes en la Evaluación Inicial y Final Agrupadas en Clúster.	289
Figura 8. 3. Dendrograma de Conglomerados Jerárquico Obtenido a partir de Calificaciones Medias de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Inicial y Final.	294
Figura 8. 4. Calificaciones Medias de las Estimaciones de Superficies en la Evaluación Inicial y Final Agrupadas en Clústeres.	295

PRESENTACIÓN

La investigación que aquí se presenta pretende describir y caracterizar la capacidad estimativa en longitud y superficie de un grupo de alumnos de 3º de Educación Secundaria Obligatoria siguiendo la metodología de las investigaciones de diseño.

El trabajo está estructurado en nueve capítulos, seguidos del listado de referencias bibliográficas utilizadas y de los apéndices. En líneas generales, los capítulos 1 al 4 recogen el problema de investigación y el marco teórico; en el capítulo 5 se describe la metodología utilizada; en los capítulos 6 al 8 se analizan los datos y se extraen conclusiones; para finalizar con el capítulo 9 donde se presentan conclusiones del trabajo, aportaciones y líneas de investigación abiertas.

En el capítulo 1 se detalla el origen que motivó el problema de investigación¹; se plantea el objetivo general que persigue esta investigación y se desglosa en objetivos específicos; por último se justifica la pertinencia de la investigación en base a los siguientes motivos: (1) la estimación en medida forma parte del currículo escolar; (2) numerosos investigadores e informes avalan su importancia (3) la estimación en medida contribuye a la adquisición de competencias; (4) es de utilidad en la vida real; (5) es un tema novedoso y necesario para la investigación; (6) la estimación conecta con la resolución de problemas; y (7) es una herramienta para la enseñanza de otros conceptos.

En el Capítulo 2 se describen los conceptos y destrezas relacionados con la magnitud, la medida o la estimación y se realiza una aproximación al modo en que se incorporan al currículo escolar. Este capítulo recoge una fundamentación de conceptos destrezas y aportaciones de diferentes investigadores que tienen un papel relevante en nuestra investigación tanto para el análisis de las producciones de los alumnos como para la planificación del trabajo en el aula.

En el Capítulo 3 se realiza una revisión de investigaciones y trabajos previos desde cuatro puntos de vista según su principal foco de estudio sea: (1) la precisión de las estimaciones; (2) las estrategias de estimación empleadas; (3) los métodos de

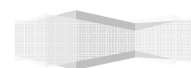
¹ Supone una continuación de una investigación piloto que lleva por título “Estimación de Cantidades Continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa” (Castillo, 2006)

enseñanza-aprendizaje y su incidencia en el desarrollo de la capacidad estimativa; y (4) un último grupo de estudios que analizan otros elementos tales como la importancia de la estimación en medida, los tiempos de reacción en la realización de las estimaciones, el efecto del desorden en las estimaciones, el uso del ordenador en la estimación o cómo influye la edad del estimador. Cerramos el capítulo con una clasificación de las investigaciones de estimación en medida atendiendo a si la magnitud es discreta o continua.

El capítulo 4 se describen las componentes de la estimación en medida y los errores que cometen los alumnos al resolver tareas de estimación en medida. Ambas partes están construidas partiendo de la reflexión teórica (recogida en capítulos 1, 2 y 3) y suponen la adopción de posturas particulares, tales como la asunción de qué elementos intervienen en la enseñanza-aprendizaje de la estimación en medida o fijar un margen de error aceptable en las estimaciones.

En el capítulo 5 se describe la metodología utilizada (metodología de las investigaciones de diseño); también se describe el centro donde se realizó el estudio, así como los alumnos que formaron la muestra; se presentan las variables de tarea que vamos a considerar y que posteriormente servirán para explicar resultados; se describe cada una de las sesiones que formaron parte del proceso de enseñanza aprendizaje: justificando y planteando objetivos instruccionales que se pretendían alcanzar en cada una de ellas, características metodológicas de cada sesión tales como, materiales (de trabajo en el aula y de recogida de datos), agrupamientos, temporalización, tareas, etc., y se realiza un primer análisis de los datos recogidos que sirve para diseñar la siguiente sesión. Finalmente, se describe la relación entre el diseño de cada una de las sesiones y las componentes de la estimación en medida descritas en el capítulo anterior.

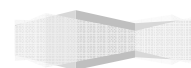
En el capítulo 6 se recogen los resultados cuantitativos del análisis de la evaluación inicial y final diferenciando entre tareas de estimación de longitudes y de superficie, se realizan comparativas tanto entre magnitudes como entre los resultados iniciales y finales a fin de valorar la evolución de los alumnos. Las posturas adoptadas en el capítulo 4 respecto del error y de la aceptabilidad de las estimaciones condicionan los resultados obtenidos en este capítulo. También se analiza la influencia de factores independientes y se relacionan los resultados obtenidos en cada caso con las variables de las tareas involucradas, descritas en el capítulo 5.



En el capítulo 7 se analizan cualitativamente los datos de la evaluación inicial y final desde dos puntos de vista: tipología de errores y estrategias de estimación. En el estudio de ambas partes son determinantes las producciones de los alumnos y a las revisiones teóricas (en especial, el apartado 2 del capítulo 4 para el estudio de errores; y apartado 4.2 del capítulo 2 así como apartado 2 del capítulo 3 para el estudio de estrategias). En el estudio de las estrategias se analizan los elementos que las articulan tales como unidades de medida, referentes y procesos involucrados.

En el capítulo 8 se estudian individualmente a los alumnos. Para ello, se analizan las producciones de una selección de alumnos en base a: la precisión que desarrollan en las estimaciones; si presentan tendencia hacia la subestimación/sobrestimación; la percepción de la magnitud; el dominio de la terminología asociada; la adecuación de la unidad de medida; la interiorización de las unidades de medida; la interiorización de referentes; y el uso de estrategias. Para realizar las valoraciones relativas a precisión y tendencia se establecen sendas escalas. Finalmente, se buscan características comunes a los alumnos que nos permitan establecer perfiles de alumnos en base a la capacidad estimativa en longitud y en superficie, y analizamos si existe correlación entre ambas capacidades.

En el capítulo 9 se extraen conclusiones del trabajo, se presentan las principales aportaciones de la investigación, se describen las limitaciones y se sugieren líneas de investigación abiertas para futuros estudios.



CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

La mayoría de los adultos estimamos medidas de manera cotidiana. Calculamos a qué distancia está el trabajo, a qué hora nos tenemos que levantar para llegar a tiempo, cuánta leche cabe en el vaso, qué superficie debe tener la pizza cuando extendemos la masa para que quepa en el plato, cuántas cerezas echamos en la bolsa para que pese un kilo, etc. Estas cuestiones son de una gran utilidad práctica en la vida real, pero ¿Es admisible el error? ¿De qué depende la precisión de nuestras estimaciones? ¿En qué unidad de medida se debe expresar el resultado? ¿Conocemos el tamaño de las unidades estandarizadas? ¿Existe tendencia a la subestimación o a la sobrestimación? ¿Qué tipos de errores cometemos? ¿Qué estrategias se pueden utilizar? ¿Cuál es la mejor estrategia? ¿Cómo influye la forma de la cantidad a estimar? Y la posición espacial de la cantidad a estimar, ¿también influye? ¿Qué destrezas previas son necesarias para realizar estimaciones en medida? ¿Se enseñan en la escuela? ¿Dónde se aprenden? ¿Cómo se enseña? ¿Cómo se aprende?

Son muchas las preguntas que nos podemos plantear referidas a este tema. En la presente investigación trataremos de dar respuesta a algunas de ellas, centrándonos en la estimación en medida² de cantidades de longitud y superficie. Nuestra investigación se enmarca dentro de un área en la que están implicados una gran variedad de conceptos y destrezas referidos a las magnitudes, su medida y la estimación.

Este trabajo supone una continuación a una investigación piloto que lleva por título “Estimación de Cantidades Continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa” (Castillo, 2006) realizada para por el autor de esta tesis para la obtención del diploma de estudios avanzados.

En este capítulo detallamos las causas que motivan esta investigación, definimos el problema de investigación por medio de los objetivos que pretendemos alcanzar con la misma, y justificamos su pertinencia desde una visión investigadora y curricular. .

² En el apartado 3 del capítulo 2 describimos qué entendemos por estimación en medida.

1. ORIGEN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Nuestro problema surgió a partir de unas prácticas que realizan los estudiantes para maestro de Educación Primaria en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada en una asignatura adscrita al área de Didáctica de la Matemática. En dichas prácticas se les pide a los alumnos que estimen la medida de diversas cantidades. Así se ha detectado que muchos alumnos dan como respuesta a algunas cuestiones de estimación lo que cabría calificarse de “disparate”, en el sentido de que en algunos casos el error absoluto cometido es muy superior al 100%.

Estas dificultades para estimar se ratificaron en el Trabajo de Investigación que hicimos previo a esta tesis anteriormente mencionado (Castillo, 2006). En dicho trabajo se les pedía a los alumnos (un grupo de 3º de E.S.O. y otro grupo de estudiantes de Magisterio) que estimaran algunas cantidades de Longitud, Superficie, Capacidad y Masa. El análisis de las respuestas de los estudiantes puso de manifiesto que los alumnos subestimaban cuando se les proponían tareas de estimación relativas a longitud y superficie; y por el contrario, sobreestimaban cuando se trataba de tareas de capacidad y masa.

En el presente trabajo dirigimos la atención hacia estudiantes de secundaria y tratamos de describir y caracterizar la capacidad estimativa de los mismos e indagar en las causas que provocan que incurran en errores tan elevados al realizar estimaciones. La capacidad estimativa depende de muchos factores, tanto internos al individuo, pues tiene una componente sensorial (Callís, 2002) y requiere la interiorización de determinadas destrezas (Segovia, Castro, Rico y Castro, 1989); como también factores externos al individuo que dependen del objeto a medir, unidades a utilizar, etc. (Del Olmo, Moreno y Gil, 1999). Para investigar en los factores que hacen que la capacidad estimativa mejore pretendemos llevar a cabo un proceso de intervención en el aula con un grupo multicultural de alumnos de 3º curso de E.S.O.

Las normativas curriculares en España (Decreto 148 para Secundaria) hacen hincapié en la necesidad de enseñar a estimar. Sin embargo, en los libros de texto no suelen aparecer tareas de estimación. Por tanto, parece pertinente analizar si las dificultades que los alumnos manifiestan cuando se enfrentan a tareas de estimación son debidas a una inadecuada preparación, a la falta de práctica y manejo de ciertos conceptos o, simplemente son debidas a la dificultad intrínseca que conllevan este tipo de tareas.



2. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El **objetivo general** de nuestra investigación es *describir y caracterizar la capacidad estimativa en longitud y superficie, analizar cómo evoluciona con la práctica y detectar elementos de influencia.*

Tomando la precisión de las estimaciones, las componentes de la estimación interiorizadas, las estrategias empleadas y los errores cometidos, como elementos descriptivos de la capacidad estimativa de los estudiantes este objetivo general se concreta en los siguientes **objetivos específicos** relativos todos ellos a estimaciones de cantidades de las magnitudes longitud y superficie:

Respecto a la precisión de las estimaciones:

- O1. Estudiar la precisión de los alumnos en tareas de estimación en longitud y superficie y detectar elementos que la condicionan
- O2. Analizar si existe tendencia a la subestimación o sobrestimación y detectar elementos que la caracterizan.

Respecto a los procedimientos de estimación:

- O3. Estudiar qué componentes de la estimación tienen interiorizadas los alumnos.
- O4. Describir qué estrategias emplean los alumnos en la realización de tareas de estimación.
- O5. Estudiar cómo influyen las estrategias utilizadas en la precisión de las estimaciones.

Respecto a los errores y su influencia:

- O6. Caracterizar los errores que cometen los alumnos cuando realizan tareas de estimación en longitud y superficie.
- O7. Analizar la influencia de los errores en la precisión de las estimaciones y su relación con el tipo de estrategia empleada.

Respecto al tipo de alumnos:

- O8. Analizar la influencia del factor nacionalidad en la precisión de las estimaciones.



O9. Identificar perfiles de alumnos según su capacidad estimativa y caracterizarlos.

Con respecto a las tareas de estimación propuestas:

O10. Indagar qué variables de tarea influyen en la capacidad estimativa puesta de manifiesto por los estudiantes .

Con respecto a la evolución:

O11. Estudiar cómo evoluciona la capacidad estimativa con la práctica.

Con respecto a la aplicación del diseño:

O12. Valorar ventajas e inconvenientes que subyacen a la metodología de la investigación de diseño.

El estudio de la evolución de la capacidad estimativa con la práctica (O11) será un objetivo transversal a los anteriormente indicados. En concreto estudiaremos cómo evoluciona la precisión (O1), la tendencia (O2), la interiorización de las componentes de la estimación en medida (O3), las estrategias (O4 y O5), los errores (O6 y O7) y caracterizaremos los alumnos teniendo en cuenta su evolución (O8 y O9). El estudio de la evolución también nos servirá para identificar dificultades inherentes a las tareas (O10).

3. PERTINENCIA DE LA INVESTIGACIÓN

Nuestra investigación trata de dar respuesta a un problema educativo que surgió en el aula. Otros motivos que justifican la pertinencia de la investigación en estimación de manera general, se han explicitado en trabajos previos (Castillo, 2006): (1) la estimación en medida forma parte del currículo escolar, y por tanto, es necesario conocer todos los aspectos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la misma; (2) numerosos investigadores e informes avalan su importancia (3) la estimación en medida contribuye a la adquisición de competencias; (4) es de utilidad en la vida real; (5) es un campo novedoso para la investigación; (6) la estimación conecta con la resolución de problemas; (7) es una herramienta para la enseñanza de otros conceptos. Estos y otros aspectos sobre la estimación son desarrollados en capítulos posteriores.



3.1. La Estimación en el Currículo Escolar

La estimación en medida forma parte tanto del currículo de Primaria como del de Secundaria. En los siguientes apartados destacamos referencias a la estimación encontradas en las directrices curriculares actuales sobre los contenidos mínimos a tratar en las diferentes etapas educativas.

3.1.1. La Estimación en el Currículo de Primaria

Revisando el Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria nos encontramos que la Estimación de Cantidades Continuas es una parte muy importante del currículo de primaria, pues forma parte del núcleo principal de uno de los bloques en que se estructura la Educación en esta etapa. En concreto, las matemáticas en primaria se estructuran en cuatro grandes bloques, de los cuales, el segundo está claramente relacionado con los conceptos que tratamos.

“El contenido del bloque 2, La medida: estimación y cálculo de magnitudes, busca facilitar la comprensión de los mensajes en los que se cuantifican magnitudes y se informa sobre situaciones reales que niños y niñas deben llegar a interpretar correctamente. A partir del conocimiento de diferentes magnitudes se pasa a la realización de mediciones y a la utilización de un número progresivamente mayor de unidades. Debe considerarse la necesidad de la medición, manejando la medida en situaciones diversas, así como estableciendo los mecanismos para efectuarla: elección de unidad, relaciones entre unidades y grado de fiabilidad. Se puede partir para ello de unidades corporales (palmo, pie...), arbitrarias (cuerdas, varas...) para pasar a las medidas normalizadas, que surgen como superación de las anteriores.” (p. 43096)

Estos contenidos se desglosan por ciclos en el Real Decreto 1513/2006. Comencemos por el Primer Ciclo donde encontramos los siguientes contenidos relacionados con la estimación. En el *Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes*, aparecen los siguientes contenidos relacionados con la estimación:

“- Estimación de resultados de medidas (distancias, tamaños, pesos, capacidades...) en contextos familiares. Explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición.” (p. 43097)



Y el criterio de evaluación asociado es el siguiente:

“2. Compara cantidades pequeñas de objetos, hechos o situaciones familiares, interpretando y expresando los resultados de la comparación, y ser capaces de redondear hasta la decena más cercana.

Se trata de apreciar la capacidad para estimar cantidades pequeñas de objetos, de forma oral o mediante escritura cifrada, como etapa previa al cálculo exacto. Una vez realizado el conteo o la operación, se debe valorar la capacidad de contraste con la estimación previa. Asimismo, se valorará si saben redondear, escogiendo entre las respuestas razonables, el resultado de un cálculo hasta la decena más cercana.” (p. 43098)

De forma análoga nos encontramos en el Segundo Ciclo, dentro del *Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes*, los siguientes contenidos relacionados con la estimación:

“- Estimación de medidas de objetos de la vida cotidiana.” (p. 43099)

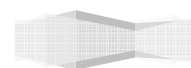
Y el criterio de evaluación asociado es el siguiente:

“4. Realizar, en contextos reales, estimaciones y mediciones escogiendo, entre las unidades e instrumentos de medida usuales, los que mejor se ajusten al tamaño y naturaleza del objeto a medir.

Este criterio trata de valorar la competencia para elegir tanto el instrumento como la unidad de medida más adecuada para efectuar mediciones, en función de lo que se vaya a medir. Igualmente se desea apreciar la capacidad de estimación a partir de previsiones más o menos razonables. También se pretende comprobar si se utilizan en situaciones de la vida cotidiana las unidades de medida propias del ciclo, convertir una en otras y que los resultados de las mediciones se expresan en la unidad de medida más adecuada. Así mismo, se valorará la capacidad de explicar oralmente y por escrito los razonamientos seguidos.” (p. 43100)

Del mismo modo, en el Tercer Ciclo volvemos a hallar lo siguientes contenidos:

En el *Bloque 2. La medida: estimación y cálculo de magnitudes*, de nuevo nos encontramos contenidos relacionados con la estimación:



“- Estimación de longitudes, superficies, pesos y capacidades de objetos y espacios conocidos: elección de la unidad y de los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida.

- Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en mediciones y estimaciones.”

Y el criterio de evaluación correspondiente sería el siguiente:

“4. Seleccionar, en contextos reales, los más adecuados entre los instrumentos y unidades de medida usuales, haciendo previamente estimaciones y expresar con precisión medidas de longitud, superficie, peso/masa, capacidad y tiempo.

Con este criterio se pretende detectar la capacidad de escoger los instrumentos de medida más pertinentes en cada caso, y de estimar la medida de magnitudes de longitud, capacidad, masa y tiempo haciendo previsiones razonables. También se quiere comprobar la capacidad de utilizar con corrección las unidades de medida más usuales, convertir unas unidades en otras de la misma magnitud, y que los resultados de las mediciones que se realizan se expresan en las unidades de medida más adecuadas. Así mismo, se valorará la capacidad de explicar oralmente y por escrito, con progresiva autonomía, los razonamientos.”
(p. 43101).

Este Real Decreto 1513/2006 tiene su adaptación para Andalucía en el Decreto 230/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación primaria en Andalucía. Dicho Decreto concreta el currículo en la Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. Análogamente a como ocurre en Secundaria, en el decreto y en la orden anteriormente mencionadas no se especifica qué contenidos se deben desarrollar (dichos contenidos ya están detallados en el Real Decreto 1513/2006) sino que se dan una serie de orientaciones metodológicas agrupadas en varios núcleos temáticos, no haciéndose referencia expresa a la estimación.

3.1.2. La Estimación en el Currículo de Secundaria

Revisando el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria nos encontramos que es un contenido que debe trabajarse en los cursos 1º y 2º. En el Primer

Curso de la Educación Secundaria Obligatoria se incluyen los contenidos relacionados con la estimación de cantidades continuas:

“Estimación y cálculo de perímetros de figuras. Estimación y cálculo de áreas mediante fórmulas, triangulación y cuadriculación” (p. 753).

Además de los contenidos, la ley también establece los criterios de evaluación, donde en el quinto criterio se hace referencia a:

“5. Estimar y calcular perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando la unidad de medida adecuada.

Se pretende valorar la capacidad de estimar algunas medidas de figuras planas por diferentes métodos y de emplear la unidad y precisión más adecuada. Se valorará también el empleo de métodos de descomposición por medio de figuras elementales para el cálculo de áreas de figuras planas del entorno.” (p. 753)

En el Segundo Curso de esta etapa podemos apreciar que también se hace referencia a estos contenidos. En el *Bloque 4. Geometría.*, se relatan los siguientes contenidos relativos a la estimación en longitudes, superficies y volúmenes:

“Volúmenes de cuerpos geométricos. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.” (p. 754)

Y en lo que se refiere a criterios de evaluación, observamos que también hay un criterio que trata estos contenidos:

“4. Estimar y calcular longitudes, áreas y volúmenes de espacios y objetos con una precisión acorde con la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada.

Mediante este criterio se valora la capacidad para comprender y diferenciar los conceptos de longitud, superficie y volumen y seleccionar la unidad adecuada para cada uno de ellos. Se trata de comprobar, además, si se han adquirido las capacidades necesarias para estimar el tamaño de los objetos. Más allá de la habilidad para memorizar fórmulas y aplicarlas, este criterio pretende valorar el grado de profundidad en la comprensión de los conceptos implicados en el proceso y la diversidad de métodos que se es capaz de poner en marcha.” (p. 755).



En el Tercer y Cuarto Curso de la Educación Secundaria Obligatoria no se hace referencia a contenidos de estimación en medida.

Este Real Decreto 1631/2006 tiene su consecuente decreto correspondiente para Andalucía, que sería el Decreto 231/2007 de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en esta comunidad. Como ocurría en Primaria, dicho decreto no especifica qué contenidos se deben tratar relacionados con la Estimación de Cantidades Continuas, sino que simplemente da una serie de orientaciones metodológicas en la Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.

3.2. La Estimación en Otros Documentos Curriculares

Callís (2002) realiza una revisión de diferentes documentos curriculares que han tenido y tienen especial trascendencia. A continuación resumimos algunos de ellos:

- **Informe Cokcroft (1982).**

Entre las necesidades más destacables se plantea que todo adulto necesita dominar de manera muy clara y efectiva, todo aquello relacionado con el mundo de las magnitudes (pesar, medir longitudes, superficies y volúmenes, saber entender y comprender tablas y gráficos, saber efectuar cálculos a partir de tablas e, igualmente, tener capacidad por saber realizar estimaciones y aproximaciones siendo el número la clave del dominio matemático: “tener el sentido del número que permita hacer estimaciones y aproximaciones aceptables y que permiten llevar a cabo cálculos mentales sencillos”.

En referencia a la medida y la estimación, el informe explicita:

“Aunque la estimación es importante, contar y medir aún lo son más. Gran parte de las matemáticas que se hacen en el trabajo tienen que ver, de una u otra manera, con las medidas; significando, que todo está relacionado directamente con el uso de instrumentos de medida. Las medidas se concretan de maneras muy diversas, por ejemplo, en términos de cantidad de dinero, de longitud, peso o volumen, de proporciones, porcentajes o razones. Se utilizan las unidades métricas, además de las que son propias y específicas de una determinada profesión o industria.



En el término medida hay dos aspectos diferenciales, el primero, trata de determinar una medida ya existente, como la longitud, peso o número de unidades; en el otro, es necesario crear la medida que se desea. En cualquier caso, hay que ser consciente del margen de precisión que se necesita sabiendo elegir, en cada situación, el instrumento de medida más adecuado.

Aumentar la experiencia a través de cálculos o medidas, ayuda a un mejor desarrollo de la estimación y aproximación y a tener conciencia de la razonabilidad del resultado.

Es posible resumir una gran parte de las necesidades en el trabajo como un “sentido de la medida”. Eso implica mucho más que una simple habilidad por calcular, estimar o utilizar instrumentos de medida. Implica a un conocimiento de la naturaleza y utilidad de la medida, de los diferentes métodos de medición y de las situaciones en que ha que emplear cada uno de ellos, también, de capacidad por saber interpretar el significado de medidas expresadas de maneras diferentes”.

- **COPIRELEM: Comisión Permanente del IREM (1982).**

La consideración con respecto a la formación necesaria que se debe dar al profesorado de Enseñanza Primaria, destaca como elementos prioritarios:

- “Las fases de iniciación del aprendizaje se debe dirigir en la necesidad de trabajar la magnitud sin recurrir a su medida.
- Necesidad de practicar la estimación y aproximación con diferentes niveles de precisión.
- Tomar conciencia de la razonabilidad y probabilidad de los resultados.
- Saber hacer aproximaciones simplificadoras por tal de saber determinar la orden magnitudinal que hay que utilizar.”

- **National Science Board (EEUU, 1983).**

Analiza y presenta las necesidades formativas en el campo matemático tanto por la educación primaria como por la secundaria. Con respecto a la primera plantea catorce contenidos básicos. El enfoque tiene una fuerte connotación numérica: “hay que desarrollar el sentido numérico, incluyendo el uso efectivo y inteligente de los números

en aplicaciones o en otro contexto matemáticos” y en referencia a la medida plantea dirigir la formación verdaderos:

- *Potenciar el desarrollo de destrezas de estimación y aproximación.*
- *Desarrollar la comprensión geométrica intuitiva y la capacidad por utilizar las fórmulas por medir figuras bi y tri-dimensionales.*

Su objetivo es la de modificar la tendencia educativa imperante por adecuarla a las nuevas necesidades: “*los resultados del SIMS, que tienen eco en de otros informes nacionales es que al alumnado no se le ofrece más que una direccionalidad muy básica de la matemática que incluye, sobre todo, aritmética y medida, oriente a fines utilitarios y que, fines y todo, aunque los planificadores del currículo planteen otros enfoques, no siempre se cumplen en la aula*”.

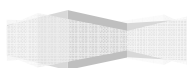
- **NCTM: National Council of Teachers of Mathematics (1991).**

Se remarca la necesidad de trabajar sobre diez puntos prioritarios por tal de mejorar la capacidad matemática de la sociedad, entre los que se encuentra la estimación.

- 1.- *Resolver problemas*
- 2.- *Aplicar las matemáticas a las situaciones cotidianas*
- 3.- *Comprobar el grado de razonabilidad de los resultados*
- 4.- *Estimar y aproximar*
- 5.- *Calcular mediando técnicas apropiadas*
- 6.- *Geometría*
- 7.- *Medida*
- 8.- *Leer, interpretar y construir medidas, mapas y gráficos.*
- 9.- *Emplear las matemáticas para saber predecir*
- 10.- *Tener conocimientos generales de computación*

- **El Proyecto PISA 2003.**

Según el Proyecto Pisa 2003 las líneas principales del currículo escolar son cuatro: *Cantidad, Espacio y forma, Cambios y relaciones, e Incertidumbre*. Veamos algunas ideas relacionadas con nuestro trabajo: En la categoría *Cantidad* nos encontramos las siguientes reflexiones:



“Un aspecto importante es el razonamiento cuantitativo, que incluye el sentido numérico, la representación de números de varios modos, los tamaños relativos, la comprensión del significado de las operaciones, cálculo mental y la estimación”.

3.3. La Estimación Contribuye a la Adquisición de Competencias

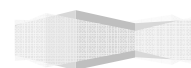
La LOE describe la Competencia Matemática como la *“habilidad para utilizar números y sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático para producir e interpretar informaciones, para conocer más sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad y para resolver problemas relacionados con la vida diaria y el mundo laboral.”*. Esta competencia adquiere sentido en la medida en que los elementos o razonamientos matemáticos se utilizan para enfrentarse a situaciones cotidianas variadas que lo aconsejan (véase Rico y Lupiáñez, 2008). Requiere, por tanto, la identificación de tales situaciones, la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar a partir de la información disponible y la aplicación de estrategias de resolución de problemas. En este sentido, la Estimación de Cantidades Continuas es una herramienta muy importante para trabajar con números en situaciones reales, puesto que nos permite hacer una valoración numérica manteniendo un cierto control sobre la validez de dicha valoración. Mención aparte merecen aquellas ciencias, técnicas o profesiones que hacen un uso sistemático de la estimación. Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) realizan una revisión de situaciones por las cuales es importante el uso de la estimación.

En definitiva, formar a alumnos/as competentes en estimación no solo les va a permitir mejorar su Competencia Matemática, ya que indirectamente están asimilando conceptos como son el concepto de magnitud, medida, unidades de medida, procesos o estrategias propias de la estimación, etc. También les va a permitir mejorar otras competencias como son:

- Competencia social y ciudadana.

Como hemos visto anteriormente, la estimación es una práctica que está muy extendida en la sociedad. Dominarla va a permitir al alumno/a mejorar en sus relaciones sociales.

- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.



Mejorar la capacidad estimativa va a permitir a los alumnos/as reforzar su habilidad para interactuar con el mundo físico, tanto en aspectos naturales como en los generados por la acción humana.

- Competencia en comunicación lingüística.

Cuando un alumno/a realiza una estimación, no sólo está poniendo en juego conocimiento matemático, sino que también está poniendo en práctica la utilización del lenguaje como instrumento de comunicación oral y escrita, está utilizando un vocabulario propio específico, unos conceptos y términos propios de la estimación.

- Competencia para aprender a aprender.

La estimación en cálculo es una herramienta que puede ser complementaria para el cálculo, pues puede ayudar al alumno/a a tener una idea del resultado que debe obtener cuando realiza algún cálculo. Sirve, por tanto, para verificar la validez de determinados resultados. Análogamente, la estimación en medida, permite al alumno/a verificar la validez de una medida determinada. Ayuda por tanto, al alumno/a a aprender de una forma autónoma. Supone también poder desenvolverse ante las incertidumbres tratando de buscar respuestas que satisfagan la lógica del conocimiento racional.

- Autonomía e iniciativa personal.

La capacidad estimativa puede posibilitar al alumno/a para optar con criterio propio y llevar adelante las iniciativas necesarias para desarrollar la opción elegida y hacerse responsable en ella, tanto en el ámbito personal como en el social.

3.4. La Estimación es de Utilidad en la Vida Real

La estimación no solo es importante porque su uso está muy extendido en nuestra sociedad, ya que sin darnos cuenta realizamos estimaciones continuamente, también es necesaria porque existen situaciones en las que es necesario recurrir a la estimación debido a la imposibilidad de conocer o calcular el valor numérico exacto. Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) recogen las causas por las que es necesario estimar³.

³ Descritas en apartado 3.3 del Capítulo 2.



Trabajos como el de Adams y Harrell (2003) dedicados íntegramente a estudiar el uso de la estimación en diferentes profesiones ponen de manifiesto su importancia. Estos autores recogen seis razones⁴ que dan diferentes profesionales acerca de por qué es necesario estimar.

Son numerosos los investigadores que destacan la importancia de la estimación como herramienta para conectar los conocimientos matemáticos con la vida real (Bright, 1976, 2003; Inskeep, 1976; Coburn y Shulte, 1986; Corle, 1963; Hall, 1984; May, 1994; Joram et al. 1998; Reys et al., 2001)

3.5. La Estimación es un Campo Novedoso para la Investigación

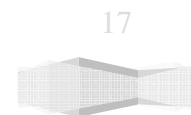
La estimación es un campo novedoso por la escasez de investigaciones (Benton, 1986, Swoder, 1992) y porque, como apuntan Siegel, Goldsmith y Madson (1982), son relativamente pocas investigaciones las que se atreven a abordar el desarrollo curricular de las técnicas de estimación. Se sabe poco acerca de los procesos involucrados en la estimación y sobre cómo se puede contribuir eficazmente al desarrollo de la capacidad de estimación en medida (Joram et al., 1998).

A pesar de ser que los investigadores llevan muchos años aconsejando su incorporación a la escuela (Holmes, 1975), este tipo de actividades se han trabajado muy poco en las aulas. Frías, Gil y Moreno (2001) argumentan como una de las posibles razones que “no se dispone de orientaciones lo suficientemente precisas sobre cómo hacerlo” (p. 497).

3.6. La Estimación Conecta con la Resolución de Problemas

La relación de la Estimación con la Resolución de Problemas no es algo fortuito, pues comparten algunas características. Polya (1945) identifica como etapas de la resolución de problemas: **COMPENSIÓN** del problema, **PLANIFICACIÓN** o Concepción de un plan, **EJECUCIÓN** del plan, **VALORACIÓN** de la respuesta y del proceso seguido. La resolución de una tarea de estimación en medida, en sí misma, requiere de la aplicación de cada uno de dichos pasos. Paull (1971) realiza una investigación en la que demuestra que hay una correlación significativa positiva entre la capacidad estimativa y la habilidad para resolver problemas por el método de ensayo y error.

⁴ En Capítulo 3, apartado 4, se detallan.



Desde otro punto de vista, la estimación en medida puede contribuir a la resolución de problemas de medida como herramienta de valoración del resultado obtenido. Si el individuo mediante la estimación tiene una idea aproximada de la medida que debe obtener, al resolver el problema podrá valorar si el resultado está en un rango razonable. Todos los métodos de resolución de problemas tienen esta fase final de valoración del resultado susceptible de ser realizada usando la estimación, véase el método IDEAL de Bransford y Stein (1984) o el método propuesto por Puig y Cerdán (1988).

Diversos investigadores reivindican la relación entre la resolución de problemas y la estimación (Markovits et al. 1987) y la ponen de manifiesto:

La estimación “conecta con la resolución de problemas (contribuye a mejorar la práctica de algunas técnicas de resolución de problemas, como la adquisición de flexibilidad mental en la manipulación de datos, la selección de estrategia(s) apropiada(s) y la valoración de la razonabilidad de los resultados alcanzados)” Cajaville (2007, p. 38)

3.7. La Estimación es una Herramienta para la Enseñanza de Otros Conceptos

La estimación es considerada por muchos investigadores como una herramienta útil para el aprendizaje de otros conceptos. El propio Bright (1976) la considera como una parte de la enseñanza de la medida y anima a los profesores a utilizarla:

“la estimación puede convertirse en un parte significativa del currículo de matemáticas en la escuela pública. Todo lo que se requiere a los profesores es que reconozcan su utilidad y aprovechen la variedad de actividades que abarca. Los estudiantes disfrutan con la estimación, por tanto, los maestros no tienen por qué temerle y usarlo como una de sus herramientas de enseñanza.” (p. 104).

En la misma línea, Buchaman (1976) considera que la estimación desarrollada desde una edad temprana puede convertirse en una herramienta para aprender habilidades y conceptos. Este uso útil y funcional de la estimación lo pone de relieve Whitin (2004). Frías, Gil y Moreno (2001) destacan la importancia del tratamiento curricular de la estimación, porque a su juicio se debe incidir en el trabajo en el aula en “la potenciación de la estimación como una de las habilidades que resultan más útiles desde el punto de vista práctico” (p. 482).

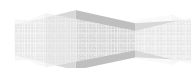
Coburn y Shulte (1986) destaca la importancia de la enseñanza, no sólo de la mecánica de la medición, sino también de la estimación en medida, pues también forma parte de



las matemáticas. Postura a la que se adhiere Harte y Glover (2003) con su artículo “La Estimación es Pensamiento Matemático”.

Otros investigadores, como Hogan y Brezinski (2003) consideran que la estimación en medida contribuye a desarrollar la capacidad espacial.

Más recientemente, los seguidores la corriente denominada Sentido Numérico también valoran la aportación que la estimación hace al proceso de adquisición del número y las el entramado de relaciones que establece con otros conceptos (Markovits, 1987; Sowder, 1992).



CAPÍTULO 2: DESCRIPCIÓN DEL ÁREA PROBLEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA

El estudio que nos compete requiere el conocimiento y dominio de conceptos y destrezas relativos a las magnitudes, la medida, y la estimación. El dominio de los conceptos asociados a la magnitud y a su medida son prerrequisitos conceptuales para la estimación en medida (Joram et al., 1998). Los procesos de razonamiento lógicos descritos por Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960), y el conocimiento de los conceptos de medición específicos son fundamentales para la estimación en medida (Hiebert, 1981, 1984). Aunque sean tres ámbitos que se adquieren secuencialmente se complementan mutuamente, pues, en muchas ocasiones el conocimiento de conceptos relativos a alguno de ellos necesita del dominio de conceptos relativos a los anteriores. Por ejemplo, no se puede medir una determinada cantidad de magnitud si, previamente, no percibimos las características o propiedades que tiene dicha cantidad de magnitud. De igual modo, no se puede estimar una medida si no tenemos interiorizadas las unidades de medida o no percibimos la magnitud. Pero a la inversa también ocurre, el conocimiento y puesta en práctica de técnicas y destrezas propias de la estimación contribuye al conocimiento de conceptos relativos a la medida o a la propia magnitud, e incluso como apuntan Carpenter et al. (1980) o Hiebert (1981) puede ser una herramienta importante para detectar brechas en la comprensión de conceptos básicos de medición.

En los siguientes apartados profundizamos en el conocimiento de estos ámbitos matizando los conceptos y realizamos una aproximación al modo en que se incorporan al currículo escolar; la mayor parte de las aportaciones que se recogen tienen un papel relevante en nuestra investigación, bien en el análisis que haremos de cómo estiman los alumnos o bien en la planificación del trabajo en aula.

1. MAGNITUD: CONCEPTUALIZACIÓN Y EPISTEMOLOGÍA

En la matemática clásica, se considera que la magnitud es todo aquello que se puede medir y expresar por medio de una cantidad.



En el Diccionario de la Real Academia Española el término “magnitud” nos encontramos con la siguiente acepción de magnitud “Propiedad física que puede ser medida: p. ej., la temperatura, el peso, etc.”.

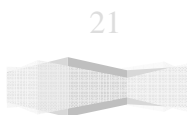
Desde el ámbito matemático una *magnitud* es un conjunto en el que se ha definido una relación de igualdad, formando así el conjunto cociente sobre el que está definida una operación aditiva (semigrupo aditivo conmutativo con elemento neutro) y una relación de orden compatible con la operación. Cada uno de los elementos de este conjunto cociente es una *cantidad*. Esta forma de construir la magnitud es válida para magnitudes extensivas⁵. Esta forma de conceptualizar la noción de magnitud separa completamente las nociones de cantidad y de número (Gómez, 1999).

En un discurso más coloquial, Gete-Alonso y Del Barrio (1989, p. 64) definen “aquellas propiedades de los objetos que podemos comparar utilizando números diremos que son magnitudes”.

Frías, Moreno y Gil (2001, pp. 478-479) realizan una aproximación al concepto de magnitud a partir del concepto de cualidad, recogiendo varios enfoques del concepto de magnitud que resumimos a continuación:

- Aristóteles afirmaba que *magnitud es una cantidad que puede medirse. Un cambio en la cantidad era producido por la adición de partes homogéneas.*
- Descartes clasificaba las cualidades de los cuerpos en: *cualidades primarias*, que son las que se derivan de la realidad fundamental de los cuerpos, son objetivas, intrínsecas e independientes de quien las percibe, y *cualidades secundarias*, que no son más que los sentimientos. Con esto se consolida la concepción de que magnitud es toda cualidad que puede medirse.
- Bertrand Russell liga el concepto de magnitud a los de orden y divisibilidad. Las magnitudes son aquellos *conceptos susceptibles de un orden*, y dentro de ellas diferencia entre *extensivas, aquellas que son divisibles y por tanto aditivas, e intensivas.*

⁵ En el apartado 1.1 concretamos la definición de magnitud extensiva.



1.1. Clasificación de las Magnitudes

Existen diferentes clasificaciones de las magnitudes, algunas de ellas se han dejado entrever en las definiciones expuestas anteriormente. Una primera distinción es magnitudes medibles o extensivas y magnitudes no medibles o intensivas:

Magnitud no medible o intensiva: cuando no es posible, al menos en sentido físico directo, definir la suma en ellas y vienen caracterizadas por un orden. Por ejemplo: la dureza de los minerales.

Magnitud medible o extensiva: cuando sí es posible definir la suma en ellas. Por ejemplo: la longitud.

Otra clasificación podría ser debida a las unidades utilizadas en la medida de dicha magnitud. Las unidades utilizadas en la medida tienen características diferentes según si existe la posibilidad de emplear unidades objetivas que permiten hacer un proceso de igualación entre la magnitud del objeto a medir y la cantidad de unidades a utilizar, como en la longitud, superficie, luminosidad o temperatura; o que estas sean subjetivas (alegría, tristeza, dolor,...). Se diferencian por lo tanto:

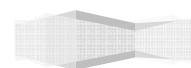
Magnitud cualitativa: cuando la unidad aplicada es referencial o comparativa dentro la magnitud y puede ser modificada fruto de cada momento o circunstancia. Son ejemplo, las escalas ordinales de intensidad sísmica, la dureza,...

Magnitud cuantitativa: cuando existe una unidad “u” que siempre tiene el mismo valor y por lo tanto, cualquier cantidad de magnitud puede ser expresada de forma unívoca como producto de un número por dicha unidad.

Según la estructuración matemática, y por lo tanto centrado exclusivamente en las magnitudes cuantitativas, estas pueden diferenciarse en:

Magnitud discreta: Magnitud cuantitativa en la que no existen valores intermedios entre intervalos de medida, como es el caso de los números enteros.

Magnitud escalar o continua: Cuando la cantidad es arquimediana con respecto a la ordenación total. Tiene, por lo tanto, infinitos términos entre dos intervalos $[n, n + 1]$; de manera que siempre puede garantizarse la división de una cantidad de magnitud en un número de partes iguales, o también, que la medida siempre puede aproximarse indefinidamente.



Otra clasificación que podemos encontrar para las magnitudes es en magnitudes absolutas y relativas.

Magnitud absoluta: La que el semigrupo conmutativo y ordenado que caracteriza y define a una magnitud, no tiene elemento simétrico (por lo tanto no es grupo), como por ejemplo las longitudes, superficie, volumen, capacidad, etc.

Magnitud relativa: Cuando posee elemento simétrico y por lo tanto resulta un grupo abeliano ordenado como por ejemplo en los vectores.

Las dos magnitudes estudiadas en esta investigación (longitud y superficie) son magnitudes medibles o extensivas, cuantitativas, continuas y absolutas. En el caso de la longitud, los elementos o cantidades que forman parte del conjunto Longitud (nombre de la magnitud), desde una perspectiva matemática, son los segmentos; desde una perspectiva práctica estos segmentos están asociados a las dimensiones de los objetos, largo, ancho y alto, a las distancias entre objetos y a las trayectorias de los objetos en movimiento. En el caso de la magnitud superficie los elementos o cantidades del conjunto cociente son los polígonos (Roanes, 1976); desde una perspectiva práctica los polígonos están asociados a los objetos (cada dos dimensiones concretan un polígono), a los que se definen entre objetos y al que se genera cuando un segmento se desplaza.

1.2. Conceptos Relacionados

Asociada a las magnitudes longitud y superficie existen conceptos y términos asociados al conjunto de fenómenos relacionados con ambas magnitudes. Para el caso de la longitud lo son la forma de nombrar las dimensiones de un objeto: largo, ancho, alto, grueso, distancia, longitud.

Distancia y longitud son utilizados como sinónimos en muchas ocasiones. La longitud es un término que se refiere a la magnitud. No obstante, en ocasiones, por economía del lenguaje se nombra con este término a las propias cantidades de dicha magnitud o a su medida. Precisamente esta es la acepción se confunde con el término distancia, pues incluso el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española recoge como acepción de distancia: “Longitud del segmento de recta comprendido entre dos puntos del espacio”, refiriéndose a la medida de dicha cantidad de longitud.



En el caso de la magnitud Superficie, los términos superficie y área se han usado con diferentes acepciones, en unos casos refiriéndose a la magnitud y en otros, para referirse a su medida. Frías, Gil y Moreno (2001, p. 503) recogen esta polémica:

“Hay una falta de unanimidad sobre el significado asignado a los vocablos superficie y área, tanto en el lenguaje coloquial y en los libros de texto, como en las investigaciones: a veces, se utiliza la palabra área para referirse a la cualidad, y superficie para designar su medida, o también se puede observar que para algunos autores, el área es un número, mientras que para otros el área es algo distinto al número que la mide. El área es una propiedad o cualidad de una superficie que puede ser medible, y que, por lo tanto, se puede asociar con un número que es el resultado de la medida.”.

Siguiendo estas sugerencias llamaremos superficie a la magnitud y área para referirnos a las medidas de las diferentes cantidades de superficie (Flores, 2002). No obstante, queremos dejar constancia de que, por economía del lenguaje, es habitual designar con el término superficie a una determinada cantidad de superficie o a su medida. El término área también se suele emplear para referirse a una cantidad de superficie o, incluso, a una unidad de medida de superficie (equivalente a 1 dam^2).

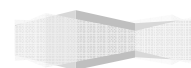
2. MEDIDA: CONCEPTUALIZACIÓN Y EPISTEMOLOGÍA

Dos de las acepciones del término medida del Diccionario de la Real Academia Española son: “Acción y efecto de medir” y “Expresión del resultado de una medición”.

También en el campo específicamente matemático se encuentra una doble significación ligada a la expresión de una cantidad o dimensión en relación a una unidad previamente determinada, y por el otro, a algo que sirve por medir, haciendo referencia pues, al valor numérico de la medida y a los instrumentos de medición.

Desde el punto de vista estrictamente matemático, la medida de una magnitud respecto de una unidad es una aplicación que asocia a cada cantidad de magnitud un número real:

Dadas una magnitud, M , y una cantidad de magnitud, $u \in M$, que denominaremos unidad de medida, podemos definir la aplicación entre M y R_0^+ como sigue:



$$med_u : M \rightarrow R_0^+$$

$$med_u(m) = q \Leftrightarrow m = q \cdot u$$

De la definición se deduce que la medida de una cantidad depende de la unidad elegida.

La definición de medida establecida anteriormente es adecuada para las magnitudes cuantitativas continuas. En el caso de las magnitudes cuantitativas discretas el conjunto de llegada de la aplicación sería el conjunto de los números naturales (incluido el cero).

Desde el punto de vista matemático, medir magnitudes consiste en establecer una correspondencia única y recíproca entre cantidades y números.

2.1. Unidad de Medida

Comencemos por analizar qué es lo que nos dice el Diccionario de la Real Academia Española acerca del término “unidad”: “Cantidad que se toma por medida o término de comparación de las demás de su especie”.

Medir una magnitud se basa en comparar una unidad e indicar el número de veces en que esta unidad le es asignada. La existencia de la unidad, presupone necesariamente el valor del 0 y la adopción de una escala métrica en base al valor unitario, la elección de un objeto físico, la unidad patrón, como modelo que es la unidad material de aplicabilidad.

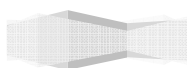
La formalización matemática del concepto de unidad es la siguiente:

Para poder definir unidad es necesario exigir a la magnitud, M , la existencia de algún elemento de M que, al multiplicarlo por todos los números reales positivos multiplicables por todos los elementos de M , genere todo el conjunto M . Es decir, sea S el subconjunto de números reales multiplicables por todos los elementos de M , debe existir un elemento $u \in M$ de manera que para cualquier $a \in M$ existe un $r \in S$ tal que

$$a = r \cdot u$$

Con esta propiedad se dice que el semimódulo, M , es monógeno.

Pues bien, al elemento u que cumple esa condición se le llama unidad.



Observemos que de la definición anterior se deduce que para una magnitud determinada, la unidad no tiene porqué ser única. Esto provocó una problemática que hizo surgir sistemas de unidades que fueran aceptadas internacionalmente, como es el caso del S.I. (Sistema Internacional).

Como ya se indicó en el apartado 1.1 la existencia de unidades es un elemento para clasificar las magnitudes. De la definición se deduce que si la magnitud no es monógena, en ese caso no será medible. En cambio, las magnitudes que son monógenas si son medibles.

2.2. Conceptos Relacionados

Metrización y medición son dos términos que conviene matizar. Callís (2002) realiza una diferenciación de los mismos que vamos a resumir en los siguientes apartados:

- **Metrización**

Callís (2002) define metrización como “la capacidad de dar significación al orden de magnitud que tiene la medida” (p. 39). La asignación de un valor numérico no significa que exista medida si dicho valor numérico no tiene sentido y es un valor numérico sin sentido y descontextualizado. Un sistema métrico no está basado únicamente en la posibilidad de asignar números a las cosas, sino que debe ofrecer la posibilidad de ordenar la magnitud medida. A nivel práctico, la metrización se centra, básicamente, más que en la exactitud y precisión, en la admisión de las medidas en intervalos aproximados.

- **Medición**

Callís (2002) define medición como “la aplicación tecnológica y procedimental que tiene por objetivo la obtención de la medida, o sea, es el conjunto de operaciones físicas o mentales que hay que realizar, con o sin instrumentos, con la finalidad de determinar la medida de un objeto” (p. 40).

Los conocimientos necesarios para medir son muy diferentes dependiendo de la magnitud. No es lo mismo medir longitudes, masas, superficie, volumen o tiempo. Cada magnitud requiere de unas destrezas distintas y del dominio de unos instrumentos de medida diferenciados. Incluso para una misma magnitud existen numerosos instrumentos de medida y cada uno requiere unos conocimientos y unas destrezas. Por



ejemplo, para medir longitudes se puede usar una cinta métrica, una regla, aparatos científicos, tales como, longitudinómetros que funcionan por emisión-recepción de radiaciones de ondas de rayo laser, etc. y cada instrumento requiere de unos procesos diferenciados.

En términos generales se puede decir que “la medición, integra y necesita por su desarrollo, de capacitaciones ligadas a la aplicación de procesos matemáticos, físicos y tecnológicos. Corresponde en el campo matemático, la determinación de la axiomática implícita y sus propiedades, mientras que los métodos e instrumentos por determinar el valor cuantificado con la mayor precisión posible, corresponde a la física y a la tecnología” (Callís, 2002, p. 40).

3. ESTIMACIÓN: CONCEPTUALIZACIÓN Y EPISTEMOLOGÍA

Una de las acepciones que aparecen en el Diccionario de la Lengua Española de la Real Academia Española acerca del término “estimación” es: “Aprecio y valor que se da y en que se tasa y considera algo”.

De esta primera definición podemos observar, puesto que usa palabras como “aprecio” o “considera”, la importante componente sensorial e intuitiva que lleva intrínsecas. Estas componentes las ponen de manifiesto Callís (2002) y las resaltaremos en capítulos posteriores.

Por otra parte en el Diccionario de M. Moliner aparece:

“1. Atribuir a alguien o algo valor para uno mismo o en general [...] 2. Tener sobre una cosa cierta opinión [...] 3. Atribuir a una cosa cierto valor”. (Moliner, 2007, p. 1279)

Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) matizaron la definición en los siguientes términos, que es la que tomaremos como referencia:

“Estimación: juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite”. (p.18)

Como se puede deducir de la definición anterior, se pueden diferenciar dos tipos de estimación, que son los que llamaremos:



- a) Estimación en Cálculo o Cálculo Estimativo.
- b) Estimación en Medida.

En el primer caso nos estaremos refiriendo a los juicios que pueden establecerse sobre los resultados de las operaciones aritméticas. Mientras que en el segundo caso nos referimos a los juicios que pueden establecerse acerca de una determinada cantidad o bien la valoración que nos merece el resultado de una medida.

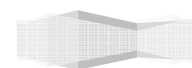
De estas definiciones se deducen las siguientes características que enumera Segovia et. al. (1989), las cuales coinciden parcialmente con las determinadas por Reynolds (1984):

- 1. Consiste en valorar una cantidad o el resultado de una operación.*
- 2. El sujeto que debe hacer la valoración tiene alguna información, referencia o experiencia sobre la situación que debe enjuiciar.*
- 3. La valoración se realiza por lo general de forma mental.*
- 4. Se hace con rapidez y empleando números lo más sencillos posibles.*
- 5. El valor asignado no tiene que ser exacto pero sí adecuado para tomar decisiones.*
- 6. El valor asignado admite distintas aproximaciones, dependiendo de quién realice la valoración.*

3.1. Tipos de Estimación

Una primera clasificación ya la hemos introducido en el apartado anterior: la que consiste en separar la estimación en cálculo de la estimación en medida. Pero ésta última se puede desglosar. Para ello tomaremos como referencia Pareja (2001, pág. 4), donde podemos encontrar el esquema que podemos apreciar en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

Nuestro trabajo está referido a la estimación de magnitudes continuas perceptibles visualmente como son la longitud, superficie y capacidad) y no perceptibles visualmente (masa/peso).



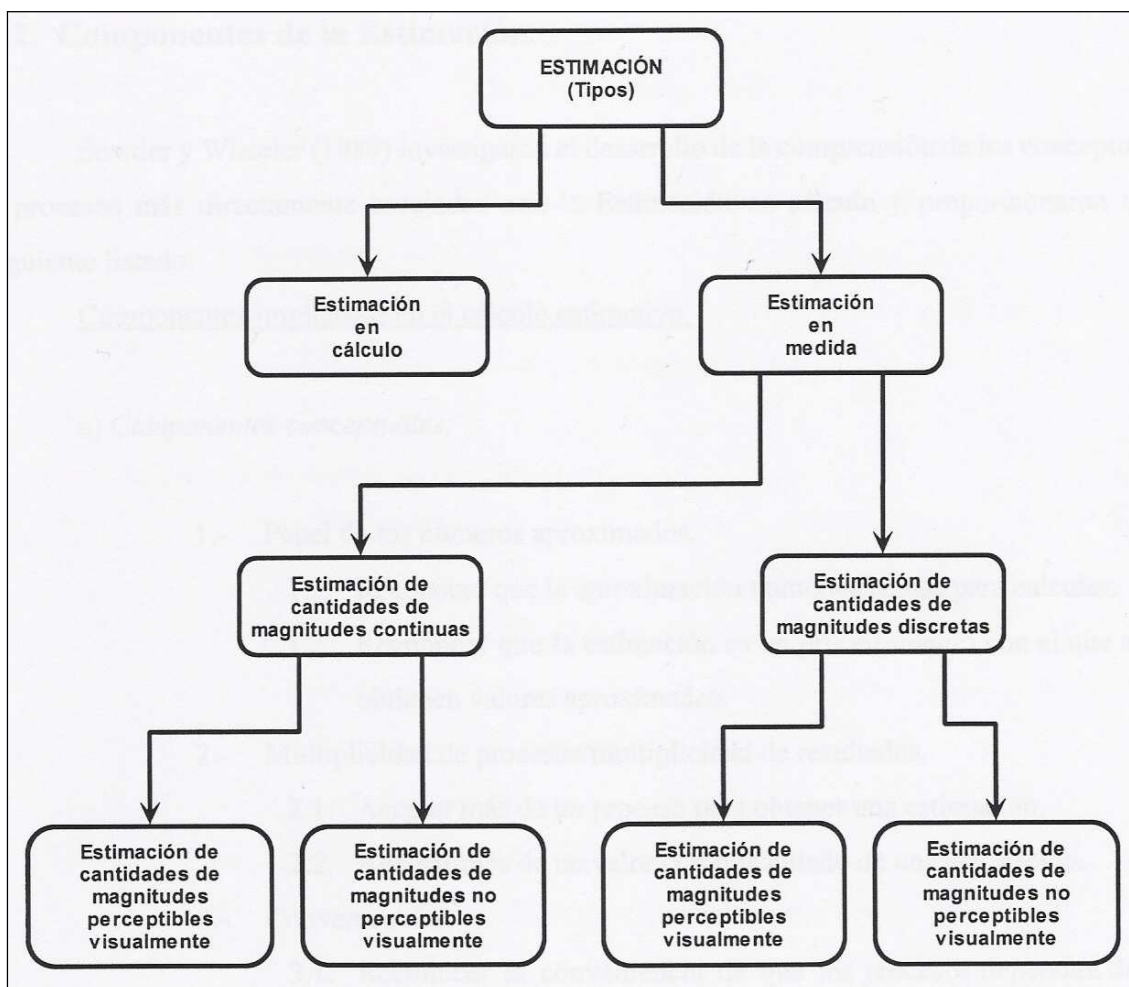


Figura 2. 1. Tipos de Estimación.

3.2. Conceptos Relacionados

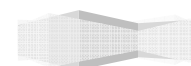
- **Aproximación**

Un concepto íntimamente ligado al de estimación es el de “aproximación”. El Diccionario de la Lengua Española de la Real Academia Española lo define en los siguientes términos:

“1. f. Acción y efecto de aproximar. 2. f. Máxima diferencia posible entre un valor obtenido en una medición o cálculo y el exacto desconocido [...]”.

Y “aproximar” lo define como:

“1. tr. Arrimar, acercar. [...]. 2. tr. Obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado.”



Como se deduce de la segunda acepción aproximar podría ser utilizado como sinónimo de estimar, y en consecuencia una aproximación podría ser considerada como el resultado de una estimación; sin embargo aproximar y estimar no son sinónimos desde una perspectiva científica; la aproximación se ocupa de determinar un valor numérico y su grado de proximidad a un valor real mediante procedimientos algorítmicos que forman parte del denominado Cálculo Aproximado o Teoría de Errores

Segovia et al. (1989) definen el término valor aproximado del siguiente modo:

“Dado un valor numérico, cualquier otro valor al que se considere una representación posible del anterior, se denomina valor aproximado del primero, tanto si nos referimos a un número como si nos referimos a una medida de una cantidad.” (p. 85)

- **Valor exacto**

Otro término que surge con frecuencia cuando se trabaja en estimación es el término valor exacto o medida exacta, según el ámbito de la estimación en que nos encontremos.

El término “exacto” es recogido en el diccionario de la RAE como sinónimo de “puntual, fiel, cabal”, y si buscamos acepciones para “cabal” encontramos “1. Ajustado a peso o medida [...]4. Completo, exacto, perfecto”.

En Segovia et al. (1989) se define del siguiente modo:

“Valor exacto o número exacto es aquel del que se parte (o al que se quiere llegar) y sobre el que se hace una aproximación.” (p.85)

- **Proceso y Estrategia**

Continuando con la nomenclatura utilizada en el previo Trabajo de Investigación Tutelada (Castillo, 2006) consideramos que un *proceso de estimación en medida* es cada una de las partes diferenciadas que conlleva la actividad que conduce a la obtención de una estimación en medida, y una *estrategia de estimación* es un conjunto de procesos encaminados a la obtención de la estimación de una determinada cantidad.

3.3. Necesidad de la Estimación

La importancia de la estimación se ha puesto de manifiesto en diferentes normativas curriculares e informes de investigación por dos razones fundamentales: forma parte del



conocimiento matemático y es útil en muchas situaciones de la vida real. En el capítulo anterior hemos hecho referencia a esta doble perspectiva

Veamos cuáles son las causas que nos obligan a tener que estimar desde una perspectiva general. Resumimos las ideas de Segovia et al. (1989, pp. 27-45):

1. Imposibilidad del valor exacto.

Tres tipos importantes:

- c) *Valor desconocido*. Esto ocurre en situaciones en las que pretendemos predecir razonablemente el futuro y en aquellas en las que hacemos suposiciones acerca del pasado con relación a determinadas medidas, como por ejemplo, el IPC.
- d) *Valores variables*. Hay otras situaciones en las que una cantidad puede cambiar de valor con cierta frecuencia a consecuencia de diversas causas, como por ejemplo, la temperatura.
- e) *Limitaciones de las medidas*. Las medidas físicas son todas inexactas. Esto se debe a las propias imperfecciones de los objetos, a los defectos de construcción de los instrumentos de medida y a los errores que cometemos en la manipulación de los mismos.

2. Imposibilidad de tratamiento numérico exacto.

Veamos las causas:

- a) *Dominio limitado*. Un valor puede tener sentido expresado sólo como número natural (o de otro tipo) y, por ello, hay que ajustar los resultados obtenidos.
- b) *Limitaciones del sistema decimal y de los algoritmos*. En el sistema de numeración decimal no se pueden expresar todos los números con un número finito de cifras decimales.
- c) *Cálculo con estimaciones*. En ocasiones los números con los que calculamos son estimaciones hechas con anterioridad.
- d) *Márgenes de seguridad*. La idea de que cometemos un error cuando operamos con números aproximados, se emplea de un modo más general



y sistemático en situaciones prácticas de la vida real. Ejemplo, carga máxima de un ascensor.

3. Limitaciones humanas y carencia de medios.

Causas:

- a) *Claridad numérica*. Cuanto más sencilla sea la combinación de potencias de diez en la expresión de una cantidad, más fácil resulta hacerse una idea de ese número.
- b) *Facilitar el cálculo*. Hay un primer uso de la estimación en el que el valor que se estima no se va a utilizar con posterioridad y sólo sirve para comprender mejor un dato. En segundo lugar, hay un uso más elaborado y práctico en donde se estima para comodidad propia, con el propósito de facilitar el trabajo posterior o de hacerlo más eficiente y económico.

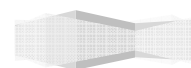
4. Consistencia de la información.

Por consistencia de la información se entiende la coherencia interna entre los distintos datos que la componen. Cuando una información aparece periódicamente, se tiende a expresarla siempre con el mismo orden.

3.4. Situaciones de Estimación en Medida

Nos centramos aquí en la estimación en medida, pues es nuestro objeto de estudio. Clasificamos las situaciones que se pueden presentar en relación a la estimación en medida. La situación más general de estimación está constituida por un objeto, sobre el que hay que estimar la medida de un atributo, y una unidad de medida que sirve de elemento de referencia. Esta situación, desde una perspectiva fundamentalmente escolar, tiene su inversa, que consiste en que se dispone de la medida del objeto y hay que determinar de qué objeto se trata. Esta clasificación de los tipos de estimación la introdujo Bright (1976). Posteriormente, Del Olmo, Moreno y Gil (1989) la recogen indicando los siguientes tipos de tareas de estimación:

- A. Se dispone del Objeto y hay que estimar la medida respecto de la Unidad.
- B. Se dispone de la medida de un Objeto respecto de una Unidad y hay que estimar de qué Objeto se trata.



En el caso de las tareas tipo A aparecen las siguientes cuatro combinaciones, según que el objeto a estimar se encuentre presente, o bien esté ausente y sólo se disponga de una imagen mental del mismo; igual consideración cabe respecto de la unidad de medida. Así, en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** hemos recogido los cuatro casos posibles para las tareas tipo A según la clasificación realizada por Del Olmo et al. (1999).

	OBJETO	UNIDAD
A1:	Presente	Presente
A2:	Presente	Ausente
A3:	Ausente	Presente
A4:	Ausente	Ausente

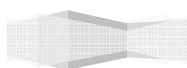
Tabla 1. 1. Clasificación de las Tareas Tipo A.

Iguales consideraciones pueden hacerse con las cuestiones de tipo B y tenemos igualmente cuatro combinaciones como podemos apreciar en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

	OBJETO	UNIDAD
B1:	Presente	Presente
B2:	Presente	Ausente
B3:	Ausente	Presente
B4:	Ausente	Ausente

Tabla 1. 2. Clasificación de las Tareas Tipo B.

Las ocho situaciones diferentes (A1, A2, A3, A4, B1, B2, B3 y B4), que surgen atendiendo a la estructura de las relaciones planteadas, son importantes a la hora de aplicar la estimación en un contexto. Si suponemos que la unidad puede ser estándar o un objeto familiar se duplican las situaciones.



4. ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MEDIDA Y LA ESTIMACIÓN

Los conceptos magnitud, medida o estimación forman parte del currículo escolar en todos los niveles⁶. Son numerosas las investigaciones que han estudiado como los niños adquieren el concepto de magnitud o el concepto de medida. La estimación es un concepto que se ha incorporado recientemente al currículo escolar; desde 1986 en el NCTM publica su yearbook dedicado a la estimación 'Estimation and mental computation', se han generado numerosos documentos centrados en la enseñanza y aprendizaje de la estimación a los que haremos referencia más adelante.

4.1. Enseñanza y Aprendizaje de las Magnitudes y su Medida

Analizamos qué dicen varios autores sobre los procesos mediante los cuales el niño adquiere los conceptos de magnitud y medida:

4.1.1. La aportación de Piaget, Inhelder y Szeminska

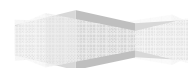
Dickson, Brown y Gibson (1991, pp. 93-96) recogen una descripción de los estadios de desarrollo del proceso de medida en el niño basados en los estudios efectuados por Piaget (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960):

- Estadio en el que comienzan a emerger la conservación y la transitividad.
- Estadio caracterizado por el inicio de la conservación operacional y la transitividad.
- Estadio en que se capta la idea de unidad de medida más pequeña que el objeto que hay que medir.
- Etapa final en el desarrollo de las nociones de medida.

4.1.2. La aportación de Inskeep

Si analizamos el proceso de la medida, siguiendo a Inskeep (1976), nos encontramos

⁶ Véase apartado_.



que se trata de una mezcla de importantes destrezas sensoriales y perceptivas con elementos de geometría y aritmética. También implica al área afectiva y proporciona al niño la oportunidad de alcanzar un sentido de realización, así como apreciar la utilidad básica de nuestro sistema de medición. El proceso procede secuencialmente desde la percepción a la comparación y después a la aplicación de un estándar de medida (o referente). Resumimos las ideas de Inskip (1976) sobre las componentes implicadas:

- **La medición como percepción.**

La medición comienza con la percepción de lo que debe ser medido. Explicar las marcas de un termómetro a un niño sin desarrollar primero alguna sensación y percepción de lo que mide no es sino otra manera de leer escalas. La altura de un niño, por ejemplo, da significado a la longitud.

- **La medición como comparación.**

La percepción es el comienzo de la medición, y la comparación sigue a la percepción. Habiendo percibido alguna propiedad de algún objeto, lo comparamos con otros objetos que tienen la misma propiedad.

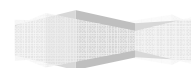
- **La medición como búsqueda de un referente.**

La comparación de dos cosas es adecuada cuando deseamos hacer enunciados de equivalencia o no equivalencia. Sin embargo, esta aproximación a la comparación pronto resulta bastante inefectiva. Realmente necesitamos algún estándar de medida, un referente que pueda ser usado sucesivamente y al que podamos acudir en cualquier momento. El referente inicial que usemos no tiene que ser un referente estándar o que sea usado por todo el mundo.

Los estándares de medida tienen como mínimo dos funciones importantes. Primero, permiten a una persona comunicar una medida a otra de un modo abreviado y directo. Segundo, permiten medidas precisas y consistentes en diferentes áreas geográficas.

- **La medición como sistema.**

Con el S.I. tenemos un sistema de medidas estándares relacionadas que han sustituido por eso ampliamente a los estándares locales arbitrarios.



- ***La medición como una actividad afectiva.***

El trabajo con los niños producirá dos resultados afectivos: (1) los niños apreciarán el papel que la medición juega en sus vidas y en la sociedad, y (2) los niños disfrutarán siendo capaces de medir por sí mismos.

- ***La medición como una actividad.***

Medición sin acción es meramente un tipo de rutina memorística o ejercicio intelectual. Queremos que los niños tengan experiencias en todas las áreas básicas de la medición y que sean capaces de medir precisa y consistentemente.

4.1.3. La aportación de Chamorro

Resumiendo las ideas de Chamorro y Belmonte (1988, pp. 18-20) los estadios piagetianos sobre el desarrollo evolutivo de la idea de medida son los siguientes:

1. Estadio de la *comparación perceptiva directa* entre dos objetos: se realiza con la mirada sin desplazar objetos.
2. Estadio caracterizado por *el desplazamiento de objetos*: se comparan los objetos desplazándolos manualmente o utilizando un término medio, pero sin hacer operativa la propiedad transitiva.
3. Estadio en que se hace *operativa la propiedad transitiva*: es decir, una comparación del tipo $A = B$ y $B = C$ implican que $A = C$, donde se nota la intervención de un término medio operatorio: B.

Medir es un acto complejo que requiere práctica y soltura puesto que como afirma Chamorro (1988) es un proceso de clasificación y seriación, ya que supone la elección de un conjunto de objetos, y de entre todos sus atributos (color, tamaño, masa, longitud, etc.) escoger uno medible. La progresión en el proceso de medición debe seguir ciertas recomendaciones según Chamorro (1988, p. 27):

- *Ir de lo concreto a lo abstracto, de lo fácil a lo difícil, según las fases: manipulativa, verbal, gráfica y simbólica.*
- *Cuidar los procesos de reversibilidad.*
- *Seguir una enseñanza no lineal.*



- *Permitir al alumno que descubra y aprenda de sus errores.*
- *Fomentar las discusiones en grupo o colectivas, permitiendo el aprendizaje en diálogo y la confrontación de ideas.*
- *Utilizar la vida como fuente de situaciones problemáticas.*
- *Usar y fomentar el sentido común. Puede parecer fuera de contexto, pero se nos alcanza como vital.*

Siguiendo a Chamorro (1988) el proceso de construcción de la unidad sigue varias fases que son las siguientes:

a) Ausencia de unidad.

La primera medida es simplemente visual y comparativa entre objetos.

b) Unidad objetual.

Es una unidad ligada únicamente a un solo objeto que realiza la función de unidad de medida.

c) Unidad situacional

Todavía se toma como unidad un objeto, pero este puede cambiar dependiendo de la cantidad a medir.

d) Unidad figurada

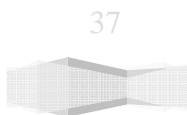
Aquí, la unidad a construir va perdiendo toda relación con el objeto a medir, incluso en orden de magnitud, permaneciendo, eso sí, una cierta tendencia a medir objetos grandes con unidades grandes, y objetos pequeños con pequeñas unidades.

e) Unidad propiamente dicha.

La unidad se ve totalmente libre de la figura u objeto considerado, tanto en forma como en tamaño.

4.1.4. La aportación de Callís

Según Callís (2002, p. 101-104) el dominio de la capacidad de medida necesita de la adquisición del espacio y del número, pero por ella misma, además, tiene, también su propia evolución genética que pasa por la adquisición de tres factores que conjuntamente configuran el dominio de la medida:



- Adquisición de la magnitud.
- Adquisición de la medida.
- Adquisición de la unidad.

a. Adquisición de la magnitud.

Formada por las siguientes etapas:

- Identificación y discriminación magnitudinal.
- Conservación de la magnitud.
- Ordenación de magnitud.
- Relación magnitud número.

b. La adquisición de la medida.

Callís (2002) recoge los siguientes estadios piagetianos para la adquisición de la medida:

b.1.- Estadio de comparación perceptual.

En esta fase la medida es puramente subjetiva. Este estadio está íntimamente relacionado con la adquisición de la conservación magnitudinal. Se pueden diferenciar:

b.1.1.- Comparación perceptual sincrética. El transporte comparativo es sólo visual.

b.1.2.- Comparación perceptual analítica. No utiliza únicamente el transporte visual sino también el manual y corporal, aplicando referencias respecto a sí mismo.

b.2.- Estadio de comparación objetal.

Se aplica ya la comparación entre objetos a partir del contraste comparativo directo. También pueden utilizarse objetos como elementos unitarios si bien sin atender a la transitividad. Se pueden distinguir:

b.2.1.- Contraste directo. Los objetos a medir necesitan ponerse en contacto directo entre ellos. Si se pregunta cuál de dos objetos es mayor, necesita poner uno al lado del otro.



b.2.2.- Uso de promedio. Hay capacidad de utilizar un objeto diferente a los propios objetos a medir. Se utilizan unidades objetales que permiten que ya no sea necesario el contraste comparativo directo entre los objetos a medir. En este momento, puede utilizar partes del cuerpo como unidades o elementos diversos. Es el primer paso importante en la adquisición de la unidad. Generalmente el proceso antropométrico irá siendo sustituido por uno de objetal hacia el final de esta fase.

b.3.- Estadio de la transitividad operativa.

La aplicación del promedio junto con la transitividad viene añadida al dominio de lado conservación de la magnitud y por tanto con la capacidad de la partición unitaria. Estos factores son los condicionantes imprescindibles para poder considerar el dominio de la capacidad de medida y la adquisición del concepto de unidad. También en este caso, se pueden diferenciar:

b.3.1.- Inadecuación unitaria. En este momento, no siempre se escoge la unidad adecuada para poder efectuar la medición. A menudo se toman unidades o términos medios excesivamente grandes.

b.3.2.- Valoración unitaria. La experiencia anterior lleva a la selección de unidades más reducidas todo ligando la precisión con la unidad. En este momento aplica diferentes unidades a la vez, para mejorar la precisión.

c. - La adquisición de la unidad.

La interiorización del concepto de unidad y la capacidad de uso de la unidad como elemento de comparación objetiva puede considerarse que se consigue en la tercera fase de la adquisición de la medida, sin embargo, también esta, según Chamorro y Belmonte (1991) pasa, atendiendo al proceso general de la evolución madurativa de la medida, por su propia génesis, la que se concreta en:

c.1.- Etapa de ausencia unitaria.

Es totalmente presente en el estadio perceptual donde la impresión subjetivista es la determinante de la valoración métrica, pero también, en el estadio de contraste directo, ya que a menudo, aunque ponga en contacto comparativo un par de objetos y se gradúen cuantitativamente, no se utiliza uno de ellos como elemento comparativo sino que aplican estrategias comparativas diversas. Un proceso comparativo correcto,



de entrada, no es indicativo de adquisición de la medida o de la unidad, ya que en determinados casos, si a posteriori se modifican los condicionantes perceptuales de los objetos, entonces se modifica la medida; clara muestra de la falta de dominio de la conservación y por lo tanto, también de la concepción unitaria.

c.2.- Unidad dependiente.

Los recursos unitarios son variados y cambian según las situaciones y contextos. Básicamente se utilizan unidades antropométricas de partes corporales o unidades objetales o sea objetos conocidos. La evolución de su uso pasa por:

- Unidad funcional. La unidad está en dependencia con el objeto a medir. A menudo las unidades guardan relaciones con las formas o funciones del objeto a medir. Recorridos con pasos, capacidades con vasos, medidas a la escuela con útiles escolares, ...
- Unidad situacional. La unidad se adecua al nivel magnitudinal del objeto, si es grande la unidad también lo es y si es pequeño, la unidad se empequeñece.
- Unidad figural. La unidad pierde su relación con el objeto. Se amplía la variedad del sistema unitario y así, un mismo objeto puede ser medido con diferentes unidades.

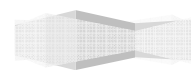
c.3.- Unidad independiente y sistémica.

La unidad queda libre de cualquier connotación derivada del objeto, resultando válida para cualquier contexto. En este momento se puede considerar que la persona tiene capacidad para adquirir el dominio de la medida. El proceso de perfeccionamiento posterior será fruto de las posibilidades de acción y de práctica y manipulación directa.

4.1.5. La aportación de Lehrer

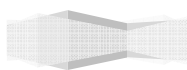
Lehrer (2007, pp. 181-182) considera que el desarrollo del sentido de la medición en los niños está marcado por ocho componentes. A continuación presentamos un resumen de dichas componentes:

1. *Relaciones unidad-atributo.* Se refiere a la correspondencia que debe establecerse entre las unidades y el atributo que será medido. En ocasiones, los niños utilizan erróneamente las unidades de longitud para designar las



mediciones espaciales como área, volumen y ángulos. Seleccionar apropiadamente una unidad de medida particular conlleva un intercambio entre los modelos del espacio medido y las herramientas disponibles para hacer la medición.

2. *Iteración. [Repetición].* Implica que las unidades pueden ser rehusadas [o repetidas]; se refiere a la acumulación de unidades de medidas para obtener una cantidad (p. 182). Para repetir una unidad de medida, un niño debe entender la longitud como una distancia que puede ser subdividida. Esas subdivisiones pueden ser acumuladas y, de ser necesario, reorganizadas para medir una longitud.
3. *Embaldosando (Tiling).* [Rellenando espacios con figuras]. Las unidades rellenan líneas, planos, volúmenes y ángulos. Para medir longitud, las unidades necesitan ordenarse sucesivamente. Aunque los niños encuentran útil este proceso, en ocasiones no están consistentes de las consecuencias de dejar huecos o partes sin cubrir. Rellenar los espacios está implícito por la subdivisión de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos, pero este proceso no es transparente para todos los niños.
4. *Unidades idénticas.* Si las unidades son idénticas, contarlas representará la medida.
5. *Estandarización.* Acuerdos sobre las unidades que facilitan la comunicación.
6. *Proporcionalidad.* Las medidas con unidades de tamaños diferentes implican que diferentes cantidades puede representar la misma medida. Estas cantidades serán inversamente proporcionales al tamaño de las unidades.
7. *Aditividad.* Las unidades en el espacio euclidiano pueden ser descompuestas y recompuestas, de manera que... la distancia total entre dos puntos es equivalente a la suma de las distancias de cualquier conjunto arbitrario de segmentos que subdividan el segmento lineal.
8. *Origen (punto cero).* En ocasiones, la medición involucra el desarrollo de una escala. Aunque las propiedades de una escala varían de acuerdo con diferentes sistemas de medida, las medidas en el espacio euclidiano son razones, por tanto, cualquier localización en la escala puede servir como el origen.



4.2. Enseñanza y Aprendizaje de la Estimación

A continuación recogemos importantes aportaciones de diversos autores en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la estimación en medida.

4.2.1. La aportación de Bright

En Bright (1976) encontramos una primera aproximación al concepto de estimación como una parte de la enseñanza de la medida. Bright (1976) define la estimación en medida como el “proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos” (p. 89).

Bright indica que la estimación en medida requiere de una serie de ideas o conceptos que deben estar firmemente interiorizados: “(1) La unidad de medida a usar, (2) el tamaño de la unidad respecto de objetos familiares o de otras unidades de medida para la misma magnitud, (3) otras medidas en esa unidad; (4) un compromiso de mejorar el rendimiento de la estimación de modo que el resultado esté tan cerca de la medida exacta como sea posible” (p. 89).

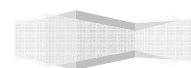
Bright (1976) realiza una clasificación de los tipos de estimación, recogiendo ocho tipos básicos de estimación, anteriormente descritos en apartado 3.4.

Con respecto a los objetivos de la estimación, Bright (1976) indica que:

“el objetivo principal de la inclusión de ejercicios de estimación en el currículo de matemáticas son, en primer lugar ayudar a los estudiantes a desarrollar un marco mental de referencia para los tamaños de las unidades de medida en relación entre sí y con los objetos reales, y, en segundo lugar, proporcionar a los estudiantes con actividades que ilustran las propiedades básicas de la medición.” (p. 93).

Según Bright el desarrollo de este marco de referencia es crucial, pues la importancia de las matemáticas reside en su utilidad en el mundo real. De este modo, para Bright, la estimación es considerada una herramienta para la enseñanza de la medida.

En el mencionado documento, este autor da indicaciones sobre cómo debe ser abordada la estimación en la escuela. Recogemos algunas de estas ideas:



- Para desarrollar la habilidad de estimar es probablemente el mejor procedimiento, que los estudiantes primero hagan una estimación y luego realicen la medición como método de comprobación. Bright denomina a este método como el procedimiento adivinar/comprobar [guess/check procedure].
- Es conveniente que los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar una idea del tamaño de la unidad antes de hacer estimaciones.
- Es importante que las situaciones planteadas a los estudiantes les sean familiares.
- Los estudiantes deben ser alentados a realizar buenas estimaciones, pero no deben ser penalizados, por muy imprecisas que sean sus respuestas.
- Las actividades deben ser secuenciadas de modo que todos los estudiantes puedan mejorar la precisión de sus estimaciones.
- La autoevaluación de las estimaciones ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades de auto-corrección para tenerlas en el mundo real.
- La autocomprobación de las estimaciones también ayuda a distinguir el acto de medición del concepto abstracto de medida.
- La comprensión de las propiedades abstractas de la medida debe ir acompañada de una comprensión de los tipos y razones de los errores que aparecen en los datos de medición en el mundo real.
- La autocomprobación proporciona un entorno experimental para explicar los errores en medición.
- Los ejercicios de estimación ayudan a los estudiantes a desarrollar una apreciación realista de la exactitud de las mediciones físicas.

Otras ideas aportadas por este autor son que: la importancia de la estimación radica en reconstruir la imagen mental del tamaño de la unidad de medida; la subestimación o sobrestimación pueden ser corregidas con la práctica; la dificultad de la tarea de estimación depende de la magnitud así como de la forma del objeto en el que se realiza la estimación.

En Bright (1976) se sugieren algunos métodos para evaluar la habilidad en la estimación y se propone una serie de actividades para trabajar la estimación en el aula. También



indica “maneras de hacer estimaciones” (estrategias) sugiriendo, para el caso de la estimación de longitudes la iteración de la unidad. Para el caso de la estimación de superficies indica que se puede hacer aplicando la fórmula del área, pero que en ese caso no ayudaría a visualizar los tamaños relativos de las unidades, siendo más útil para este fin la comparación directa con las unidades. Si la superficie es irregular propone la reordenación mental de la superficie para buscar una más estándar. Bright también da otras sugerencias para la estimación del volumen y la masa.

Bright (1979) demostró que la habilidad para realizar estimaciones en medida mejora con la práctica. Aunque el resultado de esta investigación es sencillo y lógico, su importancia radica en que supone el fundamento del método de enseñanza de la estimación referido “adivinación y comprobación” [guess/check].

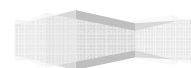
4.2.2. La aportación de Hildreth

Para Hildreth (1983, p.50) la estimación de la longitud o el área de un objeto es una habilidad compleja que involucra varias habilidades y conceptos como:

- una comprensión de los atributos (longitud o área) que se medirá,
- la comprensión del concepto de unidad,
- una imagen mental de la unidad que se está utilizando en la tarea de estimación,
- la capacidad de comparar los objetos en el atributo a medir,
- la capacidad de realizar la iteración de la unidad,
- la capacidad de seleccionar y utilizar las estrategias adecuadas para hacer estimaciones, y
- la capacidad de comprobar la idoneidad de la estimación.

Por otro lado, identifica estrategias apropiadas para la estimación de longitudes:

- Iteración de la unidad: aplicando mental y sucesivamente la unida de longitud y acotando.
- Usando indicación de subdivisiones: por ejemplo, para estimar la longitud de un pasillo en metros, se puede usar la distancia entre puertas como subdivisiones.



- Conocimiento previo: usando información que el estimador posee sobre el objeto o sobre la unidad. Por ejemplo, el conocimiento de la longitud de una baldosa para estimar el largo de una habitación.
- Comparación: comparando el objeto a estimar con otro que está a la vista o fuera de ella y sobre el que el estimador posee información (“Es tan alto como un conocido nuestro”).
- Descomponer en partes: por ejemplo, para estimar la longitud de una línea, se divide mentalmente en segmentos congruentes (trozos) y se estima la longitud del segmento.
- Acotando: realizar estimaciones de “un poco menos” (por defecto) y “un poco más” (por exceso) que el objeto, para acercarse, lo más posible a la medida. Por ejemplo, “El largo de ese coche está entre 3 y 4 metros”.

Y para el caso del área:

- Adición repetida: usando la iteración de la unidad para estimar el área de un polígono.
- Longitud por anchura: usando estrategias de longitud para estimar las dimensiones de una región poligonal y aplicando una fórmula para obtener el área.
- Reestructuración: efectuar un “arreglo” (transformación de romper y rehacer) en el objeto para obtener otro cuya área se determina más fácilmente.

Hildreth (1983, p.51-52) también identifica estrategias inapropiadas o incorrectas para estimar longitudes y áreas que resumimos a continuación:

- Largo más ancho: encontrando el área de un rectángulo sumando las estimaciones del largo y del ancho.
- Contar alrededor: estimar el área de un rectángulo usando una unidad rectangular no estándar mediante la estimación de el largo del rectángulo con la unidad girada en una dirección y la anchura del rectángulo con la unidad girada 90 grados.
- Centrado: estimar el área de un objeto como si se fuese a estimar la longitud de una de sus dimensiones.



- Adivinando libremente [wild guessing]. Realizando un enfoque no sistemático a la respuesta del problema de estimar la longitud o el área.
- Error aritmético: error en la aritmética que fue detectado en el método usado para la estimación de la longitud o el área.
- Error en el tamaño de la unidad: Error en el juicio que el alumno tiene del tamaño de las unidades.
- Usar una unidad inapropiada.
- Contar alrededor mas algunos del medio: error que aparece en la estimación de superficies. Consiste en no contar todas las unidades que recubrirían la cantidad a estimar.

4.2.3. La aportación de Siegel

Siegel et al. (1982) realizaron un trabajo que constituye una referencia sobre la clasificación de las estrategias y realizaron un modelo de estimación muy detallado que recogía los procesos estimativos. Pareja (2001) realizó una modificación de la disposición de dicho modelo, pero respetando el contenido original, que es el que recogemos en las **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia., ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia. ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**



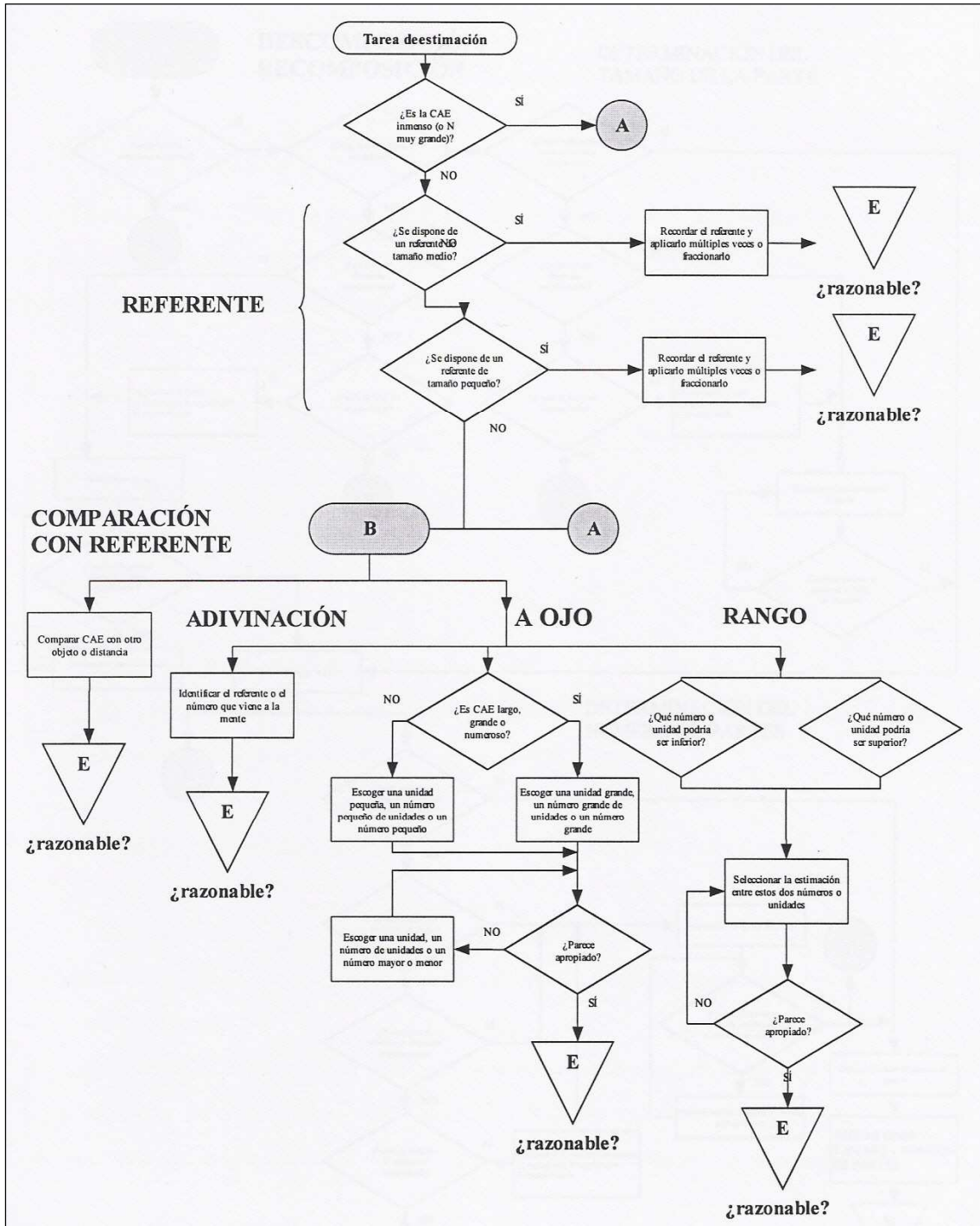
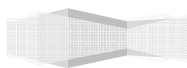


Figura 2. 2. Modelo de Estimación (1ª Parte)



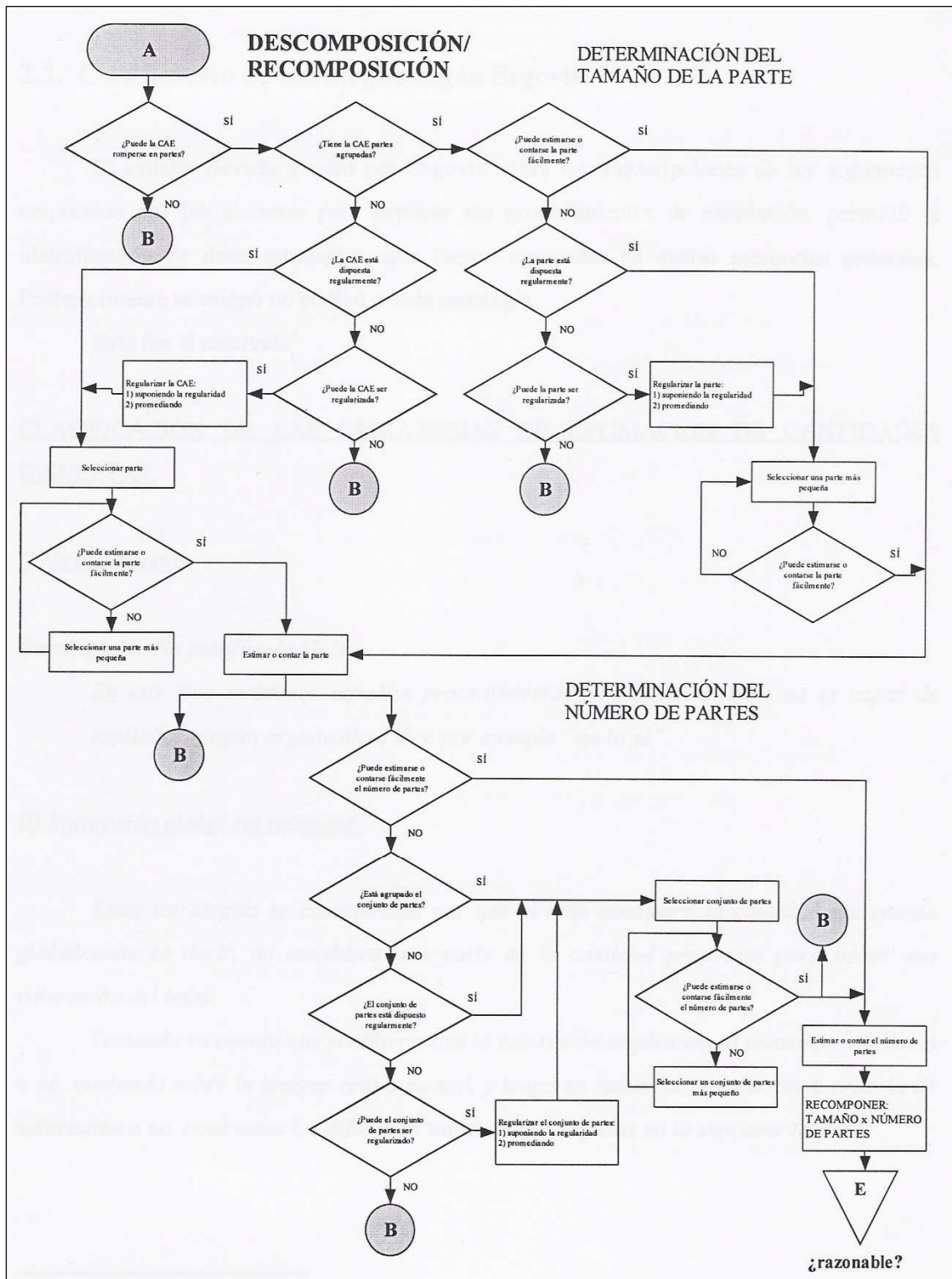
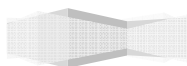


Figura 2. 3. Modelo de Estimación (2ª Parte).



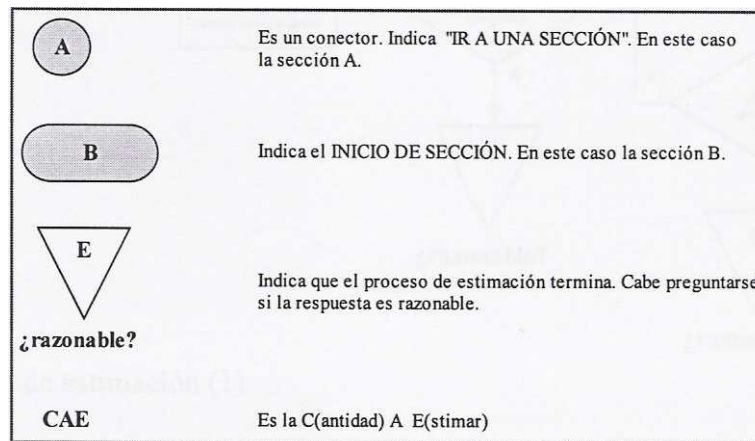


Figura 2. 4. Modelo de Estimación (Leyenda).

4.2.4. La aportación de Segovia, Castro, Rico y Castro

Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) señalan una serie de destrezas previas que facilitarían la realización de estimaciones razonables en medida, así como de las principales estrategias que se utilizan en los procesos de estimación en medida. Resulta así que, en los procesos de estimación en medida, están implicadas todas las componentes de estimación en cálculo y otras específicas que caracterizan cada una de las magnitudes. Resumimos brevemente estas destrezas:

1. Destrezas previas:

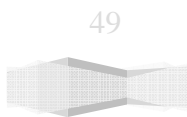
Las destrezas básicas, de las que conviene disponer para realizar estimaciones razonables en medida son las siguientes:

- Interiorización de las unidades de medida.

Por interiorización se entiende, en este caso, las referencias perceptivas que tiene cada sujeto respecto de las unidades principales de medida de las magnitudes básicas.

- Referente.

Se trata, en este caso, de conocer la medida de cantidades que resultan muy próximas, como ocurre con la longitud de algunas partes destacadas de nuestro cuerpo (palmo, pie, dedo) o de objetos frecuentes en nuestro medio (altura usual de una puerta o altura del techo de una casa, medida estándar de los tipos más usuales de baldosas).



- Técnicas indirectas.

Consisten en el manejo de técnicas indirectas de medida basadas en el empleo de fórmulas especialmente en el caso de áreas y de volúmenes o algunas relaciones fundamentales como las que expresan el teorema de Thales, el teorema de Pitágoras o la medida de los ángulos interiores de un polígono.

2. Estrategias de comparación:

La “comparación” es el aspecto básico de la estimación. Sin embargo, diferenciamos entre estrategias de comparación propiamente dichas, donde la comparación es la única actividad, y las de descomposición-recomposición donde hay dos procesos, uno previo y otro posterior a la comparación.

Todas las estrategias de comparación están basadas en el uso de unidades de referencia, ya se trate de unidades estándar o de referencias propias de cada sujeto.

Las estrategias de comparación se diferencian fundamentalmente por la relación que existe entre la cantidad a estimar y la unidad de referencia.

- Casos en las estrategias de comparación.

Atendiendo a este criterio distinguimos tres casos:

1º.- La cantidad a estimar es aproximadamente igual que la unidad de comparación elegida.

2º.- La cantidad a estimar es múltiplo de la unidad.

3º.- La cantidad a estimar es un divisor de la unidad.

3. Estrategias de Descomposición/Recomposición.

La técnica general para estimar, en estos casos, consiste en hacer, una descomposición mental de la cantidad que hay que valorar, apoyándose al máximo en nuestra percepción del objeto (cada objeto tiene sus propias peculiaridades que habrá que considerar), una estimación particular (siguiendo las estrategias ya enunciadas para la comparación) de cada una de las partes en las que la cantidad se considera descompuesta y, una valoración del total de las cantidades estimadas.

Con carácter general, pueden considerarse los tres casos siguientes:



- 1.- El objeto se descompone en partes iguales o en partes que guardan entre sí una relación sencilla.
- 2.- El objeto se considera encuadrado en una unidad conocida que queda partida en dos cantidades, la del objeto en cuestión y la de su complemento respecto de la unidad que lo encuadra. Podemos así estimar fácilmente por complementos.
- 3.- El objeto se descompone en partes diferentes. En este caso, hay que estimar cada una de ellas, independientemente, empleando técnicas distintas en algunas ocasiones. La estimación de la totalidad se hace sumando las estimaciones de todas las partes.

En Segovia et al. (1989, p. 173) se presenta un modelo más simple que el presentado por Siegel en el que se recogen todas las estrategias que pueden articularse en estimación en medida, como podemos ver en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

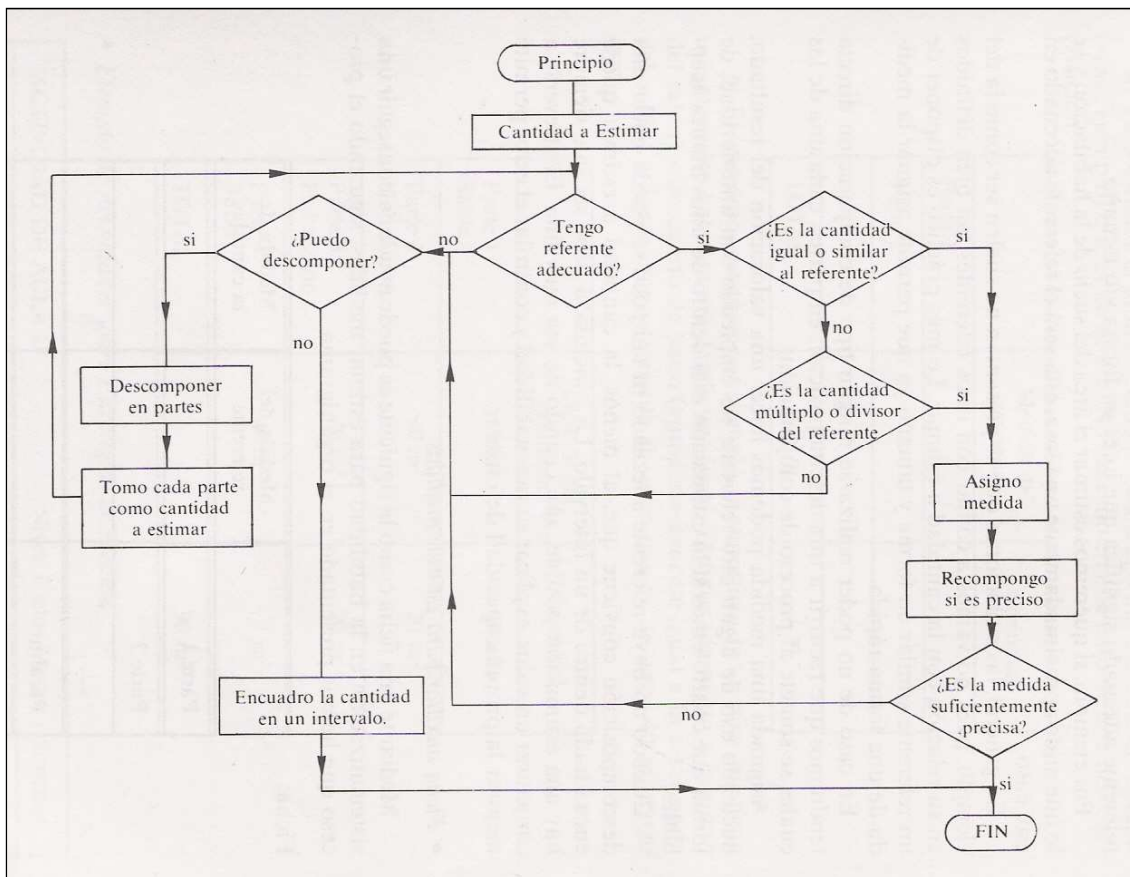
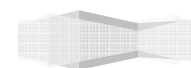


Figura 2. 5. Estrategias de Estimación en Medida.

4.2.5. La aportación de Callís

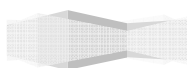
Callís (2002, 2006) recoge una serie de directrices para la enseñanza y aprendizaje de la estimación. Según Callís, el proceso de adquisición debe tener su fundamento en el diseño de actividades y propuestas que permitan:

- a. Validar el significado e integración de la estimación métrica en la realidad.
- b. Planteamiento de resolución múltiple y abierta que posibilite el uso de recursos, procedimientos y estrategias diversas y diferentes.
- c. Presentaciones que contrasten diferenciaciones perceptuales (posición en el espacio, diversidad de grosores, inclusión de distorsionantes perceptuales, ilusiones ópticas...) y siempre con la posibilidad de la reversibilidad de acción.
- d. Adecuarse secuencialmente a la evolución ontogénica y filogénica de la medida para permitir evolucionar de la comparación a la adquisición de la unidad objetiva.
- e. Generar y crear sistemas métricos (antropométricos, objetales o de cualquier tipo).
- f. Conocer las medidas tradicionales del propio entorno y su utilidad, relacionándolo con el S.I.
- g. Potenciar la adquisición de la capacidad estimativa y aproximativa (situaciones en donde la evolución por estimación sea la mejor opción resolutoria; capacitar en el dominio del lenguaje implícito de la estimación; saber aplicar la estimación pertinente y el grado de precisión adecuado en situaciones diferenciales; trabajar sobrestimaciones y subestimaciones y aproximaciones por defecto y por exceso; saber ajustar y perfeccionar estimaciones y aproximaciones hechas en unos contextos determinados o bien valorar la razonabilidad de las estimaciones presentadas, ...)
- h. Trabajar la estimación de líneas curvas.
- i. Potenciar la representación mental (establecer la máxima cantidad posible de relaciones perceptivas con actividades de revisualización en activa, icónica y verbal); hacer conscientes los procedimientos, recursos y estrategias que cada uno utiliza; ampliar la relación del metro con las unidades antropométricas, objetales y magnitudinales; valoraciones comparativas de longitudes poco



diferenciables; estimular el uso de la rectificación y de la cuadratura como objetivo básico en determinadas actividades.

