
ANÁLISIS DE TAREAS DE CÁLCULO DE LÍMITES EN UN PUNTO EN LAS QUE INTERVIENEN IDENTIDADES NOTABLES

Analysis of tasks on calculations of limits involving notable equations

Juan F. Ruiz-Hidalgo y José A. Fernández-Plaza
Universidad de Granada

RESUMEN

Una de las dificultades identificadas en las investigaciones en Pensamiento Matemático Avanzado es la ruptura con el pensamiento algebraico y sus procedimientos. El Análisis se apoya continuamente en habilidades algebraicas pero, al mismo tiempo, para conseguir dominar el pensamiento analítico se requiere alejarse del algebraico y tomar conciencia de las diferencias que se establecen entre ellos. En este trabajo se analiza la relación entre los aspectos estructurales y los errores que los estudiantes manifiestan cuando realizan tareas en las que se involucran identidades notables y los errores que los estudiantes manifiestan cuando calculan límites finitos de funciones en un punto, que corresponden a indeterminaciones del tipo $0/0$ y, que se pueden resolver mediante la simplificación de fracciones algebraicas en las que aparecen identidades notables.

Palabras clave: Fracciones algebraicas; Identidades notables; Indeterminaciones $0/0$; Límite de una función en un punto; Simplificación.

ABSTRACT

One of the difficulties identified in investigations in Advanced Mathematical Thinking is the break with algebraic thinking and its procedures. Continuously, calculus is based on algebraic skills, but at the same time, to get dominate analytical thinking requires moving away from algebraic thinking and become aware of the differences that exist between them. This paper is devoted to the relationship between the structural sense and errors that students demonstrate when performing tasks that involve algebraic identities and the errors when calculating finite limits of functions at a point, corresponding to uncertainties of type $0/0$, which can be solved by simplifying algebraic fractions in which appear notable equations.

Keywords: Algebraic fractions; Limit of a function at one point; Limit of indeterminate forms $0/0$; Notable equations; Simplification.

RUIZ-HIDALGO, J. F. y FERNÁNDEZ-PLAZA, J. A. (2013). Análisis de tareas de cálculo de límites en un punto en las que intervienen identidades notables. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 127-134). Granada, España: Editorial Comares.

INTRODUCCIÓN

Durante el primer curso de Bachillerato se realizan los primeros contactos con el cálculo de límites. En general, las actividades que se proponen consisten en desarrollar una serie de destrezas apoyadas en las habilidades algebraicas que el alumnado ha ido desarrollando a lo largo de la educación secundaria, pero que añaden una componente relacionada con procesos analíticos a los que no están habituados. Investigaciones acerca de la didáctica del análisis muestran que las diferencias entre las habilidades algebraicas y las propias del análisis suponen una ruptura y una dificultad a la que los estudiantes se enfrentan (Artigue, 1995).

En este trabajo se pretende indagar en esta ruptura mediante un estudio exploratorio. Partiendo de tareas de cálculo de límites en las que aparecen fracciones algebraicas, se pretende observar qué estrategias siguen los alumnos, los errores en los que incurrir y cómo se podrían establecer relaciones entre las habilidades algebraicas y analíticas.

MARCO TEÓRICO

En este trabajo intervienen, por una parte, el cálculo de límites, por lo que está situado en la agenda del Pensamiento Matemático Avanzado. Más concretamente, el estudio está centrado en las dificultades que se producen al pasar del razonamiento algebraico al cálculo. Por otra parte, intervienen también tareas de simplificación algebraica, por lo que se toman como última base del trabajo investigaciones sobre pensamiento algebraico y, en particular, algunas acerca del sentido estructural.

En educación matemática no se ha logrado establecer una distinción clara entre los rasgos distintivos entre las matemáticas elementales y avanzadas, aunque sí se han establecido una serie de características que ayudan a separarlos. Entre estas características se pueden encontrar la complejidad de los contenidos (límites, continuidad, derivación o integración) o los procesos cognitivos involucrados en el manejo de dichos contenidos (analizar, generalizar, definir, demostrar, abstraer,...) (Azcárate y Camacho, 2003; Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005).

Las dificultades que el alumnado encuentra cuando se enfrenta al cálculo son variadas, fuertes y persistentes. Según Artigue (1995), se clasifican en tres grandes tipos: 1) Las ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo, como los números reales y las sucesiones; 2) Las relacionadas con la conceptualización de la noción de límite, que es la noción nuclear del campo y; 3) Las asociadas a la ruptura con los modos de pensamiento algebraico y del orden.