- j. Desarrollar capacidades analíticas de composición y descomposición (actividades con formas que permitan descubrir en ella, elementos que actúen o puedan actuar de unidades estructurales o bien conceptuales; trabajar la igualación comparativa tanto la aditiva como la substractiva; medir una magnitud a través de medidas indirectas o de relaciones intermagnitudinales (control de tiempo para la longitud manteniendo velocidad o ritmo, ...); establecer criterios de interrelación y equivalencia métrica entre diferentes unidades y sistemas.



CAPÍTULO 3: REVISIÓN DE ANTECEDENTES

Como resultado de la búsqueda bibliográfica realizada en el desarrollo de esta tesis doctoral, coincidimos con Sowder (1992) en señalar la escasez de investigaciones realizadas sobre estimación en medida. Otros investigadores han expresado también esta queja: Siegel et al. (1982) expresan que “aunque la literatura en educación matemática ha argumentado repetidamente la importancia de la estimación en el currículo elemental e intermedio de matemáticas, sorprendentemente hay poco énfasis en las investigaciones o en el desarrollo curricular de las técnicas de estimación” (pp. 211-12). Benton (1986) realiza un estudio en el que cuantifica el número de investigaciones, artículos o tesis sobre Educación Matemática que estaban relacionados con la estimación entre los años 1980 al 1984 obteniendo menos del 0,5 por ciento de las mismas. En las últimas décadas se ha mantenido esta tendencia.

En este capítulo presentamos una revisión de investigaciones centradas o relacionadas con la estimación en medida clasificándolas desde cuatro puntos de vista según su principal foco de estudio sea: (1) la precisión de las estimaciones; (2) las estrategias de estimación empleadas; (3) los métodos de enseñanza-aprendizaje y su incidencia en el desarrollo de la capacidad estimativa; y (4) un último grupo de estudios que analizan otros elementos tales como la importancia de la estimación en medida, los tiempos de reacción en la realización de las estimaciones, el efecto del desorden en las estimaciones, el uso del ordenador en la estimación o cómo influye la edad del estimador. Cerramos el capítulo con una clasificación de las investigaciones de estimación en medida atendiendo a si la magnitud es discreta o continua.

1. REVISIÓN DE INVESTIGACIONES SOBRE LA PRECISIÓN EN LA ESTIMACIÓN EN MEDIDA

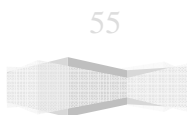
En los primeros estudios sobre estimación en medida los investigadores estaban interesados simplemente en poner de manifiesto la capacidad estimativa de niños y adultos y analizar la precisión alcanzada en las estimaciones. En una primera generación de estudios (Cassell, 1941; Crawford y Zylstra, 1952; Wilson, 1936; Wilson y Cassell,

1953) a los individuos se les pidió estimar las mediciones de objetos conocidos, tales como la altura de la mesa del comedor, dejando abierta la posibilidad de que los objetos estimados variaran en tamaño. Las respuestas se clasificaron como “razonable” o “incorrecta” con un estrecho margen de error. Niños y adultos realizaron estimaciones deficientes en los estadios iniciales, aunque se detectaron mejoras en la precisión con la edad. Las estimaciones razonables estuvieron en un rango, en promedio, de sólo un 30 o 40% para los estudiantes de secundaria y menos del 50% para los adultos.

En la siguiente generación de estudios (Corle, 1960, 1963; Swan y Jones, 1971, 1980) los investigadores se centraron en las diferencias de capacidad según el atributo a estimar, tales como altura y peso. Un avance respecto de los estudios anteriores es que los objetos a estimar estaban presentes físicamente, asegurando que los distintos individuos estimaran los mismos objetos. El porcentaje de error se introdujo como medida de precisión de la estimación. Conjuntamente con el porcentaje de error de nuevo las respuestas se clasificaban en categorías tales como “razonable” o “incorrecto”. Aunque el aumento en la precisión con la edad se observó una vez más, el nivel de precisión media de los niños y los adultos en estos estudios era bajo y la precisión de las estimaciones variaba ampliamente según el atributo considerado. Las estimaciones de longitudes se han encontrado generalmente más precisas que las de peso, capacidad o volumen.

El último grupo de investigaciones son las realizadas ya en el siglo actual. En ellas⁷ los investigadores se han centrado en realizar propuestas para la enseñanza de la estimación. Algunos acercamientos al estudio de la precisión nos revelan la variabilidad de resultados en función de la tarea. Así, en Castillo (2006) se recogen diferencias sustanciales en la precisión de las estimaciones dependiendo de la tarea y de la magnitud a estimar, encontrándose en algunos casos tendencias hacia la subestimación o la sobrestimación, dependiendo de la tarea.

Callís y Fiol (2006) recogen la relación de la tarea propuesta con la precisión alcanzada: “la forma y la posición espacial influyen en el grado de precisión de la estimación” y que la precisión no depende del género: “el género no es una variable determinante del nivel y capacidad estimativa métrica ni tampoco de la estructura de razonamiento justificativo” (p. 111)



Resumiendo, los resultados de las investigaciones referidas respecto a la precisión de las estimaciones: (1) el grado de precisión depende de la magnitud a estimar; (2) el grado de precisión de las estimaciones depende de la forma y la posición espacial en que se presentan la cantidad a estimar; (3) la precisión mejora con la edad⁸; (4) la precisión mejora con la práctica⁹; (5) el dominio de diversas estrategias también contribuye a la mejora de la precisión¹⁰; y (6) la precisión no depende del género.

2. REVISIÓN DE INVESTIGACIONES SOBRE LAS ESTRATEGIAS DE LA ESTIMACIÓN EN MEDIDA

En el capítulo 2 ya se ha hecho alusión de manera amplia a algunas investigaciones relativas a estrategias para incidir en la enseñanza y aprendizaje de la estimación; aquí abordamos de nuevo las estrategias siguiendo la clasificación establecida por Joram et al. (1998) agrupando las estrategias de estimación en medida en tres categorías principales: la *medición mental*, la *transformación de la unidad* estándar con la que se hacen las estimaciones y la *transformación mental de la cantidad a estimar* (CAE). En la Tabla 3. 1 recogemos las estrategias que forman parte de cada una de estas categorías.

- *La medición mental*

La medición mental incluye dos estrategias: la aplicación mental de un instrumento de medida y la iteración de la unidad. La iteración de la unidad es la estrategia más comúnmente utilizada para la estimación en medida según los resultados de los estudios en los que se solicita a los individuos que expliquen las estrategias empleadas (Forrester, 1990; Friebe, 1967; Hartley, 1977; Hildreth, 1983; Immers, 1983). El porcentaje de participantes que usan la estrategia de iteración de la unidad oscila desde el 30% (Forrester, 1990; Friebe, 1967) al 97% (Hartley, 1977). Forrester, Latham y Shire (1990) encontraron que el uso de la estrategia de iteración de la unidad aumenta con la edad, al igual que la precisión en la estimación. La estrategia de iteración de la unidad se corresponde con las estrategias de comparación recogidas en Segovia et al. (1989)¹¹ tomando como referente la unidad de medida.

⁸ Véase apartado 4.

⁹ Véase apartado 3.

¹⁰ Véase apartado 2.

¹¹ Descritas en apartado 4.2.4 del Capítulo 2.



Aunque la medición mental es la estrategia más común en los estudios que han investigado las estrategias de estimación en medida (Friebel, 1967; Hartley, 1977; Hildreth, 1983; Immers, 1983) estos resultados dependen de las tareas utilizadas por los investigadores. Joram et al. (1989) pone de manifiesto la necesidad de investigar cómo interactúan las estrategias de los estimadores respecto del tamaño de la CAE.

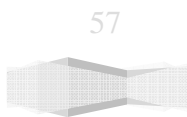
- *Transformación de la unidad estándar. Puntos de referencia*

La estrategia de iteración de la unidad requiere, por parte del estimador, recordar la unidad si no está presente durante la estimación y dividir la CAE en unidades; ambas acciones plantean desafíos cognitivos para los estimadores. Para hacer frente a estas dificultades, los estimadores pueden transformar la unidad y en lugar de compara la CAE con una unidad estándar, el estimador puede hacer uso de un *punto de referencia*¹² (Hildreth, 1983) que itera de la misma manera que la unidad estándar. Según Joram et al. (1998) una de las razones para el uso de puntos de referencia es que “aumentan la probabilidad de que la representación mental del tamaño de la unidad sea más precisa debido a que el estimador puede presumiblemente representar más fácilmente el punto de referencia que la correspondiente unidad estándar” (p. 426). Una segunda razón para el uso de los puntos de referencia es que pueden ser más significativos para el estimador que las unidades estándar (Carter, 1986).

Los puntos de referencia que son mayores en magnitud que las unidades individuales estándar reducen el número de iteraciones que se deben realizar, proporcionando un mejor acercamiento a la medida de la CAE (Spitzer, 1961). En las estrategias de comparación con una cantidad aproximadamente igual (Segovia et al. 1989) se usa un referente cuya medida es aproximadamente igual a la CAE, obviando así la necesidad de cualquier iteración. Es evidente que utilizando referentes o puntos de referencia, en algunos casos se reduce mucho la demanda cognitiva de la estimación, porque el número de iteraciones de la unidad se reduce, el estimador con menos frecuencia tiene que controlar donde termina una unidad y empieza otra, y hay menos unidades en total.

Además de la importancia práctica de la utilización de puntos de referencia para hacer frente a las demandas cognitivas de la estimación, la construcción de un conjunto de puntos de referencia situados a lo largo de la escala apropiada puede ayudar al

¹² Hildreth(1983) denomina punto de referencia a lo que Segovia et al. (1989) denominan referente.



estimador a desarrollar una escala interna para una magnitud determinada. Una línea de medición mental no necesita tener llenos todos los puntos de referencia porque los desaparecidos pueden ser generados por el estimador basándose en el conocimiento de cómo se construye una escala. El sentido numérico en la medición (Markovits et al. 1989; Sowder, 1992) se puede entender como tener una línea de medición mental en la que las magnitudes están representadas por diferentes unidades. Los puntos de referencia proporcionan un medio para la construcción de una línea de forma que sea significativa y recordable para el estimador.

- *Trasformación de la cantidad a estimar. Descomposición/recomposición*

En la estrategia de descomposición/recomposición el estimador mentalmente descompone la CAE en pequeñas cantidades antes de estimar y luego aplica uno de los procesos descritos anteriormente. Si la CAE tiene alguna señal de subdivisión pueden sugerir la forma para descomponer la CAE. Las estimaciones obtenidas para cada parte se suman o se multiplica en un proceso conocido como recomposición. Cuando la CAE no puede ser fácilmente subdividida en partes iguales, los estimadores pueden mentalmente reordenar la CAE antes de estimar (Hildreth, 1983).

Este interés por el estudio de las estrategias surgió en las investigaciones llevadas a cabo en los 80 y 90, las cuales muestran su interés por los procesos cognitivos (Forrester, Latham y Shire, 1990; Forrester y Shire, 1994; Siegel, Goldsmith y Madson, 1982). En lugar de centrarse sólo en los niveles de precisión de los participantes, los investigadores comienzan a atender a las estrategias que utilizan. Los estudios mencionados revelaron que la estimación de la medición es un proceso altamente volátil y fácilmente influenciado por las características de los objetos a ser estimados. Tanto el modelo de Forrester et al. (1990) como el modelo de diagrama de flujo¹³ propuesto por Siegel et al. (1982) recoge las habilidades, destrezas y procedimientos de aproximación empleados en las tareas de estimación en medida. Estos modelos tienen varias limitaciones. En primer lugar, como Sowder (1992) señala, no distinguen entre la estimación de cantidades discretas y la estimación de cantidades continuas. En segundo lugar, son modelos difíciles de manejar, pues incluyen muchos posibles pasos o elementos.

¹³ Véase apartado 4.3.3 del Capítulo 2.

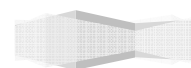
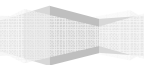


Tabla 3. 1. Revisión de Estrategias de Estimación en Medida.

Categoría	Estrategia	Otras denominaciones	Descripción
Estimación Mental	Aplicación del Instrumento Mental (Friebel, 1976)		Mentalmente se alinea el instrumento de medida con la CAE y se lee la medida.
	Iteración de la Unidad (Hildreth, 1980, 1983; Immers, 1983)	Aplicación de la unidad (Friebel, 1976) Fijación de un estándar (Hartley, 1977)	Se divide la CAE mentalmente en unidades, se cuentan las unidades, se da la suma como estimación.
Transformación de la Unidad	Recordar el punto de referencia	Punto de referencia (Moskol, 1980) Aplicación de la unidad (Friebel, 1976) Referente (Segovia et al., 1989) Unidad objetal o antropométrica (Callís, 2002)	Recordar un objeto equivalente a una unidad estándar, entonces se aplica otra estrategia tal como la iteración de la unidad con el objeto sustituyendo a la unidad.
	Conocimiento previo (Hildreth, 1983)		Usar el conocimiento previo sobre una parte de la cantidad a estimar
	Comparación (Hildreth, 1983)	Correspondencia uno a uno (Moskol, 1980)	Recordar una referencia, cuya medida es conocida, que es equivalente en magnitud a la CAE.
Transformando el Objeto	Descomposición/Recomposición	Despedazando (sólo por descomposición) (Hildreth, 1983) Método indirecto (Moskol, 1980)	Antes de estimar, se subdivide la CAE en cantidades más pequeñas. Se estima cada una de las partes usando uno de los procesos de anteriores. La estimación de cada una de las partes es sumada o multiplicada para obtener la estimación final.
	Usar señales de subdivisión (Hildreth, 1983)		Usar el aspecto físico de la CAE para subdividirla mentalmente
	Reordenamiento		Cuando la subdivisión es difícil (descomposición irregular) el estimador previamente reordena mentalmente la CAE antes de subdividirla.



Categoría	Estrategia	Otras denominaciones	Descripción
	Apretando [Squeezing]		Haciendo estimaciones que son un poco más y un poco menos que la medida exacta, el estimador consigue progresivamente estar más cerca de la misma.

3. REVISIÓN DE INVESTIGACIONES SOBRE ENSEÑANZA- APRENDIZAJE EN LA ESTIMACIÓN EN MEDIDA

La escasez de investigaciones sobre la validez de métodos de enseñanza pone de manifiesto la debilidad de estas formas de enseñanza (Joram et al. 1998). Callís y Fiol (2006) también pone de manifiesto la poca incidencia académica que se le da: “la formación académica no potencia la adquisición de capacidades de estimación métrica” (p. 108).

En este apartado exponemos una revisión de investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la estimación en medida; también en el apartado 4.2 del capítulo 2 expusimos más ampliamente algunas de las investigaciones que sintetizamos aquí.

En general, se presentan dos métodos de enseñanza de la estimación en medida: 'adivinar y comprobar' y 'entrenamiento en estrategias'.

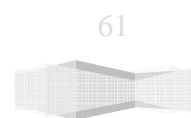
- *Método de adivinar y comprobar*

Los estudios relacionados con el método de adivinar y comprobar [guess and check]¹⁴ demuestran que es un método potente para una rápida mejora de la precisión. No obstante, las habilidades desarrolladas son frágiles y se limita a contextos idénticos o similares a los utilizados en la instrucción (Joram et al. 1998).

Para determinar cuál es el mecanismo responsable de la mejora de la precisión en este método, Thorndike (1981) dio a los estimadores retroalimentación de “correcto” o “incorrecto” en relación con la precisión de las estimaciones de longitud realizadas. Llegó a la conclusión de que la precisión mejora como resultado de adivinar y comprobar, porque la opinión del investigador reforzaba o debilitaba las respuestas de los estimadores.

Los estudios sugieren que cuando se utiliza el método de adivinar y comprobar, la precisión de la estimación mejora sin mediar el impacto de las estrategias. En el estudio de Hildreth (1980) demostró que el grupo que seguía el método de ‘adivinar y comprobar’ mejoró su precisión de las estimaciones usando las mismas estrategias. Los

¹⁴ Véase descripción del método en apartado 4.2.1 del capítulo 2.



estudiantes de Immers (1983) también hicieron estimaciones más precisas después de practicar con este método y no alterar el uso de las estrategias del pre-test al post-test.

El método de adivinar y comprobar es planteado por Bright (1976) como una herramienta para la enseñanza de la medida. Buchanan (1978) apoya esta idea sugiriendo que es factible diseñar secuencias de instrucción de modo que puedan convertirse en una herramienta para aprender otras habilidades y conceptos. Coburn y Shulte (1986) destaca la importancia de la enseñanza, no sólo de la mecánica de la medición, sino también de la estimación en medida.

En resumen, los resultados de los estudios mencionados anteriormente indican que el elemento clave responsable de la eficacia del método de adivinar y comprobar es la retroalimentación de la información que permite a los estimadores mejorar sus habilidades.

- *Método de entrenamiento de estrategias*

No existen muchas investigaciones sobre la validez del método del entrenamiento de estrategias a pesar de ser un método recomendado por muchos investigadores. La dificultad para comprobar la validez de este método es que en muchas ocasiones se usa de forma simultánea con el método de adivinar y comprobar (Hildreth, 1980, 1983). Attivo y Trueblood (1980) encontraron que un grupo de futuros profesores que habían identificado un punto de referencia o referente personal y luego aplicaban el método de adivinar y comprobar con este punto de referencia, realizaban estimaciones más precisas que los estudiantes que no usaron un punto de referencia personal.

Los hallazgos de un estudio realizado por Joram et al. (1996) también sugieren que la estrategia del uso de puntos de referencia es un método prometedor para la enseñanza de la estimación en medida. En este estudio realizado con estudiantes de tercer grado, se observó que los estudiantes a los que se les enseñó a imaginar los puntos de referencia equivalentes a un pie y una pulgada, realizaron estimaciones más exactas de la representación de las unidades estándar que el grupo control que había recibido instrucción según el método de adivinar y comprobar.

Más recientemente, los investigadores se han centrado en estudiar los procesos cognitivos que subyacen a la estimación en medida y a partir de ahí realizar propuestas para la enseñanza de la estimación en la escuela. Así, Lang (2001) trabaja la estimación en la niñez temprana. Trata de enseñar a niños cómo formular una respuesta que sea



sensible y razonable. Por ejemplo, las estimaciones deben estar en un rango razonable que depende de la situación y del tamaño de la cantidad. Lang propone algunas ideas para realizar actividades que fomenten la capacidad de estimación en los niños: (a) Permitir que los niños repitan las mismas actividades varias veces y (b) repetir las actividades con artículos de diferente forma y tamaño.

Callís (2002) realiza una investigación con niños de primaria centrada en estimación métrica longitudinal, rectilínea y curvilínea. Dicha investigación le permite dar una serie de directrices para la enseñanza-aprendizaje de la capacidad estimativa¹⁵.

Legutko y Urbanska (2002) destacan la importancia de la interiorización de referentes pues, según ellos, las estimaciones se realizan con base en: nuestra experiencia anterior, el conocimiento que tenemos sobre valores o medidas estimadas, o por comparación de la cantidad a estimar con un referente que sea familiar al niño. Esto requiere un conocimiento sólido de conceptos geométricos.

En el Yearbook del NCTM del 2003 dedicado a la enseñanza y aprendizaje de la medida numerosos investigadores proponen actividades que involucren el uso de estrategias de estimación (Barrett, Jones, Thornton y Dickson; Bright; Joram; Hodgson, Simonsen, Lubek y Andreson; Outhred, Mitchelmore, McPhail y Gould; Stephan y Clements, 2003). Hodgson et. al. (2003) proponen como tarea para llevar a las clases la estimación de superficies irregulares. Según estos autores, la estimación puede promover una comprensión de las matemáticas, ayuda a revelar el pensamiento del estudiante y puede servir como enlace entre el mundo real y el matemático. Outhred et al. (2003) establecen tres estadios o etapas en la enseñanza de las unidades formales: una etapa en la que los estudiantes identifican el atributo espacial, una segunda etapa en la que aprenden a medir de manera informal y una tercera etapa en la que se aprenden las estructuras de las unidades formales. Barret et al. (2003) realiza un estudio sobre los procedimientos que utilizan los alumnos de primaria cuando miden longitudes basados en la comparación obteniendo perfiles que caracterizan el pensamiento de la medida de longitudes. Stephan y Clements (2003) desarrollan varios conceptos importantes en el aprendizaje de la medida: (1) crear particiones, (2) iteración de la unidad, (3)

¹⁵ Descritas en apartado 4.2.5 del Capítulo 2.



transitividad, (4) conservación, (5) la acumulación de la distancia, y (6) relación con el número.

Whitin (2004) revisa la literatura para explorar las ideas sobre estimación de los niños encontrando que los libros proveen un contexto natural para discutir ideas matemáticas, incluyendo las estrategias tales como la estimación (Whitin y Wilde 1992). Este estudio puede ayudar a destacar este uso útil y funcional de la estimación.

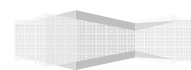
Como conclusiones de las investigaciones sobre métodos de enseñanza de la estimación en medida destacamos la constatación de la contribución de las practicas con retroalimentación la mejora de la efectividad en las estimaciones; enseñar estrategias también contribuye a la mejora de la estimación, especialmente estrategias que usan referentes significativos para el estimador.

4. OTRAS INVESTIGACIONES EN EL CAMPO DE LA ESTIMACIÓN EN MEDIDA

Son varias las características de la estimación estudiadas por diversos investigadores, algunas de la cuales ya han sido destacadas en los apartados anteriores: precisión de las estimaciones, estrategias de estimación y métodos de enseñanza. En este apartado recogemos los resultados de la investigación de otras características que, aunque su estudio no forma parte de nuestro objetivo, si es pertinente tenerlos presentes. Tales características son, por ejemplo, la importancia de la estimación para la vida real, los tiempos de reacción en la realización de las estimaciones, el efecto del desorden en las estimaciones, el uso del ordenador en la estimación o cómo influye la edad del estimador en la precisión y/o uso de estrategias en las estimaciones.

La importancia de la estimación en la vida real es una cuestión reconocida en la comunidad de investigadores en educación matemática. En este sentido cabe destacar el trabajo de Adams y Harrell (2003), quienes tratan de recoger datos sobre los usos de la estimación en la vida real. Realizaron entrevistas a profesionales para obtener la información sobre cómo la gente utiliza la estimación en el lugar de trabajo. Concretamente les formularon las siguientes preguntas:

1. ¿Para qué clase de tareas utiliza usted con frecuencia la estimación?
2. ¿Por qué elige estimar en vez de usar un instrumento para obtener la medida?



3. ¿Por qué elige utilizar un instrumento para obtener una medida en vez de la estimación?

Como resultado de este estudio a personas de diferentes profesiones obteniendo seis razones para estimar en sus respectivas profesiones: (1) ahorra tiempo, (2) ayuda a comprobar la validez y los métodos de medida, (3) en muchas situaciones la medida no es posible, (4) es requerida por la naturaleza del trabajo, (5) se usa para calcular el coste de determinadas tareas, y (6) estimar es divertido.

En relación con el tiempo de reacción en las estimaciones, una primera hipótesis es que aumenta cuando el tamaño de la CAE también aumenta y depende del tamaño de la unidad. Hartley (1981) estudia tiempos de reacción en estimación de longitudes. Realizó un experimento con adultos en el que se proponía que estimaran una línea de 6 cm utilizando una unidad de 1 cm, y una línea de 12 cm usando una unidad de 2 cm. En ambos casos los tiempos de reacción fueron idénticos.

Kosslyn, Ball y Reiser (1978) encontraron que los tiempos de reacción necesarios para buscar imágenes mentales aumentan con la distancia, y que las imágenes más grandes requieren más tiempo que las más pequeñas.

El efecto del desorden fue estudiado por Thomdyke (1981) encontrando que los tiempos de reacción aumentan para estimar espacios llenos de objetos. Luria et al. (1967) encontraron que los participantes creían que la distancia entre ellos y los objetos era mayor cuando el espacio entre el participante y el objeto estaba lleno que cuando el espacio estaba despejado. Kosslyn et al. (1974) también encontró que los adultos perciben la distancia entre objetos separados por una barrera opaca como más larga que cuando están separados por una barrera transparentes o que cuando no hay barrera alguna.

Respecto del uso de la computadora en la enseñanza de la estimación, Morgan (1986) realizó un experimento con una microcomputadora usando programas interactivos para realizar un acercamiento a la enseñanza de la estimación mediante el método de adivinación y comprobación. El programa permitía trabajar la estimación de la longitud y el área. Morgan concluye indicando que el ordenador es un vehículo ideal para la enseñanza de la estimación en medida porque (1) sus gráficos dinámicos pueden ayudar a desarrollar un marco mental de referencia para el tamaño de las unidades de medida; (2) se puede juzgar cuando una estimación está comprendida en un intervalo particular;



(3) proporciona un feedback inmediato; y (4) puede almacenar y recuperar las respuestas de los estudiantes. Otro estudio llevado a cabo con la ayuda del ordenador es el realizado por Papadopoulos y Dagdilelis (2009) con alumnos de 5º y 6º en el cuál analizan cómo los alumnos estiman áreas de formas irregulares utilizando lápiz y papel y entornos informáticos.

Respecto de la influencia de la edad en la precisión de las estimaciones, todas las investigaciones realizadas apuntan a que la precisión de las estimaciones aumenta con la edad, así como la estrategia de iteración de la unidad (Forrester et al., 1990; Kosslyn et al., 1990).

Un tipo particular de investigaciones, llevadas a cabo principalmente por psicólogos, se han centrado en el estudio de las estimaciones en la recta numérica (Siegler y Opfer, 2003; Siegler y Booth, 2004; Opfer y Siegler, 2007) consistente en situar cifras en una recta numérica vacía (sin marcas ni número), salvo en los extremos. Encontraron que la capacidad para situar números en la recta numérica en niños pequeños se ajustaba bastante bien a una función logarítmica y que conforme avanzaba la edad de los niños, la función tendía a convertirse en lineal. El porcentaje de error al situar números en la recta numérica también desciende con la edad.

Booth y Siegler (2006) estudian la correlación entre los distintos tipos de estimación encontrando correlación positiva entre la estimación en medida de magnitudes continuas, discretas y estimación en la recta numérica para niños de cuarto de primaria. No encontraron correlación entre la estimación en cálculo con los otros tipos de estimación.

Callís (2002) compara en su estudio la estimación métrica (cantidades continuas) y la estimación numérica (cantidades discretas) encontrando que la capacidad de estimación métrica está menos desarrollada y es menos precisa que la numérica.

5. CLASIFICACIÓN DE INVESTIGACIONES EN ESTIMACIÓN

En la Tabla 3. 2 presentamos una clasificación de las investigaciones en estimación, diferenciando el tipo de magnitud considerada. De los trabajos presentados destacamos algunos por tener una relación más directa con nuestra investigación. Estos son los siguientes: Bright (1976); Siegel, Goldsmith y Madson (1982); Hildreth (1983); Segovia, Castro, Rico y Castro (1989); Forraste (1990); Segovia (1997); May (1994);



Clayton (1996); Pareja (2001); Callis (2002); y Bright (2003). Algunos de estos trabajos ya han sido aludidos en este capítulo o en capítulos anteriores puesto que forman parte del marco teórico de nuestra investigación.

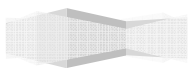


Tabla 3. 2. Clasificación de Trabajos e Investigaciones sobre Estimación en Medida.

Estimación en Medida				
Magnitudes continuas		Magnitudes discretas		Ambos tipos de magnitudes
<ul style="list-style-type: none"> • Crawford y Zylstra (1952); • Corle (1963); • Luria et al. (1967); • Swan y Jones (1971, 1980); • Krueger (1972); • Bright (1976, 1979, 2003); • Hartley (1977, 1981); • Kosslyn et al. (1974, 1978, 1990); • Thorndyke (1981); • Immers, R. C. (1983); • Maletsky (1982); • Hildreth (1983); • Siegel, Godsmith y Madson (1982); • Carter (1986); • Coburn y Shulte (1986); • Benton (1986); 	<ul style="list-style-type: none"> • Morgan (1986); • Usiskin (1986); • Forraste et al. (1990, 1994); • May (1994); • Seymour (1994); • Shimizu e Inshida (1994); • Joram et. al (1998, 2005); • Forminykh (2001); • Callís (2002); • Legutko y Urbanska (2002); • Stephan y Clements, (2003); • Outhred et al. (2003); • Papadopoulos et al. (2009, 2010); • Chang et al. (2011) 	<ul style="list-style-type: none"> • Piaget y Szeminska (1964); • Gronet y Marshall (1979); • McLaughin (1981); • Cuneo (1982); • Newman y Berger (1984); • Lentzinger, Rathmell y Urbatsch (1986); • Howe y Jund (1987); • Markovits (1987); • Clayton (1988); • Crities (1989); • Barody y Gatzke (1991); 	<ul style="list-style-type: none"> • Markovits y Hershkowitz (1993); • Clayton (1996); • De-Corte (1997); • Markovits y Hershkowitz (1997); Segovia (1997); • Lang (1999); • Huntley-Fenner (2001); • Lang (2001); • Pareja (2001); • Taylor-Cox (2001); Sieglar y Booth (2004) 	<ul style="list-style-type: none"> • Buchanan (1978); • Segovia, Castro, Rico y Castro (1989); • Sowder (1992); • Adams y Harrell (2003); • Hogan y Brezinski (2003); • Whitin (2004).



CAPÍTULO 4: COMPONENTES Y ERRORES EN LA ESTIMACIÓN EN MEDIDA

Este capítulo está formado por dos partes de gran importancia en nuestra investigación: las componentes de la estimación en medida y los errores que cometen los alumnos. Recogemos en este capítulo estas cuestiones porque, aunque ambas partes están construidas partiendo de la reflexión teórica, suponen la adopción de posturas particulares, tales como la asunción de qué elementos intervienen en la enseñanza-aprendizaje de la estimación en medida o fijar un margen de error aceptable en las estimaciones.

Las componentes suponen una guía teórica para diseñar la intervención en el aula así como de análisis de las producciones de los alumnos. Como han sido formuladas con base en otros trabajos e investigaciones previas (Bright, 1976; Inskip, 1976; Hildreth, 1983; Segovia, Castro, Rico y Castro, 1989; Frías, Gil y Moreno, 2001; Callís, 2002; Stephan y Clements, 2003; Castillo, 2006) y la experiencia del grupo de investigadores participantes en este trabajo, por sí mismas suponen un primer aporte de esta investigación.

Por otra parte, en nuestra investigación, los errores que cometen los alumnos son objeto de estudio tanto cualitativa como cuantitativamente. El carácter cualitativo del error está marcado por las dificultades que subyacen al mismo y permite agruparlo en tipologías de errores o patrones de error “que sirven al docente para organizar estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades” (Engler et al., 2004, p.23). El carácter cuantitativo del error en la estimación, determinado a partir del porcentaje de error permite establecer un necesario rango de aceptabilidad de los resultados.

1. COMPONENTES DE LA ESTIMACIÓN EN MEDIDA

Por componentes de la estimación en medida vamos a considerar todos aquellos hechos, conceptos, procedimientos y actitudes que se utilizan o se pueden utilizar para afrontar una tarea de estimación en medida. En el capítulo dos ya describimos los tipos de

conocimiento asociados a la estimación en medida: la magnitud a la que se refiere la estimación, la medida y la propia estimación. De ahí que para determinar las componentes de la estimación de cantidades continuas debemos considerar, primero, las componentes que intervienen en el conocimiento de la magnitud, en segundo lugar, las componentes asociadas a la medida, y finalmente, las componentes propias de la estimación.

Las componentes asociadas a la magnitud que consideramos son:

- CMa1. Percibir la cualidad que va a ser medida o estimada.*
- CMa2. Ser conservador en la cantidad.*
- CMa3. Comparar la cualidad a medir o estimar.*
- CMa4. Utilizar la propiedad de la transitividad de cantidades.*
- CMa5. Ordenar cantidades.*
- CMa6. Operar aditivamente cantidades.*
- CMa7. Restar cantidades.*
- CMa8. Operar multiplicativamente cantidades.*
- CMa9. Dividir cantidades.*
- CMa10. Conocer la terminología asociada a la magnitud.*

Las componentes asociadas a la medida son:

- CMe1. Seleccionar instrumentos de medida.*
- CMe2. Manejar instrumentos de medida.*
- CMe3. Medir una determinada cantidad de magnitud.*
- CMe4. Dar significado al valor numérico de la medida.*
- CMe5. Elegir una unidad de medida adecuada.*
- CMe6. Emplear referentes como instrumento de medida.*
- CMe7. Conocer las unidades de medida estandarizadas: el Sistema Internacional.*
- CMe8. Conocer la equivalencia entre unidades de medida.*
- CMe9. Manejar el sistema de numeración decimal.*

CMe10. Valorar la utilidad de la medida

CMe11. Conocer la terminología asociada a la medida.

Las componentes asociadas a la estimación son:

CEst1. Tener interiorizada la medida de referentes.

CEst2. Tener interiorizada la cantidad que le corresponde a las unidades de medida del S.I.

CEst3. Seleccionar estrategias adecuadas.

CEst4. Usar adecuadamente las estrategias.

CEst5. Tolerar el error.

CEst6. Verificar la adecuación de la estimación.

CEst7. Valorar la utilidad de la estimación.

CEst8. Conocer y utilizar términos relacionados con la estimación en medida.

Este listado de componentes nos sirve de guía en el diseño de la propuesta curricular a implementar como parte del experimento de enseñanza así como para valorar y realizar un seguimiento de la adquisición de los conocimientos necesarios para desarrollar este tipo de tareas.

Las componentes asociadas a la magnitud y las componentes asociadas a la medida nos serán útiles en tanto en cuanto nos permitan detectar posibles errores o dificultades que puedan surgir a los alumnos en la realización de las tareas de estimación. Muchas de las componentes asociadas a la magnitud y a la medida son prerrequisitos necesarios para estimar (Bright, 1976; Hildreth, 1983; Swoder, 1992; Joram et al. 1998).

Describimos a continuación cada una de las componentes.

1.1. Componentes Asociadas a la Magnitud

Comenzamos por describir las componentes asociadas a la adquisición del concepto de magnitud:

CMa1. Percibir la cualidad que va a ser medida o estimada

La percepción de una determinada magnitud significa identificarla y diferenciarla de otras magnitudes o cualidades.



Inskeep (1976, p. 61) indica que “la medida comienza con la percepción de lo que debe ser medido”. Según este autor, el proceso de la medida evoluciona secuencialmente desde la percepción a la comparación. También Frías, Gil y Moreno (2001, p. 484) coinciden en señalar que “en el proceso de asimilación de una magnitud, la primera fase corresponde a la percepción de la cualidad, es decir, la distinción del atributo o propiedad que se desea conceptuar mediante la identificación, aislamiento o discernimiento de la cualidad de los objetos”. Sobre el modo en que se adquiere esta componente Frías et al. (2001, p.485) indican: “el modo en que se percibe una cualidad difiere mucho de unas cualidades a otras y tiene mucho que ver con determinadas apreciaciones de los sentidos y de nuestras experiencias anteriores”.

También estos autores indican diferentes formas según las cuales puede percibirse la longitud:

- “- la longitud como *espacio ocupado* (longitud de un objeto en una de sus tres dimensiones) y
- la longitud como *espacio vacío* (distancia entre objetos).”

Para la magnitud superficie Inskeep (1976, p.71) indica que “la percepción de superficie puede desarrollarse a partir de las ideas primitivas de cubrir objetos. Por lo general, el área no es más que un medio conveniente para comunicar la cantidad de superficie plana que se puede cubrir. Se puede extender a las cubiertas que no son planas”.

CMa2. Ser conservador en la cantidad

Ser conservador de la cantidad significa admitir su invarianza ante un conjunto de transformaciones. Son transformaciones que conservan la longitud las traslaciones, los giros o las simetrías. Por el contrario, son transformaciones que no conservan la longitud todas aquellas que impliquen deformación del objeto en cuestión por estiramiento, la rotura (siempre que no sea recompuesta). Piaget consideró que en el desarrollo de las nociones de medida uno de los primeros estadios es aquel en el que comienza emerger la conservación (Piaget, Inhelder y Szeminska, 1960). En el proceso de construcción de la noción de cantidad, Frías et al. (2001, p. 487) indican que “primero se aísla la cualidad mediante el conjunto de situaciones en las que se presenta, luego se comparan objetos reconociendo la invarianza de la cualidad frente a determinadas transformaciones; por último, se llega a clasificar los objetos mediante el criterio de igualdad (tan... como).” Callís (2002, p. 101) indica que la conservación de



la magnitud es una de las etapas en el proceso de adquisición de la magnitud: “Por más que se modifiquen las apariencias preceptuales, la magnitud que se evalúa no queda modificada”.

CMa3. Comparar la cualidad a medir o estimar

Comparar una cualidad supone establecer una relación (de desigualdad o igualdad). Es aquí cuando se establecen relaciones del tipo, *más... que* y *menos... que*, para la comparación de desigualdad, y *tan... como*, para la comparación de igualdad.

Inskeep (1976, p. 62) dice que “la percepción es el principio de la medida, y la comparación sigue a la percepción. Habiendo percibido una propiedad de un objeto, nosotros, de modo natural la comparamos con otros objetos que tienen la misma propiedad...”. Además, indica que este proceso se puede realizar sin tener ninguna habilidad numérica. También da ejemplos de actividades que se pueden realizar para desarrollar la comparación de longitudes y aconseja “para desarrollar el tipo de sensaciones para la longitud debe ser táctil y visual y no depender de la habilidad en la medida o de la capacidad de leer y ordenar correctamente números”. Este autor también indica la complejidad que puede tener la comparación de superficies para un alumno, por el hecho de que la observación directa puede ser engañosa. Comparar el área de figuras que tienen distintas formas (un triángulo, un cuadrado, un círculo, etc.) es una tarea que requiere tener ciertas estructuras cognitivas para ello.

Frías et al. (2001, p.487) recuerdan que un factor importante en la comparación es “reconocer la invarianza de la cualidad frente a determinadas transformaciones; si dos objetos (o uno solo) coinciden en una cualidad, después de someter a uno de ellos (o el mismo objeto) a una determinada transformación, siguen coincidiendo en dicha cualidad”. Esta componente se correspondería con el “estadio de comparación objetal” recogido por Callís (2002) de entre los estadios piagetianos necesarios para la adquisición de la medida.

CMa4. Utilizar la propiedad de la transitividad de cantidades

Consideraremos la propiedad transitiva en los términos que la establece Chamorro (1988, p. 19) es decir la cantidad de magnitud “se conserva por razonamientos deductivos del tipo $A = B$ y $B = C$ implican que $A = C$, donde se nota la intervención de un término medio operatorio: B.”



Chamorro (1988, p. 18) también recoge los estadios piagetianos sobre el desarrollo evolutivo de la idea de medida, los cuales son tres. Resumiendo, un primer estadio consiste en la comparación directa de objetos. Un segundo estadio está caracterizado por el desplazamiento de objetos, esto es, aproximar los objetos que tratamos de comparar o por la utilización de un *término medio* que todavía no es una medida común, y que normalmente utiliza las partes del propio cuerpo: dedos, palmas, pies, etc. Y finalmente, el estadio en que se hace operativa la propiedad transitiva.

Stephan y Clements (2003, p.5) también indica como conceptos importantes en el aprendizaje de la medida (entre otros) a la conservación y la transitividad.

CMa5. Ordenar cantidades

Una vez aislada o reconocida una cualidad, y tras el reconocimiento de la invarianza de la cualidad frente a determinadas transformaciones es posible ordenar los objetos mediante los criterios 'mayor que', menor que y 'tan ... que' o similares.. El criterio de igualdad (*tan... como*) permite establecer una clasificación y da lugar a la formación de cantidades.

Callís (2002, p. 101) incluye la ordenación de la magnitud como una de las etapas necesarias en el proceso de adquisición de la magnitud y lo define como la “capacidad para saber organizar una serie de objetos en base a una determinada magnitud”.

CMa6. Operar aditivamente cantidades

La adición de cantidades da lugar a una nueva cantidad que se obtiene a partir de la composición de las cantidades originales.

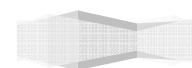
CMa7. Sustraer cantidades

Igualmente, la noción de sustracción, resta o disminución de dos cantidades, A y B de la magnitud M, con $B \leq A$, se define como otra cantidad C perteneciente a M tal que $A = B + C$.

CMa8. Operar multiplicativamente cantidades

Una cantidad A de una magnitud M multiplicada por un número n genera una nueva cantidad nA cuya medida se obtiene multiplicando n por la medida de A.

La iteración de la unidad o referente recogida por Kamii y Clark (1997) o en el previo T.I.T. (Castillo, 2006) es una estrategia asociada a la multiplicación; para establecer la



medida o estimación de una determinada cantidad por este procedimiento, supone, primero, el cálculo de cuántas veces esta la unidad contenida en la cantidad total, es decir, la cantidad total es igual a un determinado número por la unidad, y segundo, calcular cuánto mide la unidad para establecer la medida o estimación de la cantidad total.

CMa9. Dividir cantidades

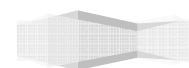
Una cantidad A de una magnitud M dividida por un número n genera una nueva cantidad $A:n$ cuya medida se obtiene dividiendo la medida de A por n .

Uno de los procesos previos al establecimiento de la medida de una cantidad o de la estimación de la misma consiste en dividir o partir la cantidad. Stephan y Clements (2003, p. 4) lo denominan “particionamiento”, y lo definen para el caso de la longitud como “la actividad mental de corte de la longitud de un objeto en unidades del mismo tamaño”.

La estrategia de Descomposición/Recomposición recogida en Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) requiere saber que una determinada cantidad de magnitud puede ser dividida en partes, para posteriormente estimar la medida de cada una de las partes por separado.

CMa10. Conocer la terminología asociada a la magnitud

Cada magnitud tiene unos términos específicos que la caracterizan, tanto a ella como a las diferentes cantidades de las mismas, lo cual depende en muchos casos incluso de la posición en que se presenta. Por ejemplo, es frecuente utilizar términos tales como “largo”, “ancho”, “alto”, “anchura”, “grosor”, etc. para referirnos a diferentes cantidades de longitud que se pueden presentar en diferentes situaciones. El conocimiento del significado de estos términos posibilita la realización de las tareas. En palabras de Frías et al. (2001, p. 480) “La habilidad para distinguir tales propiedades precede a la habilidad para expresarlas lingüísticamente”. Del mismo modo, la presentación del objeto en una u otra posición puede determinar que nos estemos refiriendo a una u otra cantidad: hay términos tales como “base” o “altura” que tienen una connotación ligada a la posición en la que se presenta la cantidad en un determinado objeto.



1.2. Componentes Asociadas a la Medida

Veamos a continuación una descripción de las componentes asociadas a la medida.

CMe1. Seleccionar instrumentos de medida

Un primer paso en el proceso de la medida consiste en seleccionar el instrumento a utilizar. Aunque en muchos casos elección se hace por disponibilidad, es decir, se selecciona un instrumento de entre los disponibles, lo correcto es elegir el instrumento acorde a la magnitud que se va a medir, al tamaño de la cantidad a medir y en coherencia con la precisión que deseamos obtener,. Por tanto, es importante conocer las características de los instrumentos de medida: precisión, exactitud, apreciación y sensibilidad. Para medir longitudes podemos usar como instrumentos de medida: la cinta métrica, el calibre (o vernier), el escalímetro, la regla graduada, el micrómetro, el reloj comparador, curvímeter, odómetro, etc. Instrumentos de medida de superficies son: el planímetro, papel milimetrado, malla cuadrículada, etc. Además de estos instrumentos, numerosos programas informáticos implementan opciones que permiten medir tanto longitudes como superficies.

CMe2. Manejar instrumentos de medida

Consideramos que un alumno sabe manejar un instrumento de medida si es capaz de realizar mediciones coherentes al grado de precisión de dicho instrumento. El uso y manejo de instrumentos de medida es importante pues la exactitud de las medidas depende del instrumento que se use y cómo se use. Aunque todo instrumento de medida tiene un margen de error, la precisión que queramos obtener va a depender de la precisión de la herramienta que usemos para medir.

Inskip (1976) introduce la idea de aproximación y continuidad a partir de la medida: “La idea de aproximación es una parte de las naturaleza física de la medida de cualquier magnitud continua. La única medición física exacta es la correspondiente a las magnitudes discretas.” (p. 84).

CMe3. Medir una determinada cantidad de magnitud

La medición, es un proceso que se lleva a cabo para establecer una medida. Callís (2002, p. 40) lo define como “la aplicación tecnológica y procedimental que tiene por objeto la obtención de la medida, o sea, es el conjunto de operaciones físicas o mentales a realizar, con o sin instrumentos, con el fin de determinar la medida de un objeto”.



Callís (2002, p. 38) dice que la medida “consiste en dar o asignar un número real al proceso de medición, lo que implica la necesidad de poder disponer de un concepto métrico de manera que la medida es, consecuentemente, un homomorfismo entre el sistema empírico de una magnitud y el sistema numérico de los número reales”.

Entendemos que la medición de una determinada cantidad de magnitud se puede realizar por diversos métodos: utilizando un instrumento de medida, comparando directamente el objeto a medir con la unidad, realizando una comparación con otro objeto del cuál conocemos su medida (referente), o bien, utilizando alguna técnica indirecta.

CMe4. Dar significado al valor numérico de la medida

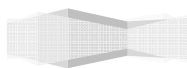
Por el solo hecho de precisar el valor de la medida no significa que exista medición, ya que sin la metrización correspondiente (capacidad de dar significado al orden de magnitud que tiene una medida) sería un valor numérico sin sentido y descontextualizado Callís, 2002, p. 39). Se trata de un proceso de comparación y ordenación para determinar el significado del valor numérico fruto de la medición con respecto al contexto y en relación a otras medidas.

Stephan y Clements (2003, p.7) también consideran esta componente, pues indican que medir, es algo conceptualmente más complejo que asignar un número ya que requiere el entendimiento y reorganización del objeto medido.

CMe5. Elegir una unidad de medida adecuada

La medida de una cantidad depende de la unidad elegida. La unidad de medida no es más que una cantidad de magnitud estandarizada y reconocida internacionalmente. La medida de una cantidad depende de la unidad elegida, puesto que cuanto mayor sea el tamaño de la unidad de medida, su medida (el número) será menor; y cuanto menor sea la unidad de medida, la medida será mayor. Chamorro (1988, p. 64) señala que “elegir la unidad con la que se va a medir es todo un arte que sólo se aprende practicando”.

La interiorización del concepto de unidad y la capacidad de uso de la unidad como elemento de comparación es considerada por Callís (2002) como una tercera fase en el proceso de adquisición de la medida.



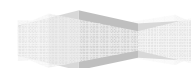
CMe6. Emplear referentes como instrumento de medida

Usar un referente no es otra cosa que la utilización del *término medio* (intermediario) mencionado anteriormente en el proceso de adquisición de la medida. Para ello es necesario el conocimiento de la medida de dicho término medio respecto de una unidad de medida determinada.

En el caso de la longitud Frías et al. (2001, p.498) consideran que “se trata de conocer la medida de algunas longitudes de partes del cuerpo o de objetos muy frecuentes en el medio humano, para poder tomarlos de referencia a la hora de estimar. Así, una persona puede conocer el tamaño de su palmo, el de su pie, el de su paso, la altura usual de una puerta, la altura de una mesa, la del techo de una vivienda.”

Los referentes no tienen por qué ser medidas conocidas: “El referente inicial que usemos no tiene que ser un referente estándar o que sea usado por todo el mundo. Por ejemplo, las partes del cuerpo son referentes fácilmente disponibles para medir longitudes.” (Inskeep, 1976, p. 62).

Desde una perspectiva histórica los referentes han constituido un paso importante en el desarrollo de la medida. Kula (1980, p. 31) “desde el punto de vista intelectual, el momento decisivo en la transición de las imágenes concretas a las nociones abstractas, el paso de mi dedo, tu dedo al dedo en general. (sic)... Ya se trataba de la generalización de el pie y no de mi pie o tu pie. Ya su longitud era fija y atemporal y no mayor o menor según cada caso particular” (Kula 1980, p. 31). Inskeep (1976, p. 78) da una razón para introducir la enseñanza o el uso de unidades de medida no estandarizadas que es la fácil disponibilidad que podemos tener para usarlas. Las unidades no estandarizadas pueden ayudar al niño a desarrollar el proceso de la medida. También da ejemplos de unidades no estandarizadas para la enseñanza de la longitud: “Partes del cuerpo (pies, manos, longitud de los dedos, pulgar), zancadas (para largas distancias), y objetos fácilmente asequibles (lápices, hojas de papel, cuartillas, folios, cuerdas de una longitud dada, bastones, palillos de dientes, etc.)”. Y para la enseñanza de unidades no estandarizadas de superficie da los siguientes ejemplos: “Piezas pequeñas de papel o de, madera (cada pieza debe pertenecer a un conjunto de piezas congruentes), en varias formas (triángulos, rectángulos, cuadrados, hexágonos, etc.) pequeños baldosines de cerámica, o de madera, carpetas cuadradas, etc.”



CMe7. Conocer las unidades de medida estandarizadas: el Sistema Internacional

El empleo de medidas estándar es importante porque “las medidas estandarizadas tienen como mínimo dos funciones importantes. Primero, permiten a una persona comunicar una medida a otra de un modo abreviado y directo. Segundo, permiten medidas precisas y consistentes en diferentes áreas geográficas” (Inskeep, 1976, p. 63). El empleo de un sistema regular de mediciones que sea conocido internacionalmente llevó a los diferentes países a la proclamación de su uso mediante las leyes (Kula, 1980). En España, al igual que en la Comunidad Económica Europea, se estableció como sistema legal de Unidades de Medida las unidades básicas, suplementarias y derivadas del Sistema Internacional de Unidades (S.I.), adoptado por la Conferencia General de Pesas y Medidas. La ley que estableció en España dicho sistema legal fue la ley 3/1985, de 18 de marzo, y posteriormente matizada por el Real Decreto 1317/1989, de 27 de octubre y actualmente, por el Real Decreto 2032/2009, de 30 de diciembre, por el que se establecen las unidades legales de medida. Previamente, en 1889, había sido adoptado el Sistema Métrico Decimal.

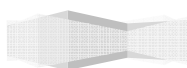
En el caso de la longitud las unidades más usuales son el metro, el centímetro, el milímetro y el kilómetro y para la superficie las respectivas unidades cuadradas.

CMe8. Conocer la equivalencia entre unidades de medida

Para cualquier sistema de unidades de medida es importante conocer la equivalencia entre las unidades de medida que lo forman. Aunque la mayor parte de las unidades de las magnitudes se acomodan al Sistema de Numeración Decimal ampliado con los números decimales, en el caso de la superficie, la relación entre las unidades genera una dificultad que es fuente de bastantes errores.

CMe9. Manejar el sistema de numeración decimal

Castro (2001, p. 316) expone que “el uso de la notación decimal empezó a generalizarse a partir de 1789 con el nacimiento y la implantación del Sistema Métrico Decimal en Francia, que se extendió a toda Europa a partir de 1849.” La base del S. M. D. es el sistema de numeración decimal ampliado con los decimales. Por tanto, el manejo del sistema decimal está muy ligado al manejo del Sistema Métrico Decimal. Manejar el sistema de numeración decimal supone conocer sus características o propiedades y saber operar con números decimales.



CMe10. Valorar la utilidad de la medida

En el ámbito escolar Inskeep (1976, p.63) destaca que el trabajo de la medida con los alumnos puede producir resultados afectivos por dos motivos: “(1) los niños deberían apreciar el papel que la medición juega en sus vidas y en la sociedad, y (2) los niños pueden disfrutar siendo capaces de medir por sí mismos”. Las actitudes de los alumnos hacia los conceptos y procedimientos matemáticos es una componente cuya importancia se pone de manifiesto en las normativas curriculares.

CMe11. Conocer la terminología asociada a la medida

Igual que ocurre para la magnitud, la medida también tiene una terminología asociada cuyo conocimiento es fundamental. En muchos casos y por ambigüedad del lenguaje se utilizan los mismos términos para referirnos tanto a una determinada cantidad de magnitud como para referirnos a su medida. Por ejemplo, cuando empleamos expresiones del tipo “la longitud es de 5 cm” estamos identificando con la palabra “longitud” a la medida de una determinada cantidad de magnitud. Hay magnitudes como la superficie, que tienen una terminología específica para referirse a la medida de las distintas cantidades de superficie, pues se suele emplear la palabra “área”. No obstante, también debemos evitar confundirla con la unidad de medida “área” que equivale al decámetro cuadrado.

La medida tiene una terminología muy variada, pues para nombrar las diferentes medidas de cantidades debemos conocer cómo se designan las diferentes unidades de medida de dicha magnitud o el nombre tanto de los instrumentos de medida como de las partes que lo forman.

1.3. Componentes Asociadas a la Estimación

Análogamente, la estimación tiene sus propias componentes que describimos a continuación:

CEst1. Tener interiorizada la medida de referentes

Interiorizar referentes consiste en “conocer la medida de cantidades que resultan muy próximas, como ocurre con la longitud de algunas partes destacadas de nuestro cuerpo (palmo, pie, dedo) o de objetos frecuentes en nuestro medio (altura usual de una puerta

o altura del techo de una casa, medida estándar de los tipos más usuales de baldosas)”. (Segovia, Castro, Castro y Rico, 1989, p. 156).

Bright (1976, p. 97) también destaca utilidad de conocer la medida de las partes del cuerpo desde una perspectiva de enseñanza: “las partes del cuerpo pueden servir como referentes que los estudiantes pueden usar para comparar con otros objetos”. Sin embargo, expone que aunque esta técnica (usar las partes del cuerpo) se puede usar fácilmente en las clases, tiene la desventaja de que los estudiantes crecen, y en consecuencia periódicamente deberían revisar la medida de estos referentes. Por tanto, Bright indica que el uso de una combinación de modelos de medidas del cuerpo y modelos externos proporciona un conjunto más aplicable de referentes. Además, aconseja que los referentes no sólo se tomen de objetos de la clase, sino también de objetos del hogar para que las técnicas de estimación puedan ser usadas fuera de la clase.

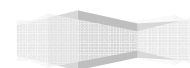
CEst2. Tener interiorizada la cantidad que le corresponde a las unidades de medida del S.I.

Segovia et al. (1989, p.153) entiende por interiorización “las referencias perceptivas que tiene cada sujeto respecto de las unidades principales de medida de las magnitudes básicas”. Callís (2002) denomina “unidad mental” a la interiorización que el individuo tiene de las unidades de medida del S.I.

CEst3. Seleccionar estrategias adecuadas

Tomando las estrategias de estimación de cantidades continuas en el sentido que establece Segovia et al. (1989) y en concordancia con nuestro estudio previo consideraremos que una estrategia es un conjunto de procesos, encaminados a la obtención de la estimación de una determinada cantidad. Así pues, como establecimos en el previo Trabajo de Investigación Tutelada (Castillo, 2006, p. 80) diremos que un proceso es cada una de las fases o partes diferenciadas de que consta la tarea de realizar una estimación. Los procesos recogidos y descritos en el T.I.T. son los siguientes:

- Iterando un referente presente.
- Iterando un referente ausente.
- Acotando.



- Comparando la cantidad a estimar con un referente aproximadamente igual, estando el referente presente.
- Comparando la cantidad a estimar con un referente aproximadamente igual, estando el referente ausente.
- Comparando la cantidad a estimar con un múltiplo de un referente, estando el referente presente.
- Comparando la cantidad a estimar con un múltiplo de un referente, estando el referente ausente.
- Comparando la cantidad a estimar con un divisor o fracción de un referente, estando el referente presente.
- Comparando la cantidad a estimar con un divisor o fracción de un referente, estando el referente ausente.
- Descomponiendo/Recomponiendo en partes iguales.
- Descomponiendo/Recomponiendo en una parte más su complementario.
- Descomponiendo/Recomponiendo en partes diferentes.
- Técnica indirecta: empleo de fórmulas.
- Reajuste.

Diremos que un alumno selecciona una estrategia adecuada a la tarea de estimación cuando el conjunto de procesos es válido para obtener una estimación aceptable de la cantidad propuesta. En caso contrario, diremos que es una estrategia inadecuada. Por ejemplo, utilizar una fórmula errónea para estimar una cantidad de superficie es una estrategia inadecuada.

CEst4. Usar adecuadamente las estrategias

La componente anterior nos instaba sobre la importancia de la selección de la estrategia en la tarea de estimar. Pero no sólo es importante hacer una buena elección, también es importante saber desarrollar los procesos que forman dicha tarea. Por ejemplo, si tratamos de estimar una superficie utilizando una fórmula, no sólo es importante conocer la fórmula, también es importante saber desarrollar los cálculos implicados en la misma.



CEst5. Tolerar el error

La tolerancia al error tiene que ver con no sentir incomodidad cuando el resultado de una medida tiene un margen de error. Para De Castro (2012) no es un rasgo independiente del conocimiento matemático sino que tienen connotaciones de carácter afectivo. Aunque De Castro hace referencia a la estimación en cálculo, los investigadores en estimación han identificado características comunes a la estimación en cálculo y la estimación en medida y una de ellas es la tolerancia del error (Shimizu e Ishida, 1994). Los estimadores pueden utilizar estrategias tales como el redondeo y el truncamiento y para aplicar estas estrategias a la estimación en medida es necesario tener cierta tolerancia al error y ser consciente del carácter aproximativo del resultado.

CEst6. Verificar la adecuación de la estimación

Esta componente supone, en consonancia con las ideas de Segovia et al. (1989, p. 124), que la interpretación del resultado de una estimación forma una parte esencial de la Estimación. Controlar el margen de error que se pueda cometer es fundamental no sólo en el resultado final, sino también en los datos iniciales y en las operaciones intermedias a fin de que la estimación tenga cierto grado de fiabilidad.

Bright (1976, p. 94) considera el que autocontrol de las estimaciones ayuda a los estudiantes a desarrollar técnicas de auto-corrección que le pueden ayudar en el mundo real. Además, “los ejercicios de estimación ayudan a los estudiantes a desarrollar una apreciación realista de los límites de la exactitud de las mediciones físicas”.

CEst7. Conocer y utilizar términos relacionados con la estimación en medida

Los alumnos comunican y transmiten significados por medio del lenguaje oral o escrito. Enviar y recibir información en un punto clave en la adquisición de significados. Una peculiaridad de la estimación es que introduce nuevo vocabulario en matemáticas. Segovia et al. (1989, p.114) recoge una lista de sinónimos a los términos “aproximación” y “estimación”. Además, indican que la estimación tiene un lenguaje propio caracterizado porque no es un lenguaje preciso puesto que una estimación es una valoración que admite cierto grado de indeterminación.

El uso del vocabulario puede, además, servir al profesor para evaluar el progreso del alumno. Bright (1976, p.97) dice que “para asegurarse de que las palabras [centímetros y metros] se están convirtiendo en significativo es útil alentar a los niños a estimar

distancias antes de que las midan. El grado de precisión de las estimaciones y el uso o mal uso del vocabulario ayudará al maestro a evaluar el progreso individual. El correcto uso de los nombres de las unidades de medida tiende a acompañar el desarrollo de imágenes mentales de esas unidades.”

2. EL ERROR EN LA ESTIMACIÓN EN MEDIDA

En este apartado realizamos, en primer lugar, un acercamiento teórico al error y recogemos diferentes consideraciones del mismo en investigaciones previas. En segundo lugar recogemos varias clasificaciones o tipologías de errores, con motivo de que uno de nuestros objetivos es caracterizar los diferentes tipos de error en la estimación en medida. Finalmente, abordamos diversas consideraciones que ha tenido el error en la estimación y adoptamos una postura estableciendo el margen de aceptabilidad que va a caracterizar nuestro estudio.

2.1. Diferentes Concepciones sobre el Error

En la resolución de tareas de estimación el error en el resultado tiene una doble perspectiva: el error propio y admisible de la estimación y el error inadmisibles provocado por el uso inadecuado de alguna de las componentes a las que nos hemos referido en el apartado anterior. Al realizar una estimación, entran en juego los procesos propios de la estimación que permiten generar una solución diferente del verdadero valor pero útil para tomar decisiones; cuando esto no es así, cuando la solución supera un rango de aceptabilidad significa que se ha producido un error en el procedimiento de resolución que puede afectar a cualquiera de las componentes implicadas en el proceso. Hay por tanto una perspectiva general del error, la referida a la estimación como una parte más de la matemática y de la ciencia y la referida al error propio y admisible de los procesos de estimación. A continuación nos referimos a esta primera perspectiva considerando las ideas más importantes reflejadas Rico (1995).

El error forma parte del conocimiento científico, y en el caso de la estimación constituye una parte esencial en el proceso enseñanza-aprendizaje. La consulta de diferentes autores que han tratado el error nos permiten distinguir diferentes enfoques. Sin ánimo de realizar una revisión exhaustiva mencionamos a continuación algunos de ellos.

Popper (1979) considera el error como una parte fundamental del conocimiento humano, y señala que no hay fuentes últimas del conocimiento, por tanto, debemos estar continuamente realizando el ejercicio de la crítica para aproximarnos a la verdad.

Bachelard (1988) planteó la noción de obstáculo epistemológico en los siguientes términos:

“Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos; en el acto mismo de conocer, íntimamente, es donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones; es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí, donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos”

Bachelard considera que todo conocimiento se produce en contra de un conocimiento anterior, echando abajo conocimientos mal adquiridos o superando los mismos, produciendo otros conocimientos y vinculándose con ellos. Se trata, pues, de un planteamiento constructivista. Esta noción de obstáculo epistemológico fue retomada posteriormente por Brousseau para la Didáctica de la Matemática.

Otro planteamiento es el realizado por Lakatos en su obra “Pruebas y refutaciones”, donde propone la introducción de conocimiento a partir de conjeturas (no siempre verdaderas) que aproximen una respuesta a un problema o cuestión abierta. A partir de ahí, mediante la lógica del descubrimiento, utilizando contraejemplos y la elaboración de conceptos se llega a la construcción de conocimiento matemático.

Rico (1995) en su artículo “Errores en el aprendizaje de las Matemáticas” llega a las siguientes conclusiones:

“En primer lugar, señalar que los errores pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje; en segundo término, indicar que los errores no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente; en tercer lugar, argumentar la necesidad de que cualquier teoría de instrucción modifique la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes de los mismos, reemplazándola por la previsión de errores y su consideración en el proceso de aprendizaje; y, finalmente, señalar que todo proceso de instrucción es potencialmente generador

de errores, debidos a diferentes causas, algunos de los cuales se presentan inevitablemente” (p. 82).

En el mismo artículo mencionado anteriormente, Rico (1995) señala varias características generales del error:

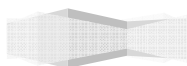
- son sorprendentes para el profesor al haberse mantenido ocultos durante algún tiempo,
- son a menudo extremadamente persistentes,
- son resistentes a cambiar por sí mismos ya que la corrección de errores puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumno,
- pueden ser sistemáticos, siendo éstos los más frecuentes y más efectivos para revelar los procesos mentales subyacentes,
- o pueden ser debidos al azar, los cuales reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales, y tienen relativamente poca importancia.
- no consideran el significado de los símbolos y conceptos, de este modo, respuestas que son obviamente incorrectas, no se ponen en cuestión.

Brousseau, Davis y Werner (1986) señalan cuatro razones por las que puede presentarse el error:

1. Como resultado de grandes concepciones inadecuadas sobre elementos fundamentales de las matemáticas.
2. Como consecuencia de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el profesor.
3. Al utilizar procedimientos imperfectos o posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el profesor.
4. Al aplicarse un método propio, inventado por los alumnos.

2.2. Clasificaciones de los Errores

Existen numerosos intentos de clasificar los errores. Engler et. al. (2004) realizaron una revisión de categorizaciones y clasificaciones de los errores. Recogemos en este documento algunas de ellas.



Radatz (1980), realizó una clasificación de los errores estableciendo cinco categorías generales:

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.
5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Otro intento de establecer clasificaciones de errores fue llevado a cabo por Movshovitz-Hadar, Zaslavksy e Inbar (1987), los cuales establecieron seis categorías de errores:

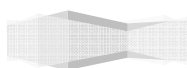
1. Datos mal utilizados.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje.
3. Inferencias no válidas lógicamente.
4. Teoremas o definiciones deformados.
5. Falta de verificación en la solución.
6. Errores técnicos.

Esteley-Villarreal (1996) realizaron una categorización de los errores distinguiendo las siguientes categorías:

1. Errores al operar con números reales en cálculos, planteo y resolución de ecuaciones.
2. No empleo o uso parcial de la información.
3. No verificación de los resultados parciales o totales.
4. Empleo incorrecto de propiedades y definiciones (de números o funciones).
5. No verificación de condiciones de aplicabilidad de teoremas, definiciones, etc.
6. Deducción incorrecta de información o inventar datos a partir de la dada.
7. Errores de lógica: justificaciones inadecuadas de proposiciones y uso inadecuado del lenguaje.
8. Errores al transcribir un ejercicio a la hoja de trabajo.

Astolfi (1999) describe la siguiente tipología de los errores:

1. Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones.



2. Errores resultado de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas.
3. Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos.
4. Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas.
5. Errores en los procesos adoptados.
6. Errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad.
7. Errores que tienen su origen en otra disciplina.
8. Errores causados por la complejidad propia del contenido.

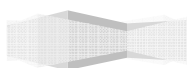
Como podemos comprobar existen considerables intentos para clasificar los errores, pues para los docentes es interesante tener una previsión de los errores para anticiparse en la planificación.

2.3. El Error en la Estimación

Las características del error son muy variadas, sobre todo en cuanto al grado de incorrección: podemos estar hablando de resultados falsos, resultados parciales o aproximados, resultados correctos obtenidos mediante procedimientos deficientes o inaceptables, resultados que pueden ser correctos en un determinado contexto y no en otro, etc.

Al considerar la tarea de realizar estimaciones vamos a distinguir dos tipos de error: *errores intrínsecos al proceso de estimación*, y *errores extrínsecos al proceso de estimación*. Los primeros son debidos a las características propias de todo proceso estimativo. Estos errores tienen un margen o rango de aceptación que, en general, variará en función de las características de la tarea y, sobre todo, de la finalidad de dicha estimación. Los errores extrínsecos al proceso de estimación son los derivados de factores tales como descuidos, dificultades idiomáticas, problemas en la lectura o en la interpretación de la pregunta, falta de conocimiento numérico y conceptos mal adquiridos o procedimientos utilizados erróneamente.

Los errores debidos a descuidos deben pueden ser confundidos con errores sistemáticos. Para evitar esta situación Inskip (1978) propone la búsqueda de “patrones de error”. A los errores debidos a conceptos mal adquiridos o procedimientos utilizados erróneamente se les conoce con el término de “misconceptions” (concepciones erróneas). Spooner (2002, p.3) lo define así:



“Una ‘concepción errónea’ es el producto de una falta de comprensión o en muchos casos la aplicación inadecuada de una ‘regla’ o una generalización matemática. Cuando observamos una muestra de trabajo terminado la mejor pista para decidir si estamos ante un error proveniente de una ‘concepción errónea’ o de otra causa es la frecuencia y consistencia del error.”

Los errores extrínsecos a procesos estimativos, no siempre son cuantificables en términos de porcentaje de error, pero si es posible clasificarlos cualitativamente buscando patrones de error o tipos de error, como sugiere Inskip (1978). Uno de los primeros intentos por tipificar estos errores fue promovido por Hildreth (1983), quien recopiló una serie de estrategias inapropiadas para la estimación de longitudes y/o superficie¹⁶.

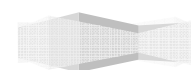
El estudio del error, tanto desde el punto de vista cuantitativo como cualitativo tiene “una gran importancia para el diseño de intervenciones en la estimación en medida, cuyo propósito es mejorar las habilidades de cálculo o servir como vehículo para promover la comprensión de la medición física” (Joram et al. 1998, p. 434).

La tarea de estimar la medida de una cantidad continua supone que se debe dar como resultado un valor numérico acompañado de una unidad de medida. En el presente estudio vamos a considerar que los resultados o respuestas a las tareas de estimación pueden ser “considerados” o “no considerados”. La “no consideración” de una respuesta supone que no se ha indicado el valor numérico o que no se ha indicado la unidad de medida o que se ha utilizado una unidad inadecuada con respecto a la magnitud a estimar. Cualquiera de estos casos será debido a que el alumno ha incurrido en un error extrínseco al proceso estimativo. Los resultados “considerados” pueden ser clasificados como resultados válidos o aceptables, o por el contrario, pueden ser resultados inaceptables. Este último caso puede ser debido tanto a errores intrínsecos a los procesos estimativos como extrínsecos a los mismos.

Cuando se realiza una estimación, estamos emitiendo una opinión, un juicio, una valoración¹⁷. Por tanto, el valor que obtenemos difícilmente va a coincidir con el exacto.

¹⁶ Véase apartado 4.2.2 del capítulo 2.

¹⁷ Recordemos que estamos siguiendo la definición dada por Segovia et al. (1998): “juicio de valor del resultado (de una operación numérica o) de la medida de una cantidad en función de circunstancias individuales del que lo emite”, p. 18.



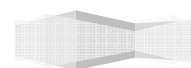
Va a ser un valor aproximado, al que se dará mayor o menor validez en función de las necesidades de dicha estimación. En las diferentes investigaciones llevadas a cabo en el campo de la estimación, los investigadores no se ponen de acuerdo a la hora de establecer un criterio para determinar cuándo una estimación es aceptable, válida, correcta, coherente o razonable. La Tabla 4. 1 recoge algunos de los criterios utilizados.

Tabla 4. 1. Diferentes Criterios Adoptados Respecto del Error en Estimación

Investigador	Población objeto de estudio	Criterio
Paul (1971)	Estudiantes de 16 años de edad preuniversitarios	Sistema que consideraba incorrecta respuestas con errores superiores al 15%
Attivo (1979)	Futuros profesores	$\pm 15\%$ de la respuesta exacta
Hildreth (1980)	Alumnos de 10, 12 y 18 años	Error absoluto $\leq 1/3$ del valor real
Levine (1982)	Estudiantes Universitarios	Realiza el TEA (Test of Estimation Ability) puntuando las respuestas: Tres puestos si el error es inferior al 10%. Dos puntos si el error está comprendido entre el 10% y el 20%. Un punto si el error está comprendido entre el 20% y el 30%. Cero puntos si el error es superior al 30%.
Reys et al (1982)	Alumnos con altas capacidades y graduados universitarios	El 10% superior de los sujetos
Siegel et al (1982)	Alumnos de primaria, secundaria y universitarios	Razonable: ± 1 orden de magnitud Correcto: $\pm 50\%$ del exacto
Clayton (1992)	Alumnos de primaria	Criterio de Razonabilidad (Criterion of Reasonableness, COR): $\pm 20\%$ del valor real (para cantidades inferiores a 100)

Algunos investigadores, como Clayton, no establecieron un criterio fijo para determinar cuándo era una estimación válida o razonable, sino que definieron un criterio para cantidades inferiores a 100 y otro para grandes cantidades (superiores a 100). Otros investigadores, como Levine, establecieron una escala graduada para valorar la validez de la estimación. Por lo general, la mayoría define el límite o criterio para determinar cuándo una estimación es aceptable o razonable en función de la proximidad de dicha estimación al valor considerado exacto.

En nuestro estudio consideraremos que una medida o estimación es válida o aceptable si el error relativo cometido es en valor absoluto menor o igual al 30%, límite utilizado por Levine (1982), Segovia (1997) o De Castro (2012).



CAPÍTULO 5: METODOLOGÍA

La investigación realizada es un estudio exploratorio y descriptivo. Pretende indagar en un proceso de enseñanza/aprendizaje y tratar de analizar qué ocurre y cómo ocurre. Para ello se utiliza la metodología de los experimentos de enseñanza propios de la metodología de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), que supone el diseño e implementación de una propuesta de enseñanza y el análisis paralelo del proceso de aprendizaje que se produce y de los elementos de la propuesta que lo sustentan. En nuestro caso centramos la atención en la capacidad estimativa de los estudiantes y en su desarrollo, guiándonos de las componentes de la estimación en medida descritas en el capítulo 4. Es, por tanto, una investigación sobre la adquisición de los conceptos y procedimientos relativos a la estimación en medida que a partir de unas prácticas educativas provocadas por el uso de un conjunto de tareas curriculares cuidadosamente secuenciadas, y bajo la guía del docente, pretende indagar en cómo los alumnos construyen los significados o conocimientos relativos a este campo conceptual y cómo superan los errores y dificultades que les surgen.

La muestra de alumnos considerada en el estudio es una muestra a intencional: un grupo de alumnos de 3º de E.S.O. del I.E.S. “Algazul”. Los motivos por los cuales se seleccionó este grupo fueron varios: 3º de E.S.O. es un curso en el que se supone que los alumnos ya han recibido toda la formación necesaria para enfrentarse a tareas de estimación de cantidades continuas; los alumnos que formaban el grupo seleccionado no tenían desfase curricular; y además, la elección de este grupo permite avanzar en los resultados obtenidos en el previo Trabajo de Investigación Tutelada.

Inicialmente se elaboró un diseño de la intervención en el aula que, tras la implementación de cada sesión de trabajo en el aula, fue sometido un análisis y rediseño atendiendo a las evidencias obtenidas y a los fundamentos teóricos sobre la enseñanza y aprendizaje de los contenidos implicados. En el desarrollo del experimento se conjugan dos propósitos: averiguar si la teoría que se va desarrollando sobre el proceso de aprendizaje es viable a la vista de los datos que se van obteniendo, y rediseñar la intervención según se considere pertinente ante observaciones inesperadas. Dada la complejidad de las situaciones de aprendizaje fue necesario recoger información utilizando diversos registros: fichas de trabajo, grabación en video de las sesiones,

entrevistas individuales, y anotaciones del investigador-docente, cuya revisión nos permitía rediseñar la siguiente sesión de trabajo en función de lo acaecido en las anteriores sesiones. Las fichas de trabajo de los estudiantes son una de las fuentes clave de información en este estudio.

1. INVESTIGACIÓN DE DISEÑO

La investigación de diseño o investigación basada en un diseño es un modelo metodológico de reconocida utilidad en la investigación educativa que persigue “comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico” (Molina et al., 2011, p. 75). .

En concreto en este estudio, para alcanzar los objetivos propuestos, realizamos un experimento de enseñanza enmarcado dentro del paradigma metodológico denominado Investigación de Diseño. Este tipo de estudios consiste en una secuencia de intervenciones de enseñanza en las que los participantes son un investigador-docente, alumnos e investigadores-observadores. En palabras de Molina et al. (2011) el objetivo de este tipo de estudios es “analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación” (p.76). Este modelo es adecuado para dar respuesta a los objetivos planteados en nuestra investigación, pues pretendemos indagar en un proceso de enseñanza/aprendizaje, sobre el que se conoce poco, y tratar de analizar qué ocurre y cómo ocurre.

Este experimento tiene algunas características que Cobb et al. (2003) asignan a las investigaciones de diseño: complejo, multivariable, multinivel, intervencionista, iterativo, orientado por la teoría hacia la práctica y generador de modelos teóricos. Los resultados de este estudio supondrán una primera aproximación a un modelo teórico específico al desarrollo de la capacidad estimativa en el contexto de cantidades de longitud y superficie.

Como en cualquier investigación de diseño, nuestro estudio trata de caracterizar una situación de aprendizaje en toda su complejidad, la mayor parte de la cual no es conocida. Esto nos lleva a considerar múltiples variables, muchas de las cuales no son



controladas, siendo necesario precisar cuáles son objeto de estudio y cuáles se asumen como condiciones del entorno.

El estudio que aquí presentamos centra su atención en analizar cómo evoluciona el aprendizaje de estos conceptos por parte de los alumnos. Aunque la interacción profesor-alumno haya contribuido a ello, no es nuestro objeto de estudio. Al tiempo que analizamos los procesos de aprendizaje, analizamos los modos mediante los cuales la teoría educativa sustenta y organiza la práctica. Nuestro modelo de investigación de diseño comprende un grupo de investigadores trabajando con un pequeño grupo de alumnos, siendo uno de los investigadores el docente.

1. EL CENTRO

La recogida de datos se realizó durante el curso 2007/08 en el IES “Algazul” de Roquetas de Mar. En líneas generales, el alumnado de este centro puede definirse por una serie de características que aparecen recogidas en el Plan Anual de Centro para el curso 2007/08:

- Alumnado de diferentes nacionalidades con alto porcentaje de inmigrantes
- Escasas expectativas e interés: Muchos no muestran interés por el estudio ya que no lo ven útil para incorporarse a la vida laboral.
- Trayectoria de fracaso escolar previo: Son alumnos que llegan a E.S.O. con una larga trayectoria de fracaso escolar, dificultades de aprendizaje generalizadas... que les hace ver lo académico como una pérdida de tiempo.
- Escasa valoración de lo académico por las familias: Algunos alumnos provienen de familias desestructuradas en las que se desprecian los valores de tolerancia, superación y respeto por los demás. Gran parte de las familias del alumnado, por su situación económica o laboral, no consideran la preparación de sus hijos como una prioridad, ya que tienen que afrontar otras dificultades.
- Historia académica irregular: Un considerable número de alumnos presenta grandes dificultades debido a ausencia de escolarización previa o escolarización irregular en sus países de origen, lo que dificulta enormemente su avance y promoción educativa. Por otro lado, muchos de estos alumnos antes de llegar a nuestro centro han vivido en varios domicilios debido a que sus familias residen



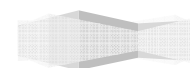
donde encuentran trabajo y no cuentan con estabilidad laboral. Estos cambios de domicilio implican cambios en la escolarización de los hijos, lo que da como resultado un enlentecimiento de su proceso educativo.

- Bajas expectativas en relación a los estudios, abandono e incorporación temprana al mundo del trabajo.
- Desmotivación y desinterés de los alumnos por la escasa conexión existente entre los estudios de secundaria y su realidad diaria.
- En la zona no hay suficiente infraestructura para atender las necesidades de ocio de los alumnos.
- Gran parte del alumnado ha repetido un curso o más a lo largo de la etapa y no obstante, siguen sin superar sus dificultades, demostrándose esto en el número de asignatura evaluadas negativamente.

En la Tabla 5. 1 se muestra la distribución por cursos del alumnado de este centro durante el curso 2007/08. El gráfico de la Figura 5. 1 muestra la proporción de alumnado inmigrante frente a alumnado español, el cual constituye un colectivo numeroso en el alumnado de este centro.

Tabla 5. 1. Distribución del Alumnado del IES “Algazul” durante el Curso 2007/08.

Cursos	Nº grupos	Nº alumnado (% del total)	Nº alumnado Inmigrante (% del grupo)
1º ESO	7	201 (28,7%)	99 (49%)
2º ESO	5	150 (30%)	56 (37%)
3º ESO	4	123 (30,8%)	50 (41%)
4º ESO	3	85 (28,3%)	38 (45%)
DIV. CURR. 3º	1	13	6 (46%)
DIV. CURR. 4º	1	13	4 (31%)



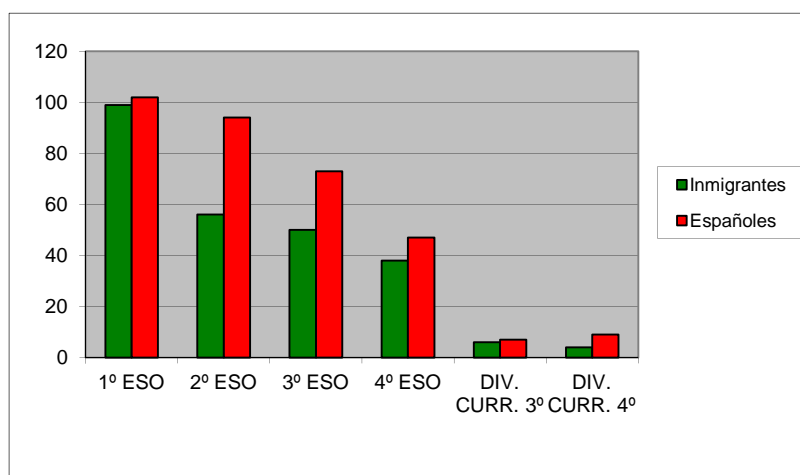


Figura 5. 1. Distribución del Alumnado del IES “Algazul” durante el Curso 2007/08.

Una de las características principales del alumnado del IES “Algazul” es la variedad de nacionalidades de las que proceden sus alumnos. En concreto, en el curso 2007/08 hubo alumnos de 23 nacionalidades distintas.

Además de esta diversidad de nacionalidades, contamos también con un sector de alumnado perteneciente a una etnia minoritaria, concretamente, la gitana. Actualmente, son unos 60 alumnos, que representan el 11% de la población escolar del IES “Algazul”.

Otro gran grupo de alumnos tiene Necesidades Educativas Especiales (NEE) debido a que presentan un desfase curricular de un ciclo o más. Se trata de alumnos que no tienen en su mayoría desarrolladas las destrezas de las áreas instrumentales, tan necesarias para posteriores aprendizajes y necesitan apoyo en pequeños grupos para potenciar el aprendizaje e intentar de esta forma elevar su nivel curricular.

De esta forma, encontramos en un mismo grupo-clase, alumnado que sigue el currículum básico, alumnado que tiene algunas lagunas curriculares que abarca el último ciclo o curso (debido sobre todo a fracaso escolar anterior) y alumnado que presenta un desfase curricular de dos ciclos o más, entre los que encontramos alumnos que ni siquiera saben leer o escribir en su idioma o no han estado escolarizados en toda su vida. Este sector no aglutina sólo alumnado de origen extranjero. También cuenta con un grupo de alumnos y alumnas pertenecientes a la etnia gitana, cuyo desfase curricular también es apreciable, en la mayoría de los casos por una trayectoria escolar bastante pobre e irregular y con unos intereses por lo académico del entorno familiar muy escaso.

Así pues, para mostrar de forma gráfica la diversidad curricular del alumnado, las Tabla 5. 2 y Tabla 5. 3 muestran los datos obtenidos de las evaluaciones iniciales en las materias de Lengua Castellana y Matemáticas.

Tabla 5. 2. Distribución del Alumnado en la Materia de Lengua Castellana.

Tipo de alumnado	Curso		
	1º	2º	3º
Desconocedores del idioma ^a	12	2	3
Siguen currículum ordinario	109	84	74
Con desfase	92	66	42
de 1 ciclo	43	39	14
de 2 ciclos o más	49	27	28
Total	201	150	123

^a Son alumnos que reciben apoyo en Aulas Temporales de Atención Lingüística (ATAL)

Tabla 5. 3. Distribución del Alumnado en la Materia de Matemáticas.

Tipo de alumnado	Curso		
	1º	2º	3º
Siguen currículum ordinario	129	87	63
Con desfase	72	63	60
de 1 ciclo	53	35	33
de 2 ciclos o más	19	28	27
Total	201	150	123

1.1. Los Grupos Flexibles

Una de las características principales del Programa de Compensatoria¹⁸ que sigue el Centro es que en algunas de las materias instrumentales (lengua, matemáticas e inglés) se agrupan a los alumnos en Grupos Flexibles. Esta es una de las medidas de atención a la diversidad que pueden contemplarse en la educación básica según se indica en el capítulo V, artículo 19, del Decreto 231/2007:

¹⁸ Los Programas de Compensatoria son medidas de atención educativa a los alumnos con necesidades educativas especiales asociadas a condiciones sociales desfavorecidas (Decreto 167/2003, BOJA nº 118).

“1. Los centros dispondrán de autonomía para organizar las medidas de atención a la diversidad, entre las que podrán considerar la organización de la oferta de materias optativas, el diseño de horarios flexibles adaptados a las necesidades del alumnado, la realización de agrupamientos flexibles y no discriminatorios, los desdoblamientos de grupos, la integración de materias en ámbitos y el apoyo en grupos ordinarios...”

Boja 156, p. 16.

La atención a la diversidad usando grupos flexibles sirve para dar respuesta educativa a cada uno de los alumnos en función de sus posibilidades e intentar compensar el desfase curricular. Los grupos flexibles son una forma de organizar al alumnado de cada curso en varios subgrupos en base al nivel de competencia curricular del alumno (ritmo de aprendizaje y nivel de conocimientos previos). El carácter flexible de estas agrupaciones y su organización en la misma banda horaria, permite que los alumnos se vayan integrando paulatinamente en el grupo que sigue el currículo normal, una vez que hayan cubierto las carencias y lagunas de aprendizaje detectadas.

Esta organización permite atender en la misma banda horaria al alumnado de necesidades educativas de carácter permanente (de tipo físico, psíquico o sensorial), a cargo del especialista en pedagogía terapéutica.

La información para formar las agrupaciones flexibles a principios de curso se obtienen de:

- Informes de profesores de anteriores cursos.
- Pruebas iniciales.
- Rendimiento del alumno en cursos anteriores.
- Motivación del alumno.
- Historial escolar y social.
- Diagnóstico del Departamento de Orientación.

A partir del análisis de esta información se determina el nivel de competencia curricular del alumno. Si este nivel de competencia coincide con el de su curso irá a un grupo en el que se siga el currículum normal, con la programación correspondiente al curso que le corresponde. Si por el contrario su nivel de competencia en Matemáticas es inferior al de su curso, se le asigna un grupo en el que se esté trabajando con ese nivel mediante una adaptación. Así pues las adaptaciones son grupales. Por ejemplo, un alumno de 3º



de ESO que no tenga adquiridos los contenidos de 1º de la ESO, se le asignará un grupo en el que se estén trabajando esos contenidos de forma adaptada.

La razón de estas adaptaciones es ofrecer un currículo equilibrado y relevante a los alumnos que presentan limitaciones de naturaleza física, psíquica o sensorial, a los que poseen un historial escolar y social que ha producido “lagunas” que impiden la adquisición de nuevos contenidos y, a su vez, desmotivación, desinterés y rechazo, a alumnos que se incorporan tarde al curso escolar y no les sería posible adaptarse al currículo normal así como al alumnado inmigrante que por algún motivo no pueda seguir el currículo normal correspondiente a su curso.

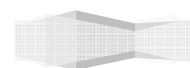
La ventaja principal de este tipo de agrupaciones es que, puesto que los grupos son flexibles, en cualquier momento se puede cambiar un alumno de grupo y, por tanto, de nivel. Esto permite que un alumno pueda recuperar el desfase curricular que tenga.

1.2. Los Sujetos

El grupo de estudiantes que participaron como sujetos de este estudio cursaba en 2007/08, Tercero de ESO.. El curso tercero estaba formado por un “Grupo Control”¹⁹ (3º A), que no formaba parte de los Grupos Flexibles y, por tanto, sus alumnos no podían cambiar de clase y el resto de los alumnos agrupados en los grupos flexibles 3º B, 3º C y 3º D. El grupo 3º B era el que seguía el currículo normal de 3º de ESO y fue el que se utilizó para el presente estudio. El grupo 3º C seguía una adaptación de 2º de ESO, mientras que el grupo 3º D tenía una adaptación de 1º de ESO y niveles inferiores (3º Ciclo de Primaria, 2º Ciclo de Primaria, etc.). Así pues, el grupo estudiado (3º B) era el que tenía un nivel académico más alto de entre los alumnos que formaban los grupos flexibles. Por tanto, los intercambios de alumnos sólo se podían realizar en dos direcciones: alumnos que se bajan de nivel, y por tanto, pasarían de 3º B a 3º C, y alumnos que se suben de nivel, los cuales pasan de 3º C a 3º B.

En total el grupo estaba constituido por 33 alumnos: 12 alumnos y 21 alumnas (véase Figura 5. 2); los cuales designamos con siglas desde A1 hasta A33 asignadas aleatoriamente.

¹⁹ El “Grupo Control” se creó para comprobar la efectividad del Plan de Compensatoria. Este grupo se formó cuando los alumnos estaban en 1º de ESO y se mantuvo hasta 3º de ESO.



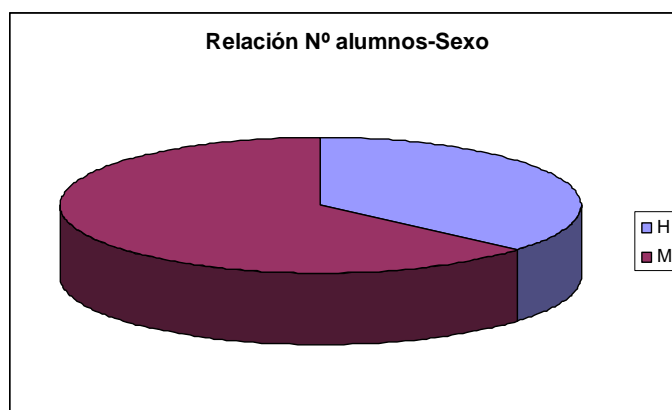


Figura 5. 2. Distribución de la Muestra por Sexo.

Otra de las características del grupo, al igual que ocurre en la globalidad del centro, es la gran variedad de nacionalidades que conviven en el aula. En concreto, el grupo estaba formado por alumnos de 8 nacionalidades distintas, de las cuales destacan dos por ser más numerosas: la española y la rumana; constituyendo entre ambas el 82% del alumnado del grupo (véase Figura 5. 3).

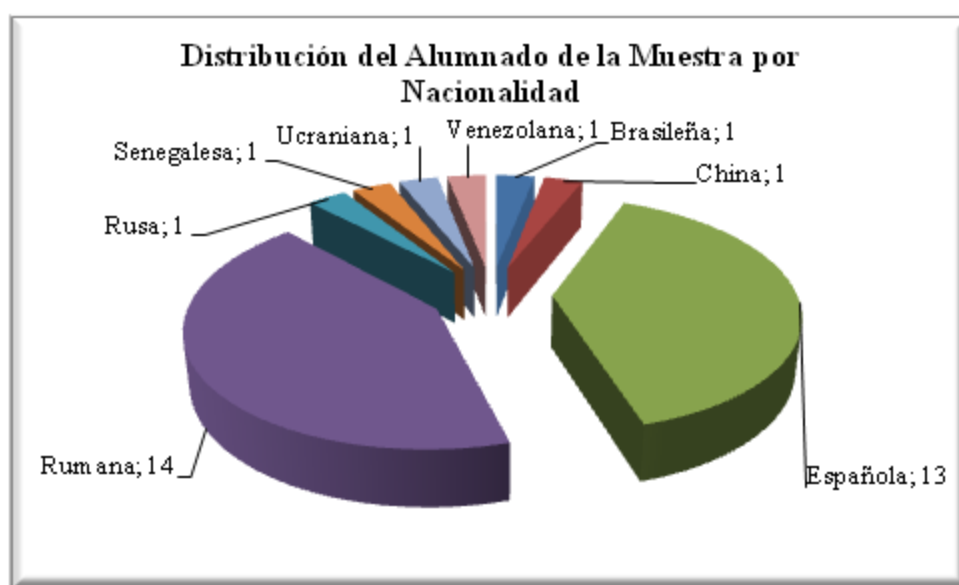
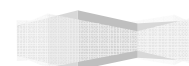


Figura 5. 3. Distribución del Alumnado de la Muestra por Nacionalidad.

En el Apéndice A recogemos otras características del grupo estudiado, tales como, el sexo del alumnado, año de nacimiento, si el alumno es repetidor del curso en cuestión, la nacionalidad, si el alumno habla otros idiomas además del español, y el número de años de estancia en España.



1.3. Participación de los Sujetos

El grupo de 33 alumnos no fue estable a lo largo del curso académico 2007/08 ni durante el periodo en que transcurre la recogida de datos, debido a que algunos alumnos se dieron de baja, fueron cambiados a otro grupo o centro, o se incorporaron procedentes de otros grupos (véase en la Tabla 5. 4 la participación del alumnado). En concreto, se dieron las siguientes circunstancias:

- Hubo dos alumnos absentistas que no participaron en ninguna de las sesiones. Éstos fueron los alumnos A20 y A29. Cuando cumplieron los 16 años de edad se dieron de baja.
- El alumno A12 se dio de baja en el mes de enero por traslado a otro centro, por tanto, participó en la sesión inicial cumplimentado la Ficha de Evaluación Inicial, pero no participó en el resto del estudio.
- Los alumnos A3 y A4 fueron cambiados de grupo (de 3º B a 3º C) debido a que su nivel de competencia curricular no les permitía seguir el ritmo normal de las clases. Así pues, estos alumnos sólo participaron en la sesión inicial y realizaron sólo la Ficha de Evaluación Inicial.
- Los alumnos A31, A32 y A33 se incorporaron en el mes de enero por cambio de grupo (luego no participaron en la sesión inicial y por tanto no realizaron la Ficha de Evaluación Inicial) debido a que su nivel de competencia curricular les permitía seguir el currículo correspondiente a 3º de ESO. Sin embargo, el alumno A32 tuvo que ser cambiado nuevamente de clase a finales de Abril. Por tanto, a partir de ese momento dejaron de participar en las sesiones.
- El alumno A30 se dio de baja en el mes de Marzo. Luego, sólo participó en las sesiones realizadas hasta ese momento.

El resto de ausencias fueron debidas a enfermedad u otras circunstancias de carácter similar. En el Apéndice B recogemos información detallada acerca de la participación de cada alumno en la cumplimentación de las fichas utilizadas en el estudio. El rango de participación es amplio: oscila entre dos alumnos que no participaron en ninguna de las sesiones hasta trece alumnos que participaron en todas las sesiones. El porcentaje de participación de cada alumno, considerando la cumplimentación de las fichas se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**



Tabla 5. 4. Porcentaje de Participación del Alumnado.

Alumno	Porcentaje de Fichas rellenas	Alumno	Porcentaje de Fichas rellenas
A1	91,7 %	A18	91,7 %
A2	91,7 %	A19	100 %
A3	8,3 %	A20	0 %
A4	8,3 %	A21	100 %
A5	100 %	A22	83,3 %
A6	83,3 %	A23	100 %
A7	91,7 %	A24	100 %
A8	100 %	A25	100 %
A9	83,3 %	A26	100 %
A10	91,7 %	A27	100 %
A11	83,3 %	A28	100 %
A12	8,3 %	A29	0 %
A13	100 %	A30	75 %
A14	66,7 %	A31	91,7 %
A15	100 %	A32	58,3 %
A16	91,7 %	A33	75 %
A17	100 %		

3. VARIABLES DE TAREA

En el capítulo 4 dividimos las componentes de la estimación en medida en tres grupos: componentes asociadas a la magnitud, componentes asociadas a la medida y componentes asociadas a la estimación. En concordancia con esta división consideramos tres clases de tareas:

- *Tareas de Magnitud:* Aquellas que tienen por objetivo la adquisición de componentes asociadas a la magnitud.
- *Tareas de Medida:* Las que tienen por objetivo la adquisición de componentes asociadas a la medida.
- *Tareas de Estimación:* Las que tienen por objetivo la adquisición de componentes asociadas a la estimación.



Estas tres clases de tareas no son disjuntas, pues una misma tarea puede contribuir a la adquisición de componentes de más de un tipo. No obstante, nosotros las clasificaremos en función del objetivo principal para el cual se diseñaron.

Cada tarea de estimación viene caracterizada por una combinación de cinco variables de tarea que a continuación se describe: tipo de tarea, grado de accesibilidad, forma, tamaño, posición espacial, y valor numérico.

Variable Tipo de Tarea:

Atendiendo a las situaciones de estimación en medida (véase **apartado 2.3.1. del Capítulo 1**), las tareas son de dos tipos siguiendo la clasificación establecida por Bright (1976, p. 90):

- tipo A, cuando se dispone del Objeto y hay que estimar la medida respecto de una Unidad;
- tipo B, cuando se dispone de una medida y hay que proponer Objetos que tengan esa medida.

Ambas tareas difieren en las acciones que demandan al alumnado: en las tareas del tipo A se espera que den un valor numérico acompañado de una unidad de medida y, en algunos casos, también se les pide que expliquen el razonamiento seguido para obtener dicho resultado. En cambio, en las tareas del tipo B los alumnos han de indicar objetos o elementos con unas medidas determinadas.

Variable Grado de Accesibilidad:

Por grado de accesibilidad entendemos el modo en que el alumno puede percibir la cantidad a estimar, por tanto, es una variable que solo podemos controlar para las tareas tipo A. Los diferentes valores de esta variable o grados de accesibilidad que vamos a considerar son los siguientes (véase Figura 5. 4): en primer lugar diferenciamos cantidades perceptibles visualmente de aquellas que no lo son; en segundo lugar, para las cantidades perceptibles visualmente distinguimos entre manipulables (cuando el alumno tenga la posibilidad de acceder a manipular la cantidad) y no manipulables (cuando no se le permita acceder a manipular la cantidad).



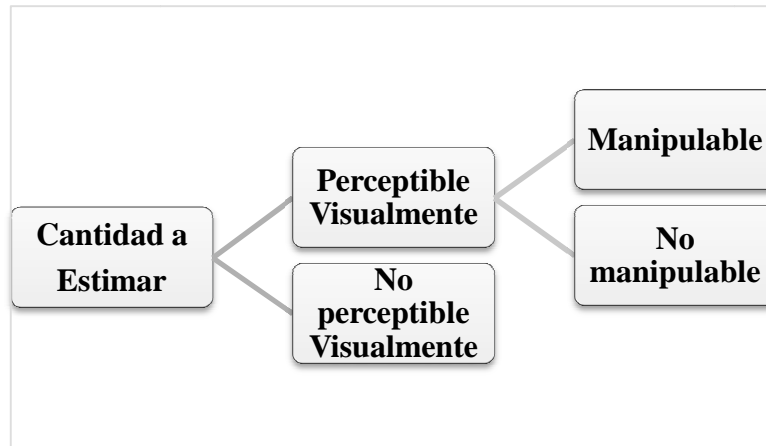


Figura 5. 4. Esquema del Grado de Accesibilidad de la Cantidad a Estimar.

Variable Forma:

Según la forma nos podemos encontrar con cantidades a estimar con una forma regular o irregular. Para el caso de la magnitud longitud, son ejemplos de cantidades regulares los segmentos rectilíneos, la circunferencia, la elipse, etc., y como cantidades irregulares podemos encontrar líneas poligonales o líneas curvas que no estén regidas por ningún patrón. Para el caso de la magnitud superficie, son ejemplos de cantidades regulares las figuras geométricas planas (cuadrado, rectángulo, círculo, rombo, etc.); y como cantidades irregulares de la magnitud superficie serían aquellas que no estén regidas por ningún patrón geométrico.

Variable Tamaño:

Consideramos cinco tamaños diferentes de cantidades tanto en el caso de la magnitud longitud como de la magnitud superficie. Dichos tamaños se detallan en la Tabla 5. 5.

Tabla 5. 5. Intervalos de Tamaño.

Tamaño	Longitud	Superficie
Muy Pequeño	[0 cm, 1 cm)	[0 cm ² , 1 cm ²)
Pequeño	[1 cm, 1 dm)	[1 cm ² , 1 dm ²)
Mediano	[1 dm, 1 m)	[1 dm ² , 1 m ²)
Grande	[1 m, 1 dam)	[1 m ² , 1 dam ²)
Muy Grande	[1 dam, →)	[1 dam ² , →)



Variable Posición Espacial:

Con respecto a la posición espacial nos estaremos refiriendo a la posición que ocupa en el espacio. Así, consideraremos los siguientes valores para esta variable: posición horizontal, posición vertical o posición inclinada.

Variable Valor Numérico:

Cuando se escribe una medida o estimación de una cantidad se expresa con un número acompañado de una unidad de medida. La variable valor numérico nos caracterizará el tamaño de dicho número que, obviamente, depende de la unidad de medida utilizada. Consideraremos cinco valores numéricos diferentes tal y como se muestra en la Tabla 5.6.

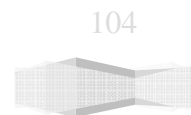
Tabla 5.6. Intervalos de Valor Numérico.

Valor Numérico	Intervalo numérico
Muy Pequeño	[0,1)
Pequeño	[1, 5)
Mediano	[5, 10)
Grande	[10, 20)
Muy Grande	[20, →)

4. DESCRIPCIÓN DE LAS SESIONES

En este apartado describimos el diseño e implementación de las sesiones de trabajo en el aula. La característica principal del diseño de la intervención con los alumnos es que, tras la sesión de Evaluación Inicial, cada sesión fue diseñada apoyándonos en los conocimientos teóricos expuestos en los capítulos 2, 3 y 4 y partiendo de los datos obtenidos en la sesión anterior. Este modo de diseñar la intervención con los alumnos, propio de los experimentos de enseñanza, nos llevó a tener que elaborar las intervenciones desde niveles muy básicos, dado que detectamos importantes dificultades conceptuales asociadas no solo a la estimación, sino también a la medida y a la propia magnitud, fundamentalmente en el caso de la magnitud superficie.

Al tratarse de un grupo de alumnos con un alto porcentaje de alumnado inmigrante también tuvimos en cuenta las posibles dificultades derivadas del desconocimiento del idioma. Prestamos especial atención al esclarecimiento de términos, tanto en las fichas



de trabajo como en las puestas en común que se realizaron en gran grupo. Otra forma de atender a la diversidad de la muestra fue variando el tipo de agrupamiento de los estudiantes según la tarea: individual, en pequeño grupo o en gran grupo. El trabajo en pequeño grupo y gran grupo se utilizó para propiciar el aprendizaje entre iguales y salvar las posibles dificultades que pudieran surgir derivadas del desconocimiento del idioma.

A lo largo del experimento utilizamos varios métodos de recogida de información. En todas las sesiones se recogieron fichas del trabajo realizado por los alumnos. En las sesiones que teníamos previsto hacer una puesta en común de las repuestas dadas a las tareas (sesiones 2 y 4) realizamos grabaciones en video. Las entrevistas individuales también fueron grabadas en video.

Otra fuente de información a considerar son las anotaciones y percepciones del investigador-docente. La recogida de información fue exhaustiva para permitir poder analizar de forma retrospectiva alguna variable que inicialmente no fuese considerada. No obstante, como ocurre con este tipo de investigaciones²⁰ se recogieron más datos de los que posteriormente se podrán analizar y emplear siendo necesario distinguir la información relevante de la irrelevante atendiendo a los objetivos de investigación planteadas.

Presentamos a continuación una descripción de cada una de las sesiones de trabajo en el aula detallando: cuales fueron los motivos que propiciaron su diseño (justificación); qué conocimientos se pretendían movilizar en el proceso de enseñanza-aprendizaje (objetivos instruccionales); qué esperábamos obtener en cada sesión (hipótesis sobre los resultados a obtener); cómo se desarrolló (metodología), precisando qué materiales se usaron tanto para el trabajo en clase como para recoger la información, cómo se agruparon a los alumnos y cuánto tiempo duró cada sesión; el diseño de las tareas que componen las fichas de trabajo, las características de las mismas y la justificación de la elección de dichas tareas; finalmente describimos cómo se desarrolló la sesión. El análisis de los datos recogidos en cada sesión es presentado como justificación de la siguiente sesión, pues como ya hemos indicado, el diseño tiene una estructura cíclica y cada sesión es diseñada partiendo de la información obtenida de la sesión anterior.

²⁰ Característica de las investigaciones de diseño recogida en Molina et. al. (2011).



Las fichas de trabajo se adjuntan en el Apéndice C con el mismo formato en que fueron presentadas a los alumnos. La Tabla 5. 7 recoge qué fichas se trabajaron en cada sesión. Como veremos a continuación, utilizamos sesión de diferentes duraciones, así como fichas de diferentes extensiones.

Tabla 5. 7. Fichas Trabajadas en Cada Sesión.

Sesión	Fichas
1 ^a	Ficha de Evaluación Inicial
2 ^a	Fichas 1, 2, 3 y 4
3 ^a	Ficha 5
4 ^a	Ficha 6
5 ^a	Ficha 7
6 ^a	Fichas 8 y 9
7 ^a	Ficha 10
8 ^a	Ficha de Evaluación Final

4.1. Descripción de la 1^a Sesión: Evaluación Inicial

Estructuramos la descripción de la primera sesión en cuatro apartados en los que presentamos: la justificación, la metodología, el desarrollo o implementación en el aula y un breve análisis de los resultados obtenidos.

4.1.1. Justificación

La primera sesión o sesión de Evaluación Inicial tiene un carácter diagnóstico. El propósito es verificar el nivel de preparación de los alumnos para enfrentarse a tareas de estimación de cantidades de longitud y superficie. Los propósitos de la Evaluación Inicial son identificar qué aprendizajes previos marcan el punto de partida, detectar carencias, lagunas o errores que puedan dificultar el éxito en este tipo de tareas, obtener información para adaptar el diseño de las sucesivas intervenciones a las capacidad estimativa de los estudiantes y establecer metas razonables a fin de emitir juicios de valor sobre los logros alcanzados.

En todo estudio con alumnos es necesario partir del nivel de conocimiento que tengan para que el aprendizaje sea constructivo y pueda partir de los aprendizajes que ya tienen interiorizados los alumnos. Por tanto, el motivo no es otro que conocer el punto de



partida de los alumnos en el campo de la estimación en medida de cantidades de longitud y superficie.

i) Objetivos Instruccionales

Durante la evaluación inicial pretendemos alcanzar los siguientes objetivos instruccionales relativos a los alumnos:

- a.- Comprobar si perciben las cantidades a estimar.
- b.- Comprobar si conocen la terminología implicada.
- c.- Comprobar si adecuan la unidad de medida a la cantidad a estimar.
- d.- Comprobar si tienen referentes adecuadamente interiorizados.
- e.- Comprobar si tienen interiorizadas las cantidades que le corresponden a las unidades de medida.
- f.- Comprobar si eligen una estrategia adecuada.
- g.- Comprobar si hacen un uso adecuado de la estrategia elegida.
- h.- Valorar la precisión de sus estimaciones.

Como veremos en el apartado de descripción de las tareas, cada tarea evalúa algunos de estos objetivos para una magnitud y unidad de medida concreta.

ii) Hipótesis sobre los Resultados a Obtener

Esperábamos comprobar que los alumnos tienen dificultades en el manejo de alguna de las unidades de medida, sobre todo, en las unidades de medida de superficie. Perseguíamos comprobar que los alumnos tenían interiorizadas las unidades. Esperábamos que percibieran las magnitudes de longitud y superficie, pero preveíamos que tuvieran algunas dificultades con las unidades de superficie.

4.1.2. Metodología

En esta sesión los alumnos resolvieron de forma individual la Ficha de Evaluación Inicial. Las características generales de esta primera sesión son las siguientes:

Materiales: Ficha de Evaluación Inicial y útiles de escritura.

Recogida de datos: Ficha de Evaluación Inicial.

Agrupamiento: Individual.



Temporalización: Una sesión de 55 min.

A continuación describimos las tareas que aparecían en la Ficha de Evaluación Inicial, describimos sus características y justificamos la elección de dichas tareas.

i) Las Tareas

La Ficha de Evaluación Inicial está estructurada en dos bloques según si las cantidades a estimar corresponden a la magnitud longitud (Bloque I) o a la magnitud superficie (Bloque II). En ambos bloques se pide a los alumnos que realicen diversas tareas de estimación. Las tareas se denotan con una letra correspondiente al bloque al que pertenecen, seguida de un número que marca su orden dentro de la ficha de la Evaluación Inicial. A continuación se presentan las tareas de cada bloque acompañadas de imágenes de los objetos presentes en el aula en los que se presenta la cantidad a estimar.

Tarea I.1. ¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor? (Figura 5. 5)



Figura 5. 5. Fotografía de la Mesa del Profesor.

Tarea I.2. Citar tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 dm.

Tarea I.3. ¿Qué grosor tiene aproximadamente la mesa sobre la que estas escribiendo? (Figura 5. 6)



Figura 5. 6. Detalle del Grosor de la Mesa.

Tarea I.4. Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 m.

Tarea I.5. ¿Cuánto mide aproximadamente (de largo) el bote de pegamento en barra que hay encima de la mesa del profesor? (Figura 5. 7)



Figura 5. 7. Fotografía del Pegamento en Barra.

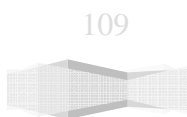
Tarea I.6. Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 cm.

Tarea I.7. ¿Qué longitud aproximada tiene la cuerda que hay colgada en la pared? (Figura 5. 8)



Figura 5. 8. Fotografía de la Cuerda .

Tarea II.1. ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pizarra?



Tarea II.2. Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 cm^2 .

Tarea II.3. ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la diana?

Tarea II.4. Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 m^2 .

Tarea II.5. ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie del mapa de España?

Tarea II.6. Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 dm^2 .

(Figura 5. 9)



Figura 5. 9. Fotografía de la Pizarra, la Diana y el Mapa de España.

En todas las tareas de numeración impar se les pedía, además, de dar el resultado que escribieran los pasos que habían seguido para llegar al mismo, especificando todo aquello en lo que hubiesen pensado o los razonamientos que hubiesen llevado a cabo para llegar a la solución.

ii) Características de las Tareas

Todas las tareas incluidas en esta ficha son tareas de estimación²¹, unas son de tipo A y otras de tipo B:

Tareas tipo A: I.1, I.3, I.5, I.7, II.1, II.3 y II.5.

Tareas tipo B: I.2, I.4, I.6, II.2, II.4 y II.6.

²¹ Véase apartado 3 (variables de tarea).

En la Tabla 5. 8 recogemos las características de las tareas tipo A dependientes del objeto en el que se presenta la cantidad a estimar.

Tabla 5. 8. Características de las Tareas Tipo A de la Ficha de Evaluación Inicial.

Tarea	Medida exacta	Accesibilidad ^a	Forma	Tamaño ^b	Posición espacial
I.1	1.4 m	No	Línea recta	Grande	Horizontal
I.3	2 cm	Sí	Línea recta	Pequeño	Vertical
I.5	9.4 cm	No	Línea recta	Pequeño	Vertical
I.7	3 m	No	Curva catenaria	Grande	Horizontal
II.1	2.76 m ²	No	Regular (rectángulo)	Grande	Vertical
II.3	3.8 dm ²	No	Regular (círculo)	Mediano	Vertical
II.5	42 dm ²	No	Irregular	Mediano	Vertical

a. Todas las cantidades son perceptibles visualmente. En esta columna indicamos si son manipulables o no.

b. Según las escalas establecidas en [apartado 3](#).

Las tareas tipo B persiguen valorar la interiorización de los estudiantes de las unidades de medida centímetro, decímetro y metro, para la magnitud longitud; y centímetro cuadrado, decímetro cuadrado y metro cuadrado para la magnitud superficie.

Las tareas anteriormente indicadas pretenden dar respuesta a los objetivos instruccionales²² que nos planteamos con esta primera sesión. En la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** indicamos qué objetivos instruccionales pretendemos alcanzar con cada tarea apuntando a qué magnitud están referidos y, para las tareas tipo B, a qué unidad de medida se refieren. Como se observa en la Tabla 5. 9, cada tarea suele ir dirigida a ciertos grupos de objetivos según el tipo de tarea.

Tabla 5. 9. Relación Tarea-Objetivos Concretos en la Ficha de Evaluación Inicial.

Tarea	Unidad de Medida	Objetivos	
		Prioritarios	Secundarios
Magnitud longitud			
I.1		a, c, f, g, h	b, d, e

²² Apartado 4.1.2.



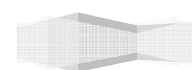
Tarea	Unidad de Medida	Objetivos	
		Prioritarios	Secundarios
I.2	dm	e	d
I.3	-	a, c, f, g, h	b, d, e
I.4	m	e	d
I.5	-	a, c, f, g, h	b, d, e
I.6	cm	e	d
I.7	-	a, c, f, g, h	b, d, e
Magnitud superficie			
II.1	-	a, c, f, g, h	b, d, e
II.2	cm ²	e	d
II.3	-	a, c, f, g, h	b, d, e
II.4	m ²	e	d
II.5	-	a, c, f, g, h	b, d, e
II.6	dm ²	e	d

iii) Otras Consideraciones

Con el objetivo de recoger tanto el resultado como el procedimiento seguido en las tareas de estimación tipo A usamos el mismo formato con el cual ya se había trabajado en el previo T.I.T. (véase Apéndice C).

Las tareas se escogieron atendiendo a los siguientes criterios:

- Se seleccionaron dos magnitudes a estudiar: longitud y superficie.
- Se adecuaron las preguntas al alumnado. Para ello, se realizaron las preguntas utilizando un lenguaje que fuera cotidiano para los alumnos. De este modo, por ejemplo, en lugar de pedir que estimaran la longitud de la mesa del profesor, se les preguntaba a los alumnos “¿Cuánto mide aproximadamente la mesa del profesor?”
- Para cada una de las magnitudes se introdujeron tanto tareas de tipo A como de tipo B.
- Para comprobar si utilizaban una unidad de medida adecuada no se pusieron restricciones respecto de la unidad medida.
- Se realizaron para comprobar si tenían interiorizadas diferentes unidades de medida: cm, dm, m, cm², dm² y m². Se seleccionaron estas unidades porque



son las que permiten medir cantidades existentes en el aula de clase sin requerir una considerable agudeza visual.

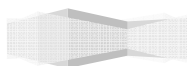
- Se añadieron tareas para que estimaran cantidades de longitud con formas rectas y curvas. También se consideraron superficies regulares e irregulares.
- Las tareas se pusieron en orden aleatorio, para evitar que identificaran el tamaño de las unidades con el orden de las tareas.

4.1.3. Desarrollo de la 1ª Sesión

La primera sesión tuvo lugar el 12 de diciembre de 2007 en la 2ª hora de clase. En ella participaron 26 alumnos. Esta sesión se desarrolló sin incidentes significativos. Dispusimos que los alumnos se sentaran separados para evitar que se copiaran entre ellos, se les repartió la ficha de Evaluación Inicial, y se les dieron las siguientes directrices:

- Sólo se les permitía utilizar lápiz o bolígrafo para la realización de la prueba.
- No podían hablar. Si algún alumno tenía alguna duda debía levantar la mano y esperar a que llegara a su pupitre el profesor.
- No estaba permitido mirar a los compañeros.
- No estaba permitido levantarse del asiento.
- Se les pidió que escribieran con letra clara y legible.
- No se les permitió que compartieran ningún borrador, por tanto, si se equivocaban y no tenían con qué borrar podían tachar lo que necesitaran.
- Se les insistió que en las tareas se les pedía respuestas aproximadas y no que trataran de adivinar la medida exacta.
- No se les permitió utilizar instrumentos de medida.
- Se insistió en la importancia de explicar lo mejor posible (con letras, fórmulas, cuentas, etc.) todos los razonamientos, procesos, ideas,... que les habían llevado a los diferentes resultados.
- Se les recordó que debían indicar la unidad de medida utilizada en cada caso.
- Se les advirtió de que tenían 50 minutos para hacer la prueba.

Además de estas directrices, se les indicó cuales eran cada uno de los objetos sobre los que debían realizar algún tipo de estimación.



Durante la realización de la prueba hubo que insistir en que se trataba de dar estimaciones y no era necesario dar el valor exacto, pues muchos alumnos afirmaban que no contestaban las preguntas porque “no sabían cuanto medían los objetos”.

4.1.4. Primer Análisis de la Evaluación Inicial

Un primer análisis de la Evaluación Inicial arrojó como primeros resultados que los alumnos presentaban una gran variedad de dificultades que se describen a continuación:

Relativas a la magnitud longitud:

DI1. El alumno no percibe la magnitud longitud.

DI2. El alumno no tiene interiorizado el centímetro. Por ejemplo, el alumno A5 contesta en la tarea I.5: “El pegamento en barra mide 2 centímetros de largo. Porque dos centímetros es más o menos lo que tiene de largo un dedo...”

DI3. El alumno no tiene interiorizado el decímetro. Por ejemplo, el alumno A9 contesta en la tarea I.2: “El grosor de una barra de vidrio. Una pinza. La anchura de la correa de un reloj.”

DI4. El alumno no tiene interiorizado el metro. El alumno A7 contesta en la tarea I.4: “una uña,..., y una tecla del ordenador”

Relativas a la magnitud superficie:

DII1. El alumno no percibe la magnitud superficie. Por ejemplo, el alumno A4 contesta en la tarea II.1: “ $2,5+1,5=4$ m, longitud + altura = 4 m”

DII2. El alumno no tiene interiorizado el centímetro cuadrado. Por ejemplo, el alumno A4, propone en la tarea II.2 como objetos que tienen una superficie de 1 cm^2 : “El grosor de un libro”

DII3. El alumno no tiene interiorizado el decímetro cuadrado. Por ejemplo, el alumno A12 contesta en la tarea II.6: “un botón, una tuerca, un botón del móvil”

DII4. El alumno no tiene interiorizado el metro cuadrado. Por ejemplo, el alumno A4 contesta en la tarea II.4: “La altura de una puerta, la altura de una ventana, la longitud de la mesa del profesor”.

DII5. El alumno tiene percibe la magnitud superficie pero lo expresa en unidades de longitud. Por ejemplo, el alumno A11, en la tarea II.1 contesta: “La altura



sería de 1,50 m y lo he comprado con el mapa que está en la pizarra y de ancho como 2 m y también lo he comparado con el mapa (a continuación el alumno multiplica 1,50 por 2 y decide) 3 metros es la superficie de la pizarra”

DII6. El alumno expresa las superficies como producto de dos medidas longitudinales. Por ejemplo, el alumno A19 contesta en la tarea II.3:

“La longitud de un bolígrafo es de 13 cm, si lo ponemos al lado de la diana medirá los 13cm x 13 cm”.

Como podemos apreciar la situación de partida recoge una gran variedad de dificultades y errores. La Tabla 5. 10 muestra que las dificultades no las presentaban todos los alumnos en la misma proporción, puesto que, por ejemplo, pocos alumnos eran los que no percibía la longitud, sin embargo había muchos alumnos que no percibían la superficie y, consecuentemente, tampoco dominaban sus unidades de medida.

Tabla 5. 10. Dificultades Detectadas en la Evaluación Inicial para cada Alumno.

Alumno	Dificultades									
	Longitud					Superficie				
	DI1	DI2	DI3	DI4	DII1	DII2	DII3	DII4	DII5	DII6
A1			X		X					
A2	X									X
A3			X		X					X
A4			X		X					
A5		X								X
A6			X		X					
A7		X	X	X	X					
A9		X	X							
A10			X		X					X
A11									X	
A12					X		X		X	
A13			X		X					
A15					X					
A16			X		X					
A17			X		X					



Alumno	Dificultades									
	Longitud					Superficie				
	DI1	DI2	DI3	DI4	DII1	DII2	DII3	DII4	DII5	DII6
A18									X	
A19			X				X			X
A21									X	
A23			X		X					X
A24			X		X					
A25					X					X
A26			X		X				X	

4.2. Descripción de la 2ª Sesión

A raíz de las importantes y numerosas deficiencias detectadas en la Evaluación Inicial programamos la segunda sesión enfocada, en primer lugar, a conceptos básicos como son identificar y diferenciar diferentes cantidades de longitud y/o superficie, y en segundo lugar, a la interiorización de las unidades de medida.

4.2.1. Justificación

En virtud de lo acaecido durante la evaluación inicial detectamos, tras un breve análisis de los datos recogidos, que algunos alumnos manifestaban las siguientes dificultades descritas en el primer análisis de la evaluación inicial²³.

Por tanto, dichas dificultades nos obligaron a rehacer el diseño, y nos planteamos que sería necesario superar estas dificultades que los alumnos presentaban antes de pasar a trabajar contenidos, procesos o estrategias propios de la estimación.

i) Objetivos Instruccionales

Con la segunda sesión pretendíamos que los alumnos consiguieran los siguientes objetivos:

- a.-Identificar diferentes cantidades de Longitud y de Superficie en representaciones de figuras planas y de cuerpos geométricos.

²³ Apartado 4.1.4.

- b.- Diferenciar las magnitudes Longitud y Superficie.
- c.- Conocer la terminología asociada a ambas magnitudes.
- d.- Interiorizar las unidades de medida.
- e.- Manejar instrumentos de medida.
- f.- Medir cantidades de las magnitudes longitud y superficie.
- g.- Elegir una unidad de medida adecuada.

ii) Hipótesis sobre los Resultados a Obtener

Esperábamos que la realización de estas fichas esclareciera determinados conceptos que, en la evaluación inicial presentaron deficiencias para un gran grupo de alumnos. En concreto, se esperaba que los alumnos identificaran y diferenciaron las magnitudes Longitud y Superficie, que interiorizaran diferentes unidades de medida de longitudes (en concreto, el cm, dm y m), y que interiorizaran diferentes unidades de medida de superficie (en concreto, el cm^2 , dm^2 y m^2).

4.2.2. Metodología

En esta sesión el trabajo en el aula se organizó en pequeños grupos de 4 alumnos con el objetivo de promover el aprendizaje entre iguales y facilitar el trabajo con materiales manipulativos. Aunque el modo de trabajo sea en grupo, decidimos, que las fichas se repartirían y las rellenarían individualmente a fin de evitar que algún alumno se despistara o simplemente, no le prestara la suficiente atención a las tareas a realizar. Los agrupamientos en pequeño grupo fueron realizados por el profesor con los siguientes criterios:

- Que los grupos fuesen los más heterogéneos posible.
- Que dentro de un mismo grupo estuvieran alumnos que tuvieran afinidad entre sí, ya sea debida al país de procedencia o al compañerismo generado con el trato diario en las aulas.

Esta segunda sesión se desarrolló en cuatro partes que ocuparon dos clases de 55 minutos:

1ª Parte:

Objetivo: que el alumno identifique y diferencie las magnitudes Longitud y Superficie.



Agrupamiento: Gran grupo y pequeño grupo.

Materiales: Ficha 1, figuras planas y cuerpos geométricos.

Recogida de datos: Ficha 1 y grabación en video.

Temporalización: 25 minutos.

Organización: En primer lugar se inició la sesión con un debate en gran grupo a fin de que los alumnos, guiados por el profesor-investigador, discutieran sobre la diferencia entre longitud y superficie utilizando diferentes figuras planas y cuerpo geométricos que tenían recortados en cartulina sobre la mesa. Después se recogieron las figuras planas y los cuerpos geométricos, y se repartió la Ficha 1 para que la rellenaran individualmente; podían conversar entre ellos si tenían alguna duda. Cuando la tuvieron rellena se hizo una puesta en común (véase Apéndice D1).

2ª Parte:

Objetivo: que el alumno identifique diferentes cantidades de longitud y de superficie en representaciones de figuras planas y cuerpos geométricos.

Agrupamiento: Pequeño grupo.

Materiales: Ficha 2, Bolígrafos de diferentes colores.

Recogida de datos: Ficha 2 y grabación en video.

Temporalización: 25 minutos.

Organización: Se les repartió la ficha 2 para que la realizaran individualmente. Sin embargo, el agrupamiento era en pequeño grupo, para que se ayudaran unos a otros. Cuando terminaron se realizó una puesta en común, prestando especial atención a aquellas situaciones problemáticas que se les habían presentado y a las dudas que les surgieron.

3ª Parte:

Objetivo: que el alumno interiorice las unidades de medida de longitud.

Agrupamiento: Pequeño grupo.

Materiales: Ficha 3, regla y flexómetro.

Recogida de datos: Ficha 3 y grabación en video.

Temporalización: 25 minutos.



Organización: Se les repartió la ficha 3 para que la realizaran individualmente. Previamente el profesor-investigador les dio una breve explicación sobre qué debían hacer. El agrupamiento era en pequeño grupo, para que se ayudaran unos a otros. Al finalizar se realizó una breve puesta en común.

4ª Parte:

Objetivo: que el alumno interiorice las unidades de medida de superficie.

Agrupamiento: Pequeño Grupo.

Materiales: Ficha 4, malla cuadrículada, papel milimetrado, decímetro cuadrado de cartulina y metro cuadrado de papel continuo.

Recogida de datos: Ficha 4 y grabación en video.

Temporalización: 25 minutos.

Organización: Se les repartió la ficha 4 para que la realizaran individualmente. El profesor-investigador les explicó cómo realizar medidas directas utilizando la malla cuadrículada y el papel milimetrado, al tiempo que les insistió en que para rellenar esta ficha no debían usar fórmulas sino realizar medidas directas. El agrupamiento era en Pequeño Grupo, para que se ayudaran unos a otros, propiciando así el aprendizaje entre iguales. Una vez completada se realizó una breve puesta en común.

i) Las Tareas

En la segunda sesión se trabajaron cuatro fichas que describimos a continuación:

- **Tareas de la Ficha 1:**

La Ficha 1 estaba formada por las siguientes tareas:

Tarea 1.1. Dibuja dos figuras planas de las que tienes sobre la mesa e indica sobre el dibujo, en color rojo, diferentes “longitudes” que tenga la figura; y dibuja en color azul la/las “superficies” de la misma.

Tarea 1.2. Dibuja dos cuerpos geométricos de los que tienes sobre la mesa e indica sobre el dibujo, en color rojo, diferentes “longitudes” que tenga dicho cuerpo; y dibuja en color azul la/las “superficies” del mismo.

Tarea 1.3. Explica con tus palabras qué entiendes por longitud y/o superficie.

- Yo creo que Longitud es...



- Yo creo que Superficie es...
- Indica diferencias que observes entre las magnitudes Longitud y Superficie:...

Las tres tareas que forman esta ficha son de las denominadas tareas de magnitud porque el objetivo para el que fueron diseñadas es contribuir a la adquisición de componentes asociadas a la magnitud.

- **Tareas de la Ficha 2:**

La Ficha 2 estaba formada por las siguientes tareas:

Tarea 2.1. Indica (en color rojo) en el siguiente rectángulo cuál sería el “largo”, y cuál sería el “ancho”. Dibuja en color azul la/las superficie/s que tenga el rectángulo. (Figura 5. 10)



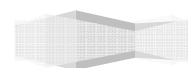
Figura 5. 10. Rectángulo presentado en la tarea 2.1.

Tarea 2.2. Dibuja sobre el siguiente triángulo en color rojo las siguientes longitudes: la base y la altura del mismo. Dibuja en color azul la/las superficie/s del mismo. (Figura 5. 11)



Figura 5. 11. Triángulo Presentado en la Tarea 2.2.

Tarea 2.3. Dibuja utilizando diferentes colores la circunferencia (rojo), el radio y el diámetro (negro). Dibuja en color azul la/las superficie/es. (Figura 5. 12)



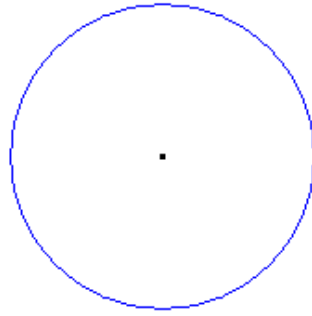


Figura 5. 12. Circunferencia Presentada en la Tarea 2.3.

Tarea 2.4. En el siguiente poliedro indica en color rojo “largo”, “ancho” y “alto”. Dibuja en color azul la/las superficie/s del mismo. ¿Cuántas superficies tiene en total? (Figura 5. 13)

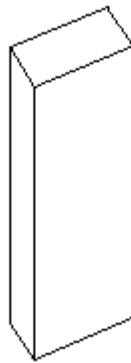


Figura 5. 13. Poliedro Presentado en la Tarea 2.4.

Tarea 2.5. En la siguiente pirámide triangular indica (en color rojo) cuales serían las aristas que la forman. Dibuja en color azul la/las superficie/s de la pirámide. ¿Cuántas superficies tiene en total el poliedro? (Figura 5. 14)

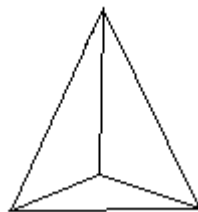
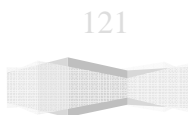


Figura 5. 14. Pirámide presentada en la Tarea 2.5.

Tarea 2.6. Dibuja sobre la siguiente figura (en rojo) tres “distancias” que se puedan medir. Dibuja en color azul la/las superficie/s que tenga esta figura. (Figura 5. 15)



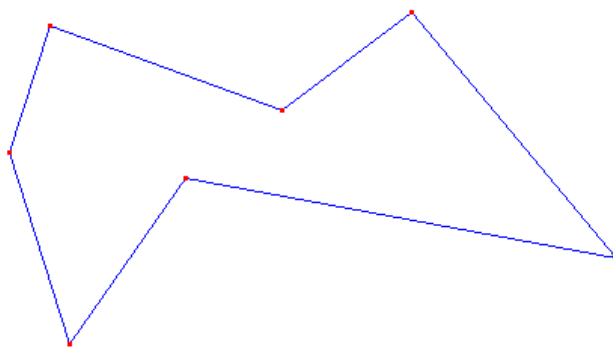


Figura 5. 15. Polígono Presentado en la Tarea 2.6.

Tarea 2.7. Dibuja sobre la siguiente figura (en rojo) tres “distancias” que se puedan medir. Dibuja en color azul la/las superficie/s que tenga esta figura. (Figura 5. 16)

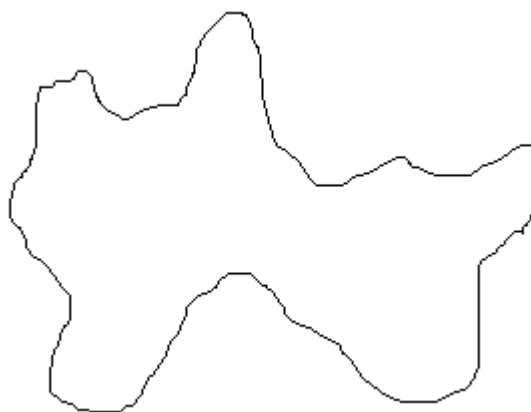


Figura 5. 16. Línea Curva Cerrada Presentada en la Tarea 2.7.

Tarea 2.8. Señala en el siguiente cuerpo de revolución cuáles serían las superficies laterales y las bases. ¿Cuántas superficies tiene en total el cilindro? (Figura 5. 17)

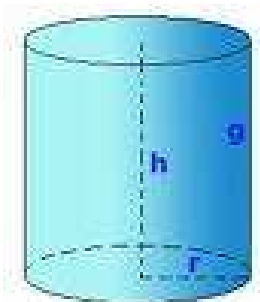


Figura 5. 17. Cilindro Presentado en la Tarea 2.8.

Tareas 2.9. Señala en el siguiente cuerpo de revolución cuáles serían las superficies laterales y las bases. ¿Cuántas superficies tiene en total el cono? (Figura 5. 18)



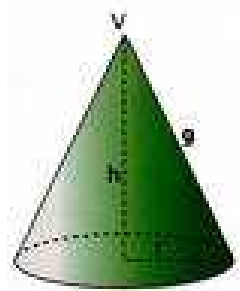


Figura 5. 18. Cono Presentado en la Tarea 2.9.

Tarea 2.10. Señala en el siguiente cuerpo de revolución cuáles son la/las superficie/s. ¿Cuántas superficies tiene en total la esfera? (Figura 5. 19)



Figura 5. 19. Esfera Presentada en la Tarea 2.10.

Tarea 2.11. Marca con una cruz donde corresponda (véase Tabla 5. 11)

Tabla 5. 11. Tabla Presentada en la Tarea 2.11.

Objeto o elemento:	Longitud	Superficie
La distancia entre Roquetas y Almería		
El largo de un coche		
La portada de un libro		
La arista de una ventana		
El cristal de una ventana		
Una cuerda		
Una circunferencia		
Un círculo		

• **Tareas de la Ficha 3:**

La Ficha 3 estaba formada por las siguientes tareas:

Tarea 3.1. Mide el “largo” y el “ancho” del siguiente rectángulo y escribe cuánto miden. (Utiliza la unidad de medida que consideres más adecuada). (Figura 5. 20)

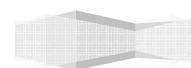




Figura 5. 20. Rectángulo Presentado en la Tarea 3.1.

Tarea 3.2. Mide en el siguiente triángulo la base y la altura del mismo. (Utiliza la unidad de medida que consideres más adecuada). (Figura 5. 21)

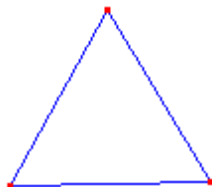


Figura 5. 21. Triángulo Presentado en la Tarea 3.2.

Tarea 3.3. Mide el radio y la longitud de la circunferencia. (Utiliza la unidad de medida que consideres más adecuada). Explica el procedimiento que has seguido para medir la circunferencia. (Figura 5. 22)

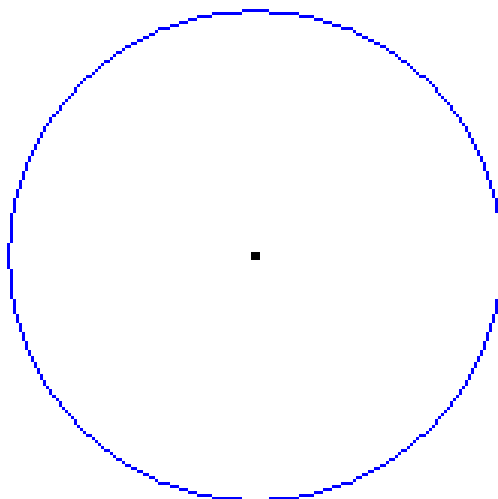


Figura 5. 22. Círculo Presentado en la Tarea 3.3.

Tarea 3.4. ¿Cuánto mide el lado del cubo o hexaedro que tienes sobre la mesa? (Objeto número 1).

Tarea 3.5. ¿Cuánto mide el largo, ancho y alto del prisma rectangular que tienes sobre la mesa? (Objeto número 2).

Tarea 3.6. En la el siguiente dibujo aparece en línea continua la “trayectoria” que ha seguido una hormiga para ir del punto A al punto B. Mide la trayectoria de la hormiga y la distancia entre los puntos A y B, y compáralas. (Figura 5. 23)



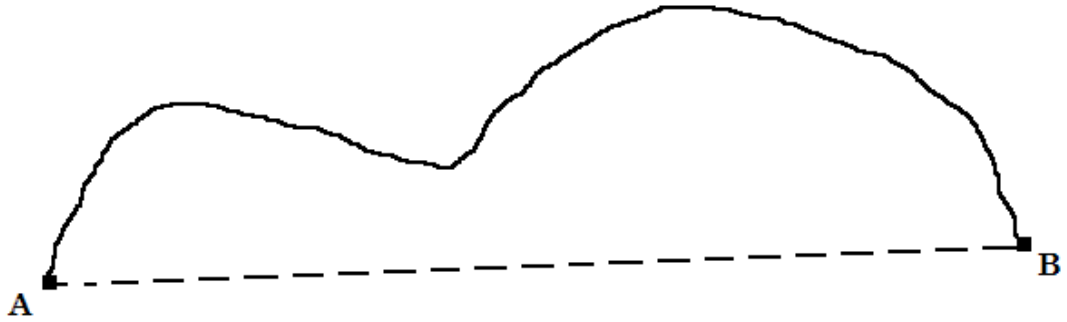


Figura 5. 23. Figura Presentada en la Tarea 3.6.

Tarea 3.7. Mide la longitud de la cuerda que tienes sobre la mesa. (Utiliza la unidad de medida que consideres más adecuada).

- **Tareas de la Ficha 4:**

La Ficha 4 estaba formada por las siguientes tareas:

Tarea 4.1. ¿Cuánto mide la superficie de una cara lateral del cubo (objeto 1)? Utiliza para ello la malla cuadriculada. (Figura 5. 24)

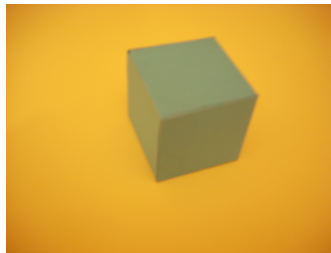


Figura 5. 24. Fotografía del Cubo de Cartulina (Objeto 1).

Tarea 4.2. ¿Cuánto mide la superficie de una cara lateral del prisma (objeto 2)? ¿Y la superficie de la base? Utiliza para ello la malla cuadriculada. (Figura 5. 25)

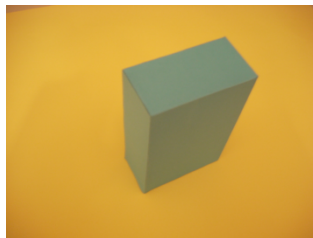


Figura 5. 25. Fotografía del Prisma de Cartulina (Objeto 2).

Tarea 4.3. ¿Cuánto mide la superficie de una cara lateral de la pirámide (objeto 3)? ¿Y la superficie de la base? Utiliza para ello la malla cuadriculada. (Figura 5. 26)

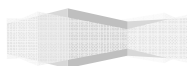




Figura 5. 26. Fotografía de la Pirámide de Cartulina (Objeto 3).

Tarea 4.4. ¿Cuánto mide la superficie de una cara lateral del cilindro (objeto 4)?
¿Y la superficie de la base? Utiliza para ello la malla cuadrículada. (Figura 5. 27)

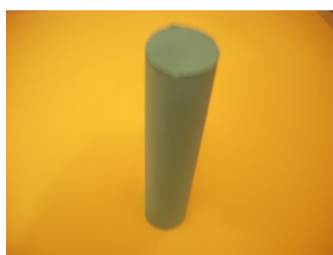


Figura 5. 27. Fotografía del Cilindro de Cartulina (Objeto 4).

Tarea 4.5. ¿Cuánto mide la superficie de una cara lateral del cono (objeto 5)? ¿Y
la superficie de la base? Utiliza para ello la malla cuadrículada. (Figura 5. 28)



Figura 5. 28. Fotografía del Cono de Cartulina (Objeto 5).

Tarea 4.6. ¿Cuánto mide la superficie de la pantalla de la imagen del MP4? Utiliza
para ello el papel milimetrado. (Figura 5. 29)



Figura 5. 29. Imagen del MP4 Presentada en la Tarea 4.6.

Tarea 4.7. ¿Cuánto mide la superficie de la tarjeta de memoria de un móvil que ves en la figura? Utiliza para ello el papel milimetrado. (Figura 5. 30)



Figura 5. 30. Imagen de la Tarjeta de Memoria Presentada en la Tarea 4.7.

Tarea 4.8. ¿Cuánto mide la superficie de una baldosa? Utiliza para ello el decímetro cuadrado.

Tarea 4.9. ¿Cuánto mide la superficie de la mesa? Utiliza para ello el metro cuadrado.

ii) Características de las Tareas

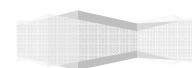
Las tareas de las cuatro fichas que forman esta segunda sesión de trabajo son de dos clases: tareas de magnitud y tareas de medida (véase Tabla 5. 12). Con cada tarea pretendemos que los alumnos alcancen algunos de los objetivos instruccionales establecidos anteriormente (apartado_), unos con carácter prioritario (objetivos prioritarios) y otros que, aun no siendo prioritarios, también pueden ser alcanzados (objetivos secundarios).

Tabla 5. 12. Relación Tarea-Objetivos Concretos en las Fichas 1, 2, 3 y 4.

Tarea	Clase de Tarea	Magnitudes Trabajadas	Objetivos	
			Prioritarios	Secundarios
Ficha 1				
1.1	Magnitud	Ambas	a	b, c
1.2	Magnitud	Ambas	a	b, c



Tarea	Clase de Tarea	Magnitudes Trabajadas	Objetivos	
			Prioritarios	Secundarios
1.3	Magnitud	Ambas	b,c	
Ficha 2				
2.1	Magnitud	Ambas	a, c	b
2.2	Magnitud	Ambas	a, c	b
2.3	Magnitud	Ambas	a, c	b
2.4	Magnitud	Ambas	a, c	b
2.5	Magnitud	Ambas	a, c	b
2.6	Magnitud	Ambas	a, c	b
2.7	Magnitud	Ambas	a, c	b
2.8	Magnitud	Superficie	c	a, b
2.9	Magnitud	Superficie	c	a, b
2.10	Magnitud	Superficie	c	a, b
2.11	Magnitud	Ambas	b	a, c
Ficha 3				
3.1	Medida	Longitud	e, f, g	a, c, d
3.2	Medida	Longitud	e, f, g	a, c, d
3.3	Medida	Longitud	e, f, g	a, c, d
3.4	Medida	Longitud	e, f, g	a, c, d
3.5	Medida	Longitud	e, f, g	a, c, d
3.6	Medida	Longitud	e, f, g	a, c, d
3.7	Medida	Longitud	e, f, g	a, c, d
Ficha 4				
4.1	Medida	Superficie	e, f, g	a, c, d
4.2	Medida	Superficie	e, f, g	a, c, d
4.3	Medida	Superficie	e, f, g	a, c, d
4.4	Medida	Superficie	e, f, g	a, c, d
4.5	Medida	Superficie	e, f, g	a, c, d
4.6	Medida	Superficie	e, f, g	a, c, d
4.7	Medida	Superficie	e, f, g	a, c, d
4.8	Medida	Superficie	e, f, g	a, c, d
4.9	Medida	Superficie	e, f, g	a, c, d



iii) Otras Consideraciones

Para elaborar dichas fichas valoramos factores tales como: el punto de partida, marcado por la Evaluación Inicial y las características de la muestra, ya que al tener muchos alumnos procedentes de otros países se intentó simplificar el lenguaje para que fuese más comprensible. Pretendíamos que las tareas propuestas en estas fichas tuviesen las siguientes características:

- Que trabajaran con diversas representaciones de figuras planas, con cuerpos geométricos y figuras irregulares.
- Que trabajaran con material manipulativo.
- Que tuviesen que contestar utilizando diversos registros: gráficamente (dibujando) y verbalmente (expresando en lenguaje verbal diferentes conceptos).
- Que incluyeran nomenclatura relativa a diferentes partes y/o elementos de las figuras planas y de cuerpos geométricos.
- Que incluyeran tareas de medida para ambas magnitudes.
- Que tuvieran que utilizar diferentes unidades de medida de ambas magnitudes.

4.2.3. Desarrollo de la 2ª Sesión

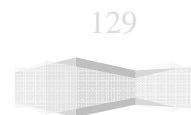
La segunda sesión necesitó dos clases completas que se desarrollaron en dos días distintos.

i) 1ª Día del Desarrollo de la 2ª Sesión

La 2ª Sesión tuvo lugar el 13 de Febrero de 2008, en la 3ª hora de clase. Dicha sesión se desarrolló en el aula-taller de Tecnología, pues el tipo de mesas del taller de Tecnología favorecía el trabajo en Pequeño Grupo. Para agilizar el desarrollo de la sesión se puso en las mesas carteles con los números de los diferentes grupos para que los alumnos/as se sentaran por grupos (véase la distribución en Tabla 5. 13).

Tabla 5. 13. Distribución de los Alumnos en Pequeño Grupo.

Grupo	Alumnos
1	A1, A19, A2, A15
2	A6, A7, A31, A26
3	A8, A11, A30, A32
4	A18, A33, A17, A10
5	A9, A16, A22, A13



6	A5, A24, A25, A28
7	A27, A14, A21, A23

A cada grupo se le repartió algunas figuras planas y cinco figuras tridimensionales realizadas en cartulina: un cubo, un prisma de base rectangular, una pirámide, un cilindro, y un cono (véase apartado 4.3.4). Además de las figuras, se les repartió la Ficha 1 para que la realizaran individualmente. Antes de que los alumnos comenzaran a realizar la Ficha 1 se realizó una puesta en común/debate para esclarecer algunos términos (el Apéndice D.1 recoge la transcripción de la grabación en video de la sesión). En primer lugar, se comenzó debatiendo la diferencia entre “longitud” y “superficie”. Después se les dejó tiempo para que realizaran la Ficha 1. Aunque debían rellenarla individualmente se les permitía que hicieran consultas y debatieran entre los miembros del grupo.

Tras 20 minutos, aproximadamente, se les retiró la Ficha 1 y se procedió a realizar una puesta en común en la que se recordaron algunos conceptos relacionados con la circunferencia, tales como radio, diámetro o segmento.

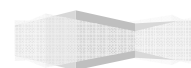
A continuación se les repartió la Ficha 2 y se les dejó tiempo para que la contestaran. Tras aproximadamente otros 20 minutos se procedió a hacer otra puesta en común en Gran Grupo, donde los alumnos pusieron en común sus respuestas y preguntaron las dudas que les habían surgido.

ii) 2º Día del Desarrollo de la 2ª Sesión

Tuvo lugar el 25 de Febrero de 2008 durante la 2ª hora de clase. La clase se desarrolló en el aula ordinaria, aunque cambiando a los alumnos de ubicación para que se sentaran en Pequeño Grupo.

En primer lugar, se les repartieron los materiales con los que habían trabajado en la primera parte de esta sesión (figuras planas y figuras tridimensionales) y la Ficha 3. Se les dijo que podían utilizar útiles de escritura y reglas para medir (el Apéndice D.1 recoge la transcripción de la grabación en video de la sesión). Algunos alumnos no habían traído regla pero al estar trabajando en Pequeño Grupo pudieron utilizar la de sus compañeros.

Trascurridos 20 minutos se procedió a recoger las fichas y a realizar una puesta en común sobre las respuestas que habían dado en la ficha. En dicha puesta en común resultaron especialmente interesantes las respuestas que los alumnos dieron a la



pregunta de cómo habían medido la longitud de la circunferencia. El alumno/a A10 contestó “con los cascotes, colocando el cordón alrededor del círculo y después lo he medido”. El alumno/a A13 contestó “con los dedos. Mides lo que miden los dedos y luego haces así (alumna hace movimiento como si recorriera el círculo con la yema de los dedos)”. Llama la atención el hecho de que algunos alumnos/as no tuvieran claros conceptos como “diámetro” o “circunferencia”, a pesar de haberlos trabajado en la clase anterior. Durante la puesta en común se puso especial atención a las unidades de medida utilizadas. También se esclarecieron algunos conceptos, tales como la diferencia entre longitud y trayectoria.

A continuación se repartió la Ficha 4 a cada alumno y a cada grupo se le facilitó el siguiente material: una malla cuadrada, una hoja de papel milimetrado y un metro cuadrado de papel. Se les explicó a los alumnos cómo utilizar dichos materiales para medir superficies, y se recordaron algunos conceptos, tales como la diferencia entre longitud y superficie; así como las diferentes unidades de medida de superficie necesarias para dar respuesta a las tareas de la Ficha 4.

Tras 20 minutos aproximadamente, se recogieron las fichas y se realizó una puesta en común, en la que se prestó especial interés en desatacar qué unidades de medida de superficie habían utilizado en cada una de las tareas.

4.3. Descripción de la 3ª Sesión

La tercera sesión estuvo dirigida a trabajar la interiorización de unidades de medida y la interiorización de referentes.

4.3.1. Justificación

Tras analizar las respuestas dadas en las fichas de la sesión anterior identificamos los siguientes errores:

Errores detectados en la Ficha 1:

- No determinar de forma precisa cuales son las diferentes cantidades de longitud.
- No saber que existen “longitudes” que se pueden medir “por dentro” de la figura.
- Confundir “longitud” con “arista”.



- Creer que “superficie” es una suma de “lados” o “longitudes”.
- Creer que la Superficie “se mide con fórmulas”.
- Pensar que una Superficie debe ser plana.
- Confundir Longitud con Perímetro.
- Confundir Longitud con unidades de medida de Superficie.

Errores detectados en la Ficha 2:

- Confundir arista con vértice.
- Confundir “largo” con “alto”.
- Creer que el cono tiene dos superficies laterales.
- Confundir los conceptos “circunferencia” y/o “círculo”.

Errores detectados en la Ficha 3:

- Confundir longitud de la circunferencia con la diagonal.
- Medir la longitud de la circunferencia en grados.
- No diferenciar entre “trayectoria” y “longitud”.

Errores detectados en la Ficha 4:

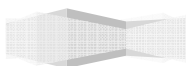
- Error al medir el área lateral del cilindro.
- Error al medir el área lateral del cono.
- Error al medir la base del cilindro y/o del cono.

Inspeccionando las componentes de la estimación de cantidades continuas, nos encontramos con que los alumnos aún no tenían asimiladas ciertas destrezas previas, tales como interiorización de unidades y/o referentes. Ese fue nuestro objetivo prioritario para la siguiente sesión de trabajo.

i) Objetivos Instruccionales de la 3ª Sesión

Durante la tercera sesión pretendíamos que los alumnos alcanzaran los siguientes objetivos instruccionales:

- a.- Interiorizar referentes para las unidades de medida.
- b.- Interiorizar las unidades de medida.
- c.- Adecuar la unidad de medida a la cantidad a medir o estimar.
- d.- Reflexionar sobre la medida de los referentes más habituales.



ii) Hipótesis sobre los Resultados a Obtener

La intención de esta ficha era indagar sobre la interiorización de las unidades de medida y sobre la interiorización de determinados referentes que son los que habitualmente usan en las tareas de estimación. Por tanto, se esperaba que cada alumno respondiera con objetos que le fuesen cotidianos y que se aproximaran a las unidades de medida indicadas. El hecho de relacionar objeto con unidad de medida debería ayudar al alumno a interiorizarlo como referente.

4.3.2. Metodología

Dispusimos que el modo de trabajo en la tercera sesión fuese individual con el objetivo de evaluar el conocimiento de cada alumno en relación con las unidades de medida, y propiciar el aprendizaje de unidades de medida y de referentes que posteriormente pudieran ayudar al alumno a realizar estimaciones.

Las características de la Tercera Sesión son las siguientes:

Agrupamiento: Individual.

Materiales: Ficha 5

Recogida de datos: Ficha 5.

Temporalización: Una clase de 55 min.

A continuación describimos las tareas incluidas en la Ficha 5, analizamos qué variables de tarea están involucradas y las justificamos.

i) las Tareas

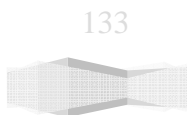
La Ficha 5 estaba formada por las siguientes tareas (ver formato en que fue presentado en el Apéndice C):

Tarea 5.1. Cita al menos tres objetos o espacios en los que alguna de sus longitudes mida aproximadamente cada una de las medidas indicadas.

Medidas propuestas: 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m y 1 dam.

Tarea 5.2. Cita al menos tres objetos en los que alguna de sus superficies mida aproximadamente cada una de las medidas indicadas.

Medidas propuestas: 1 mm², 1 cm², 1 dm² y 1 m².



Tarea 5.3. Indica la unidad de medida más adecuada para medir las siguientes longitudes: a) Anchura de una puerta; b) Grosor de un dedo; c) Largo de un mando a distancia; d) Grosor de un libro; e) Distancia suelo-techo; y f) Largo del aula de clase.

Tarea 5.4. Indica la unidad de medida más adecuada para medir las siguientes superficies: a) Uña del dedo pulgar; b) Portada de un libro; c) Pizarra; d) Pantalla de un MP4; y e) Suelo del aula de clase.

Tarea 5.5. Indica aproximadamente la medida que le asignarías a las siguientes longitudes: a) Palmo de la mano; b) Grosor de un dedo; c) Anchura de la mano; d) Un paso; e) Anchura de una baldosa; f) Largo de un pupitre; g) Brazos abiertos; y h) Largo del aula de clase.

Tarea 5.6. Indica aproximadamente la medida que le asignarías a las siguientes superficies: a) Uña del dedo pulgar; b) Folio; c) Pupitre; d) Puerta de clase; e) Pizarra; y f) Pantalla del ordenador.

ii) Características de las Tareas

Las tareas incluidas en esta ficha tienen varios apartados. Por tanto, cada una de las anteriores tareas podría considerarse un conjunto de subtareas. En la Tabla 5. 14 se puede apreciar la relación de cada tarea con los objetivos concretos a alcanzar con dicha tarea.

Tabla 5. 14. Relación Tarea-Objetivos Concretos en la Ficha 5.

Tarea	Clase de Tarea	Tipo	Magnitudes Trabajadas	Objetivos	
				Prioritarios	Secundarios
5.1	Estimación	b	Longitud	a	b
5.2	Estimación	b	Superficie	a	b
5.3	Medida	-	Longitud	c	b
5.4	Medida	-	Superficie	c	b
5.5	Estimación	a	Longitud	d	-
5.6	Estimación	a	Superficie	d	-

Para las tareas tipo A, la Tabla 5. 15 recoge las características de cada subtarea.

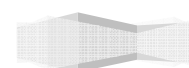


Tabla 5. 15. Características de las Tareas Tipo A de la Ficha 5.

Tarea	Medida exacta	Accesibilidad ^a	Forma	Tamaño ^b
Tarea 5.5				
5.5.a	Indeterminada	Sí	Segmento rectilíneo	Mediano
5.5.b	Indeterminada	Sí	Segmento rectilíneo	Pequeño
5.5.c	Indeterminada	Sí	Segmento rectilíneo	Mediano
5.5.d	Indeterminada	No	Segmento rectilíneo	Mediano
5.5.e	4 dm	No	Segmento rectilíneo	Mediano
5.5.f	7 dm	Sí	Segmento rectilíneo	Mediano
5.5.g	Indeterminada	Sí	Segmento rectilíneo	Grande
5.5.h	10 m	No	Segmento rectilíneo	Muy grande
Tarea 5.6				
5.6.a	Indeterminada	Sí	Irregular	Pequeño
5.6.b	6.24 dm ²	Sí	Rectangular	Mediano
5.6.c	35 dm ²	Sí	Rectangular	Mediano
5.6.d	2 m ²	No	Rectangular	Grande
5.6.e	2.76 m ²	No	Rectangular	Grande
5.6.f	10.5 dm ²	No	Rectangular	Mediano

a. Todas las cantidades son perceptibles visualmente. En esta columna indicamos si son manipulables o no.

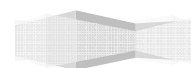
b. Según las escalas establecidas en [apartado 3](#).

iii) Otras Consideraciones

Con esta ficha pretendíamos, en primer lugar que los alumnos interiorizaran algunos referentes. Para ello se han introdujeron las tareas 5.1 y 5.2, en las cuales se les pedía que citaran ejemplos de objetos que tuvieran una determinada medida ya sea de longitud o superficie.

En las dos tareas siguientes, 5.3 y 5.4, el proceso fue el inverso, es decir, se les dio el objeto y se les pidió que indicaran qué unidad utilizarían para medir longitudes (tarea 5.3) o superficies (tarea 5.4). Con estas tareas pretendíamos comprobar si sabían adecuar la unidad de medida a la cantidad a estimar.

Las tareas 5.5 y 5.6 son una primera aproximación a la estimación de cantidades de longitud (tarea 5.5) o de superficie (tarea 5.6). Además, queríamos que los objetos



utilizados en todas las tareas de la Ficha 5 fuesen objetos cotidianos que estuvieran presentes en la clase.

4.3.3. Desarrollo de la 3ª Sesión

La tercera sesión tuvo lugar el 9 de Abril de 2008 durante la 3ª hora de clase. Para el desarrollo de esta sesión se utilizó el aula ordinaria. Se sentó a los alumnos separados unos de otros para que realizaran la Ficha 5 individualmente. Se les explicó cómo debían rellenarla y se les dejó 45 minutos para que la rellenaran. Todos los alumnos terminaron de rellenar la ficha antes de que concluyera el tiempo. Mientras que los alumnos rellenaban la ficha se les recordó la importancia de escoger una unidad de medida adecuada, y se les pidió que no confundieran unidades de medida de longitud con unidades de medida de superficie. Pasado el tiempo se recogió la ficha sin realizar puesta en común.

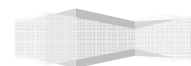
4.4. Descripción de la 4ª Sesión

La cuarta sesión, que podemos denominar “sesión de reflexión”, tuvo como principal objetivo instar a los alumnos en un proceso de reflexión sobre las respuestas que cada uno de ellos había dado en la ficha anterior.

4.4.1. Justificación

Recogida la Ficha 5, se procedió a realizar un breve análisis de la misma, tras el cual nos encontramos con que los alumnos cometían numerosos errores conceptuales. No obstante, no todos los alumnos comenten los mismos errores ni en la misma proporción. A continuación indicamos algunos de los errores o dificultades detectados con mayor frecuencia:

- No tener interiorizada la medida de 1 mm.
- No tener interiorizada la medida de 1 dm.
- No tener interiorizada la medida de 1 dam.
- Utilizar unidades de superficie para medidas de longitud.
- No tener interiorizada la medida de 1 mm^2
- No tener interiorizada la medida de 1 cm^2
- No tener interiorizada la medida de 1 dm^2



- Expresar medidas de superficie como producto de medidas longitudinales
- Utilizar unidades longitudinales para medidas de superficie.

La cantidad y variedad de errores o dificultades detectadas nos obligaron a rehacer la programación introduciendo una sesión de “reflexión”, con la cual pretendíamos que los alumnos detectaran los errores cometidos y los fuesen subsanando. Con este objetivo se programó la cuarta sesión.

i) Objetivos Instruccionales

En esta sesión queríamos que los alumnos alcanzaran los siguientes objetivos:

- a.- Detectar los errores cometidos, ya sea individualmente o con ayuda de los compañeros.
- b.- Valorar la adecuación y precisión de las estimaciones realizadas en la ficha 5.
- c.- Rectificar la interiorización de unidades de medida, en caso de ser deficiente.
- d.- Rectificar la interiorización de referentes, en caso de ser deficiente.

ii) Hipótesis sobre los Resultados a Obtener

Con la corrección de la Ficha 5 y la posterior cumplimentación de la Ficha 6 esperábamos que se produjera aprendizaje entre iguales, lo que propiciaría que aquellos alumnos que cometieron errores al rellenar la Ficha 5 los corrigieran e interiorizaran de un modo más acertado los diferentes referentes y unidades de medida.

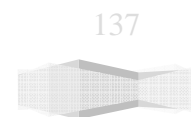
4.4.2. Metodología

Aunque pretendíamos que durante esta sesión los alumnos trabajaran en Pequeño Grupo, el trabajo tenía dos partes bien diferenciadas: en primer lugar, la autocorrección de los errores cometidos al rellenar la Ficha 5, y en segundo lugar, rellenar en Pequeño Grupo la Ficha 6. Para corregir la Ficha 5 se les repartió una fotocopia a cada alumno de lo que había contestado en la Ficha 5 y se les pidió que, con bolígrafo rojo o de otro color, corrigieran los errores que detectaran. La Ficha 6, es similar a la Ficha 5, con la diferencia de que la debían rellenar poniéndose de acuerdo los miembros del grupo.

Así pues, las características de la cuarta sesión son las siguientes:

Agrupamiento: Pequeño Grupo.

Materiales: Fotocopia de lo contestado por cada alumno en la Ficha 5 y Ficha 6.



Recogida de datos: Fotocopia de las respuestas a la Ficha 5, Ficha 6 y grabación en video.

Temporalización: Una clase de 55 minutos.

i) Las Tareas

Las tareas incluidas en la Ficha 6 eran idénticas a las tareas incluidas en la Ficha 5. La diferencia es que esta ficha se rellenaba en pequeño grupo. Por tanto, no aporta nuevas tareas al estudio; las características de dicha tarea se pueden consultar en el **apartado 4.3.4.**

ii) Otras Consideraciones

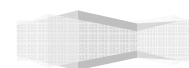
Para el desarrollo de la Cuarta Sesión se les entregó a los alumnos una fotocopia de lo que contestaron en la Ficha 5 con una doble intención: por un lado, tener constancia de lo que contestaron en primera instancia y, de este modo, evitar que pudieran cambiar respuestas; y por otra parte, que no pudieran alegar que no recordaban lo que habían puesto.

4.4.3. Desarrollo de la 4ª Sesión

La cuarta sesión tuvo lugar el 10 de Abril de 2008 durante la 4ª hora de clase. Dicha sesión tuvo lugar en el aula ordinaria. Para el desarrollo de esta sesión se sentaron a los alumnos en Pequeño Grupo; faltaron tres alumnas del grupo 5º; la alumna A13 que asistió, fue ubicada en el grupo 1º.

A cada alumno se le repartió una fotocopia de la Ficha 5, tal y como la había rellenado en la sesión anterior; y por grupo, se repartió la Ficha 6. Se les explicó que tras dialogar entre ellos debían ponerse de acuerdo en cuál sería la respuesta más adecuada para cada una de las preguntas de la Ficha 6 (el Apéndice D.2 recoge la transcripción de la grabación en video de la sesión). La Fotocopia de la Ficha 5 se les dio para que pudieran recordar sus respuestas, y se les pidió que si detectaban algún error en las respuestas que habían dado, las corrigiesen con bolígrafo rojo.

Además, el profesor-investigador recordó las unidades de medida de longitud y de superficie dibujando en la pizarra una representación de las mismas utilizando diferentes instrumentos de medida (regla y maya cuadrículada). Tras 40 minutos



aproximadamente, rellenando la Ficha 6, se procedió a recogerla y a realizar una puesta en común.

Durante la puesta en común se discutieron las medidas estimadas por los alumnos en cada una de las tareas, prestando especial atención a las unidades de medida utilizadas. Llamó la atención el hecho de que algunos alumnos (A19, por ejemplo) utilizaban unidades de medida de superficie para medir longitudes y viceversa. En el desarrollo de la puesta en común los compañeros que tenían clara la diferencia entre unidades de medida de superficie y unidades de medida de longitud, corrigieron a los alumnos que todavía confundían las unidades de medida.

4.5. Descripción de la 5ª Sesión

La quinta sesión estuvo enfocada a la interiorización de referentes. Decidimos que esta sesión de trabajo la desarrollarían en sus respectivas casas por varios motivos: (1) en un aula de Instituto existen relativamente pocos elementos que los alumnos puedan tomar como referentes; consideramos que sus hogares eran entornos más ricos para esta actividad; (2) es un ambiente cotidiano en el que pueden utilizar objetos con los que están más habituados a relacionarse; y (3) no tienen las restricciones temporales a las que nos tenemos que atener cuando la sesión se tiene que desarrollar en la clase, pudiendo incorporar una batería de tareas más amplia.

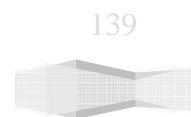
4.5.1. Justificación

La revisión de las respuestas recogidas en la Ficha 6 nos indicó que había muy pocos errores, lo cual demuestra que al consensuar las respuestas en grupo lo hicieron de un modo correcto y discriminaron las respuestas erróneas que tuvieron anteriormente en la Ficha 5.

Con idea de reforzar el aprendizaje de las unidades de medida nos planteamos crear una ficha (Ficha 7) para que la cumplimentaran en casa. Se trataría de reforzar la interiorización de unidades de medida y de referentes aprovechando la riqueza de objetos pueden encontrar en sus respectivas casas.

i) Objetivos Instruccinales

Las tareas incluidas en la Ficha 7 contribuyen a la consecución de los siguientes objetivos:



- a.- Interiorizar las unidades de medida.
- b.- Interiorizar referentes para las unidades de medida.
- c.- Interiorizar referentes antropométricos.
- d.- Conocer la terminología asociada a la magnitud.
- e.- Interiorizar otros referentes presentes en sus hogares.
- f.- Manejar instrumentos de medida.
- g.- Medir diversas cantidades de magnitud.
- h.- Adecuar la unidad de medida a la cantidad a medir o estimar.
- i.- Valorar la utilidad de la medida.

ii) Hipótesis sobre los Resultados a Obtener

Esperábamos que los alumnos interiorizaran otro tipo de referentes para las diferentes unidades, tanto de longitud como de superficie, y posteriormente los pudieran utilizar en las tareas de estimación en estrategias de comparación.

4.5.2. Metodología

El trabajo de esta sesión lo realizaron alumnos trabajando en sus respectivas casas individualmente. El trabajo se les entregó un viernes y se les recogió el lunes siguiente a primera hora de la mañana, para evitar que se copiaran unos de otros.

Así pues, las características de la quinta sesión son las siguientes:

Agrupamiento: Individualmente.

Materiales: Ficha 7 e instrumentos de medida.

Recogida de datos: Ficha 7.

Temporalización: Un fin de semana.

Describimos a continuación las tareas, las caracterizamos y justificamos su elección.

i) Las Tareas

La Ficha 7 estaba formada por las siguientes tareas (para apreciar el formato en que se presentaron las tareas a los alumnos véase Apéndice C):

Tarea 7.1. Dibuja un segmento que mida exactamente 1 mm.



Tarea 7.2. Dibuja un segmento que mida exactamente 1 cm.

Tarea 7.3. Dibuja un segmento que mida exactamente 1 dm.

Tarea 7.4. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que midan aproximadamente 1mm. (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

Tarea 7.5. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que midan aproximadamente 1cm. (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

Tarea 7.6. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que midan aproximadamente 1dm. (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

Tarea 7.7. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que midan aproximadamente 1m. (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

Tarea 7.8. ¿Sabes cuánto mide tu cuerpo? Realiza la medida de las longitudes de cada una de las partes que se te indican (en la unidad de medida indicada). (Tabla 5. 16)

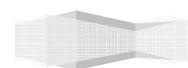
Tabla 5. 16. Tabla Presentada en la Tarea 7.8.

Parte de tu cuerpo	Medida exacta
Estatura	m
Brazos abiertos	dm
Un palmo	cm
Anchura del dedo pulgar	mm
Contorno de la cintura	dm
Longitud de tu pie	cm
Un paso	cm

Tarea 7.9. Toma las medidas de la puerta de tu habitación como si tuvieras que encargarle a un carpintero que te la hiciera de nuevo (en la unidad de medida indicada). (Tabla 5. 17)

Tabla 5. 17. Tabla Presentada en la Tarea 7.9.

Objeto	Medida



Grosor de la puerta de tu habitación	cm
Anchura de una puerta de tu habitación	dm
Altura de la puerta de tu habitación	m

Tarea 7.10. Toma las medidas de las longitudes de los objetos que se indican (en la unidad de medida que consideres más adecuada). (Tabla 5. 18)

Tabla 5. 18. Tabla Presentada en la Tarea 7.10.

Objeto	Medida
Altura de un tetrabrik de leche o zumo	
Longitud de un tenedor	
Diámetro de un plato llano	
Largo del salón-comedor	
Ancho del salón-comedor	
Altura de una silla	
Largo de la mesa del salón-comedor	
Ancho de una baldosa	
Anchura de los interruptores de la luz	

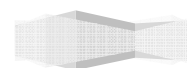
Tarea 7.11. Las pantallas de los televisores, ordenadores,... se miden en pulgadas (la equivalencia entre pulgadas y centímetros es: 1 pulgada = 2,54 cm). Por ejemplo: Si la pantalla de tu televisor es de 14 pulgadas, eso quiere decir que la diagonal de la pantalla mide 14 pulgadas, por tanto medirá $14 \times 2,54 = 35,56$ cm. Mide y expresa en centímetros la diagonal de la pantalla de la televisión del salón y calcula cuántas pulgadas tiene.

Tarea 7.12. Dibuja un cuadrado cuya superficie mida exactamente 1 mm^2 .

Tarea 7.13. Dibuja un cuadrado cuya superficie mida exactamente 1 cm^2 .

Tarea 7.14. Dibuja un cuadrado cuya superficie mida exactamente 1 dm^2 .

Tarea 7.15. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que tengan una superficie que mida aproximadamente 1 mm^2 (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).



Tarea 7.16. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que tengan una superficie que mida aproximadamente 1 cm^2 (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

Tarea 7.17. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que tengan una superficie que mida aproximadamente 1 dm^2 (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

Tarea 7.18. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que tengan una superficie que mida aproximadamente 1 m^2 (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

Tarea 7.19. Toma las medidas de las superficies que se indican. Utiliza la malla cuadrículada o el papel milimetrado en aquellas que lo consideres necesario. (Tabla 5. 19)

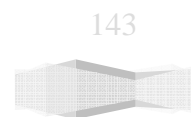
Tabla 5. 19. Tabla Presentada en la Tarea 7.19.

Superficie	Medida
Botón o ruedecilla de un reloj de pulsera	mm^2
CD (disco compacto)	cm^2
Portada de una libreta	dm^2
Ventana de salón-comedor	m^2
Un azulejo del cuarto de baño	dm^2
Pantalla del móvil	cm^2
Moneda de 10 céntimos	mm^2

Tarea 7.20. Toma las medidas de las superficies que se indican (en la unidad de medida que consideres más adecuada). Utiliza la malla cuadrículada o el papel milimetrado en aquellas que lo consideres necesario. (Tabla 5. 20)

Tabla 5. 20. Tabla Presentada en la Tarea 7.20.

Superficie	Medida
Pantalla del televisor	
Mesa del comedor	
Cabeza de un alfiler	
Base de un vaso de agua	
Portada del libro de matemáticas	
Plato llano	



Tecla de un móvil	
-------------------	--

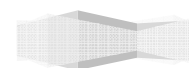
Tarea 7.21. Imagina que tienes que pintar tu habitación y necesitas saber la superficie que tiene cada una de las paredes. Para ello mide la superficie de las paredes de tu habitación y réstale las superficies que no se pintan (ventanas, armarios empotrados,...). Indica el resultado. Escribe a continuación todas las operaciones que realices.

ii) Características de las Tareas

Las tareas incluidas en esta ficha son tareas de medida. Las once primeras están referidas a la magnitud longitud y las restantes a la magnitud superficie. En la Tabla 5. 21 se puede apreciar la relación de cada tarea con los objetivos concretos a alcanzar con dicha tarea.

Tabla 5. 21. Relación Tarea-Objetivos Concretos en la Ficha 7.

Tarea	Clase de Tarea	Tipo	Magnitudes Trabajadas	Objetivos	
				Prioritarios	Secundarios
7.1	Medida	b	Longitud	a	-
7.2	Medida	b	Longitud	a	-
7.3	Medida	b	Longitud	a	-
7.4	Medida	b	Longitud	b	a
7.5	Medida	b	Longitud	b	a
7.6	Medida	b	Longitud	b	a
7.7	Medida	b	Longitud	b	a
7.8	Medida	a	Longitud	c	f, g
7.9	Medida	a	Longitud	d	f, g, e
7.10	Medida	a	Longitud	e, h	f, g
7.11	Medida	a	Longitud	i	f, g
7.12	Medida	b	Superficie	a	-
7.13	Medida	b	Superficie	a	-
7.14	Medida	b	Superficie	a	-
7.15	Medida	b	Superficie	b	a
7.16	Medida	b	Superficie	b	a
7.17	Medida	b	Superficie	b	a
7.18	Medida	b	Superficie	b	a
7.19	Medida	a	Superficie	e	f, g



Tarea	Clase de Tarea	Tipo	Magnitudes Trabajadas	Objetivos	
				Prioritarios	Secundarios
7.20	Medida	a	Superficie	e, h	f, g
7.21	Medida	a	Superficie	i	f, g

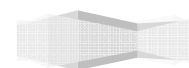
iii) Otras Consideraciones

Las tres primeras tareas de la primera parte (7.1, 7.2, y 7.3) están diseñadas para que el alumno representara diferentes unidades de medida de longitud (mm, cm y dm, respectivamente) y así, interiorizaran la cantidad que le corresponde a cada una de estas unidades de medida. En las tareas 7.4, 7.5, 7.6, y 7.7 se pidió a los alumnos que buscaran objetos en su casa, cuya medida coincidiera con 1 mm, 1 cm, 1 dm o 1 m, respectivamente. Pretendíamos de este modo que el alumno interiorizara alguno de esos objetos como referentes. En la tarea 7.8 se pidió que indicaran la medida de diferentes partes de su cuerpo. En las tareas 7.9, 7.10 y 7.11 se pidió que midieran diferentes cantidades de longitud de objetos que usualmente hay en las casas.

Las tareas 7.12, 7.13, y 7.14 están diseñadas para que los alumnos representaran diferentes unidades de medida de superficie (mm^2 , cm^2 y dm^2 , respectivamente) propiciando así su interiorización. En las tareas 7.15, 7.16, 7.17, y 7.18 se les pidió que buscaran objetos en sus casas, cuyas medidas coincidiera con 1 mm^2 , 1 cm^2 , 1 dm^2 o 1 m^2 , respectivamente. Pretendíamos de este modo que los alumnos interiorizaran alguno de esos objetos como referentes de cantidades de superficies. En las tareas siguientes se les pidió que midieran diferentes cantidades de superficie de objetos que usualmente hay en las casas.

4.5.3. Desarrollo de la 5ª Sesión

La quinta sesión no fue presencial. Para su desarrollo, el viernes, 24 de Abril de 2008, se le repartió la Ficha 7 a cada alumno para que las realizaran individualmente durante el fin de semana. La ficha se recogió el 28 de Abril de 2008 a las 8:15, es decir, se les pidió a los alumnos que la entregaran antes de comenzar las clases; como en otras ocasiones se trataba de evitar que copiaran unos de otros.



4.6. Descripción de la 6ª Sesión

Esta sesión tenía una doble finalidad: por una parte recoger información sobre la evolución de la capacidad estimativa de los alumnos, y por otra parte, propiciar el uso de estrategias de comparación en las tareas de estimación.

4.6.1. Justificación

Después de una breve revisión de la Ficha 7, y tras observar que los errores conceptuales habían disminuido considerablemente creímos conveniente dar un paso más en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estimación. Para ello, en las Fichas 8 y 9 nos centramos en la estimación propiamente dicha e intentamos propiciar el uso de estrategias de estimación en medida.

i) Objetivos Instruccionales

Con esta sesión de trabajo pretendíamos:

- a.- Comprobar si el alumno adecua la unidad de medida a la cantidad a estimar.
- b.- Comprobar si el alumno tiene adecuadamente interiorizados referentes.
- c.- Comprobar si el alumno tiene interiorizadas las cantidades que le corresponden a las unidades de medida.
- d.- Comprobar si el alumno elige una estrategia adecuada.
- e.- Comprobar si el alumno sabe usar adecuadamente la estrategia elegida.
- f.- Valorar la precisión de la estimación.
- g.- Propiciar el uso de estrategias de comparación.
- h.- Comprobar si el alumno conoce la terminología implicada.

ii) Hipótesis sobre los Resultados a Obtener

La intención con que se realizó estas fichas es doble: por una parte para evaluar cómo va el proceso de aprendizaje, y por otra parte, para conseguir que los alumnos utilizaran la comparación como estrategia de estimación, especialmente con la magnitud superficie, y aprendieran a adecuar la unidad de medida o referente a utilizar con el objeto que estaban estimando. Por tanto, se espera que la Ficha 9 tenga menos errores y estimaciones más precisas que la Ficha 8.



4.6.2. Metodología

En esta sesión los alumnos trabajaron individualmente. La sesión de clase se dividió en dos partes: en la primera (25 min. aprox.) los alumnos realizaron individualmente la Ficha 8, y en la segunda parte de la clase (otros 25 min. aprox.) los alumnos realizaron la Ficha 9. Antes de repartir la Ficha 9 se les recogió la Ficha 8.

Así pues, las características de la Sexta Sesión son las siguientes:

Agrupamiento: Individualmente.

Materiales: Fichas 8 y 9; y un clip.

Recogida de datos: Fichas 8 y 9.

Temporalización: Una clase de 55 minutos.

Como en apartados anteriores, describimos las tareas, las caracterizamos y las justificamos.

i) Las Tareas

En la sexta sesión de trabajo se usaron las Fichas 8 y 9 que pasamos a describir a continuación:

- **Tareas de la Ficha 8:**

La Ficha 8 estaba formada por las siguientes tareas (para apreciar el formato en que se presentaron las tareas a los alumnos véase Apéndice C):

Tarea 8.1. ¿Cuánto mide aproximadamente la altura de la puerta de la clase?

Tarea 8.2. ¿Cuánto mide aproximadamente un clip de largo?

Tarea 8.3. ¿Cuánto mide aproximadamente la diagonal del folio sobre el que estás escribiendo?

Tarea 8.4. ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de tu agenda escolar?

Tarea 8.5. ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pared de la clase que tiene las ventanas (incluyendo las ventanas)?

Tarea 8.6. ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la Península Ibérica en el mapa? (Figura 5. 31)

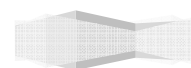




Figura 5. 31. Mapa Presentado en la Tarea 8.6.

- **Tareas de la Ficha 9:**

La Ficha 9 estaba formada por las mismas tareas que la Ficha 8. La diferencia es que en la Ficha 9 se les decía a los alumnos cómo debían abordar la tarea. De este modo, las tareas estaban enunciadas en los siguientes términos:

Tarea 9.1. Comparándola con tu propia estatura, ¿cuánto mide aproximadamente la altura de la puerta de la clase?

Tarea 9.2. Comparándolo con la anchura de tu dedo pulgar, ¿cuánto mide aproximadamente un clip de largo?

Tarea 9.3. Comparándolo con la anchura de un folio (21 cm), ¿cuánto mide aproximadamente la diagonal del folio sobre el que estás escribiendo?

Tarea 9.4. Comparándolo con la superficie de un DNI o tarjeta de crédito (45 cm²), ¿cuánto mide aproximadamente la superficie de tu agenda escolar?

Tarea 9.5. Comparándola con la superficie de la ventana, ¿cuánto mide aproximadamente la superficie de la pared de la clase que tiene las ventanas (incluyendo las ventanas)?

Tarea 9.6. Comparándola con la superficie de Portugal (1 cm²), ¿cuánto mide aproximadamente la superficie de la Península Ibérica en el mapa? (Figura 5. 31)

ii) Características de las Tareas

Todas las tareas incluidas en las Fichas 8 y 9 son tareas de estimación tipo A. En ellas se les pedía a los alumnos que dieran un resultado y que expresaran el razonamiento que les había llevado a dicho resultado. En la Tabla 5. 22 se pueden apreciar la relación de cada tarea con los objetivos concretos a alcanzar con dicha tarea.

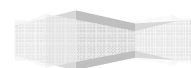


Tabla 5. 22. Relación Tarea-Objetivos Concretos en la Ficha 8 y 9.

Tarea	Clase de Tarea	Tipo	Magnitudes Trabajadas	Objetivos	
				Prioritarios	Secundarios
Ficha 8					
8.1	Estimación	A	Longitud	a, d, e, f	b, c, h
8.2	Estimación	A	Longitud	a, d, e, f	b, c, h
8.3	Estimación	A	Longitud	a, d, e, f	b, c, h
8.4	Estimación	A	Superficie	a, d, e, f	b, c, h
8.5	Estimación	A	Superficie	a, d, e, f	b, c, h
8.6	Estimación	A	Superficie	a, d, e, f	b, c, h
Ficha 9					
9.1	Estimación	A	Longitud	a, e, f, g	b, c, h
9.2	Estimación	A	Longitud	a, e, f, g	b, c, h
9.3	Estimación	A	Longitud	a, e, f, g	b, c, h
9.4	Estimación	A	Superficie	a, e, f, g	b, c, h
9.5	Estimación	A	Superficie	a, e, f, g	b, c, h
9.6	Estimación	A	Superficie	a, e, f, g	b, c, h

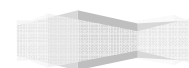
En la tabla Tabla 5. 23 recogemos las características de las tareas de la Ficha 8. Las tareas de la Ficha 9 tienen las mismas características. Como podemos apreciar, en las tres tareas de estimación, para cada magnitud, se propuso que estimaran cantidades de diferentes tamaños (pequeño, mediano y grande).

Tabla 5. 23. Características de las Tareas Tipo A de la Ficha 8.

Tarea	Medida exacta	Accesibilidad ^a	Forma	Tamaño ^b
8.1	2.05 m	No	Segmento rectilíneo	Grande
8.2	3.3 cm	Sí	Segmento rectilíneo	Pequeño
8.3	36.4 cm	Sí	Segmento rectilíneo	Mediano
8.4	3.15 dm ²	Sí	Rectangular	Mediano
8.5	27 m ²	No	Rectangular	Grande
8.6	5 cm ²	Sí	Irregular	Pequeño

a. Todas las cantidades son perceptibles visualmente. En esta columna indicamos si son manipulables o no.

b. Según las escalas establecidas en apartado 3.



iii) Otras Consideraciones

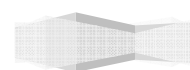
En la Ficha 8 se les pedía a los alumnos que realizaran diferentes estimaciones, para lo cual se empleó un lenguaje cotidiano, así, por ejemplo, en lugar de preguntar “estima cuánto mide la altura de la puerta de la clase” se redactó: “¿Cuánto mide aproximadamente la altura de la puerta de la clase?”. En esta ficha había tareas para que los alumnos realizaran estimaciones de cantidades de longitud y superficie utilizando diferentes unidades de medida, pues las cantidades a estimar eran de diferentes tamaños. La ficha tiene dos partes: en las primeras tres tareas (tareas 8.1, 8.2 y 8.3) se les pedía que estimaran cantidades de longitud, y en las tres siguientes (tareas 8.4, 8.5 y 8.6), se les pedía que estimaran cantidades de superficie. Las tareas no estaban ordenadas con respecto al tamaño de las cantidades a estimar. No se les puso ninguna restricción respecto de la unidad de medida a usar, pues queríamos comprobar si los alumnos sabían adecuar la unidad de medida a utilizar con la cantidad que estaban estimando.

La Ficha 9 tenía la misma estructura y las mismas tareas que la Ficha 8, la única diferencia es que en esta ficha se les sugería a los alumnos el modo en que debían realizar las tareas. De este modo, se les propuso que realizaran comparaciones con objetos cuya medida se suponía conocida, puesto que ya había sido trabajada anteriormente o simplemente se les indicaba.

4.6.3. Desarrollo de la 6ª Sesión

La sexta sesión se realizó el 14 de Mayo de 2008 en el aula ordinaria. Para el desarrollo de la misma se distribuyeron a los alumnos separados unos de otros. La sesión tuvo dos partes o fases. En primer lugar se les repartió la Ficha 8 y se les explicó cómo debían contestarla. Se insistió en que debían explicar cómo habían llegado a la solución, explicando el desarrollo o razonamiento que hubiesen utilizado. Tras 20 minutos realizando la ficha, se les recogió. A continuación se repartió individualmente la Ficha 9. Algunos alumnos protestaron porque se trataba de realizar las mismas tareas. Se les explicó que en este caso se trataba de realizar las tareas siguiendo las indicaciones²⁴ que se le daban en el mismo. Para rellenar esta ficha se les dejó otros 20 minutos.

²⁴ En las tareas de la Ficha 9 se indica el referente que deben utilizar para, mediante la comparación, dar una estimación de la cantidad pedida.



No fue posible realizar una pequeña puesta en común al final de la clase, puesto que no quedó tiempo. Sin embargo, algunos alumnos expresaron su desmotivación con este tipo de tareas, pues según decían les resultaban “aburridas y repetitivas”.

4.7. Descripción de la 7ª Sesión

El principal objetivo de esta sesión de trabajo era motivar a los alumnos mostrándoles la importancia de la estimación en la vida cotidiana. La utilidad de la estimación en tareas que por carencia de medios, limitaciones temporales o en el acceso a la cantidad hacen de la estimación en medida una herramienta que se usa frecuentemente en tareas de la vida cotidiana. Para intentar motivar más a los alumnos, ante el desánimo detectado en la sesión anterior, se cambió el diseño de las preguntas.

4.7.1. Justificación

Después de revisar las Fichas 8 y 9, y comprobar que el número de errores conceptuales había disminuido sensiblemente, nos planteamos realizar tareas de consolidación de los aprendizajes adquiridos hasta el momento. Por tanto, buscamos tareas que motivaran para los alumnos, y salir de la rutina de las fichas realizadas hasta el momento para pedirles la realización de un “proyecto”, en el cuál tenían que realizar estimaciones de diversas cantidades de longitud y de superficie.

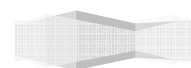
i) Objetivos Instruccionales

Con la realización de la Ficha 10 pretendíamos que los alumnos alcanzaran los siguientes objetivos:

- a.- Valorar la utilidad de la estimación.
- b.- Propiciar el uso de estrategias de comparación multiplicativa.
- c.- Adecuar la unidad de medida a la cantidad a estimar.

ii) Hipótesis sobre los resultados a obtener

Esperábamos que los alumnos realizaran la ficha con cierta coherencia, es decir, que adecuen las unidades de medida a lo que tienen que estimar y que utilicen estrategias de estimación, principalmente la comparación para realizar estimaciones.



4.7.2. Metodología

Durante esta sesión los alumnos realizaron individualmente la Ficha 10. Así pues, las características de la séptima sesión fueron las siguientes:

Agrupamiento: Individualmente.

Materiales: Ficha 10.

Recogida de datos: Ficha 10.

Temporalización: Una clase de 55 min.

A continuación describimos las tareas, las caracterizamos y justificamos su elección.

i) Las Tareas

Las tareas de la Ficha 10 estaban presentadas como un proyecto que los alumnos debían llevar a cabo. Dicho proyecto tenía cuatro pasos o fases. A continuación describimos brevemente en qué consistían las tareas (para apreciar el formato en que se presentaron las tareas a los alumnos véase Apéndice C):

El proyecto lo denominamos “compra de un piso”. En las tareas que se le proponían a los alumnos para realizar dicho proyecto tenían que realizar estimaciones de diferentes cantidades de longitud y superficie. El uso como excusa de este proyecto pretendía mostrar la utilidad de la estimación como herramienta que se usa habitualmente en la vida diaria.

El primer paso del proyecto consistía en estimar la distancia entre dos puntos de Roquetas de Mar siguiendo una trayectoria determinada. Para ello, se les explicó que calles formaban parte de dicha trayectoria y se les puso un mapa informativo. No se les indicó la escala del mapa, pues no queríamos que la utilizaran ni que nos dieran la distancia en el mapa.

Las tareas de la segunda fase del proyecto tenían por objetivo localizar el hipotético piso que se iban a comprar. Para ello se les pedía que estimaran la altura del piso (se les dio una representación del edificio) y que estimaran la superficie de parte de la fachada del edificio donde estaba el hipotético piso a comprar.

En la tercera fase del proyecto se les pedía que estimaran diversas cantidades de superficie, tales como la superficie total del piso o la superficie de un cuarto de baño. Para ello, se les dio el plano del piso (sin indicar escala del mismo). Tan sólo se les

indicó las dimensiones de la superficie del salón-comedor para que lo usaran a modo de referente.

En la cuarta fase del proyecto se les pedía que estimaran las superficies de las paredes de un dormitorio, y la superficie de todas las paredes. Aquí usamos la excusa de que necesitábamos saber la superficie del piso para pintarlo.

A los alumnos no se les indicaron las escalas, pues nuestro objetivo no era trabajar con escalas, sino que aplicaran estrategias de comparación multiplicativa..

ii) Características de las Tareas

En la Tabla 5. 24 se puede apreciar la relación de cada tarea con los objetivos concretos a alcanzar con dicha tarea.

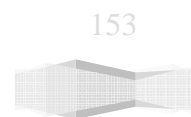
Tabla 5. 24. Relación Tarea-Objetivos Concretos en la Ficha 5.

Tarea	Clase de Tarea	Tipo	Magnitudes Trabajadas	Objetivos	
				Prioritarios	Secundarios
10.1	Estimación	A	Longitud	a	c
10.2	Estimación	A	Ambas	a, b	c
10.3	Estimación	A	Superficie	a, b	c
10.4	Estimación	A	Superficie	a, b	c

iii) Otras Consideraciones

La Ficha 10 está organizada a modo de proyecto de compra de un piso. Dicho proyecto esta diferenciado en cuatro partes en las que se requería al estudiante realizar estimaciones de diferentes cantidades: de longitud a partir de determinados referentes que se le dan en el enunciado del problema, en la primera parte (“localización”); de longitud y de superficie, en la segunda parte; y de superficie en la tercera y cuarta parte. La presentación de las tareas según este modelo permite:

- utilizar la resolución de problemas como método de consolidación de aprendizajes, pues el proyecto planteado aparece formulado como un problema;
- motivar a los alumnos con la temática planteada, pues estaba de actualidad;
- propiciar el uso de estrategias de comparación multiplicativa,
- y promover la valoración de la estimación de cantidades continuas como instrumento útil en la vida cotidiana.



4.7.3. Desarrollo de la 7ª Sesión

La séptima sesión se consumó el 30 de Mayo de 2008. Para el desarrollo de la sesión se utilizó el aula ordinaria. Como en anteriores sesiones, se comenzó repartiendo la Ficha 10, y se les explicó que debían rellenarla individualmente. Antes de comenzar a rellenar la ficha se les explicó cada una de las tareas de la misma, pues se trataba de tareas distintas de las que habían trabajado en las fichas anteriores. Se insistió en que escribieran en los folios cualquier razonamiento que realizaran para llegar a cada una de las respuestas.

4.8. Descripción de la 8ª Sesión: Evaluación Final

La octava sesión tuvo un carácter evaluativo de la evolución de los alumnos. Se trataba de comprobar qué incidencia habían tenido los procesos de enseñanza-aprendizaje difundidos en las diferentes sesiones en los alumnos.

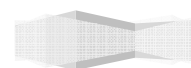
4.8.1. Justificación

Para analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje se realizó la Evaluación Final. Dicha Evaluación Final consistía en la realización de la misma ficha que rellenaron en la Evaluación Inicial, para poder analizar y comparar cualitativa y cuantitativamente la evolución de la capacidad estimativa de los alumnos.

i) Objetivos Instruccionales

Con la Evaluación Final pretendíamos:

- a.- Comprobar si el alumno percibe las cantidades a estimar.
- b.- Comprobar si el alumno conoce la terminología implicada.
- c.- Comprobar si el alumno adecua la unidad de medida a la cantidad a estimar.
- d.- Comprobar si el alumno tiene adecuadamente interiorizados referentes.
- e.- Comprobar si el alumno tiene interiorizadas las cantidades que le corresponden a las unidades de medida.
- f.- Comprobar si el alumno elige una estrategia adecuada.
- g.- Comprobar si el alumno sabe usar adecuadamente la estrategia elegida.
- h.- Valorar la precisión de la estimación.



i.- Comparar los resultados con los obtenidos en la Evaluación Inicial.

ii) Hipótesis sobre los Resultados a Obtener

Esperábamos que los alumnos hubieran mejorado la adecuación de las unidades de medida a la cantidad a estimar, especialmente en el caso de la magnitud superficie. También esperábamos que se hubiese producido una notable mejoría en la interiorización de las unidades de medida, en la interiorización de referentes y en el uso de estrategias, y que esta mejoría tuviera su repercusión en una mejor precisión de las estimaciones realizadas por los alumnos en las diferentes tareas.

4.8.2. Metodología

Los alumnos realizaron la ficha a modo individual, para lo cual se dispuso a los alumnos sentados separados unos de otros, de modo que no se pudieran copiar y se repartió a cada alumno la ficha de Evaluación Final. Lo único que se les permitió tener eran útiles de escritura (bolígrafos).

Materiales: Ficha de Evaluación Final y útiles de escritura.

Agrupamiento: Individual.

Recogida de datos: Ficha de Evaluación Final

Temporalización: Una sesión de 55 min.

i) Las Tareas

Como la Ficha de Evaluación Final es idéntica a la Ficha de Evaluación Inicial, las tareas ya están descritas en el [apartado 4.1.4](#).

ii) Otras Consideraciones

La Ficha de Evaluación Final es idéntica a la Ficha de Evaluación Inicial a fin de comparar cuantitativa y cualitativamente la evolución del aprendizaje de los alumnos. Esto tiene una ventaja y un inconveniente: la ventaja es que se puede realizar una comparación directa de la respuesta de los alumnos a cada tarea; de este modo se elimina el hándicap que hubiese sido incluir tareas en la Evaluación Final con otro grado de dificultad distinto del que tenían las tareas de la Evaluación Inicial. Como inconveniente tenemos el hecho de que la Evaluación Inicial por sí misma produjo cierto aprendizaje en los alumnos, y en este caso, de presentarse cierta mejoría en las

respuestas de los alumnos podría ser debido a este . No obstante, esta circunstancia se ve mermada por la separación de seis meses en ambas evaluaciones.

4.8.3. Desarrollo de la 8ª Sesión

La octava sesión tuvo lugar el 9 de Junio de 2008. Para el desarrollo de esta sesión se separó a los alumnos para que la realizaran individualmente. Se dispusieron los objetos sobre los que debían realizar estimaciones por la clase, en lugares visibles. Se les repartió la Ficha de Evaluación Final y se les explicó cómo debían realizarla. Tras 50 minutos se recogieron las fichas, dándoles tiempo a todos alumnos para contestar todas las preguntas.

4.9. Recogida de Datos Complementaria: Entrevistas Individuales

La novena sesión se realizó sólo con tres alumnos. Consistió en una entrevista individual con cada uno de ellos para que explicaran más detalladamente algunas respuestas que habían dado en la ficha de Evaluación Final.

4.9.1. Justificación

Tras una breve revisión de las respuestas dadas a la ficha de Evaluación Final observamos que había alumnos que continuaban teniendo importantes errores conceptuales, tales como utilizar unidades de medida inadecuadas o confundir la magnitud a estimar, principalmente en las tareas de estimación de superficie. Ante esta situación inesperada nos planteamos entrevistar a algunos de estos alumnos para tratar de detectar dónde estaba la dificultad que les llevaba a incurrir en errores de este tipo.

Los alumnos seleccionados para ser entrevistados individualmente fueron: A5, A6 y A23. Los motivos para seleccionar a cada uno de estos alumnos fueron los siguientes:

- El alumno A5 confundía superficie con longitud en alguna de las tareas, utilizando unidades longitudinales para estimar superficies.
- El alumno A6 confundía superficie con longitud en todas las tareas de la Evaluación Final.
- El alumno A23 no indica unidad de medida cuando estima superficies en alguna de las tareas.

Además, la mayoría de las estimaciones realizadas por estos alumnos son muy deficientes en el sentido de que incurren en altos porcentajes de error.

i) Objetivos Instruccionales

Los objetivos que nos planteamos con las entrevistas individuales fueron los siguientes:

- a.- Comprobar qué conocimiento tienen determinados alumnos relativos a la interiorización de unidades de medida de longitud y/o superficie.
- b.- Indagar sobre qué dificultades subyacían a determinados errores conceptuales que habían surgido en la Evaluación Final.

ii) Hipótesis sobre los Resultados a Obtener

Esperábamos que los errores que habían tenido los alumnos en la sesión de Evaluación Final fueran debidos a despistes. Esperábamos que los alumnos diferenciaran correctamente las cantidades de ambas magnitudes, que supieran adecuar la unidad de medida a la magnitud a estimar y que tuvieran una interiorización adecuada de las unidades de medida de ambas magnitudes.

4.9.2. Metodología

Los alumnos seleccionados fueron llamados uno a uno al departamento de matemáticas, lugar donde se realizaron las entrevistas individuales.

Materiales: Respuesta de los alumnos en la Ficha de Evaluación Final, folios y útiles de escritura.

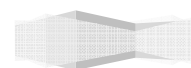
Agrupamiento: Individual (entrevistas unipersonales).

Recogida de datos: Respuestas a algunas preguntas recogidas en folios, y grabación en video de las entrevistas.

Temporalización: Aproximadamente 15 minutos por alumno.

4.9.3. Desarrollo de las Entrevistas

La novena sesión tuvo lugar el 16 de junio de 2008. Para el desarrollo de esta sesión se fue llamando uno a uno a los alumnos seleccionados para entrevistarlos en el departamento de matemáticas con la excusa de preguntarles sobre las respuestas que habían dado a la ficha de Evaluación Final.



Los alumnos contestaron a todas las preguntas, en algunos casos utilizaban lápiz y papel en otros, utilizando la pizarra. La transcripción de las entrevistas está recogida en el Apéndice E.

4.10. Implicación de las Componentes de la Estimación en Medida en el Diseño de las Sesiones

Ya hemos puesto de manifiesto la importancia de las componentes de la estimación en medida en el diseño de la instrucción con los alumnos. Para ilustrar esta relación recogemos en la Tabla 5. 25 la relación que existe entre las distintas componentes y los objetivos instruccionales que nos planteamos con el proceso de enseñanza-aprendizaje. En dicha tabla hemos recogido esta relación para las sesiones que no eran de control (es decir, salvo para las sesiones 1ª, 8ª y 9ª). Las letras indican los objetivos instruccionales concretos de cada sesión de trabajo. Como se puede apreciar por la distribución de las letras, las componentes en las que más incidimos son las componentes asociadas a la estimación (CEst), pues son el foco de nuestra investigación, y las componentes en las que menos incidimos son las componentes asociadas a la magnitud (CMa). No obstante, el hecho de que nuestro objetivo no esté en trabajar dichas componentes no implica que el alumno no pueda ponerlas en práctica en cualquier momento.

La distribución de las letras nos indica que hemos seguido varias fases en las que se han ido incorporando nuevas componentes al trabajo con los alumnos. Estas fases podrían ser las siguientes:

Fase I: Percepción de la cantidad.

Fase II: Elección/Adecuación de la unidad de medida.

Fase III: Interiorización de referentes y unidades de medida.

Fase IV: Estrategias de comparación.

La primera fase está formada por las dos primeras fichas de trabajo. En ella, pretendíamos que los alumnos percibieran cantidades de las dos magnitudes implicadas y las diferenciaran de otras cualidades de los objetos en las que se les presentaba. Aunque inicialmente creíamos que los alumnos tenían sobradamente adquiridas las componentes asociadas a la magnitud, la Evaluación Inicial nos mostró que no era así, especialmente en el caso de la magnitud superficie donde surgieron errores consecuencia de la confusión de la magnitud a estimar.



En la segunda fase, que comenzó con el trabajo de la Ficha 3, incorporamos la medida centrándonos en tareas de elección de la unidad de medida para que fuese acorde a la magnitud y a la cantidad a estimar.

Con la Ficha 5 se inició la tercera fase que tenía por finalidad que los alumnos interiorizaran referentes y las unidades de medida.

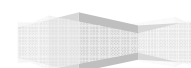
Finalmente se incorporaron, a partir de la Ficha 8, las estrategias de comparación para la estimación en medida, pues la base de la estimación es la comparación. Toda estimación precisa de un proceso de comparación, bien con un referente o con alguna unidad de medida de la propia magnitud a estimar o de otra magnitud para utilizarla en técnicas indirectas de estimación (uso de fórmulas).

Tabla 5. 25. Relación de las Componentes de la Estimación en Medida con los Objetivos Instruccionales de cada Sesión.

Componentes	2 ^a		3 ^a		4 ^a	5 ^a	6 ^a		7 ^a	
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
Componentes asociadas a la magnitud										
CMa1	a	a								
CMa2										
CMa3	b	b								
CMa4										
CMa5										
CMa6										
CMa7										
CMa8										
CMa9										
CMa10	c	c					d			
Componentes asociadas a la medida										
CMe1										
CMe2			e	e			f			
CMe3			f	f			g			
CMe4						a				
CMe5			g	g	c		h	a	a	c
CMe6										
CMe7			d	d	b		a			



Componentes	2 ^a				3 ^a	4 ^a	5 ^a	6 ^a		7 ^a
	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10
CMe8										
CMe9										
CMe10							i			
CMe11							d			
Componentes asociadas a la estimación										
CEst1					a,d	d	b,c,e	b	b	
CEst2					b	c	a	c	c	
CEst3								d	g	b
CEst4								e	e	
CEst5										
CEst6						b				
CEst7										a
CEst8								h	h	



CAPÍTULO 6: ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LA EVALUACIÓN INICIAL Y FINAL

En este capítulo analizamos la capacidad estimativa de los alumnos a partir de las respuestas dadas en las fichas de Evaluación Inicial y Final las cuales recordamos que eran idénticas. Estudiamos los datos desde un punto de vista cuantitativo basado en el porcentaje de error cometido en las estimaciones realizadas. En parte del análisis utilizamos dicho porcentaje sin aplicar valor absoluto para así estudiar una característica de la estimación que nos interesa: si se produce por defecto (subestimación) o por exceso (sobrestimación). No obstante, vamos a utilizar el porcentaje del error en valor absoluto cuando nos interese comparar la capacidad estimativa que tienen los alumnos en distintas tareas o para comparar subgrupos de alumnos; al considerar dicho porcentaje evitamos que se produzcan “compensaciones” debidas al signo del porcentaje de error. El porcentaje de error nos permite detectar si hay tendencia a la subestimación/sobrestimación, mientras que el porcentaje del error en valor absoluto nos va a servir como referencia cuantitativa para valorar la capacidad estimativa de los alumnos, e indirectamente, las dificultades intrínsecas que pueden subyacer a una determinada tarea de estimación. Con el análisis cuantitativo pretendemos dar respuesta a la cuestión: *qué ocurre*.