Este trabajo se centra en esta tercera dificultad. Legrand (1993) distingue los procedimientos del análisis de los conocimientos algebraicos y propone el ejemplo de la igualdad: mientras que algebraicamente dos expresiones A y B son iguales si una de ellas (o las dos) se pueden transformar por equivalencias sucesivas en la otra, en el análisis, el concepto de igualdad viene determinado por la condición de que $\forall \varepsilon > 0$ se cumple que la distancia $d(A, B) < \varepsilon$.

Dentro de las investigaciones en pensamiento algebraico, Vega-Castro, Molina y Castro (2011, 2012) presentan un análisis de las habilidades involucradas en el trabajo con expresiones algebraicas en las que aparecen identidades notables haciendo uso de la noción *sentido estructural*. Hoch y Dreyfus (2006) proponen una definición operacional de sentido estructural y presentan tres descriptores con subdescriptores, con los que caracterizan los diferentes niveles de complejidad algebraica (Tabla 1).

Tabla 1. *Descriptores del sentido estructural (Hoch y Dreyfus)*

Descriptor	Descripción
SS1	Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.
SS2	Tratar un término compuesto como una única entidad y reconocer una estructura familiar en una forma más compleja.
SS2a	El término compuesto contiene un producto, pero no una suma/resta.
SS2b	El término compuesto contiene una suma o resta.
SS3	Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.
SS3a	La estructura está en su forma más simple.
SS3b	El término compuesto contiene un producto, pero no una suma/resta.
SS3c	El término compuesto contiene una suma o resta.

DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO

El presente trabajo es de tipo exploratorio. La recogida de datos se realizó durante el mes de abril de 2013 en dos Institutos de Enseñanza Secundaria, uno de Granada y otro de un municipio de la provincia de Jaén. En total 44 sujetos que cursaban 1º de Bachillerato de diferentes modalidades fueron escogidos intencionalmente por la disponibilidad para participar en el estudio y por el nivel educativo que cursaban.

Se elaboró una prueba escrita de cuatro tareas con enunciados semejantes. En cada una de ellas aparece el cálculo de un límite en un punto de una fracción algebraica. La

estructura de todos estos límites corresponde a $L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^n P_1(x)}{(x-a)^m Q_1(x)}$,

donde n, m son naturales mayores que 1 y P_1 y Q_1 son dos polinomios sin ceros en el punto $x=a$. El límite está determinado por los valores de n y m , es decir por el valor del exponente del binomio $(x-a)$. Los estudiantes habían recibido ya la instrucción ordinaria, limitando la intervención del profesor y de los investigadores a la aclaración de dudas.

Se pretende y espera que los sujetos realicen un procedimiento de resolución compuesto por las acciones: 1) transformar las expresiones algebraicas; 2) simplificar las fracciones por cancelación; 3) calcular los límites. A cada una de estas sucesiones de acciones se la denominará estrategia. Para facilitar el análisis se ha realizado la codificación que se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. Codificación de las acciones realizadas por los estudiantes

Acción	Acción detallada	Código
Transformar expresiones algebraicas	Factorizar usando una identidad notable	T1
	Factorizar usando el método de Ruffini.	T2
	Factorizar usando la fórmula para ecuaciones de 2º grado.	T3
	Expandir usando una identidad notable.	T4
	Expandir usando la propiedad distributiva.	T5
Simplificar las fracciones	Cancelar los factores $x-a$ en numerador y denominador usando la propiedad de equivalencia de fracciones algebraicas.	X
Calcular el límite	Determinar el valor numérico.	C1
	Cálculo de límites laterales finitos o infinitos.	C2

En la Tabla 3 se presentan con detalle todas las tareas propuestas acompañadas por sus características. Estas características, que son los descriptores del sentido estructural (Tabla 1) están relacionadas con la complejidad algebraica de la tarea. A estos descriptores se les deben añadir los propios del cálculo de límites, particularmente la necesidad de recurrir a los límites laterales para realizar los cálculos. Es importante destacar que las acciones relacionadas con el cálculo de límites, especialmente la C2, son habilidades diferentes a las algebraicas y, por tanto, son las que generan la ruptura descrita entre el álgebra y el análisis.