En el análisis que se recoge en este capítulo nos centramos en los resultados cuantitativos de la Evaluación Inicial y Final diferenciando entre las tareas de estimación de longitudes y las de superficie. Dichos resultados corresponden a las tareas tipo A en las cuales los alumnos debían expresar un resultado y el razonamiento que les lleva al mismo. Como cierre al capítulo realizamos una comparación entre los resultados de las dos evaluaciones.

Para realizar el análisis indicado establecemos criterios para decidir qué resultados considerar, limitándonos a aquellos para los que podemos calcular el porcentaje de error. Para estos resultados se estudia si hay predisposición a la subestimación o a la sobrestimación la cual se contrasta mediante un test de hipótesis. El análisis estadístico que se realiza está orientado al estudio de dos cuestiones: comprobar en cada tarea si existe tendencia a la subestimación/sobrestimación, y valorar la dificultad que supone



cada tarea para los alumnos en términos de precisión de los resultados respecto del valor o medida exacta. Para este análisis no consideramos los valores estadísticamente atípicos. También, se analiza si la nacionalidad es un factor diferenciador en la capacidad estimativa de los alumnos; es posible que un mayor o menor dominio de la lengua española o posibles experiencias previas relativas a la medida puedan generar diferencias apreciables entre otras nacionalidades y la española.

1. CRITERIOS PARA LA CONSIDERACIÓN DE RESULTADOS

El análisis de las respuestas dadas por los alumnos a las tareas tipo A genera la siguiente casuística:

- Alumnos que expresan como resultado un valor numérico acompañado de una unidad de medida adecuada.
- Alumnos que expresan como resultado un valor con una unidad de medida no coherente con la magnitud a la que se refería la tarea.
- Alumnos que expresan como resultado un valor numérico sin indicar unidad de medida.
- Alumnos que expresan como resultado un valor estadísticamente atípico.
- Alumnos que expresan como resultado de la estimación un intervalo.
- Alumnos que expresan más de un resultado.
- Alumnos que no dan respuesta a la tarea de estimación.
- Alumnos que, en tareas de estimación de superficies, expresan como resultado un producto de longitudes o una indicación de sus dimensiones longitudinales (normalmente, expresando largo y ancho).

Para realizar una comparación de la capacidad estimativa de los alumnos, adoptamos los siguientes criterios:

*1. Consideramos solo aquellos resultados que estén expresados con una unidad coherente con la magnitud a estimar.

*2. En los casos en que no se especifique unidad de medida en el resultado, consideraremos sólo aquellos que la unidad esté incluida en el razonamiento.



*3. No consideraremos los valores estadísticamente atípicos²⁵.

#4. Cuando un alumno exponga como resultado un intervalo consideramos el punto medio de dicho intervalo.

#5. Si expresa más de un resultado en la respuesta, consideramos el más favorable.

*6. Cuando un alumno no conteste no será considerados.

#7. Si una respuesta expresa una estimación de la magnitud superficie como producto de longitudes, consideramos el resultado que se obtendría al multiplicar dichas longitudes.

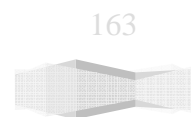
El asterisco (*) delante del respectivo criterio indica que es un valor no considerado y la almohadilla (#) indica que es un valor que se va a considerar con la correspondiente rectificación o matización. Para el cálculo del porcentaje de error, en cada tarea, convertimos todas las respuestas consideradas a la misma unidad de medida.

2. CATEGORIZACIÓN DE RESPUESTAS

A partir de los criterios descritos en el apartado anterior, realizamos una primera clasificación de las respuestas de tipo A en: *Respuestas Consideradas (RC)* y *Respuestas No Consideradas (RNC)*. El grupo de *Respuestas Consideradas* lo subdividimos, a su vez, en *Respuestas o Estimaciones Aceptables (RA)*, entendiendo por aceptable una estimación cuyo porcentaje de error en valor absoluto no supere el 30%; y *Respuestas o Estimaciones No Aceptables (RNA)*, que son aquellas estimaciones cuyo porcentaje de error en valor absoluto supere el 30%.

Como se muestra en la Figura 6. 1 volvemos a subdividir estas subcategorías en varios grupos. Las *Estimaciones Aceptables* quedan subdivididas en: *Subestimaciones Aceptables (SubA)*, *Sobrestimaciones Aceptables (SobA)*, con el mismo criterio anterior y estimaciones o respuestas que coinciden con la *Medida Exacta (ME)*. Fragmentamos las *Estimaciones No Aceptables* en: *Subestimaciones No Aceptables (SubNA)*, y *Sobrestimaciones No Aceptables (SobNA)*.

²⁵ Como valores atípicos estamos considerando aquellos que quedan fuera del intervalo comprendido entre el primer cuartil menos 1.5 veces el rango intercuartílico, y el tercer cuartil más 1.5 veces el rango intercuartílico ($[Q_1 - 1.5 \cdot IQR, Q_3 + 1.5 \cdot IQR]$)



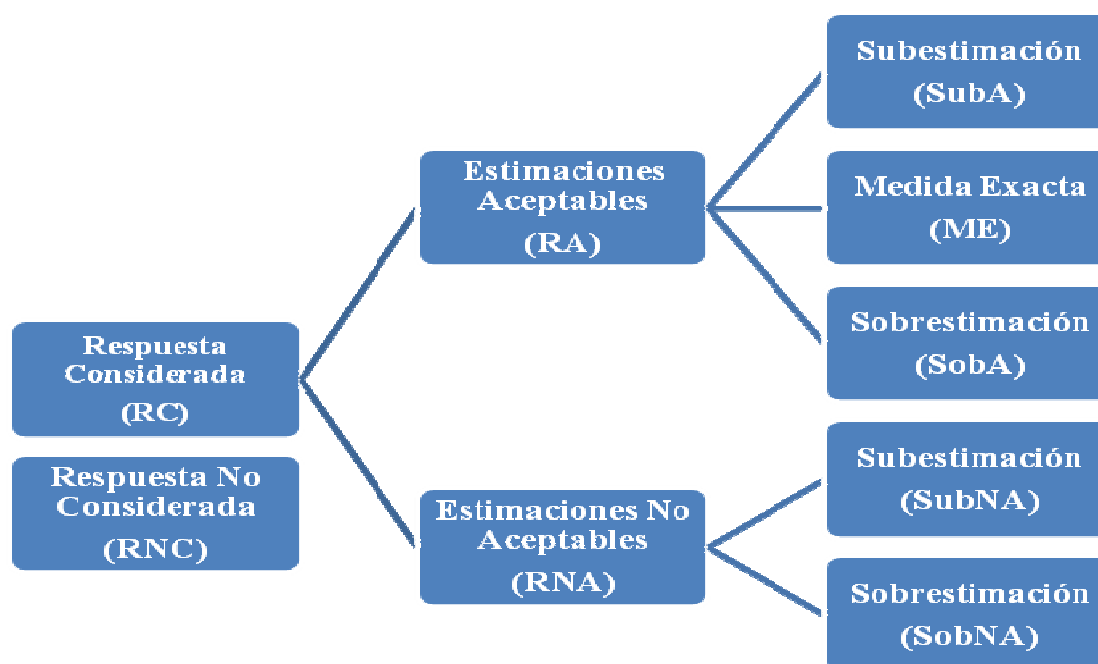


Figura 6. 1. Esquema de Clasificación de Respuestas a Tareas Tipo A.

La clasificación expuesta en la Figura 6. 1 nos permite estudiar las respuestas de los alumnos en tres clasificaciones:

1ª Clasificación: Determinando si se puede considerar el resultado

Nos permite clasificar las respuestas en dos categorías: RC o RNC.

2ª Clasificación: Determinando si la estimación es aceptable

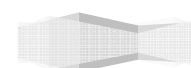
Esta clasificación sólo es aplicable para las respuestas consideradas (RC), puesto que para las no consideradas no tiene sentido. Clasifica las respuestas en dos categorías: RA o RNA.

3ª Clasificación: Determinando si hay subestimación o sobrestimación

Al igual que la anterior, sólo es aplicable a las repuestas consideradas (RC). Clasifica las respuestas en cinco categorías: SubNA, SubA, ME, SobA, y SobNA.

3. ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LA EVALUACIÓN INICIAL

Para el análisis cuantitativo de la Evaluación Inicial realizamos por separamos el análisis de las tareas de estimación de longitudes de las de superficie, cada uno de ellos comprende cinco fases. Posteriormente realizamos una comparación de los resultados obtenidos para ambas magnitudes.



3.1. Análisis de las Tareas de Estimación de Longitudes

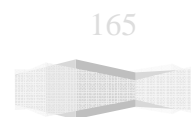
El análisis consta de cinco fases: en una primera fase determinamos los resultados a considerar utilizando los criterios descritos en el apartado 1; en segundo lugar los clasificamos según los tres niveles de determinación expuestos en el apartado 2; en tercer lugar, realizamos un análisis estadístico con los datos considerados; en cuarto lugar estudiamos si la nacionalidad influye en las estimaciones de los alumnos; y, finalmente, extraemos conclusiones de las fases anteriores.

3.1.1. Consideración de Resultados

En la Tabla 6. 1 recogemos las respuestas dadas por los alumnos; hemos unificado la unidad de medida para cada tarea y, para las respuestas no consideradas hemos indicado el criterio que ha motivado su descarte de entre los señalados en el apartado 1.

Tabla 6. 1. Datos Considerados, Valores Atípicos y Porcentaje de Error para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.

Alumno	Tarea I.1		Tarea I.3		Tarea I.5		Tarea I.7	
	Datos (m)	P. e (%)	Datos (cm)	P. e (%)	Datos (cm)	P. e (%)	Datos (m)	P. e (%)
A1	1	-28,6	2	0	8	-14,9	1,5	-50,0
A2	1,5	7,1	#5: 2	0	9	-4,3	2,6	-13,3
A3	1,5	7,1	*3: 0,5	-75	0,02	-99,8	3	0,0
A4	2	42,9	2	0	5	-46,8	3	0,0
A5	1	-28,6	*3: 100	4900	2	-78,7	1,5	-50,0
A6	2	42,9	1,5	-25	6	-36,2	3	0,0
A7	1,8	28,6	1,5	-25	*3: 300	3091,5	*2	
A8	1,5	7,1	5	150	10	6,4	2,5	-16,7
A9	1,5	7,1	*3: 10	400	2,5	-73,4	2,5	-16,7
A10	1,1	-21,4	4	100	12	27,7	3	0,0
A11	1,1	-21,4	2	0	7	-25,5	2,5	-16,7
A12	1,8	28,6	#5: 2	0	#5: 4	-57,4	#5: 3	0,0
A13	2	42,9	2	0	6,5	-30,9	4	33,3
A15	2	42,9	3	50	5	-46,8	2	-33,3
A16	1	-28,6	3	50	7	-25,5	2	-33,3
A17	1,5	7,1	2	0	10	6,4	2,5	-16,7



Alumno	Tarea I.1		Tarea I.3		Tarea I.5		Tarea I.7	
	Datos (m)	P. e (%)	Datos (cm)	P. e (%)	Datos (cm)	P. e (%)	Datos (m)	P. e (%)
A18	1,5	7,1	5	150	10	6,4	2,5	-16,7
A19	*1		2	0	5	-46,8	1,2	-60,0
A21	1,5	7,1	2,5	25	9	-4,3	4	33,3
A22	*2		*6		7	-25,5	2	-33,3
A23	*2		2	0	#4: 8,5	-9,6	*2	
A24	1,5	7,1	3	50	2	-78,7	2	-33,3
A25	1,5	7,1	2	0	5,5	-41,5	3,5	16,7
A26	1	-28,6	#5: 2	0	#5: 7	-25,5	#5: 2	-33,3
A27	2,5	78,6	2	0	4,5	-52,1	3,5	16,7
A28	1	-28,6	*6		8	-14,9	2	-33,3

En los resultados de las tareas de estimación de longitudes 11 respuestas de un total de 104 no se han considerado (véase Tabla 6. 2), lo que supone un 10.58% del total de tareas. Estas 11 tareas corresponden a 8 alumnos. El número de resultados no considerados oscila entre uno para la tarea I.5 y cinco en la tarea I.3. Los motivos por los que descartamos estos resultados en el análisis cuantitativo son diversos (véase **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**): en la tarea I.1, un alumno no utiliza una unidad coherente con la magnitud a estimar y dos alumnos no especifican la unidad de medida; en la tarea I.3, tres respuestas son estadísticamente atípicas y dos alumnos no responden; en la tarea I.5, un alumno da un valor estadísticamente atípico; y en la tarea I.7 dos alumnos no indican la unidad de medida.

Tabla 6. 2. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 1ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.

Categoría	Tarea				Total
	I.1	I.3	I.5	I.7	
RC	23	21	25	24	93
RNC	3	5	1	2	11



3.1.2 Clasificación de los Resultados Considerados

La primera clasificación de las respuestas la hemos realizado en el apartado anterior (determinando si se puede considerar o no). A continuación realizamos la segunda y tercera clasificación que se aplican sólo a los resultados considerados.

i) Determinando si la estimación es aceptable.

De las 93 respuestas consideradas tenemos 59 respuestas aceptables (supone un 56.73% del total de tareas) y 34 no aceptables (32.69% del total de tareas). Las tareas que presentan más estimaciones no aceptables (de entre las respuestas consideradas, RC) son la tarea I.5 y la tarea I.7, ambas con 12 y 11 respuestas no aceptables respectivamente (véase Tabla 6. 3), siendo inferior a 6 la frecuencia de respuestas no aceptables en las otras dos tareas. En la tarea I.5 es posible que la estimación del largo del pegamento en barra presente una dificultad asociada al valor numérico que el alumno tiene que estimar cuando utiliza el centímetro como unidad de medida. La estimación del largo de la cuerda, tarea I.7, tiene una dificultad asociada a la forma en la que se presenta el objeto a los alumnos, pues se les expuso la cuerda colgada de los extremos formando una curva (catenaria).

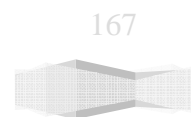
Tabla 6. 3. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 2ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.

Categoría	Tarea				Total
	I.1	I.3	I.5	I.7	
RA	18	15	13	13	59
RNA	5	6	12	11	34

ii) Determinando si hay subestimación/sobrestimación.

Clasificamos las estimaciones de los estudiantes según si se trata de una sobreestimación o subestimación (véase la Tabla 6. 4). Esta clasificación pone de manifiesto la influencia del tipo de tarea en la subestimación/sobrestimación tanto para las estimaciones aceptables como para las no aceptables. Una primera observación es que hay tareas (tarea I.3 y tarea I.5) en las que los alumnos “aciertan” con la medida exacta²⁶ con mayor frecuencia, debido a que su medida es un número entero de

²⁶ Véase medidas exactas en [tabla_](#).



unidades, 2 centímetros y 3 metros. Así mismo se observa que en las tareas I.5 e I.7 es más frecuente la subestimación, mientras que en las tareas I.1 e I.3 es más frecuente la sobreestimación. En Figura 6. 2 se representan gráficamente los resultados anteriores sin distinguir entre estimaciones aceptables y no aceptables.

Tabla 6. 4. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según el 3er Nivel de Análisis, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.

Categoría	Tarea				Total
	I.1	I.3	I.5	I.7	
SubNA	0	0	9	9	18
SubA	7	2	9	6	24
ME	0	12	0	5	17
SobA	11	1	4	2	18
SobNA	5	6	3	2	16

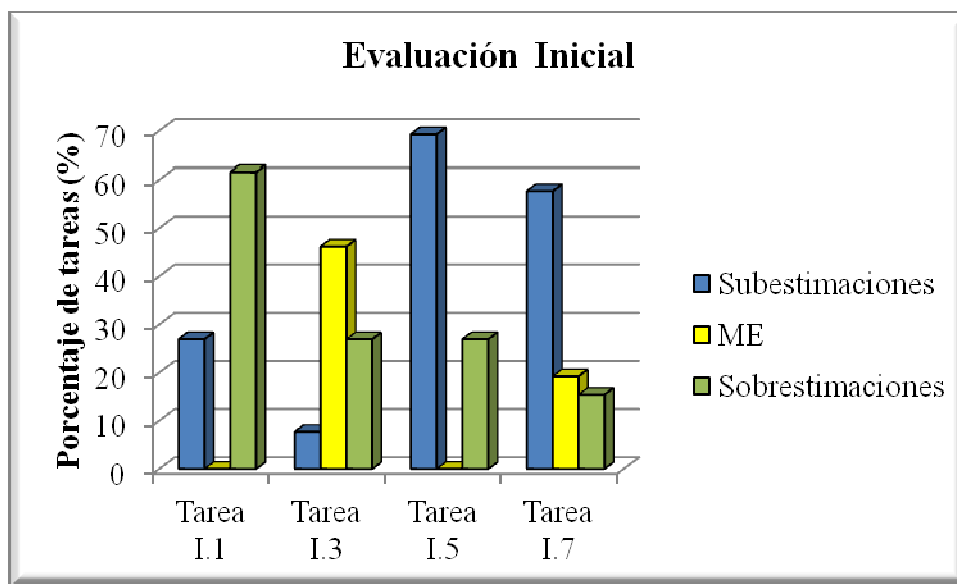


Figura 6. 2. Frecuencias Relativas en Porcentaje de la Subestimación/Sobreestimación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.

3.1.3. Análisis Estadístico

A partir del porcentaje de error de los datos considerados (RC) obtenemos los estadísticos que recoge la Tabla 6. 5.

Tabla 6. 5. Estadísticos Descartando Valores Atípicos para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.

Tarea



Estadístico	I.1	I.3	I.5	I.7
Tamaño muestral	23	21	25	24
Media aritmética	1.51	2.5	6.42	2.55
Desviación típica	0.41	1.01	2.93	0.75
Medida exacta	1.4 (m)	2 (cm)	9.4 (cm)	3 (m)
Porcentaje medio de error ²⁷	8.08%	25%	-31.69%	-14.86%
Porcentaje medio del error en valor absoluto ²⁸	24.22%	29.76%	35.44%	23.19%

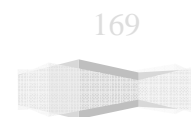
En la Tabla 6. 5, a través del porcentaje de error, se reitera la tendencia a la sobreestimación o subestimación para las tareas previamente mencionadas.

El diagrama de cajas y bigotes (Figura 6. 3) nos confirma esta tendencia a la subestimación en la tarea I.5, pues la medida exacta (9.4 cm) está claramente por encima del intervalo intercuartílico, mostrando que la mayor parte de las estimaciones fueron en este caso subestimaciones. Igualmente en el diagrama de cajas y bigotes de la tarea I.7 se observa que el valor exacto (3 m) está en el borde superior de la caja, luego coincide con el tercer cuartil, sugiriendo que hay tendencia a la subestimación. En la tarea I.3 la medida exacta (2 cm) está en el borde inferior de la caja, ya que coincide con el primer cuartil, lo cual muestra que la mayor parte de las estimaciones fueron sobrestimaciones. En cambio, en la tarea I.1 el valor exacto (1.4 m) entraría dentro de la caja o intervalo intercuartílico, por tanto, la tendencia a la sobrestimación es muy leve.

Estas tendencias parecen por tanto asociadas al tamaño de las cantidades en relación a la unidad de medida utilizada; hay subestimación en las mayores y sobreestimación en las menores.

²⁷ Media aritmética del porcentaje de error, considerando el porcentaje de error sin valor absoluto.

²⁸ Media aritmética del porcentaje de error, considerando el porcentaje de error en valor absoluto.



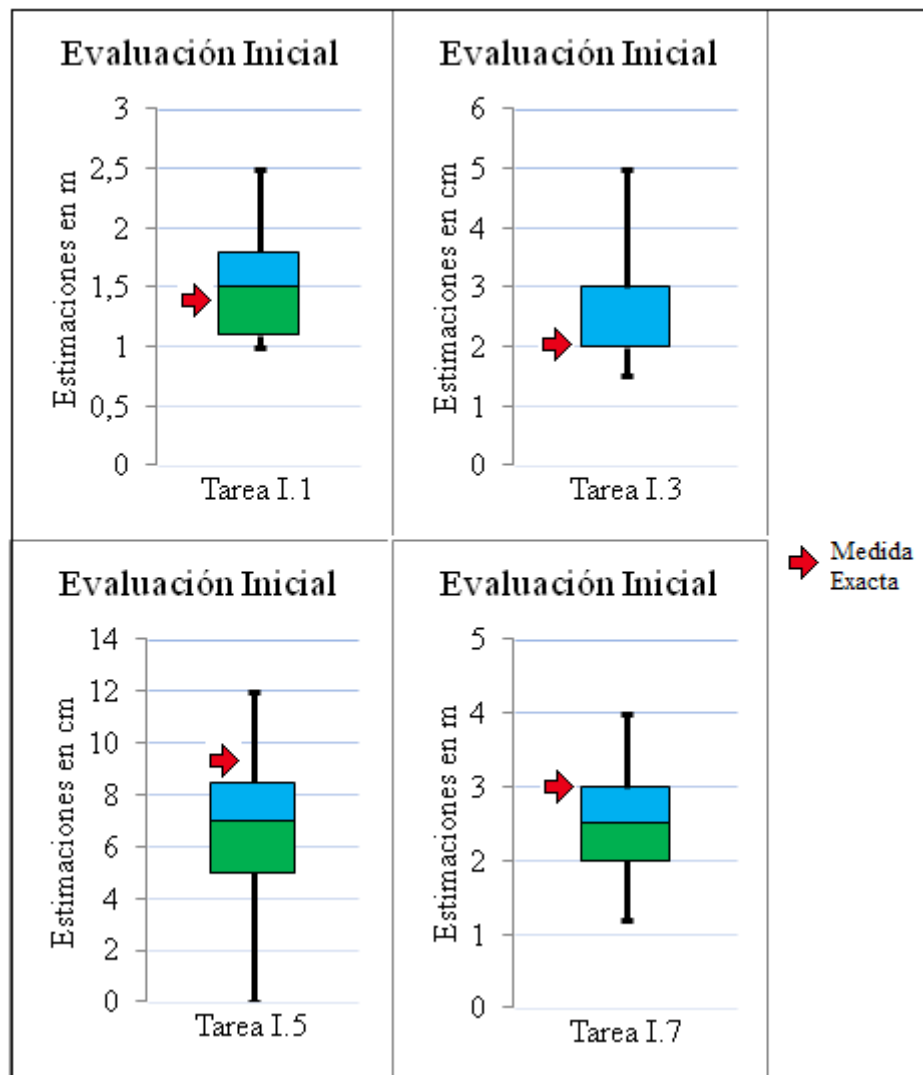
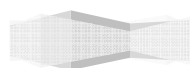


Figura 6. 3. Diagrama de Cajas y Bigotes para Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Inicial

Para corroborar esta dependencia de la subestimación/sobrestimación con la tarea realizamos los siguientes contrastes de hipótesis. En primer lugar contrastamos si la media de las estimaciones en longitud que dieron los alumnos, difiere estadísticamente de la medida exacta. Para ello planteamos las siguientes hipótesis estadísticas:

$H_{0, I.1, Ev\ Inicial}$: *La media aritmética de las estimaciones de la longitud de la mesa del profesor (tarea I.1) es igual a la medida exacta de la longitud de la misma (1.4 m), para las respuestas consideradas de la Evaluación Inicial.*

$H_{0, I.3, Ev\ Inicial}$: *La media aritmética de las estimaciones del grosor de la mesa sobre la que los alumnos escribían (tarea I.3) es igual a la medida exacta del grosor de la misma (2 cm), para las respuestas consideradas de la Evaluación Inicial.*



H_{0, I.5, Ev Inicial}: *La media aritmética de las estimaciones de la longitud del pegamento en barra (tarea I.5) es igual a la medida exacta de la longitud de la misma (9.4 cm), para las respuestas consideradas de la Evaluación Inicial.*

H_{0, I.7, Ev Inicial}: *La media aritmética de las estimaciones del largo de la cuerda (tarea I.7) es igual a la medida exacta de la longitud de la misma (3 m), para las respuestas consideradas de la Evaluación Inicial.*

La hipótesis alternativa (H₁), para cada uno de los contrastes anteriores, es que la media aritmética de las estimaciones respectivas no es igual a la medida exacta de la cantidad a estimar. Realizamos los respectivos contrastes de hipótesis estableciendo un nivel $\alpha=0.05$ (nivel de confianza del 95%). Como se trata de contrastes para la media de una distribución normal con varianza desconocida y el tamaño de la muestra es ≤ 30 utilizamos la t-Student. El programa IBM SPSS Statistics 19 genera las tablas cuando realizamos el contraste relativo a las hipótesis con los resultados considerados que los sujetos dan para cada una de las tareas.

Para el contraste H_{0, I.1, Ev. Inicial} el estadístico (véase Tabla 6. 6) nos genera un valor de significancia (bilateral) de $0.202 > 0.05$, podemos afirmar, con un nivel de confianza del 95%, que no existen diferencias significativas entre la media de las estimaciones de los sujetos y la medida exacta de la longitud de la mesa (Tarea I.1).

Tabla 6. 6. Contraste de Hipótesis H_{0, I.1, Ev. Inicial}
Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 1.4					
	T	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
I1_EvIni	1,314	22	,202	,11304	-,0654	,2915

Para el contraste H_{0, I.3, Ev. Inicial} el estadístico (véase Tabla 6. 7) nos genera un valor de significancia (bilateral) de $0.035 < 0.05$, lo que nos lleva a rechazar la hipótesis nula, y podemos afirmar que existen diferencias significativas entre la media de las estimaciones de los sujetos y la medida exacta del grosor de la mesa. Además, como el intervalo de confianza (al 95%) para la diferencia es positivo, podemos corroborar que en esta tarea hay una clara tendencia a la sobrestimación.



Tabla 6. 7. Contraste de Hipótesis H_0 , I.3, Ev. Inicial
Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 2					
	T	Gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
I3_EvIni	2,263	20	,035	,50000	,0392	,9608

Para el contraste H_0 , I.5, Ev. Inicial el estadístico (véase Tabla 6. 8) nos genera un valor de significancia (bilateral) de $0.000 < 0.05$, lo que nos lleva a rechazar la hipótesis nula, y podemos afirmar que existen diferencias significativas entre la media de las estimaciones de los sujetos y la medida exacta de la longitud del pegamento en barra. Además, como el intervalo de confianza (al 95%) para la diferencia es negativo, podemos confirmar que en esta tarea hay una clara tendencia a la subestimación.

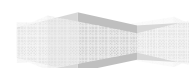
Tabla 6. 8. Contraste de Hipótesis H_0 , I.5, Ev. Inicial
Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 9.4					
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
I5_EvIni	-5,090	24	,000	-2,97920	-4,1873	-1,7711

Para el contraste H_0 , I.7, Ev. Inicial el estadístico (véase Tabla 6. 9) nos genera un valor de significancia (bilateral) de $0.008 < 0.05$, lo que nos lleva a rechazar la hipótesis nula, y podemos afirmar que existen diferencias significativas entre la media de las estimaciones de los sujetos y la medida exacta de la longitud de la cuerda. Además, como el intervalo de confianza (al 95%) para la diferencia es negativo, podemos corroborar que en esta tarea hay una clara tendencia a la subestimación.

Tabla 6. 9. Contraste de Hipótesis H_0 , I.7, Ev. Inicial
Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 3					



	T	Gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
Tarea I.7	-2,919	23	,008	-,44583	-,7618	-,1298

3.1.4. Análisis de la Influencia del Factor Nacionalidad

En este apartado analizamos la influencia de un factor independiente: la variable Nacionalidad²⁹. Estudiamos si existen diferencias significativas en la capacidad estimativa de los alumnos según la Nacionalidad que será considerada como variable dicotómica cuyos dos únicos valores a considerar serán: “nacionalidad española” y “nacionalidad no española”. Contrastamos si existen diferencias significativas entre las medias de las estimaciones realizadas por los alumnos agrupados según la variable Nacionalidad:

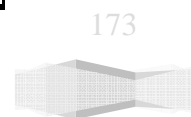
H₀, Longitud, Ev Inicial, N : *La diferencia de las medias aritméticas del porcentaje del error en valor absoluto de las estimaciones de longitudes en la Evaluación Inicial agrupadas según la variable Nacionalidad es nula.*

La hipótesis alternativa (H₁) para el contraste anterior es que la diferencia de las medias aritméticas del porcentaje de error en valor absoluto de las estimaciones de longitudes agrupadas según la variable Nacionalidad no es nula (Contraste bilateral). Para realizar los anteriores contrastes suponemos normalidad. El programa SPSS nos genera los estadísticos recogidos en la Tabla 6. 10.

Tabla 6. 10. Estadísticos para el Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Inicial Agrupados según la Variable Nacionalidad.

Nacionalidad	N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95%	
					Límite inferior	Límite superior

²⁹ La tabla_, del apartado_ del capítulo_ recoge la nacionalidad por alumno.



No española	59	26,7153	28,52605	3,71378	19,2813	34,1492
Española	34	30,8382	30,81604	5,28491	20,0860	41,5905
Total	93	28,2226	29,28515	3,03673	22,1914	34,2538

Podemos confirmar la hipótesis de igualdad de varianzas para todas las tareas, pues la Prueba de Levene nos da un nivel de significación (0.647) superior al 5% (véase Tabla 6. 11) en todas ellas. Así pues, las hipótesis asociadas a estas tareas serán contrastadas asumiendo normalidad y homocedasticidad (igualdad de varianzas).

Tabla 6. 11. Prueba de Homogeneidad de Varianzas para la Variable Dependiente Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Inicial Agrupados según la Variable Nacionalidad.
Prueba de homogeneidad de varianzas

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
,212	1	91	,647

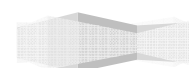
El Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad genera los resultados recogidos en la Tabla 6. 12, donde el estadístico nos da un valor de significancia (bilateral) de $0.516 > 0.05$, luego aceptamos la hipótesis nula y podemos afirmar con un nivel de confianza del 95% que no existen diferencias significativas en la media del porcentaje del error en valor absoluto de las estimaciones de los sujetos, agrupados según la variable nacionalidad. Por tanto, el factor Nacionalidad no influye en la precisión de las estimaciones obtenidas, y, como era de esperar, no es un factor determinante en la capacidad estimativa.

Tabla 6. 12. Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad en la Variable Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes en la Evaluación Inicial.
ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	366,666	1	366,666	,425	,516
Intra-grupos	78534,397	91	863,015		
Total	78901,063	92			

3.1.5. Conclusiones

En las tareas de estimación de longitudes propuestas, el 10.58 % de las respuestas de los alumnos no son válidas por motivos de diversa índole: no especificar unidad de medida, no utilizar una unidad de medida coherente o adecuada a la magnitud a estimar, o por



ser valores estadísticamente atípicos. De las respuestas consideradas, el 58.65% de las respuestas son aceptables, es decir, presentan un porcentaje de error inferior al 30 %.

La clasificación de las respuestas nos ha permitido comprobar que en determinadas tareas hay cierta tendencia a la subestimación, mientras que en otras la tendencia es a la sobrestimación. Estas tendencias se han confirmado estadísticamente, mediante los correspondientes contrastes de hipótesis, obteniendo que, en las tareas I.5 y I.7, hay tendencia a la subestimación; en la tarea I.3, hay tendencia a la sobrestimación; mientras que, en la tarea I.1, no se ha confirmado ningún tipo de tendencia. Estos resultados sugieren que la tendencia a la subestimación/sobrestimación depende de la relación del tamaño de la cantidad en función de la unidad de medida utilizada. Finalmente exponemos que hemos confirmado estadísticamente que la nacionalidad (entendida como ser español o extranjero) es una variable que no determina la capacidad estimativa en las estimaciones de longitudes de la Evaluación Inicial.

3.2. Análisis de las Tareas de Estimación de Superficies

Análogamente a las tareas de estimación de longitudes, estructuramos el análisis de las tareas de estimación de superficies en cinco fases: en una primera fase determinamos los resultados a considerar utilizando los criterios descritos en el apartado 1; en segundo lugar los clasificamos los resultados considerados según las categorías establecidas en el apartado 2; en tercer lugar, realizamos un análisis estadístico con los datos considerados; en cuarto lugar, estudiamos si la nacionalidad influye en las estimaciones de los alumnos; y finalmente extraemos conclusiones.

3.2.1. Consideración de Resultados

Recogemos en la Tabla 6. 13 las respuestas consideradas convertidas a una misma unidad de medida para cada tarea. En el caso de las respuestas no consideradas indicamos la razón (ver apartado 1) que motiva su descarte.

Tabla 6. 13. Datos Considerados, Valores Atípicos y Porcentaje de Error para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Inicial.

	Tarea II.1		Tarea II.3		Tarea II.5	
	Datos	P. e	Datos	P. e	Datos	P. e
Alumnos	(m ²)	(%)	(cm ²)	(%)	(dm ²)	(%)
A1	*1		*1		*1	



Alumnos	Tarea II.1		Tarea II.3		Tarea II.5	
	Datos (m ²)	P. e (%)	Datos (cm ²)	P. e (%)	Datos (dm ²)	P. e (%)
A2	*1		0,2	-94,7	100	138,1
A3	*1		*1		#7: 60	42,9
A4	*1		*1		*1	
A5	#7: 1,5	-45,7	0,12	-96,8	50	19,0
A6	*1		0,12	-96,8	100	138,1
A7	*1		*1		*6	
A8	0,05	-98,2	1	-73,7	1,5	-96,4
A9	2	-27,5	0,06	-98,4	120	185,7
A10	*1		#7: 4	5,3	*6	
A11	*1		*1		*1	
A12	*1		*1		*2	
A13	*1		*1		*1	
A15	*1		*1		*1	
A16	#7:3	8,7	*1		*6	
A17	3,2	15,9	0,48	-87,4	*3: 225	435,7
A18	*1		*2		*1	
A19	#7: 1,5	-45,7	#7: 1,69	-55,5	*1	
A21	*1		*1		100	138,1
A22	*6		*6		*6	
A23	*2		*1		#7: 40	-4,8
A24	#5: 5	81,2	#5: 0,6	-84,2	*3: 306	628,6
A25	*1		*1		*6	
A26	*1		*1		*1	
A27	*3: 8	189,9	0,1	-97,4	*3: 400	852,4
A28	3	8,7	*3: 64	1584,2	*3: 1600	3709,5

En los resultados a las tareas de estimación de superficies hemos descartado 53 respuestas de un total de 78 (véase Tabla 6. 14), lo que supone el 67.95% del total de tareas. Dichas respuestas se distribuyen de forma equitativa en las tres tareas.

Los motivos para la no consideración de las respuestas son diversos, siendo el más frecuente no usar una unidad de medida adecuada con la magnitud a estimar. Otros



motivos menos frecuentes son dar un valor estadísticamente atípico, no indicar la unidad de medida o no contestar.

La elevada cantidad de respuestas no consideradas condiciona la posibilidad de evaluar la capacidad estimativa en la magnitud superficie, pues tan solo disponemos del 32.05% de las tareas para ello.

Tabla 6. 14. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 1ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Inicial.

Categoría	Tarea			Total
	II.1	II.3	II.5	
RNC	18	17	18	53
RC	8	9	8	25

3.2.2 Clasificación de los Resultados Considerados

La primera clasificación de las respuestas la hemos realizado en el apartado anterior (determinando si se puede considerar o no). A continuación realizamos la segunda y tercera clasificación que se aplican sólo a los resultados considerados.

i) Determinando si la estimación es aceptable.

Sólo podemos analizar la aceptabilidad de las respuestas que no han sido descartadas, es decir el 32.05% del total de respuestas. Es significativo observar que ningún alumno realiza una estimación aceptable de la superficie de la diana (Tarea II.3), solo dos alumnos realizan una estimación aceptable de la superficie del mapa de España (Tarea II.5), y cuatro de la superficie de la pizarra (Tarea II.1) (véase en Tabla 6. 15). En las tres tareas, solo podemos considerar aceptables seis de las 78 respuestas posibles (7.69%). Estos bajos índices en esta categoría (RA) ponen de manifiesto la dificultad que suponen este tipo de tareas para los alumnos estudiados.

Tabla 6. 15. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 2ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.

Categoría	Tarea			Total
	II.1	II.3	II.5	
RA	4	0	2	6
RNA	4	9	6	19

ii) *Determinando si hay subestimación/sobrestimación.*

Al igual que en el caso de la longitud, las respuestas de los estudiantes ponen de manifiesto la dependencia de la subestimación/sobrestimación con la tarea (véase Tabla 6. 16).

Tabla 6. 16. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 3ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Inicial.

Categoría	Tarea			Total
	II.1	II.3	II.5	
SubNA	3	9	1	13
SubA	1	0	1	2
ME	0	0	0	0
SobA	3	0	1	4
SobNA	1	0	5	6

Si contabilizamos las subestimaciones/sobrestimaciones sin discernir si son aceptables (véase Figura 6. 4), se puede apreciar que para la tarea II.3 (superficie de la diana) se distingue una tendencia clara a la subestimación y en la tarea II.5 se identifica cierta tendencia a la sobreestimación.

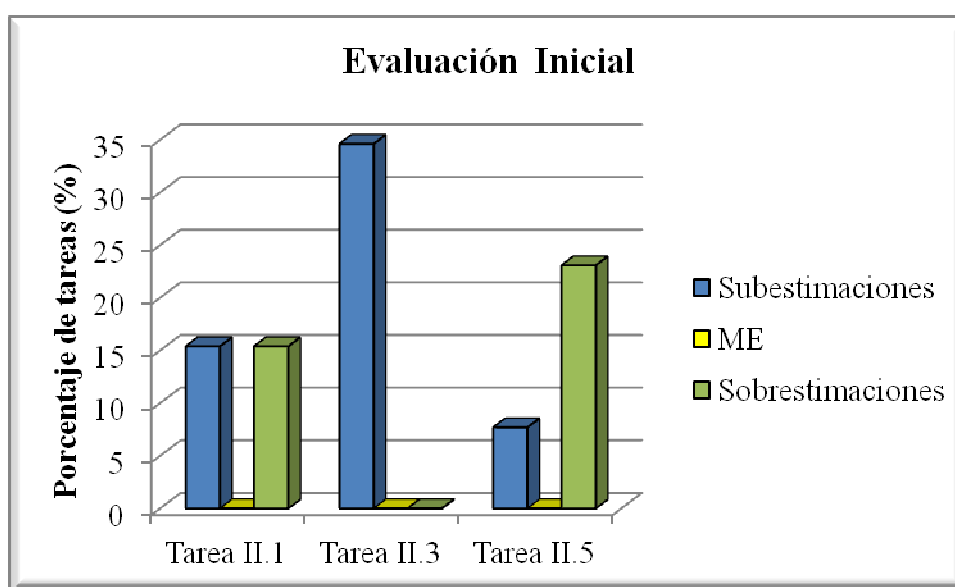
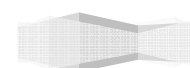


Figura 6. 4. Frecuencias Relativas en Porcentaje de las Subestimaciones/Sobrestimaciones, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Inicial.



3.2.3. Análisis Estadístico

Los valores estadísticamente atípicos para la distribución de respuestas dadas por los alumnos no siempre se corresponden con valores con un alto porcentaje de error (véase respuesta del alumno A10 en la tarea II.3 en Tabla 6. 13). Sin embargo, los vamos a descartar para el análisis estadístico porque nos interesa que los estadísticos sean representativos de la muestra.

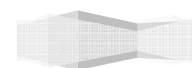
A partir de los datos considerados, descartando los valores atípicos, se obtienen los estadísticos que recoge la Tabla 6. 17. En primer lugar podemos observar cómo el número de datos considerados para el estudio estadístico (8 o 9 según tarea) es sensiblemente menor al número de individuos que realizaron la prueba (26 alumnos), ya que muchas respuestas las hemos descartado atendiendo a los criterios anteriormente descritos (apartado 1.1).

Con los pocos datos de que disponemos para evaluar la capacidad estimativa, podemos indicar que la tarea de estimar la superficie de la pizarra (tarea II.1) es la que presenta menos dificultad para los alumnos de las tres propuestas, ya que el porcentaje medio del error en valor absoluto es del 41.44%, frente al 87.22% de la tarea de estimar de la superficie de la diana, o el 95.39% de la tarea de estimar del mapa de España (véase Tabla 6. 17). No obstante, la tarea de estimar el mapa de España es la que presenta menor dispersión en torno a la media (recordemos que todas las respuestas son subestimaciones no aceptables).

La media aritmética de las estimaciones de la superficie de la pizarra se aproxima bastante a la medida exacta de la misma, en comparación con la tarea de estimación de la superficie de la diana, donde está claramente por debajo de la medida exacta o la tarea de estimar la superficie del mapa de España donde está claramente por encima.

Tabla 6. 17. Estadísticos para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Inicial.

Estadístico	Tarea		
	II.1	II.3	II.5
Tamaño muestral	8	9	8
Media aritmética	2.41	0.49	71.45
Desviación típica	1.48	0.55	40.14



Medida exacta	2.76 (m ²)	3.8 (dm ²)	42 (dm ²)
Porcentaje medio de error ³⁰	-12.82%	-87.22%	70.09%
Porcentaje medio del error en valor absoluto ³¹	41.44%	87.22%	95.39%

Los diagramas de cajas y bigotes correspondientes (véase Figura 6. 5) ponen de manifiesto estas circunstancias, ya que la medida exacta solo cae dentro del intervalo intercuartílico en la tarea II.1; en la tarea II.3 la medida exacta no es alcanzada ni siquiera por el valor máximo; y en la tarea II.5 la medida exacta es inferior al intervalo intercuartílico encontrándose dicho valor en el primer cuartil.

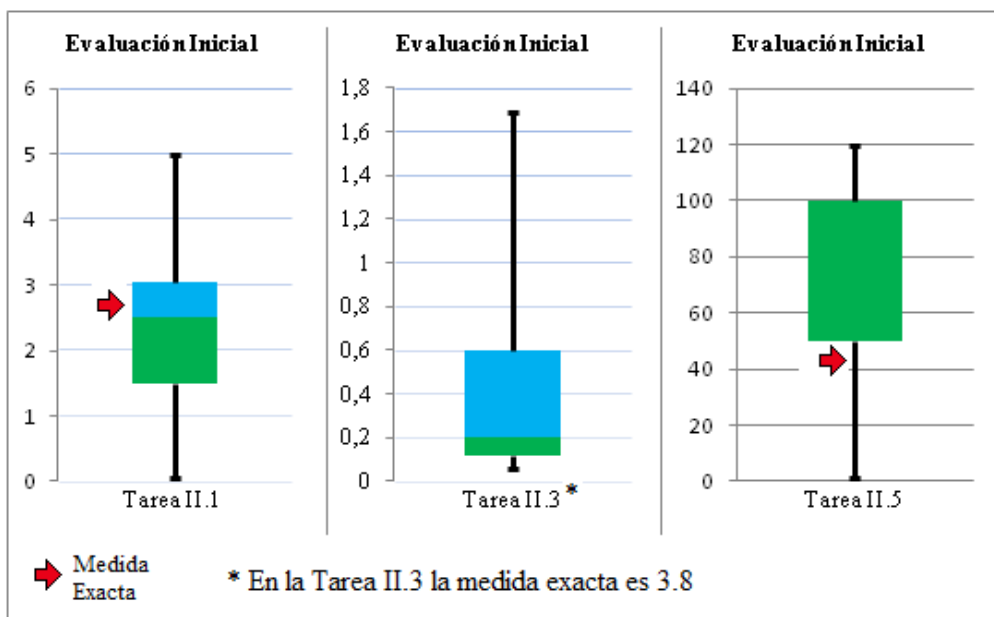


Figura 6. 5. Diagramas de Cajas y Bigotes para Estimaciones de Superficies de la Evaluación Inicial

En este caso no realizamos contrastes de hipótesis, puesto que el limitado tamaño muestral de que disponemos limita la potencia de los posibles contrastes.

3.2.4. Análisis de la Influencia del Factor Nacionalidad

Contrastamos si existen diferencias significativas entre las medias de las estimaciones realizadas por los alumnos agrupados según la variable Nacionalidad³²:

³⁰ Media aritmética del porcentaje de error, considerando el porcentaje de error sin valor absoluto.

³¹ Media aritmética del porcentaje de error, considerando el porcentaje de error en valor absoluto.

³² Considerada dicotómica, según los valores: “nacionalidad española” y “nacionalidad no española”.



H_0 , Superficie, Ev Inicial, N : *La diferencia de las medias aritméticas del porcentaje del error en valor absoluto de las estimaciones de superficies en la Evaluación Inicial agrupadas según la variable Nacionalidad es nula.*

La hipótesis alternativa (H_1) para el contraste anterior es que la diferencia de las medias aritméticas del porcentaje de error de las estimaciones de superficies en la Evaluación Inicial, agrupadas según la variable Nacionalidad, no es nula. Para contrastar las hipótesis anteriores suponemos normalidad. El programa SPSS nos genera los estadísticos recogidos en la Tabla 6. 18.

Tabla 6. 18. Estadísticos para el Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Inicial Agrupados según la Variable Nacionalidad.

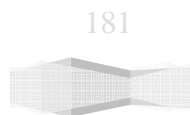
Nacionalidad	N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95%	
					Límite inferior	Límite superior
No española	14	75,9821	43,01866	11,49722	51,1439	100,8204
Española	11	74,1691	54,33340	16,38214	37,6674	110,6708
Total	25	75,1844	47,25785	9,45157	55,6773	94,6915

Podemos confirmar la hipótesis de igualdad de varianzas para todas las tareas, pues la Prueba de Levene nos da un nivel de significación (0.33) superior al 5% (véase Tabla 6. 19). Así pues, las hipótesis asociadas a estas tareas serán contrastadas asumiendo normalidad y homocedasticidad (igualdad de varianzas).

Tabla 6. 19. Prueba de Homogeneidad de Varianzas para la Variable Dependiente Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Inicial Agrupados según la Variable Nacionalidad.
Prueba de homogeneidad de varianzas

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
,989	1	23	,330

El Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad genera los resultados recogidos en la Tabla 6. 20, donde el estadístico nos da un valor de significancia (bilateral) de $0.927 > 0.05$, luego aceptamos la hipótesis nula y podemos afirmar con un nivel de confianza del 95% que no existen diferencias significativas en la media del porcentaje del error en valor absoluto de las estimaciones de los sujetos, agrupados según la variable nacionalidad. Por tanto, el factor Nacionalidad no influye en la precisión de las



estimaciones de superficies, y en este caso tampoco es un factor determinante en la capacidad estimativa.

Tabla 6. 20. Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad en la Variable Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies en la Evaluación Inicial.
ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	20,249	1	20,249	,009	,927
Intra-grupos	53579,050	23	2329,524		
Total	53599,299	24			

3.2.5. Conclusiones

En el análisis de las respuestas de los estudiantes en las tareas de estimación de superficies en la Evaluación Inicial ha sido necesario descartar un número considerable de respuestas (67.95% de las respuestas) debido a motivos de diversa índole: no especificar unidad de medida, no utilizar una unidad de medida coherente o adecuada a la magnitud a estimar, por ser valores estadísticamente atípicos o simplemente, por no contestar a la tarea. En consecuencia tan sólo queda un 32.05% de tareas que se pueden analizar estadísticamente, lo que supone una limitación añadida a la hora de poder generalizar resultados.

Las respuestas aceptables corresponden a un 7.69% del total de respuestas. El estudio de las mismas nos ha permitido comprobar que en determinadas tareas hay cierta tendencia a la subestimación, mientras que en otras la tendencia es a la sobrestimación. No obstante, no hemos podido confirmar estadísticamente estas tendencias debido a la limitación que supone el pequeño tamaño muestral de que disponemos.

Finalmente ponemos de manifiesto que hemos confirmado estadísticamente que la nacionalidad (entendida como ser español o extranjero), no es una variable que determine la capacidad estimativa de los sujetos en las estimaciones de superficies de la Evaluación Inicial.



3.3. Comparación de los Resultados de la Estimación de Longitudes y Superficies

En la Tabla 6. 21 presentamos los porcentajes de tareas aceptables, no aceptables y no consideradas, y el Porcentaje Medio de Error para cada una de las magnitudes estudiadas. En primer lugar apreciamos como el número de respuestas o estimaciones aceptables es sensiblemente inferior para las estimaciones relativas a la magnitud superficie que para la magnitud longitud. Además el número de respuestas no consideradas es de un 67.95% en superficie frente al 10.58% para la magnitud longitud. Estos son claros indicadores de que los alumnos encuentran muchas más dificultades cuando se enfrentan a tareas de estimación de superficies que en las tareas de estimación de longitudes; dificultades que le impiden poder dar un resultado digno de ser considerado como una estimación de superficie.

El Porcentaje Medio de Error nos indica que, para las respuestas consideradas, las estimaciones de superficies son mucho más imprecisas que las estimaciones de longitudes.

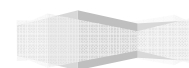
Tabla 6. 21. Cuadro Resumen de Clasificación de las Tareas y Porcentaje del Error en Valor Absoluto para la Evaluación Inicial.

Tipos de respuestas	Magnitud	
	Longitud	Superficie
RC	RA	56.73%
	RNA	32.69%
RNC		10.58%
	P.M.E. ^a	28.15%
		74.68%

a. PME=Porcentaje Medio de Error (media aritmética del porcentaje medio del error en valor absoluto para cada una tareas)

4. ANÁLISIS CUANTITATIVO DE LA EVALUACIÓN FINAL

Para el análisis de las estimaciones de los estudiantes en las respuestas tipo A de la Evaluación Final seguimos una estructura semejante a la empleada en el apartado previo separando el análisis correspondiente a la magnitud longitud del de la magnitud superficie y distinguiendo dentro de cada uno de ellos cinco fases.



4.1. Análisis de las Tareas de Estimación de Longitudes

Este apartado aparece estructurado de la siguiente forma: resultados a considerar utilizando los criterios descritos en el apartado 1; clasificación según niveles de determinación expuestos en el apartado 2; análisis estadístico de los datos considerados; influencia de la nacionalidad en las estimaciones de los alumnos; y conclusiones.

4.1.1. Consideración de Resultados

En la Tabla 6. 22 recogemos las respuestas dadas por los alumnos en las cuatro tareas tipo A relativas a la estimación de longitudes. Hemos unificado la unidad de medida para cada tarea y, para las respuestas no consideradas hemos indicado el criterio que ha motivado su descarte descrito en el apartado 1.1.

Tabla 6. 22. Datos Considerados, Valores Atípicos y Porcentaje de Error para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final.

Alumnos	Tarea I.1		Tarea I.3		Tarea I.5		Tarea I.7	
	Datos (m)	P. e (%)	Datos (cm)	P. e (%)	Datos (cm)	P. e (%)	Datos (m)	P. e (%)
A1	*3: 2	*3: 42,9	2	0	10	6,4	2,5	-16,7
A2	1,3	-7,1	2	0	7	-25,5	2,5	-16,7
A5	1	-28,6	*3: 1	-50	6	-36,2	2,5	-16,7
A6	*3: 2	*3: 42,9	2	0	10	6,4	3	0,0
A7	1	-28,6	3	50	5	-46,8	3	0,0
A8	1,5	7,1	2	0	12	27,7	3	0,0
A9	1,5	7,1	*3: 1	-50	10	6,4	2,5	-16,7
A10	1,5	7,1	2	0	10	6,4	3	0,0
A11	1	-28,6	3	50	*3: 15	59,6	2,5	-16,7
A13	1,3	-7,1	*3: 100	4900	5	-46,8	2,75	-8,3
A14	1,3	-7,1	*3: 3,5	75	6	-36,2	2	-33,3
A15	1	-28,6	2	0	10	6,4	2,5	-16,7
A16	1,5	7,1	2	0	8	-14,9	2,5	-16,7
A17	1,5	7,1	2	0	*3: 15	59,6	3	0,0
A18	1,5	7,1	3	50	9	-4,3	2	-33,3
A19	1,5	7,1	2	0	10	6,4	2	-33,3
A21	1,5	7,1	2,5	25	10	6,4	3	0,0



Alumnos	Tarea I.1		Tarea I.3		Tarea I.5		Tarea I.7	
	Datos	P. e	Datos	P. e	Datos	P. e	Datos	P. e
	(m)	(%)	(cm)	(%)	(cm)	(%)	(m)	(%)
A22	1,45	3,6	1,5	-25	6	-36,2	*6	
A23	1,5	7,1	2	0	10	6,4	3	0,0
A24	1	-28,6	2,5	25	*3: 15	59,6	2	-33,3
A25	1,5	7,1	2	0	8	-14,9	3	0,0
A26	1,2	-14,3	2,5	25	8	-14,9	2,5	-16,7
A27	1,25	-10,7	2,5	25	7,5	-20,2	2	-33,3
A28	1,5	7,1	2	0	10	6,4	2,2	-26,7
A31	1	-28,6	2	0	10	6,4	2,5	-16,7
A33	1,4	0,0	3	50	8	-14,9	2	-33,3

En los resultados de las tareas de estimación de longitudes de la Evaluación Final hemos descartado un total de 10 resultados (9.62% del total de tareas). Los resultados han sido descartados en las tareas I.1, I.3 y I.5 por tratarse de valores estadísticamente atípicos. Y el resultado no considerado en la tarea I.7 es debido a que un alumno no contestó. El número de resultados descartados por tarea oscila entre 1 y 4, correspondiendo la mayor frecuencia a la tarea I.3 (véase Tabla 6. 23).

Tabla 6. 23. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 1ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final.

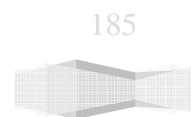
Categoría	Tarea				Total
	I.1	I.3	I.5	I.7	
RC	24	22	23	25	94
RNC	2	4	3	1	10

4.1.2. Clasificación de los Resultados Considerados

La primera clasificación de las respuestas la hemos realizado en el apartado anterior (determinando si se puede considerar o no). A continuación realizamos la segunda y tercera clasificación que se aplican sólo a los resultados considerados.

i) Determinando si la estimación es aceptable.

De las 94 respuestas consideradas tenemos 79 respuestas aceptables (75.96% del total de tareas) y 15 no aceptables (14.42% del total de tareas). Todos los resultados



considerados en la tarea I.1 son estimaciones aceptables siendo similar la presencia de estimaciones no aceptables en el resto de tareas (véase Tabla 6. 24).

Tabla 6. 24. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, la 2ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final.

Categoría	Tarea				Total
	I.1	I.3	I.5	I.7	
RA	24	18	18	19	79
RNA	0	4	5	6	15

ii) *Determinando si hay subestimación/sobrestimación.*

Las 94 respuestas consideradas las clasificamos como muestra la Tabla 6. 25. Aquí se observa que los alumnos “aciertan” con la medida exacta³³ más frecuentemente en las tareas cuya medida exacta a estimar es un número entero de unidades (tarea I.3 y tarea I.7).

Tabla 6. 25. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según el 3er Nivel de Análisis, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final.

Categoría	Tarea				Total
	I.1	I.3	I.5	I.7	
SubNA	0	0	5	6	11
SubA	11	1	7	11	30
ME	1	13	0	8	22
SobA	12	4	11	0	27
SobNA	0	4	0	0	4

Con respecto a la subestimación/sobrestimación (véase Figura 6. 6) indicamos que hay tareas donde parece estar equilibrado el número de subestimaciones/sobrestimaciones (tareas I.1 y I.5). Mientras que en la tarea I.3 predominan las sobrestimaciones, y en la tarea I.7 las subestimaciones. Una vez más se puede apreciar que la subestimación/sobrestimación depende de la tarea.

³³ Véase medidas exactas en tabla_.

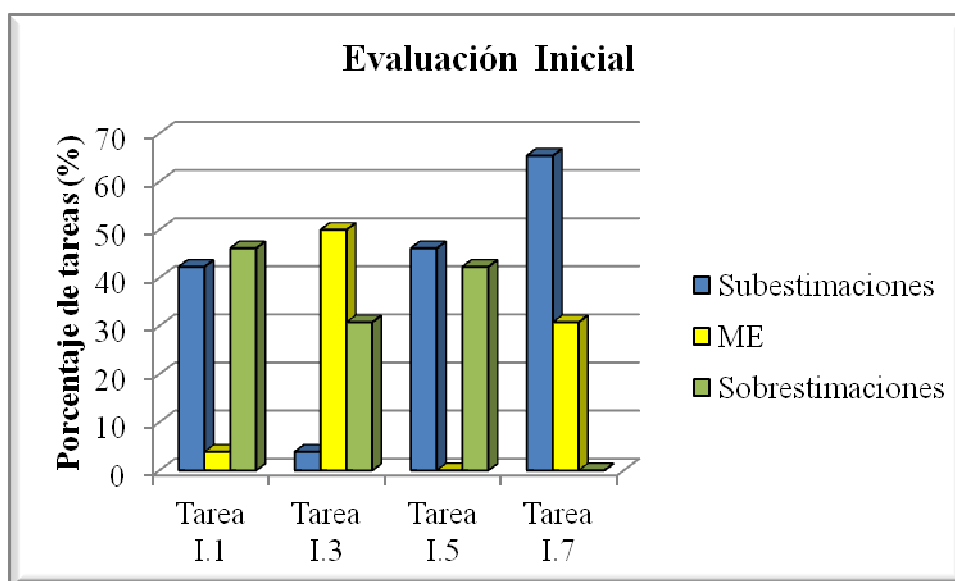


Figura 6. 6. Frecuencias Relativas en Porcentaje de las Subestimaciones/Sobrestimaciones, para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final.

4.1.3. Análisis Estadístico

A partir del porcentaje de error de los datos considerados (RC) obtenemos los estadísticos que recoge la Tabla 6. 26. El porcentaje medio de error reitera las tendencias a la subestimación o sobrestimación identificadas previamente en las diferentes tareas.

Tabla 6. 26. Estadísticos descartando valores atípicos para las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial.

Estadístico	Tarea			
	I.1	I.3	I.5	I.7
Tamaño muestral	24	22	23	25
Media aritmética	1.32	2.25	8.5	2.54
Desviación típica	0.21	0.43	1.94	0.39
Medida exacta	1.4 (m)	2 (cm)	9.4 (cm)	3 (m)
Porcentaje medio de error ³⁴	-5.65%	12.5%	-9.57%	-15.4%
Porcentaje medio del error en valor absoluto ³⁵	12.5%	14.77%	17.53%	15.4%

³⁴ Media aritmética del porcentaje de error, considerando el porcentaje de error sin valor absoluto.

³⁵ Media aritmética del porcentaje de error, considerando el porcentaje de error en valor absoluto.

En el diagrama de cajas y bigotes (Figura 6. 7) podemos observar como la medida exacta de las cantidades a estimar está situada en la “caja” (intervalo intercuartílico) para las estimaciones de las tareas I.1 y I.5, próximo a la Mediana, lo que nos sugiere que no hay tendencia a la subestimación/sobrestimación. En cambio, en la tarea I.3 la medida exacta coincide con el primer cuartil, lo que nos sugiere que puede haber sobrestimación. Para la tarea I.7 ocurre lo contrario, coincidiendo la medida exacta con el extremo superior del diagrama (el tercer cuartil coincide con el máximo), por tanto es posible que exista tendencia a la subestimación.

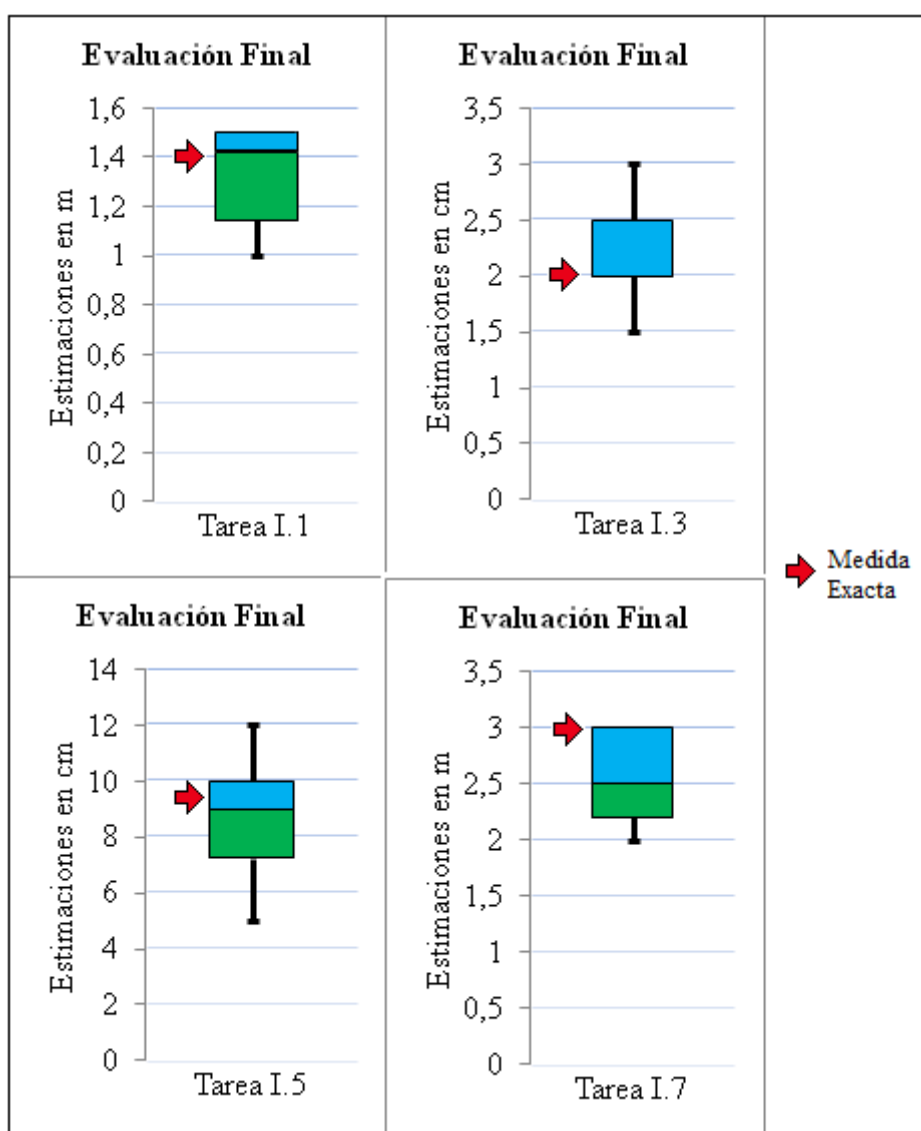


Figura 6. 7. Diagramas de Cajas y Bigotes para Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Final



Para corroborar esta dependencia de la subestimación/sobrestimación con la tarea realizamos los siguientes contrastes de hipótesis. Contrastamos si la media de las estimaciones en longitud que dan los alumnos, difiere estadísticamente de la medida exacta. Para ello planteamos las siguientes hipótesis estadísticas:

H_{0, I.1, Ev Final}: *La media aritmética de las estimaciones de la longitud de la mesa del profesor (tarea I.1) es igual a la medida exacta de la longitud de la misma (1.4 m), para las respuestas consideradas de la Evaluación Final.*

H_{0, I.3, Ev Final}: *La media aritmética de las estimaciones del grosor de la mesa sobre la que los alumnos escribían (tarea I.3) es igual a la medida exacta del grosor de la misma (2 cm), para las respuestas consideradas de la Evaluación Final.*

H_{0, I.5, Ev Final}: *La media aritmética de las estimaciones de la longitud del pegamento en barra (tarea I.5) es igual a la medida exacta de la longitud del mismo (9.4 cm), para las respuestas consideradas de la Evaluación Final.*

H_{0, I.7, Ev Final}: *La media aritmética de las estimaciones del largo de la cuerda (tarea I.7) es igual a la medida exacta de la longitud de la misma (3 m), para las respuestas consideradas de la Evaluación Final.*

La hipótesis alternativa (H₁) para cada uno de los contrastes anteriores es que la media aritmética de las estimaciones respectivas no es igual a la medida exacta de la cantidad a estimar. Realizamos los respectivos contrastes de hipótesis estableciendo un nivel $\alpha=0.05$ (nivel de confianza del 95%). Como realizamos contrastes para la media de una distribución normal con varianza desconocida y el tamaño de la muestra es ≤ 30 utilizamos la t-Student. El programa IBM SPSS Statistics 19 genera las tablas cuando realizamos el contraste relativo a las hipótesis con los resultados considerados que los sujetos dan para cada una de las tareas.

Para el contraste H_{0, I.1, Ev. Final} el estadístico (véase Tabla 6. 27) nos genera un valor de significancia (bilateral) de $0.078 > 0.05$ podemos afirmar que no existen diferencias significativas entre la media de las estimaciones de los sujetos y la medida exacta de la longitud de la mesa.

Tabla 6. 27. Contraste de Hipótesis H_{0, I.1, Ev. Final}
Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 1.4
--	-----------------------

	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
I1_EvFin	-1,847	23	,078	-,07917	-,1679	,0095

Para el contraste $H_{0, I.3, Ev. Final}$ el estadístico (véase Tabla 6. 28) nos genera un valor de significancia (bilateral) de $0.013 < 0.05$, lo que nos lleva a rechazar la hipótesis nula, y podemos afirmar que existen diferencias significativas entre la media de las estimaciones de los sujetos y la medida exacta del grosor de la mesa. Además, como el intervalo de confianza (al 95%) para la diferencia es positivo, podemos confirmar que en esta tarea había una clara tendencia a la sobrestimación.

Tabla 6. 28. Contraste de Hipótesis $H_{0, I.3, Ev. Final}$
Prueba para una muestra

Valor de prueba = 2						
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
I3_EvFin	2,730	21	,013	,25000	,0595	,4405

Para el contraste $H_{0, I.5, Ev. Final}$ el estadístico (véase Tabla 6. 29) nos genera un valor de significancia (bilateral) de $0.036 < 0.05$, lo que nos lleva a rechazar la hipótesis nula, y podemos afirmar que existen diferencias significativas entre la media de las estimaciones de los sujetos y la medida exacta de la longitud del pegamento en barra. Además, como el intervalo de confianza (al 95%) para la diferencia es negativo, podemos confirmar que en esta tarea había una clara tendencia a la subestimación.

Tabla 6. 29. Contraste de Hipótesis $H_{0, I.5, Ev. Final}$
Prueba para una muestra

Valor de prueba = 9.4						
-----------------------	--	--	--	--	--	--



	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
I5_EvFin	-2,229	22	,036	-,90000	-1,7374	-,0626

Para el contraste $H_{0, I7, Ev. Final}$ el estadístico (véase Tabla 6. 30) nos genera un valor de significancia (bilateral) de $0.000 < 0.05$, lo que nos lleva a rechazar la hipótesis nula, y podemos afirmar que existen diferencias significativas entre la media de las estimaciones de los sujetos y la medida exacta de la longitud de la cuerda. Además, como el intervalo de confianza (al 95%) para la diferencia es negativo, podemos corroborar que en esta tarea había una clara tendencia a la subestimación.

Tabla 6. 30. Contraste de Hipótesis $H_{0, I7, Ev. Final}$
Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 3					
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
I7_EvFin	-5,951	24	,000	-,46200	-,6222	-,3018

4.1.4. Análisis de la Influencia del Factor Nacionalidad

Contrastamos si existen diferencias significativas entre las medias de las estimaciones realizadas por los alumnos agrupados según la variable Nacionalidad.

$H_{0, Longitud, Ev Final, N}$: *La diferencia de las medias aritméticas del porcentaje del error en valor absoluto de las estimaciones de longitudes en la Evaluación Final agrupadas según la variable Nacionalidad es nula.*

La hipótesis alternativa (H_1) para el contraste anterior es que la diferencia de las medias aritméticas del porcentaje de error en valor absoluto de las estimaciones de longitudes agrupadas según la variable Nacionalidad no es nula (Contraste bilateral). Para realizar los anteriores contrastes suponemos normalidad. El programa SPSS nos genera los estadísticos recogidos en la Tabla 6. 31.

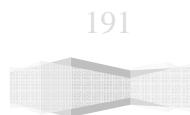


Tabla 6. 31. Estadísticos para el Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Final Agrupados según la Variable Nacionalidad.

Nacionalidad	N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95%	
					Límite inferior	Límite superior
No española	59	13,8424	14,45091	1,88135	10,0764	17,6083
Española	35	17,0429	14,23116	2,40551	12,1543	21,9314
Total	94	15,0340	14,37702	1,48288	12,0893	17,9787

Podemos confirmar la hipótesis de igualdad de varianzas para todas las tareas, pues la Prueba de Levene nos da un nivel de significación superior al 5% (véase Tabla 6. 32) en todas ellas. Así pues, las hipótesis asociadas a estas tareas serán contrastadas asumiendo normalidad y homocedasticidad (igualdad de varianzas).

Tabla 6. 32. Prueba de Homogeneidad de Varianzas para la Variable Dependiente Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Final Agrupados según la Variable Nacionalidad.
Prueba de homogeneidad de varianzas

Estadístico de Levene	gl1	gl2	Sig.
,000	1	92	,998

El Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad genera los resultados recogidos en la Tabla 6. 33, donde el estadístico nos da un valor de significancia (bilateral) de $0.299 > 0.05$, luego aceptamos la hipótesis nula y podemos afirmar con un nivel de confianza del 95% que no existen diferencias significativas en la media del porcentaje del error en valor absoluto de las estimaciones de los sujetos, agrupados según la variable nacionalidad. Por tanto aquí tampoco encontramos influencia del factor Nacionalidad en la capacidad estimativa de los sujetos.

Tabla 6. 33. Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad en la Variable Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Longitudes en la Evaluación Final.
ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	225,021	1	225,021	1,090	,299
Intra-grupos	18997,950	92	206,499		



ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	225,021	1	225,021	1,090	,299
Intra-grupos	18997,950	92	206,499		
Total	19222,971	93			

4.1.5. Conclusiones

El porcentaje de resultados aceptables en las tareas de estimación de longitudes de la Evaluación Final es del 75.96%. La clasificación de las respuestas nos permite comprobar que en determinadas tareas hay cierta tendencia a la subestimación, mientras que en otras la tendencia es a la sobrestimación. Estas tendencias las confirmamos estadísticamente, mediante los correspondientes contrastes de hipótesis, obteniendo que en las tareas I.5 y I.7 hay tendencia a la subestimación; en la tarea I.3 hay tendencia a la sobrestimación; mientras que en la tarea I.1 no se confirma ningún tipo de tendencia. Por tanto aquí también podemos afirmar que la tendencia a la subestimación/sobrestimación no depende de la magnitud, sino de la tarea.

Finalmente ponemos de manifiesto que hemos confirmado estadísticamente que la nacionalidad (entendida como ser español o extranjero), no es una variable que determine la capacidad estimativa en las estimaciones de longitudes de la Evaluación Final.

4.2. Análisis de las Tareas de Estimación de Superficies

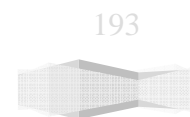
Realizamos un estudio análogo a los anteriores para las estimaciones de superficies de en la Evaluación Final.

4.2.1. Consideración de Resultados

En la Tabla 6. 34 hemos recogido las respuestas consideradas. Las hemos convertido a una misma unidad de medida para cada tarea y, para las respuestas no consideradas hemos indicado la razón (ver apartado 1.1) que ha motivado su descarte.

Tabla 6. 34. Datos Considerados, Valores Atípicos y Porcentaje de Error para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final.

Tarea II.1	Tarea II.3	Tarea II.5
------------	------------	------------



Alumnos	Datos	P. e	Datos	P. e	Datos	P. e
	(m)	(%)	(cm)	(%)	(cm)	(%)
A1	*1		0,1	-97,4	0,5	-98,8
A2	*1		0,2	-94,7	100	138,1
A5	3	8,7	0,05	-98,7	*1	
A6	*1		*1		*1	
A7	2,5	-9,4	0,03	-99,2	100	138,1
A8	*3: 9	226,1	0,6	-84,2	*3: 500	1090,5
A9	2	-27,5	3,14	-17,4	12	-71,4
A10	2	-27,5	*6		*6	
A11	3	8,7	1	-73,7	12,99	-69,1
A13	3	8,7	*1		8	-81,0
A14	2	-27,5	0,1	-97,4	0,75	-98,2
A15	3	8,7	0,2	-94,7	100	138,1
A16	1,5	-45,7	0,2	-94,7	0,8	-98,1
A17	2,3	-16,7	0,157	-95,9	*6	
A18	2	-27,5	3,14	-17,4	100	138,1
A19	*3: 0,015	99,5	#7: 4	5,3	0,7	-98,3
A21	4	44,9	5,307	39,7	100	138,1
A22	2	-27,5	*6		*1	
A23	*2		*3: 9	136,8	100	138,1
A24	2,5	-9,4	7,065	85,9	37,5	-10,7
A25	*1		0,3	-92,1	*1	
A26	2,5	-9,4	0,2	-94,7	150	257,1
A27	3,75	35,9	3,14	-17,4	*1	
A28	3,08	11,6	4	5,3	100	138,1
A31	3	8,7	0,4	-89,5	12	-71,4
A33	2,5	-9,4	3,14	-17,4	0,75	-98,2

En los resultados a las tareas de estimación de superficies descartamos 20 respuestas (véase RNC en Tabla 6. 35), lo que supone un 25.64% del total de tareas. Las respuestas descartadas se distribuyen en las tres tareas variando entre 5 a 8 su frecuencia por tarea.

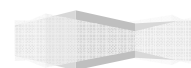


Tabla 6. 35. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 1ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final.

Categoría	Tarea			Total
	II.1	II.3	II.5	
RC	19	21	18	58
RNC	7	5	8	20

4.2.2. Clasificación de los Resultados Considerados

La primera clasificación de las respuestas la hemos realizado en el apartado anterior (determinando si se puede considerar o no). A continuación realizamos la segunda y tercera clasificación que se aplican sólo a los resultados considerados.

i) Determinando si la estimación es aceptable.

Para determinar la aceptabilidad de una respuesta disponemos de 58 tareas de las 78 posibles (74.36%). De las mismas 23 respuestas son aceptables, lo que supone un 29.49% del total de respuestas. Es significativo que tan solo un alumno realizó una estimación aceptable del mapa de España. Destaca la tarea II.1 por ser la que presenta un mayor número de respuestas aceptables (véase Tabla 6. 36).

Tabla 6. 36. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 2ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final.

Categoría	Tarea			Total
	II.1	II.3	II.5	
RA	16	6	1	23
RNA	3	15	17	35

ii) Determinando si hay subestimación/sobrestimación.

Una vez más, las tareas de estimación de superficies ponen de manifiesto la dependencia de la subestimación/sobrestimación con la tarea. En concreto, en las tres tareas estudiadas se observa lo siguiente: en la estimación de la superficie de la pizarra y del mapa de España el número de subestimaciones supera levemente al número de sobrestimaciones, aunque en la tarea II.1 predominan las respuestas aceptables, mientras que en la tarea II.5 son las no aceptables más frecuentes que las aceptables. En la tarea II.3 hay una clara tendencia a la subestimación (véase Tabla 6. 37).



Tabla 6. 37. Frecuencias Absolutas de las Categorías de Respuestas, según la 3ª Clasificación, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final.

Categoría	Tarea			Total
	II.1	II.3	II.5	
SubNA	1	13	9	23
SubA	10	4	1	15
ME	0	0	0	0
SobA	6	2	0	8
SobNA	2	2	8	12

En la Figura 6. 8 hemos considerado las subestimaciones/sobrestimaciones sin discernir si son aceptables y no. Observamos que en la tarea II.3 predominan las subestimaciones, mientras que para el resto de tareas se igualan las subestimaciones/sobrestimaciones.

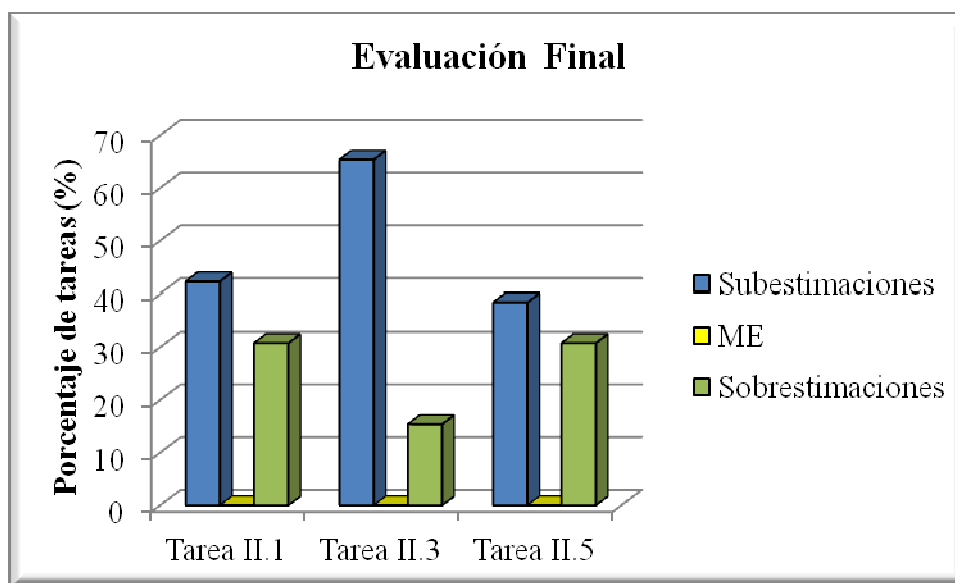


Figura 6. 8. Frecuencias Relativas en Porcentaje de las Subestimaciones/Sobrestimaciones, para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final.

4.2.3. Análisis Estadístico

A partir de los datos considerados, descartando los valores atípicos, obtenemos los estadísticos que recoge la Tabla 6. 38. Aunque la prueba la realizan 26 alumnos, podemos observar cómo el número de datos considerados para el estudio estadístico oscila entre 18 y 21, ya que muchas respuestas las tenemos que descartar atendiendo a los criterios anteriormente descritos (apartado 1).



Con los datos de que disponemos para evaluar la capacidad estimativa señalamos que la tarea de estimar la superficie de la pizarra es la que presenta menos dificultad para los alumnos de las tres propuestas, ya que el porcentaje medio del error en valor absoluto es del 19.66%, frente al 67.26% de la tarea de estimación de la superficie de la diana o el 112.17% de la tarea de estimación del mapa de España. La media aritmética de las estimaciones de la superficie de la pizarra se aproxima bastante a la medida exacta de la misma, en comparación con la tarea de estimar de la superficie de la diana, donde es claramente inferior a la medida exacta o la tarea de estimar la superficie del mapa de España donde es claramente superior (véase Tabla 6. 38).

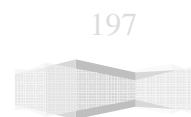
Tabla 6. 38. Estadísticos para las Tareas de Estimación de Superficies de la Evaluación Final.

Estadístico	Tarea		
	II.1	II.3	II.5
Tamaño muestral	19	21	18
Media aritmética	2.61	1.74	52
Desviación típica	0.64	2.1	51.88
Medida exacta	2.76 (m ²)	3.8 (dm ²)	42 (dm ²)
Porcentaje medio de error ³⁶	-5.36%	-54.3%	23.81%
Porcentaje medio del error en valor absoluto ³⁷	19.66%	67.26%	112.17%

Los diagramas de cajas y bigotes correspondientes (véase Figura 6. 9) ponen de manifiesto estas circunstancias, ya que la medida exacta cae dentro del intervalo intercuartílico en las tareas II.1 y II.5. En la tarea II.3 la medida exacta supera el tercer cuartil reafirmando la tendencia a la subestimación.

³⁶ Media aritmética del porcentaje de error, considerando el porcentaje de error sin valor absoluto.

³⁷ Media aritmética del porcentaje de error, considerando el porcentaje de error en valor absoluto.



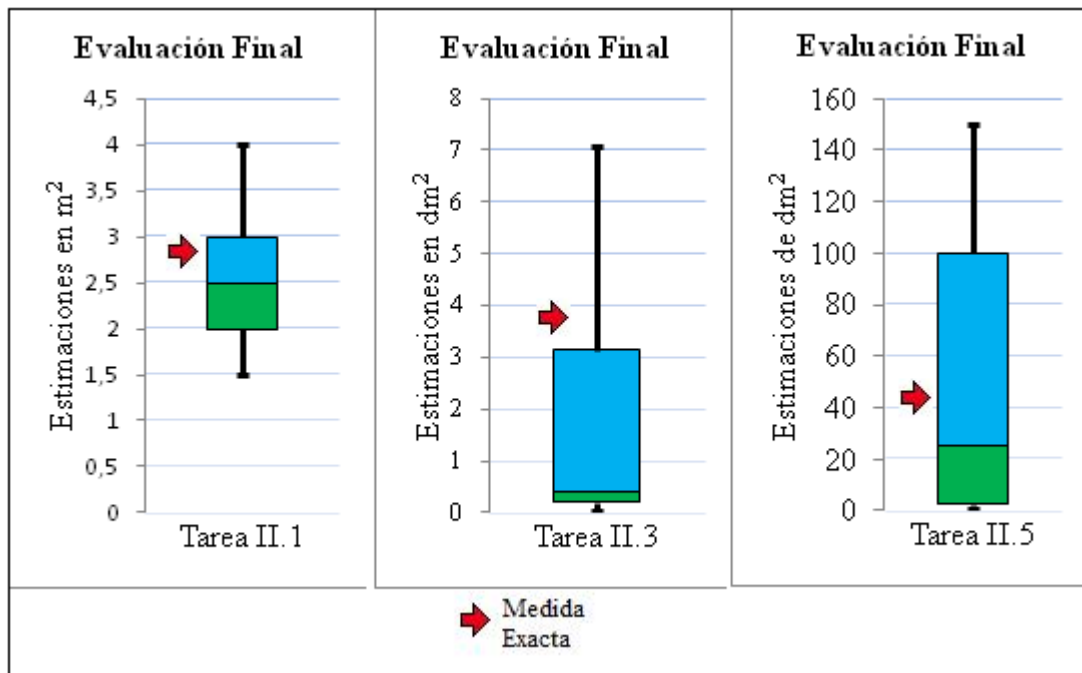


Figura 6. 9. Diagramas de Cajas y Bigotes para Estimaciones de Superficies de la Evaluación Final.

Para confirmar esta dependencia de la subestimación/sobrestimación con la tarea realizamos los siguientes contrastes de hipótesis. Contrastamos si la media de las estimaciones en superficie que dan los alumnos, difiere estadísticamente de la medida exacta. Para ello planteamos las siguientes hipótesis estadísticas:

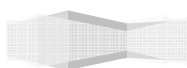
$H_{0, II.1, Ev\ Final}$: *La media aritmética de las estimaciones del área de la pizarra (tarea II.1) es igual a la medida exacta ($2.76\ m^2$), para las respuestas consideradas de la Evaluación Final.*

$H_{0, II.3, Ev\ Final}$: *La media aritmética de las estimaciones del área de la diana (tarea II.3) es igual a la medida exacta ($3.8\ dm^2$), para las respuestas consideradas de la Evaluación Final.*

$H_{0, II.5, Ev\ Final}$: *La media aritmética de las estimaciones del área del mapa de España (tarea II.5) es igual a la medida exacta ($42\ dm^2$), para las respuestas consideradas de la Evaluación Final.*

La hipótesis alternativa (H_1) para cada uno de los contrastes anteriores es que la media aritmética de las estimaciones respectivas no es igual a la medida exacta de la cantidad a estimar.

Realizamos los respectivos contrastes de hipótesis estableciendo un nivel $\alpha=0.05$ (nivel de confianza del 95%). Como realizamos contrastes para la media de una distribución



normal con varianza desconocida y el tamaño de la muestra es ≤ 30 utilizamos la t-Student. El programa IBM SPSS Statistics 19 genera las tablas cuando realizamos el contraste relativo a las hipótesis con los resultados considerados que los sujetos dan para cada una de las tareas.

Para el contraste $H_{0, II.1, Ev. Final}$ el estadístico (véase Tabla 6. 39) nos genera un valor de significancia (bilateral) de $0.33 > 0.05$, luego aceptamos la hipótesis nula y podemos afirmar que no existen diferencias significativas entre la media de las estimaciones de los sujetos y la medida exacta de la superficie de la pizarra.

Tabla 6. 39. Contraste de Hipótesis $H_{0, II.1, Ev. Final}$
Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 2.76					
	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
III1_EvFin	-1,002	18	,330	-,14789	-,4580	,1622

Para el contraste $H_{0, II.3, Ev. Inicial}$ el estadístico (véase Tabla 6. 40) nos genera un valor de significancia (bilateral) de $0.000 < 0.05$, lo que nos lleva a rechazar la hipótesis nula, y podemos afirmar que existen diferencias significativas entre la media de las estimaciones de los sujetos y la medida exacta de la superficie de la diana. Además, como el intervalo de confianza (al 95%) para la diferencia es negativo, podemos corroborar que en esta tarea hay una clara tendencia a la subestimación.

Tabla 6. 40. Contraste de Hipótesis $H_{0, II.3, Ev. Final}$
Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 3.8					
	t	Gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
Tarea II.3	-4,508	20	,000	-2,06338	-3,0182	-1,1085

Para el contraste $H_{0, II.5, Ev. Inicial}$ el estadístico (véase Tabla 6. 41) nos genera un valor de significancia (bilateral) de $0.425 > 0.05$, lo que nos lleva a aceptar la hipótesis nula, y podemos afirmar que no existen diferencias significativas entre la media de las estimaciones de los sujetos y la medida exacta de la longitud del pegamento en barra.

Tabla 6. 41. Contraste de Hipótesis $H_{0, II.5, Ev. Final}$
Prueba para una muestra

	Valor de prueba = 42					
	t	Gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
					Inferior	Superior
Tarea II.5	,818	17	,425	9,99944	- 15,8006	35,7995

4.2.4. Análisis de la Influencia del Factor Nacionalidad

Contrastamos si existen diferencias significativas entre las medias de las estimaciones realizadas por los alumnos, agrupados según la variable Nacionalidad³⁸.

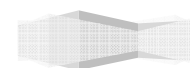
$H_{0, Superficie, Ev Final, N}$: *La diferencia de las medias aritméticas del porcentaje del error en valor absoluto de las estimaciones de superficies en la Evaluación Final agrupadas según la variable Nacionalidad es nula.*

La hipótesis alternativa (H_1) para el contraste anterior es que la diferencia de las medias aritméticas del porcentaje de error las estimaciones de superficies en la Evaluación Final agrupadas según la variable Nacionalidad no es nula. Para contrastar las hipótesis anteriores suponemos normalidad. El programa SPSS nos genera los estadísticos recogidos en la Tabla 6. 42.

Tabla 6. 42. Estadísticos para el Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Final Agrupados según la Variable Nacionalidad.

Nacionalidad	N	Media	Desviación típica	Error típico	Intervalo de confianza para la media al 95%
--------------	---	-------	-------------------	--------------	---

³⁸ Considerada dicotómica, según los valores: “nacionalidad española” y “nacionalidad no española”.



					Límite inferior	Límite superior
No española	34	65,9344	56,42587	9,67696	46,2465	85,6223
Española	24	65,1425	45,71622	9,33179	45,8382	84,4468
Total	58	65,6067	51,83412	6,80615	51,9776	79,2358

Podemos confirmar la hipótesis de igualdad de varianzas para todas las tareas, pues la Prueba de Levene nos da un nivel de significación (0.564) superior al 5% (véase Tabla 6. 43). Así pues, las hipótesis asociadas a estas tareas serán contrastadas asumiendo normalidad y homocedasticidad (igualdad de varianzas).

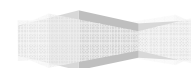
Tabla 6. 43. Prueba de Homogeneidad de Varianzas para la Variable Dependiente Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Final Agrupados según la Variable Nacionalidad.
Prueba de homogeneidad de varianzas

Estadístico de	gl1	gl2	Sig.
Levene			
,336	1	56	,564

El Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad genera los resultados recogidos en la Tabla 6. 44, donde el estadístico nos da un valor de significancia (bilateral) de $0.955 > 0.05$, luego aceptamos la hipótesis nula y podemos afirmar con un nivel de confianza del 95% que no existen diferencias significativas en la media del porcentaje del error en valor absoluto de las estimaciones de los sujetos, agrupados según la variable nacionalidad. Por tanto, el factor Nacionalidad no influye en la precisión de las estimaciones de superficies, y en este caso tampoco es un factor determinante en la capacidad estimativa.

Tabla 6. 44. Análisis de la Varianza del Factor Nacionalidad en la Variable Porcentaje del Error en Valor Absoluto de las Estimaciones de Superficies en la Evaluación Final.
ANOVA

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Inter-grupos	8,823	1	8,823	,003	,955
Intra-grupos	153137,390	56	2734,596		
Total	153146,213	57			



4.2.5. Conclusiones

En las tareas de estimación de superficies descartamos 25.64% de las tareas por diversos motivos: no especificar unidad de medida, no utilizar una unidad de medida coherente o adecuada a la magnitud a estimar, por ser valores estadísticamente atípicos o, simplemente, por no contestar a la tarea. El porcentaje de respuestas aceptables dadas a las diferentes tareas de estimación de superficies es tan solo del 29.49%.

La clasificación de las respuestas nos permite comprobar que en las respuestas a las tareas hay cierta tendencia a la subestimación. Sin embargo, esta tendencia solo la podemos confirmar estadísticamente en la tarea de estimar la superficie de la diana. Creemos que es posible que haya influido la forma de la cantidad a estimar en las respuestas de los alumnos. Luego, aquí también podemos afirmar que la tendencia a la subestimación/sobrestimación no depende de la magnitud, sino de la tarea.

Finalmente ponemos de manifiesto que hemos confirmado estadísticamente la nacionalidad (entendida como ser español o extranjero), es una variable que no determina la capacidad estimativa en las estimaciones de superficies de la Evaluación Final.

4.3. Comparación de los Resultados de la Estimación de Longitudes y Superficies

Recogemos en la Tabla 6. 45 un resumen que recoge los porcentajes de tareas aceptables, no aceptables y no consideradas, y el Porcentaje Medio de Error para cada una de las magnitudes estudiadas. Al igual que en le Evaluación Inicial, en la Evaluación Final encontramos una diferencia considerable en el número de respuestas no consideradas: 25.64% para la magnitud superficie frente al 9.62% de la magnitud longitud. Esto nos indica que los alumnos, tras el proceso de enseñanza-aprendizaje, siguen encontrando más dificultades para la magnitud superficie que para la magnitud longitud. Además el número de respuestas aceptables es sensiblemente inferior para las estimaciones relativas a la magnitud superficie que para la magnitud longitud.

Aquí también observamos, mediante el Porcentaje Medio de Error, que las estimaciones realizadas para la magnitud superficie son mucho más imprecisas que las estimaciones de longitudes.



Tabla 6. 45. Cuadro Resumen de Clasificación de las Tareas y Porcentaje del Error en Valor Absoluto para la Evaluación Inicial.

Tipos de respuestas		Magnitud	
		Longitud	Superficie
RC	RA	75.96%	29.49%
	RNA	14.42%	44.87%
RNC		9.62%	25.64%
P.M.E. ^a		15.05%	66.36%

a. PME=Porcentaje Medio de Error (media aritmética del porcentaje medio del error en valor absoluto para cada una tareas)

5. COMPARATIVA ENTRE LA EVALUACIÓN INICIAL Y FINAL

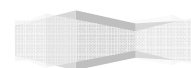
La comparativa de los resultados del análisis cuantitativo de las tareas tipo A la realizamos por separado para las tareas de estimación de longitudes y las de superficies.

5.1. Comparación de las Estimaciones de Longitudes

En los análisis de las tareas de estimación de longitudes, anteriormente realizados para la Evaluación Inicial y Final, nos encontramos con que en todas las tareas de estimación de longitudes aumenta el número de resultados aceptables (RA). Esto es un indicio de que ha mejorado la capacidad estimativa de los alumnos. En concreto, en la tarea de estimar del largo de la mesa del profesor (tarea I.1) pasamos de 18 estimaciones aceptables en la Evaluación Inicial a 24 en la Evaluación Final; en la tarea de estimar el grosor de la mesa del profesor (tarea I.3) pasamos de 15 resultados aceptables a 18; en la tarea de estimar el largo del pegamento en barra (tarea I.5) pasamos de 13 a 18; y en la tarea de estimar el largo de la cuerda (tarea I.7) pasamos de 13 a 19 estimaciones aceptables.

Corroborando esta mejoría de la capacidad estimativa obtenemos que el porcentaje medio del error en valor absoluto disminuye para todas las tareas de estimación de longitudes: en la tarea I.1 pasamos del 24.22% al 12.5%; en la tarea I.3 pasamos del 29.76% al 14.77%; en la tarea I.5 pasamos del 35.44% al 17.53%; y en la tarea I.7 pasamos del 23.19% al 15.4%.

Con respecto a la subestimación/sobrestimación hemos obtenido tanto en la Evaluación Inicial como en la Evaluación Final los mismos resultados: no hay diferencias



significativas (con un nivel de confianza del 95%) entre la medida exacta del largo de la mesa del profesor y la media de las estimaciones realizadas por los alumnos; en cambio, los contrastes sí encontraron diferencias para el resto de tareas: en la tarea de estimar el grosor de la mesa hemos obtenido para ambas evaluaciones tendencia a la sobrestimación; en las otras dos tareas (tareas I.5 y I.7) el contraste ha puesto de manifiesto, en ambas evaluaciones, la existencia de tendencia a la subestimación cuando los alumnos estiman el largo del pegamento en barra o la longitud de la cuerda.

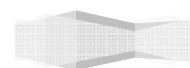
Concluimos que la comparativa de la Evaluación Inicial con la Evaluación Final nos muestra atisbos de mejoría de la capacidad estimativa de los alumnos. Sin embargo, aunque en algunas tareas haya mejorado significativamente la capacidad estimativa, se ha mantenido la tendencia que presentaban a la subestimación/sobrestimación. En concreto, para la tarea de estimar la longitud del pegamento en barra y para la tarea de estimar la longitud de la cuerda ha disminuido significativamente la media del porcentaje de error en valor absoluto y aun así, se ha mantenido la tendencia a la subestimación que presentaban en la Evaluación Inicial en la Final. En la tarea de estimar el grosor de la mesa, la mejoría no ha sido tan significativa, y se ha mantenido la tendencia a la sobrestimación. La tarea de estimar el largo de la mesa del profesor ha seguido sin presentar tendencia a la subestimación o sobrestimación.

Por tanto, podemos confirmar, como ya hemos puesto de manifiesto anteriormente, que la tendencia a la subestimación/sobrestimación no depende de la magnitud, sino de la tarea, esto es, de la cantidad a estimar.

Finalmente indicamos que hemos confirmado estadísticamente (en ambas evaluaciones) que la nacionalidad (entendida como ser español o extranjero), no es una variable que determine la capacidad estimativa en las estimaciones de longitudes.

5.2. Comparación de las Estimaciones de Superficies

La comparación de los datos de los análisis de las tareas de estimación de superficies revela que, en primer lugar, el número de respuestas que hemos considerado en la Evaluación Final aumenta notablemente respecto de la Evaluación Inicial. Este aumento ha sido constatado para todas las tareas: en la tarea II.1 solo son consideradas 8 respuestas mientras que en la Evaluación Final la cantidad asciende a 19; en la tarea II.3 pasamos de considerar 9 respuestas en la Evaluación Inicial a 21 en la Evaluación Final;

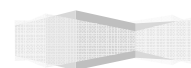


y en la tarea II.5 de 8 respuestas en la Evaluación Inicial a 18 en la Evaluación Final. Estos datos evidencian una mejoría cuantitativa en la capacidad de los alumnos para enfrentarse a este tipo de tareas para la magnitud superficie. Por otra parte, el aumento del número de respuestas consideradas en la Evaluación Final nos ha permitido evaluar la capacidad estimativa en superficie obteniendo resultados más fiables.

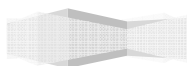
En segundo lugar, reseñamos que el número de estimaciones aceptables aumenta más notablemente para unas tareas que para otras. En concreto, en la tarea II.1 pasamos de 4 resultados aceptables en la Evaluación Inicial a 16 en la Evaluación Final; en la tarea II.3 pasamos de no tener ninguna respuesta aceptable en la Evaluación Inicial a seis en la Evaluación Final; y en la tarea II.5 prácticamente se ha mantenido, pues hemos pasado de dos respuestas aceptables en la Evaluación Inicial a tan solo una en la Evaluación Final. Corroborando estos datos hemos obtenido que el porcentaje medio del error en valor absoluto disminuye para la tarea II.1, pues pasamos del 41.44% al 19.66%; en la tarea II.3 pasamos de un porcentaje medio del error en valor absoluto del 87.22% en la Evaluación Inicial a un 67.26% en la Evaluación Final; en cambio, la tarea II.5 arroja un resultado negativo, pues pasamos del 95.39% al 112.17%.

Con respecto al estudio de la tendencia obtenemos en la Evaluación Final que no hay diferencias significativas (con un nivel de confianza del 95%) entre la medida exacta de la superficie de la pizarra y la media de las estimaciones realizadas por los alumnos (tarea II.1); en la tarea de estimar la superficie del mapa de España (tarea II.5) tampoco hemos encontrado diferencias significativas entre la media de las estimaciones y la medida exacta; en cambio, sí hemos encontrado diferencias para la tarea de estimar la superficie de la diana (tarea II.3), obteniendo tendencia a la subestimación. Aunque en la Evaluación Inicial no hemos realizado contrastes de hipótesis por disponer de pocos datos, los estadísticos descriptivos apoyan esta tendencia a la subestimación. Una hipótesis pendiente de estudio que podría justificar esta circunstancia es que los alumnos tienen tendencia a la subestimación cuando tienen que estimar cantidades de superficies con forma circular.

También podemos confirmar a la vista del análisis de los resultados de las estimaciones en superficie que la tendencia a la subestimación/sobrestimación no depende de la magnitud, sino de la tarea, esto es, de la cantidad a estimar.



Finalmente ponemos de manifiesto que hemos confirmado estadísticamente que la nacionalidad (entendida como ser español o extranjero) es una variable que no determina la capacidad estimativa en las estimaciones de superficie.



CAPÍTULO 7: ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA EVALUACIÓN INICIAL Y FINAL

En este capítulo avanzamos en el análisis de la capacidad estimativa de los alumnos a partir de las respuestas dadas a las tareas tipo A en las fichas de Evaluación Inicial y Final. Estudiamos ahora los datos desde un punto de vista cualitativo, analizando los errores en los que incurren los alumnos y los procedimientos de resolución utilizados en las distintas tareas.

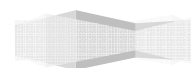
Partiendo de una clasificación de errores de un trabajo previo (Castillo, 2006), ampliamos la misma con nuevas tipologías que emergen en la resolución de las tareas de estimación de esta investigación. La categorización de errores obtenida, aplicada a la Evaluación Inicial y Final, constituye una primera aproximación hacia el descubrimiento de las dificultades que hacen que los alumnos incurran en estos errores.

En el análisis de los procedimientos empleados en la resolución de las tareas de estimación nos centramos en tres aspectos: procesos o estrategias puestas en juego, referentes utilizados en las comparaciones y unidad utilizada para expresar el resultado. Este análisis nos permite dar respuesta a cómo los estudiantes realizan las estimaciones.

1. ANÁLISIS DE ERRORES EN LA EVALUACIÓN INICIAL Y FINAL

Comenzamos el análisis de errores aportando un registro de los diferentes tipos de error identificados en las producciones de los estudiantes. Para la elaboración de dicho registro hemos considerado las reflexiones teóricas³⁹ fruto de la revisión de antecedentes y la revisión de las respuestas dadas por los alumnos a las diferentes fichas. La tipología de errores obtenida la estudiamos para las producciones de los alumnos en las tareas Tipo A de la Evaluación Inicial y Final, lo que nos va a permitir obtener algunas conclusiones acerca de cómo evoluciona el proceso de aprendizaje de los alumnos. En las tareas tipo B no es factible aplicar la tipología errores que vamos a

³⁹ Véase apartado 2 del capítulo 4.



describir ya que, como veremos a continuación, existe una dependencia de algunos tipos de error respecto al porcentaje de error de las estimaciones y esto sólo es posible calcularlo para las tareas tipo B.

1.1. Tipos de Errores Asociados a la Estimación de Cantidades Continuas

Para clasificar las respuestas según los resultados y los razonamientos expresados por los alumnos consideramos la siguiente tipología de errores:

E1. Error de cálculo en las operaciones

Consideramos que un alumno comete un error de este tipo cuando se equivoca en la realización de los cálculos. La Figura 7. 1 muestra un ejemplo correspondiente a la tarea II.3 de la Evaluación Final: el alumno A25 responde, que la superficie de la diana es “15x15 cm=30 cm²”, dando como resultado la suma en vez del producto de ambos números.

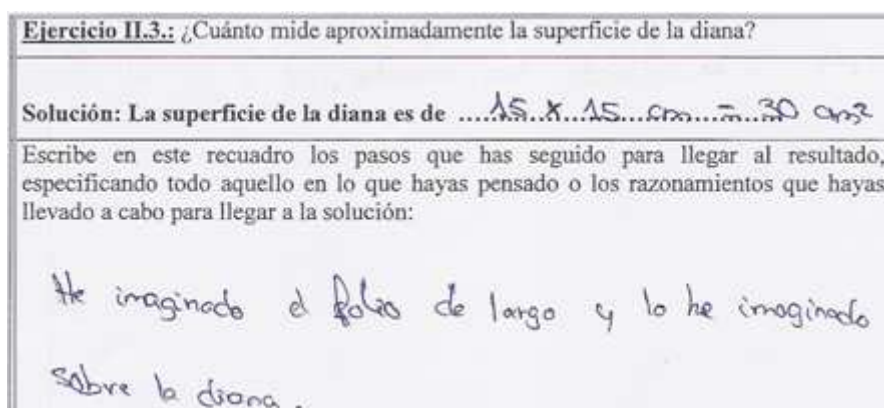


Figura 7. 1. Respuesta del Alumno A25 en la Tarea II.3 de la Evaluación Final

E2. Error de percepción de la magnitud

Diremos que un alumno comete este tipo de error cuando al resolver una tarea, en su argumentación, pone de manifiesto que usa una magnitud por otra. Por ejemplo en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial en la que se pide estimar la superficie de la pizarra, el alumno A1 responde “1 m” poniendo de manifiesto en su explicación que está estimando una longitud y no una superficie (Figura 7. 2).



Ejercicio II.1: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pizarra?
Solución: La superficie de la pizarra es de 1 m
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:
Si la cuerda mide 1m y medio, si ponemos la cuerda como medida nos sobrara.

Figura 7. 2. Respuesta del Alumno A1 en la Tarea II.1 de la Evaluación Inicial

E3. Error de significado de términos propios de la magnitud

Un alumno comete un error de tipo E3 cuando utiliza inadecuadamente o confunde algún término relacionado con la magnitud que está estimando. Las matemáticas tienen un lenguaje propio, que en muchas ocasiones lleva a error debido a la confusión o desconocimiento de alguno de los términos utilizados (Socas, 1997). Para expresar características relacionadas con un determinado objeto, su forma o alguna de sus cantidades de magnitud, entre otros elementos, se utilizan términos que tratan de describirlos. Por ejemplo, se suelen utilizar los términos largo, ancho, alto, distancia, grosor, diámetro, radio,... para referirse a distintas cantidades de longitud. En la Figura 7. 3 se muestra una respuesta del alumno A5 en la que confunde los términos grueso y ancho.

Ejercicio I.3: ¿Qué grosor tiene aproximadamente la mesa del profesor?
Solución: El grosor de la mesa del profesor es de..... 1 metro
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:
Porque mas o menos cuando extiendes los brazos es 1 metro aproximado y lo he coparado

Figura 7. 3. Respuesta del Alumno A5 en la Tarea I.3 de la Evaluación Inicial

E4. Ausencia de unidades de medida

Un alumno comete error del tipo E4 cuando expresa una medida o estimación con sólo un valor numérico, sin indicar la unidad de medida (véase Figura 7. 4).



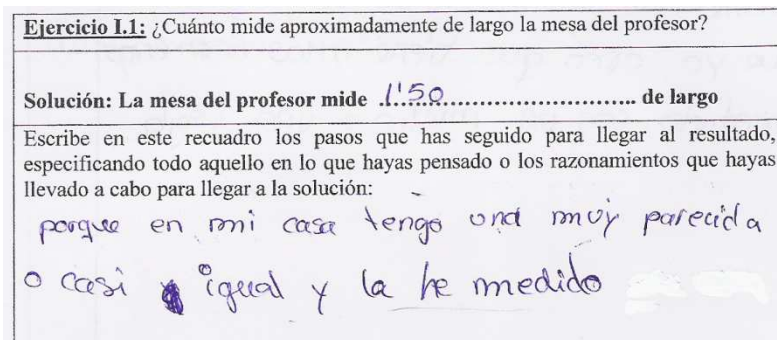


Figura 7. 4. Respuesta del Alumno A23 en la Tarea I.1 de la Evaluación Inicial

En el caso de que el alumno no indique la unidad de medida en el resultado final, pero en el razonamiento sí haga alusión a la misma, no lo consideramos un error de este tipo. Por ejemplo, el alumno A27 en la tarea I.7 responde que la longitud de la cuerda es “Unos 2”, sin indicar unidad de medida, pero en su razonamiento indica que se está refiriendo a metros: “Comparándolo con las ventanas, suponiendo que las ventanas miden 1 m”.

E5. Empleo de unidades de medida no adecuadas

Un alumno comete un error del tipo E5 cuando expresa la medida de una determinada cantidad de magnitud utilizando unidades de medida de otra magnitud. Así ocurre en el ejemplo de la Figura 7. 5 correspondiente a la tarea II.1 de la Evaluación Inicial: el alumno A12 se está refiriendo a la magnitud superficie pero utiliza unidades de la magnitud longitud.

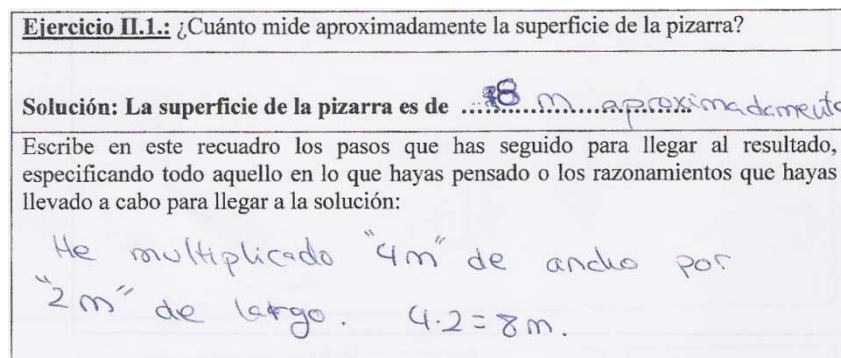


Figura 7. 5. Respuesta del Alumno A12 en la Tarea II.1 de la Evaluación Inicial

Es frecuente que el error de tipo E5 aparezca conjuntamente con el error de tipo E2. Por ejemplo, el alumno A6 responde en la tarea II.1 de la evaluación inicial que la superficie de la pizarra mide “2,5 m”, y argumenta “Porque es más pequeña que la cuerda con 0’5 m”.

E6. Error de conversión de unidades de medida

Un alumno comete error de tipo E6 cuando al realizar el cambio de una unidad de medida a otra, múltiplo o divisor de la anterior, no realiza correctamente la conversión. En el ejemplo que se muestra en la Figura 7. 6, el alumno A13, en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial, indica que 2.5 metros son “0'25 dm”. Este ejemplo también sirve para ilustrar que los diferentes tipos de error no son disjuntos, pues este alumno también comete un error de tipo E2 y E5, ya que confunde la magnitud que estaba estimando y no usa una unidad adecuada o coherente con la magnitud a estimar.

Ejercicio II.1: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pizarra?
Solución: La superficie de la pizarra es de0'25 dm.....
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:
Por que si mide 2'5 metros aproximadamente lo paso a metros. 2'5 → 0'25

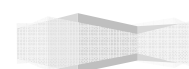
Figura 7. 6. Respuesta del Alumno A13 en la Tarea II.1 de la Evaluación Inicial

E7. Interiorización inadecuada de la medida de referentes

Un alumno incurre en un error del tipo E7 cuando no tiene interiorizada una medida adecuada o aceptable de algún referente de la magnitud a estimar. En el ejemplo de la Figura 7. 7, el alumno A6 responde en la tarea I.1 de la Evaluación Final que el largo de la mesa del profesor es “2 metros” indicando haber utilizado como referente de 1 metro el largo de la mesa del alumno que medía 70 cm de largo (porcentaje de error del 42.9%).

Ejercicio I.1: ¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor?
Solución: La mesa del profesor mide2m..... de largo
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:
Si una mesa de alumno mide un metro la mesa de profesor mide aproximadamente dos mesas de alumno

Figura 7. 7. Respuesta del Alumno A6 en la Tarea I.1 de la Evaluación Inicial



Cuando no podemos comprobar la validez de la medida que el alumno ha considerado para un determinado referente, por no disponer de la medida exacta de dicho referente, la valoramos en función del porcentaje de error cometido en la estimación. Por ejemplo el alumno A9, en la tarea I.5 de la Evaluación Inicial en la que le pedimos que estime la longitud de un bote de pegamento en barra, estima que mide “2’5 cm” argumentando “Mide más o menos como un móvil”. Aunque no dispongamos de la medida exacta del teléfono móvil debido a la gran variedad de modelos que hay en el mercado, podemos intuir que la medida que tiene interiorizada de su teléfono móvil es errónea con motivo del alto porcentaje de error en el que incurre en dicha estimación el cual es de -73.4%.

Cuando un alumno utiliza o compara con instrumentos de medida no presentes (una regla, una cinta métrica...), entonces consideramos que está utilizando un referente y, por tanto, el error que pueda surgir será clasificado como E7. Por ejemplo, el alumno I.5 en la Evaluación Inicial da como medida del pegamento en barra “5 centímetros” objetando “Me he imaginado cuanto son 5 centímetros de una regla y yo pienso que mide 5 centímetros.”.

E8. Interiorización inadecuada del tamaño de las unidades de medida del S.I.

Un alumno comete error del tipo E8 cuando pone de manifiesto que no tiene interiorizada una cantidad adecuada o aceptable de una unidad de medida del Sistema Internacional. Este error se presenta tanto cuando el alumno compara directamente con las cantidades que tiene interiorizadas para las unidades de medida del Sistema Internacional como en casos en que compara con múltiplos o divisores de las mismas. En el ejemplo de la Figura 7. 8 correspondiente a la tarea I.7 de la Evaluación Inicial, el alumno A21 responde que la longitud de la cuerda es de “cuatro metros” e indica haber comparado y considerado de igual medida la cuarta parte de la cuerda con la cantidad que tiene interiorizada de un metro. Este razonamiento le hace incurrir en un error del 33.3%. Por tanto, no consideramos aceptable la cantidad que le asigna a la unidad de medida utilizada (metro).



<p>Ejercicio I.7: ¿Qué longitud aproximada tiene la cuerda que hay colgada en la pared?</p>
<p>Solución: La cuerda mide <u>..Cuatro.....metros.....</u> de largo</p>
<p>Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:</p> <p>La he dividido en 4 partes, para ver si un cuarto, equivaldría a un metro. Si equivale. Por lo que la cuerda mide cuatro m. aproximadamente.</p>

Figura 7. 8. Respuesta del Alumno A21 en la Tarea I.7 de la Evaluación Inicial

E9. Error en la comparación de cantidades

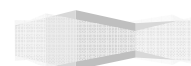
Un alumno comete un error del tipo E9 cuando realiza una comparación e iguala cantidades que no lo son, dando lugar a una estimación no aceptable. Este tipo de error puede ser de tres subtipos que describimos a continuación:

E9i. Error en la comparación por igualdad de cantidades

Un alumno comete este error cuando considera iguales cantidades que no lo son. Por ejemplo, véase en la Figura 7. 9 el razonamiento del alumno A14 en la tarea I.7 de la Evaluación Final. Si tomamos como válida la medida de la longitud de la puerta (ya que medía 2.05 m), y sabiendo que la medida exacta de la longitud de la cuerda es 3 metros, obtenemos un porcentaje de error de -33%.

<p>Ejercicio I.7: ¿Qué longitud aproximada tiene la cuerda que hay colgada en la pared?</p>
<p>Solución: La cuerda mide <u>.....2m.....</u> de largo</p>
<p>Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:</p> <p>He comparado la cuerda con la longitud de la puerta que tiene 2m y creo que son aproximadamente iguales. Creo que tiene unos 2m.</p>

Figura 7. 9. Respuesta del Alumno A14 en la Tarea I.7 de la Evaluación Final



E9a. Error en la comparación aditiva de cantidades

Un alumno incurre en este error cuando obtiene un resultado fuera del margen de aceptabilidad mediante la suma o diferencia de la medida estimada de dos cantidades (véase respuesta del alumno A11 en tarea I.1 de la Evaluación Final en Figura 7. 10. Recordamos que la medida exacta de la mesa del profesor es 1,4 metros).

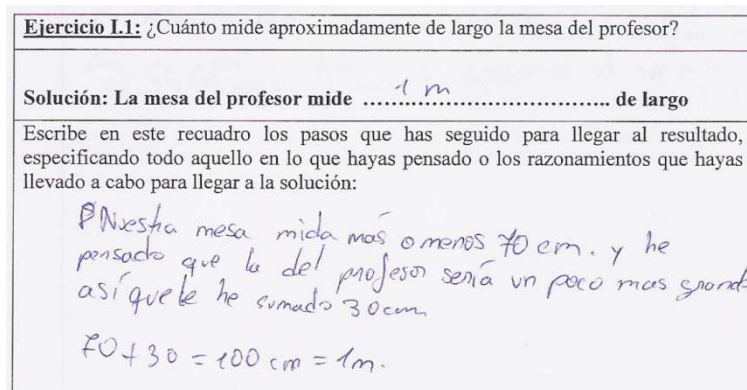


Figura 7. 10. Respuesta del Alumno A11 en la Tarea I.1 de la Evaluación Final

E9m. Error en la comparación multiplicativa de cantidades.

El error lo comete el alumno al comparar una cantidad con un múltiplo de la otra cantidad o con un divisor de la otra cantidad y obtener un resultado fuera del margen de aceptabilidad. Por ejemplo el alumno A10, en la tarea I.3 de la Evaluación Inicial, responde que el grosor de la mesa sobre la que escribía es de “4 cm” incurriendo en un error del 100% aunque la medida del referente que utiliza en dicho razonamiento es adecuada (véase Figura 7. 11).

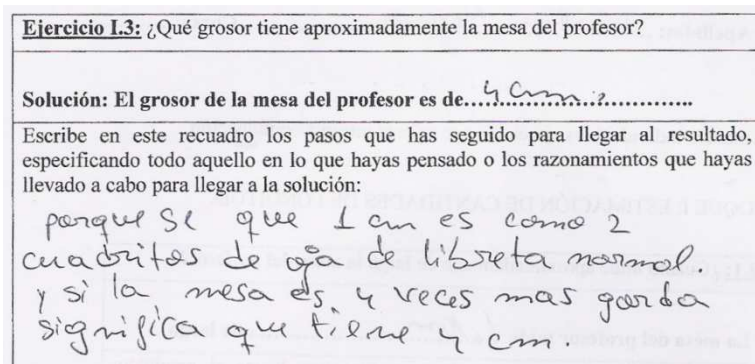


Figura 7. 11. Respuesta del Alumno A10 en la Tarea I.3 de la Evaluación Inicial



E10. Uso de fórmulas incorrectas

Un alumno comete un error del tipo E10 cuando trata de realizar una medida o una estimación empleando una fórmula inapropiada que no permite hallar una aproximación adecuada. Por ejemplo, como apreciamos en la Figura 7. 12, el alumno A4 utiliza en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial como fórmula para medir el área de la pizarra Longitud+Altura.

Ejercicio II.1: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pizarra?
Solución: La superficie de la pizarra es de <u>4 metros</u>
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:
$2'5 + 1'5 = 4m$ $\text{Longitud} + \text{Altura} = 4m$

Figura 7. 12. Respuesta del Alumno A4 en la Tarea II.1 de la Evaluación Inicial

Las anteriores categorías de error están referidas a estimación de longitudes y superficies. En muchos casos en los que los estudiantes estiman superficies, detectamos que al utilizar técnicas indirectas de estimación, como es el empleo de fórmulas matemáticas, la estimación de la superficie se reduce a estimar cantidades de la magnitud longitud y emplear dichas cantidades en la fórmula. Hay una tipología de error que solo tiene sentido para la magnitud superficie la cual presentamos a continuación.

E11. Error por propagación de la longitud a la superficie

Diremos que un alumno comete error del tipo E11 cuando utiliza una fórmula adecuada en la estimación de la superficie, pero realiza una estimación deficiente de diferentes cantidades de la magnitud longitud que emplea posteriormente en dicha fórmula dando lugar a que el porcentaje de error de la cantidad de la magnitud superficie estimada supere el 30% y, en consecuencia, la estimación sea no aceptable. Al aplicar esta categoría no vamos a profundizar en la valoración de los motivos por los cuales las estimaciones de la magnitud longitud son deficientes, ni en qué porcentaje de error se



comete al realizar dichas estimaciones, ya que lo que nos interesa es controlar que el porcentaje de error de la estimación de la magnitud superficie no supere los límites establecidos (30% en nuestro caso). Es posible que las estimaciones de la magnitud longitud sean aceptables (en el sentido de que no superan el 30%), pero resulte que la estimación de la magnitud superficie sea no aceptable.

Un ejemplo de este error se muestra en la Figura 7. 13. En este ejemplo de la tarea II.3 de la Evaluación Final, el alumno A21 estima que el área de la diana es “530’66 cm²” cometiendo un error relativo del 39.65%. En este caso el alumno utiliza la fórmula del área del círculo correctamente, pero comete un error al estimar el radio de la diana, ya que indica que “estimado a simple vista valdría 13 cm”. Aunque el error que comete al estimar el radio es aceptable, ya que tan sólo comete un error relativo del 18.18% (el valor considerado exacto del radio es de 11 cm), la estimación del área de la diana no resulta aceptable. La explicación para esta propagación del error la encontramos en la Teoría de Errores. En nuestro caso, si llamamos “r” al radio exacto y “e” al error cometido al estimar el radio, al aplicar la fórmula del área del círculo se obtiene:

$$A_e = \pi(r + e)^2 = \pi(r^2 + e^2 + 2re) = A + \pi(e^2 + 2re)$$

En el desarrollo observamos que el área estimada “A_e” es igual al área exacta “A” más un residuo: “ $\pi(e^2 + 2re)$ ”, que es el error en la estimación de la superficie de la diana y depende del error cometido al estimar el radio “e” y del valor exacto del propio radio “r”.

<p>Ejercicio II.3.: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la diana?</p>
<p>Solución: La superficie de la diana es de</p>
<p>Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:</p>
<p>La superficie la saco con la siguiente fórmula:</p> $S = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 13^2 = 530,66 \text{ cm}^2.$ <p>r → Estimado a simple vista valdría unos 13cm.</p>

Figura 7. 13. Respuesta del Alumno A21 en la Tarea II.3 de la Evaluación Final

Clasificamos las once tipologías de errores anteriormente descritos por una doble vía (véase Tabla 7. 1): según el carácter del error tenemos tanto errores conceptuales como procedimentales; y atendiendo a la relación con el proceso estimativo tenemos errores



intrínsecos al proceso estimativo que son los que se producen en la actividad propiamente estimativa, y errores extrínsecos al proceso estimativos que son los debidos a otros conceptos o procedimientos deficientemente adquiridos como pueden ser los asociados a la magnitud o a su medida. El error E11 no lo hemos incluido en la tabla pues su clasificación dependería de la naturaleza del error en que se incurre cuando se estima la magnitud longitud, pudiendo admitir diferentes clasificaciones.

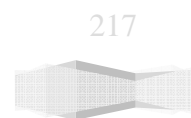
Tabla 7. 1. Clasificación de los Tipos de Error

Tipos de Error	Carácter	Relación con el Proceso Estimativo
E1. Error de cálculo en las operaciones	Procedimental	Extrínseco
E2. Error de percepción de la magnitud	Conceptual	Extrínseco
E3. Error de significado de términos propios de la magnitud	Conceptual	Extrínseco
E4. Ausencia de unidades de medida	Conceptual	Extrínseco
E5. Empleo de unidades de medida no adecuadas	Conceptual	Extrínseco
E6. Error de conversión de unidades de medida	Procedimental	Extrínseco
E7. Interiorización inadecuada de referentes de la propia magnitud a estimar	Conceptual	Intrínseco
E8. Interiorización inadecuadas de unidades de medida del S.I. de la magnitud a estimar	Conceptual	Intrínseco
E9. Error en la comparación de cantidades	Procedimental	Intrínseco
E10. Uso de procedimientos de cálculo incorrectos	Procedimental	Extrínseco

Al analizar las respuestas de los estudiantes, además de la tipología de errores indicados anteriormente, distinguimos las siguientes categorías de respuestas:

NC. El alumno no cumplimenta ningún tipo de respuesta

Etiquetamos con NC aquellas situaciones en las que el alumno no da respuesta alguna y tampoco indica razonamiento alguno. Por ejemplo, el alumno A28 no contesta a la tarea I.3 de la Evaluación Inicial. No indica ningún resultado para la estimación pedida, ni argumenta ningún tipo de razonamiento.



NE. El alumno da una respuesta que no explica ni justifica

Codificamos como NE aquellas situaciones en las que el alumno da un resultado o respuesta sin explicar o razonar cómo lo ha obtenido. Por ejemplo, el alumno A8 contesta en la tarea I.3 de la Evaluación Inicial que el grosor de la mesa es de “5 cm”, pero no da información sobre el proceso que sigue para llegar a ese resultado.

DI. El alumno justifica la respuesta de manera incompleta

Etiquetamos con DI los casos en que el alumno da una respuesta pero la descripción de su razonamiento es ambigua y, por tanto, no se puede identificar que procesos o estrategias utiliza para llegar a la estimación o medida dada. Por ejemplo, la explicación del alumno A15, en la tarea I.3 de la Evaluación Inicial, a su respuesta de “3cm” como estimación del grosor de su mesa de estudio en la que alude a características de la mesa no justifica el modo en que obtiene el valor estimado (véase Figura 7. 14).

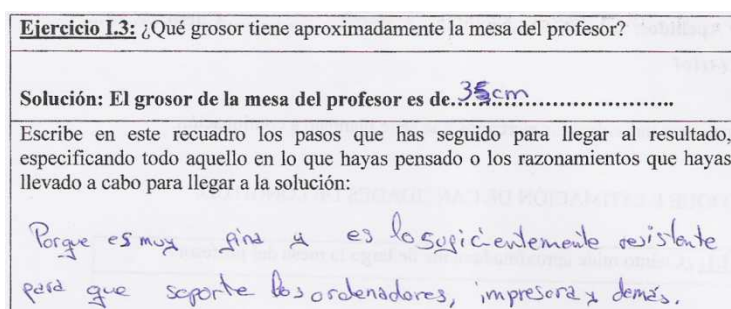


Figura 7. 14. Respuesta del Alumno A15 en la Tarea I.3 de la Evaluación Inicial

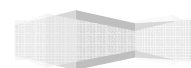
Por último, cuando no se produce ninguna de las situaciones anteriores, consideramos la siguiente categoría:

RRA. Resultado y razonamiento aceptables.

Etiquetamos con RRA las respuestas que aportan un resultado⁴⁰ válido o aceptable siguiendo el criterio de Levine (porcentaje de error menor del 30%) y van acompañadas de una explicación del razonamiento empleado para obtener la medida o estimación en las que no se aprecia error en los procesos explicados..Por tanto, este tipo de respuestas requieren que tanto el resultado como el razonamiento sean aceptables.

Por ejemplo el alumno A9 contesta a la tarea I.1 de la Evaluación Inicial que la medida de la mesa es de “1’5 m”. Aunque incurre en un error del 7.1% (por tanto su estimación

⁴⁰ Para la consideración del resultado se tendrán en cuenta los criterios establecidos en el apartado 1.1



es aceptable), consideramos correctos los razonamientos que el alumno ha seguido para dar la estimación (véase Figura 7. 15).

Ejercicio I.1: ¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor?
Solución: La mesa del profesor mide <u>1.5m</u> de largo
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:
Porque es mas o menos lo que mide mi mesa de estadio

Figura 7. 15. Respuesta del Alumno A9 en la Tarea I.1 de la Evaluación Inicial

Razonamientos incorrectos pueden dar lugar a estimaciones aceptables (nosotros no consideramos estos resultados en esta categoría). Pero al revés no ocurre, es decir, un razonamiento correcto no puede dar lugar a una estimación no aceptable, porque si la estimación no es aceptable será debido a que no es válido el procedimiento seguido para llegar a ella. Nótese que en todo momento nos estamos refiriendo a razonamiento expresado, pues es lo único de lo que disponemos.

1.2. Análisis de Errores en la Evaluación Inicial

Las respuestas dadas por los alumnos a cada una de las tareas de la Evaluación Inicial fueron clasificadas atendiendo a las categorías anteriormente descritas. El proceso de clasificación ha sido realizado por tres expertos, resolviéndose por consenso los desacuerdos. En el Apéndice F.1 recogemos la clasificación de las respuestas de la Evaluación Inicial según las tipologías descritas en el apartado 2.1. Presentamos en diferentes apartados el análisis de las respuestas a las tareas de estimación de longitudes de las de superficies.

1.2.1. Análisis de las Tareas de Estimación de Longitudes

Cada uno de los 26 alumnos que realizó la Evaluación Inicial contestó a cuatro preguntas en las que les pedíamos que estimaran diversas cantidades de longitud (respuestas recogidas en el Apéndice F.1). Por tanto, contamos con un total de 104 estimaciones de longitudes de los estudiantes, dados en las tareas tipo A. El análisis de dichas respuestas atendiendo a los tipos de error y tipos de respuesta anteriormente definidos, nos permite obtener las frecuencias que se presentan en las Tabla 7. 2 y Tabla 7. 3 donde hemos agrupado los subtipos de errores E9i, E9a y E9m en la categoría E9.

Tabla 7. 2. Frecuencias Absolutas de los Tipos de Error en la Evaluación Inicial para Tareas de Estimación de Longitudes.

Error	Tareas				Total
	I.1	I.3	I.5	I.7	
E1	4	0	0	0	4
E2	1	0	0	0	1
E3	0	1	1	0	2
E4	2	0	0	2	4
E5	0	0	0	0	0
E6	0	0	0	0	0
E7	3	3	8	4	18
E8	2	0	0	1	3
E9	1	1	2	4	8
E10	0	0	0	0	0
Total	13	5	11	11	40

Tabla 7. 3. Frecuencias Absolutas de Otras Categorías en la Evaluación Inicial para Tareas de Estimación de Longitudes.

Tipo de respuesta	Tareas				Total
	I.1	I.3	I.5	I.7	
NC	0	2	0	0	2
NE	0	1	1	2	4
DI	2	3	4	5	14
RRA	15	15	10	9	49
Total	17	21	15	16	69

A partir de la información recogida en en las Tabla 7. 2 y Tabla 7. 3 se obtienen los siguientes resultados:

- El total de respuestas aceptables (RRA) es de 49, en un total de 104 tareas (47.12%). Esta circunstancia se produce cuando realizan una estimación con un porcentaje de error menor del 30%, y no incurren en errores conceptuales o procedimentales en el razonamiento expresado.
- En cuatro tareas los alumnos no explican el razonamiento que han seguido para llegar a la estimación (NE); en dos tareas los alumnos no contestan (NC); y en 14 tareas la descripción dada por los alumnos es insuficiente para



determinar qué procedimiento está siguiendo para llegar a la estimación (DI).

De los errores detectados indicamos lo siguiente:

- El tipo de error más frecuente es el E7 (detectado en 18 tareas). Por tanto, la principal razón por la cual las estimaciones de los alumnos son no aceptables es porque utilizan referentes de los cuales no tienen adecuadamente interiorizada la medida.
- El segundo tipo de error más frecuente es el E9 (entre los tres errores, E9i, E9a y E9m, fueron detectados en 8 ocasiones). Por tanto, el segundo motivo de no aceptación de la estimación, aunque con la mitad de frecuencia, son errores en la comparación de cantidades.
- Además podemos destacar que los alumnos cometen errores de cálculo (E1) en cuatro de las tareas, y en otras cuatro tareas no indican unidad de medida (E4). Los demás tipos de error aparecen menos de cuatro veces.

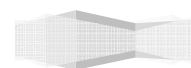
Por tanto, en las estimaciones que realizan los sujetos de la muestra en las tareas de longitud más del 50 % no son aceptables debido principalmente a errores intrínsecos a los procesos estimativos, como son el E7 o los E9, detectándose pocos errores de carácter extrínseco a la estimación. Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de incidir en este tipo de actividades en la educación obligatoria.

1.2.2. Análisis de las Tareas de Estimación de Superficies

Realizando un análisis semejante al anterior para las respuestas a las tareas, tipo A, de estimación de superficies se obtienen las frecuencias que se muestran en las Tabla 7. 4 y Tabla 7. 5 relativas a los tipos de errores y tipos de respuestas dadas por los estudiantes. De nuevo se presentan agrupadas las categorías E9i, E9a y E9m en E9.

Tabla 7. 4. Frecuencias Absolutas de la Tipología de Errores en la Evaluación Inicial para las Tareas de Estimación de Superficies.

Errores	Tareas			Total
	II.1	II.3	II.5	
E1	2	1	1	4
E2	9	12	7	28
E3	1	1	1	3



E4	1	1	1	3
E5	14	13	9	36
E6	1	1	0	2
E7	0	2	1	3
E8	0	0	1	1
E9	0	0	0	0
E10	3	3	3	9
E11	5	2	3	10
Total	36	36	27	99

Tabla 7. 5. Frecuencias Absolutas de Otras Categorías en la Evaluación Inicial para las Tareas de Estimación de Superficies.

Tipos de respuestas	Tareas			Total
	II.1	II.3	II.5	
NC	1	1	5	7
NE	1	2	1	4
DI	2	2	4	8
RRA	2	0	1	3
Total	6	5	11	22

En este caso, cada uno de los 26 alumnos que ha realizado la prueba ha contestado a tres preguntas en las que le pedíamos estimaran diversas cantidades de superficie. Por tanto, en total han realizado 78 tareas de estimación de superficies. Del análisis de las frecuencias de las Tabla 7. 4 y Tabla 7. 5 obtenemos los siguientes resultados:

- Tan sólo tres respuestas son consideradas aceptables (RRA), en un total de 78 tareas (3.85%).
- En siete tareas los alumnos no contestan (NC); en otras cuatro tareas dan una estimación pero no explicaron el razonamiento que habían seguido para llegar a ella (NE); y en 8 tareas la descripción dada por los alumnos es insuficiente para determinar qué proceso o procedimiento está siguiendo para llegar a la estimación (DI).

De los errores detectados indicamos lo siguiente:

- La categoría de error más frecuente es la E5 (en 36 tareas), seguida de la E2 (en 28 tareas). Estas categorías se presentan conjuntamente en un gran número de casos (aunque no en todos).



- El siguiente tipo de error más frecuente es el E11 (en 10 tareas). Es decir, hubo 10 alumnos que incurrieron en un error superior al 30% debido al efecto de la propagación del error.
- La siguiente categoría de error que aparece más frecuentemente es la E10 (en 9 tareas). Esto puede ser debido a la tendencia que muestran los alumnos de calcular superficies mediante el empleo de fórmulas (que en muchos casos no están convenientemente aprendidas).
- En cuatro tareas de estimación de superficie los alumnos cometen errores de cálculo (E1). El resto de errores aparece con una frecuencia menor a cuatro veces.

Por lo tanto, para el caso de las tareas de estimación de superficies evidenciamos como los alumnos incurren principalmente en errores conceptuales (E2 y E5) o errores en el empleo de técnicas indirectas de estimación (E10), es decir, errores extrínsecos a la estimación. Son pocos los alumnos que se atreven a realizar una estimación de superficie realizando una comparación directa bien con un referente o con alguna unidad de medida de superficie. Una comparación directa entre la cantidad a estimar y alguna unidad de superficie o un referente de superficie adecuadamente interiorizado ayudaría a los estudiantes a superar estos errores conceptuales e incluso a mejorar las estimaciones realizadas.

1.2.3. Comparativa entre las Tareas de Estimación de Longitudes y las de Superficie

A la vista de los resultados anteriormente presentados establecemos las siguientes comparaciones:

- Los alumnos tienen menos dificultades para estimar longitudes que superficies, ya que se obtuvo RRA (resultado y razonamiento aceptables) en un 47.12% de las tareas para el caso de la longitud, y en un 3.85% de las tareas de estimación de superficies.
- Cada magnitud tiene tipos de error que aparecen con más frecuencia que otros. Como se aprecia en el gráfico de la Figura 7. 16, para el caso de la longitud el tipo de error más frecuente es el E7, mientras que para la superficie los tipos de error más frecuentes son los E5 y E2.



- Hay tipos de error que se dan con cierta frecuencia para una determinada magnitud, mientras que para la otra o no se dan o aparecen menos frecuentemente. Así, el tipo E9 surge en las tareas de longitud, mientras que para las tareas de superficie no. En cambio, E2, E5, E10 o E11 se dan más frecuentemente para las tareas de superficie que para las de longitud.

Estas diferencias observadas creemos que pueden ser debidas a la deficiencia de dominio conceptual que los alumnos tienen de la magnitud superficie. Deficiencias que podrían ser consecuencia del carácter bidimensional de la magnitud.

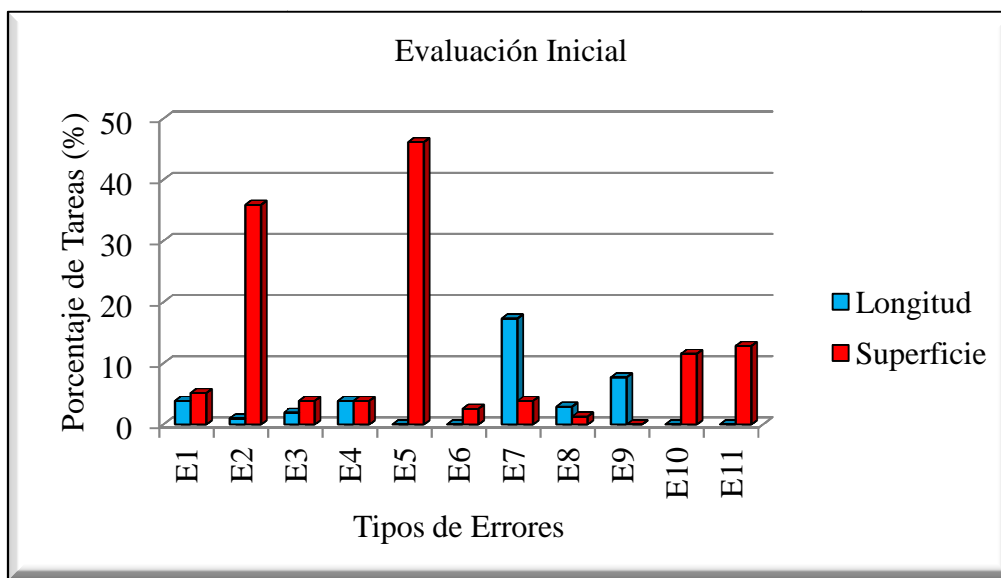
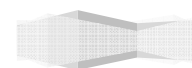


Figura 7. 16. Frecuencias Relativas de los Distintos Tipos de Error Detectados en la Evaluación Inicial.

Los resultados ponen de manifiesto que los sujetos, en el caso de la superficie, tienen dificultades de carácter conceptual asociadas a la percepción de la magnitud y empleo adecuado de unidades de medida; esto no les permite concluir una estimación de manera correcta. En cambio, en el caso de la longitud, los errores están asociados a la estimación y menos a la percepción de la magnitud y empleo adecuado de unidades de medida. Estos resultados son indicios de una enseñanza que no incide lo suficiente en estimación; hay también una llamada de atención al tratamiento dado a la superficie que parece centrarse de manera prioritaria en el empleo de fórmulas y menos en la percepción de la magnitud.



1.3. Análisis de Errores en la Evaluación Final

Para la Evaluación Final realizamos un proceso análogo: las respuestas dadas por los alumnos a cada una de las tareas son clasificadas atendiendo a las categorías descritas en el apartado 1.2. El proceso de clasificación ha sido realizado por tres investigadores, resolviéndose por consenso los desacuerdos. En el Apéndice F.2 recogemos la clasificación de las respuestas de la Evaluación Final.

Analizamos los resultados de las tareas de estimación de la Evaluación Final distinguiendo entre las tareas de estimación de longitudes y las de superficies:

1.3.1. Análisis en las Tareas de Estimación de Longitudes

A partir de la clasificación recogida en el Apéndice F.2 extraemos las frecuencias absolutas que recogen el número de veces que los alumnos incurren en los distintos tipos de error y en otras categorías, para las tareas tipo A de estimación de longitudes. Los recogemos en las Tabla 7. 6 y Tabla 7. 7, agrupando los errores E9i, E9a y E9m en E9.

Tabla 7. 6. Frecuencias Absolutas de los Tipos de Error en la Evaluación Final para Tareas de Estimación de Longitudes.

Tipo de error	Tarea				Total
	I.1	I.3	I.5	I.7	
E1	0	0	0	0	0
E2	0	0	0	0	0
E3	0	1	0	0	1
E4	0	0	0	0	0
E5	0	0	0	0	0
E6	0	0	0	0	0
E7	2	5	5	3	15
E8	0	0	0	0	0
E9	0	0	0	2	2
E10	0	0	0	0	0
Total	2	6	5	5	18



Tabla 7. 7. Frecuencias Absolutas de Otras Categorías en la Evaluación Final para Tareas de Estimación de Longitudes.

Tipo de Respuesta	Tarea				Total
	I.1	I.3	I.5	I.7	
NC	0	0	0	1	1
NE	1	3	4	1	9
DI	3	3	8	3	17
RRA	20	14	9	16	59
Total	24	20	21	21	86

La Evaluación Final también fue realizada por 26 alumnos. Por tanto, dado que cada uno contesta a cuatro tareas de estimación de longitudes, en total se realizaron 104 tareas de estimación de longitudes. A partir del análisis de las frecuencias presentadas en las Tabla 7. 6 y Tabla 7. 7 obtenemos los siguientes resultados:

- El total de respuestas aceptables (RRA) es de 59, en un total de 104 tareas (56.73%).
- Una de las tareas no es contestada (NC); en otras 9 tareas los alumnos dan una estimación pero no explican el razonamiento que han seguido para llegar a ella (NE); y en 17 tareas la descripción dada es insuficiente para determinar qué proceso o procedimiento están siguiendo para llegar a la estimación (DI).

De los errores detectados indicamos lo siguiente:

- El tipo de error más frecuente es el E7 (detectado en 15 tareas), lo que evidencia deficiencias en la interiorización de los referentes que utilizan algunos de los alumnos. Los demás tipos de error aparecen con una frecuencia inferior a tres veces.

1.3.2. Análisis en las Tareas de Estimación de Superficies

Realizando un análisis análogo, se obtienen las frecuencias que se muestran en las Tabla 7. 8 y Tabla 7. 9 relativas a los distintos tipos de errores y tipos de respuestas dadas por los alumnos. De nuevo, hemos agrupado los errores E9i, E9a y E9m en E9.

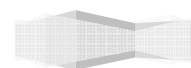


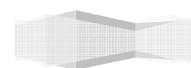
Tabla 7. 8. Frecuencias Absolutas de la Tipología de Errores en la Evaluación Final para las Tareas de Estimación de Superficies.

Tipos de Error	Tareas			Total
	II.1	II.3	II.5	
E1		1	1	2
E2	3	3	3	9
E3				0
E4	1			1
E5	5	2	4	11
E6	1			1
E7		2	2	4
E8	1	1	2	4
E9		1		1
E10	3	2	0	5
E11	1	4	4	9
Total	15	16	16	47

Tabla 7. 9. Frecuencias Absolutas de Otras Categorías en la Evaluación Final para las Tareas de Estimación de Superficies.

Otras Categorías	Tareas			Total
	II.1	II.3	II.5	
NC	0	2	4	6
NE	3	4	2	9
DI	2	1	8	11
RRA	10	5	1	16
Total	15	12	15	42

Al igual que en la Evaluación Inicial, cada uno de los 26 alumnos que han realizado la prueba han contestado a tres preguntas en las que les pedíamos estimaran diversas cantidades de superficie. En total han realizado 78 tareas de estimación de superficies. La información recogida en las Tabla 7. 8 y Tabla 7. 9 nos permite obtener los siguientes resultados:



- En este caso, 16 respuestas son consideradas aceptables (RRA), en un total de 78 tareas (20.51%).
- En 6 tareas los alumnos no contestan (NC); en otras 9 tareas dan una estimación pero no explican el razonamiento que han seguido para llegar a ella (NE); y en 11 tareas la descripción dada por los alumnos es insuficiente para determinar qué proceso o procedimiento están siguiendo para llegar a la estimación (DI).

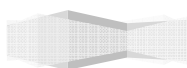
De los errores detectados destacamos:

- Los tipos de error más frecuente son los E5 y E2 (se dan en 11 y 9 tareas, respectivamente). De nuevo se dan de forma conjunta frecuentemente, aunque no en todos los casos.
- El siguiente tipo de error más frecuente es el E11 (en 9 tareas), el cual es consecuencia del efecto de la propagación del error.
- El siguiente tipo de error más frecuente es el E10 (en 5 tareas), debido a la deficiente adquisición de las fórmulas.
- Los demás tipos de error se dan cuatro veces (E7 y E8) o con menor frecuencia.

1.3.3. Comparativa entre las Tareas de Estimación de Longitudes y las de Superficie

A la vista de los resultados anteriormente presentados establecemos las siguientes comparaciones relativas a los datos obtenidos por medio de la Evaluación Final:

- Los alumnos continúan teniendo menos dificultades para estimar longitudes que superficies, ya que obtenemos RRA (resultado y razonamiento aceptables) en un 56.73% de las tareas para el caso de la longitud, frente a un 20.51% de las tareas de estimación de superficies.
- Cada magnitud tiene tipos de error que aparecen con más frecuencia que otros. Como se aprecia en el gráfico de la Figura 7. 17, para el caso de la longitud el tipo de error más frecuente fue el E7, mientras que para la superficie los tipos de error más frecuentes son los E2 y E5.



- Hay tipos de error (como los anteriormente indicados) que se dan con cierta frecuencia para una determinada magnitud, mientras que para la otra o no se dan o aparecen menos frecuentemente.

De nuevo encontramos diferencias en la capacidad estimativa de ambas magnitudes que podrían estar debidas a las diferencias en dominio conceptual de estas magnitudes, pues tienen menos dificultades conceptuales con la magnitud longitud que con la magnitud superficie.

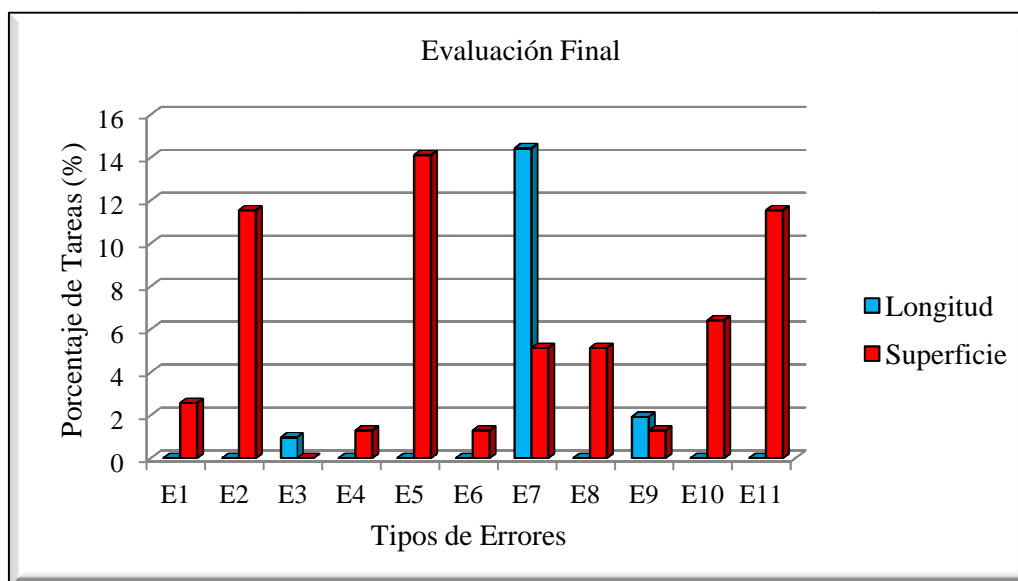


Figura 7. 17. Frecuencias Relativas de los Distintos Tipos de Error Detectados en la Evaluación Final.

1.4. Comparativa del Análisis de Errores entre la Evaluación Inicial y Final

La comparativa de errores cometidos por los alumnos en la resolución de las tareas tipo A de la Evaluación Inicial-Final nos informa en parte del efecto del diseño instrumental implementado. Presentamos esta comparativa distinguiendo por separado las dos magnitudes consideradas.

1.4.1. Para las Tareas de Estimación de Longitudes

En la Evaluación Inicial el número de respuestas consideradas aceptables (RRA) es de 49, y en la Evaluación Final pasan a ser 59, al ser el mismo número de alumnos los que responden en ambos casos. Esto nos da un indicio de mejora en la capacidad estimativa de los alumnos. En concordancia, el número de respuestas erróneas desciende para casi todos los tipos de error, como observamos en la Figura 7. 18, siendo los errores que más

disminuyen en frecuencia los errores E1, E4 y E9. No obstante, el error más frecuente sigue siendo el E7, error propio de procesos estimativos. Este error que se daba con una frecuencia superior al resto disminuyó levemente. El motivo por el que no se ha producido una disminución considerable de este error podría ser en que el trabajo llevado a cabo no ha sido suficiente para promover que los alumnos interioricen más referentes aceptablemente. Esto nos sugiere que la interiorización de referentes es un proceso lento y que precisa de un trabajo continuado en el tiempo. Por eso, proponemos la enseñanza de la estimación de un modo transversal a otros contenidos curriculares poniéndola en práctica en cualquier situación que se preste.

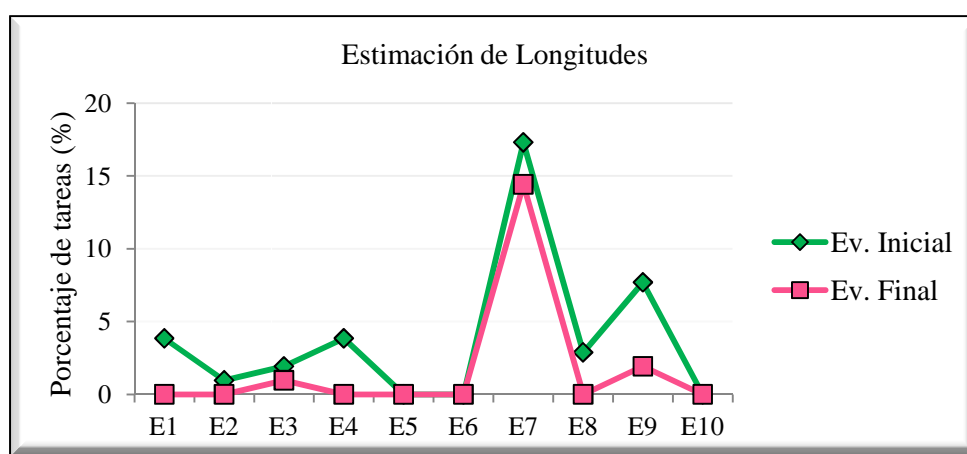


Figura 7. 18. Frecuencias Relativas de los Tipos de Error en las Tareas de Estimación de Longitudes, de la Evaluación Inicial y Final.

1.4.2. Para las Tareas de Estimación de Superficies

En las tareas de estimación de superficies es donde encontramos una mejoría más notable, ya que en la Evaluación Inicial el número de respuestas consideradas aceptables (RRA) es tan solo tres, y en la Evaluación Final son 16.

De nuevo, el número de respuestas erróneas desciende para casi todos los tipos de error, en algunos casos drásticamente, como ocurrió con los tipos E2 o E5 (véase Figura 7. 19). Esto nos sugiere que se ha producido una mejora en la interiorización del concepto de superficie y en el uso de sus unidades de medida.

Nótese también que aumentan levemente los errores E7, E8 y E9. Esto es debido a que aumenta el número de alumnos que se atreven a estimar superficies utilizando estrategias de comparación directa con las unidades de medida de superficie, circunstancia que no sucede en la Evaluación Inicial.

La disminución del número de errores conceptuales y el aumento de estrategias de comparación directa en las estimaciones de superficie nos indican que la estimación puede ser un instrumento válido para la enseñanza de este concepto.

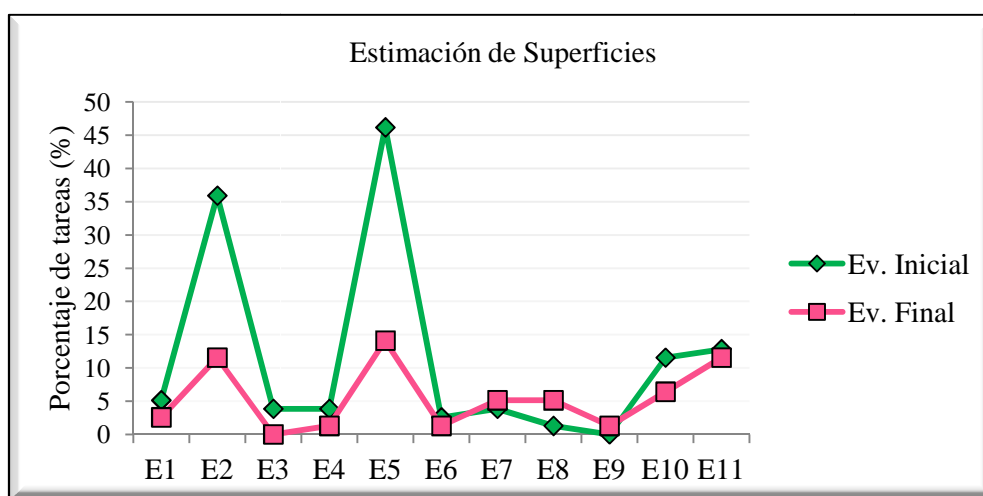


Figura 7. 19. Frecuencias Absolutas de los Tipos de Error en las Tareas de Estimación de Superficies, de la Evaluación Inicial y Final.

1.5. Resumen de Resultados del Análisis de Errores

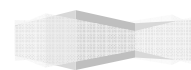
Con respecto a las características de los errores en los que alumnos incurren cuando estiman longitudes, en la Evaluación Inicial podemos indicar que en el 47.12% de las tareas realizan estimaciones aceptables apoyadas en razonamientos correctos (RRA); en el 33.65% de las tareas incurren en algún tipo de error; y en un 19.23% de las tareas no hemos podido determinar si el razonamiento es correcto (NC, NE o DI). Con respecto a los errores, podemos indicar que el más frecuente (se presenta en un 17.31% de las tareas) es un error de tipo conceptual intrínseco al proceso estimativo (E7); seguido de un error de tipo procedimental intrínseco al proceso estimativo (E9), que se da en un 7.69% de las tareas. Por tanto, los errores que los alumnos cometen inicialmente cuando estiman longitudes son, principalmente, errores propios de procesos estimativos.

En las tareas de estimación de superficie de la Evaluación Inicial nos encontramos con un panorama bien distinto: realizan estimaciones aceptables razonadas correctamente en, tan solo, el 3.85% de las tareas; en el 71.79% de las tareas incurren en algún tipo de error; y en el resto de las tareas (24.36%) no es posible determinar si el razonamiento es correcto. Estudiando los errores observamos que los más frecuentes son dos errores conceptuales extrínsecos al proceso estimativo: el E5, en el 34.62% de las tareas; y el E2, en el 26.92% de las tareas realizadas. Ambos errores se dan conjuntamente en

muchas tareas, pues suele ser frecuente que un alumno que confunda la magnitud a estimar no use una unidad adecuada, pero no se presentan simultáneamente en todas pues hay alumnos que realizan razonamientos propios de otras magnitudes (siendo esto indicativo de que confunde la magnitud a estimar) y expresan el resultado final utilizando unidades de superficie. A éstos le seguiría (según frecuencia) un error intrínseco a procesos estimativos de la magnitud longitud: el error E11, que se presenta en un 9.62% de las tareas. Y en cuarto lugar tenemos un error procedimental, también extrínseco al proceso estimativo, el E10, en el 8.65% de las tareas. Los errores intrínsecos a procesos estimativos de la magnitud superficie (E7, E8 y E9) se presentan en un 3.85% de los casos. La baja frecuencia de los mismos es debida a que los alumnos evitan el uso de este tipo de procesos, prefiriendo el empleo de técnicas indirectas, como el uso de fórmulas.

Analizando los resultados de las tareas de estimación de longitudes en la Evaluación Final obtenemos que los resultados han mejorado: realizan estimaciones aceptables apoyadas en razonamientos aceptables (RRA) en el 56.73% de las tareas; en el 17.31% de las tareas cometen algún error; y en el 25.96% no podemos comprobar si han usado un razonamiento correcto (NC, NE, DI). Siguen incurriendo con más frecuencia (14.42%) en el error conceptual intrínseco al proceso estimativo (E7).

Los resultados de la Evaluación Final también arrojan una notable mejoría en las tareas de estimación de superficies: realizan estimaciones aceptables apoyadas en razonamientos aceptables (RRA) en el 20.51% de las tareas; en el 46.15% de las tareas cometieron algún error; y en el 33.33% no podemos comprobar si han usado un razonamiento correcto (NC, NE, DI). Los errores más frecuentes siguen siendo el E5 y el E2 (errores conceptuales extrínsecos al proceso estimativo) aunque han disminuido notablemente las frecuencias: el E5 se presenta en el 14.1%; y el E2 en el 11.54% de las tareas. El tercer lugar lo sigue ocupando el error E11 (11.54%) y en cuarto lugar el error E10 (6.41%). Pero, contradictoriamente con esta mejoría, encontramos que errores intrínsecos al proceso estimativo de la magnitud superficie (E7, E8 y E9), que en la Evaluación Inicial prácticamente no aparecen, han aumentado su incidencia. La justificación a esto la encontramos en el aumento que se produjo del uso de procedimientos estimativos directos de la magnitud superficie, en detrimento del empleo de técnicas indirectas (fórmulas), que en muchas ocasiones no son adecuadas para la estimación porque pueden provocar que el error aumente cuando se estiman los



datos a usar en las mismas⁴¹. En la Teoría de Errores⁴² podemos encontrar explicación a la propagación de errores.

1.6. Conclusiones del Análisis de Errores

Concluimos que los alumnos en las estimaciones ponen de manifiesto cierto dominio conceptual y procedimental de la magnitud longitud y su medida y sin embargo manifiestan falta de dominio conceptual y procedimental para la magnitud superficie. Esto supone, para el caso de la superficie, un obstáculo para evaluar la capacidad estimativa de los alumnos.

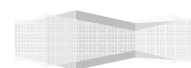
Los alumnos, manifiestan tendencia al uso de fórmulas matemáticas cuando realizan estimaciones de superficies sin tener arraigados conceptos cruciales de la magnitud como son la percepción de la misma y el manejo de las unidades de medida. Denota por tanto una enseñanza centrada en la medida indirecta a través del uso de fórmulas con cierto descuido hacia elementos conceptuales básicos.

Aunque la estimación mejora con la práctica, hay unos errores que son más persistentes que otros. Por ello, creemos que la estimación debería ser trabajada transversalmente, poniéndola en práctica en cualquier tarea que se preste (Buchaman, 1976; Whitin, 2004). De este modo se propiciaría un trabajo más continuado e intenso de interiorización de referentes y unidades de medida.

Además, la estimación constituye un campo de trabajo que permite detectar deficiencias conceptuales y procedimentales básicas, al mismo tiempo que constituye un campo de entrenamiento para el manejo de conceptos y destrezas relativos a las magnitudes y a su medida. Esta idea de usar la estimación como herramienta para la enseñanza de otros conceptos, está fuertemente apoyada por numerosos investigadores (Bright, 1976;

⁴¹ Véase la descripción del error denominado E11.

⁴² También llamada Teoría del Tratamiento Matemático del Error. Cuando se mide una cantidad, ya sea directa o indirectamente, la medida que se obtiene no es necesariamente el valor exacto de tal medida, ya que el resultado obtenido estará afectado por errores debidos a multitud de factores. En estos casos es necesario estimar el error cometido al efectuar una medida o serie de medidas. El conjunto de reglas matemáticas dedicadas a su estudio se conoce como Teoría de Errores.



Buchaman, 1976; Coburn y Shulte, 1986; Markovits, 1987; Sowder, 1992; Frías, Gil y Moreno, 2001; Hogan y Brezinski, 2003; Harte y Glover, 2003; Whitin, 2004).

2. ANÁLISIS ESTRATEGIAS DE ESTIMACIÓN

Realizamos el análisis de las estrategias empleadas por los alumnos para obtener las estimaciones requeridas en las tareas tipo A en las evaluaciones inicial y fina desde una triple perspectiva: atendemos a la unidad de medida utilizada para expresar el resultado, los referentes empleados en las estrategias que utilizan procesos de comparación, y las estrategias generales de estimación empleadas. Con estos elementos analizamos las producciones de los estudiantes

2.1. Elementos que Articulan las Estrategias

Los elementos que forman parte de las estrategias son las unidades de medida estandarizadas (UM) y otras cantidades que se emplean como referentes para la comparación, que pueden estar presentes en la resolución de la tarea (RP) o ausentes (RA).

2.1.1. Criterios para la Consideración de la Unidad de Medida

Los criterios para la consideración de la unidad de medida en el recuento son los siguientes:

- Cuando el alumno responda utilizando dos unidades de medida se considerarán ambas. Así, por ejemplo, para el alumno A3 que da como resultado “1 metro con 50 centímetros”, en la tarea I.1 de la Evaluación Inicial, se contabiliza el metro y el centímetro.
- Si el alumno da dos respuestas, consideramos la respuesta más favorable y, en consecuencia, la unidad de medida que utilizó en dicha respuesta.
- En las respuestas a las estimaciones de superficies expresadas como producto de cantidades longitudinales indicaremos la unidad de medida que utiliza para cada una de las dimensiones longitudinales.



2.1.2. Criterios para la Consideración de los Referentes

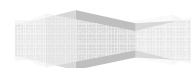
Referente es cualquier cantidad que sea empleada por los alumnos para resolver la tarea de estimación distinta de una unidad de medida estándar (UM); si está presente en el aula donde se desarrolla la actividad lo consideraremos un referente presente (RP) y, en caso contrario, un referente ausente (RA).

Los referentes antropométricos serán considerados referentes presentes, salvo que el alumno se refiera expresamente a la medida de alguna parte del cuerpo de un individuo que no estuviera presente en la sala en el momento de la realización de la prueba. Los instrumentos de medida son referentes ausentes, puesto que no se permitió su uso en la realización de las pruebas.

2.1.3. Procesos y Estrategias de Estimación

Continuando con la nomenclatura utilizada en el previo Trabajo de Investigación Tutelada (Castillo, 2006) consideramos que un *proceso de estimación en medida* es cada una de las partes diferenciadas que conlleva la actividad que conduce a la obtención de una estimación en medida, y una *estrategia de estimación* es un conjunto de procesos encaminados a la obtención de la estimación de una determinada cantidad.

Tras realizar una revisión teórica de las estrategias (véanse la aportaciones de Hildreth, Siegel et al. y Segovia et al. descritas en el capítulo 2, así como la revisión de investigaciones realizada en el capítulo 3 donde destacamos, además de los anteriores los trabajos de Forrester, 1990; Friebe, 1967; Hartley, 1977; Immers, 1983), y después de revisar las producciones de los alumnos realizamos nuestra aportación al estudio de estrategias recogiendo en el diagrama de flujo de la Figura 7. 20 las estrategias que puede seguir un alumno para realizar una estimación de cantidades de longitud o superficie.



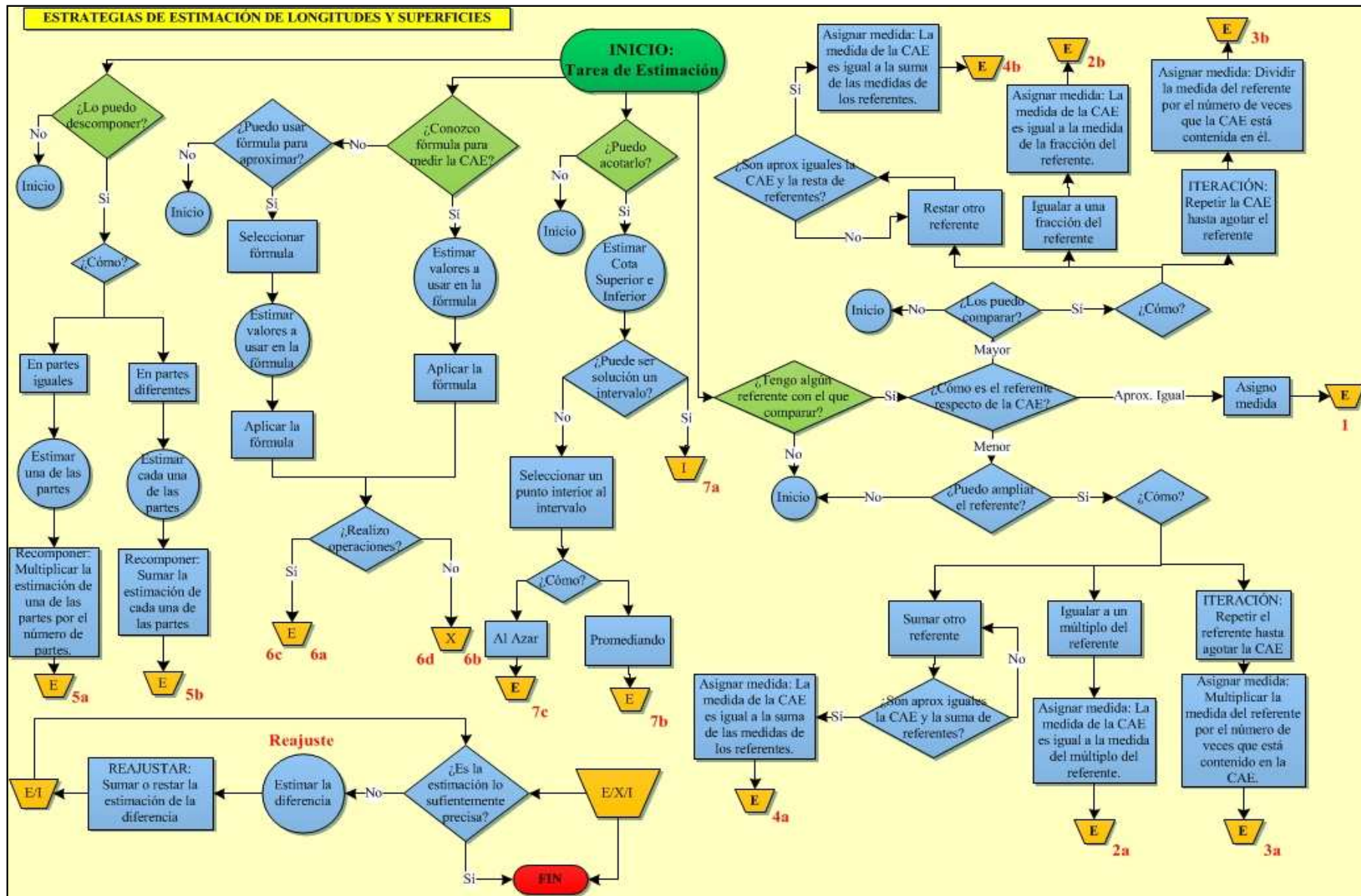


Figura 7. 20. Diagrama de Flujo de Estrategias de Estimación de Longitudes y Superficies.



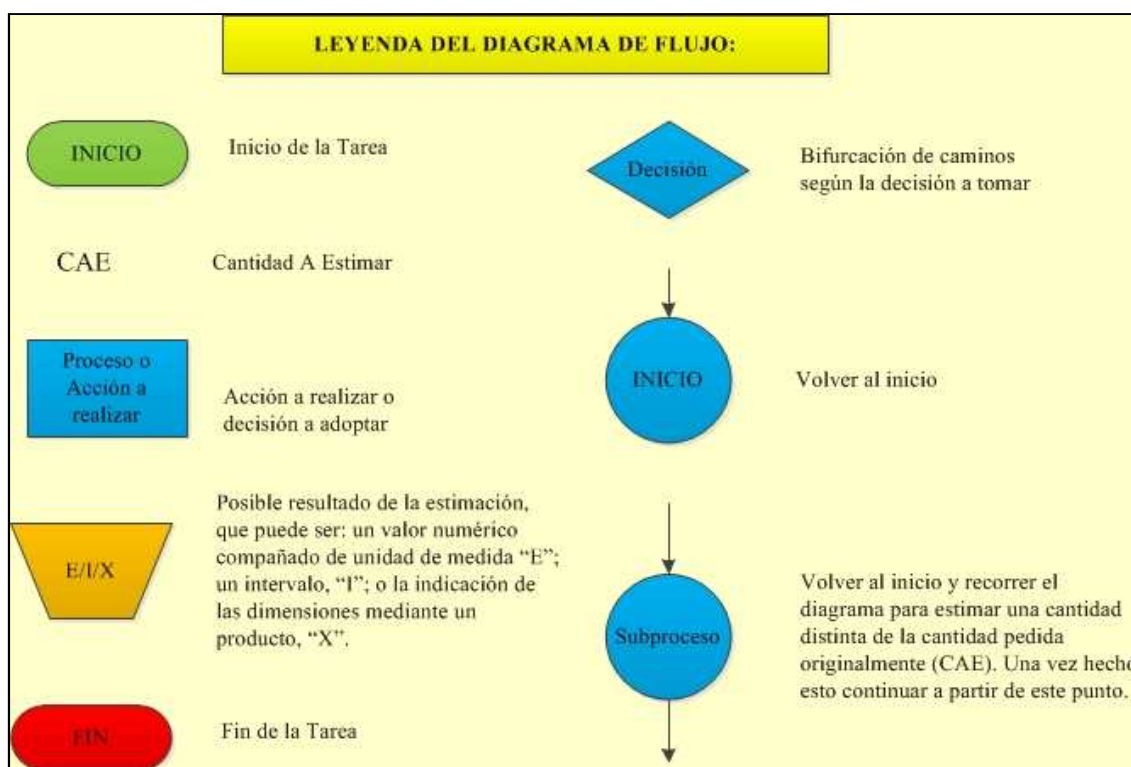


Figura 7. 21. Leyenda del Diagrama de Flujo.

Como se muestra en la leyenda (Figura 7. 21), la tarea de estimación comienza en “Inicio” donde se nos propone estimar una cantidad (CAE, Cantidad a Estimar). Los diferentes conectores nos pueden llevar al uso de diferentes estrategias. Los rombos representan una “división de opciones” que nos va a permitir seleccionar una estrategia u otra. Los círculos representan que hay que volver al inicio y recorrer nuevamente el diagrama (por otro camino). Esta vuelta al inicio puede ser debida a dos motivos: la estrategia seguida no es válida y tenemos que utilizar otra estrategia; o porque tenemos que realizar la estimación de otra cantidad, distinta de la propuesta inicialmente (CAE), que utilizaríamos para llegar a la estimación de la CAE. Los rectángulos representan acciones a realizar o decisiones a adoptar. Finalmente, los trapecios representan resultados. Estos resultados pueden ser definitivos o pueden someterse al procedimiento denominado “reajuste”, que supone una autovaloración de la estimación obtenida y una posterior rectificación si se considera necesario. El procedimiento termina en “Fin” momento en el que el alumno obtiene un resultado definitivo que puede ser: una medida (E); un intervalo que contiene la medida de la CAE (I); o la indicación de las dimensiones de la CAE mediante un producto (X).

En la Figura 7. 20 enumeramos las diferentes *Estrategias Generales de Estimación en Medida* las cuales consisten en diferentes recorridos en el diagrama, que implican el uso

de diferentes procesos durante el mismo. Las llamamos estrategias generales porque cada uno de los recorridos enumerados en el diagrama engloba un grupo de estrategias que tienen en común el uso de determinados procesos. Así, por ejemplo, la estrategia general de *descomponer/Recomponer en partes iguales*⁴³ engloba a todas las estrategias que incluyen como procesos la descomposición de la CAE en partes iguales, la estimación de la medida de una de las partes en que se descompone (esto se podría hacer de múltiples formas cada una de las cuales daría lugar a una estrategia distinta que formaría parte del grupo de esta estrategia general) y el proceso de recomposición. En el caso de que la estrategia conste con un solo proceso se identifica con el mismo. Realizamos esta agrupación en estrategias generales para poder cuantificar y comparar. La agrupación en estrategias generales nos permite salvar la dificultad que supone la gran variedad de estrategias que se pueden presentar.

En la enumeración de las estrategias generales hemos usado (véase) números y letras. Las estrategias enumeradas con el mismo número, pero distinta letra tienen algunos procesos en común como veremos más adelante.

Agrupamos las Estrategias Generales en cuatro grandes bloques, y las describimos a continuación.

Bloque I. Estrategias de Comparación

Estrategia 1: Comparar con un referente aproximadamente igual

Esta estrategia consiste en realizar una comparación directa utilizando un único referente cuya medida está próxima a la de la cantidad a estimar. Por ejemplo, el alumno A18 contesta, en la tarea I.7 de la Evaluación Inicial, que la cuerda mide “2’5 m” argumentando “porque la he comparado con la altura de la clase”. En este caso el referente utilizado es la altura de la clase.

Estrategia 2a: Comparar con un múltiplo de un referente.

Consiste en realizar una comparación de la cantidad a estimar con un múltiplo de un referente o de alguna unidad de medida. Por ejemplo, el alumno A6, en la tarea I.7 de la Evaluación Inicial, responde que la longitud la cuerda es “3 m” argumentando “Porque

⁴³ Más adelante se describen las estrategias generales.



un metro mide cuanto una mesa de la que tenemos en las aulas, entonces 3 mesas mide cuanto la cuerda”. En este ejemplo, el alumno usa como referente el pupitre.

Dentro de esta estrategia incluiremos múltiplos no necesariamente enteros del referente. Por ejemplo, el alumno A26 responde en el ejercicio I.7 de la Evaluación Final que la longitud de la cuerda es “2’5 m” justificándolo como sigue: “Como una ventana mide 1 m las dos ventanas miden 2 m. y si ponemos la cuerda recta serán más o menos 2,5 m”.

Estrategia 2b: Comparar con una fracción de un referente.

Esta estrategia implica comparar la cantidad a estimar con una fracción inferior a la unidad de un referente o unidad de medida. Por ejemplo, el alumno A9 responde en el ejercicio II.5 de la Evaluación Inicial que la superficie del mapa de España es de “1’2 m²” argumentando: “Porque mide como $\frac{1}{4}$ de la pizarra”.

Estrategia 3a: Iterar un referente sobre la CAE.

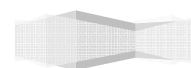
En esta estrategia se realiza una comparación de la cantidad a estimar con un referente/unidad de medida (estandarizada o no) que se repite consecutivamente las veces que sea necesario hasta agotar la cantidad estimada. Por ejemplo, el alumno A21 responde, en el ejercicio I.3 de la Evaluación Inicial, que el grosor de la mesa es de “2 cm y medio” argumentando: “He mirado mi mesa que mide lo mismo de grosor. He tomado como patrón mi meñique. Una vez puesto el dedo, es un centímetro aprox. Para medir todo el grosor, me ha cogido dos veces el meñique y la mitad. Lo que equivaldría aprox. a 2 cm y medio.”

Estrategia 3b: Iterar la CAE sobre un referente.

En esta estrategia se utiliza un referente de mayor tamaño que la cantidad a estimar. Consiste en repetir la cantidad a estimar, sobre el referente, hasta agotarlo. Para asignar la medida se divide la medida del referente (que se supone conocida) entre el número de veces que contiene a la cantidad a estimar. En el estudio que venimos realizando ningún alumno empleó esta estrategia.

Estrategia 4a: Comparar con una suma de referentes.

Diremos que el alumno emplea esta estrategia cuando realiza una comparación de la cantidad a estimar con una suma o adición de cantidades de, al menos, dos referentes distintos. Por ejemplo, el alumno A26, en la tarea I.7 de la Evaluación Inicial, responde



que la longitud de la cuerda es “más o menos 2 m o 1,90 cm” razonándolo del siguiente modo: “La he comparado con la ventana y un poco con la pared.”. En este caso los referentes utilizados son la ventana y un trozo de pared.

Estrategia 4b: Comparar con una diferencia de referentes.

Esta estrategia consiste en comparar la cantidad a estimar con una diferencia de referentes. Necesita, por tanto, un referente de mayor tamaño que la cantidad a estimar, y otro referente que tenga el tamaño aproximado de la diferencia de los dos anteriores. De este modo, mediante la diferencia de la medida de éstos referentes obtiene la estimación de la medida de la cantidad a estimar. En nuestro estudio ningún alumno empleó esta estrategia.

Bloque II. Estrategias de Descomposición/Recomposición

Estrategia 5a: Descomponer/Recomponer en partes iguales.

Consiste en descomponer o fraccionar la cantidad a estimar en partes iguales, para posteriormente realizar una estimación de una de las partes. Finalmente habría que recomponer, lo que supone tener que multiplicar la estimación de una de las partes por el número de partes. Por ejemplo, el alumno A18 expone en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial que ha seguido el siguiente razonamiento para hallar la superficie de la pizarra: “ $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$; la pizarra son dos cuadrados iguales y tiene de lado 1 m y he calculado la superficie de los 2 (cuadrados)”. Entendemos a partir de dicho razonamiento que ha dividido la pizarra en dos partes iguales y en una de ellas ha aplicado la fórmula del cuadrado.

Estrategia 5b: Descomponer/Recomponer en partes diferentes.

Esta estrategia es similar a la anterior, pero en esta ocasión la división o fraccionamiento de la cantidad se produce en partes de diferentes tamaños. Por consiguiente, cuando se utiliza esta estrategia será necesaria la estimación por separado de las cantidades de cada una de las partes. El proceso de recomposición consiste, en este caso, en sumar las estimaciones de cada una de las partes. Por ejemplo, el alumno A11 responde en la tarea I.5 de la Evaluación Inicial que la longitud del pegamento en barra es de “7 cm” indicando: “Lo he descompuesto con la capucha del pegamento. La capucha del pegamento tiene como mucho 2 cm. Mirando la capucha y el pegamento yo he medido que la capucha cabe 3 veces y $\frac{1}{2}$ de 2 cm. Esto es $3 \cdot 2 = 6\text{cm}$; $2:2 = 1\text{cm}$;



$6+1=7\text{cm}$. Resultado final: 7 cm.”. La descomposición que realiza del pegamento en barra es en dos partes diferentes: la capucha y el cuerpo del pegamento. Estima la longitud de la capucha, y realiza una iteración de la misma para determinar la medida del resto del pegamento. Este alumno utiliza como estrategia general la descomposición/recomposición en partes diferentes y dentro de este grupo de estrategias la estrategia particular que utiliza supone el uso de procesos tales como la iteración, entre otros que no podemos identificar por falta de información.

Bloque III. Estrategias de Empleo de Fórmulas

Estrategia 6a: Usar una fórmula matemática propia de la CAE y operar.

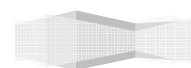
Esta estrategia se utiliza cuando la CAE tiene una forma regular, cuya medida se puede obtener a partir del empleo de alguna fórmula matemática. Para poder usar la fórmula se precisa de la estimación de los valores a usar en la fórmula. Una vez estimados dichos valores, se sustituyen en la fórmula correspondiente y se opera. Por ejemplo, el alumno A9, en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial, responde que la superficie de la pizarra mide “ 2 m^2 ”, justificándolo como sigue: “ancho=1 m; largo=2 m; $S=2 \cdot 1=2\text{ m}^2$ ”.

Estrategia 6b: Estimar longitudes y expresar la superficie a través de las dimensiones de un rectángulo.

Esta estrategia consiste en estimar la medida de una cantidad de superficie a partir de las dimensiones de un rectángulo. La CAE no necesariamente tiene que tener forma rectangular, pues si tiene otra forma el alumno podría encuadrar la CAE con un rectángulo de dimensiones proporcionales. Por ejemplo, el alumno A5, en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial, da como medida de la superficie de la pizarra “Un metro de alto y un metro y medio de ancho”.

Estrategia 6c: Estimar una cantidad con una determinada forma usando una fórmula matemática de otra cantidad con otra forma.

Esta estrategia implica utilizar una fórmula matemática que, aunque no sea válida para obtener la medida de la CAE, sí permite obtener una aproximación de la misma. Al igual que en los casos anteriores, para poder usar una fórmula hace falta la estimación de los valores a usar en la fórmula. Por ejemplo, el alumno A8, en la tarea II.3 de la Evaluación Inicial, estima que la superficie de la diana es de “ 100 cm^2 ” y argumenta:



“lo mido de ancho y de largo”. Como vemos, hace alusión a las dimensiones de un rectángulo y aplica la fórmula de éste para el cálculo de su superficie.

Estrategia 6d: Estimar una cantidad con una determinada forma expresando las dimensiones de otra cantidad con otra forma.

Esta estrategia es similar a la anterior salvo que el resultado lo expresa a través de las dimensiones de la cantidad con otro formato. Por ejemplo, el alumno A19, en la tarea II.3 de la Evaluación Inicial, estima que la superficie de la diana (forma circular) es de “13 cm x 13 cm”.

Bloque IV. Estrategias de Acotación

Estrategia 7a: Acotar y Tomar el Intervalo

Consiste en estimar unos límites o cotas superior e inferior, entre los cuales estaría establecida la medida de la CAE. En este caso la solución de la estimación sería el intervalo, dentro del cual estaría la medida de la CAE. Por ejemplo, el alumno A23 responde en la tarea I.5 de la Evaluación Inicial que la longitud del pegamento en barra mide “entre 7-10 cm”.

Estrategia 7b: Acotar y Promediar

En este caso se toma como estimación de la CAE el punto medio del intervalo. Por ejemplo, el alumno A33 responde, en la tarea I.5 de la Evaluación Final, que la longitud del pegamento en barra es de “8 cm” y como argumento indica: “entre 7 y 9 cm”.

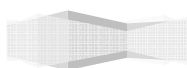
Estrategia 7c: Acotar y Dar un Resultado al Azar

Consideraremos que se usa esta estrategia cuando el alumno toma un valor de un intervalo sin justificar los motivos que lo han llevado a seleccionarlo o cuando sugiera que se puede tomar un número cualquiera dentro del intervalo de acotación. En nuestra investigación, ningún alumno puso de manifiesto el uso de esta estrategia.

Además de las Estrategias Generales, descritas anteriormente, el resultado obtenido mediante las mismas admite un proceso complementario que denominamos reajuste el cual a continuación.

R. Reajuste

Consiste en modificar una estimación obtenida de la CAE sumándole o restándole una pequeña cantidad. Por ejemplo, el alumno A12, en la tarea I.1 de la Evaluación Inicial,



estima el largo de la mesa del profesor en “sobre 1.80 m”, justificándolo del siguiente modo: “Pues he pensado que si yo mido 1’50 algo así pues la mesa la veo más grande que yo y por eso he pensado que mide sobre 1’80 m.”. La estrategia general que utiliza este alumno es la estrategia 1, que complementa con el proceso que hemos denominado reajuste, pues suma una pequeña cantidad para ajustar la diferencia entre el referente y la CAE. La diferencia con la estrategia 4a, en este caso, es que no pone de manifiesto que la comparación de la CAE la realice con una suma de referentes, sino con un único referente (su estatura), aunque posteriormente tenga que estimar la diferencia.

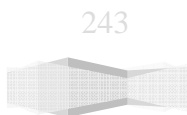
En el análisis de las respuestas de los alumnos, además de distinguir entre las anteriores estrategias, vamos a considerar la siguiente notación para indicar que el alumno está utilizando una estrategia errónea, o que está incurriendo en algún error en el uso que hace de los procesos involucrados.

FE. Fórmula Errónea

Notaremos FE aquellas situaciones en las que el alumno utilice una fórmula errónea, es decir, cuando utilice fórmulas que no sirvan para la obtención de una estimación válida de la medida de la CAE, ni siquiera por aproximación. Por ejemplo, el alumno A4, en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial, responde que la superficie de la pizarra mide “4 metros” argumentando “ $2'5+1'5=4\text{m}$; Longitud+Altura=4 m”. Es obvio que recurre a una fórmula errónea para el cálculo de una superficie rectangular.

EI. Estrategia Inadecuada

Diremos que el alumno está utilizando una estrategia inadecuada, lo que notaremos con EI, cuando la estrategia utilizada no sirva para obtener una estimación válida de la medida de la CAE. La categoría FE sería un caso particular de estrategia inadecuada, pero en este estudio la vamos a desvincular de esta categoría, para poder valorar la frecuencia con que se presenta. Un ejemplo de EI sería la respuesta del alumno A1, en la tarea II.1 de la Evaluación Inicial, pues responde que la superficie de la pizarra es de “1 m” argumentando: “Si la cuerda mide 1 m y medio, si ponemos la cuerda como medida nos sobra”. Lógicamente, la estrategia que este alumno está utilizando sería adecuada para estimar el largo de la pizarra, pero es inadecuada para estimar su superficie. Aquí el alumno da muestras de confundir la magnitud o la cantidad a estimar, pues da el resultado en unidades de longitud.



Además de la categorías anteriores, continuaremos con la notación NE, NC o DI según los términos establecidos en **apartado 2.1**.

2.2. Análisis de Estrategias en la Evaluación Inicial

A continuación presentamos el análisis de las repuestas dadas por los alumnos en la Evaluación Inicial desde esta triple perspectiva: unidad de medida utilizada para el resultado, referentes utilizados para la comparación y estrategias de estimación. Primero analizamos las tareas tipo A relacionadas con la magnitud longitud, y a continuación las de superficie.

2.2.1. Análisis de Tareas de Estimación de Longitudes

El estudio lo realizamos diferenciando para cada una de las tareas, pues las unidades de medida, elementos o estrategias puestos en juego serán diferentes en función de las cantidades a estimar.

i) Unidad de medida utilizada en el resultado.

En el Apéndice G.1 recogemos las unidades de medida utilizadas por los alumnos para expresar el resultado de las estimaciones en las diferentes tareas de estimación de longitudes de la Evaluación Inicial. En general los alumnos utilizan unidades adecuadas a la magnitud a estimar y a la cantidad. No obstante, cabe señalar algunas observaciones:

- En la Tarea I.1, 23 de las 26 repuestas utilizan el metro como unidad de medida para expresar el resultado. Un alumno utilizó el decímetro y dos alumnos no indicaron la unidad de medida utilizada.
- En la Tarea I.3, en 23 de las 26 repuestas utilizan el centímetro como unidad de medida para expresar el resultado. Un alumno utilizó el decímetro y dos alumnos no contestaron.
- En la Tarea I.5, en 22 repuestas utilizan el centímetro como unidad de medida, a pesar de que la cantidad que se les pedía que estimaran estaba muy próxima al decímetro. Tan sólo un alumno recurrió a esta unidad de medida.
- En la Tarea I.7, en 22 repuestas utilizan el metro como unidad de medida.

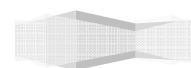


ii) Referentes utilizados en la comparación.

En el Apéndice H.1 recogemos los referentes utilizados por los alumnos para expresar el resultado de las estimaciones en las diferentes tareas de estimación de longitudes en la Evaluación Inicial. A partir de dicha información observamos que, en general, en la mayoría de las ocasiones, los alumnos recurren a referentes presentes, en segundo orden de frecuencia suelen recurrir a referentes ausentes y con menor frecuencia recurren a la comparación directa con la unidad de medida. Veámoslo por tareas:

- En la tarea I.1, en 14 respuestas recurren a referentes presentes (53.85%), en 7 respuestas recurren a referentes ausentes (26.92%), y en 3 ocasiones comparan directamente con la unidad de medida (11.54%). En dos respuestas no indican qué elemento utilizan en la comparación. Los elementos más frecuentes de comparación son el pupitre o mesa del alumno, utilizar pasos, o la estatura de una persona.
- En la tarea I.3, en 15 respuestas utilizan referentes presentes (57.69%), en 6 respuestas recurren a referentes ausentes (23.08%), y en 1 respuesta se compara con la unidad de medida. En otra ocasión no indicaron el elemento utilizado en la comparación y tres alumnos no realizaron la tarea. El referente más utilizado en esta tarea es el grosor de los dedos.
- En la tarea I.5, también en 15 respuestas utilizan referentes presentes (57.69%), en 5 respuestas recurren a referentes ausentes (19.23%), y en 3 respuestas comparan con la unidad de medida (11.54%). En 3 ocasiones no indicaron qué elemento utilizaron en la comparación. El referente más utilizado en esta tarea también es el grosor de los dedos. Aunque también es frecuente la comparación con objetos presentes tales como bolígrafos o gomas.
- En la tarea I.7, en 14 respuestas utilizan referentes presentes (53.85%), en 3 respuestas recurren a referentes ausentes (11.54%), y otras 3 comparan con la unidad de medida (11.54%). En 6 ocasiones no indicaron qué elemento utilizaron en la comparación. El referente más utilizado en esta tarea es la anchura de las ventanas de la clase. También es frecuente la comparación con la estatura de una persona.

Observamos, por tanto, que los alumnos tienden a usar referentes presentes en el 55% de las ocasiones, los referentes ausentes en un 20 % aproximadamente y en pocas

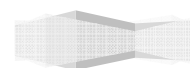


ocasiones emplean las unidades de medida como referentes. Sin haber sido entrenados en el uso de estas técnicas, al menos en la etapa de Educación Secundaria, en el caso de la longitud, la mayoría de los alumnos las emplean en sus estimaciones.

iii) Estrategias utilizadas

El Apéndice I.1 recoge las estrategias utilizadas por los alumnos en las diferentes tareas de estimación de longitudes en la Evaluación Inicial, siguiendo la nomenclatura establecida en el apartado 2.1.3. Analizando las frecuencias obtenemos que la estrategia más frecuente en casi todas las tareas es la comparación con un referente aproximadamente igual (estrategia 1) y en general, en casi todos los casos recurrieron a estrategias de comparación de diferentes tipos. Si lo analizamos por tarea observamos:

- En la tarea I.1, las estrategias más frecuentes son la comparación con un referente aproximadamente igual (estrategia 1) que utilizan en 13 ocasiones (50%), la comparación con un múltiplo de un referente (estrategia 2a) que utilizan en 10 ocasiones (38.46%), o la iteración de un referente sobre la cantidad a estimar (estrategia 3a) que usa un alumno. En 2 ocasiones no describieron el procedimiento seguido y, por tanto, no podemos determinar qué estrategia utilizan. Todas las estrategias detectadas pertenecen al bloque de estrategias de comparación. Además la estrategia complementaria denominada reajuste fue utilizada en 4 ocasiones.
- En la tarea I.3, las estrategias utilizadas son la comparación con un referente aproximadamente igual (estrategia 1) que utilizan en 14 ocasiones (53.85%), la comparación con un múltiplo de un referente (estrategia 2a) que utilizan en 6 ocasiones (23.08%), la iteración de un referente sobre la cantidad a estimar (estrategia 3a) que usa un alumno y la comparación con una fracción de un referente (estrategia 2b) que usa otro alumno. Cuatro alumnos no describieron el procedimiento seguido y, por tanto, no podemos determinar qué estrategia utilizan. Todas las estrategias detectadas pertenecen al bloque de estrategias de comparación. La estrategia complementaria denominada reajuste fue utilizada en 3 ocasiones.
- En la tarea I.5, las estrategias utilizadas son la comparación con un referente aproximadamente igual (estrategia 1) que utilizan en 14 ocasiones (53.85%), la comparación con un múltiplo de un referente (estrategia 2a) que utilizan en 6 ocasiones (23.08%), la iteración de un referente sobre la cantidad a



estimar (estrategia 3a) y la comparación con una fracción de un referente (estrategia 2b) que usan en 1 ocasión cada una. Cuatro alumnos no describieron el procedimiento seguido y, por tanto, no podemos determinar qué estrategia utilizan. Todas las estrategias detectadas pertenecen al bloque de estrategias de comparación. La estrategia complementaria denominada reajuste fue utilizada en 3 ocasiones.

- En la tarea I.7, las estrategias más frecuentes son la comparación con el múltiplo de un referente que utilizan en 9 ocasiones (34.62%), la comparación con un referente aproximadamente igual empleada en 6 ocasiones (23.08%), en dos ocasiones emplean la iteración de un referente como estrategia, un alumno compara con la fracción de un referente, y el resto, 7 alumnos no explican con claridad el procedimiento utilizado. En esta tarea también observamos que todas las estrategias utilizadas pertenecen al bloque I de estrategias de comparación. El reajuste fue utilizado en 6 ocasiones.

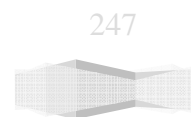
2.2.2. Análisis de Tareas de Estimación de Superficies

Aquí también realizamos el estudio diferenciando para cada una de las tareas, pues las unidades de medida, referentes o estrategias puestos en juego serán diferentes en función de las cantidades a estimar.

i) Unidad de medida utilizada en el resultado.

En el Apéndice G.1 recogemos las unidades de medida utilizadas por los alumnos para expresar el resultado de las estimaciones en las diferentes tareas de estimación de superficies de la Evaluación Inicial. Como ya advertimos en el [apartado 2.3](#) del análisis de errores, los alumnos emplean frecuentemente unidades longitudinales para referirse a cantidades de superficie. También observamos aquí la expresión de cantidades de superficie como producto de la medida de sus dimensiones longitudinales. En concreto:

- En la Tarea II.1, en 15 respuestas (57.69%) utilizan unidades longitudinales para referirse a la cantidad de superficie propuesta. En 3 ocasiones expresaron la estimación de la superficie en función de sus dimensiones longitudinales. En 5 repuestas utilizaron el metro cuadrado y en 1 utilizaron el centímetro cuadrado. Un alumno no contestó y otro no indicó unidad de medida.



- En la Tarea II.3, en 12 respuestas (46.15%) utilizan unidades longitudinales para referirse a la cantidad de superficie propuesta. En 2 ocasiones expresan la estimación de la superficie en función de sus dimensiones longitudinales. En 8 respuestas utilizan el centímetro cuadrado y en 1 ocasión utilizan el decímetro cuadrado. Un alumno no contesta, otro no indica unidad de medida, y un tercero utiliza como unidad de medida un término no válido (“diámetro”).
- En la Tarea II.5, en 8 respuestas (30.77%) utilizan unidades longitudinales. En 1 ocasión expresan la estimación de la superficie en función de sus dimensiones longitudinales. En 8 ocasiones utilizan el metro cuadrado, en 1 utilizan el decímetro cuadrado, y en otra el centímetro cuadrado. Cinco alumnos no contestan, otro no indica unidad de medida, y otro utiliza como unidad de medida un término no válido (“diámetro”).

En términos generales, apreciamos altos porcentajes de alumnos que no saben adecuar la unidad de medida que están utilizando a la cantidad a estimar, recurriendo a unidades longitudinales en vez de usar unidades de superficie.

ii) Referentes utilizados en la comparación.

En el caso de la estimación de cantidades de superficie nos encontramos que, en la Evaluación Inicial, los alumnos prácticamente no utilizan referentes de la magnitud superficie; sólo en cuatro ocasiones, dos en la tarea II.3 y dos en la tarea II.5 emplean algún tipo de referente, los alumnos frecuentemente recurren al empleo de fórmulas y los datos que utilizan en las mismas suelen ser la medida de diversas cantidades de longitud.

iii) Estrategias utilizadas.

En el Apéndice I.1 recogemos las estrategias utilizadas por los alumnos en las diferentes tareas de estimación de superficies de la evaluación inicial, siguiendo la nomenclatura establecida en el apartado 2.1.3. Analizando las frecuencias obtenemos que las estrategias más frecuentes son las estrategias de empleo de fórmulas. En concreto:

- En la tarea II.1, en 14 ocasiones (53.84%) recurren al uso de fórmulas. En 10 ocasiones utilizan la estrategia 6a, en una ocasión la estrategia 6b, y en tres utilizan fórmulas erróneas. Por otra parte, en 1 ocasión utilizan una estrategia de descomposición/recomposición (5a), en 8 ocasiones (30.77%) utilizan una



- estrategia inadecuada (generalmente, debido a que confunden la magnitud a estimar), y en 3 ocasiones no podemos determinar que procedimiento siguen.
- En la tarea II.3, en 12 ocasiones (46.15%) recurren al uso fórmulas. De ellas, en 1 se emplea la estrategia 6a, en 5 ocasiones usan la estrategia 6c, en 2 ocasiones la estrategia 6d, y en 4 ocasiones utilizan fórmulas erróneas. En 2 ocasiones usan la estrategia de comparación con un referente aproximadamente igual. En 9 ocasiones utilizan estrategias inadecuadas, y en 3 casos no podemos determinar que procedimiento siguen.
 - En la tarea II.5, en 9 ocasiones (34.62%) recurren al uso de fórmulas. De las cuales, en 4 usan la estrategia 6c, en 1 emplean la estrategia 6d y en 4 ocasiones utilizan una fórmula errónea. Otras estrategias usadas en 1 ocasión son la estrategia 2b y la estrategia 5b. En 3 ocasiones emplearon estrategias inadecuadas, en 5 ocasiones no contestaron y en otras 7 no podemos determinar qué estrategia siguen.

En resumen, son muy pocos los alumnos que recurren a estrategias de comparación. Principalmente recurren al uso de fórmulas.

2.3. Análisis de Estrategias en la Evaluación Final

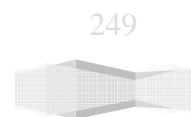
Al igual que hemos hecho para la Evaluación Inicial, a continuación procedemos a analizar las repuestas dadas por los alumnos en la Evaluación Final desde esta triple perspectiva: unidad de medida utilizada para el resultado, elementos utilizados para la comparación, y procesos/estrategias de estimación. Primero analizamos las tareas tipo A relacionadas con la magnitud longitud y, a continuación, las de superficie.

2.3.1. Análisis de Tareas de Estimación de Longitudes

El estudio lo realizamos diferenciando para cada una de las tareas, pues las unidades de medida, referentes y estrategias puestos en juego serán diferentes en función de las cantidades a estimar.

i) Unidad de medida utilizada en el resultado.

En general los alumnos utilizan unidades adecuadas a la magnitud a estimar y a la cantidad (véase Apéndice G.2). No obstante, podemos indicar en la mayoría de las tareas se usan unidades adecuadas:

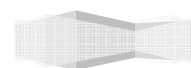


- En la Tarea I.1, en 23 respuestas utilizan el metro como unidad de medida para expresar el resultado. Tres alumnos se expresan usando el centímetro.
- En la Tarea I.3, en 25 respuestas utilizan el centímetro como unidad de medida para expresar el resultado.
- En la Tarea I.5, en 23 respuestas utilizan el centímetro como unidad de medida, a pesar de que la cantidad que se les pedía que estimaran estaba muy próxima al decímetro. Tan sólo tres alumnos recurren a esta unidad de medida.
- En la Tarea I.7, en 25 respuestas utilizan el metro como unidad de medida.

ii) Referentes utilizados en la comparación.

Analizando los referentes utilizados en las comparaciones (véanse en [apéndice Y.2](#)) obtenemos los siguientes resultados:

- En la tarea I.1, en 18 ocasiones (69.23%) utilizan un referente presente, en 1 ocasión usan un referente ausente, y en 3 ocasiones comparan con la unidad de medida. Para cuatro alumnos no es posible determinar qué elemento usan en la comparación. El referente más utilizado es el largo del pupitre. Otros referentes empleados son la estatura de una persona, la altura de la puerta, un paso o la anchura de una baldosa.
- En la tarea I.3, en 15 ocasiones (57.69%) emplean un referente presente, en 2 ocasiones usan un referente ausente, y en 3 ocasiones comparan directamente con la unidad de medida. Para seis alumnos no es posible determinar qué elemento usan en la comparación. El referente más utilizado suele ser el grosor de su propio dedo (lo usan 10 de los 26 alumnos).
- En la tarea I.5, en 10 ocasiones (38.46%) usan un referente presente, en 1 ocasión usan un referente ausente, y en 3 comparan con la unidad de medida. Doce alumnos no indican el elemento utilizado en la comparación. Los referentes utilizados en esta tarea son variados: grosor de un dedo, largo de un bolígrafo o un bote de tippex, largo de una calculadora, etc.
- En la tarea I.7, en 22 ocasiones (84.62%) usan un referente presente, en 1 ocasión comparan con la unidad de medida, y en 3 ocasiones no indican qué elemento usan en la comparación. El referente más utilizado en la



comparación es la anchura de la ventana de la clase, seguido de otros como largo de la mesa, altura de la puerta, estatura de una persona, etc.

En resumen, los alumnos recurren principalmente a referentes presentes. Continúan siendo pocos los alumnos que realizan las estimaciones comparando con las unidades de medida.

iii) Estrategias utilizadas.

Analizando frecuencias de las estrategias empleadas (véanse en **Apéndice I.2**) obtenemos los siguientes resultados:

- En la tarea I.1, las estrategias más utilizadas fueron la estrategia 2a (la usan en 11 ocasiones) y la estrategia 1 (usada en 10 ocasiones). La estrategia 4a la usa 1 alumno y para 4 alumnos no podemos indicar que estrategia siguen por falta de información en sus explicaciones. Todas las estrategias recogidas son estrategias de comparación. Además, en 7 ocasiones hacen uso del reajuste para precisar sus estimaciones.
- En la tarea I.3, en 8 ocasiones usan la estrategia 1, en 6 ocasiones usan la estrategia 2a y en 3 ocasiones emplean la estrategia 3a. Para el resto, no es posible determinar la estrategia seguida. De nuevo, las estrategias son estrategias de comparación. En 4 ocasiones utilizan el reajuste como estrategia complementaria.
- En la tarea I.5, en 9 ocasiones usan la estrategia 1, en 2 usan la estrategia 2a, en una ocasión usan la estrategia 5b y otra usan la estrategia 7b. En esta tarea 13 alumnos no dieron suficiente información para poder determinar qué estrategia estaban utilizando. Por tanto, la mayoría de los alumnos utilizan estrategias de comparación. En 5 ocasiones utilizan el reajuste como estrategia complementaria.
- En la tarea I.7, en 16 ocasiones usan la estrategia 2a, en 6 usan la estrategia 1, y para cuatro alumnos no podemos determinar la estrategia seguida. El reajuste es utilizado en este caso en 4 ocasiones.

2.3.2. Análisis de Tareas de Estimación de Superficies

En este apartado realizamos el estudio de la unidad de medida, referentes y estrategias diferenciando para cada una de las tareas de estimación de superficies.



i) Unidad de medida utilizada en el resultado.

A partir de los datos recogidos en el **Apéndice G.2** observamos que los alumnos utilizan mayoritariamente unidades adecuadas a la cantidad a estimar. En concreto, tenemos los siguientes resultados:

- En la tarea II.1, en 20 respuestas (76.92%) utilizan el m^2 como unidad de medida, y en una utilizan el cm^2 . El resto de casos son cuatro alumnos que expresan el resultado utilizando unidades longitudinales, y un alumno que no indica unidad de medida.
- En la tarea II.3, en 19 respuestas usan el cm^2 como unidad de medida y en tres utilizan el dm^2 . Además, dos alumnos utilizan unidades longitudinales y otros dos alumnos no realizan esta tarea.
- En la tarea II.5, en 9 respuestas emplean el m^2 como unidad de medida, en 7 usan el cm^2 y en 3 el dm^2 . Además, cuatro alumnos utilizan unidades longitudinales y tres alumnos no realizan esta tarea.

ii) Referentes utilizados en la comparación.

Al igual que ocurría en la Evaluación Inicial, los alumnos prácticamente no utilizan referentes de la magnitud superficie, ya que frecuentemente recurren al empleo de fórmulas y los datos que utilizan en las mismas suelen ser estimaciones de la medida de diversas cantidades de longitud. En concreto, observamos los siguientes resultados:

- En la tarea II.1 tan sólo en una ocasión emplean referentes cantidades de superficie.
- En la tarea II.3, en 3 ocasiones emplean cantidades de superficie como referentes para estimar la superficie de la diana.
- En la tarea II.5, también en tres ocasiones emplean diversas cantidades de superficie como referentes, dos de ellos son objetos presentes en el momento de la realización de la prueba y uno compara con la cantidad que tiene interiorizada para el dm^2 .

iii) Estrategias utilizadas.