Según las características de la Tabla 3, se organizan las tareas por la complejidad algebraica y, posteriormente, la complejidad analítica. Así, las tareas quedarían ordenadas por complejidad de más fácil a más difícil (tarea 3, tarea 1, tarea 2 y tarea 4).

Tabla 3. Tareas propuestas ordenadas por grado de complejidad de más fácil a más difícil

Tarea	Límite	Exponente	Características de complejidad
3 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(7x-2)(x+2)}{x^2-4}$	$L = 12$	$n - m = 0$	SS1, SS2b, SS3a, C1
1 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{x^2-4x+4}$	$L = \pm \infty$	$n - m < 0$ impar	SS1, SS3a, C2
2 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^3 - 10x^2}{(x-2)(x^2+1)}$	$L = 4$	$n - m = 0$	SS2a, SS3b, C1
4 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 12}{(x-2)^3(2x^2+1)}$	$L = +\infty$	$n - m < 0$ par	SS2a, SS3b, C2

RESULTADOS

Siguiendo la notación establecida, se caracterizan las estrategias elaboradas por los sujetos en exitosas, exitosas erróneas y otras estrategias erróneas o interrumpidas.

Estrategias exitosas

Las estrategias exitosas están formadas por aquellas estrategias correctas que presentan el esquema de acciones: Transformación algebraica (T)-Simplificación (X)-Cálculo de límites (C). Las hay de tres tipos: las que utilizan igualdad notable como transformación algebraica (Figura 1); las que no utilizan igualdad notable y que implican un uso menos efectivo del sentido estructural; aquéllas que implican una transformación algebraica de la expresión en uno o varios estados de tránsito antes de aplicar la cancelación.

$$e \frac{(x-2)(3x+1)}{(x-2)(x-2)} = e \frac{3x+1}{x-2} \begin{cases} \frac{e}{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+1}{x-2} = +\infty \\ \frac{e}{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+1}{x-2} = -\infty \end{cases}$$

Con la expresión de la plantilla $(a+b)^2$ he simplificado el denominador y he podido simplificar la función. Después, con los límites laterales he calculado el límite de cada función según haya hecho el límite por la izquierda o por la derecha.

Figura 1. Estrategia exitosa en la tarea 1 con igualdad notable cuadrado de la diferencia

Estrategias exitosas erróneas

Esta categoría la conforman aquellas estrategias incluyendo acciones iniciales exitosas, incurriendo en error bien en el proceso de manipulación algebraica (EE-EMA), o bien en el cálculo del límite (EE-ECL) (Figura 2).

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-12}{(x-2)^3(3x+1)} = \frac{3 \cdot 2^2 - 12}{(2-2)^3(3 \cdot 2^2 + 1)} = \frac{0}{0} \text{ Indet}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^3(3x+1)} = \frac{2+2}{(2-2)^2(3 \cdot 2^2 + 1)} = \frac{4}{0} = \pm \infty$$

- ① Se sustituye el punto
- ② Se descompone en factores
- ③ Se simplifica y se sustituye.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-12}{(x-2)^3(2x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+6)}{(x-2)^3(2x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x+6)}{(x-2)^2(2x^2+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x+6)}{(x^2 - 4x + 4) \cdot (2x^2+1)} = \frac{-6}{0} = \infty$$

Auffini en el numerador
Identidad notable denominador

Figura 2. Estrategias exitosas erróneas en la tarea 4, error algebraico (Izq.), y analítico (Dcha.)

Otras estrategias erróneas o interrumpidas

Cuando desde la primera acción hay errores, la estrategia se considera errónea. Existen también otras estrategias de cálculo de límite como la regla de L'Hôpital. Sin embargo, algunos estudiantes emplearon para el cálculo del límite en un punto finito las propiedades para límites en infinito, ya que en este último caso, el cálculo se reduce a una comparación de los grados del numerador y del denominador, eludiendo así la necesidad de factorizar. También se incluyen aquellas estrategias interrumpidas (EI) tanto en la manipulación algebraica, como en el cálculo final.

En la Tabla 4 se presenta un resumen de las frecuencias absolutas de respuestas según las categorías anteriores.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El número de estrategias exitosas es mayoritario en la tarea 3 (30 de 44), lo cual es coherente con la complejidad a priori de esta tarea. La tarea que menos estrategias exitosas presenta es la 4 (3 de 44), lo cual también coincide con los niveles de complejidad establecidos teóricamente.