Analizando las frecuencias de cada estrategia (véanse estrategias utilizadas en **Apéndice I.2**) obtenemos los resultados que se recogen a continuación:



- En la tarea II.1, en 15 ocasiones (57.69%) recurren al empleo de fórmulas. De ellos, en 12 ocasiones emplean una fórmula adecuada y en 3 utilizan una fórmula errónea. En una ocasión utilizan la estrategia 2a, y en otra utilizan la estrategia 5a. Por otra parte, en 3 ocasiones utilizaron estrategias inadecuadas y seis alumnos no dan suficiente información para poder determinar qué estrategia utilizan.
- En la tarea II.3, en 13 ocasiones (50%) recurren al uso de fórmulas. De ellos, en 7 ocasiones recurren a la estrategia 6a, en 3 a la estrategia 6c, en 2 a la estrategia 6d, y 1 alumno utiliza una fórmula errónea. Además, 2 alumnos utilizan la estrategia 1, un alumno utiliza la estrategia 2a, y otro alumno utiliza la estrategia 5a. Por otra parte, un alumno utiliza una estrategia inadecuada y para un total de 8 alumnos no es posible determinar qué estrategia estaban utilizando.
- En la tarea II.5, emplean fórmulas en 5 ocasiones utilizando la estrategia 6c, en 2 ocasiones emplean la estrategia 2a, en 1 ocasión hacen uso de la estrategia 2b, en una ocasión utilizan la estrategia 5a y en otra la 5b. En este caso, para un total de 16 alumnos no podemos determinar qué estrategia están siguiendo porque no dan suficiente información (10 alumnos dan una descripción incompleta, 3 alumnos no explican el procedimiento seguido, y otros 3 alumnos no contestan).

En resumen, aunque en muchos casos no podemos determinar la estrategia seguida por la falta de información, se advierte un mayor uso de las estrategias de comparación, respecto de la Evaluación Inicial. No obstante, las estrategias más utilizadas siguen siendo las de empleo de fórmulas.

2.4. Comparativa del Análisis de Estrategias entre la Evaluación Inicial y Final

Realizamos la comparativa de los procedimientos utilizados en la Evaluación Inicial-Final distinguiendo la magnitud a estimar.

2.4.1. Para las Tareas de Estimación de Longitudes

Con respecto a la adecuación de la unidad de medida utilizada para expresar el resultado, no encontramos diferencias significativas entre la Evaluación Inicial y la Final. En ambos casos hay un alto porcentaje de alumnos que adecuan la unidad de



medida a la cantidad a estimar y un bajo porcentaje de alumnos que utilizan el decímetro como unidad de medida, prefiriendo utilizar el centímetro en su lugar. Esta falta de dominio o interiorización del decímetro como unidad de medida puede venir influenciada por el bajo o nulo uso que tiene en la sociedad.

Comparando el tipo de referentes que los alumnos utilizan en las estimaciones nos encontramos, para todas las tareas, con diferencias que apuntan a una leve disminución del uso de referentes ausentes y un, también leve, aumento del uso de referentes presentes, en la Evaluación Final respecto de la Inicial.

La comparativa del uso de estrategias tampoco nos revela importantes diferencias entre la Evaluación Inicial y Final. En ambos casos, los alumnos recurren a estrategias de comparación siendo las estrategias 1 y 2a las más utilizadas en todas las tareas.

2.4.2. Para las Tareas de Estimación de Superficies

En las tareas de estimación de superficies es donde encontramos los cambios más significativos al comparar la Evaluación Inicial y Final. Principalmente en el uso de las unidades de medida, pues en todas las tareas se reducen considerablemente el número de alumnos que emplean erróneamente unidades longitudinales para expresar cantidades de superficie. En concreto, en la tarea II.1 pasamos de 15 alumnos que comenten este tipo de error por tan sólo cuatro en la Evaluación Final; en la tarea II.3 la evolución es de 12 alumnos que utilizan erróneamente unidades longitudinales en la Evaluación Inicial por tan sólo dos en la Evaluación Final; y en la tarea II.5, pasamos de ocho a cuatro. En línea con esta circunstancia, en cada una de las tareas aumenta el número de alumnos que expresan el resultado empleando unidades de medida propias de la magnitud superficie, principalmente el centímetro cuadrado y el metro cuadrado (dependiendo de la cantidad a estimar). Además, en concordancia con lo que ocurría para las estimaciones de longitudes, donde constatamos que los alumnos apenas usaban el decímetro, nos encontramos con que el decímetro cuadrado es una unidad que utilizan muy pocos alumnos.

En el análisis de estrategias se observa que, tanto en la Evaluación Inicial como en la Evaluación Final, los alumnos recurren principalmente al uso de fórmulas, aunque disminuye el número de alumnos que hacen uso de fórmulas erróneas (en la Evaluación Inicial emplearon fórmulas erróneas en 11 ocasiones por tan sólo 4 en la Evaluación Final). En la Evaluación Final también disminuye considerablemente el número de



alumnos que emplean estrategias inadecuadas (en la Evaluación Inicial emplearon estrategias inadecuadas en 20 ocasiones por tan sólo 4 en la Evaluación Final) y aumenta levemente el número de alumnos que se atreve utilizar estrategias de comparación (en la Evaluación Inicial usan estrategias de comparación en 3 ocasiones aumentando a 7 ocasiones en la Evaluación Final).

2.5. Resumen y Conclusiones del Análisis de Estrategias

La unidad de medida de longitud peor interiorizada es el decímetro. Además, incluso aquellos alumnos que la tienen interiorizada evitan su uso y no la ponen en práctica en tareas de estimación. Posiblemente sea debido a que en la vida cotidiana también es una unidad que no se utiliza.

Respecto del uso de unidades de medida destaca el alto porcentaje de alumnos que emplean inadecuadamente unidades longitudinales para referirse a cantidades de superficie. Circunstancia que mejora considerablemente en la Evaluación Final.

Por otra parte, también hay varios alumnos que expresan las diferentes cantidades de superficie como un producto de unidades longitudinales, aun no teniendo forma rectangular. Esta situación puede ser debida a que en la vida real se nos presentan muchas medidas de cantidades de superficie como producto de sus dimensiones longitudinales, ya que esta forma de expresión aporta más información que el uso de unidades de superficie.

Cuando los alumnos estiman longitudes utilizan fundamentalmente estrategias de comparación directa, comparación con un referente aproximadamente igual o la comparación con un múltiplo de un referente, cuyas características varían en función del referente utilizado en la comparación. Principalmente usan referentes presentes. Dado que son pocos los alumnos que comparan con la unidad de medida, esto nos indica que los alumnos no suelen confiar en la interiorización que tienen de las unidades de medida. En cambio, los alumnos prácticamente no utilizan estrategias de comparación con cantidades de superficie. Las estimaciones de superficies se reducen frecuentemente al empleo de fórmulas. Ello implica que las estimaciones de superficies se transforme en estimaciones de cantidades de longitudes a usar en las fórmulas, con el riesgo que ello conlleva, pues pequeños errores en la estimación de las cantidades a usar en las fórmulas pueden convertirse en errores mucho mayores debido al fenómeno de la



propagación del error, circunstancia que no es considerada por ningún alumno. Además el empleo de fórmulas pone en juego una serie de conocimientos que en muchos casos es deficiente, tales como, el conocimiento de la fórmula matemática adecuada, el manejo de las operaciones básicas implicadas, la comprensión del resultado en términos de cantidad de superficie y el uso de una unidad coherente para expresarlo.

También es considerable el número de alumnos que emplean estrategias inadecuadas para estimar superficies, principalmente en la Evaluación Inicial, posiblemente debido al desconocimiento de la magnitud.

No incluimos un estudio de la correlación entre las estrategias utilizadas y la precisión alcanzada porque el hecho de que las frecuencias con que se usan unas estrategias u otras son muy distintas condiciona dicho estudio y podría llevarnos a conclusiones erróneas. Además, la precisión que se pueda alcanzar en una tarea no sólo depende de la estrategia empleada, pues también depende de la interiorización que el alumno tenga del referente utilizado en la comparación.



CAPÍTULO 8: ANÁLISIS DE LA EVOLUCIÓN INDIVIDUAL DE LOS ALUMNOS

En este capítulo estudiamos la evolución de la capacidad estimativa de los alumnos. Para valorar la evolución de los alumnos en la capacidad estimativa vamos a analizar los siguientes elementos:

- **Precisión de las estimaciones realizadas:** Analizamos cómo de próximas están las estimaciones realizadas respecto de la medida exacta de las cantidades a estimar. Establecemos escalas para valorar la precisión de las estimaciones realizadas en las tareas seleccionadas. Estas valoraciones las realizamos usando el porcentaje medio del error en valor absoluto.
- **Tendencia en las estimaciones:** Analizamos si el alumno presenta tendencia a la subestimación/sobrestimación. Para estudiarla utilizamos sendas escalas basadas en el porcentaje de error y la clasificación⁴⁴ de las respuestas en subestimaciones no aceptables (SubNA), subestimaciones aceptables (SubA), respuestas que coinciden con la medida exacta (ME), sobrestimaciones aceptables (SobA) y sobrestimaciones no aceptables (SobNA).
- **Unidades de medida:** Analizamos la adecuación de la unidad de medida seleccionada y el grado de interiorización que muestran de las mismas. En este estudio nos centramos en las siguientes unidades: centímetro, decímetro y metro, para la magnitud longitud; y centímetro cuadrado, decímetro cuadrado y metro cuadrado, para la magnitud superficie.
- **Estrategias puestas en juego:** Siguiendo la caracterización de estrategias realizado en el capítulo 7 (apartado 2.1.3) valoramos el uso que el alumno hace de las mismas.
- **Referentes:** Estudiamos qué elementos utiliza el alumno para comparar: referentes presentes, referentes ausentes o si realiza las comparaciones

⁴⁴ Según la categorización del nivel 3 establecida en el apartado 1.2 del capítulo 6.



directamente con la unidad de medida. Al mismo tiempo analizaremos el grado de interiorización que tiene de los mismos.

- Errores: Analizamos la posible aparición de errores. Para ello, utilizamos la tipología descrita en el capítulo 7 (apartado 1.1).

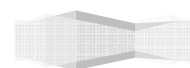
Para valorar esta evolución exploramos las producciones de los alumnos en todas las fichas, prestando especial atención a sus producciones recogidas en cuatro de las fichas trabajadas: Evaluación Inicial (primera sesión), Ficha 5 (tercera sesión), Ficha 8 (sexta sesión) y Evaluación Final (octava sesión). Consideramos estos cuatro momentos porque estas fichas incluían tareas de estimación tipo A y porque son cuatro momentos espaciados en el tiempo con sesiones de trabajo intermedias. Además, estas cuatro fichas recogen trabajo individual de los alumnos, a diferencia de otras fichas que recogen trabajo en grupo. Complementaremos la información recogida de estas fichas con una breve descripción de las producciones de los alumnos en el resto de las fichas, con el fin de buscar indicadores sobre cómo evoluciona la adquisición de componentes.

Una vez realizada una valoración individual de la evolución de los alumnos en términos de precisión y tendencia (apartado 2); y tras un análisis individual de los alumnos donde estudiamos la evolución de la adquisición de las componentes de la estimación en medida (apartado 3) trataremos de extraer perfiles de alumnos en función de la capacidad estimativa tanto para longitud como para superficie, y comparamos los resultados obtenidos (apartado 4).

1. ESCALAS Y TAREAS PARA VALORAR LA PRECISIÓN Y LA TENDENCIA

Establecemos una escala para valorar la precisión que los alumnos alcanzan en las estimaciones y otra para valorar la posible tendencia a la subestimación o sobrestimación. Para establecer ambas escalas vamos a diferenciar la capacidad estimativa de los alumnos en longitud de la capacidad estimativa en superficie, y para cada magnitud consideramos una escala diferenciada puesto que los resultados en las dos magnitudes son muy dispares.

Las escalas que presentamos a continuación están diseñadas para poder ser aplicadas en cualquier ficha que incluya tareas de estimación tipo A. Aquí describimos las tareas seleccionadas para ello.



1.1. Escalas para Valorar la Precisión y la Tendencia en las Estimaciones en Longitud

Establecemos a continuación dos escalas en longitud, una para valorar la precisión y otra para valorar la tendencia que han sido construidas siguiendo el mismo patrón.

1.1.1. Escala para Valorar la Precisión de las Estimaciones en Longitud

Ampliamos la escala utilizada por Levine (1982) que establecía tres niveles de precisión, de 0 a 10%, de 10 a 20% y de 20 a 30 %, aumentando hasta llegar al 50% (límite de aceptabilidad que tomaba Siegel et al., 1982). Esto no quiere decir que vayamos a modificar el límite de aceptabilidad establecido, sino que vamos a considerar un rango más amplio de error que nos permita considerar tanto las estimaciones aceptables como las no aceptables. Así vamos a considerar las siguientes categorías:

Grado de Precisión 1. Porcentaje medio del error en valor absoluto comprendido en el intervalo [0,10].

Grado de Precisión 2. Porcentaje medio del error en valor absoluto comprendido en el intervalo (10,20].

Grado de Precisión 3. Porcentaje medio del error en valor absoluto comprendido en el intervalo (20,30].

Grado de Precisión 4. Porcentaje medio del error en valor absoluto comprendido en el intervalo (30,40].

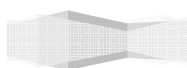
Grado de Precisión 5. Porcentaje medio del error en valor absoluto comprendido en el intervalo (40,50].

Grado de Precisión 6. Porcentaje medio del error en valor absoluto superior al 50%.

Según lo dispuesto en nuestro estudio, para que una estimación sea considerada aceptable debe tener un grado de precisión comprendido entre 1 y 3, inclusive.

1.1.2. Escala para Valorar la Tendencia a la Subestimación o Sobrestimación en Longitud

Consideramos la siguiente escala para valorar la tendencia tanto a la subestimación como a la sobrestimación, donde distinguimos la tendencia a la subestimación con valores negativos y la tendencia a la sobrestimación con valores positivos.



Grado de Tendencia +1. Porcentaje medio del error en el intervalo [0,10].

Grado de Tendencia +2. Porcentaje medio del error en el intervalo (10,20].

Grado de Tendencia +3. Porcentaje medio del error en el intervalo (20,30].

Grado de Tendencia +4. Porcentaje medio del error en el intervalo (30,40].

Grado de Tendencia +5. Porcentaje medio del error en el intervalo (40,50].

Grado de Tendencia +6. Porcentaje medio del error superior a 50%.

Grado de Tendencia -1. Porcentaje medio del error en el intervalo [-10,0].

Grado de Tendencia -2. Porcentaje medio del error en el intervalo [-20,-10).

Grado de Tendencia -3. Porcentaje medio del error en el intervalo [-30,-20).

Grado de Tendencia -4. Porcentaje medio del error en el intervalo [-40,-30).

Grado de Tendencia -5. Porcentaje medio del error en el intervalo [-50,-40).

Grado de Tendencia -6. Porcentaje medio del error inferior a -50%.

1.2. Escalas para Valorar la Precisión y la Tendencia en las Estimaciones en Superficie

Las escalas que presentamos a continuación están referidas a la magnitud superficie. Al igual que en la longitud utilizamos el mismo patrón para construir ambas escalas.

1.2.1. Escala para Valorar la Precisión de las Estimaciones en Superficie

La escala que establecemos para valorar la precisión de las estimaciones está realizada considerando la bidimensionalidad de la superficie. Usando los valores límites tomados en la escala presentada en el apartado 1.1.1 para las dos dimensiones, obtenemos la escala que presentamos a continuación:

Grado de Precisión 1. Porcentaje medio del error en valor absoluto comprendido en el intervalo [0, 21].⁴⁵

⁴⁵ Un error del 10% en la estimación de cada una de las dos dimensiones de que consta una superficie generan un error máximo del 21% en la estimación de la superficie. Recurriendo a la Teoría de Errores: $(1+0.1)^2=1^2+0.1^2+2\cdot 1\cdot 0.1=1+0.21$.



Grado de Precisión 2. Porcentaje medio del error en valor absoluto comprendido en el intervalo (21, 44].⁴⁶

Grado de Precisión 3. Porcentaje medio del error en valor absoluto comprendido en el intervalo (44, 69].⁴⁷

Grado de Precisión 4. Porcentaje medio del error en valor absoluto comprendido en el intervalo (69, 96].⁴⁸

Grado de Precisión 5. Porcentaje medio del error en valor absoluto comprendido en el intervalo (96, 125].⁴⁹

Grado de Precisión 6. Porcentaje medio del error en valor absoluto superior al 125%.

Para que una estimación sea considerada aceptable, según el criterio que establecimos del 30% debe tener un grado de precisión 1. No todas las estimaciones con grado de precisión 2 entrarían dentro de lo que consideramos una estimación aceptable.

1.2.2. Escala para Valorar la Tendencia a la Subestimación o Sobrestimación en Superficie

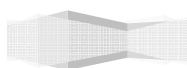
De forma análoga a como realizamos para el caso de la magnitud longitud, consideramos la siguiente escala para valorar la tendencia tanto a la subestimación como a la sobrestimación en la magnitud superficie. Distinguimos la tendencia a la subestimación con valores negativos y la tendencia a la sobrestimación con valores positivos.

⁴⁶ Un error del 20% en la estimación de cada una de las dos dimensiones de que consta una superficie generan un error máximo del 44% en la estimación de la superficie. Recurriendo a la Teoría de Errores: $(1+0.2)^2=1^2+0.2^2+2\cdot 1\cdot 0.2=1+0.44$.

⁴⁷ Un error del 30% en la estimación de cada una de las dos dimensiones de que consta una superficie generan un error máximo del 69% en la estimación de la superficie. Recurriendo a la Teoría de Errores: $(1+0.3)^2=1^2+0.3^2+2\cdot 1\cdot 0.3=1+0.69$.

⁴⁸ Un error del 40% en la estimación de cada una de las dos dimensiones de que consta una superficie generan un error máximo del 96% en la estimación de la superficie. Recurriendo a la Teoría de Errores: $(1+0.4)^2=1^2+0.4^2+2\cdot 1\cdot 0.4=1+0.96$.

⁴⁹ Un error del 40% en la estimación de cada una de las dos dimensiones de que consta una superficie generan un error máximo del 96% en la estimación de la superficie. Recurriendo a la Teoría de Errores: $(1+0.4)^2=1^2+0.4^2+2\cdot 1\cdot 0.4=1+0.96$.



Grado de Tendencia +1. Porcentaje medio del error en el intervalo [0,21].

Grado de Tendencia +2. Porcentaje medio del error en el intervalo (21,44].

Grado de Tendencia +3. Porcentaje medio del error en el intervalo (44,69].

Grado de Tendencia +4. Porcentaje medio del error en el intervalo (69,96].

Grado de Tendencia +5. Porcentaje medio del error en el intervalo (96,125].

Grado de Tendencia +6. Porcentaje medio del error superior a 125%.

Grado de Tendencia -1. Porcentaje medio del error en el intervalo [-21,0].

Grado de Tendencia -2. Porcentaje medio del error en el intervalo [-44,-21].

Grado de Tendencia -3. Porcentaje medio del error en el intervalo [-69,-44].

Grado de Tendencia -4. Porcentaje medio del error en el intervalo [-96,-69].

Grado de Tendencia -5. Porcentaje medio del error en el intervalo [-125,-96].

Grado de Tendencia -6. Porcentaje medio del error inferior a -125%.

1.3. Tareas Seleccionadas para Valorar la Precisión y Tendencia

Las Tabla 8. 1 y

Tabla 8. 2 recogen las tareas consideradas para valorar la capacidad estimativa en longitud y superficie respectivamente. Las características de las tareas seleccionadas se pueden consultar en el capítulo 5, donde se describen las características de todas las tareas propuestas en cada ficha.

Tabla 8. 1. Tareas Utilizadas para Valorar la Capacidad Estimativa en Longitud.

Notación	Tarea	Descripción de la Tarea	Medida exacta
En la Evaluación Inicial:			
L.1.1	I.1.	Estimar el largo de la mesa del profesor	1.4 m
L.1.2	I.3.	Estimar el grosor de la mesa sobre la que escribe	2 cm
L.1.3	I.5.	Estimar la longitud del pegamento en barra	9.4 cm
L.1.4	I.7.	Estimar la longitud de una cuerda	3 m
En la Ficha 5:			
L.2.1	5.5.e	Estimar la anchura de una baldosa	40 cm
L.2.2	5.5.f	Estimar el largo de un pupitre	70 cm
L.2.3	5.5.h	Estimar el largo de la clase	10 m



Notación	Tarea	Descripción de la Tarea	Medida exacta
En la Ficha 8:			
L.3.1	8.1.	Estimar la altura de la puerta	2.05 m
L.3.2	8.2.	Estimar la longitud de un clip	3.3 cm
L.3.3	8.3.	Estimar la diagonal de un folio	36.4 cm
En la Evaluación Final:			
L.4.1	I.1..	Estimar el largo de la mesa del profesor	1.4 m
L.4.2	I.3.	Estimar el grosor de la mesa sobre la que escribe	2 cm
L.4.3	I.5.	Estimar la longitud del pegamento en barra	9.4 cm
L.4.4	I.7.	Estimar la longitud de una cuerda	3 m

Tabla 8. 2. Tareas Utilizadas para Valorar la Capacidad Estimativa en Superficie.

Notación	Tarea	Descripción de la Tarea	Medida exacta
En la Evaluación Inicial:			
S.1.1	II.1.	Estimar la superficie de la pizarra	2.76 m ²
S.1.2	II.3.	Estimar la superficie de la diana	3.8 dm ²
S.1.3	II.5.	Estimar la superficie del mapa de España	42 dm ²
En la Ficha 5:			
S.2.1	5.6.b	Estimar la superficie de un folio	623.7 cm ²
S.2.2	5.6.c	Estimar la superficie del pupitre	35 dm ²
S.2.3	5.6.d	Estimar la superficie de la puerta	2 m ²
En la Ficha 8:			
S.3.1	8.4.	Estimar la superficie de la agenda	3.15 dm ²
S.3.2	8.5.	Estimar la superficie de la pared del aula	27 m ²
S.3.3	8.6.	Estimar la superficie de la Península Ibérica en un mapa	5 cm ²
En la Evaluación Final:			
S.4.1	II.1.	Estimar la superficie de la pizarra	2.76 m ²
S.4.2	II.3.	Estimar la superficie de la diana	3.8 dm ²
S.4.3	II.5.	Estimar la superficie del mapa de España	42 dm ²

2. VALORACIONES INDIVIDUALES DE PRECISIÓN Y TENDENCIA

En este capítulo estudiamos los alumnos que respondieron a todas las fichas. De este modo aseguramos que todos los individuos para los que analizamos su evolución recibieron la misma instrucción. En total contamos con trece estudiantes: A5, A8, A13, A15, A17, A19, A21, A23, A24, A25, A26, A27 y A28. Tras recoger toda la información disponible para cada alumno (**Apéndices J y K**), realizamos una valoración diferenciando la capacidad estimativa en longitud de la capacidad estimativa en superficie. Dichas valoraciones nos permiten caracterizar la capacidad estimativa individual de cada alumno.

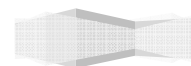
Para valorar la precisión y/o tendencia vamos a considerar una serie de tareas de cada una de las cuatro fichas indicadas anteriormente. Los porcentajes medios de error con o sin valor absoluto serán los elementos que nos permitirán aplicar las escalas establecidas en el apartado anterior.

2.1. Valoraciones de Precisión y Tendencia en Longitud

Utilizando las escalas descritas en el apartado 1.1 valoramos las estimaciones relativas a la magnitud longitud para cada uno de los alumnos. Recogemos las valoraciones en la Tabla 8. 3 donde hemos incluido el número de respuestas consideradas “RC” y el valor de precisión que se ha obtenido tras aplicar la escala descrita en el apartado 1.1.1 a la media aritmética del porcentaje del error en valor absoluto cometido en las tareas señaladas en el apartado 1.3.

Tabla 8. 3 Puntuación en Precisión de cada Alumno Usando las Escalas Descritas en el Apartado 1.1.

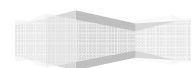
Ai	Ficha	RC	Precisión	Ai	Ficha	RC	Precisión
A5	Inicial	3/4	6	A23	Inicial	2/4	1
	Ficha 5	3/3	5		Ficha 5	2/3	1
	Ficha 8	3/3	3		Ficha 8	3/3	1
	Final	4/4	4		Final	4/4	1
A8	Inicial	4/4	5	A24	Inicial	4/4	5
	Ficha 5	1/3	6		Ficha 5	3/3	5



Ai	Ficha	RC	Precisión	Ai	Ficha	RC	Precisión
	Ficha 8	3/3	2		Ficha 8	3/3	2
	Final	4/4	1		Final	4/4	4
A13	Inicial	4/4	3	A25	Inicial	4/4	2
	Ficha 5	0/3			Ficha 5	3/3	3
	Ficha 8	3/3	3		Ficha 8	2/3	1
	Final	3/4	3		Final	4/4	1
A15	Inicial	4/4	5	A26	Inicial	4/4	3
	Ficha 5	3/3	5		Ficha 5	3/3	5
	Ficha 8	3/3	3		Ficha 8	3/3	2
	Final	4/4	2		Final	4/4	1
A17	Inicial	4/4	1	A27	Inicial	4/4	4
	Ficha 5	3/3	6		Ficha 5	3/3	4
	Ficha 8	3/3	1		Ficha 8	3/3	2
	Final	4/4	2		Final	4/4	3
A19	Inicial	3/4	4	A28	Inicial	3/4	3
	Ficha 5	3/3	6		Ficha 5	3/3	2
	Ficha 8	2/3	2		Ficha 8	3/3	3
	Final	4/4	2		Final	4/4	2
A21	Inicial	4/4	2				
	Ficha 5	3/3	2				
	Ficha 8	3/3	1				
	Final	4/4	1				

En relación a la evolución de la precisión hay diferentes tipos de alumnos: alumnos que mantienen el mismo nivel de precisión, como el alumno A23 o el alumno A13; alumnos que mejoran su nivel de precisión, como por ejemplo los alumnos A8 o A15; y alumnos que muestran un nivel de precisión irregular, como el alumno A17.

Para valorar la tendencia hacia la subestimación/sobrestimación incluimos en la Tabla 8.4 el número de respuestas consideradas “RC”, clasificamos las respuestas de los alumnos según la categorización del nivel 3 establecida en el [apartado 1.2 del capítulo 6](#), y valoramos la tendencia aplicando la escala establecida en el [apartado 1.1.2](#) a la



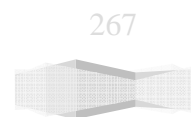
media aritmética del porcentaje de error cometido en las estimaciones de las tareas señaladas en el apartado 1.3.

Tabla 8. 4. Clasificación de las Respuestas⁵⁰, y Puntuación en Precisión de cada Alumno Usando las Escalas Descritas en el Apartado 1.1.

Ai	Ficha	RC	SubNA	SubA	ME	SobA	SobNA	Tendencia
A5	Inicial	3/4	2	1				-6
	Ficha 5	3/3	2		1			-5
	Ficha 8	3/3	1	2				-3
	Final	4/4	2	2				-4
A8	Inicial	4/4		1		2	1	+4
	Ficha 5	1/3	1					-6
	Ficha 8	3/3		1		2		+1
	Final	4/4			2	2		+1
A13	Inicial	4/4	1		1		2	+2
	Ficha 5	0/3						
	Ficha 8	3/3		1		1	1	+2
	Final	3/4	1	2				-3
A15	Inicial	4/4	1				3	+1
	Ficha 5	3/3	1	1			1	+1
	Ficha 8	3/3	2	1				-3
	Final	4/4		2	1	1		-1
A17	Inicial	4/4		1	1	2		-1
	Ficha 5	3/3	1	1			1	+6
	Ficha 8	3/3		2		1		-1
	Final	4/4		2	1	1		+2

⁵⁰ Según el nivel 3, descrito en apartado 1.2 del capítulo 4.

Ai	Ficha	RC	SubNA	SubA	ME	SobA	SobNA	Tendencia
A19	Inicial	3/4	2		1			-4
	Ficha 5	3/3	1	1			1	+1
	Ficha 8	2/3		1		1		+1
	Final	4/4	1		1	2		-1
A21	Inicial	4/4		1		2	1	+2
	Ficha 5	3/3		1		2		+1
	Ficha 8	3/3		2		1		+1
	Final	4/4			1	3		+1
A23	Inicial	2/4		1	1			-1
	Ficha 5	2/3		1	1			-1
	Ficha 8	3/3		3				-1
	Final	4/4			2	2		+1
A24	Inicial	4/4	2			1	1	-2
	Ficha 5	3/3	2	1				-5
	Ficha 8	3/3		2			1	+1
	Final	4/4	1	1		1	1	+1
A25	Inicial	4/4	1		1	2		-1
	Ficha 5	3/3	1	2				-3
	Ficha 8	2/3		2				-1
	Final	4/4		1	2	1		-1
A26	Inicial	4/4	1	2	1			-3
	Ficha 5	3/3	1	2				-5
	Ficha 8	3/3	1	2				-2
	Final	4/4		3		1		-1
A27	Inicial	4/4	1		1	1	1	+2



Ai	Ficha	RC	SubNA	SubA	ME	SobA	SobNA	Tendencia
	Ficha 5	3/3		1		1	1	+2
	Ficha 8	3/3		3				-2
	Final	4/4	1	2		1		-1
A28	Inicial	3/4	1	2				-3
	Ficha 5	3/3			2		1	+2
	Ficha 8	3/3	2	1				-3
	Final	4/4		1	1	2		-1

Apreciamos en la Tabla 8. 4 que hay alumnos, A5, A21, A25 y A26, que presentan la misma tendencia en todas las fichas; sin embargo, los alumnos A21, A25 y A26, en algunas tareas de las fichas, no tienen la misma tendencia; el resto de los alumnos no presenta ningún tipo de regularidad. Así, los alumnos A5 y A21 sobreestiman en todas las fichas y los alumnos A25 y A26 subestiman. Los demás alumnos en unos casos sobreestiman y en otros subestiman. Desde una perspectiva global, no se manifiesta tendencia en un sentido o en otro de la estimación.

2.2. Valoraciones de Precisión y Tendencia en Superficie

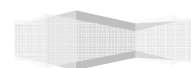
Igual que para el caso de la longitud, en este apartado valoramos cuantitativamente la precisión de las estimaciones relativas a la magnitud superficie para cada uno de los alumnos, utilizando la escala descrita en el apartado 1.2.1. Recogemos las valoraciones en la Tabla 8. 5 donde hemos incluido el número de respuestas consideradas “RC” y el valor de precisión que se ha obtenido tras aplicar la escala descrita en el apartado 1.2.1 a la media aritmética del porcentaje del error en valor absoluto cometido en las tareas señaladas en el apartado 1.3.

Tabla 8. 5. Puntuación en Precisión y Tendencia de cada Alumno Usando las Escalas Descritas en el Apartado 1.1.

Ai	Ficha	RC	Precisión	Ai	Ficha	RC	Precisión
A5	Inicial	3/3	3	A23	Inicial	0/3	
	Ficha 5	0/3			Ficha 5	3/3	2



Ai	Ficha	RC	Precisión	Ai	Ficha	RC	Precisión
	Ficha 8	2/3	1		Ficha 8	1/3	6
	Final	2/3	3		Final	2/3	6
A8	Inicial	3/3	4	A24	Inicial	3/3	6
	Ficha 5	3/3	4		Ficha 5	3/3	3
	Ficha 8	3/3	3		Ficha 8	3/3	3
	Final	3/3	6		Final	3/3	2
A13	Inicial	0/3		A25	Inicial	0/3	
	Ficha 5	0/3			Ficha 5	2/3	2
	Ficha 8	3/3	2		Ficha 8	3/3	2
	Final	2/3	3		Final	1/3	4
A15	Inicial	0/3		A26	Inicial	0/3	
	Ficha 5	0/3			Ficha 5	0/3	
	Ficha 8	2/3	5		Ficha 8	3/3	5
	Final	3/3	4		Final	3/3	5
A17	Inicial	3/3	6	A27	Inicial	3/3	6
	Ficha 5	3/3	6		Ficha 5	3/3	5
	Ficha 8	0/3			Ficha 8	3/3	2
	Final	2/3	3		Final	2/3	2
A19	Inicial	2/3	3	A28	Inicial	3/3	6
	Ficha 5	0/3			Ficha 5	3/3	4
	Ficha 8	2/3	2		Ficha 8	3/3	1
	Final	3/3	3		Final	3/3	3
A21	Inicial	1/3	6				
	Ficha 5	3/3	4				
	Ficha 8	3/3	2				



Ai	Ficha	RC	Precisión	Ai	Ficha	RC	Precisión
	Final	3/3	4				

Como podemos apreciar en la Tabla 8. 5, para muchos alumnos no es posible valorar la precisión alcanzada en las estimaciones, pues el número de respuestas consideradas (RC) es cero, sobre todo en las primeras fichas (Ficha de Evaluación Inicial y Ficha 5).

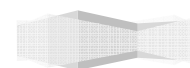
Para analizar la tendencia a la subestimación/sobrestimación incluimos en la Tabla 8. 6 el número de respuestas consideradas “RC”, clasificamos las respuestas de los alumnos según la categorización del nivel 3 establecida en el apartado 1.2 del capítulo 6, y valoramos la tendencia aplicando la escala establecida en el apartado 1.2.2 a la media aritmética del porcentaje de error cometido en las estimaciones de las tareas señaladas en el apartado 1.3.

Tabla 8. 6. Clasificación de las Respuestas⁵¹, y Puntuación en Precisión de cada Alumno Usando las Escalas Descritas en el Apartado 1.2.2.

Ai	Ficha	RC	SubNA	SubA	ME	SobA	SobNA	Tendencia
A5	Inicial	3/3	2			1		-2
	Ficha 5	0/3						
	Ficha 8	2/3	1		1			-1
	Final	2/3	1			1		-3
A8	Inicial	3/3	3					-4
	Ficha 5	3/3	3					-4
	Ficha 8	3/3	2				1	-2
	Final	3/3	1				2	+6
A13	Inicial	0/3						
	Ficha 5	0/3						
	Ficha 8	3/3	1	1		1		-2
	Final	2/3	1			1		-2

⁵¹ Según el nivel 3, descrito en apartado 1.2 del capítulo 4.

A15	Inicial	0/3					
	Ficha 5	0/3					
	Ficha 8	2/3	2				-5
	Final	3/3	1		1	1	+1
A17	Inicial	3/3	1		1	1	+5
	Ficha 5	3/3		1	1	1	+5
	Ficha 8	0/3					
	Final	2/3	1	1			-3
A19	Inicial	2/3	2				-3
	Ficha 5	0/3					
	Ficha 8	2/3	1	1			-2
	Final	3/3	2		1		-3
A21	Inicial	1/3				1	+6
	Ficha 5	3/3			1	2	+4
	Ficha 8	3/3		2		1	+1
	Final	3/3				3	+4
A23	Inicial	0/3					
	Ficha 5	3/3		2		1	+1
	Ficha 8	1/3				1	+6
	Final	2/3				2	+6
A24	Inicial	3/3	1			2	+6
	Ficha 5	3/3	2		1		-3
	Ficha 8	3/3	1		1	1	+1
	Final	3/3		2		1	+2
A25	Inicial	0/3					
	Ficha 5	2/3	1	1			-2

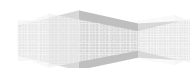


	Ficha 8	3/3	1		1	1	+1
	Final	1/3	1				-4
A26	Inicial	0/3					
	Ficha 5	0/3					
	Ficha 8	3/3	1	1		1	+4
	Final	3/3	1	1		1	+3
A27	Inicial	3/3	1			2	+6
	Ficha 5	3/3	1			2	+3
	Ficha 8	3/3	2		1		-2
	Final	2/3	1			1	+1
A28	Inicial	3/3			1	2	+6
	Ficha 5	3/3	1		1	1	+3
	Ficha 8	3/3	1		1		-1
	Final	3/3			2	1	+3

Con respecto a la tendencia hacia la subestimación/sobrestimación apreciamos en la Tabla 8. 6 como hay alumnos que presentan la misma tendencia en todas las fichas, aunque no en todas las tareas. Por ello, no podemos afirmar que ningún alumno sea sobrestimador o subestimador sistemáticamente. Por ejemplo, los alumnos A5, A13 y A19 presentan valores de tendencia a la subestimación en todas las fichas, mientras que los alumnos A21, A23 y A26 presentan valores de tendencia a la sobrestimación. No obstante, estas tendencias no se ratifican en todas las tareas realizadas en cada una de las fichas. Luego, desde la perspectiva de los alumnos, en general no se presenta tendencia a la subestimación o sobreestimación.

3. ANÁLISIS INDIVIDUALIZADO

Analizamos individualmente a los alumnos estudiando la capacidad estimativa en longitud y en superficie. Para caracterizar la capacidad estimativa estudiamos los elementos descritos al inicio de este capítulo.



3.1. Análisis Individual de la Capacidad Estimativa en Longitud

Para realizar el análisis individual de la capacidad estimativa nos valemos de las estimaciones realizadas en las tareas seleccionadas en **apartado 2.1** del presente **capítulo** y de la revisión de las respuestas a todas las fichas realizada para cada uno de los alumnos (Apéndices J.1 y K.1). Las unidades de medida estudiadas de esta magnitud serán centímetro, decímetro y metro, pues son las unidades de las que disponemos de tareas tipo A y tipo B. En la Tabla_ recogemos la evolución de los siguientes elementos que caracterizan la capacidad estimativa:

- Percepción de la Magnitud (PC)
- Conocimiento de la Terminología (TM)
- Adecuación de la Unidad de Medida (AU)
- Interiorización de la Unidad de Medida (IU)
- Interiorización de Referentes (IR)
- Uso de Estrategias (UE)

Valoramos los anteriores elementos en la evaluación inicial y en la evaluación final indicando ambas valoraciones en la tabla consecutivamente. Para ello utilizamos el símbolo “+” para indicar que el alumno la tiene asimilada (o al menos, no muestra tener alguna dificultad asociada a la misma) y “-” para indicar que el alumno presenta alguna deficiencia relacionada con dicha característica. Las características TD, PC, TM, AU, IR y UE son valoradas usando las tareas tipo A, y la IU es valorada usando las tareas tipo B.

Estas características de la estimación están relacionadas con las componentes de la estimación en medida descritas en el capítulo 4 como muestra la Tabla 8. 7.

Tabla 8. 7. Relación entre las Características Estudiadas y las Componentes.

Característica	Componentes
PC	CMa1
TM	CMa10, CMe11, MEst8
AU	CMe5
IU	CMe7, CEst2
IR	CMe6, CEst1
UE	CEst3, CEst4

Las valoraciones recogidas en la Tabla 8. 8 muestran como hay alumnos que dominan estas características tanto al inicio como al final: el A17 A21 y A28. Otros alumnos, como el A25 o A26 las dominan todas, salvo la interiorización del decímetro en la evaluación inicial (en la evaluación final mejora). Hay alumnos que muestran otras carencias en la evaluación inicial que se corrigen y no aparecen en la evaluación final: A8, A15, A19, A23 y A27. Y hay alumnos que tienen dificultades con algunas de estas características tanto en la evaluación inicial como en la final: A5, A13 y A24.

Tabla 8. 8. Evolución de la Capacidad Estimativa en Longitud.

Alumno	PC	TM	AU	IU			IR	UE
				cm	dm	m		
A5	++	-+	++	++	-+	++	--	-+
A8	++	-+	++	++	++	++	++	++
A13	++	+ -	++	++	-+	++	-+	-+
A15	++	++	++	++	++	++	-+	-+
A17	++	++	++	++	++	++	++	++
A19	-+	++	-+	++	-+	++	--	-+
A21	++	++	++	++	++	++	++	++
A23	++	++	-+	++	-+	++	++	++
A24	++	-+	++	++	-+	++	-+	--
A25	++	++	++	++	-+	++	++	++
A26	++	++	++	++	-+	++	++	++
A27	++	++	++	++	++	++	-+	-+
A28	++	++	++	++	++	++	++	++

En general casi todos los alumnos perciben la magnitud longitud, utilizan unidades de medida adecuadas y tienen interiorizados las unidades centímetro y metro que suelen ser las que usan para expresar el resultado. La unidad decímetro no la tienen interiorizada todos los alumnos y son pocos los que la utilizan para expresar alguna estimación (véase Apéndice J.1). Algunos alumnos han tenido dificultades relacionadas con la terminología debida al desconocimiento del significado de algunos términos y aproximadamente la mitad de los alumnos presentan interiorización inadecuada de referentes o uso inadecuado de estrategias en la evaluación inicial corrigiendo dicha circunstancia para la evaluación final.



Para completar la información recogida en la Tabla 8. 8 describimos brevemente las características observadas para cada uno de los alumnos:

- **Alumno A5:**

El alumno A5 percibe la cualidad longitud y conoce la terminología asociada, aunque en las primeras tareas muestra el desconocimiento o confusión de algunos términos, como puede ser “grosor” o “anchura”.

Realiza estimaciones con un bajo grado de precisión, aunque mejora levemente pues pasa de realizar estimaciones de grado de precisión 6 en la evaluación inicial a estimaciones de grado de precisión 4 en la evaluación final.

Emplea unidades de medida adecuadas a la magnitud a estimar, aunque las tiene deficientemente interiorizadas. En las estimaciones realizadas usando el metro subestima, pero incurriendo en un error relativo menor que cuando utiliza el centímetro. El decímetro no lo utiliza para estimar. Tiene deficientemente interiorizados algunos referentes, hecho que se mantiene durante todo el proceso. Algunos de los referentes deficientemente interiorizados son antropométricos, como el grosor de su dedo.

Las estrategias más recurridas son la comparación con un referente aproximadamente igual (estrategia 1) y la comparación con un múltiplo de un referente (estrategia 2a).

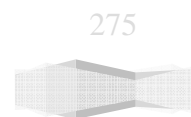
- **Alumno A8:**

El alumno A8 percibe la cualidad longitud, conoce la terminología asociada con deficiencias en algunos términos, ya que parece confundir anchura con grosor, y en algunas tareas parece no entender el significado de la expresión “el largo de...”.

Emplea unidades de medida adecuadas a la magnitud a estimar, salvo en la Ficha 5, donde parece confundir la magnitud a estimar o la unidad a utilizar. Salvando estos errores conceptuales detectados en la Ficha 5, demuestra tener interiorizadas las unidades de medida centímetro y metro, y usarlas adecuadamente. El decímetro no lo utiliza en las estimaciones.

También tiene adecuadamente interiorizados los referentes utilizados, los cuales son fundamentalmente referentes presentes que utiliza en estrategias de comparación.

Es un alumno que tiene algunas dificultades conceptuales, relacionadas con la terminología. Muestra una evolución en la mejoría de la capacidad estimativa muy positiva llegando a realizar estimaciones con un grado de precisión 1.



- **Alumno A13:**

El alumno A13 percibe la cualidad longitud y conoce la terminología asociada, aunque conoce deficientemente algunos términos, como puede ser “grosor”. Emplea unidades de medida adecuadas a la magnitud a estimar, aunque la interiorización que tiene de las mismas depende de la unidad: así el metro parece ser una unidad que tiene aceptablemente interiorizada y, en cambio, el decímetro es la unidad que peor interiorizada tiene. La interiorización de referentes ha mejorado. En cambio sigue presentando algunas deficiencias en la adquisición de referentes. Por ese motivo mantiene un grado de precisión 3 en casi todas las fichas.

Utiliza estrategias de comparación, incurriendo en algún error en las comparaciones en las tareas de la evaluación inicial. En la evaluación final no incurre en este tipo de errores.

- **Alumno A15:**

El alumno A15 muestra una evolución positiva en cuanto a la mejora de la precisión de sus estimaciones. Pasa de realizar estimaciones deficientes con un bajo grado de precisión (grado 5) a terminar realizando estimaciones con un grado de precisión aceptable (grado 2).

Cuando estima utiliza fundamentalmente estrategias de comparación. En las primeras fichas, la baja precisión de sus estimaciones puede ser debida a la falta de interiorización de referentes o a la deficiente interiorización de los mismos. En las estimaciones finales esta circunstancia parece mejorar. Este alumno parece acabar interiorizando las unidades de medida trabajadas (incluido el dm). No obstante muestra cierta falta de motivación al realizar las tareas pues no detalla los procedimientos utilizados al cumplimentar las últimas fichas.

Alumno que muestra una evolución muy positiva en la precisión de sus estimaciones, con una buena interiorización de unidades de medida (incluido el dm, que usa de un modo espontáneo).

- **Alumno A17:**

Se trata de un alumno que en general tiene bien interiorizadas las unidades de medida. Utiliza diversas estrategias para estimar utilizando generalmente, referentes bien interiorizados en sus comparaciones. Realiza comparaciones, tanto con las unidades de



medida como con referentes que generalmente tiene bien interiorizados, pues no incurre en errores debidos a una deficiente interiorización de las unidades de medida o de los referentes utilizados. Emplea aceptablemente las tres unidades de medida (centímetro, decímetro y metro).

La baja precisión de las estimaciones realizadas en la ficha 5 es debida a que usa el decámetro como unidad de medida, en una de las tareas incurriendo en un alto porcentaje de error. Esta unidad que parece no tenerla adecuadamente interiorizada.

- **Alumno A19:**

El alumno A19 percibe la cualidad longitud, aunque en algunas tareas confunde la cantidad a estimar con cantidades de superficie. El alumno muestra una evolución positiva en la precisión de las estimaciones pues pasa del grado de precisión 4 o 5 al 2.

Utiliza estrategias de comparación empleando todo tipo de referentes (presentes, ausentes y/o unidad de medida), cuya interiorización parece haber mejorado en las últimas fichas.

Parece tener interiorizados tanto el centímetro, como el metro. En cambio, el decímetro no lo usa y su interiorización parece deficiente.

Alumno que evoluciona positivamente, mejorando la precisión de sus estimaciones. También mejora el número de errores, pues deja de tener errores conceptuales extrínsecos a procesos estimativos. Tiene interiorizadas las unidades cm y m, pero no el dm.

- **Alumno A21:**

El alumno A21 tiene una alta capacidad estimativa que incluso llega a mejorar, pues pasa de realizar estimaciones de un grado de precisión 2 al grado 1. Tiene interiorizadas todas las unidades de medida (incluido el decímetro), pues las utiliza adecuadamente, comparando la cantidad a estimar con la unidad obteniendo estimaciones de un alto grado de precisión (grado 1 o 2). Domina diversas estrategias para abordar las tareas utilizando diferentes tipos de referentes, teniendo éstos bien interiorizados. Prácticamente no comete errores.

- **Alumno A23:**

El alumno A23 tiene una alta capacidad estimativa pues en numerosas ocasiones ha mostrado que es capaz de realizar estimaciones con un alto grado de precisión (grado 1).



Aunque en alguna tarea ha incurrido en errores, posiblemente debido a la falta de dominio del idioma y al desconocimiento de algunos términos. Ha mejorado en la interiorización de alguna unidad de medida, como el decímetro, que la tenía deficientemente adquirida, aunque espontáneamente no la utiliza en las estimaciones (recurre al centímetro y al metro). Utiliza, principalmente estrategias de comparación con referentes presentes o directamente con las unidades de medida, aunque en alguna tarea también recurre a estrategias de acotación. En las primeras fichas olvidaba indicar la unidad de medida en algunas tareas, error que corrige.

- **Alumno A24:**

El alumno A24 percibe la magnitud y es capaz de realizar estimaciones de una precisión variable, aunque se produce cierta evolución a mejor en su capacidad estimativa, pues pasa de realizar estimaciones de un grado de precisión 5 a estimaciones de grado 4.

En las primeras fichas muestra que no tiene interiorizado el dm, pues indica objetos con una medida de 1 dm muy alejados de la misma. Aunque esta circunstancia va mejorando. No obstante, es una unidad que no utiliza espontáneamente.

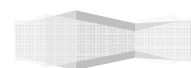
Utiliza principalmente estrategias de comparación con referentes presentes incurriendo en errores de comparación, pues los referentes parece tenerlos aceptablemente adquiridos.

- **Alumno A25:**

El alumno A25 evoluciona positivamente mejorando la precisión de sus estimaciones llegando a obtener estimaciones con grado de precisión 1 en las últimas fichas. Desde el inicio tiene bien interiorizados el centímetro y el metro, así como referentes de los mismos. En cambio, el decímetro es una unidad que no tenía interiorizada al principio y en las últimas fichas parece que sí, aunque no la usa de forma espontánea. Recurre casi siempre a estrategias de comparación con referentes presentes que generalmente tiene bien adquiridos.

- **Alumno A26:**

El alumno A26 tiene una clara tendencia a la subestimación, cuya precisión mejora pues pasa de realizar estimaciones de grado 3 a estimaciones de grado 2. Utiliza principalmente estrategias de comparación con referentes presentes que, en general, tiene aceptablemente adquiridos.



Tiene una adecuada interiorización de las unidades de medida centímetro y metro. El decímetro lo tenía deficientemente adquirido al principio, pero su interiorización evoluciona positivamente, no obstante, no lo usa espontáneamente en las estimaciones.

- **Alumno A27:**

El alumno A27 muestra en sus últimas fichas una leve tendencia a la subestimación (que no se verifica para todas las tareas). Mejora la precisión de las estimaciones pues pasa de tener una precisión media de grado 4 a una estimación media de grado 3.

Utiliza principalmente estrategias de comparación con referentes presentes que, en general, tiene bien adquiridos. Aunque incurre en errores en el uso de estrategias de comparación tanto en la evaluación inicial como en la final

Tiene aceptablemente interiorizadas las unidades de medida, aunque el decímetro no lo usa espontáneamente.

- **Alumno A28:**

El alumno A28 mejora levemente la precisión de sus estimaciones (pasa de grado 3 a grado 2). Es un alumno que tiene aceptablemente interiorizadas las unidades de medida. Además adecua la unidad de medida a la cantidad a estimar. Utiliza todas las unidades (incluido el decímetro).

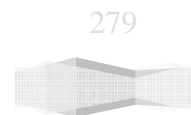
Utiliza principalmente estrategias de comparación, comparando con referentes presentes, cuya interiorización ha mejorado a lo largo del proceso.

3.2. Análisis Individual de la Capacidad Estimativa en Superficie

Análogamente a lo realizado para la magnitud longitud, recogemos en la Tabla 8. 9 las valoraciones de los elementos que nos van a permitir caracterizar la evolución de la capacidad estimativa en superficie. En este caso utilizamos la información recogida en los Apéndices J.2 y K.2. Las unidades de medida estudiadas para esta magnitud son el centímetro cuadrado, decímetro cuadrado y metro cuadrado, pues son las unidades de las que disponemos tareas tipo B.

Tabla 8. 9. Evolución de la Capacidad Estimativa en Superficie.

Alumno	PC	TM	AU	IU	IR	UE
--------	----	----	----	----	----	----



				cm ²	dm ²	m ²			
A5	++	++	+-	++	--	++	-?	-?	
A8	++	++	++	++	++	++	??	--	
A13	-+	-+	--	-+	-+	-+	?-	-?	
A15	-+	++	-+	-+	-+	-+	??	-?	
A17	++	++	++	++	++	++	??	--	
A19	++	++	-+	-+	-+	-+	??	--	
A21	++	++	-+	++	++	++	??	--	
A23	-+	++	-+	-+	-+	-+	??	-?	
A24	++	++	++	-+	-+	-+	??	--	
A25	-+	++	--	-+	-+	-+	??	--	
A26	++	++	-+	-+	-+	-+	??	-?	
A27	++	++	+-	-+	-+	-+	??	?-	
A28	++	++	++	-+	-+	-+	??	?-	

En general se observa como todos los alumnos presentan dificultades asociadas a una u otra característica. Destaca el hecho de cuatro alumnos (A13, A15, A23 y A25) no percibían la magnitud a estimar confundiéndola con la magnitud longitud. El conocimiento de la terminología parece no ser un elemento problemático para esta magnitud. No obstante, tenemos que advertir que aunque podría ser la causa de algunas confusiones y errores de percepción de la magnitud este hecho no lo podemos constatar por falta de información.

La interiorización de unidades, así como la adecuación de la unidad de medida también presenta serias deficiencias, en general para casi todos los alumnos (salvo para los alumnos A8 y A17). No obstante, esta situación mejora para muchos de ellos tras el periodo de instrucción.

La interiorización de referentes es un elemento de la estimación que prácticamente no es posible valorarlo, pues los alumnos no usan referentes de cantidades de superficie ya que recurren continuamente al uso de fórmulas y en pocos casos que lo hacen, realizan estimaciones deficientes. El uso de estrategias es otro elemento que presenta serias dificultades, pues en muchos casos utilizan estrategias inadecuadas (consecuencia de confundir la magnitud a estimar), en otros casos usan fórmulas erróneas, y en otros casos la dificultad viene derivada de no controlar la propagación del error.



Para completar la información recogida en la Tabla 8. 9 escribimos brevemente las características observadas para cada uno de los alumnos:

- **Alumno A5:**

El alumno A5 percibe la magnitud superficie, aunque en alguna tarea la confunde con la magnitud longitud o utiliza unidades de medida no adecuadas. En general, conoce las unidades de medida de la magnitud superficie y sabe adecuarlas a la magnitud a estimar, salvo algún error puntual. Pero no las tiene adecuadamente interiorizadas. Al igual que le ocurre con la magnitud longitud, tiene tendencia a la subestimación. No obstante, algunas subestimaciones realizadas en superficie son consecuencia de subestimar longitudes y utilizarlas en fórmulas.

Realiza estimaciones con un grado de precisión 3, alcanzando en alguna ficha (Ficha 8) el grado de precisión 1.

Las estrategias que requieren del empleo de fórmulas son las más utilizadas. Aunque en algunos casos también recurre a estrategias de comparación con referentes. Cuando recurre a algún referente tampoco lo tiene adecuadamente interiorizado.

- **Alumno A8:**

El alumno A8 percibe la magnitud superficie y utiliza unidades de medida coherentes con la magnitud. Recurre constantemente al empleo de fórmulas expresando los resultados en unidades de superficie. No obstante, utiliza fórmulas erróneas tanto en la Ficha 8 como en la evaluación final. Expresa frecuentemente los resultados en centímetros cuadrados subestimando en la mayor parte de las estimaciones realizadas cuando usa esta unidad. Cuando expresa el metro cuadrado subestima en unas ocasiones y sobrestima en otras. El decímetro cuadrado no lo usa.

No recurre al uso de referentes en estrategias de comparación.

Realiza estimaciones con un bajo grado de precisión: grado 4 en la evaluación inicial aumentando a grado 6 en la evaluación final.

- **Alumno A13:**

El alumno A13 comienza no percibiendo la magnitud superficie, y mostrando importantes dificultades conceptuales en la comprensión del significado de algunos términos. La instrucción muestra que el alumno evoluciona favorablemente llegando a

ser capaz de realizar estimaciones aceptables en las últimas fichas. No obstante sigue dando muestras de arrastrar algunas deficiencias conceptuales.

No tiene interiorizadas las unidades de medida y, aunque parece mejorar la interiorización de las mismas, esta mejoría no es suficiente para llegar a utilizarlas en estrategias de comparación directa. Recurre tanto al empleo de fórmulas como al uso de estrategias de comparación mostrando algunas deficiencias en la interiorización de algunos referentes. Cuando emplea fórmulas no expresa el resultado en la unidad adecuada, sino que lo deja en unidades longitudinales.

- **Alumno A15:**

El alumno A15 realiza las primeras fichas mostrando importantes deficiencias conceptuales, pues confundía la magnitud a estimar y utilizaba unidades de longitud para medir o estimar cantidades de superficie. En las últimas fichas, hemos apreciado cómo ha evolucionado consiguiendo adecuar la unidad de medida a la cantidad a estimar. No obstante realiza estimaciones de muy poca precisión.

No podemos indicar qué dominio tiene de las estrategias, o de la interiorización de referentes, pues no explica cómo realiza las estimaciones.

Creemos que la interiorización de unidades de medida ha mejorado, aunque todavía presenta algunas deficiencias a tenor de los resultados en obtenidos en la evaluación final.

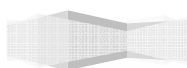
- **Alumno A17:**

El alumno A17 percibe la magnitud superficie, aunque en alguna tarea haya utilizado unidades de medida no adecuadas. En general, conoce las unidades de medida de la magnitud superficie y sabe adecuarlas a la magnitud a estimar.

Cuando tiene que estimar alguna cantidad de superficie recurre al empleo de fórmulas, que en algunos casos tiene deficientemente adquiridas.

No utiliza estrategias de comparación con referentes de cantidades de superficie.

Comienza realizando estimaciones muy imprecisas (grado de precisión 6 en la evaluación inicial) mejorando la precisión de las mismas (grado de precisión 3 en la evaluación final).



- **Alumno A19:**

El alumno A19 percibe la magnitud superficie, aunque en alguna tarea no usa unidades de medida adecuadas. En las últimas fichas mejora la adecuación de las unidades de medida y la interiorización de las mismas.

Como estrategias de estimación recurre al empleo de fórmulas, dejando en algunos casos la operación indicada. En alguna ocasión utiliza estrategias inadecuadas, pues utiliza estrategias válidas para estimar longitudes aplicándolas a la superficie, lo que nos indica que tiene algunos conceptos deficientemente adquiridos.

Nunca recurre al uso de referentes de cantidades de superficie, ni compara con las unidades de medida de superficie.

- **Alumno A21:**

El alumno A21 percibe la magnitud superficie, aunque en alguna tarea utiliza unidades de medida no adecuadas, sobre todo en las primeras fichas. En general, conoce las unidades de medida de la magnitud superficie y sabe adecuarlas a la magnitud a estimar, salvo algún caso puntual. Pero no las tiene adecuadamente interiorizadas, ya que cuando la utiliza en estrategias de comparación incurre en altos porcentajes de error. Al igual que le ocurre con la magnitud longitud, parece que tiene cierta tendencia a la sobrestimación.

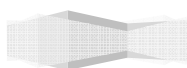
Las estrategias que requieren del empleo de fórmulas son las más utilizadas. Aunque en algunos casos también recurre a estrategias de comparación, utilizando como referentes las unidades de medida. No tiene interiorizados objetos como referentes de cantidades de superficie.

- **Alumno A23:**

El alumno A23 tiene una clara evolución partiendo de un momento inicial en el que no percibe la magnitud, pues la confunde con la magnitud longitud. En una siguiente fase intermedia indica las medidas de superficies a partir de sus dimensiones longitudinales, para finalmente en la evaluación final utilizar unidades de medida de superficie.

La interiorización de las unidades de medida parece ser deficiente, especialmente el dm^2 .

No utiliza la estrategia de comparación con referentes de cantidades de superficies, pues recurre al uso de fórmulas. No obstante, no se corresponde la alta precisión alcanzada en



las tareas de estimación de longitudes con la baja precisión que alcanza en las tareas de estimación de superficies, aún cuando emplea fórmulas.

- **Alumno A24:**

El alumno A24 percibe la magnitud superficie y utiliza unidades adecuadas a la magnitud a estimar. Recurre continuamente al empleo de fórmulas para estimar superficies. No utiliza referentes, pues no recurre a estrategias de comparación.

Al principio no tenía interiorizado el dm^2 , circunstancia que parece mejorar en la evaluación final. No obstante, no utiliza las unidades de medida en estrategias de comparación.

Mejora la precisión de las estimaciones en las últimas fichas, llegando a ser capaz de realizar estimaciones aceptables.

- **Alumno A25:**

El alumno A25 comienza sin percibir la magnitud, pues utilizaba unidades inadecuadas a la magnitud superficie. Después pasa varias fases: una fase intermedia (Ficha 5) en la que expresa superficies en función de sus dimensiones longitudinales, en otra fase intermedia (Ficha 8) adecúa la unidad de medida y realiza estimaciones con un alto grado de precisión (aunque en todo momento lo hace recurriendo al uso de fórmulas), y en una fase final (evaluación final) incurre en errores en la adecuación de la unidad de medida.

No utiliza referentes de cantidades de superficie, y parece que las unidades de superficie no las tiene adecuadamente interiorizadas.

Siempre recurre al uso de fórmulas como estrategias de estimación.

- **Alumno A26:**

El alumno A26 comienza confundiendo la magnitud a estimar, pues utiliza unidades longitudinales. En la evaluación final adecua la unidad de medida a la cantidad a estimar.

Aunque al principio no tenía interiorizadas las unidades de medida de superficie. Al final, parece que sí las tiene interiorizadas (a tenor de las respuestas tipo B). No obstante, no las utiliza en comparaciones directas.



Recurre al uso de fórmulas. No tiene interiorizados referentes que pueda usar en estrategias de comparación.

- **Alumno A27:**

El alumno A27 percibe la magnitud y utiliza unidades de medida adecuadas.

En la evaluación inicial no tiene interiorizadas las unidades de medida, en cambio, en la Final, sí. Sin embargo, no las utiliza como referentes en las estimaciones.

Como estrategias de estimación recurre continuamente al uso de fórmulas. No usa estrategias de comparación y, en consecuencia, tampoco referentes de cantidades de superficies.

- **Alumno A28:**

El alumno A28 percibe la magnitud superficie, pues en todas las tareas utiliza unidades adecuadas a la magnitud a estimar.

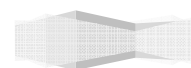
En la evaluación inicial no tiene interiorizadas las cantidades que le corresponden a cada unidad de superficie, circunstancia que parece mejorar en la evaluación final. No obstante, en ningún momento emplea estrategias de comparación ni con las unidades de medida, ni con referentes de cantidades de superficie. Como estrategias de estimación recurre al empleo de fórmulas.

4. CLASIFICACIÓN DE LOS ALUMNOS: DETERMINACIÓN DE PERFILES.

Con la intención de establecer tipologías de alumnos con comportamientos similares ante las tareas de estimación, en primer lugar, aplicando un análisis clúster, establecemos un primer nivel de perfil que luego es refinado con otros elementos de análisis empleado en el apartado anterior. Diferenciamos, como en casos anteriores, la capacidad estimativa en longitud de la capacidad estimativa en superficie. No obstante trataremos de comprobar si es posible trasladar los resultados de una a la otra.

4.1. Perfiles según la Capacidad Estimativa en Longitud

Las características estudiadas en el apartado 3 nos dan información de las estimaciones que los alumnos realizan y argumentan. Pero tienen un inconveniente: cuando el alumno



no contesta, no explica o la explicación es incompleta (NC, NE, DI) no tenemos argumentos para valorarlas. Es de suponer que en esos casos subyace una dificultad, ya sea de conocimiento (el alumno no sabe cómo abordar la tarea de estimación) o de expresión (el alumno no sabe explicar cómo lo ha hecho) que no podemos identificar. Para tener en consideración estas dificultades vamos a considerar una nueva variable que denominamos “calificación” que introducimos y utilizamos para realizar el análisis clúster aplicándola a las estimaciones realizadas en las tareas de la evaluación inicial y a las tareas de la evaluación final.

La calificación se obtiene de la forma siguiente:

$$\text{Calificación} = 10 \cdot \left(1 - \frac{P.E.V.A.}{100} \right), \text{ donde P.E.V.A. es el Porcentaje del Error en Valor}$$

Absoluto.

Con las siguientes matizaciones:

- Cuando un alumno no contesta a una tarea le asignamos un 0 como calificación.
- Cuando un alumno da un resultado que no se puede considerar le asignamos un 0 como calificación.
- Cuando un alumno da una estimación cuyo porcentaje de error es mayor o igual al 100% le asignamos un 0 a la estimación realizada en dicha tarea.

Con este modo de calificar obtenemos un valor comprendido entre 0 y 10, donde obtener un 7 o más se corresponde con una estimación aceptable (equivale a realizar una estimación con un porcentaje de error inferior al 30%). Esta forma de valorar la capacidad estimativa se realiza de forma inversamente proporcional al porcentaje del error cometido tal como aconsejan algunos investigadores: Frías, Gil y Moreno (2001, p. 497) “la evaluación de las actividades de estimación plantea una situación especial, pues no debe hacerse según el error cometido, es decir, no deben evaluarse según la diferencia entre la medida real y la estimación... En este sentido, se aconseja evaluar este tipo de actividades de modo inversamente proporcional a la razón entre el error cometido y la medida real de la cantidad a estimar.”

Con este método valoramos todas las tareas y luego calculamos la “calificación media” (media aritmética de las calificaciones de todas las tareas), en la Tabla 8. 10 incluimos las calificaciones medias para las tareas tipo A de la evaluación inicial y final.



Tabla 8. 10. Calificaciones Medias de las Estimaciones de Longitudes en la Evaluación Inicial y Final.

Alumno	Calificación Media en Evaluación Inicial	Calificación Media en Evaluación Final
A5	3.57	6.71
A8	6.75	9.13
A13	7.32	5.94
A15	5.68	8.71
A17	9.25	8.33
A19	4.83	8.83
A21	8.26	9.04
A23	4.76	9.66
A24	5.77	6.34
A25	8.37	9.45
A26	7.81	8.23
A27	6.32	7.77
A28	5.58	9

Con los datos de la Tabla 8. 10 realizamos un análisis clúster. El programa SPSS Statistics 19 genera los resultados recogidos en la Tabla 8. 11 y en la Figura 8. 1, donde hemos realizado el análisis de conglomerados jerárquico utilizando como medida la distancia euclídea al cuadrado, y como método de conglomeración la vinculación promedio inter-grupos.

Tabla 8. 11. Historial de Conglomeración Obtenido a partir de las Calificaciones Medias de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Inicial y Final.

Historial de conglomeración

Etapa	Conglomerado que se combina		Coeficientes	Etapa en la que el conglomerado aparece por primera vez		Próxima etapa
	Conglomerado 1	Conglomerado 2		Conglomerado 1	Conglomerado 2	
	1	4		13	,094	
2	7	10	,180	0	0	5
3	4	6	,664	1	0	4
4	4	8	1,184	3	0	9

5	7	11	1,330	2	0	6
6	5	7	1,866	0	5	10
7	2	12	2,035	0	0	9
8	3	9	2,563	0	0	11
9	2	4	2,928	7	4	10
10	2	5	9,049	9	6	12
11	1	3	9,816	0	8	12
12	1	2	12,660	11	10	0

Dendrograma que utiliza una vinculación media (entre grupos)

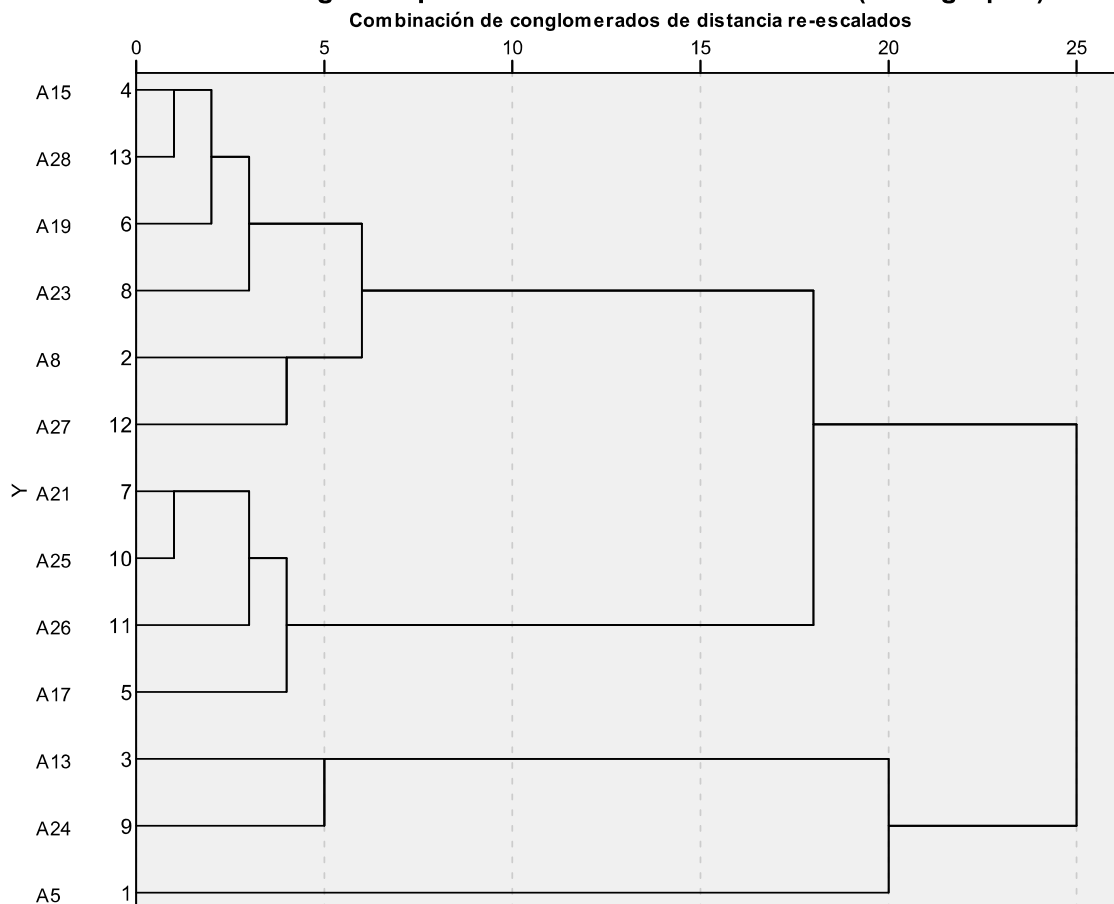


Figura 8. 1. Dendrograma de Conglomerados Jerárquico Obtenido a partir de Calificaciones Medias de las Estimaciones de Longitudes de la Evaluación Inicial y Final.

La agrupación más clara que se observa en el dendrograma de la Figura 8. 1 es en cuatro clústeres que estarían formados por los siguientes alumnos:

Clúster 1: A15, A28, A19, A23, A8 y A27.

Clúster 2: A21, A25, A26 y A17.



Clúster 3: A13 y A24.

Clúster 4: A5.

En el gráfico de la Figura 8. 2 podemos apreciar los cuatro clúster obtenidos.

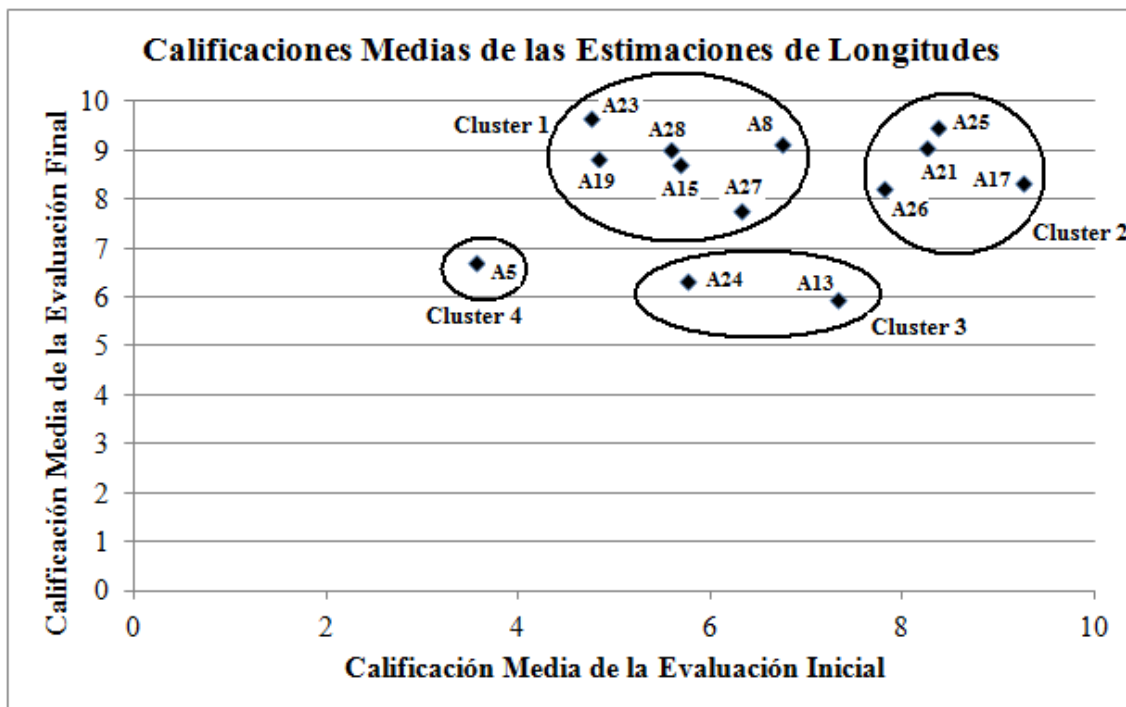


Figura 8. 2. Calificaciones Medias de las Estimaciones de Longitudes en la Evaluación Inicial y Final Agrupadas en Clúster.

Estos clúster obtenidos a partir de un valor cuantitativo basado en el porcentaje del error en valor absoluto se corresponden con perfiles de alumnos que vamos a definir y a caracterizar:

Perfil 1: Alumnos con una calificación media aceptable⁵² tanto en la evaluación inicial como en la final.

Perfil 2: Alumnos que en la evaluación inicial tienen una calificación media no aceptable y en la evaluación final tienen una calificación media aceptable.

Perfil 3: Alumnos que en la evaluación final tienen una calificación media no aceptable.

⁵² Calificación media aceptable es aquella que es igual o superior a 7 puntos, puntuación que se corresponde con un error máximo del 30%.

Clasificando a los alumnos según los anteriores perfiles obtenemos la siguiente clasificación:

Perfil 1: A17, A21, A25 y A26.

Perfil 2: A8, A15, A19, A23, A27 y A28.

Perfil 3: A5, A13 y A24

Esta clasificación en perfiles se corresponde con los clústeres como sigue: los alumnos del clúster 2 son los alumnos del que hemos denominado perfil 1, los alumnos del clúster 1 se corresponden con los alumnos del perfil 2, y los alumnos de los clústeres 3 y 4 se corresponderían con alumnos del perfil 3.

El análisis individualizado de los alumnos realizado en el **apartado 3 del presente capítulo** nos muestra que los alumnos de los diferentes perfiles/clústeres tienen características comunes, veamos:

- **Características del Perfil 1:**

Los alumnos incluidos en este perfil tienen como características comunes:

- Una buena interiorización del centímetro y del metro.
- Tener referentes bien interiorizados.
- Usar correctamente diversas estrategias de comparación.
- Corregir los posibles errores que cometían en las primeras fichas, no incurriendo en errores en las últimas.

En cambio, hay ciertas características que los diferencian:

- La interiorización del decímetro y el uso que hacen de esta unidad. Tanto el alumno A17 como el alumno A21 tenían interiorizada esta unidad desde el principio y en alguna ocasión la han usado espontáneamente. En cambio, el alumno A25 y el alumno A26 las tenían deficientemente interiorizadas en la evaluación inicial, circunstancia que parecen corregir en la evaluación final (según lo recogido en las tareas tipo B), aunque no la usan de un modo espontáneo en ninguna tarea.
- La tendencia a la subestimación/sobrestimación, parece diferir de unos a otros, aunque dada la alta precisión que tienen en sus estimaciones no es significativa.

- **Características del Perfil 2:**



Podemos indicar las siguientes características de un alumno incluido en este perfil:

- Una buena interiorización del centímetro y del metro.
- Mejorar la interiorización de referentes.
- Mejorar el uso de estrategias de comparación.
- Corregir los posibles errores conceptuales o de interiorización de términos que cometían en las primeras fichas, no incurriendo en errores en las últimas.

Entre ellos se diferencian, al igual que en el perfil anterior, en las siguientes características:

- La interiorización del decímetro y el uso que hacen de esta unidad. Pues, los alumnos A8, A15, A27 y A28 tenían interiorizada esta unidad desde el principio. Además, tanto el alumno A15 como el alumno A28 la han usado espontáneamente, en alguna ocasión. En cambio, los alumnos A19 y A23 no la tenían bien interiorizada, circunstancia que corrigen en la evaluación Final, aunque no la usan de un modo espontáneo.
- La tendencia a la subestimación/sobrestimación, parece diferir de unos a otros, aunque no observamos que ningún alumno muestre una tendencia que se pueda confirmar en todas las fichas.

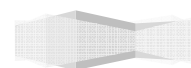
- **Características del Perfil 3:**

Los alumnos incluidos en este perfil tienen las siguientes características:

- Una aceptable interiorización del centímetro y del metro.
- Incurrir en errores debidos a la deficiente interiorización de referentes o errores en la comparación de cantidades.

La diferencia respecto del perfil anterior es que se trata de alumnos que, a pesar de haber mejorado la interiorización de algunos referentes y el uso de estrategias, siguen presentando algún error en alguno de estos ámbitos en la evaluación final. De hecho, tenemos dos alumnos que siguen incurriendo en errores debidos a la deficiente interiorización de referentes (A5 y A13) y otro que presenta errores en la comparación de cantidades (A24).

El análisis clúster separa al alumno A5 de los alumnos A13 y A24, posiblemente debido a la baja precisión de las estimaciones que realiza este alumno en la evaluación inicial. Otra característica que diferencia al alumno A5 de los



alumnos A13 y A24 es que este alumno presenta una marcada tendencia a la subestimación, como pusimos de manifiesto en el apartado 2.1 del presente capítulo.

Como hemos podido comprobar, para el caso de las estimaciones en longitud, el análisis clúster obtenido es coherente con análisis de la evolución individual de los alumnos.

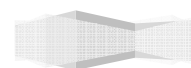
4.2. Perfiles según la Capacidad Estimativa en Superficie

Análogamente a lo realizado para la magnitud longitud, “calificamos” todas las tareas que involucraban estimaciones de superficies y luego calculamos la “calificación media” (media aritmética de las calificaciones de todas las tareas), en la Tabla 8. 12 incluimos las calificaciones medias para las tareas tipo A de la evaluación inicial y Final.

Tabla 8. 12. Calificaciones Medias de las Estimaciones de Superficies en la Evaluación Inicial y Final.

Alumno	Calificación Media en Evaluación Inicial	Calificación Media en Evaluación Final
A5	4.62	3.09
A8	1.06	0.53
A13	0	3.68
A15	0	3.22
A17	3.22	2.92
A19	3.29	3.23
A21	0	3.85
A23	0	0
A24	1.15	6.46
A25	0	0.26
A26	0	3.19
A27	0.09	4.89
A28	3.04	6.1

Observando las calificaciones medias obtenidas en las estimaciones de superficies podemos indicar, en primer lugar, que estos valores son sensiblemente inferiores a los obtenidos en las estimaciones de longitudes, pues ninguna de las calificaciones obtenidas por los alumnos llega a lo que podríamos denominar una estimación media



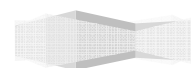
aceptable. También llama la atención la gran cantidad de ceros que obtienen como calificación. Esto es debido a que hubo muchas respuestas que no se pueden considerar, principalmente por estar dadas en una unidad inadecuada.

Igual que hicimos para la magnitud longitud, realizamos análisis clúster utilizando estos datos. El programa SPSS Statistics 19 genera los resultados recogidos en la Tabla 8. 13 y en la Figura 8. 3, donde hemos realizado el análisis de conglomerados jerárquico utilizando como medida la distancia euclídea al cuadrado, y como método de conglomeración la vinculación promedio inter-grupos.

Tabla 8. 13. Historial de Conglomeración Obtenido a partir de las Calificaciones Medias de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Inicial y Final.

Historial de conglomeración

Etapa	Conglomerado que se combina		Coeficientes	Etapa en la que el conglomerado aparece por primera vez		Próxima etapa
	Conglomerado 1	Conglomerado 2		Conglomerado 1	Conglomerado 2	
	1	4		11	,001	
2	3	7	,029	0	0	5
3	8	10	,068	0	0	6
4	5	6	,101	0	0	7
5	3	4	,321	2	1	8
6	2	8	1,301	0	3	12
7	1	5	1,889	0	4	11
8	3	12	2,064	5	0	10
9	9	13	3,702	0	0	10
10	3	9	11,942	8	9	11
11	1	3	14,712	7	10	12
12	1	2	20,600	11	6	0



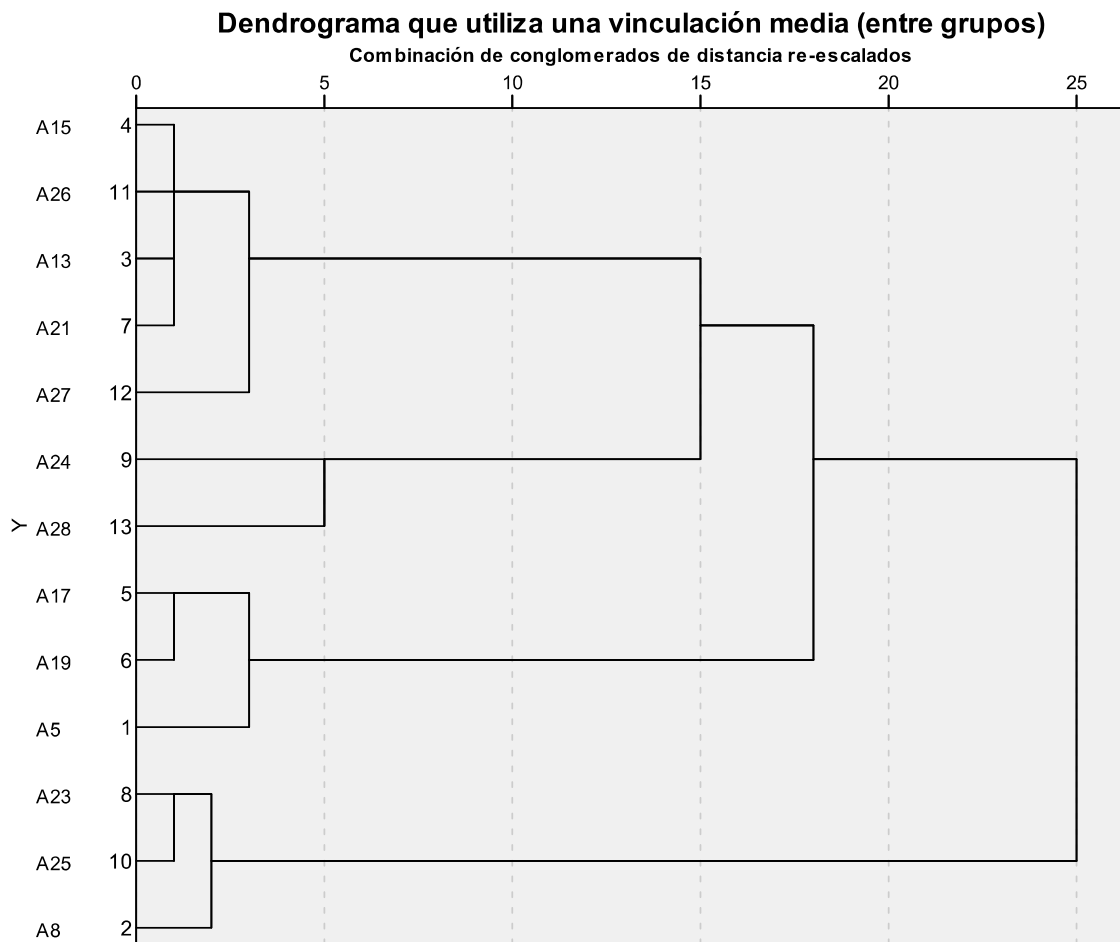


Figura 8. 3. Dendrograma de Conglomerados Jerárquico Obtenido a partir de Calificaciones Medias de las Estimaciones de Superficies de la Evaluación Inicial y Final.

La agrupación más clara que observamos en el dendrograma de la Figura 8. 3 es en cuatro clústeres que estarían formados por los siguientes alumnos:

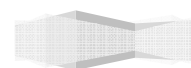
Clúster 1: A15, A26, A13, A21 y A27.

Clúster 2: A24 y A28.

Clúster 3: A17, A19 y A5.

Clúster 4: A23, A25 y A8.

Como se aprecia en la Figura 8. 4 los clústeres se caracterizan por: clúster 1 se corresponde con alumnos que realizaron muy mal la evaluación inicial mejorando en la evaluación final; los alumnos del clúster 2 son los que mejor realizaron la evaluación final; los alumnos del clúster 3 realizaron bastante bien la evaluación inicial (en comparación con el resto), pero en la evaluación final no mejoraron la precisión de sus



resultados; y los alumnos del clúster 4 son los que peor realizan tanto la evaluación inicial como la evaluación final.

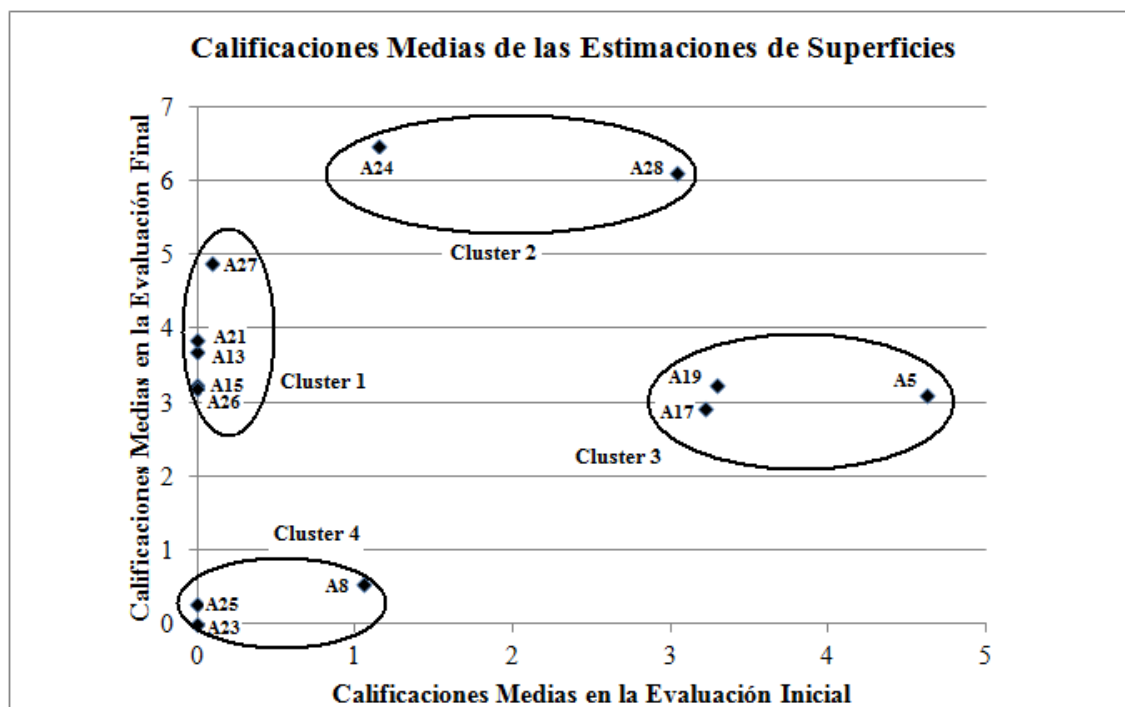


Figura 8. 4. Calificaciones Medias de las Estimaciones de Superficies en la Evaluación Inicial y Final Agrupadas en Clústeres.

En el caso de la superficie, a diferencia de lo que ocurría con la magnitud longitud, los clústeres obtenidos no se corresponden con perfiles de alumnos que podamos definir y caracterizar en términos de la adquisición de las componentes de la estimación en medida, pues incluso los alumnos que mejor realizan la evaluación final (alumnos del clúster 2) siguen realizando algunas estimaciones deficientes. Otros intentos utilizando otras variables u otros métodos de conglomeración tampoco nos dan ningún resultado plausible que nos permita caracterizar a los alumnos agrupándolos.

Aunque hayamos caracterizado los alumnos de los diferentes clústeres en función de las calificaciones obtenidas en la evaluación inicial y final, no es posible caracterizarlos en función de la evolución de la adquisición de las componentes de la estimación en medida para esta magnitud, ya que encontramos características comunes a alumnos de diferentes clústeres, como veremos a continuación. Esto creemos que es debido a la gran influencia que tienen los errores conceptuales en la precisión de las estimaciones.

Si agrupamos a los alumnos en términos de: la percepción de la magnitud superficie y la adecuación de unidades de medida. Utilizando estas dos componentes podemos establecer los siguientes perfiles:

Perfil 1: Alumnos que perciben la magnitud y utilizan unidades adecuadas en todas las fichas.

Perfil 2: Alumnos que perciben la magnitud, pero utilizan unidades inadecuadas en la evaluación inicial o en alguna de las fichas intermedias.

Perfil 3: Alumnos que no perciben la magnitud en alguna de las fichas.

Todos los alumnos perciben la magnitud en la evaluación final y utilizan unidades adecuadas, salvo algún despiste aislado. Luego, en general, a los alumnos que no perciben la magnitud les ocurre en la evaluación inicial, en cambio, en la evaluación final ya no cometen este tipo de error.

Con esta propuesta quedarían clasificados como sigue:

Perfil 1: A5, A8, A24, A27 y A28.

Perfil 2: A17, A19, A21, A26

Perfil 3: A13, A15, A23, A25

Estos perfiles sirven para valorar el dominio conceptual de la magnitud superficie y de su medida, pero no nos indican nada sobre la capacidad estimativa en superficie, ya que, por ejemplo, si analizamos la precisión de los alumnos del perfil 1: el alumno A8 es uno de los alumnos que peor estima (está en el clúster 4); por el contrario, los alumnos A24 o A28 son los que mejor realizan las estimaciones en la evaluación final (están en el clúster 2); y el alumno A5 realiza peor la evaluación final que la inicial (está en el clúster 3). Por tanto, no es posible describir los perfiles en términos de precisión alcanzada en las estimaciones y tampoco es posible describir los clústeres en función de la adquisición de componentes.

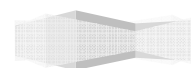
Repasando las respuestas de cada alumno a las estimaciones de superficies de la evaluación final (véase Apéndice J.2) observamos que son muy irregulares: un mismo alumno es capaz de realizar una estimación muy buena en una tarea, y pésima en la siguiente. Por ello, no podemos establecer perfiles basados en la capacidad estimativa de los alumnos en superficie.

4.3. Comparativa de la Capacidad Estimativa en Longitud y en Superficie

Una cuestión que nos podemos hacer, basándonos en un razonamiento lógico es el siguiente: si los alumnos, cuando estiman superficies, recurren frecuentemente al uso de



fórmulas y esto supone que tienen que estimar la medida de cantidades longitudinales que son los valores que posteriormente usan en las fórmulas, ¿cabría esperar que un alumno que sea un buen estimador de longitudes sea también buen estimador de superficies? Para responder a esta cuestión vamos a ver si los alumnos que mejor realizan las tareas de estimación de cantidades de longitudes son también los mejores estimando superficies: Los mejores alumnos estimando longitudes podemos decir que son los alumnos del perfil 1 (A21, A25, A26 y A17). Todos ellos tienen, en longitud, una calificación media superior a 7 tanto para la evaluación inicial como para la evaluación final. Veamos qué ocurre en superficie:



- El alumno A21 obtiene una calificación nula en la evaluación inicial (véase [tabla 7.3](#)) porque incurre en errores de adecuación de las unidades de medida (utiliza unidades longitudinales) en dos de las tres tareas y en la única tarea que utiliza unidades de superficie realiza una estimación con un error del 138.1%. En la evaluación final mejora considerablemente la precisión de sus estimaciones, pero aun así, ninguna de las tres realizadas es aceptable.
- El alumno A25 es uno de los peores estimando superficies, tanto en la evaluación inicial como en la evaluación final. El error más frecuente que comete este alumno es no adecuar la unidad de medida a la cantidad, pues emplea unidades longitudinales.
- El alumno A26 también es uno de los peores estimando superficies. En la evaluación inicial no adecua la unidad de medida y en la evaluación final realiza dos de las tres estimaciones muy imprecisas.
- El alumno A17 es uno de los mejores en la evaluación inicial, y en la evaluación final deja sin contestar una tarea y realiza una estimación muy imprecisa en otra de las tareas. El error más frecuente que comete este alumno es utilizar fórmulas erróneas.

Como hemos podido comprobar la capacidad estimativa en longitud no determina la capacidad estimativa en superficie, es decir, ser un buen estimador de longitudes no implica que ser un buen estimador de superficies, posiblemente porque para poder realizar esta afirmación sería condición necesaria el dominio conceptual de ambas magnitudes y de su medida. Por tanto, no es posible trasladar la clasificación en perfiles que realizamos para la magnitud longitud a la magnitud superficie.

Analizando la correlación entre las calificaciones medias de las estimaciones de longitudes y las de superficie obtenemos los siguientes valores:

- El coeficiente de correlación lineal de Pearson entre las variables “calificación media de las estimaciones de longitudes en la evaluación inicial” y “calificación media de las estimaciones de superficies en la evaluación inicial” es igual a -0.4
- El coeficiente de correlación lineal de Pearson entre las variables “calificación media de las estimaciones de longitudes en la evaluación final” y “calificación media de las estimaciones de superficies en la evaluación final” es igual a -0.57



Los débiles valores de correlación obtenidos nos indican que no es posible explicar una variable a partir de la otra. Además, el hecho de que los coeficientes de correlación sean negativos implica que en algunos casos la relación es inversa, esto es que el alumno puede tener una buena calificación media en las estimaciones de longitud y mala en las estimaciones de superficie, y viceversa.

Por tanto, la capacidad estimativa en longitud no determina la capacidad estimativa en superficie.

5. CONCLUSIONES DEL ANÁLISIS INDIVIDUAL

En primer lugar, hemos advertido como mejora la capacidad estimativa con la práctica llevada a cabo, tanto en lo relativo a la magnitud longitud como a la magnitud superficie.

Hemos constatado que los alumnos, a pesar de mejorar la interiorización de las unidades de medida se resisten a utilizarlas como referentes en comparaciones directas (sobre todo para el caso de las unidades de superficie, pues suelen estar peor interiorizadas que las de longitud). Para que esto se produzca, creemos que sería necesario un trabajo más continuado con este tipo de prácticas.

Los alumnos han mejorado la interiorización de referentes de cantidades de longitudes. No obstante, tras la instrucción, siguen teniendo algunos referentes deficientemente interiorizados. Para el caso de la magnitud superficie no podemos afirmar lo mismo pues los alumnos prácticamente no usan referentes de cantidades de superficies, ni en la evaluación inicial ni en la final.

El análisis individualizado ha puesto de manifiesto una disminución de los errores, tanto los errores intrínsecos a procesos estimativos como los extrínsecos, para ambas magnitudes.

En el caso de la magnitud superficie la instrucción llevada a cabo no ha sido suficiente para provocar que los alumnos pongan en práctica estrategias de estimación directa, como la comparación con referentes o con las unidades de medida. Una característica común a todos los alumnos es que recurren persistentemente al uso de fórmulas como estrategias de estimación. Son pocos los alumnos, y en pocas ocasiones, los que utilizan estrategias de comparación con referentes o con las unidades de medida. Otra característica común a la mayoría de los alumnos es que en la evaluación inicial

muestran no tener interiorizadas las unidades de medida, especialmente el decímetro cuadrado. No obstante, aunque esta situación mejore para muchos de ellos, el grado de interiorización que alcanzan no les permite usarlas como referentes.

El análisis clúster nos ha permitido clasificar los alumnos en cuanto a la evolución de la capacidad estimativa en longitud. Evolución que hemos podido caracterizar en términos de adquisición de las componentes de la estimación en medida. Encontrando tres grupos de alumnos: alumnos que durante todo el proceso han sido capaces de realizar estimaciones de longitudes aceptables; alumnos que han mejorado la capacidad estimativa debido a una mejor interiorización de referentes y a un mejor uso de las estrategias de comparación siendo capaces al término de la instrucción de realizar estimaciones aceptables; y alumnos que no han evolucionado lo suficiente como para obtener una calificación media aceptable en las estimaciones de la evaluación final.

En cambio, para la magnitud superficie, el análisis clúster nos ha permitido clasificar a los alumnos respecto de la evolución entre la evaluación inicial y final, aunque los clústeres obtenidos no los hemos podido caracterizar por contener individuos de características muy distintas en cuanto a la adquisición de las componentes de la estimación en medida. No obstante, hemos clasificado a los alumnos en perfiles caracterizados por el dominio conceptual de la magnitud y su medida, aunque esta clasificación en perfiles no considera la capacidad estimativa en superficie.

Esperábamos cierta correlación directa entre la capacidad estimativa de cada alumno en longitud y en superficie. Pero no lo hemos podido constatar, sino que hemos encontrado indicios de lo contrario. Es decir, los mejores alumnos estimando longitudes (dentro del grupo de alumnos estudiado) no son necesariamente los mejores estimando superficies, y en algunos casos ocurre lo contrario. Esta circunstancia creemos que está afectada por la influencia de errores conceptuales.



CAPÍTULO 9: CONCLUSIONES, APORTACIONES Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

El objetivo general que nos hemos propuesto con esta investigación es *describir y caracterizar la capacidad estimativa en longitud y superficie, analizar cómo evoluciona con la práctica y detectar elementos de influencia*. A continuación veremos en qué medida se da respuesta a dicha propuesta. Para ello, vamos a recordar los objetivos específicos y describiremos para cada objetivo qué hallazgos nos ha revelado el análisis del trabajo empírico.

En los siguientes apartados indicamos conclusiones al trabajo empírico, extraemos conclusiones acerca de la metodología utilizada, presentamos las principales aportaciones de la investigación, describimos las limitaciones con que nos hemos encontrado e indicamos líneas de investigación abiertas.

1. CONCLUSIONES DEL TRABAJO EMPÍRICO

Para recoger las conclusiones a la que hemos llegado con el trabajo empírico recordamos los objetivos específicos que nos habíamos propuesto con esta investigación indicando el grado y el modo en que se ha dado cumplimiento a dicho objetivo.

01. Estudiar qué precisión desarrollan los alumnos en tareas de estimación en longitud y superficie.

En relación a la magnitud longitud tenemos que el punto de partida es que, de las respuestas consideradas, el 58.65% son aceptables, es decir, presentan un porcentaje de error inferior al 30%. El porcentaje medio del error en valor absoluto ha oscilado entre el 23 y el 35%, dependiendo de la tarea. Estos resultados mejoran al término del proceso de enseñanza-aprendizaje obteniendo en el post-test (Evaluación Final) 75.96% de las respuestas consideradas como aceptables. Los porcentajes medios del error en valor absoluto también disminuye para cada tarea situándose en una horquilla entre el 12.5% y el 17.5%. Estos resultados indican que la instrucción ha tenido una incidencia positiva

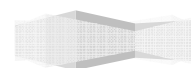
en la precisión de las estimaciones y, en consecuencia, en la capacidad estimativa para la magnitud longitud.

Para el caso de la magnitud superficie, el punto de partida es más delicado, pues de entrada no pudimos considerar el 67.95% de las respuestas debido a motivos de diversa índole: no especificar unidad de medida, no utilizar una unidad de medida coherente o adecuada a la magnitud a estimar, por ser valores estadísticamente atípicos o simplemente, por no contestar a la tarea. Esta circunstancia se ve agravada con que el número de respuestas aceptables corresponden a un 7.69% en el total de tareas. El porcentaje medio del error en valor absoluto oscila entre el 41 y el 95% dependiendo de la tarea. Tras aplicar la instrucción, también para esta magnitud obtenemos mejoría en la precisión de las estimaciones, pues el porcentaje de respuestas descartadas se reduce al 25.64%, y el porcentaje de respuestas aceptables dadas a las diferentes tareas de estimación de superficies es del 29.49%. El porcentaje medio del error en valor absoluto oscila entre el 20% y el 112%. Aunque hemos apreciado una leve mejoría respecto de la situación de partida, estos resultados siguen siendo negativos.

La comparación de la precisión de las estimaciones entre ambas magnitudes refleja que los alumnos son, con diferencia, mucho más precisos en las estimaciones de longitudes que en las estimaciones de superficies. Esto nos sugiere que esta magnitud puede llevar una dificultad añadida que podría ser debida a su carácter bidimensional.

El análisis individualizado nos revela que no existe correspondencia entre el dominio de la capacidad estimativa en longitud y la capacidad estimativa en superficie. Esto puede ser debido a que diversos factores, aunque creemos que el dominio conceptual de la magnitud superficie y su medida han sido factores determinantes que nos han limitado para poder valorar la capacidad de precisión para esta magnitud.

Finalmente indicamos que hemos podido confirmar los que diversos investigadores (Corle, 1960, 1963; Swan y Jones, 1971, 1980; Forrester, Latham y Shire, 1990; Forrester y Shire, 1994; Siegel, Goldsmith y Madson, 1982; Sowder, 1992; Callís, 2002) habían puesto de manifiesto: que la precisión depende de la magnitud, siendo la magnitud longitud una de las magnitudes en la que los alumnos son más precisos; la alta volatilidad de las precisión y la facilidad para ser influenciada por las características de los objetos estimados; y que la precisión mejora con la práctica.



O2. Analizar si existe tendencia a la subestimación o sobrestimación y detectar elementos que la caracterizan.

El análisis de las tareas de estimación de longitudes nos ha revelado que en determinadas tareas hay tendencia a la subestimación, en otras tareas la tendencia es a la sobrestimación y en otras tareas no existe tendencia. Esta circunstancia ha sido confirmada estadística mediante los correspondientes contrastes de hipótesis obteniendo los mismos resultados tanto en el pre-test (Evaluación Inicial) como en el post-test (Evaluación Final). Por tanto, la tendencia a la subestimación/sobrestimación depende de la cantidad a estimar.

Dasi (1999) realiza una tesis bajo la hipótesis de que “el centímetro mental parece estar subestimado”, lo cual lleva a los alumnos a realizar sobrestimaciones cuando se les pide que estimen la longitud de una línea usando esta unidad de medida (inteorización del centímetro por debajo de su tamaño). Nosotros, a la vista de los resultados, no podemos apoyar esta hipótesis, pues los alumnos que en nuestro estudio utilizaron el centímetro como unidad de medida no siempre realizaron sobrestimaciones y, en algunos casos, ocurrió justo lo contrario, pues en la Tarea I.5 hemos encontrado tendencia a la subestimación de la cantidad a estimar, lo que supondría una sobrestimación del centímetro. No obstante, tanto en nuestro estudio como en la propuesta de Dasi en las estimaciones “intervienen otros factores además de la noción de centímetro” (Dasi, 1999, p. 231).

El análisis individualizado nos revela que, en general, los alumnos no presentan una tendencia marcada hacia la subestimación/sobrestimación en las estimaciones de longitudes. En nuestro caso, dos de los alumnos estudiados presentaron una tendencia acentuada y en ambos casos fue hacia la subestimación siendo esta tendencia era más acusada en unas tareas que en otras.

El estudio de la tendencia para la magnitud superficie nos ha permitido comprobar que, inicialmente, en determinadas tareas hay cierta tendencia a la subestimación, mientras que en otras la tendencia es a la sobrestimación. No obstante, no hemos podido confirmar estadísticamente estas tendencias debido a la limitación que supone el pequeño tamaño muestral de que disponemos al no poder considerar muchas de las respuestas de los alumnos. En el post-test pudimos confirmar estadísticamente, mediante el correspondiente contraste de hipótesis, que existía tendencia a la subestimación en una de las tareas.



El análisis individualizado nos indica que los alumnos no presentan una tendencia marcada a la subestimación/sobrestimación en las estimaciones de superficies. Aunque estos resultados se ven limitados, como ya hemos puesto de manifiesto, por el bajo número de respuestas consideradas debido a la influencia, principalmente, de déficit de dominio conceptual y procedimental de la magnitud y su medida.

Con respecto al marco teórico se persiguen los siguientes objetivos:

O3. Estudiar qué componentes de la estimación tienen asimiladas los alumnos.

El estudio nos ha permitido comprobar, tanto a nivel individual como a nivel grupal, que los alumnos que tienen mayor capacidad estimativa son aquellos que no tienen dificultades conceptuales asociadas a la magnitud y a su medida, y tienen dominio de ciertas componentes asociadas a la estimación como son: la interiorización de referentes y/o la interiorización de unidades de medida, y saben usar adecuadamente la estrategia elegida (componentes CEst1, CEst2 y CEst4). Analizar el dominio de estas componentes nos ha servido para caracterizar los perfiles de alumnos según la capacidad estimativa en longitud.

O4. Describir qué estrategias emplean los alumnos en la realización de tareas.

En el caso de la magnitud longitud no encontramos diferencias significativas en el uso de estrategias entre el pre-test y el post-test. En ambos casos los alumnos recurren, principalmente a estrategias de comparación con un referente aproximadamente igual o con un múltiplo de un referente. Este resultado coincide con el hallado en otras investigaciones (Forreste, 1990; Friebe, 1967; Hartley, 1977; Hildreth, 1983; Immers, 1983)⁵³.

En el caso de la magnitud superficie nos encontramos con que, tanto en el pre-test como en el post-test, los alumnos recurren principalmente al uso de fórmulas, aunque disminuye el número de alumnos que hacen uso de fórmulas erróneas. En la Evaluación Final también disminuye considerablemente el número de alumnos que emplean

⁵³ Estos investigadores recogen en la denominación “iteración de la unidad” al conjunto de estrategias que nosotros hemos incluido en el bloque de estrategias generales de comparación.



estrategias inadecuadas y aumenta levemente el número de alumnos que se atreve utilizar estrategias de comparación. Forrester, Latham y Shire (1990) encontraron que el uso de estrategias de comparación aumenta con la edad. Es posible, que la formación también influya en un mayor uso de estas estrategias.

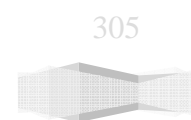
Con respecto a la adecuación de la unidad de medida utilizada para expresar el resultado de las estimaciones de longitudes, no encontramos diferencias significativas entre la Evaluación Inicial y la Final. En ambos casos hay un alto porcentaje de alumnos que adecuan la unidad de medida a la cantidad a estimar y en ambos casos hay un bajo porcentaje de alumnos que utilizan el decímetro como unidad de medida, prefiriendo utilizar el centímetro en su lugar. Esta falta de dominio o interiorización del decímetro como unidad de medida puede venir influenciada por el bajo o nulo uso que tiene en la sociedad.

Respecto de la adecuación de la unidad de medida en las estimaciones de superficies destaca el alto porcentaje de alumnos que emplean inadecuadamente unidades longitudinales para referirse a cantidades de superficie. Circunstancia que mejora considerablemente en la Evaluación Final.

Por otra parte, también hay varios alumnos que expresan las diferentes cantidades de superficie como un producto de unidades longitudinales. Esta situación puede ser debida a que en la vida real se nos presentan muchas medidas de cantidades de superficie en como producto de sus dimensiones longitudinales, ya que esta forma de expresión aporta más información que el uso de unidades de superficie.

O5. Estudiar cómo influyen las estrategias utilizadas en la precisión de las estimaciones.

No incluimos un estudio de la correlación entre las estrategias utilizadas y la precisión alcanzada porque el hecho de que las frecuencias con que se usan unas estrategias u otras son muy distintas condiciona dicho estudio y podría llevarnos a conclusiones erróneas. Por tanto, el estudio realizado no nos ha permitido valorar la importancia de la elección de la estrategia, pues para ello hubiese sido necesario plantear las tareas forzando el uso de todas las estrategias disponibles, y esto no ha sido posible por limitaciones temporales. No obstante, si podemos extraer algunas conclusiones referidas a este respecto: la precisión que se pueda alcanzar utilizando una estrategias



determinada depende de dos factores, fundamentalmente, que son la interiorización de los referentes o unidades de medida que se usen en dicha estrategia (componentes CEst1 y CEst2), y por otra parte, usar adecuadamente la estrategia (componente CEst4). Hildreth (1983) propone la enseñanza de las diferentes estrategias en las escuelas. Nosotros apoyamos su planteamiento como método para evitar errores en el uso de la estrategia, pero no hemos podido comprobar si hay estrategias más efectivas que otras para alcanzar una mayor precisión dependiendo de la tarea planteada.

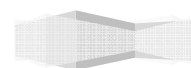
Varios investigadores apoyan el uso de referentes en tareas de estimación (Hildreth, 1983; Carter, 1986; Joram et al. 1998). Nosotros hemos comprobado que las estrategias que involucran el uso de referentes obtienen mejores resultados en términos de precisión que otras estrategias, como pueden ser las relacionadas con el uso de fórmulas, en el caso de la magnitud superficie.

Con respecto a los errores y dificultades que subyacen en la estimación:

O6. Caracterizar los errores que cometen los alumnos cuando realizan tareas de estimación en longitud y superficie.

El estudio de errores en las estimaciones de longitudes de la Evaluación Inicial ha puesto de manifiesto que el error más frecuente (se presenta en un 17.31% de las tareas) es un error de tipo conceptual intrínseco al proceso estimativo E7; seguido de un error de tipo procedimental intrínseco al proceso estimativo E9, que se da en un 7.69% de las tareas. Luego, los errores que los alumnos cometen cuando estiman longitudes son, principalmente, errores propios de procesos estimativos. En la Evaluación Final disminuyen las frecuencias de los diferentes tipos de error, pero sigue siendo el más frecuente (con una frecuencia del 14.42%) en el error conceptual intrínseco al proceso estimativo E7.

En las tareas de estimación de superficie de la Evaluación Inicial nos encontramos con un panorama bien distinto, pues en el 71.79% de las tareas incurren en algún tipo de error. Los errores más frecuentes son dos errores conceptuales extrínsecos al proceso estimativo: el E5, en el 34.62% de las tareas; y el E2, en el 26.92% de las tareas realizadas. Ambos errores se dan conjuntamente en muchas tareas, pero no se presentan simultáneamente en todas. A éstos le seguiría (según frecuencia) un error intrínseco a procesos estimativos de la magnitud longitud: el error E11, que se presenta en un 9.62%

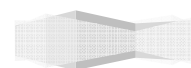


de las tareas. Y en cuarto lugar tenemos un error procedimental, también extrínseco al proceso estimativo, el E10, en el 8.65% de las tareas. Los errores intrínsecos a procesos estimativos de la magnitud superficie (E7, E8 y E9) se presentan en un 3.85% de los casos. La baja frecuencia de los mismos es debida a que los alumnos evitan el uso de este tipo de procesos, prefiriendo el empleo de técnicas indirectas, como el uso de fórmulas. Los resultados de la Evaluación Final también arrojan una notable mejoría en las tareas de estimación de superficies, pues disminuye la frecuencia con que incurren en algún error: en el 46.15% de las tareas cometieron algún error. Los errores más frecuentes siguen siendo el E5 y el E2 (errores conceptuales extrínsecos al proceso estimativo) aunque han disminuido notablemente las frecuencias: el E5 se presenta en el 14.1%; y el E2 en el 11.54% de las tareas. El tercer lugar lo sigue ocupando el error E11 (11.54%) y en cuarto lugar el error E10 (6.41%). Pero, contradictoriamente con esta mejoría encontramos que errores intrínsecos al proceso estimativo de la magnitud superficie (E7, E8 y E9), que en la Evaluación Inicial prácticamente no aparecen, han aumentado su incidencia. La justificación a esto la encontramos en el aumento que se produjo del uso de procedimientos estimativos directos de la magnitud superficie, en detrimento del empleo de técnicas indirectas (fórmulas), que en muchas ocasiones no son adecuadas para la estimación porque pueden provocar que el error aumente cuando se estiman los datos a usar en las mismas. Como ya hemos indicado en capítulos anteriores, en la Teoría de Errores podemos encontrar explicación a la propagación de errores.

Concluimos que los alumnos en las estimaciones ponen de manifiesto cierto dominio conceptual y procedimental de la magnitud longitud y su medida y sin embargo manifiestan falta de dominio conceptual y procedimental para la magnitud superficie. Esto supone, para el caso de la superficie, un obstáculo para evaluar la capacidad estimativa de los alumnos.

Los alumnos, manifiestan tendencia al uso de fórmulas matemáticas cuando realizan estimaciones de superficies. Posiblemente, porque la enseñanza no trabaja lo suficiente la medida directa de superficies.

Aunque la estimación mejora con la práctica, hay unos errores que son más persistentes que otros. Por ello, creemos que la estimación debería ser trabajada transversalmente, poniéndola en práctica en cualquier tarea que se preste. Además, la estimación constituye un campo de trabajo que permite detectar deficiencias conceptuales y



procedimentales básicas, al mismo tiempo que constituye un campo de entrenamiento para el manejo de conceptos y destrezas relativos a las magnitudes y a su medida. Así, apoyamos las ideas de aquellos investigadores que ven la estimación como una herramienta útil para la enseñanza de otros conceptos (Bright, 1976; Buchanan, 1978; Coburn y Shulte, 1986; Segovia et al. 1989; Whitin, 2004).

O7. Analizar la influencia de los errores en la precisión de las estimaciones.

La influencia del error es muy significativa en la precisión de las estimaciones. Hemos comprobado cómo, en general, para ambas magnitudes la evolución entre la Evaluación Inicial y la Final ha provocado un descenso del número y del tipo de errores y esto se ha traducido en un aumento de la precisión de las estimaciones.

En el caso de la magnitud superficie los errores conceptuales han impedido en muchos casos determinar la precisión de las estimaciones. Para aquellos casos en los que podíamos considerar las respuestas los errores provocan porcentajes de error más altos que para la magnitud longitud.

Con respecto al grupo de alumnos estudiado:

O8. Analizar la influencia del factor nacionalidad en la precisión de las estimaciones.

Hemos confirmado estadísticamente que la nacionalidad (entendida como ser español o extranjero) es una variable que no determina la capacidad estimativa en las estimaciones de longitudes o de superficies.

O9. Investigar perfiles de alumnos que tengan similar capacidad estimativa y caracterizarlos.

En el caso de la magnitud longitud hemos podido agrupar a los alumnos en función de la precisión alcanzada y, dichos grupos, han sido caracterizados en función del grado de adquisición de las componentes de la estimación en medida, obteniendo perfiles caracterizados por la interiorización de unidades de medida, la interiorización de referentes y el uso de estrategias de comparación, tres componentes importantes para la capacidad estimativa, como ya hemos puesto de manifiesto anteriormente.



En el caso de la magnitud superficie la agrupación realizada valorando la precisión no se corresponde con perfiles de alumnos caracterizados por dominar determinadas componentes. Como ya hemos puesto de manifiesto, en el caso de esta magnitud los errores son los que caracterizan la precisión de las estimaciones, obteniendo una gran variabilidad de errores que nos impide determinar perfiles de alumnos.

Con respecto a las tareas de estimación propuestas:

O10. Indagar qué variables de tarea influyen en la precisión de las estimaciones.

La investigación llevada a cabo nos ha permitido comprobar que no todas las tareas relativas a una misma magnitud han presentado el mismo grado de dificultad. Además, ha quedado latente que, en general, las tareas de estimación de superficies presentan un mayor grado de dificultad para los alumnos que se plasma en un aumento considerable del error y consecuentemente, un descenso de la precisión de las estimaciones.

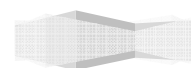
En caso de la magnitud longitud, las tareas que más dificultades han presentado han sido:

- La tarea de estimar la longitud del pegamento en barra (tarea I.5) con un porcentaje medio del error en valor absoluto del 35.44% en la Evaluación Inicial que disminuye al 17.53% en la Evaluación Final. Además en esta tarea se ha confirmado estadísticamente que los alumnos presentan tendencia a la subestimación. La dificultad asociada a esta tarea puede depender de dos circunstancias: por un lado que la unidad de medida utilizada por los alumnos no era la que más se adecuaba a la cantidad a estimar debido al tamaño de la misma, ya que, el uso del centímetro como unidad de medida provoca que el valor numérico a estimar sea mucho mayor que si hubiesen escogido otra unidad de medida mucho más próxima al tamaño de la cantidad a estimar como es el decímetro. Diversos investigadores apoyan la idea de que usar un referente/unidad de medida próximo a la cantidad a estimar disminuye la demanda cognitiva de la estimación, pues se reduce el número de iteraciones a realizar (Spitzer, 1961; Segovia et al. 1989). Otra hipótesis que puede haber sido la responsable de la tendencia presentada en esta tarea es la posición espacial en la que se le presento la cantidad a estimar (vertical). Esta hipótesis vendría a apoyar los resultados de Callís (2002).



- Otra tarea en la que los alumnos hemos podido contrastar que los alumnos presentaban tendencia a la subestimación es la tarea de estimar la longitud de la cuerda (tarea I.7). En este caso creemos que la tendencia puede ser debida a la forma que tenía la cantidad a estimar, pues se les presentó a los alumnos colgada de la pared formando una catenaria. Callís (2002) también encuentra en su estudio que las formas curvilíneas presentan mayor dificultad para ser estimadas y requieren de métodos de entrenamientos distintos que las rectilíneas: “la forma es un factor generador de dificultad estimativa y las formas curvilíneas y los contextos aditivos múltiples, dificultan y reducen la percepción longitudinal de los objetos” (Callís y Fiol, 2006, p. 100).
- En el caso de la tarea de estima el grosor de la mesa (tarea I.3) encontramos justamente lo contrario: los contrastes confirman estadísticamente que los alumnos presentan tendencia a la sobrestimación. Dado que los alumnos utilizan, principalmente, el centímetro para realizar esta tarea, aquí podríamos apoyar la hipótesis de Dasi (1999) de que el centímetro mental parece estar subestimado, y dicha subestimación provocaría que el alumno sobrestime la cantidad a estimar. No obstante, esta hipótesis creemos que debería ser estudiada con más profundidad porque, como ya hemos puesto de manifiesto en la tarea I.5 los alumnos utilizaban, principalmente el centímetro para expresar el resultado y en dicha tarea ocurrió justo lo contrario.
- La tarea de estimar el largo de la mesa del profesor (tarea I.1) es la que menos dificultad ha presentado para los alumnos, y en dicha tarea no hemos encontrado que los alumnos presenten tendencia ni a la subestimación ni a la sobrestimación. Posiblemente, esto sea debido a que el metro es una de las unidades de medida que está mejor interiorizada. Callis y Fiol, (2006) lo confirman argumentando que el metro está interiorizado: “de manera mayoritaria, entre una longitud de 80 a 120 cm” (p. 99), rango que está dentro del margen de aceptabilidad que hemos considerado en este estudio (30%).

En el caso de la magnitud superficie, los resultados han puesto de manifiesto la dificultad que suponen este tipo de tareas para los alumnos, donde en muchas ocasiones ni siquiera hemos podido considerar la respuesta, y en los casos que hemos podido calcular el porcentaje de error nos hemos encontrado con valores muy altos en casi todas las tareas:



- La tarea que más dificultad ha presentado ha sido la estimación de la superficie del mapa de España (tarea II.5) con porcentajes medio del error en valor absoluto del 95.39% en la evaluación inicial y del 112.17% en la evaluación final. Posiblemente esta dificultad sea debida a la forma irregular que presentaba.
- La tarea de estimar la superficie de la diana (tarea II.3) ha presentado valores del porcentaje medio del error en valor absoluto un poco más bajos, 87.22% para la evaluación inicial y 67.26% en la evaluación final. Por otra parte, esta tarea es la única que ha presentado tendencia contrastada estadísticamente, en concreto, tendencia a la subestimación. Una hipótesis pendiente de estudio que podría justificar esta circunstancia es que los alumnos tienen tendencia a la subestimación cuando tienen que estimar cantidades de superficies con forma circular.
- La tarea de estimar la superficie de la pizarra (tarea II.1) presentó menos dificultad para los alumnos que las anteriores.

En definitiva, una afirmación que venimos reiterando es que la tendencia a la subestimación/sobrestimación no depende de la magnitud, sino de la cantidad a estimar como acabamos de ver. Además hipótesis sobre los motivos que justifican las tendencias pueden estar relacionadas con la forma en que se les presenta la cantidad a estimar y/o la posición espacial. Estos resultados apoyan la afirmación de Callís y Fiol, (2006): “la forma y la posición espacial influyen en el grado de precisión de la estimación” (p. 111).

Con respecto a la evolución:

O11. Estudiar cómo evoluciona la capacidad estimativa con la práctica.

Hemos comprobado la incidencia de la práctica en diferentes aspectos de la capacidad estimativa mediante la comparación entre los resultados de la evaluación inicial y final. La precisión desarrollada en las estimaciones ha mejorado tanto para la magnitud longitud como para la magnitud superficie y el número de errores ha descendido notablemente.

Por tanto, en nuestro estudio también se confirma la hipótesis de que la capacidad estimativa mejora con la práctica, ya puesta de manifiesto por numerosos



investigadores: Bright (1976), Thorndike (1981), Immers (1983) o más recientemente Callís (2002) quien afirma, por una parte, que la enseñanza de la estimación no se refuerza lo suficiente en las escuelas y por otra parte, pone de manifiesto la importancia de practicar: “la formación académica no potencia la adquisición de capacidades de estimación métrica ... la capacidad estimativa se adquiere fundamentalmente por la práctica y la incidencia de la formación académica resulta ser poco significativa para dicha adquisición” (Callís y Fiol, 2006, p. 111).

2. CONCLUSIONES RELATIVAS A LA METODOLOGÍA

Con respecto a la aplicación del diseño, nos planteábamos el siguiente objetivo:

O12. Valorar ventajas e inconvenientes que subyacen a la metodología de la investigación de diseño.

La aplicación del diseño ha tenido cierto impacto positivo en la capacidad estimativa de los alumnos puesto que:

- Ha disminuido el tipo y la frecuencia de errores detectados en tareas de estimación de longitudes.
- Disminuyen las frecuencias de casi todos los tipos de error detectados en las tareas de estimación de superficies. Esta disminución es más notable para los errores conceptuales. La disminución del número de errores conceptuales y el aumento de estrategias de comparación directa en las estimaciones de superficie nos indican que la estimación puede ser un instrumento válido para la enseñanza de este concepto. Por tanto, nuestro estudio se adhiere a la corriente de pensamiento que considera que la estimación es una herramienta que puede ser utilizada para el aprendizaje de otros conceptos.

La principal ventaja de la metodología utilizada es que permite adaptar la instrucción tanto al punto de partida como al ritmo de aprendizaje de los alumnos. Situación que hemos considerado en el diseño de cada una de las sesiones.

Los inconvenientes más destacados de esta metodología son que: En primer lugar, que como el diseño de cada sesión necesita de un proceso de revisión de la sesión anterior, reflexión y conexión con los contenidos teóricos existentes es necesario disponer de un espacio de tiempo considerable entre sesión y sesión. No es una metodología que, a priori, nos parezca adecuada para ser aplicada a sesiones que se desarrollen en un corto



espacio de tiempo. En segundo lugar, requiere de la realización de una revisión teórica en profundidad.

El hecho de que el profesor sea uno de los investigadores también puede ser considerado una limitación, pues la investigación puede influir en su docencia. En este sentido tuvimos que tener presente que el desarrollo de esta investigación no debía influir en el trabajo diario que se desarrollaba en el aula. Bajo esta premisa la fórmula del profesor-investigador puede convertirse en una ventaja, pues puede controlar que enseñanzas están recibiendo los alumnos al margen del trabajo empírico propio de la investigación.

Finalmente ponemos de manifiesto que esta metodología permite avanzar en sus conocimientos tanto al profesor como a los alumnos.

3. APORTACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación tiene tres aportaciones teóricas: la descripción de las componentes de la estimación en medida; una caracterización de los distintos tipos de errores en la estimación en medida de longitudes y superficies; y una clasificación de estrategias generales de estimación en medida.

La descripción de las componentes ha sido realizada en el **apartado 1 del capítulo 4** y supone una referencia teórica que puede ser útil tanto para abordar cualquier investigación referida a la estimación en medida como para desarrollar un proceso de enseñanza-aprendizaje de estos conceptos.

La tipología de errores es fruto de la revisión teórica, las reflexiones de los investigadores y de las producciones de los alumnos en la presente investigación. Dicha tipología la hemos descrito en el **apartado 1.1 del capítulo 7**. La consideración de dicha tipología valorando las frecuencias con que se presenta cada tipo de error puede ser de utilidad para la enseñanza de estos conceptos, pues el detectar patrones de error puede ayudar al docente a anticiparse al mismo (Rico, 1995).

La clasificación de estrategias generales de estimación en medida, al igual que la tipología de errores, tiene en cuenta estos tres factores: experiencia de los investigadores, producciones de los alumnos y revisión teórica de antecedentes. Otros investigadores habían presentado otras propuestas, como es el caso de Siegel, Goldsmith y Madson (1982) o Segovia, Castro, Rico y Castro (1982), propuestas que ya

presentamos en el **Capítulo 2**. Aun no siendo contradictorias con la que nosotros presentamos, creemos que las complementa porque tiene en consideración estrategias que no se había considerado anteriormente, como son las estrategias basadas en el uso de fórmulas. En el apartado **2.1.3 del capítulo 7** hemos presentado nuestra propuesta.

A nivel empírico hemos podido valorar la precisión que pueden desarrollar los alumnos en tareas de estimación de longitud y de superficie, hemos valorado la frecuencia con que se presentan los distintos tipos de error, así como las distintas estrategias. El estudio nos ha permitido detectar tendencias hacia la subestimación o sobrestimación en diversas tareas y, en base a otros estudios y a nuestra experiencia hemos establecido hipótesis sobre los motivos que provocan dichas tendencias.

El estudio empírico nos ha permitido confirmar o refutar resultados de otras investigaciones.

Otras aportaciones, producto del trabajo empírico es la caracterización de perfiles de alumnos en cuanto a la capacidad estimativa en longitud. Para la magnitud superficie no hemos podido caracterizar perfiles de alumnos atendiendo a la capacidad estimativa, pues nos hemos visto limitados por la falta de dominio de las componentes asociadas a dicha magnitud y a su medida.

4. LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

La principal limitación de esta investigación es que los resultados se refieren al grupo de individuos con los que se trabajó en el aula. Una muestra con unas características peculiares, como ya describimos en el capítulo 5, no sólo por ser una muestra de conveniencia, sino también por las características de los alumnos y el proceso de formación del grupo.

Las características del grupo de alumnos estudiado ha limitado el potencial de esta investigación, sobre todo en lo relativo a la magnitud superficie, pues la falta de dominio conceptual y procedimental de esta magnitud ha limitado la posibilidad de profundizar en el dominio de contenidos propios de la estimación. Esta falta de dominio ha provocado que en muchas de las tareas de estimación de superficie no se pudiera considerar el resultado y, de este modo, no se podía valorar aspectos claves de la estimación tales como la precisión, tendencia, interiorización de unidades de medida o de referentes, e incluso estrategias utilizadas.



Otra limitación es debida a que la información obtenida está limitada por la capacidad de los alumnos para expresar sus razonamientos, ya sea de forma verbal o escrita. Esto ha provocado que en muchas tareas no hayamos podido determinar algunos de los elementos estudiados, como por ejemplo, los tipos de error cometidos o las estrategias de estimación empleadas (en nuestro estudio se ve la importante incidencia de esta circunstancia en las frecuencias de las categorías “DI=Descripción Incompleta” o “NE=No Explica”).

5. LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN ABIERTAS

En este estudio hemos esbozado algunas hipótesis sobre los motivos que provocan que se subestime en unas tareas y se sobrestime en otras. Un estudio con una variedad más amplia de tareas podría corroborar estas hipótesis o refutarlas e incluso encontrar otras causas. Algunas de las hipótesis propuestas para futuros estudios son las siguientes:

- Los alumnos subestiman longitudes cuando la cantidad a estimar tiene forma curva.
- Los alumnos subestiman longitudes cuando la cantidad a estimar se les presenta en posición vertical.
- Los alumnos subestiman superficies cuando la cantidad a estimar tiene forma circular.
- Los alumnos tienen peor precisión cuando estiman cantidades de longitud o superficie con una forma irregular que cuando es regular.

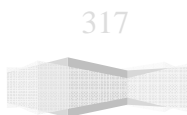
Otra cuestión que ha quedado pendiente de estudio es, como hemos dicho anteriormente, la caracterización de perfiles de alumnos atendiendo a la capacidad estimativa para la magnitud superficie. Para investigar la capacidad estimativa en superficie y extraer perfiles de alumnos sería conveniente realizar un estudio similar con un grupo de alumnos que no tuviese dificultades en el dominio conceptos y procedimientos de la magnitud superficie y su medida, es decir, realizar un estudio con un grupo de alumnos que tenga asimiladas las componentes asociadas a la magnitud superficie y a su medida.

Con respecto a las estrategias de estimación en medida una vía de estudio que dejamos abierta sería analizar si hay relación entre las estrategias de estimación y la precisión alcanzada.

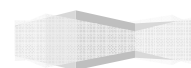


REFERENCIAS

- Attivo, B. J. (1979). *The Effects of Three Instructional Strategies on Prospective Teacher's Ability to Estimate Length and Area in the Metric System*. PhD. Pensilvania: Universidad del Estado de Pensilvania.
- Adams, T.L.; Harrell, G. (2003). Estimation at work. *Reston, V.A.: National Council of Teachers of Mathematics*, pp. 229-244.
- Astolfi, J.P. (1999). El "error", un medio para enseñar. Díada Editorial. Sevilla.
- Attivo, B. J. (1979). *The Effects of Three Instructional Strategies on Prospective Teacher's Ability to Estimate Length and Area in the Metric System*. PhD. Universidad del Estado de Pensilvania.
- Bachelard G. (1988). La formación del espíritu científico. México: Siglo XXI.
- Bana, J.; Dolma, P.; Cook, J. (2004). The relationship between the estimation and computation habiliteís of year 7 students. *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*. Vol. 1, pp. 63-70.
- Bannan-Ritland, B.; y Baek, J.Y. (2008). Investigating the act of design research: the road taken, en Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 299-319. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Barbera, E. (1996). Strategic estimates: mathematics as an inexact science. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Vol. 3 (7), pp. 125-134.
- Barody, A. y Gatzke, M. (1991). The estimation of set size by pontentialially liften kindergarten-age children. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 22 (1), pp. 59-68.
- Barrett, J.E.; Jones, G.; Thornton, C.; Dickson, S. (2003). Understanding Children's Developing Strategies and Concepts for Length. En: N.C.T.M. *Learning and Teaching Measurement, 2003 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003, pp. 17-29.
- Bell, M. S. (1974). What does "everyman" really need from school mathematics? *Mathematics Teacher*, vol. 67, pp. 196-202.



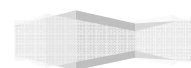
- Benton, S. E. (1986). A Summary of Research on Teaching and Learning Estimation. En: N.C.T.M. *Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1986, pp. 239-248.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa. Guía Práctica*. Barcelona: Ediciones CEAC.
- Bransford, J. Y Stein, B. (1984). *The IDEAL Problem Solver: A guide for improving thinking, learning, and creativity*. New York: W. H. Freeman.
- Bright, G.W. (1976) Estimation as Part of Learning to Measure. *National Council of Teachers of Mathematics Yearbook*. Vol. 38 , 87-104, 76.
- Bright, G. W. (1979). Measuring experienced teachers' linear estimation skills at two levels of abstraction. *School Science and Mathematics*. Vol. 79 (Febrero 1979), pp. 161-164.
- Bright, G.W. (2003). Estimation: Teaching notes. Classroom activities for learning and teaching measurement. *Reston, V.A.: National Council of Teachers of Mathematics*. 2003, pp. 27-31.
- Brown, N. y Siegler, R. (1993). Metrics and Mappings: A Framework for Understanding Real-World Quantitative Estimation. *Psychological Review*. Vol. 100 (3), pp. 511-534.
- Brousseau G., Davis R., Werner T. (1986). Observing Students at work, En Chistiansen B., Howson G., Otte M. (Edts): *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Booth, J. L.; y Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, 41 (6), pp. 189-201.
- Boucher, A. (1998). Critical Thinking through Estimation. *Teaching Children Mathematics*. Vol. 4 (8), pp. 452-455.
- Buchanan, A. (1978) Estimation as an Essential Mathematical Skill. Professional Paper 39. *Educational Research and Development*. California (U.S.).
- Cajaraville, J. A. (2007). Estimación y aproximación. En J. M. Domínguez (Ed.). *Actividades para la Enseñanza en el Aula de Ciencias. Fundamentos y Planificación*. Santa Fe (Argentina): Ediciones Universidad Nacional del Litoral, pp. 35-77.



- Callís, J. (2002). *Estimació de mesures longitudinals rectilínies i curvilínies. Procediments, recursos i estratègies*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Callís, J.; Fiol, M. L.; Luca, C.; Callís, C. (2006). Estimación métrica longitudinal en la educación primaria. Factores implícitos en la capacidad estimativa métrica. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 43, pp. 91-111.
- Carpenter, T. P.; Kepner, H.; Corbitt, M. K.; Lindquist, M. M. y Reys, R. E. (1980). Results and implications of the Second NAEP Mathematics Assessments: Elementary School. *The Arithmetic Teacher*, Vol. 27, pp. 44-47
- Carter, H. L. (1986). Linking estimation to psychological variables in the early years. En H. L. Schoen y M. J. Zweng (Eds.) *Estimation an Mental Computation: 1986 Yearbook* (pp. 74-81). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Cassell, M. E. (1941). *What measures do children know, and why?* Tesis doctoral no publicada. Boston: Universidad de Boston.
- Castillo, J.J. (2006). *Estimación de Cantidades Continuas: Longitud, Superficie, Capacidad y Masa*. Universidad de Granada. Granada.
- Castro, E. (2001). Números decimales. En Castro, E. (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. pp. 315-346. Síntesis. Madrid.
- Chamorro, C.; Belmonte, J.. (1988). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Síntesis. Madrid.
- Chang, K.-L.; Males, L. M.; Mosier, A.; y Gonulates, F.(2011). Exploring US textbooks' treatment of the estimation of linear measurements. *ZDM Mathematics Education*, vol. 43, pp. 697-708.
- Clayton, J. G. (1988). Estimation. *Mathematics Teaching*. MT125 (Dic), pp. 18-19.
- Clayton, J. (1992). *Estimation in Schools*. Universidad de Londres. Londres.
- Clayton, J. G. (1996). A criterion for estimation tasks. *Internacional Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 27 (1), pp. 87-102.



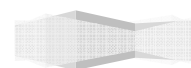
- Cobb, P. (2000). The Importance of a Situated View of Learning to the Design of Research and Instruction, en Boaler, J. (eds.). *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning*, pp. 45-82. Londres: Ablex Publishing.
- Cobb, P.; Confrey, J.; Disessa, A.; Lehrer, R.; y Schauble, L. (2003). Design experiment in Educational Research. *Educational Researcher*, Vol. 32 (1), pp. 9-13.
- Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, en Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.). *Handbook of design research methods in education Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 68-95. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Coburn, T.G.; Shulte, A. P. (1986). Estimation in Measurement. En: N.C.T.M. *Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1986, pp. 195-203.
- Cockcroft, W.H.; y otros (1985). *Las matemáticas sí cuenta. Informe Cockcroft*. M.E.C. Madrid.
- Cohen, L. Y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.
- Colón, H. W. (2009). Desarrollo del concepto de medición en la escuela elemental. *Revista 360 [en línea]*, Vol. 4. Recuperado el 27 de marzo de 2011, de <http://cremc.ponce.inter.edu/360/revista360/matematica/matematica.htm>
- Corle, C. G. (1960). A study of the quantitative values of fifth and sixth grade pupils. *Arithmetic Teacher*. Vol. 7, pp. 333-340.
- Corle, C. G. (1963). Estimates of quantity by elementary teachers and college juniors. *Arithmetic Teacher*. Vol. 10 (2), pp. 347-353.
- Cowan, R. (1987). When do Children trust counting as a basis for relative number judgments? *Experimental child psychology*, Vol. 43, pp. 328-345.
- Crawford, B. M.; y Zylstra, E. W. (1952). A study of high school seniors' ability to estimate quantitative measurements. *Journal of Educational Research*, vol. 55, pp. 241-248.



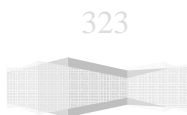
- Crities, T. W. (1989). *Identification and characterization of the strategies used by third-, fifth-, and seventh-grade students when making estimates of numerosity*. University of Missouri. Columbia.
- Cuneo, D. O. (1982). Children's judgements of numerical quantity: A new view of early quantification. *Cognitive psychology*, Vol. 14, pp. 13-44.
- Dasi, F. (1999). *Representaciones sociales e influencia social en los cambios culturales programados: el caso del sistema métrico*. Tesis doctoral. Valencia: Universidad de Valencia.
- De Castro, C. (2001). Memoria de Tercer Ciclo. *Influencia del Tipo de Número en la Estimación en Cálculo*. Granada: Universidad de Granada.
- De Castro, C. (2012). *Estimación en Cálculo con Números Decimales: Dificultad de las Tareas y Análisis de Estrategias y Errores con Maestros en Formación*. Granada: Universidad de Granada.
- De-Corte, E. (1997) Estimating Numerosity in a Rectangular Grid: The Development of a Clever Estimation Strategy. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Marzo de 1997, pp. 24-28.
- Del Olmo, M.A.; Moreno, M.F.; Gil, F. (1989). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con formulas?* Síntesis. Madrid.
- Dickson, L., Brown, M. Y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. MEC. Labor. Barcelona.
- Dowker, A. (1996) Estimation Strategies of Tour Groups. *Mathematical Cognition*. Vol. 2 (2), pp. 113-135.
- Edwards, A. (1983). Estimation for Numeracy. Numeracy Project. *Administrative Coll. Of Papua*. New Guines, Boroko.
- Engler, A., Gregorini, M.I., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (2004). Los Errores en el Aprendizaje de la Matemática. *Boletín de la SOUAREM*. Año 6. N° 23. Bs. As.
- Esteley, C., Villareal, M. (1996). Análisis y Categorización de errores en Matemática. *Revista de Educación Matemática*. Vol. 11. N° 1 (16-35). Universidad Nacional de Córdoba. Córdoba.



- Fiol, M. L.; Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis
- Flores, P. (2002). Superficie y área. En J. Deulofeu y C. Azcárate (Eds.). *Guía Praxis Para el Profesorado De ESO. Matemáticas, Contenidos, Actividades y Recursos*, pp. 56-101. Barcelona: Ciss Praxis.
- Fominykh, Y. (2001). Estimation of amount. Otsenka velinchiny. *Matematika v Shkole*. Vol. 4, pp. 66-70.
- Forrester, M. A., Latham, J. y Shire, B. (1990). Exploring estimation in young primary school children. *Educational Psychology*. Vol 10 (4), pp. 283-300.
- Forrester, M. A., y Shire, B. (1994). The influence of object size, dimension, and prior context on children's estimation abilities. *Educational Psychology*. Vol 14, pp. 451-465.
- Forrester, M. A.; y Pike, C. D. (1998). Learning to estimate in the mathematics classroom: A conversation-analytic approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 29, pp. 334-356.
- Frías A., Gil, F. y Moreno, M. F. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. En Castro, E. (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. pp. 477-503. Síntesis. Madrid.
- Friebel, A. C. (1967). Measurement understanding in modern school mathematics. *Arithmetic Teacher*, vol. 14, pp. 476-480.
- Gete-Alonso, J.C; y Del Barrio, V. (1989). *Medida y Realidad*. Madrid: Alhambra.
- Gómez, B. (1999). Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud. *9^{as} Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (JAEM)*, pp. 91-95. Lugo.
- Griffin, S. A.; Case, R.; Siegler, R. S. (1994). Rightstart: Providind the central conceptual prerequisites for first formal learning of arithmetic to students at risk for school failure. En K. McGilly (Ed.). *Classroom lessons: Integrating cognitive theory and classroom practice* (pp. 25-49). Cambridge, M.A.: Massachuserrs Institute of Technology.
- Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 22, (13), pp. 170-218.



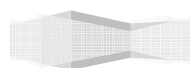
- Gronlund, N. (1978). *Elaboración de tests de aprovechamiento*. México: Trillas.
- Hall, L. (1984) Estimation and Approximation. Not Synonyms. *Mathematics Teacher*. Vol. 77 (7), pp. 516-517.
- Hanson, S.; y Hogan, T. (2000). Computacional estimation skill of collage students. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 31 (4), pp. 483-499.
- Harte, S.; Glover, M. (1993) Estimation Is Mathematical Thinking. *Arithmetic Teacher*. Vol. 41 (2), pp. 75-77.
- Hartley, A. A. (1977) Mental Measurement in the Magnitude Estimation of Length. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*. Vol. 3 (4), pp. 622-628.
- Hartley, A. A. (1981) Mental Measurement of line length: The role of the standard. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*. Vol. 7, pp. 309-317.
- Hiebert, J. (1981). Units of measure: Results and implications from national assessment. *Arithmetic Teacher*, Vol. 28, pp. 38-43.
- Hiebert, J. (1984). Why do some children have trouble learning measument concepts? *Arithmetic Teacher*, Vol. 31, pp. 19-24.
- Hildreth, D. J. (1980). *Estimation Strategy Use in Length and Area Measurement Tasks by Fifth and Seventh Grade Students*. PdD. Universidad del Estatal de Ohio. Columbia.
- Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. *Arithmetic Teacher*. Vol. 30 (5), pp. 50-54.
- Hogan, T.; Brezinski, K. (2003). Quantitative estimation: One, two, or three abilities? *Mathematical Thinking and Learning*. Vol. 5 (4), pp. 259-280.
- Holmes, E. (1975) Teach Estimation? Of Course! *Arithmetic Teacher*. Vol. 22 (5), pp. 367-369.
- Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*. Vol. 36, (6), pp. 12-18.
- Howe E. y Jung, K. (1987). Judgments of Numerosity: Effects of Symmetry and Goodness in dot Pattern Arrays. *Acta Psychologica*. Vol. 64, pp. 3-11.



- Hodgson, T.; Simonsen, L.; Luebeck, J.; y Andersen, L. (2003). Measuring Montana: An Episode in Estimation. En: N.C.T.M. *Learning and Teaching Measurement, 2003 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003, pp. 220-228.
- Huntley-Fenner, G. (2001). Children's Understanding of Number Is Similar to Adults' and Rats': Numerical Estimation by 5-7-years olds. *Cognition*. Vol. 78 (3), pp. 27-40.
- ICMI (1986). *School Mathematics in the 1990s*. Cambridge University Pres. Cambridge.
- Immers, R. C. (1983). Linear estimation ability and strategy use by students in grades two through five. Tesis doctoral no publicada. Ann Arbor, M.I.: Universidad de Michigan.
- INECSE. (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.
- Inskip, J. E. (1976). "Teaching measurement to elementary school children". En: N.C.T.M. *Measurement in School Mathematics, 1976 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics [Enseñanza de la medición en la escuela elemental. Traducción de J. Díaz Godino y L. Ruíz Higuera]7
- Inskip, J. E. (1978). Diagnosing computational difficulty in the classroom. En M. N. Suydam, M., N. y Reys, R. E. (eds.). *Developing computational skills, 1978 Yearbook*. Reston, V.A. N.C.T.M., 1978, pp. 163-76.
- Joram, E.; Gabriele, A.; Bertheau, M.; Gelman, R.; y Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the referent point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 36 (1), pp. 4-23.
- Joram, E.; Subrahmanvam, K.; y Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research*. Vol. 68 (4), pp. 413-437.
- Kosslyn, S. M.; Ball, T. M.; y Reiser, B. J. (1978). Visual images preserve metric spatial information: Evidence from studies of image scanning. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, vol. 4, pp. 47-60.



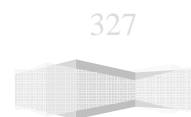
- Kosslyn, S. M.; Margolis, J. A.; Barrett, A. M.; Goldknopf, E. J.; y Daly, P. F. (1990). Age differences in imagery abilities. *Child Development*, vol. 61, pp. 995-1010.
- Kosslyn, S. M.; Pick, H. L.; y Fariello, G. R. (1974). Cognitive maps in children and men. *Child Development*, vol. 45, pp. 707-716.
- Kula, W. (1970). *Las medidas y los hombres*. Siglo XXI. Madrid.
- Krueger L. (1972). Perceived numerosity. *Perception and Psychophysics*, Vol 11 (1A).
- Kamii, C.; Clark, F. (1997). Measurement of Length: The Need for a Better Approach to Teaching. *School Science and Mathematics*, 97, p. 116-121.
- Lakatos I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza Universidad. Madrid
- Lang, F.K. (1999) What Is a “Good Guess” Anyway? Teaching Quantity and Measurement Estimation. *Young Children*. Vol 54 (3), pp. 78-81.
- Lang, F.K. (2001) What Is a “Good Guess” Anyway? Estimation in Early Childhood. *Teaching Children Mathematics*. Vol 7 (8), pp. 462-466.
- LeFevre, J. (1993). The Development of Procedural and Conceptual Knowledge in Computational Estimation. *Cognition and Instruction*, Vol. 11 (2), pp. 95-132.
- Legutko, M.; Urbanska, E. (2002). Forming estimation skills. *Mathematical literacy in the digital era*, pp. 224-230.
- Lehrer, R. (2003). Developing Understanding of Measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 179-192). Reston, VA: NCTM.
- Lemaire, P.; y Lecacheur, M. (2002). Children’s strategies in computational estimation. *Journal of Experimental Chile Psychology*. Vol. 82 (4). pp. 281-304.
- Lentzinger, Rathmell y Urbatsch (1986). Developing Estimating Skills in the Primary Grades. En H.L. Shoen & M.J. Zweng (Eds.). *Estimation and mental computation*. Yearbook. pp. 82-92. N.C.T.M. Reston, VA.
- Levin, J. (1981) Estimation Techniques for Arithmetic: Everyday Math and Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*. Vol. 12 (4), pp. 421-434.



- Levine, D. (1980). *Computational Estimation Ability and the Use of Estimation Strategies Among College Students*. PhD. Universidad de Nueva York. Nueva York.
- Levine, D. (1982). Strategy Use and Estimation Ability of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 13, nº 5, Nov, pp. 350-359.
- Lobato, J.E. (1993). Making Connections with Estimation. *Arithmetic Teacher*. Vol. 40 (6), pp. 347-351.
- Luria, S. M.; Kinney, J. S.; y Weissman, S. (1967). Distance estimates with “filled” and “unfilled” space. *Perceptual and Motor Skills*, vol. 24, pp. 1007-1010.
- Mack, N. (1988) Using Estimation To Learn Fractions with Understanding. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Abril de 1988., pp. 5-9.
- Maletsky, E. (1982) Activities: Visualization, Estimation, Computation *Mathematics Teacher*. Vol. 75 (9), pp. 759-764.
- Maletsky, E. (1982) Calculators and Estimation. *Mathematics Teacher*. Vol. 75 (2), pp. 137-140.
- Markovits, Z., Hershkowitz, R. y Bruckheimer, M. (1987). Estimation, Qualitative thinking and problem solving. *Mathematics Teacher*. Vol. 80 (6), pp. 516-517.
- Markovits, Z. y Hershkowitz, R. (1993). Visual estimation of discrete quantities. *ZDM*. 93/4, pp.137-140.
- Markovits, Z. y Hershkowitz, R. (1997). Relative and absolute thinking in visual estimation processes. *Educational Studies in Mathematics*. Vol 32 (1), p. 29-47.
- May, L. (1994) Benchmarks, Estimation Skills, and the “Real World”. *Teaching Math. Teaching Pre K-8*. Vol. 24 (8), pp. 24-25.
- McLaughlin, J. (1981). Development of children’s ability to judge relative numerosity. *Journal of experimental child psychology*, Vol. 31, pp. 103-114.
- Menon, R. (2003). Using Number Relationships for Estimation and Mental Computation. *Mathematics Teaching in the Middle School*. Vol. 8 (9), pp. 476-479.



- Micklo, S. (1999). Estimation: It's More Than a Guess. *Childhood Education*. Vol. 75 (3), pp. 142-145.
- Mitchell, J.; Hawkins, E.; Stancavage, F.; y Dossey, J. (2000). Estimation Skills, Mathematics-in-Context, and Advanced Skills in Mathematics. *Education Statistics Quarterly*. Vol 2 (1), pp. 29-33.
- Molina, M.; Castro, E.; Molina, J. L.; y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*. Vol. 29 (1), pp. 075-088.
- Moliner, M. (2007). *Diccionario de uso del español (Tercera edición)*. Madrid: Editorial Gredos.
- Moreno, M. F., Gil, F. y Frias, A. (2001). Área y volumen. En Castro, E. (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. pp. 503-533. Síntesis. Madrid.
- Morgan, V. R. (1986). Teaching Measurement Estimation through Simulations on the Microcomputer. En: N.C.T.M. *Estimation and Mental Computation, 1986 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1986, pp. 204-211.
- Mosterín, J. (1978). *La estructura de los conceptos científicos*. Investigación y Ciencia, 1; 82-93. Barcelona.
- Movshovitz-Hardar N., Zaslavksy O.; Inbar, S. (1987). An Empirical clasification model for errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 18, pp. 3-14.
- Newman, R.; Berger, C. (1984) Children's Numerical Estimation: Flexibility in the Use of Counting. *Journal of Educational Psychology*. Vol. 76 (1), pp. 55-64.
- N.C.T.M. (1971). *Medida*. Trillas. México.
- N.C.T.M. (1976). *Yearbook, Measurement in school mathematics*. Reston, V.A.
- N.C.T.M. (1986). *Yearbook, Estimation an mental computation*. Reston, V.A.
- N.C.T.M. (1979). *A Metric handbook for teachers*. Nacional Council of Teachers of Mathematics. Reston. Virginia.



- N.C.T.M. (1991). Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática. S.A.E.M. Thales. Sevilla.
- OCDE. (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Santillana. Madrid.
- O'Daffer, P. (1979) A Case and Techniques for Estimation: Estimation Experiences in Elementary School Mathematics-Essential, Not Extra!. *Arithmetic Teacher*. Vol. 26 (6), pp. 46-51.
- Opfer, J. E.; y Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, 55, pp. 169-195.
- Outhred, L.; Mitchelmore, M.; McPhail, D.; Gould, P. (2003). Count Me into Measurement. En: N.C.T.M. *Learning and Teaching Measurement, 2003 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003, pp. 81-99.
- Papadopoulos, I.; Dagdilelis, V. (2009). Estimating Areas and Verifying Calculations in the Tradicional and Computacional Environment. En Tzekaki, M.; Kaldrimidou, M.; y Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 305-312. Thessaloniki, Greece: PME.
- Papadopoulos, I. (2010). "Reinventing" techniques for the estimation of the area of irregular plane figures: from the eighteenth century to the modern classroom. *Journal of Science Mathematics Education*, Vol. 8 (5), pp. 869-890.
- Pajares, R.; Sanz, A. ;y Rico, L. (2004). *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*. Ministerio de Educación Cultura y Deporte, INECSE. Madrid.
- Pareja, J. L. (2001). Memoria de Tercer Ciclo. *Estimación de cantidades discretas por alumnos de magisterio*. Granada: Universidad de Granada.
- Paull, D. R. (1971). *The Ability to Estimate in Mathematics*. EdD Universidad de Columbia.
- Penafiel, A.F.; Reys, B.; y Reys, R. (1990). Performance and strategies for computacional estimation. *Educ. Mat.* Vol. 2 (1), pp. 30-44.



- Piaget, J.; Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *Las concepciones del niño sobre Geometría*. Londres: Routledge y Kegan Paul.
- Piaget, J. y Szeminska, A. (1964). *Génesis del número en el niño*. Guadalupe. Buenos Aires.
- Polya, G. (1995). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Popper K. (1979). El desarrollo del conocimiento científico. México: Siglo XXI.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). Problemas aritméticos escolares. Madrid: Síntesis.
- Radatz, H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 9, pp. 163-172.
- Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematics Learning Process: a Survey. *Fort the Learning of Mathematics*. Vol. 1, pp. 16-20.
- Real Academia Española (1992). *Diccionario de la Lengua Española. Vigésima primera edición*. Vol. 1. Madrid: Espasa Calpe.
- Real Academia Española (1992). *Diccionario de la Lengua Española. Vigésima primera edición*. Vol. 2. Madrid: Espasa Calpe.
- Resnick, L. B. (1983). A developmental theory of number understandin. En H. P. Ginsburg (Ed.). *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). New York: Academic Press.
- Reys, B. (1985) Elementary School Mathematics: What Parents Should Know About...Estimation. *National Council of Teachers of Mathematics, Inc.* Reston, VA.
- Reys, R.; Bestgen, B. (1981) Teaching and Assessing Computational Estimation Skills. *Elementary School Journal*. Vol. 82 (2), pp. 117-127.
- Reys, R.; Bestgen, B. (1982). Processes Used by Good Computational Estimations. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 13 (3), pp. 183-201.
- Reys, R. (1984). Computational Estimation Instructional Materials for the Middle Grades. Universidad de Missouri. Columbia.
- Reys, R. (1984). Mental computation and estimation: Past, present and future. *The Elementary School Journal*. Vol. 84, pp. 547-557.
- Reys, R. (1985) Estimation. *Arithmetic Teacher*. Vol. 32 (6), pp. 37-41.



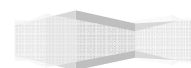
- Reys, R. E.; Lindquist, M. M.; Lambdin, D. V.; Smith, N. L.; y Sydam, M. N. (2001). *Helping Children Learn Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Reynolds, A; y Wheatley, G. H. (1996). Elementary Student's Construction and Coordination of Units in an Area Setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 25 (5), pp. 564-581.
- Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las Matemáticas*. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.
- Rico, L. (1995). Formación de investigadores en Educación Matemática: Programa de Doctorado de la Universidad de Granada. En J. Calderón, y L. Puig (Eds.) *Investigación y Didáctica de la Matemática*. Seminario CIDE. MEC. Madrid.
- Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias Matemáticas desde una Perspectiva Curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Roanes, E. (1976). *Didáctica de las Matemáticas*. Anaya. Madrid
- Santisteban, C. (1990). *Psicometría. Teoría y práctica en la construcción de tests*. Madrid: Ediciones NORMA.
- Segovia, I. (1997). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos*. Comares. Granada.
- Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis. Madrid.
- Segovia, I.; De Castro, C. (2007). La investigación en estimación en cálculo. En *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano*. Encarnación Castro y José L. Lupiáñez. Granada: Editorial Universidad de Granada, pp. 213-236.
- Segovia, I. y Rico, L. (1991). Componentes básicas en estimación de cantidades. *Actas del I Simposio Internacional sobre Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales*.
- Seymour, D. (1994). *Estimeasure: Estimation and measurement activities*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Pbl.
- Shimizu, K.; y Inshida, J. (1994). The cognitive processes and use of strategies of good Japanese estimators. En R. E. Reys y N. Nohda (Eds.). *Computational*



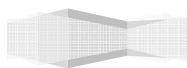
- alternatives for the twenty-first century: Cross-cultural perspectives from Japan and the United States* (pp. 161-178). Reston V. A.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Shoen, H.L. (1994). Assessing computational estimation. Research and new directions. Reston, V.A.: National Council of Teachers of Mathematics, 1994, pp. 87-97.
- Siegel, A. W., Goldsmith, L. T. y Madson, C. R. (1982). Skill in estimation problems of extent and numerosity. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 13 (3), pp. 211-232.
- Siegler, R. S.; Booth, J. L. (2004). Development of Numerical Estimation in Young Children. *Child Development*. Vol. 75 (2), pp. 428-444.
- Siegler, R. S.; y Opfer, J. E. (2003). The development of numerical estimation: evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, vol. 14, pp. 237-243.
- Silver, E.A. (1994). Treating estimation and mental computation as situated mathematical processes. Reston, V.A.: National Council of Teachers of Mathematics, 1994, pp. 147-160.
- Smart, J. (1982). Estimation Skills in Mathematics. *School Science and Mathematics*. Vol. 82 (8), pp. 642-649.
- Smith, C. R. (1994). *Learning disabilities: The interaction of learner, task, and setting* (3ª Ed.). Boston: Ally and Bacon.
- Schneider, M.; Grabncr, R.H.; y Paetsch, J. (2009). Mental Number Line, Number Line Estimation, and Mathematical Achievement: Ther Interrelaticns in Grades 5 and 6. *Journal of Educational Psychology*. Vol. 101 (2), pp. 359-372.
- Spitzer, F. (1961). *The teaching of aritmetic*. Boston: Houghton Mifflin Company.
- Spooner, M. (2002). *Errors and misconceptions y maths at key stage 2*. London: David Fulton Publishers.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. (Cap. V, pp. 125-154). En L. Rico y otros: *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.



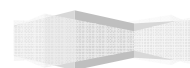
- Sowder, J.T. (1992). Estimation and number sense. En D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York: Macmillan Publishing Company.
- Sowder, J.T. (1994). Cognitive and metacognitive processes in mental computation and computational estimation. *Reston, V.A.: National Council of Teachers of Mathematics*, 1994, pp. 139-146.
- Sowder, J. T., y Wheeler, M. M. (1989). The Development of Concepts and Strategies Used in Computational Estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 20 (2), pp. 130-146.
- Stephan, M.; Clements, D.H. (2003). Linear and Area Measurement in Prekindergarten to Grade 2. En: N.C.T.M. *Learning and Teaching Measurement, 2003 Yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003, pp. 3-16.
- Swan, M; y Jones, O. (1971). Distance, weight, height, area and temperature percepts of university students. *Science Education*, vol. 55, pp. 353-360.
- Swan, M; y Jones, O. (1980). Comparison of students' percepts of distance, weight, height, area, and temperature. *Science Education*, vol. 64, pp. 297-307.
- Taylor-Cox, J. (2001) How Marbles in the Jar? Estimation in Early Grades. *Teaching Children Mathematics*. Vol 8 (4), pp. 208-214.
- Trafton, P. (1978) Estimation and Mental Arithmetic: Important Components of Computation. *NCTM Yearbook*. 196-213, 78.
- Thorndyke, P. W. (1981). Distance estimation from cognitive maps. *Cognitive Psychology*, vol. 13, pp. 526-550.
- Usiskin, Z. (1986). Reason for estimating. En H. L. Schoen y M. J. Zweng (Eds.). En H. L. Schoen y M. J. Zweng (Eds.) *Estimation an Mental Computation: 1986 Yearbook* (pp. 1-15). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Whitin, D. (2004). Exploring estimation through children's literature. Articles and lessons for prekindergarten through grade 8. Reston, V.A.: National Council of Teacher of Mathematics (N.C.T.M.). 2004, pp. 21-28.
- Wilson, D. W. (1936). *What measures do people know, and why?* Tesis doctoral no publicada. Boston: Universidad de Boston.



Wilson, G. M.; y Cassell, M. (1953). A research on weights and measures. *Journal of Educational Research*, vol. 46, pp. 75-85.

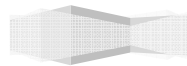


APÉNDICES

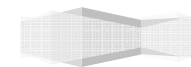


**APÉNDICE A: TABLA CON CARACTERÍSTICAS INDIVIDUALES DE LOS ALUMNOS QUE FORMAN
LA MUESTRA**

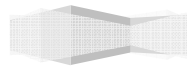
Alumno	Sexo	Año Nacim.	Repetidor	Nacionalidad	Otros idiomas	Años en España
A1	M	1992	SI	Venezolana		7
A2	M	1993	NO	Española	Árabe	
A3	H	1993	NO	Rumana	Rumano	4
A4	H	1992	NO	Rumana	Rumano	4
A5	M	1993	NO	Española		
A6	M	1993	NO	Rumana	Rumano	3
A7	M	1993	NO	Rumana	Rumano	7
A8	H	1993	NO	Rumana	Rumano	2
A9	M	1993	NO	Española		
A10	H	1992	SI	Rumana	Rumano	4
A11	H	1992	SI	Rumana	Rumano	4



Alumno	Sexo	Año Nacim.	Repetidor	Nacionalidad	Otros idiomas	Años en España
A12	M	1993	NO	Española		
A13	M	1991	SI	Española		
A14	M	1992	NO	Española	Rumano	2
A15	M	1993	NO	Española		
A16	M	1993	NO	Española		
A17	H	1993	NO	Rumana	Rumano	3
A18	H	1992	SI	Española		
A19	M	1992	SI	Española		
A20	H	1992	NO	Española		
A21	M	1992	NO	Rumana	Rumano	7
A22	M	1993	NO	Española		
A23	M	1993	NO	Rumana	Rumano	4

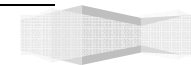


Alumno	Sexo	Año Nacim.	Repetidor	Nacionalidad	Otros idiomas	Años en España
A24	M	1993	NO	Brasileña	Portugués	2
A25	M	1993	NO	Senegalesa	Senegalés	13
A26	M	1993	NO	Rusa	Ruso	4
A27	M	1993	NO	Rumana	Rumano	5
A28	M	1992	NO	China	Chino	2
A29	H	1992	NO	Española		
A30	H	1991	SI	Rumana	Rumano	6
A31	M	1993	NO	Rumana	Rumano	1
A32	H	1992	SI	Rumana	Rumano	3
A33	H	1992	SI	Ucraniana	Ucraniano Y Ruso	3

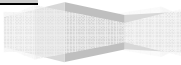


APÉNDICE B: TABLA DE PARTICIPACIÓN DEL ALUMNADO

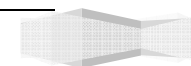
	Fecha de realización:	Ficha Ev. Inicial	Ficha 1	Ficha 2	Ficha 3	Ficha 4	Ficha 5	Ficha 6	Ficha 7	Ficha 8	Ficha 9	Ficha 10	Ficha Ev. Final
		12/12/07	12/02/08	12/02/08	25/02/08	25/02/08	09/04/08	10/04/08	24/04 a 28/04/08	14/05/08	14/05/08	30/05/08	09/06/08
A1		•	•	•	•	•	•	•	X	•	•	•	•
A2		•	•	•	•	•	•	X	•	•	•	•	•
A3		•	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
A4		•	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
A5		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A6		•	•	•	•	•	•	•	•	X	X	•	•
A7		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A8		•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•



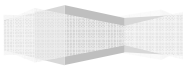
	Ficha Ev. Inicial	Ficha 1	Ficha 2	Ficha 3	Ficha 4	Ficha 5	Ficha 6	Ficha 7	Ficha 8	Ficha 9	Ficha 10	Ficha Ev. Final
A9	•	•	•	•	•	•	X	•	•	•	X	•
A10	•	•	•	•	•	•	•	X	•	•	•	•
A11	•	•	•	•	•	•	•	•	X	X	•	•
A12	•	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
A13	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A14	X	•	•	X	X	X	•	•	•	•	•	•
A15	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A16	•	•	•	•	•	•	X	•	•	•	•	•
A17	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A18	•	•	•	•	•	•	•	X	•	•	•	•
A19	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•



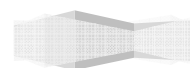
	Ficha Ev. Inicial	Ficha 1	Ficha 2	Ficha 3	Ficha 4	Ficha 5	Ficha 6	Ficha 7	Ficha 8	Ficha 9	Ficha 10	Ficha Ev. Final
A20	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
A21	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A22	•	•	•	•	•	•	X	X	•	•	•	•
A23	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A24	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A25	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A26	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A27	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A28	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A29	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
A30	X	•	•	•	•	X	X	X	X	X	X	X



	Ficha Ev. Inicial	Ficha 1	Ficha 2	Ficha 3	Ficha 4	Ficha 5	Ficha 6	Ficha 7	Ficha 8	Ficha 9	Ficha 10	Ficha Ev. Final
A31	X	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•
A32	X	•	•	•	•	•	•	•	X	X	X	X
A33	X	•	•	•	•	•	•	•	X	X	•	•



APÉNDICE C: FICHAS DE TRABAJO



Apéndice C.1: FICHA DE EVALUACIÓN INICIAL

**EVALUACIÓN INICIAL DE LA CAPACIDAD ESTIMATIVA DE
CANTIDADES CONTINUAS: LONGITUD Y SUPERFICIE.**

Nombre y Apellidos: **Curso:**.....

Realiza de manera individual los ejercicios que se te plantean a continuación. En cada uno de ellos se pide que realices una estimación, esto es, que digas el resultado de la medida de un objeto sin que utilices ningún instrumento de medida.

BLOQUE I: ESTIMACIÓN DE CANTIDADES DE LONGITUD.

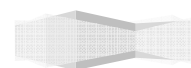
Ejercicio I.1: ¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor?

Solución: La mesa del profesor mide de largo

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

Ejercicio I.2: Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 dm.

Objetos que miden aprox. 1 dm:



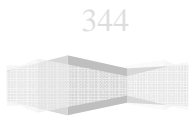
Ejercicio I.3: ¿Qué grosor tiene aproximadamente la mesa sobre la que estas escribiendo?

Solución: El grosor de la mesa del profesor es de.....

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

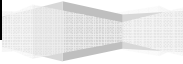
Ejercicio I.4: Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 m.

Objetos que miden aprox. 1 m:



<p>Ejercicio I.5: ¿Cuánto mide aproximadamente (de largo) el bote de pegamento en barra que hay encima de la mesa del profesor?</p>
<p>Solución: El pegamento en barra mide de largo</p>
<p>Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:</p>

<p>Ejercicio I.6: Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 cm.</p>
<p>Objetos que miden aprox. 1 cm:</p>



Ejercicio I.7: ¿Qué longitud aproximada tiene la cuerda que hay colgada en la pared?

Solución: La cuerda mide de largo

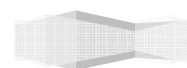
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

BLOQUE II: ESTIMACIÓN DE CANTIDADES DE SUPERFICIE.

Ejercicio II.1.: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pizarra?

Solución: La superficie de la pizarra es de

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:



Ejercicio II.2: Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 cm^2 .

Objetos que tienen una superficie aprox. de 1 cm^2 :

Ejercicio II.3.: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la diana?

Solución: La superficie de la diana es de

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

Ejercicio II.4: Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 m^2 .

Objetos que tienen una superficie aprox. de 1 m^2 :



Ejercicio II.5.: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie del mapa de España?

Solución: La superficie del mapa es de

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

Ejercicio II.6: Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 dm^2 .

Objetos que tienen una superficie aprox. de 1 dm^2 :



Apéndice C.2: FICHA 1

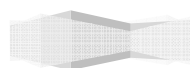
Nombre:	Grupo:
----------------	---------------

FICHA 1: Identificación de Magnitudes

El objetivo de los siguientes ejercicios es que identifiques y/o diferencias las magnitudes: Longitud y Superficie.

<p>Ejercicio 1.1. Dibuja dos figuras planas de las que tienes sobre la mesa e indica sobre el dibujo, en color rojo, diferentes “longitudes” que tenga la figura; y dibuja en color azul la/las “superficies” de la misma.</p>	

<p>Ejercicio 1. 2. Dibuja dos cuerpos geométricos de los que tienes sobre la mesa e indica sobre el dibujo, en color rojo, diferentes “longitudes” que tenga dicho cuerpo; y dibuja en color azul la/las “superficies” del mismo.</p>	



Ejercicio 1.3. Explica con tus palabras qué entiendes por longitud y/o superficie.

Yo creo que Longitud es

.....

.....

.....

.....

.....

Yo creo que Superficie es

.....

.....

.....

.....

.....

Indica diferencias que observes entre las magnitudes **Longitud** y **Superficie**:

.....

.....

.....

.....

.....



Apéndice C.3: FICHA 2

Nombre:	Grupo:
----------------	---------------

FICHA 2: Identificación de Magnitudes

El objetivo de los siguientes ejercicios es que identifiques diferentes cantidades de longitud y de superficie en las figuras u objetos que se presentan.

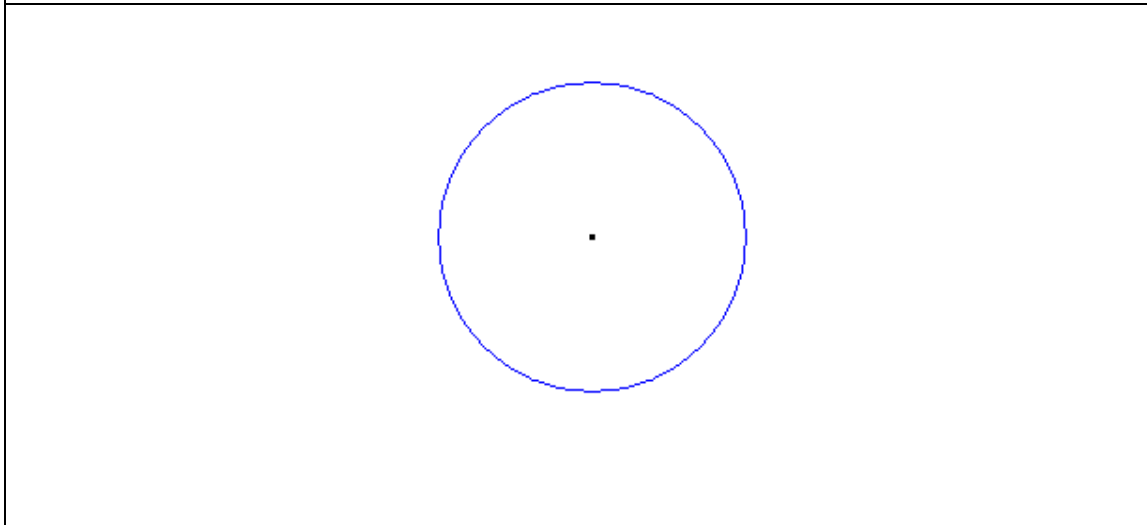
Ejercicio 2.1. Indica (en color rojo) en el siguiente rectángulo cuál sería el “largo”, y cuál sería el “ancho”. Dibuja en color azul la/las superficie/s que tenga el rectángulo.



Ejercicio 2.2. Dibuja sobre el siguiente triángulo en color rojo las siguientes longitudes: la base y la altura del mismo. Dibuja en color azul la/las superficie/s del mismo.



Ejercicio 2.3. Dibuja utilizando diferentes colores la circunferencia (rojo), el radio y el diámetro (negro). Dibuja en color azul la/las superficie/es.

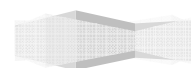


Ejercicio 2.4. En el siguiente poliedro indica en color rojo “largo”, “ancho” y “alto”. Dibuja en color azul la/las superficie/s del mismo. ¿Cuántas superficies tiene en total?

Número de caras laterales:

Número de bases:

Número total de superficies:

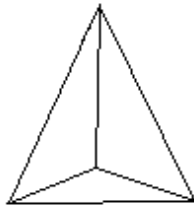


Ejercicio 2.5. En la siguiente pirámide triangular indica (en color rojo) cuales serían las aristas que la forman. Dibuja en color azul la/las superficie/s de la pirámide. ¿Cuántas superficies tiene en total el poliedro?

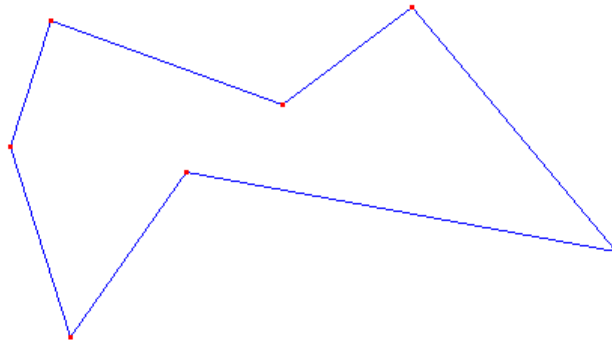
Número de caras laterales:

Número de bases:

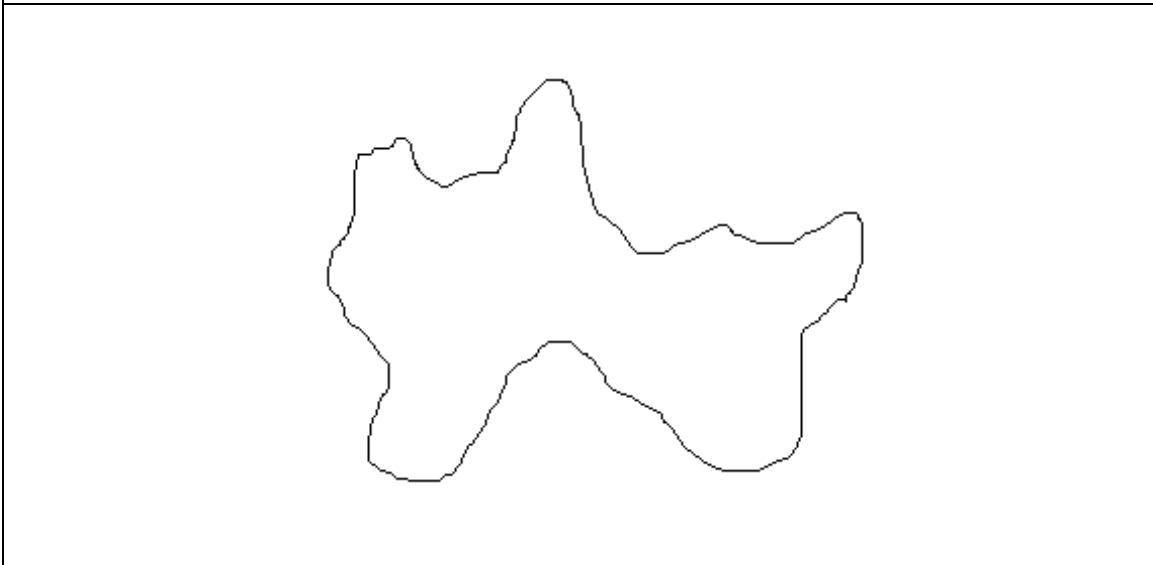
Número total de superficies:



Ejercicio 2.6. Dibuja sobre la siguiente figura (en rojo) tres “distancias” que se puedan medir. Dibuja en color azul la/las superficie/s que tenga esta figura.



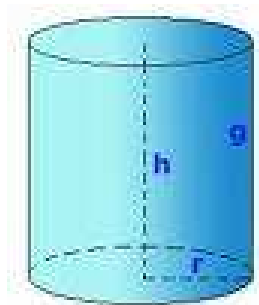
Ejercicio 2.7. Dibuja sobre la siguiente figura (en rojo) tres “distancias” que se puedan medir. Dibuja en color azul la/las superficie/s que tenga esta figura.



Ejercicio 2.8. Señala en el siguiente cuerpo de revolución cuáles serían las superficies laterales y las bases. ¿Cuántas superficies tiene en total el cilindro?

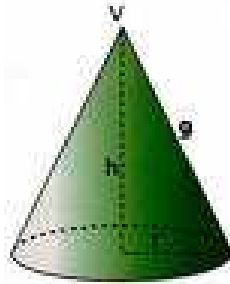
Número de superficies laterales: Número de bases:

Número total de superficies:.....



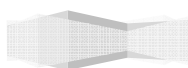
Ejercicio 2.9. Señala en el siguiente cuerpo de revolución cuáles serían las superficies laterales y las bases. ¿Cuántas superficies tiene en total el cono?

Número de superficies laterales: Número de bases:
Número total de superficies:.....

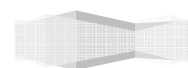


Ejercicio 2.10. Señala en el siguiente cuerpo de revolución cuáles son la/las superficie/s. ¿Cuántas superficies tiene en total la esfera?

Número total de superficies:.....



Ejercicio 2.11. Marca con una cruz donde corresponda.		
Objeto o elemento:	Longitud	Superficie
La distancia entre Roquetas y Almería		
El largo de un coche		
La portada de un libro		
La arista de una ventana		
El cristal de una ventana		
Una cuerda		
Una circunferencia		
Un círculo		



Apéndice C.4: FICHA 3

Nombre:	Grupo:
----------------	---------------

FICHA 3: Medida Directa de Longitudes

El objetivo de los siguientes ejercicios es que te familiarices con las unidades de medida de longitud.

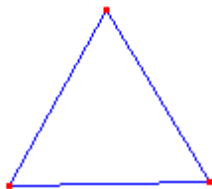
Ejercicio 3.1. Mide el “largo” y el “ancho” del siguiente rectángulo y escribe cuánto miden. (Utiliza la unidad de medida que consideres más adecuada).



Largo:

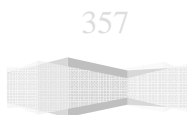
Ancho:.....

Ejercicio 3. 2. Mide en el siguiente triángulo la base y la altura del mismo. (Utiliza la unidad de medida que consideres más adecuada).

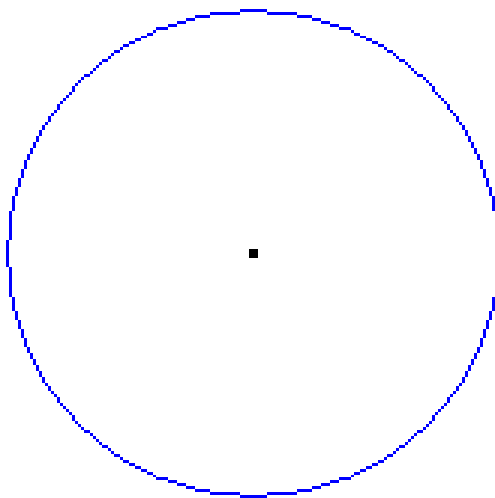


Longitud de la Base:

Longitud de la Altura:



Ejercicio 3.3. Mide el radio y la longitud de la circunferencia. (Utiliza la unidad de medida que consideres más adecuada). Explica el procedimiento que has seguido para medir la circunferencia.



Longitud del Radio:

Longitud de la Circunferencia:.....

¿Cómo has medido la circunferencia?.....
.....
.....
.....

Ejercicio 3.4. ¿Cuánto mide el lado del cubo o hexaedro que tienes sobre la mesa? (Objeto número 1).

El lado del cubo mide:

Ejercicio 3.5. ¿Cuánto mide el largo, ancho y alto del prisma rectangular que tienes sobre la mesa? (Objeto número 2).

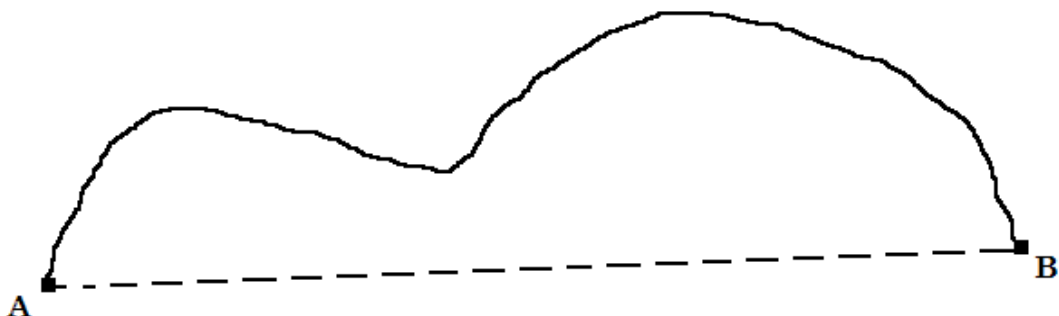
El largo del prisma mide:

El ancho del prima mide:.....

El alto del prima mide:



Ejercicio 3.6. En la el siguiente dibujo aparece en línea continua la “trayectoria” que ha seguido una hormiga para ir del punto A al punto B. Mide la trayectoria de la hormiga y la distancia entre los puntos A y B, y compáralas.



La trayectoria mide:

La distancia entre A y B es:

Comparación:

.....

Ejercicio 3. 7. Mide la longitud de la cuerda que tienes sobre la mesa. (Utiliza la unidad de medida que consideres más adecuada).

La cuerda mide:



Apéndice C.5: FICHA 4

Nombre:	Grupo:
----------------	---------------

FICHA 4: Medida Directa de Superficies

El objetivo de los siguientes ejercicios es que te familiarices con las unidades de medida de superficie.

<p>Ejercicio 4.1. ¿Cuánto mide la superficie de una cara lateral del cubo (objeto 1)? Utiliza para ello la malla cuadriculada.</p>
<p>La superficie de la cara lateral mide:</p>

<p>Ejercicio 4.2. ¿Cuánto mide la superficie de una cara lateral del prisma (objeto 2)? ¿Y la superficie de la base? Utiliza para ello la malla cuadriculada.</p>
<p>La superficie de la cara lateral mide:</p> <p>La superficie de la base mide:</p>

<p>Ejercicio 4.3. ¿Cuánto mide la superficie de una cara lateral de la pirámide (objeto 3)? ¿Y la superficie de la base? Utiliza para ello la malla cuadriculada.</p>
<p>La superficie de la cara lateral mide:</p> <p>La superficie de la base mide:</p>



Ejercicio 4.4. ¿Cuánto mide la superficie de una cara lateral del cilindro (objeto 4)? ¿Y la superficie de la base? Utiliza para ello la malla cuadriculada.

La superficie de la cara lateral mide:

La superficie de la base mide:

Ejercicio 4.5. ¿Cuánto mide la superficie de una cara lateral del cono (objeto 5)? ¿Y la superficie de la base? Utiliza para ello la malla cuadriculada.

La superficie de la cara lateral mide:

La superficie de la base mide:

Ejercicio 4.6. ¿Cuánto mide la superficie de la pantalla de la imagen del MP4? Utiliza para ello el papel milimetrado.



La superficie de la pantalla mide:



Ejercicio 4.7. ¿Cuánto mide la superficie de la tarjeta de memoria de un móvil que ves en la figura?

Utiliza para ello el papel milimetrado.



La superficie de la tarjeta de memoria mide:

Ejercicio 4.8. ¿Cuánto mide la superficie de una baldosa?

Utiliza para ello el decímetro cuadrado.

La superficie de la baldosa mide:

Ejercicio 4.9. ¿Cuánto mide la superficie de la mesa?

Utiliza para ello el metro cuadrado.

La superficie de la mesa mide:



Apéndice C.6: FICHA 5

Nombre:

Ejercicio 5.1. Cita al menos tres objetos o espacios en los que alguna de sus longitudes mida aproximadamente cada una de las medidas indicadas.

Medida	Objetos
1 m	
1 cm	
1 dm	
1 m	
1 dam	

Ejercicio 5.2. Cita al menos tres objetos en los que alguna de sus superficies mida aproximadamente cada una de las medidas indicadas.

Medida	Objetos
1 mm ²	
1 cm ²	



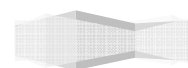
1 dm ²	
1 m ²	

Ejercicio 5.3. Indica la unidad de medida más adecuada para medir las siguientes longitudes.

Longitud de	Unidad de longitud
Anchura de una puerta	
Grosor de un dedo	
Largo de un mando a distancia	
Grosor de un libro	
Distancia suelo-techo	
Largo del aula de clase	

Ejercicio 5.4. Indica la unidad de medida más adecuada para medir las siguientes superficies.

Superficie de	Unidad de superficie
Uña del dedo pulgar	
Portada de un libro	
Pizarra	



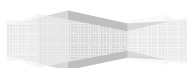
Pantalla de un MP4	
Suelo del aula de clase	

Ejercicio 5.5. Indica aproximadamente la medida que le asignarías a las siguientes longitudes:

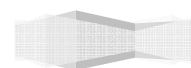
Longitud de	Medida aproximada
Palmo de la mano	
Grosor de un dedo	
Anchura de la mano	
Un paso	
Anchura de un baldosa	
Largo de un pupitre	
Brazos abiertos	
Largo del aula de clase	

Ejercicio 5.6. Indica aproximadamente la medida que le asignarías a las siguientes superficies.

Superficie de	Medida aproximada
Uña dedo pulgar	



Folio	
Pupitre	
Puerta de la clase	
Pizarra	
Pantalla del ordenador	



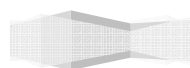
Apéndice C.7: FICHA 6

Nombres de los miembros del grupo:	Grupo:
---	---------------

Los objetivos de esta ficha es que hagáis una puesta en común sobre lo contestado en la ficha anterior.

Ejercicio 6.1. Entre todos tenéis que elegir al menos cinco objetos o espacios de los que citasteis en el ejercicio 5.1, en los que alguna de sus longitudes mida aproximadamente cada una de las medidas indicadas.

Medida	Objetos
1 mm	
1 cm	
1 dm	
1 m	
1 dam	

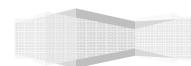


Si os habéis dado cuenta de algún error que hayáis cometido al resolver la tarea 5.1 coméntalo en este recuadro.

Errores detectados

Ejercicio 6.2. Entre todos tenéis que elegir al menos cinco objetos de los que citasteis en el ejercicio 5.2 en los que su superficie mida aproximadamente cada una de las medidas indicadas.

Medida	Objetos
1 mm ²	
1 cm ²	
1 dm ²	

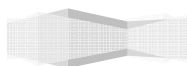


1 m^2	
-----------------	--

Si os habéis dado cuenta de algún error que hayáis cometido al resolver la tarea 5.2 coméntalo en este recuadro.

Errores detectados

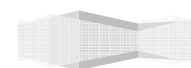
Ejercicio 6.3. Entre todos decidid cuál es la unidad de medida más adecuada para medir las siguientes longitudes.



Longitud de	Unidad de longitud
Anchura de una puerta	
Grosor de un dedo	
Largo de un mando a distancia	
Grosor de un libro	
Distancia suelo-techo	
Largo del aula de clase	

Si os habéis dado cuenta de algún error que hayáis cometido al resolver la tarea 5.3 coméntalo en este recuadro.

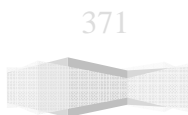
Errores detectados



Ejercicio 6.4. Entre todos decidid cuál es la unidad de medida más adecuada para medir las siguientes superficies.

Superficie de	Unidad de superficie
Uña del dedo pulgar	
Portada de un libro	
Pizarra	
Pantalla de un MP4	
Suelo de la habitación	

Si os habéis dado cuenta de algún error que hayáis cometido al resolver la tarea 5.4 coméntalo en este recuadro.



Errores detectados

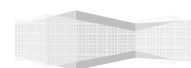
Ejercicio 6.5. Entre todos decidid cuál es la medida aproximada que le asignaríais a las siguientes longitudes.

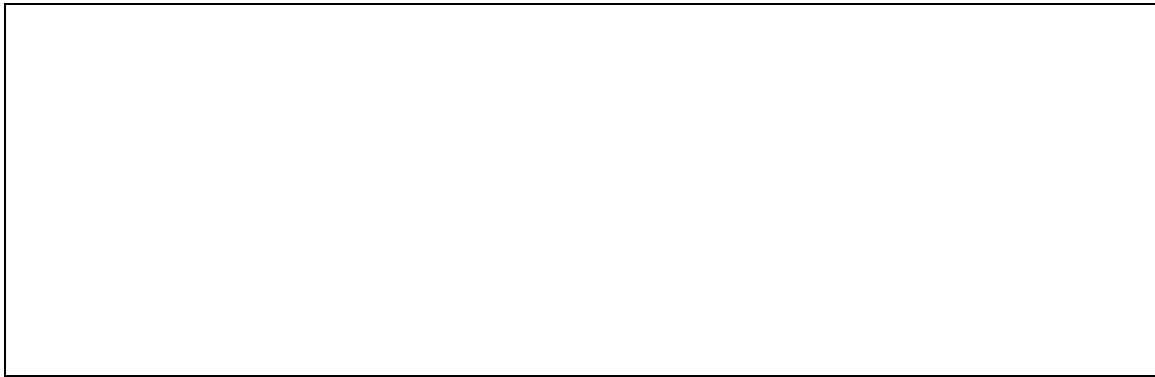
Longitud de	Medida aproximada
-------------	-------------------

Palmo de la mano	
Grosor de un dedo	
Anchura de la mano	
Un paso	
Anchura de un baldosa	
Largo de un pupitre	
Brazos abiertos	
Largo del aula de clase	

Si os habéis dado cuenta de algún error que hayáis cometido al resolver la tarea 5.5 coméntalo en este recuadro.

Errores detectados

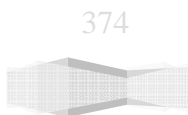




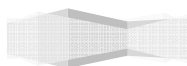
Ejercicio 6.6. Entre todos decidid cuál es la medida aproximada que le asignaríais a las superficies de los siguientes objetos.

Objeto	Superficie aproximada
Uña dedo pulgar	
Folio	
Pupitre	
Puerta de la clase	
Pizarra	
Pantalla del ordenador	

Si os habéis dado cuenta de algún error que hayáis cometido al resolver la tarea 5.6 coméntalo en este recuadro.



Errores detectados



Apéndice C.8: FICHA 7

Nombre:

Longitud:

El objetivo de las siguientes actividades es que conozcas las diferentes unidades de medida de longitud. Puedes utilizar cualquier instrumento de medida (regla, cinta métrica,...)

Ejercicio 7.1. Dibuja un segmento que mida exactamente 1 mm.

Ejercicio 7.2. Dibuja un segmento que mida exactamente 1 cm.

Ejercicio 7.3. Dibuja un segmento que mida exactamente 1 dm.

Ejercicio 7.4. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que midan aproximadamente 1mm. (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

Ejercicio 7.5. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que midan aproximadamente 1cm. (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).



Ejercicio 7.6. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que midan aproximadamente 1dm. (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

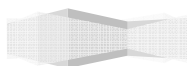
Ejercicio 7.7. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que midan aproximadamente 1m. (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

Ejercicio 7.8. ¿Sabes cuánto mide tu cuerpo? Realiza la medida de las longitudes de cada una de las partes que se te indican (en la unidad de medida indicada).

Parte de tu cuerpo	Medida exacta
Estatura	m
Brazos abiertos	dm
Un palmo	cm
Anchura del dedo pulgar	mm
Contorno de la cintura	dm
Longitud de tu pie	cm
Un paso	cm

Ejercicio 7.9. Toma las medidas de la puerta de tu habitación como si tuvieras que encargarle a un carpintero que te la hiciera de nuevo (en la unidad de medida indicada).

Objeto	Medida
Grosor de la puerta de tu habitación	cm



Anchura de una puerta de tu habitación	dm
Altura de la puerta de tu habitación	m

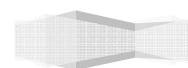
Ejercicio 7.10. Toma las medidas de las longitudes de los objetos que se indican (en la unidad de medida que consideres más adecuada).

Objeto	Medida
Altura de un tetrabrik de leche o zumo	
Longitud de un tenedor	
Diámetro de un plato llano	
Largo del salón-comedor	
Ancho del salón-comedor	
Altura de una silla	
Largo de la mesa del salón-comedor	
Ancho de una baldosa	
Anchura de los interruptores de la luz	

Ejercicio 7.11. Las pantallas de los televisores, ordenadores,... se miden en pulgadas (la equivalencia entre pulgadas y centímetros es: 1 pulgada = 2,54 cm).

Por ejemplo: Si la pantalla de tu televisor es de 14 pulgadas, eso quiere decir que la diagonal de la pantalla mide 14 pulgadas, por tanto medirá $14 \times 2,54 = 35,56$ cm.

Mide y expresa en centímetros la diagonal de la pantalla de la televisión del salón y calcula cuántas pulgadas tiene.

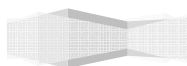


El objetivo de los siguientes ejercicios es que aprendas diferentes unidades de medida de superficie. Puedes utilizar para realizar los siguientes ejercicios cualquier instrumento de medida.

Ejercicio 7.12. Dibuja un cuadrado cuya superficie mida exactamente 1 mm^2 .

Ejercicio 7.13. Dibuja un cuadrado cuya superficie mida exactamente 1 cm^2 .

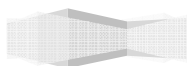
Ejercicio 7.14. Dibuja un cuadrado cuya superficie mida exactamente 1 dm^2 .



Ejercicio 7.15. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que tengan una superficie que mida aproximadamente 1 mm^2 (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

Ejercicio 7.16. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que tengan una superficie que mida aproximadamente 1 cm^2 (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

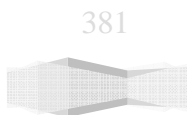
Ejercicio 7.17. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que tengan una superficie que mida aproximadamente 1 dm^2 (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).



Ejercicio 7.18. Busca en tu casa, al menos 3 objetos, que tengan una superficie que mida aproximadamente 1 m^2 (Indica el objeto y especifica qué parte del objeto es la que tiene esa medida).

Ejercicio 7.19. Toma las medidas de las superficies que se indican. Utiliza la malla cuadrículada o el papel milimetrado en aquellas que lo consideres necesario.

Superficie	Medida
Botón o ruedecilla de un reloj de pulsera	mm^2
CD (disco compacto)	cm^2
Portada de una libreta	dm^2



Ventana de salón-comedor	m^2
Un azulejo del cuarto de baño	dm^2
Pantalla del móvil	cm^2
Moneda de 10 céntimos	mm^2

Ejercicio 7.20. Toma las medidas de las superficies que se indican (en la unidad de medida que consideres más adecuada). Utiliza la malla cuadrículada o el papel milimetrado en aquellas que lo consideres necesario.

Superficie	Medida
Pantalla del televisor	
Mesa del comedor	
Cabeza de un alfiler	
Base de un vaso de agua	
Portada del libro de matemáticas	
Plato llano	
Tecla de un móvil	

Ejercicio 7.21. Imagina que tienes que pintar tu habitación y necesitas saber la superficie que tiene cada una de las paredes. Para ello mide la superficie de las paredes de tu habitación y réstale las superficies que no se pintan (ventanas, armarios empotrados,...). Indica el resultado. Escribe a continuación todas las operaciones que realices.



Apéndice C.9: FICHA 8

Nombre:

Longitud:

Ejercicio 8.1: ¿Cuánto mide aproximadamente la altura de la puerta de la clase?

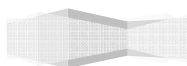
Respuesta: La altura de la puerta de la clase mide...

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

Ejercicio 8.2: ¿Cuánto mide aproximadamente un clip de largo?

Respuesta: Un clip tiene una longitud de

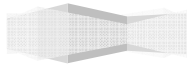
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:



Ejercicio 8.3.: ¿Cuánto mide aproximadamente la diagonal del folio sobre el que estás escribiendo?
Respuesta: La diagonal del folio mide...
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

Superficie:

Ejercicio 8.4.: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de tu agenda escolar?
Respuesta: La superficie de la agenda mide ...
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:



Ejercicio 8.5.: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pared de la clase que tiene las ventanas (incluyendo las ventanas)?

Respuesta: La superficie de la pared mide ...

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

Ejercicio 8.6.: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la Península Ibérica en el mapa?

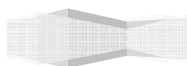


Respuesta: La superficie de la Península Ibérica mide...

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado,



especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:



Apéndice C.10: FICHA 9

Nombre:

Longitud:

Ejercicio 9.1: Comparándola con tu propia estatura, ¿cuánto mide aproximadamente la altura de la puerta de la clase?

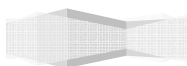
Respuesta: La altura de la puerta mide...

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado:

Ejercicio 9.2: Comparándolo con la anchura de tu dedo pulgar, ¿cuánto mide aproximadamente un clic de largo?

Respuesta: El clic mide...

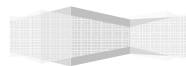
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado:



Ejercicio 9.3.: Comparándolo con la anchura de un folio (21 cm), ¿cuánto mide aproximadamente la diagonal del folio sobre el que estás escribiendo?
Respuesta: La diagonal del folio mide...
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado:

Superficie:

Ejercicio 9.4.: Comparándolo con la superficie de un DNI o tarjeta de crédito (45 cm ²), ¿cuánto mide aproximadamente la superficie de tu agenda escolar?
Respuesta: La superficie de la agenda mide...
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado:



--

Ejercicio 9.5.: Comparándola con la superficie de la ventana, ¿cuánto mide aproximadamente la superficie de la pared de la clase que tiene las ventanas (incluyendo las ventanas)?

Respuesta: La superficie de la ventana mide...

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado:

--

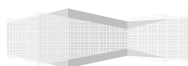
Ejercicio 9.6.: Comparándola con la superficie de Portugal (1 cm²), ¿cuánto mide aproximadamente la superficie de la Península Ibérica en el mapa?



Respuesta: La superficie de la Península Ibérica mide...

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado:

--





Apéndice C.11: FICHA 10

Nombre:

PROYECTO: COMPRA DE UN PISO.

El Proyecto: “Compra de un piso” supone la realización de ejercicios relacionados con la compra de un piso, en los cuales es necesario utilizar estrategias de estimación de “Longitudes” y “Superficies”.

Aunque todos los ejercicios son figurados, no olvides que algún día serán reales y, ejercicios como los que vas a hacer a continuación seguramente te serán útiles para cuando seas mayor y tengas que comprarte tu propio piso/casa.

Vayamos paso a paso:

1^{er} Paso: Localización.

Una cuestión importante a tener en cuenta es ¿dónde me compro el piso? Pues bien, lo mejor es que te lo compres lo más cerca posible del trabajo.

Imagina que eres profesor/a y trabajas en el IES “Algazul”, pero has visto un piso interesante en C/ de los Derechos Humanos (donde está la casita). Calcula aproximadamente cual puede ser la distancia entre el Instituto que está en C/Santa Isabel (donde está la estrella) y el piso que te vas a compra.

El recorrido sería el siguiente: C/de los Derechos Humanos →Avda. de Juan Bonachera →C/ de Santander →C/del pintor Rosales →C/Santa Isabel.



Escribe a continuación cualquier cálculo o razonamiento que hayas hecho para obtener la distancia aproximada entre el “piso” y el Instituto:

2º Paso: Localización.

El piso que te vas a comprar está en el Edificio “Ya Soy Mayor” (el de la figura), y está en la cuarta planta (el de la flecha).

- a) Calcula de manera aproximada que altura puede haber desde el balcón del piso hasta el suelo de la calle.
- b) Calcula de manera aproximada las dimensiones de la parte blanca de la fachada y la superficie aproximada de la parte blanca.

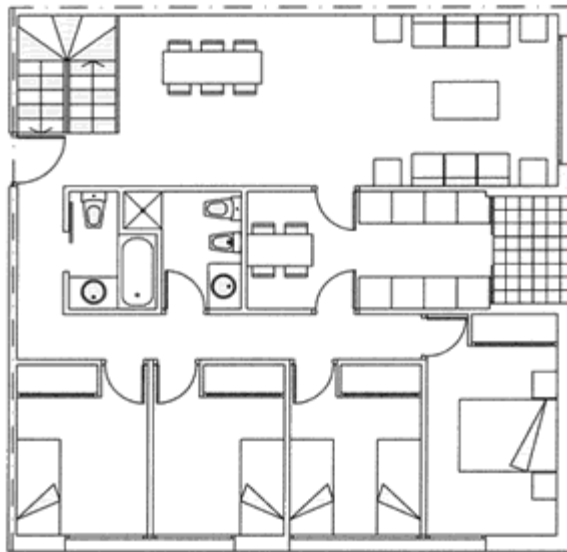


Escribe a continuación cualquier cálculo o razonamiento que hayas hecho:

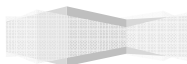
3^{er} Paso: Plano.

El precio del piso va a depender de número de metros cuadrados que tenga. Nos han dicho que el Salón-Comedor tiene una superficie aproximada de 20 m².

- a) Calcula aproximadamente cual será la superficie total del piso.
- b) ¿Cuánto mide la superficie del cuarto de baño que no tiene bañera?



Escribe a continuación cualquier cálculo o razonamiento que hayas hecho para obtener las superficies:

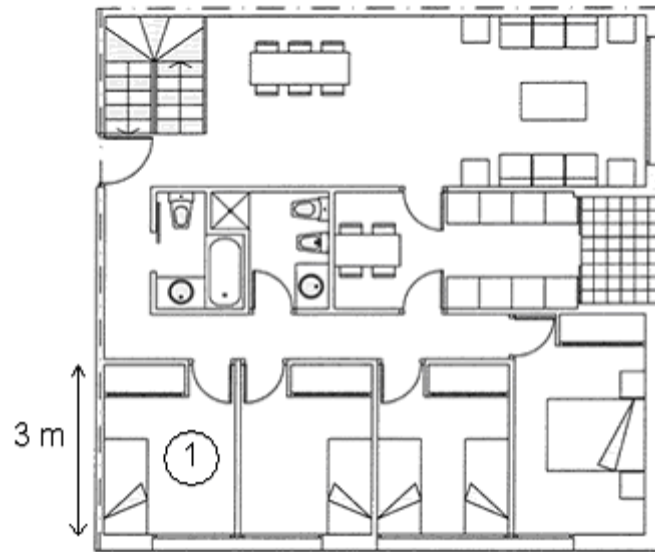


4º Paso: Ya lo hemos comprado, ahora ¡hay que pintarlo!

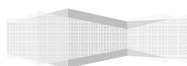
Para pintarlo necesitamos saber aproximadamente cual es la superficie que tienen las paredes y el techo. Observando el plano y teniendo en cuenta que las paredes tienen una altura similar a la del aula.

- a) ¿qué superficie habrá que pintar en el dormitorio 1?
- b) ¿Qué superficie aproximada habrá que pintar en todo el piso?





Escribe a continuación cualquier cálculo o razonamiento que hayas hecho:



Apéndice C.12: FICHA DE EVALUACIÓN FINAL

EVALUACIÓN FINAL DE LA CAPACIDAD ESTIMATIVA DE CANTIDADES CONTINUAS: LONGITUD Y SUPERFICIE.

Nombre y Apellidos: **Curso:**.....

Realiza de manera individual los ejercicios que se te plantean a continuación. En cada uno de ellos se pide que realices una estimación, esto es, que digas el resultado de la medida de un objeto sin que utilices ningún instrumento de medida.

BLOQUE I: ESTIMACIÓN DE CANTIDADES DE LONGITUD.

Ejercicio I.1: ¿Cuánto mide aproximadamente de largo la mesa del profesor?

Solución: La mesa del profesor mide de largo

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

Ejercicio I.2: Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 dm.

Objetos que miden aprox. 1 dm:



--

Ejercicio I.3: ¿Qué grosor tiene aproximadamente la mesa sobre la que estas escribiendo?

Solución: El grosor de la mesa del profesor es de.....

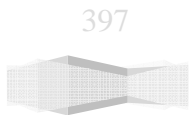
Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

--

Ejercicio I.4: Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 m.

Objetos que miden aprox. 1 m:

--

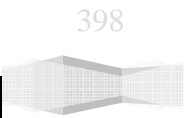


Ejercicio I.5: ¿Cuánto mide aproximadamente (de largo) el bote de pegamento en barra que hay encima de la mesa del profesor?