En las estrategias exitosas erróneas se puede observar que cuando se requiere que realicen cálculo de límites laterales infinitos (tareas 1 y 4) el número de errores ECL aumenta (21 errores) respecto de las tareas 2 y 3 (2 errores).

Tabla 4. Frecuencias absolutas de las respuestas

Tarea	Estrategias											
	Exitosas			Ex. Erróneas			Erróneas/Interrumpidas					
	EEI	Otras	Tot	EMA	ECL	Tot	EMA	ECL	EI	Tot	NR	TOT
1	12	4	16	0	14	14	4	4	5	13	1	44
2	15	4	19	3	0	3	8	4	3	15	7	44
3	25	5	30	1	2	3	0	2	2	4	7	44
4	3	0	3	3	7	10	8	3	6	17	14	44
	55	13	68	7	23	30	20	13	14	49	28	176

Observamos que la dificultad analítica de la tarea 1 tiene un mayor peso que la algebraica en su resolución errónea (18 erróneas ECL de 22 erróneas, 81%) en comparación con el peso asociado a la mayor dificultad algebraica de la tarea 2 (11 errores EMA de 15 erróneas, 73%). Por otro lado, existe un equilibrio entre la dificultad analítica y algebraica en la resolución errónea de la tarea 4.

Las tareas cuyos descriptores de sentido estructural eran más complejos (tareas 2 y 4), acumulan cada una, 11 errores de manipulación algebraica y se diferencian en

el número de errores de cálculo de límite que son 4 en la tarea 2 y 10 en la tarea 4, lo que vuelve a coincidir con la complejidad teórica propuesta con anterioridad (Tabla 3).

Las tareas con descriptores de sentido estructural más simple (1 y 3), presentan, como era de esperar, muy pocos errores por manipulación algebraica (4 y 1 respectivamente) y, al igual que ocurre con las tareas 2 y 4, su diferencia es el número de errores en el cálculo de límite.

Prestando atención a las acciones (Transformación (T), Cancelación (X), Cálculo de límite (C)), se puede observar que apenas se incurre en errores de cancelación (5) y que la mayoría de los errores de manipulación algebraica son debidos a errores de transformación (22 del total de respuestas). Son bastante más los errores de cálculo de límites (36).

Conclusiones

Mayoritariamente los estudiantes aplican exitosamente las igualdades notables para simplificar las fracciones algebraicas (T1 y T4) (55 de 68), lo que hace pensar que los procedimientos algebraicos cercanos al sentido estructural están bastante desarrollados en el alumnado que utiliza estas estrategias. Por otro lado, los métodos generales Ruffini (T2) y fórmula (T3) se emplean sistemáticamente para cualquier ecuación polinómica, expandiéndola si es necesario, sin reflexionar sobre un tratamiento más eficiente de las ecuaciones pre-factorizadas. Además hay errores aislados en la interpretación de los coeficientes «correctos» que se obtienen del uso del método de Ruffini.

Dentro de las estrategias erróneas, los errores más comunes son de manipulación algebraica (Tareas 2 y 4) y de cálculo del límite infinito (Tarea 1 y 4). Destacan singularmente la aplicación errónea de la regla de L'Hôpital y el uso de inferencias inadecuadas del límite cuando x tiende a infinito. Estos resultados coinciden con los niveles de complejidad que se han establecido teóricamente para las tareas, lo que lleva a pensar que existe una relación entre el sentido estructural y la complejidad analítica y el crecimiento en el número de estrategias erróneas. Se plantea como continuidad validar esta conjetura en otros contextos.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos la colaboración y disposición de los profesores Alejandro Caño, Antonio Quesada y Joaquín García. Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER) y del proyecto «Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación» (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN).

REFERENCIAS

- ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México, México DF: Grupo Editorial Iberoamericano.
- AZCÁRATE, C. y CAMACHO, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 135-140.
- EDWARDS, B. S., DUBINSKY, ED., McDONALD, M.A. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 15-25.
- HOCH, M. y DREYFUS, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Maraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp, 305-312). Praga, Republica Checa: Faculty of Education, Charles University in Prague.
- LEGRAND, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repère IREM*, 10, 123-159.
- VEGA-CASTRO, D., MOLINA, M. y CASTRO, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 575-586). Ciudad Real, España: SEIEM.
- VEGA-CASTRO, D., MOLINA, M., CASTRO, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME*, 15(2), 233-258.