Solución: El pegamento en barra mide de largo

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

Ejercicio I.6: Cita tres objetos u elementos con una longitud aproximada de 1 cm.



Objetos que miden aprox. 1 cm:

Ejercicio I.7: ¿Qué longitud aproximada tiene la cuerda que hay colgada en la pared?

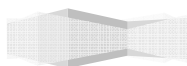
Solución: La cuerda mide de largo

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

BLOQUE II: ESTIMACIÓN DE CANTIDADES DE SUPERFICIE.

Ejercicio II.1.: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la pizarra?

Solución: La superficie de la pizarra es de



Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

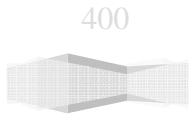
Ejercicio II.2: Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 cm^2 .

Objetos que tienen una superficie aprox. de 1 cm^2 :

Ejercicio II.3: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie de la diana?

Solución: La superficie de la diana es de

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:



--

Ejercicio II.4: Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 m^2 .

Objetos que tienen una superficie aprox. de 1 m^2 :

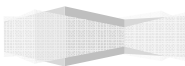
--

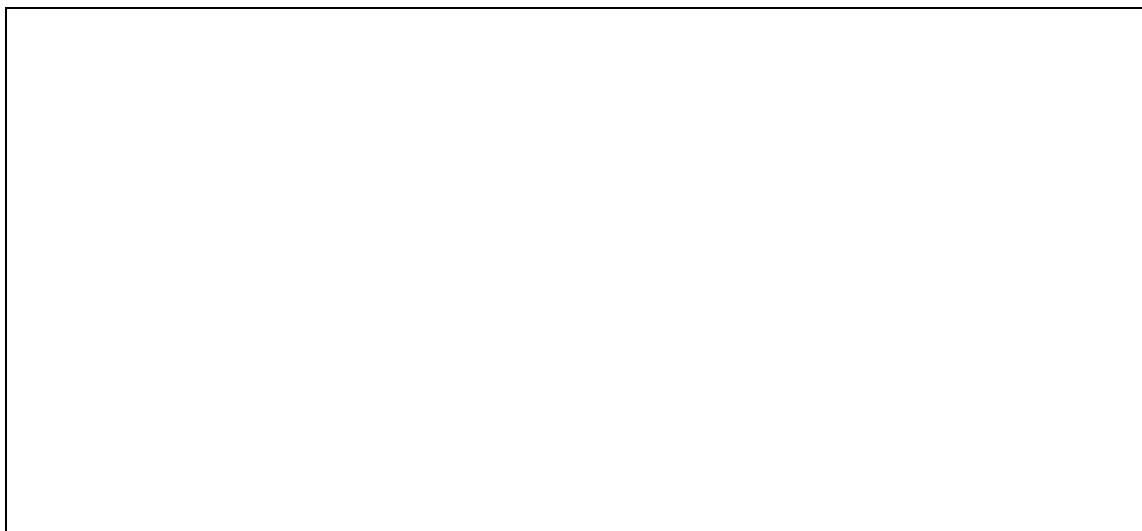
Ejercicio II.5.: ¿Cuánto mide aproximadamente la superficie del mapa de España?

Solución: La superficie del mapa es de

Escribe en este recuadro los pasos que has seguido para llegar al resultado, especificando todo aquello en lo que hayas pensado o los razonamientos que hayas llevado a cabo para llegar a la solución:

--





Ejercicio II.6: Cita tres objetos u elementos con una superficie aproximada de 1 dm^2 .

Objetos que tienen una superficie aprox. de 1 dm^2 :

APÉNDICE D: TRANSCRIPCIÓN DE GRABACIONES EN VIDEO DE LAS SESIONES

Apéndice D.1: Transcripción de las Grabaciones en Video de la 2ª Sesión

I. Explicaciones del Profesor para rellenar Ficha 1

(En Gran Grupo)

Profesor: Atender un segundo que explique lo que tenéis que hacer. Aunque la ficha es individual podéis hablar entre vosotros para ponerlos de acuerdo en qué es lo que hay que poner, entre los de vuestro grupo. Atender un momento, en el ejercicio 1.1 dice “Dibuja dos figuras planas de las que tienes sobre la mesa...”, ¿sabéis cuáles son las figuras planas? ¿no?

Alumnos: Sí (algunos), No (otros).



P: (Indica cuales son las figuras planas cogiendo algunas de ellas y mostrándolas a los alumnos. Después coge la Ficha 1 e indica) En cada uno de estos recuadros debéis dibujar una figura. Los de un mismo grupo no dibujéis todos la misma figura. Debéis ponerlos de acuerdo y que uno dibuje una figura, otro otra... Y ¿cómo se hace? La idea principal es que aprendáis a diferenciar entre Longitud y Superficie. ¿Sabéis cual es la diferencia entre Longitud y Superficie?

Alumnos: (Todos intentan hablar a la vez) Si, es,...

P: (Profesor interrumpe) No, un momento, un momento...El que quiera hablar que levante la mano.

A10: (Señalando a la figura) Porque esto es más largo, y esto es más ancho. (Los compañeros se ríen de su comentario)

A1: La Longitud es lo que mide esto (indicando un lado de una figura), y la superficie es lo de dentro (señalando el interior de la figura).

P: Eso es, algo así sería...

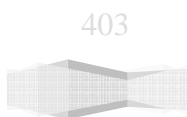
P: A ver, por ejemplo, si decidís dibujar el rectángulo, pues (el profesor dibuja un rectángulo en la pizarra) dibujáis el rectángulo. No hace falta que salga perfecto. No es necesario dibujarlo con regla. Y ahora como dice aquí... “en color rojo dibujáis las longitudes”. Pues cogéis el color rojo y las longitudes me las dibujáis así...(el profesor indica en largo y el ancho del rectángulo con dos trazos), con líneas. Y dice... “en color azul, las superficies”. La superficie sería... todo lo de dentro. Pues, para no perder el tiempo coloreándolo, con que hagáis así y me lo rayéis es suficiente (el profesor raya el rectángulo). Con eso ya se yo que me habéis indicado que eso es la superficie, ¿vale? En rojo longitudes, y en azul superficies. Pues venga... tenéis 5 minutos para hacer la ficha.

P: (Observa que un alumno trata de calcar una figura dentro de la Ficha 1). A ver..., un segundo, no hay que coger y copiarlo aquí (indicando los recuadros del ejercicio 1.1), podéis dibujarlo más pequeño. Y en la parte de atrás hay un par de preguntas. Para eso tenéis que ponerlos de acuerdo entre vosotros. A ver que contestáis.

P: (El profesor recuerda a cada grupo cuál es su número, para que lo pongan en la ficha).

A13: Pero Jesús. ¿De qué color pintamos el cuadro?

P: El rectángulo, da igual, podéis dibujarlo del color que queráis.



A16: Negro, ¿no?

P: Como queráis.

II. Puesta en común que tiene lugar después de recoger la Ficha 1.

P: A ver..., una pregunta. ¡Que levante la mano quien quiera contestar! ¿Qué habéis puesto donde pone... “Yo creo que la Longitud es..”?

A16: Lo que mide un objeto.

P: ¿Lo que mide un objeto?

A33: Lo que miden los lados de un objeto.

P: Eso estaría más completo, ¿no?

A13: Es lo que mide el lado de cada uno de los lados de un objeto, y la altura de sus lados.

P: Dime... A17.

A17: Es lo que mide desde un punto hasta otro punto de una... de una figura.

P: Y en el caso de la superficie, ¿qué habéis puesto? Dime A21.

A21: El largo y el ancho de la figura.

A18: Es el espacio que ocupa una figura o un cuerpo.

A16: Es el espacio que ocupa una figura o un cuerpo.

P: Una pregunta, vamos a ver. Esto me lo habéis preguntado muchos. (El profesor dibuja una circunferencia en la pizarra). Que levante la mano quien quiera hablar. Y habla sólo una persona. Para el caso de la circunferencia, la superficie todos tenéis claro lo que es, ¿no? Si yo pregunto... ¿quién me sabría decir qué longitudes hay ahí, o qué longitudes se pueden medir ahí?

A11: El radio.

P: ¿El qué?

A11: El radio.

P: Esa sería un longitud que se puede medir aquí, ¿no? (el profesor dibuja el radio en la circunferencia). ¿Alguna otra? ¿Hay más?

A17: La diagonal.



P: ¿La diagonal? ¿Hay diagonal aquí?

Varios alumnos: ¡Nooo!

P: ¿Cómo se llamaría la diagonal aquí, en este caso? Como se llama la línea esta que va de lado a lado pasando por el centro.

Varios alumnos: Diámetro.

P: Diámetro. ¡Eso! Otra pregunta: ¿Se podría medir el borde?

Varios alumnos: ¡Sííí!

P: ¿Cómo se podría medir el borde?

A1: No se pero... (el alumno se levanta e indica cuatro puntos en la circunferencia) desde aquí hasta aquí y desde aquí hasta aquí, ¡como un cuadrado!

P: Tu lo que dices es medir desde aquí hasta aquí (indicado dos puntos de la circunferencia) y desde aquí hasta aquí (el profesor indica otros dos puntos en la circunferencia), medir estas distancias. ¿Esto cómo se llamaría? ¿Os acordáis? ¿No os acordáis?

A15: ¡Segmento!

P: Esos segmentos como se llamarían, ¿os acordáis?

Varios alumnos: ¡Nooo!

P: ¡Son las cuerdas de la circunferencia!

A18: Maestro también se puede medir esto... (el alumno hace un movimiento circular con la mano, como queriendo indicar la circunferencia).

P: ¡Claro, se puede medir todo el borde también!

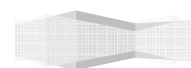
III. Explicaciones que da el profesor para rellenar la Ficha 2

P: Para rellenar esta ficha sólo tenéis que usar el bolígrafo. Sobre esos dibujos que tenéis en la ficha vais señalando, ¿vale? Esta se rellena muy rápidamente.

IV. Puesta en común que tiene lugar después de rellenar la Ficha 2

P: Esperaros un momento que vamos a corregir el ejercicio. ¿Todos habéis entregado, ya?

Varios alumnos: ¡Sííí!



P: (Limpia la pizarra). Atender un momento. ¿Dónde esta la tiza A1? (A1 le devuelve la tiza al profesor) Ya sabía yo que la tienes tú. ¿En el rectángulo todos tenéis claro lo es “largo” y “ancho”?

A1: (señalando a una compañera) Ella se creía que el “largo” era esto, y el “ancho” era esto.

P: Normalmente se llama “largo” a la parte más larga, ¿no?

Varios alumnos: ¡Sííí!

P: ¿Y en el triángulo? (Profesor dibuja un triángulo en la pizarra)

A11: El largo es lo del medio, es el... diámetro.

P: La base, ¿todos sabéis cuál sería? ¿No?

A18: Sí, la de abajo.

P: ¿Y la altura?

A18: Una línea “pa abajo”

P: (Dibujando la altura del triángulo) Esto es la altura, ¿no? ¿Y esto que estoy dibujando ahora qué sería? (el profesor señala un lado del triángulo) ¿esto que sería?

A17: El lado.

P: El lado de triángulo, ¿no?

Varios alumnos: ¡Sííí!

P: En el caso del círculo ya lo vimos antes. Mirar aquí (profesor muestra un prisma de base rectangular). A ver... ¿qué medidas se pueden tomar aquí? El que quiera hablar, que levante la mano. Venga A1.

A1: Altura. Y ¿cuál más?

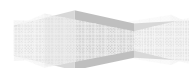
P: La altura (el profesor la indica sobre el prisma).

A1: La anchura.

P: La anchura (el profesor la indica).

A1: Y la base.

P: Y el largo de la base (el profesor lo indica sobre el prima). ¿Cuántas “superficies” tiene este prisma?



Varios alumnos: 6.

P: A las que hay por los lados, ¿cómo se les llama?

Varios alumnos: Laterales.

P: Caras laterales o superficies laterales, ¿no? ¿Y a la que hay debajo?

Varios alumnos: Bases.

P: Sería la base. Se supone que la figura estaría apoyada así (el profesor pone la figura como aparece en la Ficha 2). ¿Y en el caso del cono? Venga, A15.

A15: Una cara lateral y una base.

P: Una cara lateral o una superficie lateral, mejor dicho, y una base. Bueno, en la esfera, ¿cuántas superficies habéis puesto que tiene?

Varios alumnos: Una.

P: ¿Os ha quedado alguna duda? ¿Tenéis clara, ya, cuál es la diferencia entre longitud y superficie?

Todos los alumnos, salvo uno: ¡Sííí!

A15: ¡Nooo!

P: Dirigiéndose al alumno A15, ¿no lo tienes claro?

A15: ¡Ah! ¡Sí, sí!



Apéndice D.2: Transcripción de las Grabaciones en Video de la 4ª Sesión

I. Explicaciones del Profesor para rellenar Ficha 6

(En Gran Grupo)

Profesor: Atender que explique lo que tenéis que hacer. Como estáis viendo es una copia de la que hicisteis el último día. Lo que quiero que hagáis hoy es que entre todos en grupo corrijaís las fichas. ¿Todos tenéis boli rojo?

Alumnos: Sí (unos), No (otros).

P: En rojo o en azul, entre todos los vais corrigiendo. Y esta ficha que os voy a dar (Ficha 6) se rellena en grupo. Me vais poniendo lo que consideráis más correcto. Por ejemplo, imagináros que A11 puso en un ejercicio centímetros y se le olvidó poner centímetros cuadrados. Pues aquí lo corregís y en esta hoja me escribís: “A11 puso centímetros en lugar de centímetros cuadrados”.

(El profesor reparte la Ficha 6)

P: Esta ficha que estoy repartiendo la tenéis que rellenar en grupo. Tenéis media hora. ¡Vale!

(Profesor dibuja una representación de cada una de las unidades de medida en la pizarra)

P: Por si no tenéis clara alguna unidad de medida las he pintado aquí en la pizarra, aproximadamente. ¡A ver, atender un minuto! Aquí he pintado el milímetro, el milímetro es el grosor de la línea (señalando a la pizarra), un centímetro sería esto aproximadamente (señalando dibujo en la pizarra). Un decímetro sería esta distancia, que son 10 centímetros. Esto de aquí, un metro, ¿vale? Metro cuadrado sería la superficie de todo esto de aquí (señalando dibujo de la pizarra), decímetro cuadrado esto de aquí, centímetro cuadrado, esto de aquí, y milímetro cuadrado sería aproximadamente la superficie de este punto.

II. Puesta en común después de rellenar la Ficha 6

P: Atendéis aquí un segundo. Cuando pregunte algo, el que quiera contestar que levante la mano y no habléis todos a la vez. Por ejemplo, en el ejercicio 6.3 entre todos teníais que decidir cuál era la mejor unidad de medida para medir diferentes longitudes. Una

longitud que había que medir era el ancho de la puerta (el profesor la señala). ¡Que levante la mano quien quiera contestar! ¿A33?

A33: Centímetros.

P: Esa sería una buena idea. Alguien ha puesto otra cosa.

A19: Yo cuadrados.

P: ¿Creéis que esta longitud se puede medir en centímetros cuadrados?

Varios alumnos: ¡Nooo!

P: ¿Y en metros cuadrados se puede medir?

Varios alumnos: ¡Nooo!

P: ¿Por qué no?

A1: Porque no es una superficie.

P: Metros cuadrados es una unidad de superficie, y aquí no estamos midiendo una superficie, estamos midiendo una longitud. El grosor de un dedo, ¿en qué lo habéis medido?

A18: En centímetros.

P: El largo de un mando a distancia, ¿en qué lo habéis medido?

Varios alumnos: Centímetros.

Otros alumnos: Decímetros.

P: Si algunos habéis puesto decímetros también esta bien, puesto que un mando a distancia pude medir diez, doce, quince centímetros. Luego también se puede medir en decímetros. ¿Y el grosor de un libro?

Varios alumnos: Centímetros.

P: Centímetros. ¿Y si el libro es muy fino?

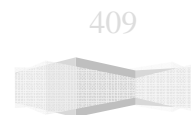
Varios alumnos: Milímetros.

P: Esas dos medidas estarían bien. ¿La distancia del techo al suelo?

Varios alumnos: Metros.

P: Eso está claro que sería en metros. ¿El largo de la clase?

Varios alumnos: Metros.



P: ¿Alguien ha puesto otra cosa?

A17: Decímetros.

P: Podría valer puesto que es prácticamente un decámetro. Pasamos al ejercicio 6.4. Atender que seguro que el día del examen metéis la pata. ¿La uña del dedo pulgar? ¿Qué unidad de superficie utilizaríais?

Varios alumnos: Centímetros cuadrados.

P: Centímetros cuadrados. Si la quisierais medir con mucha precisión se podría medir en milímetros cuadrados. ¿Y la pizarra?

Alumnos: Metros cuadrados.

P: ¿La pantalla de un MP4?

Varios alumnos: Centímetros cuadrados.

P: En centímetros cuadrados o si queréis aproximar mucho en milímetros cuadrados. ¿El suelo de esta habitación?

Alumnos: Metros cuadrados.

P: Otra cosa, en el ejercicio 6.5 teníais que poner la longitud del palmo de la mano. ¿Qué habéis puesto?

A10: Veintiuno.

P: Entorno a qué, de media, porque esta claro que para cada uno tendrá una medida distinta.

A21: Veinte centímetros.

P: Otra pregunta, el grosor de un dedo ¿cuánto mide?

A8: Dos centímetros.

P: ¿La anchura de una baldosa?

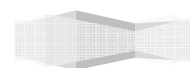
A21: Cincuenta centímetros.

P: ¿El largo de un pupitre?

A8: Setenta centímetros.

P: Los dos brazos abiertos, ¿cuánto miden, más o menos?

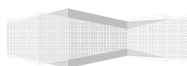
A10: Uno setenta y cinco.



P: ¿El largo del aula? Desde aquí hasta allí.

A17: Siete u ocho metros.

(Suena el timbre y se da por concluida la sesión)



APÉNDICE E: TRANSCRIPCIÓN DE ENTREVISTAS INDIVIDUALES

Apéndice E.1: Transcripción de la Entrevista Individual al Alumno A5

Profesor: He estado revisando las fichas que no entiendo muy bien voy a preguntarte. Siéntate si quieres. A ver, ¿cómo, por ejemplo, dibujarías un centímetro?

(La alumna lo dibuja en el folio)

A5: Así.

P: ¿Y un decímetro? ¿Cómo sería? Aproximadamente...

(La alumna lo dibuja en el folio)

P: ¿Desde aquí hasta aquí, aproximadamente? Y un milímetro, ¿cómo lo dibujarías tú?

(La alumna lo dibuja)

A5: Así.

P: Dibuja también un centímetro cuadrado.

(La alumna lo dibuja)

P: ¿Y un milímetro cuadrado?

(La alumna lo dibuja)

P: ¿Y un decámetro cuadrado sería?

(La alumna lo dibuja, utilizando su dedo para medir, mediante traslaciones del mismo)

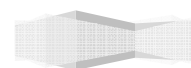
P: Vamos a ver (revisa las respuestas de la ficha, se levanta y dibuja una diana en la pizarra), esa diana, ¿qué superficie crees tú que tiene?

(La alumna esta pensativa)

P: Primero, ¿qué sería la superficie de la diana?

A5: Todo lo de dentro.

P: Muy bien, y ¿qué superficie crees tú que puede tener? Así, aproximadamente.



A5: Un decámetro.

P: ¿Decámetro? El decámetro, ¿cuánto mide?

A5: Decímetro.

P: ¿Cuánto mide un decámetro?

A5: Diez metros.

P: ¿Cuánto mide la superficie de la diana?

A5: (Hace como que cuenta) 2,5 decímetros cuadrados.

P: Es que habías puesto aquí, 5 centímetros cuadrados. Eso está mal, ¿no?

A5: Sí.

P: En este ejercicio (ejercicio II.5) me has puesto que la superficie del mapa es de 0,5 decámetros. ¿Qué es la superficie el mapa?

A5: Lo de dentro.

P: ¿Y serían 0,5 decámetros, su superficie?

A5: No.

P: Un decámetro son diez metros, ¿no?

A5: 0,5 decámetros cuadrados.

P: Y si lo mides en metros, ¿en qué unidad se mediría la superficie?

A5: En metros cuadrados.

P: Y si lo mides en metros cuadrados, ¿cuánto mediría?

A5: Eso, sería 0,5 metros cuadrados.

P: Podría decirme algún ejemplo que mida un decímetro cuadrado.

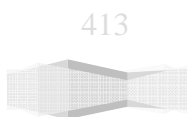
A5: Un estuche pequeño.

P: Vale. En este ejercicio (II.7) se pide que midas la superficie de una celdilla. ¿En qué unidad la medirías?

A5: En centímetros.

P: ¿En centímetros, milímetros, centímetros cuadrados, milímetros cuadrados...?

A5: En centímetros cuadrados.



P: Y, ¿cuánto mediría?

A5: 0,9.

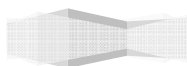
P: 0,9 centímetros cuadrados, ¿no?

(La alumna asiente con la cabeza)

P: Muy bien. Sabes hacerlo. Has tenido un poco de confusión con el decímetro, pero sabes hacerlo. Pues, ya te puedes ir a clase.

A5: Hasta luego.

P: Hasta luego.



Apéndice E.2: Transcripción de la Entrevista Individual al Alumno A6

Profesor: Te voy a preguntar algunas cosas que no tengo claras. Siéntate aquí.

A6: Yo lo hice mal, maestro.

P: ¡Lo hiciste mal! ¿Por qué?

A6: A mí me salió mal.

P: Vamos a ver... es que no tengo claro si conoces algunas longitudes. Por ejemplo, tu sabes cuánto mide un centímetro.

A6: Sí.

P: Dibújalo.

(La alumna lo dibuja)

A6: Algo así más o menos.

P: Sí, más o menos. Y un decímetro, ¿qué sería?

A6: ¡Ya!, no sería el cuadrado ese (alumna describe un cuadrado imaginario con los dedos)

P: ¿Eso sería un decímetro o un decímetro cuadrado?

A6: Es al cuadrado, pero la longitud es un decímetro.

P: Eso.

(La alumna lo dibuja)

A6: Algo así.

P: Esto sería un centímetro y esto un decímetro (señalando en el dibujo hecho por la alumna). Y un milímetro ¿cómo sería?

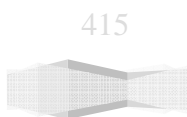
(La alumna lo dibuja)

A6: Sería así, pequeño, pequeño.

P: ¡Vale! ¿Y un centímetro cuadrado?

(La alumna lo dibuja)

A6: ¡Algo así!



P: Y de esto (señalando el dibujo hecho por la alumna), ¿qué sería el centímetro cuadrado? ¿Los bordes? ¿Lo de dentro?

A6: Esta superficie (señalando).

P: La superficie de dentro. Y un decímetro cuadrado, ¿cómo sería entonces?

A6: ¿Lo dibujo?

P: Sí.

(La alumna lo dibuja)

A6: Sería algo así.

P: Mas o menos. Bueno, vamos a repasar lo que contestaste en algunas preguntas. En este ejercicio preguntaba ¿cuánto es la superficie de la pizarra? ¿Qué es la superficie de la pizarra? ¡Señálamela!

A6: Es el verde este. Lo que hay dentro.

P: Y está bien puesto 3 metros, o ¿te has equivocado?

A6: ¿cuadrados? ¿no eran cuadrados?

P: Eso es, ¿por qué son cuadrados?

A6: Porque en la superficie es al cuadrado.

P: Pero, no tiene por qué ser cuadrada.

A6: Algo así, pero es lo que está dentro.

P: Aquí se te ha olvidado ponerle el cuadrado. A ver... ¿qué más tenemos? (repasando la ficha que contestó la alumna) Objetos que tienen una superficie aproximada de un centímetro cuadrado. Y pusiste, la capucha de un boli. A ver, señálame eso.

A6: Quería decir algo así, si esto fuera recto. (la alumna señala una parte de la capucha del bolígrafo)

P: Y sería, ¿lo de dentro de aquí?

A6: Sí.

P: ¿Y para la diana?

A6: ¿El círculo ese?

P: Sí.



A6: Pues 20 centímetros.

P: ¿Centímetros? ¿Es la superficie?

A6: Cuadrados.

(Profesor se levanta y dibuja diana en la pizarra)

P: ¿Cuadrados? ¿Por qué cuadrados? Imagínate que la diana es esto. ¿Qué es la superficie?

A6: Esto (señalando lo de dentro).

P: Lo de dentro, ¿no?

A6: Sí. Eso se mide al cuadrado. Es que cuando hago el examen no me concentro mucho y después me doy cuenta. Así hago siempre.

P: Por eso te he preguntado, porque yo sé que tú lo sabías.

A6: En los exámenes no sé qué me pasa porque los ejercicios los sé hacer y en el examen me equivoco.

P: Hay una niña que me ha puesto, una compañera tuya que me ha puesto 20 decímetros cuadrados. ¿Tú qué crees que sería mejor? ¿20 decímetros cuadrados o 20 centímetros cuadrados?

A6: Yo creo que son 20 centímetros cuadrados.

P: Mejor que 20 decímetros cuadrados, ¿no?

A6: Sí. Mira si fuera 2 decímetros, si esto fuera un decímetro y esto otro (señalando sobre el papel).

P: Dibújalo encima (indicándole que lo dibuje en la pizarra)

A6: Esto era 2 decímetros, pero no veinte.

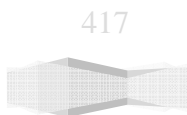
P: Dibújalos. Quiero que dibujes las líneas o los cuadrados, cómo lo recubrirías para medir la superficie.

A6: Yo así lo mido, ¿sabes?

(Alumna dibuja un cuadrado circunscrito al círculo)

P: ¡Ahhh! Lo metes en un cuadrado.

A6: Sí.



P: ¿Y el lado cuanto mediría?

A6: ¿Esto? (señalando el lado del cuadrado)

P: Sí.

A6: Ummm, cuatro decímetros. O cuarenta centímetros que es lo mismo.

P: ¿El lado?

A6: Sí. Pero la diana era más pequeña. Era algo así, maestro. (la alumna dibuja un círculo de dimensiones más pequeñas)

P: Y ¿para esa que has dibujado?

A6: Sería algo así. (La alumna dibuja un cuadrado circunscribiendo al círculo).

P: ¿Cuánto mide la superficie?

A6: Veinte centímetros.

P: Pero, veinte centímetros es la distancia, ¿no?

A6: Sí.

P: ¿Y la superficie?

A6: Es que la superficie es todo esto (señala el interior del círculo).

P: Eso es, Sí.

A6: Entonces es al cuadrado, ¿no? ¿Me entiendes?

P: Sí, pero lo que yo no entiendo es cómo mides la superficie.

A6: Es que allí hay dos y algo de decímetros por lado.

P: Entonces aquí hay uno y dos decímetros (el profesor los dibuja en la pizarra sobre el cuadrado) en este lado, y en este lado también hay dos y algo.

A6: Sí es que son iguales.

P: Y entonces, ¿cuánto saldría?

(Profesor dibuja una retícula sobre el dibujo de la pizarra)

P: Esto ¿cuánto sería? (señalando uno de los cuadrados de la retícula)

A6: Un decímetro.

P: Cuadrado, ¿no?



A6: Sí.

P: ¿Y este? (señalando otro cuadrado)

A6: Otro decímetro cuadrado.

P: ¿Y este? (señalando un tercer cuadrado)

A6: Otro decímetro cuadrado. Y mira,... estos dos trozos hacen otro decímetro cuadrado y estos dos hacen otro decímetro cuadrado.

P: Entonces, en total ¿cuántos hay?

A6: seis.

P: Entonces la superficie es 6 decímetros cuadrados, ¿no?

A6: Sí.

P: ¿Eso cuánto sería en centímetros cuadrados?

A6: 600. Se multiplica por cien.

P: Y aquí, que me has puesto que la superficie del mapa de España es de un metro.

A6: Sí. Al cuadrado.

P: ¿Sería un metro o un metro cuadrado?

A6: Un metro cuadrado.

P: Entonces ahí te ha faltado el cuadrado, ¿no?

A6: ¡Ya!

P: A ver, dibújame un milímetro cuadrado. ¿Sabrías dibujarlo?

A6: Sí. Algo así.

(la alumna dibuja un milímetro cuadrado en el folio)

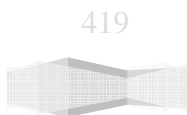
P: Entonces una celdilla de estas (señalando las celdillas del panel de abeja del ejercicio II. 7) es lo mismo que un milímetro cuadrado.

A6: No.

P: Entonces, ¿cuántos milímetros cuadrados pueden hacer falta para recubrir la celdilla?

A6: De aquí hasta aquí hay dos milímetros.

P: Y para arriba otros dos, ¿no?



A6: Sí.

P: Si lo recubres con cuadritos cuantos te saldrían.

A6: Cuatro.

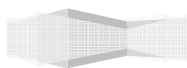
P: Entonces la superficie es 4 milímetros cuadrados, ¿no?

A6: Sí.

P: Vale. Pues ya hemos terminado.

A6: ¡Hasta luego!

P: ¡Hasta luego!



Apéndice E.3: Transcripción de la Entrevista Individual al Alumno A23

Profesor: He estado revisando las fichas y hay cosas que has puesto mal, pero yo sé que tú las sabes hacer. ¡Siéntate! Por ejemplo, a ver, dibújame un centímetro a ver si sabes más o menos como sería.

(La alumna dibuja un centímetro en el folio)

P: Muy bien. Y ¿cuánto sería un decímetro?

A23: Pues diez centímetros.

P: Dibújalo.

(La alumna lo dibuja)

A23: O no tanto.

P: Aproximadamente eso, ¿no? (la alumna escribe junto a la línea que representa un decímetro: “10 dm”) ¿Eso serían 10 dm o uno?

A23: Uy, perdona. (La alumna tacha el cero y queda: “1 dm”).

P: ¿Y un milímetro? Dibújalo también.

(La alumna lo dibuja)

P: Un milímetro, vale. Y un centímetro cuadrado, ¿cómo lo dibujarías?

(La alumna lo dibuja)

A23: ¿no?

P: Vale. ¿Y un decímetro cuadrado?

A23: Sería un cuadrado de diez centímetros por diez centímetros.

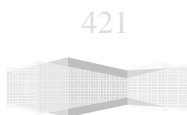
P: Vale. Bueno, vamos a repasar lo que has contestado (profesor coge la ficha que rellenó la alumna). Por ejemplo, en la pregunta II.1. pones que la superficie de la pizarra es de $1,50^2 \cdot 2,50^2$. ¿A qué te refieres? Es que no lo entiendo.

A23: Así (señalando a la pizarra en horizontal) y así (señalando a la pizarra en vertical).

P: Pero la superficie, ¿qué es? Lo que miden los bordes, ¿o qué?

A23: (Pensativa)

P: ¿Qué es la superficie de la pizarra?



A23: Es que quería multiplicar el largo, dos metros cincuenta, por un metro y medio de ancho.

P: Pero, ¿cuál es la superficie?

A23: Todo (señalando con la mano).

P: Todo lo de dentro. Ah, bien, si lo sabes. Y, ¿en qué unidad lo pondrías?

A23: Pues, en..., en metros cuadrados.

P: En metros cuadrados, eso es. Pero lo has hecho mal, has puesto el cuadrado aquí, ¿no? (señalando en la ficha)

A23: Es que son 2.50 por 1.50 metros cuadrados.

P: Es que hay una compañera tuya que pone que el resultado son $1,50 \cdot 2,50 \text{ m}^2$ (el profesor lo escribe en el folio). ¿Cuál crees tú que está bien?

A23: Esto (señalando lo que ha escrito el profesor).

P: ¿Y esto? (señalando hacia la respuesta que ella había dado)

A23: (La alumna sonríe, mira la pizarra) Yo creo que sobra.

P: ¿Qué sobra?

A23: No se. Yo creo que está bien.

P: Si yo preguntara, a ver, dibújame un metro cuadrado (señalando a la pizarra).

(La alumna dibuja un cuadrado de grandes dimensiones en la pizarra)

A23: Así.

P: Entonces eso es un metro cuadrado. Si eso es un metro cuadrado, ¿cuánto mediría toda la pizarra?

A23: Dos metros y pico.

P: Muy bien. Veo que lo sabes. Y en este ejercicio (II.3) me pones $30 \cdot 30 \text{ cm}^2$.

A23: ¡Eso ni yo lo entiendo!

P: A ver, vamos a dibujar en la pizarra una diana aproximadamente (el profesor la dibuja). ¿Cómo calcularías su superficie?

A23: Es que no tengo ni radio, ni diámetro...

P: ¿Cuál es la superficie? Señálamela en la diana. ¿Qué parte de la diana sería?



A23: (Pensativa...)

P: ¿Qué sería la superficie? ¿Todo el borde, lo de dentro?

A23: Lo de dentro.

P: ¿En qué unidad lo medirías?

A23: No tengo ni idea.

P: Pero, ¿serían unidades de este tipo (señalando lo que ella había contestado) cuadradas?

A23: Centímetros cuadrados.

P: En centímetros cuadrados podría ser, ¿no? No tienes idea de cómo lo podrías hacer.

A23: (La alumna dibuja el diámetro de la diana verticalmente) Pues, no sé, medir esto.

P: ¿Cuánto mediría la recta esa?

A23: 30 cm.

P: 30 cm es el largo ese. Entonces la superficie, ¿cuánto mide?

A23: ¿Tendría que medir también esto? (señalando el diámetro de la diana horizontalmente)

P: No sé. Tú dime lo que harías.

A23: ¿No sería 40?

P: Señala ahí lo que tú crees que mide 40.

A23: Esto. (Señalando al diámetro vertical de la diana).

P: El diámetro ese serían 40 centímetros. ¿Y la superficie?

A23: Tendría que usar la fórmula para medirlo todo.

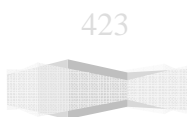
P: Sí, pero sin usar la fórmula, ¿cómo lo harías?

A23: No tengo ni idea. ¿Con decímetros cuadrados?

P: Dibújalo ahí a ver cómo sería.

(La alumna dibuja un decímetro y comienza a dividirlo en centímetros)

P: No hace falta que dibujes los centímetros. Pero eso ¿sería un decímetro o un decímetro cuadrado?



(La alumna completa un cuadrado con una superficie aproximada de un decímetro cuadrado)

P: Eso sería un decímetro cuadrado. Entonces, teniendo en cuenta que eso es un decímetro cuadrado, ¿cuánto mediría la superficie de la diana?

A23: Uno y medio.

P: Más o menos. Podría ser. (El profesor continúa repasando lo que la alumna contestó en la ficha). Entonces, ¡mira! Objetos con una superficie aproximada de un decímetro cuadrado, o sea como ese (señalando en la pizarra el dibujo de un decímetro cuadrado que hizo la alumna) que es un decímetro cuadrado.

A23: ¡Ay maestro! Yo me refería a un diámetro, que son diez metros.

P: ¡Ah! En un decámetro cuadrado pensabas. Vale, vale. Te has confundido ahí. Y aquí me has puesto (ejercicio II.7) que la superficie de una celdilla es de “10 mm”.

A23: Lo he puesto así porque no sabía cómo calcularlo.

P: Bueno, me has dicho que esto es un milímetro (señalando el milímetro que dibujo la alumna en el folio).

A23: Sí.

P: Y, ¿un milímetro cuadrado?

(La alumna lo dibuja en el folio)

P: Bien. Entonces, la superficie ¿en qué la medirías, en milímetros o milímetros cuadrados?

A23: En milímetros cuadrados.

P: Entonces, se te ha olvidado el cuadrado, ¿no?

A23: Sí.

P: Pero, lo sabes, que se mide en milímetros cuadrados, ¿no?

(La alumna asiente con la cabeza)

P: Muy bien. Pues ya está.

A23: ¿Puedo volver a clase?

P: Sí. Muchas gracias.



A23: De nada.



APÉNDICE F: TIPOS DE ERRORES DETECTADOS

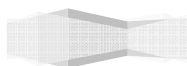
Apéndice F.1: Tipos de Errores Detectados en las Tareas Tipo A de la Evaluación Inicial

Ai	I.1	I.3	I.5	I.7	II.1	II.3	II.5
A1	RRA	RRA	DI	DI	E2, E5	E2, E5	E2, E5
A2	RRA	RRA	RRA	RRA	E2, E5	E10, E2	E2
A3	RRA	DI	E7	E7, E9i	E2, E5	E5	E11
A4	E8	RRA	E7	RRA	E10, E2, E5	E2, E5	E10, E5, E2
A5	RRA	E3	E7	E9a	E11	E7	RRA
A6	E8	RRA	E7	RRA	E3, E2, E5	E2	DI
A7	RRA	RRA	DI	E4	E2, E5	E2, E5	NC
A8	RRA	NE	RRA	NE	DI	DI	DI
A9	RRA	E7	E7	RRA	RRA	E7	E7
A10	DI	E9m	RRA	RRA	E2, E5	NE	NC
A11	RRA	RRA	RRA	RRA	E5	E2, E5	E1, E11, E5
A12	RRA	RRA	E9m	DI	E5, E11	E5	E10, E4, E2
A13	E7, E1	RRA	E9m	E7	E2, E5, E6	E2, E5	E2, E3, E5
A15	E7	DI	E7	E9a	E2, E5	E2, E5	E5
A16	RRA	E7	RRA	DI	RRA	E2, E5	NC
A17	E1, E9m	RRA	RRA	RRA	E10	E10	E10
A18	RRA	DI	RRA	RRA	E5	E10, E4	E5
A19	E1, E2	RRA	E7	E9m	E11	E11	E5, E11
A21	RRA	RRA	RRA	E8	E11, E5	E3, E5	E8
A22	E4	NC	NE	E7	NC	NC	NC
A23	E4	RRA	DI	E4	E4	E2, E5	E2, E5
A24	RRA	E7	E3	DI	E10, E1	E1, E6, E11	DI
A25	RRA	RRA	E7	RRA	E11	E2, E5	NC
A26	RRA	RRA	RRA	E7	E1, E5	E2, E5	E5, E2
A27	E7, E1	RRA	DI	DI	DI	DI	DI
A28	DI	NC	RRA	NE	NE	NE	NE



**Apéndice F.2: Tipos de Errores Detectados en las Tareas Tipo A de la Evaluación
Final**

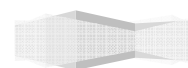
Ai	I.1	I.3	I.5	I.7	II.1	II.3	II.5
A1	E7	RRA	DI	RRA	E2, E5	E9m	NC
A2	DI	DI	DI	DI	E5	DI	DI
A5	RRA	E7	E7	RRA	RRA	NE	E2, E5
A6	E7	RRA	RRA	RRA	E2, E5	E2, E5	E2, E5
A7	RRA	E7	E7	RRA	E6	E8	DI
A8	RRA	RRA	RRA	RRA	E10	E7	E1, E7
A9	RRA	E7	RRA	RRA	RRA	RRA	E11
A10	RRA	RRA	DI	DI	NE	NC	NC
A11	RRA	E7	E7	RRA	RRA	E7	E11
A13	RRA	E3	E7	RRA	DI	E5	DI
A14	RRA	E7	NE	E9i	E2	NE	NE
A15	NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE
A16	RRA	RRA	RRA	RRA	DI	E2	DI
A17	RRA	RRA	DI	RRA	RRA	E10	NC
A18	DI	DI	DI	DI	RRA	RRA	DI
A19	RRA	RRA	RRA	E7	E10	E2	DI
A21	RRA	RRA	RRA	RRA	E8	E11	E8
A22	RRA	RRA	NE	NC	RRA	NC	NC
A23	DI	DI	NE	RRA	E10, E4	E11	DI
A24	RRA	RRA	E7	E9a	RRA	E11	RRA
A25	RRA	RRA	DI	RRA	E5	E1,E11	E5
A26	RRA	RRA	RRA	RRA	RRA	E10	DI
A27	RRA	RRA	DI	E7	E11	RRA	E2, E5
A28	RRA	RRA	RRA	RRA	RRA	RRA	E11
A31	RRA	NE	RRA	RRA	NE	NE	E11
A33	RRA	NE	DI	E7	RRA	RRA	E7



APÉNDICE G: UNIDADES DE MEDIDA UTILIZADAS POR LOS ALUMNOS

Apéndice G.1: Unidades de Medida Utilizadas para Expresar el Resultado en las Tareas de Estimación Tipo A de la Evaluación Inicial

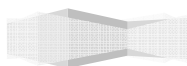
Alumnos	I.1	I.3	I.5	I.7	II.1	II.3	II.5
A1	m	cm	cm	m	m	cm	cm
A2	m	cm	cm	cm	m	cm ²	m ²
A3	m y cm	cm	mm	m	m	cm	cm x m
A4	m	cm	cm	m	m	cm	cm
A5	m	m	cm	m	m x m	cm ²	m ²
A6	m	cm	cm	m	m	cm ²	m ²
A7	m	cm	m	NI	cm	cm	N.C.
A8	m	cm	cm	m	cm ²	cm ²	cm ²
A9	m	dm	cm	NI	m ²	cm ²	m ²
A10	m	cm	cm	m	m	cm x cm	N.C.
A11	m	cm	cm	m	m	m	m
A12	m	cm	cm	m	m	cm	NI
A13	m	cm	cm	m	dm	diametros	diametros
A15	m	cm	cm	m	m	cm	m
A16	m	cm	cm	m	m x m	cm	N.C.
A17	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	m ²
A18	m	cm	dm	m	m	NI	m
A19	m x cm	cm	cm	m	m x m	cm x cm	cm
A21	m	cm	cm	m	m	cm	m ²
A22	NI ^a	NC ^b	cm	m	N.C.	N.C.	N.C.
A23	NI	cm	cm	NI	NI	cm	cm y m
A24	m	cm	cm	m	m ²	cm ² o m ²	m ²
A25	m	cm	cm	m	m	cm	N.C.
A26	m	cm	cm	m	m	cm	cm



Alumnos	I.1	I.3	I.5	I.7	II.1	II.3	II.5
A27	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	m ²
A28	dm	NC	cm	m	m ²	dm ²	dm ²

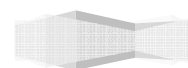
NI = No Indica.

NC = No Contesta.



**Apéndice G.2: Unidades de Medida Utilizadas para Expresar el Resultado en las
Tareas de Estimación Tipo A de la Evaluación Final**

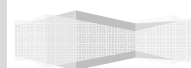
Alumnos	Tarea I.1	Tarea I.3	Tarea I.5	Tarea I.7	Tarea II.1	Tarea II.3	Tarea II.5
A1	m	cm	cm	m	m	cm ²	cm ²
A2	cm	cm	cm	m	m	cm ²	m ²
A5	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	dam
A6	m	cm	cm	m	m	cm	m
A7	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	m ²
A8	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	m ²
A9	m	cm	dm	m	m ²	dm ²	dm ²
A10	m	cm	cm	m	m ²	NC	NC
A11	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	cm ²
A13	m	m	cm	m	m ²	dm	dm ²
A14	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	cm ²
A15	m	cm	dm	m	m ²	cm ²	m ²
A16	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	cm ²
A17	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	NC
A18	m	cm	cm	m	m ²	dm ²	m ²
A19	cm	cm	cm	m	cm ²	cm ²	cm ²
A21	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	m ²
A22	m	cm	cm	NC	m ²	NC	NC
A23	m	cm	cm	m	NI	cm ²	m ²
A24	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	cm ²
A25	m	cm	cm	m	m	cm ²	cm
A26	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	m ²
A27	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	m
A28	m	cm	dm	m	m ²	dm ²	m ²
A31	m	cm	cm	m	m ²	cm ²	dm ²
A33	cm	cm	cm	m	m ²	cm ²	cm ²



APÉNDICE H: REFERENTES UTILIZADOS EN LAS COMPARACIONES

Apéndice H.1: Referentes Utilizados en las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Inicial

Alumnos	Tarea I.1		Tarea I.3		Tarea I.5		Tarea I.7	
A1	RP	Una cuerda	UM	Cm	DI	DI	DI	DI
A2	RA	Una regla de 50 cm	RP	Vetas de la madera	UM	Cm	RP	La ventana
A3	RP	Una pierna	RP	Un dedo	RP	Bolígrafo	RP	Su estatura
A4	UM	m	RA	Una regla	RA	Regla	UM	m
A5	UM	m	RP	Los brazos extendidos	RP	Un dedo	RP	La mesa
A6	RP	pupitre	RA	Una regla	RA	Un caramelo	RP	Pupitre
A7	RP	Pupitre	RP	Un dedo	RP	Dedos	DI	DI
A8	RP	Su estatura	NC	NC	RP	Bolígrafo	NE	NE
A9	RA	Mesa de estudio	RA	Una moneda	RA	Móvil	RP	La ventana
A10	DI	DI	RA	Cuadritos de hoja de libreta	UM	Cm	UM	m
A11	RP	Paso, palmo	RP	Capucha del bolígrafo	RP	La capucha del pegamento	RP	Ventana
A12	RP	Su estatura	RA	Figuras que usaban en tecnología	RP	El grosor de la mesa	DI	DI
A13	RP	Paso	RP	Una mesa igual	RP	El grosor de la mesa	RP	Un paso
A15	RP	Pupitre	DI	DI	RP	La mano	RA	Estatura de una persona media
A16	UM	m	RP	Una mesa igual	RA	Una regla	RA	Un niño
A17	RP	Neón	RP	Una goma	RA	Ratón del ordenador	RP	Un neón



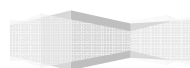
A18	RP	Estatura del profesor	RP	Su dedo	UM	Cm	RP	Altura de la clase
A19	RA	Un niño	RP	Grosor del bolígrafo	RP	Su mano	RA	Una regla
A21	RP	Sus brazos	RP	Un dedo	RP	Un dedo	UM	m
A22	RP	Estatura de una persona	NC	NC	NE	NE	RP	Ventana
A23	RA	Una mesa	RP	Una mesa igual	DI	DI	RP	Una cuerda
A24	RP	Su estatura	RP	La punta de un lápiz	RP	Una goma	RP	Su estatura
A25	RP	Baldosas	RP	Una goma	RP	Su tippex	RP	Mesa del profesor
A26	RA	Una mesa	RP	Silla	RP	Su bolígrafo	RP	La ventana
A27	RA	Un cuadro	RA	Una regla	RP	Los dedos	DI	DI
A28	DI	DI	NC	NC	RP	Un bolígrafo	NE	NE

Apéndice H.2: Referentes Utilizados en las Tareas de Estimación de Longitudes de la Evaluación Final

Alumnos	Tarea I.1		Tarea I.3		Tarea I.5		Tarea I.7	
A1	RP	Pupitre	RP	Dedo	DI	DI	RP	Ventana
A2	DI	DI	DI	DI	DI	DI	DI	DI
A5	RP	Pupitre	RP	Dedo	RP	Dedo	RP	Puerta
A6	RP	Pupitre	UM	cm	RP	Borrador	RP	Pupitre
A7	RP	Pupitre	RP	Dedo	RP	Dedo	RP	Ventana
A8	RP	Piernas	RP	Dedo	RP	Bolígrafo	RP	Mesa
A9	RA	Estatura de su hermana	RP	Dedo	RP	Pomo de la puerta	RP	Ventana
A10	UM	m	RA	Cuadritos hoja	DI	DI	UM	m
A11	RP	Pupitre	RP	Capucha del bolígrafo	RP	Mano	RP	Ventana
A12								
A13	RP	Su paso	RP	Sus pasos	RP	Regla	RP	Ventana
A14	RP	Puerta	RP	Goma	NE	NE	RP	Puerta



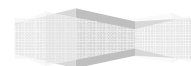
A15	NE		NE	NE	NE	NE	NE	NE
A16	RP	Su estatura	RA	Regla	RP	Dedo	RP	Estatura profesor
A17	UM	m	UM	cm	DI	DI	RP	Ventana
A18	DI	DI	DI	DI	DI	DI	RP	Puerta
A19	RP	Dos mesas	RP	Dedo	UM	Cm	RP	Ventana
A21	UM	m	RP	Dedo	UM	Cm	RP	Ventana
A22	RP	Su estatura	RP	Dedo	NE	NE	NC	NC
A23	DI		DI	DI	NE	NE	RP	Ventana
A24	RP	Su estatura	RP	Dedo	RA	Calculadora	RP	Su estatura
A25	RP	Las baldosas	RP	Goma	DI	DI	RP	Una columna
A26	RP	La ventana	RP	Dedo	RP	Tippex	RP	Ventana
A27	RP	Las baldosas	UM	cm	DI	DI	RP	Ventana
A28	RP	Brazos abiertos	RP	Uña	RP	Bolígrafo	RP	Brazos abiertos
A31	RP	Paso	NE	NE	UM	Dm	RP	Ventana
A33	RP	Pupitre	NE	NE	DI	DI	RP	Ventana



APÉNDICE I: ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR LOS ALUMNOS

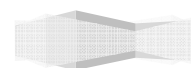
Apéndice I.1: Estrategias Utilizadas en las Tareas de Estimación Tipo A de la Evaluación Inicial

Alumnos	I.1	I.3	I.5	I.7	II.1	II.3	II.5
A1	1r	2a	DI	DI	EI	EI	EI
A2	2a	2a	3a	1r	EI	6c	6c
A3	2a	2b	1	1r	EI	EI	6d
A4	2a	2a	1	2a	FE	FE	FE
A5	1	1	1	2a	6b	1	DI
A6	2a	1r	2a	2a	EI	EI	DI
A7	2a	1	3a	DI	EI	EI	NC
A8	1r	NC	1r	NE	6a	6c	6c
A9	1	1	1	1r	6a	1	2b
A10	DI	2a	2a	2a	EI	6d	NC
A11	4a	1	5b:DI,3a	2ar	6a	6c	5b: 6c
A12	1r	1	2a	DI	6a	6c	FE
A13	2a	1	2a	3a	EI	EI	EI
A15	2a	DI	1	1r	EI	EI	DI
A16	1	1	1	DI	6a	EI	NC
A17	2a	1	1	2a	FE	FE	FE
A18	1	1	2a	2b	5a:6a	FE	DI
A19	1	2a	1	3a	6a	6d	6c
A21	1	3a	3a	5a:1	6a	6a	6c
A22	1	NC	NE	2a	NC	NC	NC
A23	1	1	7a	1	6a	EI	FE
A24	1r	1r	1	1r	FE	6c	DI
A25	2a	1r	1	2a	6a	EI	NC
A26	1	1	1	2a	6a	FE	EI
A27	2a	2a	3a	DI	DI	DI	DI
A28	DI	NC	1r	NE	NE	NE	NE



**Apéndice I.2: Estrategias Utilizadas en las Tareas de Estimación Tipo A de la
Evaluación Final**

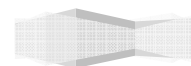
Alumnos	I.1	I.3	I.5	I.7	II.1	II.3	II.5
A1	2a	2a	DI	1r	EI	2a	2a
A2	DI	DI	DI	DI	DI	DI	DI
A5	2a	1	2ar	1r	6a	NE	NE
A6	2a	2a	1	2a	EI	EI	DI
A7	2a	DI	DI	2a	5ar:6a	5a	DI
A8	2a	1r	1r	2a	FE	1	5a
A9	1	2a	1	2a	6a	6a	6c
A10	1	2a	DI	2a	NE	NC	NC
A11	1r	1	1	2a	6a	1	5b: 6c
A13	1r	EI	DI	2ar	DI	6a	DI
A14	1r	1r	NE	2a	EI	NE	NE
A15	NE	NE	NE	NE	NE	NE	NE
A16	1r	DI	1r	DI	DI	6c	DI
A17	2a	3a	DI	2a	6a	FE	NC
A18	DI	DI	DI	1	6a	6a	DI
A19	4a	2a	2a	2a	FE	6d	DI
A21	2a	3a	5b	2a	2a	6a	2a
A22	1r	1r	NE	NC	6a	NC	NC
A23	DI	DI	NE	2a	FE	6d	DI
A24	1r	1r	1	1r	6a	6a	6c
A25	2a	1	DI	1r	6a	6c	6c
A26	1r	1	1r	2a	6a	DI	DI
A27	2a	3a	DI	2a	6a	6a	DI
A28	2a	2a	1r	2ar	6a	6c	6c
A31	1	NE	1	1r	NE	NC	6c
A33	2a	NE	7b	2a	6a	6a	2b



APÉNDICE J

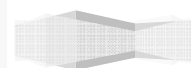
Apéndice J.1: Cuadro Resumen de Respuestas a las Tareas Usadas para Valorar la Capacidad Estimativa en Longitud

Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores
A5	L.1.1	1 m	-28.57	1	m	
	L.1.2	1 m		1	Brazos extendidos	E3
	L.1.3	2 cm	-78.72	1	Dedo	E7
	L.1.4	1.5 m	-50	2a	Mesa del profesor	E7,E9
	L.2.1	10 cm	-75			
	L.2.2	20 cm	-71.43			
	L.2.3	10 m	0			
	L.3.1	2 m	-2.44	1r	Su estatura	
	L.3.2	2.5 cm	-24.24	1	Dedo	
	L.3.3	20 cm	-45.05	2a	Palmo	E7
	L.4.1	1 m	-28.57	2a	Pupitre	
	L.4.2	1 cm	-50	1	Dedo	E7
	L.4.3	6 cm	-36.17	1r	Dedo	E7
	L.4.4	2.5 m	-16.67	1r	Puerta	
A8	L.1.1	1.5 m	+7.14	1r	Su estatura	
	L.1.2	5 cm	+150	NE		NE
	L.1.3	10 cm	+6.38	1r	Un bolígrafo	
	L.1.4	2.5 m	-16.67	NE		
	L.2.1	1 mm	-99.75			E3
	L.2.2	50 cm ²				E5
	L.2.3	15 m ²				E5
	L.3.1	2 m	-2.43	1r	Estatura del profesor	
	L.3.2	4 cm	+21.21	1r	Su dedo	
	L.3.3	40 cm	+9.89	2a	Su mano	

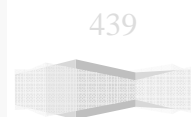


Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores
	L.4.1	1.5 m	+7.14	2a	Una pierna	
	L.4.2	2 cm	0	1r	Su dedo	
	L.4.3	12 cm	+27.66	1r	Un bolígrafo	
	L.4.4	3 m	0	2a	DI	
A13	L.1.1	2 m	+42.86	2a	Un paso	E7
	L.1.2	2 cm	0	1	Grosor de otra mesa	
	L.1.3	6.5 cm	-30.85	2a	Grosor de la mesa	E9
	L.1.4	4 m	+33.33	2a	Un paso	E7
	L.2.1	dm				
	L.2.2	dm				
	L.2.3	dam				
	L.3.1	2.5 m	+21.95	2a	Un paso	
	L.3.2	3 cm	-9.09	1	Una regla	
	L.3.3	5 dm	+37.63	2a	Un estuche	E7
	L.4.1	1.3 m	-7.14	2a	Un paso	
	L.4.2	1 m ^b			Un paso	E3
	L.4.3	5 cm	-46.81	1	Una regla	E7
	L.4.4	2.75 m	-8.33	2a	Una ventana	
A15	L.1.1	2 m	+42.86	2a	Pupitre	E7
	L.1.2	3 cm	+50	DI		
	L.1.3	5 cm	-46.81	DI		
	L.1.4	2 m	-33.33	1r	Estatura de una persona	E9
	L.2.1	5 cm	-87.5			
	L.2.2	1.5 m	+114.29			
	L.2.3	9 m	-10			
	L.3.1	2 m	-2.44	1	Estatura de una persona	
	L.3.2	2 cm	-39.39	2a	Un dedo	E7
	L.3.3	20 cm	-45.05	2a	Un palmo	E7

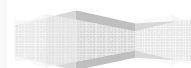
Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores
	L.4.1	1 m	-28.57	NE		
	L.4.2	2 cm	0	NE		
	L.4.3	1 dm	+6.38	NE		
	L.4.4	2.5 m	-16.67	NE		
A17	L.1.1	1.5 m	+7.14	2a	Un neón	
	L.1.2	2 cm	0	1	Una goma	
	L.1.3	10 cm	+6.38	1	Ratón del ordenador	
	L.1.4	2.5 m	-16.67	2a	Un neón	
	L.2.1	3 dm	-25			
	L.2.2	1.25 m	+78.57			
	L.2.3	3 dam	200			
	L.3.1	2.20 m	+7.32	5b		
	L.3.2	3 cm	-9.09	3a	UM: centímetro	
	L.3.3	33 cm	-9.34	2ar	Ancho del folio	
	L.4.1	1.5 m	+7.14	3a	UM: metro	
	L.4.2	2 cm	0	3a	UM: centímetro	
	L.4.3	15 cm	+59.57	DI		
	L.4.4	3 m	0	2a	La ventana	
A19	L.1.1	1 m x 30 cm				E2
	L.1.2	2 cm	0	2a	Grosor de un bolígrafo	
	L.1.3	5 cm	-46.81	1	Mano	E7
	L.1.4	1.20 m	-60	3a	Una regla	E9
	L.2.1	15 cm	-62.5			
	L.2.2	60 cm	-14.29			
	L.2.3	18 m	80			
	L.3.1	2 m x 1 m				E2
	L.3.2	3 cm	-9.09	3a	UM: centímetro	
	L.3.3	45 cm	+23.63	3a	UM: centímetro	
	L.4.1	1.50 m	+7.14	4a	Dos mesas	
	L.4.2	2 cm	0	2a	Dedo	



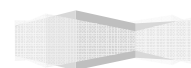
Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores
	L.4.3	10 cm	+6.38	1	Una regla	
	L.4.4	2 m	-33.33	2a	ventana	E7
A21	L.1.1	1.5 m	+7.14	1	Brazos extendidos	
	L.1.2	2.5 cm	+25	3a	Dedo	
	L.1.3	9 cm	-4.26	3a	Dedo	
	L.1.4	4 m	+33.33	5a	UM: metro	E7
	L.2.1	5 dm	+25			
	L.2.2	8 dm	+14.29			
	L.2.3	9 m	-10			
	L.3.1	2 m	-2.44	2a	UM: metro	
	L.3.2	3 cm	-9.09	2a	UM: centímetro	
	L.3.3	41.4 cm	13.74	6a	UM: centímetro	
	L.4.1	1.5 m	+7.14	2a	UM: metro	
	L.4.2	2.5 cm	+25	3a	Dedo	
	L.4.3	10 cm	+6.38	3a	Dedo	
	L.4.4	3 m	0	2a	Ventana	
A23	L.1.1	1.50		1	RA: Otra mesa	E5
	L.1.2	2 cm	0	DI	Pupitre	
	L.1.3	Entre 7-10 cm	-9.57	7a		
	L.1.4	2.5 o 3...		1	Otra cuerda	E5
	L.2.1	NC				
	L.2.2	60 cm	-14.29			
	L.2.3	10 m	0			
	L.3.1	2 m	-2.44	2a	UM: metro	
	L.3.2	3 cm	-9.09	DI		
	L.3.3	36 cm	-1.1	3a	Agenda	
	L.4.1	1.5 m	+7.14	DI		
	L.4.2	2 cm	0	DI		
	L.4.3	10 cm	6.38	DI		
	L.4.4	3 m	0	2a	Ventana	



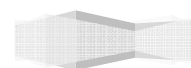
Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores	
A24	L.1.1	1.5 m	+7.14	1r	Su estatura		
	L.1.2	3 cm	+50	1r	La punta de un lápiz	E7	
	L.1.3	2 cm	-78.72	1	Goma	E3	
	L.1.4	2 cm	-33.33	1r	Su estatura	E9	
	L.2.1	1 mm	-97.5			E3	
	L.2.2	50 cm	-28.57				
	L.2.3	8 m	-20				
	L.3.1	2 m	-2.44	1r	Su estatura		
	L.3.2	3 cm	-9.09	2a	Dedo		
	L.3.3	50 cm=5dm	+37.36	1r	Largo del folio	E7	
	L.4.1	1 m	-28.57	1r	Su estatura		
	L.4.2	2.5 m	+25	1r	Su dedo		
	L.4.3	15 cm	+59.57	1	Una calculadora	E9	
	L.4.4	2 m	-33.33	1r	Su estatura	E9	
	A25	L.1.1	1.5 m	+7.14	2a	Baldosas	
		L.1.2	2 cm	0	1	Goma	
L.1.3		5.5 cm	-41.49	1	Su tippex	E7	
L.1.4		3.5 m	+16.67	2a	Mesa del profesor		
L.2.1		30 cm	-25				
L.2.2		60 cm	-14.29				
L.2.3		5 m	-50				
L.3.1		2 m	-2.44	1	Estatura de un compañero		
L.3.2		3 x 1 cm = 4 cm ²				E2, E5	
L.3.3		35 cm	-3.85	1r	Largo del folio		
L.4.1		1.5 m	+7.14	2a	Baldosas		
L.4.2		2 cm	0	1	Goma		
L.4.3		8 cm	-14.89	DI			
L.4.4		3 m	0	DI			



Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores	
A26	L.1.1	1 m	-28.57	1	Una mesa		
	L.1.2	2 cm	0	1	Grosor de la silla		
	L.1.3	7 cm	-25.53	3a	Grosor de un bolígrafo		
	L.1.4	2 m	-33.33	4a	Ventana y pared	E7	
	L.2.1	2 cm	-95			E3	
	L.2.2	60 cm	-14.29				
	L.2.3	8 m	-20				
	L.3.1	2 m	-2.44	1	Otra puerta		
	L.3.2	2.5 cm	-24.24	DI	Dedo		
	L.3.3	25 cm	-31.32	3a	Tippex y la agenda	E9	
	L.4.1	1.20 m	-14.29	1r	Ventana		
	L.4.2	2.5 cm	+25	1	Dedo		
	L.4.3	8 cm	-14.89	1r	Tippex		
	L.4.4	2.5 m	-16.67	2a	Ventana		
	A27	L.1.1	2.5 m	+78.57	2a	Baldosas	E7
		L.1.2	2 cm	0	1	Regla	
L.1.3		4.5 cm	-52.13	3a	Dedo	E9	
L.1.4		3.5 m	+16.67	DI			
L.2.1		50 cm	+25				
L.2.2		1 m	+42.86				
L.2.3		7 m	-30				
L.3.1		2 m	-2.44	DI			
L.3.2		2.5 cm	-24.24	1	Regla		
L.3.3		30 cm	-17.58	DI			
L.4.1		1.25 m	-10.71	2a	Baldosas		
L.4.2		2.5 cm	+25	2a	Dedo		
L.4.3		7.5 cm	-20.21	DI			
L.4.4		2 m	-33.33	2a	Ventanas	E9	
A28	L.1.1	10 dm	-28.57	DI			
	L.1.2	NC					

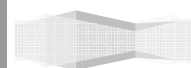


Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores
	L.1.3	8 cm	-14.89	1r	Bolígrafo	
	L.1.4	2 m	-33.33	NE		NE
	L.2.1	4 dm	0			
	L.2.2	1 m	+42.86			
	L.2.3	10 m	0			
	L.3.1	1.80 m	-12.2	1r	Brazos abiertos	
	L.3.2	2 cm	-39.39	3a	Uña	E9
	L.3.3	2.5 dm	-31.32	3a	Tipex	E7
	L.4.1	1.5 m	+7.14	2a	Brazos abiertos	
	L.4.2	2 cm	0	2a	Uña	
	L.4.3	1 dm	+6.38	2b	Bolígrafo	
	L.4.4	2.2 m	-26.67	2a	Brazos abiertos	



Apéndice J.2: Cuadro Resumen de Respuestas a las Tareas Usadas para Valorar la Capacidad Estimativa en Superficie

Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores
A5	S.1.1	1m x 1.5 m	-45.65	6b		E11
	S.1.2	12 cm ²	-96.84	1	Fondo de un cubo de playa	E7
	S.1.3	0.5 m ²	+19.05	2b	Pizarra	
	S.2.1	NC				
	S.2.2	NC				
	S.2.3	NC				
	S.3.1	NC				
	S.3.2	12 m ²	-55.56	6a		E11
	S.3.3	5 cm ²	0	NE	NE	
	S.4.1	3 m ²	+8.68	6a		
	S.4.2	5 cm ²	-98.68	NE	NE	
	S.4.3	0.5 dam			NE	E5
	A8	S.1.1	500 cm ²	-98.19	6a	
S.1.2		100 cm ²	-73.68	6c		E11
S.1.3		150 cm ²	-96.43	6c		E11
S.2.1		20 cm ²	-96.79			
S.2.2		50 cm ²	-98.57			
S.2.3		1.5 m ²	-25			
S.3.1		60 cm ²	-80.95	FE		E10
S.3.2		15 m ²	-44.44	EI		E2
S.3.3		7 cm ²	+40	6c		E11
S.4.1		9 m ²	+226.09	FE		E10
S.4.2		60 cm ²	-84.21	NE		NE
S.4.3		5 m ²	+1090.48	DI		E1, DI
A13		S.1.1	0.25 dm			
	S.1.2	4 diametros				E2, E5
	S.1.3	10 diametros				E2, E5
	S.2.1	cm ²				
	S.2.2	dm ²				

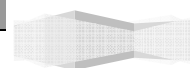


Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores
	S.2.3	m ²				
	S.3.1	4 dm ²	+26.98	2a	Plantilla de 1 dm ²	
	S.3.2	7 m ²	-74.07	DI		DI
	S.3.3	4 cm ²	-20	3a	Maya cuadriculada	
	S.4.1	3 m ²	+8.69	DI		
	S.4.2	3.14 dm		6a		E5
	S.4.3	8 dm ²	-80.95	3a	Parte de la diana	DI
A15	S.1.1	3 m		EI		E2, E5
	S.1.2	15 cm		EI		E2, E5
	S.1.3	1 m		EI		E2, E5
	S.2.1	30 cm				
	S.2.2	1.5 m				
	S.2.3	2 m				
	S.3.1	11 cm ²	-96.51	FE		E10
	S.3.2	9 m		EI		E2, E5
	S.3.3	10 mm ²	-96	EI		E4, E2
	S.4.1	3 m ²	+8.69	NE		
	S.4.2	20 cm ²	-94.74	NE		
	S.4.3	1 m ²	+138.1	NE		
A17	S.1.1	3.20 m ²	+15.94	FE		E10
	S.1.2	48 cm ²	-87.37	FE		E10
	S.1.3	2.25 m ²	+435.71	FE		E10
	S.2.1	8 dm ²	+28.27			
	S.2.2	1.5 m ²	+328.57			
	S.2.3	1.5 m ²	-25			
	S.3.1	300 cm		6a		E5
	S.3.2	18.90 cm		6a		E5
	S.3.3	NC				
	S.4.1	2.3 m ²	-16.67	6a		
	S.4.2	15.7 cm ²	-95.87	FE		E10



Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores
	S.4.3	NC				
A19	S.1.1	1 m x 1.50 m	-45.65	6b		
	S.1.2	13 cm x 13 cm	-55.53	6d		
	S.1.3	30 x 30 cm				E5
	S.2.1	15 cm				E5
	S.2.2	30 cm				E5
	S.2.3	60 cm				E5
	S.3.1	300 cm ²	-4.76	6a		
	S.3.2	12.3 m ²	-54.44	DI		
	S.3.3	NC				
	S.4.1	150 cm ²	-99.46	EI		E10
	S.4.2	20x20 cm ²	5.26	6b		E2
	S.4.3	70 cm ²	-98.33	DI		
	A21	S.1.1	6 m		6a	
S.1.2		622.8 cm		6a		E5
S.1.3		1 m ²	+138.1	1	UM: m ²	E8
S.2.1		15 dm ²	+140.50			
S.2.2		40 dm ²	+14.28			
S.2.3		4.5 m ²	+125			
S.3.1		308 cm ²	-2.22	6a		
S.3.2		25.5 m ²	-5.56	6a		
S.3.3		8 cm ²	+60	2a	UM: cm ²	DI
S.4.1		4 m ²	+44.93	2a	UM: m ²	E8
S.4.2		530.66 cm ²	+39.66	6a		E11
S.4.3		1 m ²	+138.1	DI	UM: dm ²	E8
A23		S.1.1	2.20 x 1.20		6a	
	S.1.2	20 cm		EI		E2, E5
	S.1.3	40 cm y 1 m		EI		E2, E5
	S.2.1	30 cm x 20 cm	-3.8	6a		

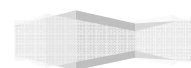
Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores
	S.2.2	70 cm x40 cm	-20	6a		
	S.2.3	1.30 m x 2.30 m	+49.5	6a		E11
	S.3.1	19-20 cm		EI		E2, E5
	S.3.2	7 m		EI		E2, E5
	S.3.3	15 cm ²	+200	6c		E11
	S.4.1	1.50 ² ·2.50 ²		DI		E4
	S.4.2	30·30 cm ²	+136.84	DI		DI
	S.4.3	1 m ²	+138.1	DI		DI
A24	S.1.1	8 m ² o <u>5 m²</u>	+81.16	FE		E10
	S.1.2	<u>60 cm²</u> o 9 m ²	-84.21	6c		E1, E6
	S.1.3	5.4 m ² o <u>3.06 m²</u>	+628.57	FE		
	S.2.1	30 cm ²	-95.19			
	S.2.2	8 cm ²	-77.14			
	S.2.3	2 m ²	0			
	S.3.1	560 cm ²	+77.78	6a		E11
	S.3.2	16 m ²	-40.74	6a		E1
	S.3.3	6 cm ²	+20	6c		
	S.4.1	2.5 m ²	-9.42			
	S.4.2	706.5 cm ²	+85.92	6a		E11
	S.4.3	3750 cm ²	-10.71	6c		
A25	S.1.1	2.5 x 1.5 m		6a		E5
	S.1.2	10 cm		EI		E2, E5
	S.1.3	NC				
	S.2.1	30 cm				E5
	S.2.2	70 cm x 50 cm	0			
	S.2.3	1 m x 1 m	-50			
	S.3.1	300 cm ²	-4.76	6a		



Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores
A26	S.3.2	27.5 m ²	+1.85	6a		
	S.3.3	8 cm ²	+60	6c		E11
	S.4.1	2.5 x 1 m		6a		E5
	S.4.2	30 cm ²	-92.11	6c		E1, E11
	S.4.3	50 x 80 cm		6c		E5
	S.1.1	3 m		6a		E5
	S.1.2	20 cm		FE		E5, E10
	S.1.3	120 cm		NE		E5
	S.2.1	25 cm				
	S.2.2	60 cm				
S.2.3	70 cm					
A27	S.3.1	160 cm ²	-49.21	DI		
	S.3.2	24 m ²	-11.11	6a		
	S.3.3	20 cm ²	+300	DI		
	S.4.1	2.5 m ²	-9.42	6a		
	S.4.2	20 cm ²	-94.74	DI		
	S.4.3	1.5 m ²	+257.14	DI		
	S.1.1	8 m ²	+189.86	DI		
	S.1.2	10 cm ²	-97.37	DI		
	S.1.3	4 m ²	+852.38	DI		
	S.2.1	40 cm ²	-93.59			
S.2.2	1 m ²	+185.71				
S.2.3	3 m ²	+50				
A28	S.3.1	16 cm ²	-94.92	6a		E11
	S.3.2	17.5 m ²	-35.19	6a		E11
	S.3.3	5 cm ²	0	6c		
	S.4.1	3.75 m ²	+35.87	6a		E11
	S.4.2	314 cm ²	-17.37	6a		
	S.4.3	0.75 m		6c		E5
	S.1.1	3 m ²	+8.7	NE		
S.1.2	64 dm ²	+1584	NE			
S.1.3	1600 dm ²	+3709.5	NE			



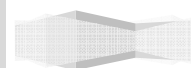
Alumno	Tarea	Respuesta	P.E.(%)	Estrategias	Referentes	Errores
	S.2.1	4 dm ²	-35.85			
	S.2.2	1 m ²	+185.71			
	S.2.3	2 m ²	0			
	S.3.1	210 cm ²	-33.33	DI		
	S.3.2	30 m ²	+11.11	6a		
	S.3.3	5 cm ²	0	6c		
	S.4.1	3.08 m ²	+11.59	6a		
	S.4.2	4 dm ²	+5.26	6c		
	S.4.3	1 m ²	+138.1	6c		E11



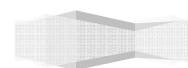
APÉNDICE K

Apéndice K.1: Observaciones Relativas a la Magnitud Longitud de las Producciones de los Alumnos en las Fichas.

Ai	Ficha	Observaciones Relativas a la Magnitud Longitud
A5	Ev. Inicial	Realiza parcialmente las tareas tipo B (I.2, I.4 y I.6), pues de los tres objetos pedidos en cada una de ellas cita uno o a lo sumo dos en cada tarea, lo que significa una baja interiorización de referentes.
	Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud.
	Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente las cantidades de longitud de las de superficie.
	Ficha 3 ^a	Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3) que cree que se mide como el diámetro de la misma.
	Ficha 5	No completa las tareas tipo B. No realiza la estimación del “grosor de un dedo”. Asigna unidades de medida adecuadas, aunque con una clara tendencia a la subestimación, especialmente cuando usa el centímetro como unidad de medida. En ninguna de las tareas propuestas recurre o usa el decímetro como unidad de medida.
	Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
	Ficha 7 ^c	Realiza correctamente todas las tareas, salvo la medida de la anchura del dedo pulgar, que le asigna una medida de “65 mm”; y la anchura de la puerta de su habitación, pues apunta que mide “730 dm”.
	Ficha 9	Mejora algunas estimaciones respecto de las respuestas de la Ficha 8.



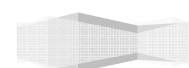
Ficha 10	Realiza correctamente las tareas propuestas.
Ev. Final	Realiza correctamente todas las tareas propuestas, salvo en la tarea I.6 donde propone como objeto que mide 1 cm “el largo de el pie de un niño chico”.
A8 Ev. Inicial	Realiza aceptablemente las tareas tipo B (I.2, I.4 y I.6), pues los objetos indicados tienen medidas próximas a las pedidas.
Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud, pero las asocia a la medida de las aristas o del radio.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente entre cantidades de longitud y de superficie.
Ficha 3 ^a	Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3) que no contesta, y la medida de la trayectoria entre A y B (en tarea 3.6) que contesta erróneamente confundiendo trayectoria con distancia.
Ficha 5	Contesta erróneamente todas las tareas en las que se le pide que estime “el largo de...” algún objeto, utilizando unidades inadecuadas, principalmente utiliza unidades de superficie.
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza correctamente las tareas, aunque en alguna tarea confunde la pregunta.
Ficha 10	Realiza aceptablemente las tareas propuestas.
Ev. Final	Realiza aceptablemente las tareas tipo B (I.2, I.4 y I.6), pues los objetos indicados tienen medidas próximas a las pedidas.
A13 Ev. Inicial	No tiene interiorizado el dm, pues en las tareas tipo B donde se le pide que cite objetos con una medida de 1 dm indica “las patas de la mesa de alto, la silla, la tele”.



Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente las cantidades de longitud de las de superficie.
Ficha 3 ^a	Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3), tarea que no realiza.
Ficha 5	No asigna medidas en las tareas donde se le pide y en algunos casos no asigna unidades de medida adecuadas, utilizando unidades longitudinales para medir cantidades de superficie y viceversa.
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza correctamente las tareas.
Ficha 9	Utiliza correctamente las estrategias sugeridas.
Ficha 10	Realiza aceptablemente las tareas propuestas.
Ev. Final	Realiza aceptablemente las tareas tipo B.

A15 Ev. Inicial Realiza aceptablemente las tareas tipo B.

Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud y reconoce correctamente los términos relacionados. No tiene interiorizados los términos: circunferencia y círculo.
Ficha 3 ^a	Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3) que contesta erróneamente confundiendo circunferencia con diámetro de la misma.



Ficha 5	Tiene deficientemente interiorizado el metro (con medida inferior a la real). No siempre adecua la unidad de medida a la cantidad a medir/estimar (utiliza unidades de superficie para medir cantidades longitudinales).
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza correctamente todas las tareas.
Ficha 10	Realiza las tareas propuestas sin dar detalles del procedimiento seguido en cada caso.
Ev. Final	Realiza aceptablemente las tareas tipo B.
A17 Ev. Inicial	Realiza correctamente todas las tareas.
Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente las cantidades de longitud de las de superficie. Pero confunde los términos circunferencia y círculo.
Ficha 3 ^a	Realiza correctamente todas las mediciones de longitudes.
Ficha 5	Realiza correctamente todas las tareas salvo alguna medida que sobrestima.
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza correctamente todas las tareas, salvo la medida de la altura de un tetrabrik de leche o zumo al que asigna una medida de “2 cm”.
Ficha 9	Aplica correctamente las estrategias indicadas.
Ficha 10	Realiza aceptablemente las tareas propuestas, salvo algún error en el uso de fórmulas que afectaría a la estimación de superficies.
Ev. Final	Realiza correctamente las tareas propuestas.



A19 Ev. Inicial No tiene interiorizado el dm. Posiblemente lo confunda con el cm, pues indica como objetos que miden 1 dm “el ancho de un lápiz, el grosor de una mesa o el grosor de un libro”.

Ficha 1^a Identifica correctamente cantidades de longitud.

Ficha 2^a Identifica correctamente cantidades de longitud y reconoce correctamente los términos relacionados.

Ficha 3^a Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3) que confunde con el diámetro de la misma.

Ficha 5 Realiza algunas estimaciones con un bajo grado de precisión. No tiene interiorizado el dm, pues es una unidad que no utiliza y para la que no tiene interiorizados unos referentes aceptables.

Ficha 6^b Realizan correctamente todas las tareas.

Ficha 7^c Realiza todas las tareas, aunque en alguna de ellas emplea estrategias inadecuadas, tales como medir una distancia en función del tiempo que se tarda en recorrerla.

Ficha 9 Utiliza adecuadamente las estrategias propuestas.

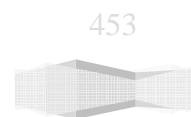
Ficha 10 Realiza aceptablemente las tareas propuestas.

Ev. Final Realiza aceptablemente las tareas tipo B aunque sugiere objetos con una medida de 1 dm de dudosa validez, tales como “una goma”.

A21 Ev. Inicial Realiza correctamente las tareas tipo B.

Ficha 1^a Identifica correctamente cantidades de longitud.

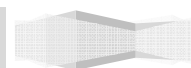
Ficha 2^a Identifica correctamente cantidades de longitud y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente las cantidades de longitud de las de superficie, aunque confunde los términos circunferencia y círculo.



Ficha 3 ^a	Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3) que la mide en grados (indicando que mide “360°”).
Ficha 5	Realiza correctamente todas las tareas, empleando incluso unidades menos usuales como el decímetro.
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza correctamente todas las tareas.
Ficha 9	Aplica correctamente las estrategias propuestas.
Ficha 10	Realiza correctamente las tareas propuestas.
Ev. Final	Realiza correctamente todas las tareas propuestas.
A23 Ev. Inicial	Además de no indicar alguna unidad de medida en tareas tipo A, las tareas tipo B nos revelan que no tiene interiorizado el dm, pues propone objetos que midan 1 dm tales como “una ventana, una pantalla de televisión”
Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud, aunque en alguna tarea confunde si una cantidad determinada pertenece a la magnitud longitud o a la magnitud superficie. Por ejemplo, marca que la distancia entre Roquetas y Almería, la arista de una ventana o una circunferencia son cantidades de “superficie”.
Ficha 3 ^a	Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3) que no contesta, y la medida de la trayectoria entre A y B (en tarea 3.6) que mide en grados.
Ficha 5	Realiza aceptablemente las tareas, aunque en alguna tarea se deja algún apartado sin contestar. Realiza de forma incompleta las tareas tipo B, pues sólo pone uno de los tres referentes pedidos.



	Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
	Ficha 7 ^c	Realiza aceptablemente las tareas, aunque en alguna tarea indica medidas deficientes, pues apunta que la anchura del dedo pulgar es “70 mm”, que la anchura de la puerta de su habitación es “85 dm”, que la longitud de un tenedor es de “4 m” y deja sin medida el ancho de una baldosa.
	Ficha 9	No utiliza en todas las tareas las estrategias propuestas, y eso le lleva a realizar alguna estimación deficiente.
	Ficha 10	Realiza aceptablemente las tareas propuestas de estimación de longitudes.
	Ev. Final	Realiza correctamente las tareas tipo B.
A24	Ev. Inicial	El alumno no tiene interiorizada la unidad de medida decímetro, pues indica como referentes que miden 1 dm: “un piojo, una espinilla o una caspa pequeña”
	Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud.
	Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente las cantidades de longitud de las de superficie.
	Ficha 3 ^a	Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3) que cree que se mide como el diámetro de la misma.
	Ficha 5	Tiene algunas dificultades con la terminología, pues parece confundir el término “anchura” con “grosor”. Ha mejorado en la interiorización del decímetro, aunque parece que aún es deficiente, pues indica como referentes que miden 1 dm: “goma, pegatina”. Además, es una unidad que no utiliza espontáneamente.
	Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.



Ficha 7 ^c	Realiza aceptablemente todas las tareas.
Ficha 9	Utiliza correctamente las estrategias propuestas.
Ficha 10	Realiza correctamente las tareas propuestas de estimación de longitudes.
Ev. Final	Realiza aceptablemente todas las tareas tipo B.

A25 Ev. Inicial	El alumno no tiene interiorizado el decímetro, pues no indica referentes que midan 1 dm.
Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud, pero las asocia a la medida de las aristas o del radio.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud, aunque tiene alguna dificultad para diferenciar cantidades de longitud y superficie, pues indica que la distancia entre Roquetas y Almería, la arista de una ventana o una circunferencia son “superficies”.
Ficha 3 ^a	Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3) que confunde con el diámetro.
Ficha 5	Tiene deficientemente interiorizadas las unidades de medida, pues deja incompletas las tareas tipo B incurriendo en algunos errores de precisión.
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza correctamente las tareas, aunque en alguna tarea toma la medida erróneamente o incurre en error de conversión de unidades, pues indica que los brazos abiertos le miden “1.82 cm” o que la anchura del dedo pulgar le mide “6 mm”.
Ficha 9	Aplica correctamente las estrategias indicadas.



Ficha 10	Realiza aceptablemente las tareas propuestas de estimación de longitudes.
Ev. Final	Realiza aceptablemente las tareas tipo B.
A26 Ev. Inicial	Realiza las tareas tipo B (I.2, I.4 y I.6), aunque parece que tiene interiorizado el decímetro por debajo de su medida, pues indica como objetos que miden 1 dm: “la mina del portaminas, un tornillo, y un pintalabios”.
Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de longitud y aunque comete algún error cuando tiene que diferenciar cantidades de longitud o de superficies, pues indica que la arista de una ventana y una circunferencia son “superficies”.
Ficha 3 ^a	Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3) que confunde con el diámetro.
Ficha 5	Incurre en algunos errores en las tareas tipo B, pues apunta como objeto que mide 1 dm, entre otros, “una goma”. Realiza aceptablemente las tareas aunque no emplea el decímetro espontáneamente.
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza correctamente todas las tareas, aunque alguna de forma incompleta, posiblemente debido a que no entendió qué se le preguntaba.
Ficha 9	Mejora algunas estimaciones utilizando las estrategias propuestas.
Ficha 10	Realiza las estimaciones subestimando en algunas tareas por tener algún referente interiorizado con valores inferiores a su medida.
Ev. Final	Realiza correctamente las tareas tipo B.



A27 Ev. Inicial Realiza correctamente las tareas tipo B.

Ficha 1^a Identifica correctamente cantidades de longitud.

Ficha 2^a Identifica correctamente cantidades de longitud y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente entre cantidades de longitud y de superficie.

Ficha 3^a Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3) que mide en grados.

Ficha 5 Contesta aceptablemente todas las tareas.

Ficha 6^b Realizan correctamente todas las tareas.

Ficha 7^c Realiza correctamente todas las tareas.

Ficha 9 Aplica correctamente las estrategias propuestas.

Ficha 10 Realiza aceptablemente las tareas propuestas subestimando las cantidades de longitud propuestas.

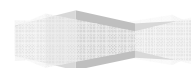
Ev. Final Realiza aceptablemente las tareas tipo B.

A28 Ev. Inicial Realiza aceptablemente las tareas tipo B.

Ficha 1^a Identifica correctamente cantidades de longitud.

Ficha 2^a Identifica correctamente cantidades de longitud, aunque confunde las magnitudes en algunos casos, ya que apunta que la distancia entre Roquetas y Almería, la arista de una ventana o una circunferencia son “superficies”.

Ficha 3^a Realiza todas las mediciones de longitudes correctamente, salvo la longitud de la circunferencia (tarea 3.3) que cree que se mide como el diámetro de la misma.



Ficha 5 No tiene interiorizadas algunas unidades de medida, tales como el milímetro o el decámetro, pues no indica objetos que midan 1 mm e indica objetos con una medida de 1 dam: “la mesa del profesor, pizarra” (tarea 5.1).

Ficha 6^b Realizan correctamente todas las tareas.

Ficha 7^c Realiza correctamente todas las tareas, utilizando adecuadamente las unidades (incluido el decímetro).

Ficha 9 Aplica aceptablemente las estrategias propuestas.

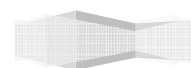
Ficha 10 Realiza correctamente las tareas propuestas.

Ev. Final Realiza aceptablemente las tareas tipo B.

a. Fichas cumplimentadas individualmente trabajando en Pequeño Grupo.

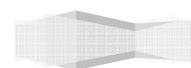
b. Fichas cumplimentadas por consenso trabajando en Pequeño Grupo.

c. Fichas cumplimentadas en casa.

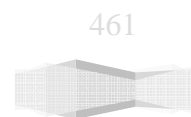


Apéndice K.2: Observaciones Relativas a la Magnitud Superficie de las Producciones de los Alumnos en las Fichas.

Ai	Ficha	Observaciones Relativas a la Magnitud Superficie
A5	Ev. Inicial	Realiza parcialmente las tareas tipo B, pues de los tres objetos pedidos con una superficie de 1 cm^2 cita sólo uno, y con una medida de 1 dm^2 cita dos objetos.
	Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie.
	Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente entre cantidades de longitud y de superficie.
	Ficha 4 ^a	Realiza todas las mediciones de superficies correctamente.
	Ficha 5	No indica objetos con una medida de 1 mm^2 , ni 1 cm^2 , y los propuestos para 1 dm^2 y 1 m^2 son inadecuados, pues propone como objeto que midan 1 dm^2 “la superficie de un dado”; y como objeto con 1 m^2 “la superficie de la puerta”. En las tareas tipo A propuestas sólo indica la unidad de medida (no asigna valor numérico en las estimaciones pedidas).
	Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
	Ficha 7 ^c	Realiza correctamente la mayor parte de las tareas. Mide erróneamente la superficie de la portada de una libreta (“ 62 dm^2 ”), la ventana del salón-comedor (“ $59,16 \text{ m}^2$ ”) o un azulejo del cuarto de baño (“ 40 dm^2 ”). No realiza la tarea 7.21.
	Ficha 9	Continúa sin contestar la tarea 9.4 (estimar la superficie de la agenda).
	Ficha 10	Realiza correctamente las tareas propuestas.



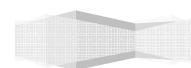
	Ev. Final	No contesta la tarea tipo B (II.6) donde se le pedían objetos que midan 1 dm^2 .
A8	Ev. Inicial	Realiza aceptablemente las tareas tipo B.
	Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie.
	Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente entre cantidades de longitud y de superficie.
	Ficha 4 ^a	Realiza las mediciones de superficies correctamente.
	Ficha 5	Propone objetos con medidas aproximadas de 1 mm^2 y 1 dm^2 de dudosa validez. Realiza algunas estimaciones muy deficientes.
	Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
	Ficha 7 ^c	Deja sin contestar la tarea 7.15 (donde se le pide que indique objetos con una superficie que mida 1 mm^2). Realiza de forma incompleta el resto de tareas tipo B. Mide erróneamente la superficie de algunos objetos, como la pantalla del televisor que indica que mide “ 40 cm^2 ” o la superficie de un plato llano, a la que asigna una medida de “ 2 m^2 ”.
	Ficha 9	Utiliza las estrategias propuestas, pero sin obtener buenos resultados debido a errores de cálculo, errores de comparación o en la interiorización de referentes.
	Ficha 10	Realiza aceptablemente las tareas propuestas.
	Ev. Final	Realiza aceptablemente las tareas tipo B.
A13	Ev. Inicial	No percibe la magnitud superficie, confundiéndola con la magnitud longitud tanto en las tareas tipo A como en las tareas tipo B.



Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente entre cantidades de longitud y de superficie.
Ficha 4 ^a	
Ficha 5	Percibe la magnitud superficie. No tiene interiorizadas las unidades de superficie y no siempre adecua la unidad de medida a la magnitud a estimar usando en muchas ocasiones unidades longitudinales para medir superficies.
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza correctamente la mayor parte de las tareas, aunque con algunos errores en algunas medidas.
Ficha 9	Aplica correctamente las estrategias propuestas.
Ficha 10	Realiza correctamente las tareas propuestas, aunque en algún caso confunde la cantidad a estimar.
Ev. Final	Realiza aceptablemente las tareas tipo B.
A15 Ev. Inicial	Realiza inaceptablemente las tareas tipo B. No tiene interiorizadas las unidades de medida de superficie.
Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie.
Ficha 4 ^a	Realiza las mediciones de superficies correctamente indicando la unidad adecuada.



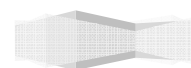
Ficha 5	Propone objetos con medidas aproximadas de 1 m^2 de dudosa validez: “losa, cartulina, folio”. No siempre adecua la unidad de medida a la cantidad, pues indica que diferentes superficies se deben medir utilizando unidades de longitud.
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza inadecuadamente las tareas tipo B relacionadas con el m^2 , pues propone como objetos con una medida de 1 m^2 : “losa, mesita de noche, pupitre”. Utiliza unidades de superficie para medir cantidades de la misma, pero, muchas de las medidas tomadas son deficientes. Por ejemplo, indica que la portada de una libreta mide “ 19 dm^2 ”, que una moneda de 10 céntimos tiene una superficie de “ 5 mm^2 ” o que un plato llano tiene una superficie de “ 15 cm^2 ”, entre otras.
Ficha 9	No contesta la ficha.
Ficha 10	Realiza parcialmente las tareas propuestas, aplicando en todos los casos la fórmula del área del rectángulo y dejando como resultado el producto indicado sin operar.
Ev. Final	Realiza aceptablemente las tareas tipo B.
A17 Ev. Inicial	Realiza aceptablemente las tareas tipo B.
Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie y reconoce correctamente los términos relacionados, aunque confunde circunferencia y círculo.
Ficha 4 ^a	Realiza todas las mediciones de superficies correctamente.
Ficha 5	Adecua la unidad de medida a la cantidad a estimar, aunque realiza estimaciones muy imprecisas.



Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza correctamente las mediciones, aunque realiza de forma incompleta algunas tareas en las que se le pedía que indicara objetos con una superficie determinada.
Ficha 9	Aplica correctamente las estrategias propuestas mejorando los resultados.
Ficha 10	Realiza las tareas propuestas equivocándose de fórmula, pues utiliza la fórmula del área del triángulo, para calcular áreas de superficies rectangulares.
Ev. Final	Realiza aceptablemente las tareas tipo B.
A19 Ev. Inicial	Realiza con poca precisión las tareas tipo B, lo que nos sugiere que es posible que no tenga interiorizada ninguna de las unidades de medida de superficie.
Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente entre cantidades de longitud y de superficie.
Ficha 4 ^a	Realiza las mediciones de superficies correctamente, salvo las mediciones de la superficie de la cara lateral del cilindro y del cono.
Ficha 5	La respuesta a las tareas tipo B nos indican que no tiene interiorizadas ninguna de las unidades de medida, pues propone objetos con medidas muy alejadas de las propuestas. No sabe adecuar la unidad de medida, pues indica que algunas superficies se miden con unidades de longitud.
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.



Ficha 7 ^c	Mide erróneamente la superficie de algunos objetos, como la base de un vaso de agua al que asigna una medida de “ 1 cm ² ”, o la superficie de un plato llano, al que asigna una superficie de “24 cm ² ”. En la tarea 7.21 realiza erróneamente los cálculos midiendo la superficie de su habitación como si fuese una cantidad de longitud, y asigna una unidad longitudinal al resultado.
Ficha 9	Utiliza las estrategias propuestas, pero sin obtener buenos resultados debido a errores de cálculo, y errores en las comparaciones.
Ficha 10	Realiza las tareas propuestas con errores, en algunas tareas, en la adecuación de las unidades de medida, y combinando erróneamente cálculos de medidas longitudinales con medidas de superficies.
Ev. Final	Realiza aceptablemente las tareas tipo B.
A21 Ev. Inicial	Realiza correctamente las tareas tipo B.
Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente las cantidades de longitud de las de superficie, aunque confunde los términos circunferencia y círculo.
Ficha 4 ^a	Realiza todas las mediciones de superficies correctamente, salvo la medida de la superficie de la base del cilindro y del cono, pues utiliza una fórmula errónea.
Ficha 5	Realiza correctamente las tareas tipo B, sabe adecuar la unidad de medida. No obstante realiza algunas estimaciones bastante imprecisas.
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.



	Ficha 7 ^c	Realiza correctamente las tareas.
	Ficha 9	Aplica correctamente las estrategias propuestas, no obstante, en una de las tareas utiliza una unidad de medida inadecuada (porque toma una unidad de longitud) y comete un error en la conversión de unidades de medida.
	Ficha 10	Realiza correctamente las tareas propuestas.
	Ev. Final	Realiza correctamente las tareas tipo B.
A23	Ev. Inicial	El análisis de las tareas tipo B revela que no tiene interiorizado el dm^2 .
	Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie.
	Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie y reconoce correctamente los términos relacionados, salvo el término circunferencia que cree que se refiere a la superficie.
	Ficha 4 ^a	Realiza las mediciones de superficies correctamente, salvo las superficies de las caras laterales y de la base del cono y del cilindro.
	Ficha 5	Realiza parcialmente las tareas tipo B, proponiendo a lo sumo un objeto con cada una de las medidas de superficie indicadas. En las tareas tipo A estima las superficies expresando el resultado como producto de medidas longitudinales.
	Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.



Ficha 7^c Realiza correctamente las tareas tipo B. Pero no realiza la tarea 7.20, donde se le pedía que midiera superficies de diversos objetos. Además, indica como unidad de medida unidades longitudinales. La tarea 7.21 también la realiza parcialmente, indica medidas de longitudes, pero no calcula superficies.

Ficha 9 Utiliza las estrategias propuestas, pero sin obtener buenos resultados debido a errores de cálculo, errores de comparación o en la interiorización de referentes.

Ficha 10 Realiza aceptablemente algunas tareas y en otras incurre en errores de adecuación de la unidad de medida, pues utiliza unidades longitudinales para referirse a superficies.

Ev. Final El análisis de las tareas tipo B revela que, al menos, no tiene interiorizado el dm^2 .

A24 Ev. Inicial El análisis de las tareas tipo B muestra que no tiene interiorizado el dm^2 .

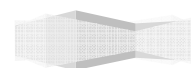
Ficha 1^a Identifica correctamente cantidades de superficie.

Ficha 2^a Identifica correctamente cantidades de superficie y reconoce correctamente los términos relacionados. Diferencia correctamente entre cantidades de longitud y de superficie.

Ficha 4^a Realiza todas las mediciones de superficies correctamente.

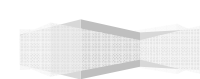
Ficha 5 Realiza correctamente las tareas propuestas, aunque con algún defecto de precisión en las tareas tipo A propuestas.

Ficha 6^b Realizan correctamente todas las tareas.

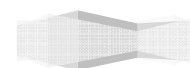


Ficha 7 ^c	Realiza correctamente las tareas tipo B. Aunque mide erróneamente algunas de las superficies propuestas, pues indica que la portada de una libreta mide “66.65 dm ² ”, que la ventana del salón-comedor mide “138.86 m ² ” o que la pantalla del televisor mide “50.580544 dm ² ”, entre otros.
Ficha 9	Aplica correctamente las estrategias propuestas.
Ficha 10	Realiza correctamente las tareas propuestas.
Ev. Final	Realiza aceptablemente las tareas tipo B, aunque parece tener duda con el dm ² , pues tacha los objetos que había escrito.

A25 Ev. Inicial	El análisis de las tareas tipo B muestra que no tiene interiorizada ninguna de las unidades de medida.
Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie, aunque confunde algunos términos.
Ficha 4 ^a	Realiza las mediciones de superficies correctamente.
Ficha 5	El análisis de las tareas tipo B muestra que no tiene interiorizadas las unidades de medida.
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza todas las tareas, aunque con algún error en la toma de alguna medida, pues, indica que un CD tiene una superficie de “11 cm ² ”, que la mesa del comedor mide “80 cm ² ” o que la superficie de un plato llano es de “15 cm ² ”, entre otros.
Ficha 9	No utiliza las estrategias propuestas.



Ficha 10	Realiza las tareas propuestas de forma incompleta, realizando estimaciones de poca precisión, y sin usar estrategias comparativas, o al menos, no lo indica.
Ev. Final	Realiza las tareas tipo B, aunque con poca precisión en las respuestas.
A26 Ev. Inicial	No tiene interiorizadas las unidades de medida, pues no realiza aceptablemente las tareas tipo B.
Ficha 1 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie.
Ficha 2 ^a	Identifica correctamente cantidades de superficie, aunque confunde algunos términos, tales como arista o circunferencia.
Ficha 4 ^a	Realiza todas las mediciones de superficies correctamente, salvo la cara lateral del cono.
Ficha 5	No tiene interiorizadas las unidades de medida, pues no realiza aceptablemente las tareas tipo B. Emplea unidades inadecuadas para medir superficies (unidades longitudinales).
Ficha 6 ^b	Realizan correctamente todas las tareas.
Ficha 7 ^c	Realiza correctamente la mayor parte de las tareas. Mide erróneamente algunas superficies, y en otras sólo indica unidad de medida, sin indicar valor numérico. En la tarea 7.21 utiliza una unidad de medida inadecuada.
Ficha 9	Realiza todas las tareas, aunque sin aplicar las estrategias propuestas.
Ficha 10	Realiza correctamente las tareas propuestas.
Ev. Final	Realiza aceptablemente las tareas tipo B.



A27 Ev. Inicial Las tareas tipo B ponen de manifiesto que no tiene interiorizadas las unidades de medida.

Ficha 1^a Identifica correctamente cantidades de superficie.

Ficha 2^a Identifica correctamente cantidades de superficie y reconoce correctamente los términos relacionados, salvo circunferencia y círculo que los confunde.

Ficha 4^a Realiza las mediciones de superficies correctamente, salvo las superficies del cilindro y del cono.

Ficha 5 El análisis de las tareas tipo B indica que, al menos, no tiene interiorizado el mm^2 . Realiza algunas estimaciones inaceptables en las tareas tipo A.

Ficha 6^b Realizan correctamente todas las tareas.

Ficha 7^c Realiza correctamente las tareas tipo B. Realiza correctamente casi todas las medidas propuestas (indica que la ventana del salón comedor mide “88.4 m^2 ”).

Ficha 9 Utiliza las estrategias propuestas, mejorando las estimaciones.

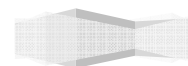
Ficha 10 Realiza correctamente las tareas propuestas.

Ev. Final Realiza aceptablemente las tareas tipo B.

A28 Ev. Inicial El análisis de las tareas tipo B muestra que no tiene interiorizada ninguna unidad de medida de superficie.

Ficha 1^a Identifica correctamente cantidades de superficie.

Ficha 2^a Identifica correctamente cantidades de superficie, aunque desconoce algunos términos, pues indica que la distancia entre Roquetas y Almería es una “superficie” o que el término circunferencia se refiere a “superficie”.



Ficha 4^a Realiza todas las mediciones de superficies correctamente.

Ficha 5 La revisión de las tareas tipo B muestra que no tiene adecuadamente interiorizadas las unidades de medida.

Ficha 6^b Realizan correctamente todas las tareas.

Ficha 7^c Realiza correctamente la mayor parte de las tareas. Mide erróneamente la superficie de un disco compacto (“12 cm²”), la tecla de un móvil (“12.25 cm²”) o la superficie de un plato llano (“30 cm²”).

Ficha 9 Aplica correctamente las estrategias propuestas.

Ficha 10 Realiza correctamente las tareas propuestas.

Ev. Final Realiza aceptablemente las tareas tipo B.

a. Fichas cumplimentadas individualmente trabajando en Pequeño Grupo.

b. Fichas cumplimentadas por consenso trabajando en Pequeño Grupo.

c. Fichas cumplimentadas en casa.

