Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

TESIS DOCTORAL

LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO:

FENÓMENOS QUE ORGANIZA

María Teresa Sánchez Compaña

Granada, 2012

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

TESIS DOCTORAL

LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO: FENÓMENOS QUE ORGANIZA

Memoria de TESIS DOCTORAL dirigida por los Doctores Moisés Coriat Benarroch, María Consuelo Cañadas Santiago ambos del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y Francisco Javier Claros Mellado, del Departamento de Economía de la Universidad Carlos III de Madrid, presentada por María Teresa Sánchez Compaña, para optar al grado de Doctor en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: María Teresa Sánchez Compaña

VºBº: Los Directores

Fdo: Moisés Coriat Benarroch   María Consuelo Cañadas Santiago   Francisco Javier Claros Mellado

La presente memoria pretende cumplir con el requisito de la elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctor, dentro del programa de doctorado "Didáctica de la Matemática" impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Esta investigación se realizó en el seno del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática*. *Pensamiento Numérico* (FQM-193) de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

A Juan y Charo, por haberme dado todo, empezando por la vida.

A Sergio, acorde del amor que me sostiene.

A Inés y Paula, por enseñarme a ser MADRE.

Agradecimientos

En la “Inscripción” puesta al frente de su último libro de poemas, *Los conjurados*, Borges escribe que una dedicatoria –o, para el caso que nos ocupa, el análogo de estos agradecimientos– es algo sumamente misterioso, pues tiende a transformarse en una entrega de símbolos. Y es que las horas compartidas, la alternancia cíclica de la euforia y el escepticismo, las pesadillas, las manías, las incansables prospectivas y las recapitulaciones sin término acaban encarnándose en objetos, palabras, referencias, lugares o gestos, y todo ello junto va construyendo el alfabeto, solo sensible para aquellos que están en el secreto y la inteligencia de ese intercambio, de un código que ningún otro al margen de los protagonistas podría comprender.

Así, en esta entrega o intercambio simbólico, he de expresar mi agradecimiento a Sergio, mi amado esposo, mi báculo en este largo camino, y a mis dos niñas, Inés y Paula, hijas del sueño, pues como escribió un hombre sabio “Llegasteis. Como llegan los sueños: Sin querer, mas queriéndolo todos.”

Porque también mis padres quisieron soñarme un día quiero corresponderles aquí por ello, por ese instinto certero de la génesis, pero sobre todo por su inmarcesible confianza en mí y en mi trabajo. Si hoy estoy aquí, es gracias a ellos.

A mis hermanos y a mi abuela María les debo las expresiones de ánimo y la calidez que solo pueden provenir de los incondicionales, de los que nunca fallan.

A todos los demás familiares y amigos, que con su afecto y compañía han sabido endulzar las ausencias de una madre demasiado ocupada con definiciones, fenómenos, libros de texto y entrevistas, a esos padres y madres sustitutos, quiero dar también sinceramente las gracias.

A Moisés Coriat Benarroch he de agradecerle ante todo el tesoro de la guía, y el de ese hermano gemelo de la experiencia, el temple, contrapeso de mis zozobras, mis dudas, mis arrebatos. Pertenece a esos hombres que, aun persuadidos de la peligrosidad de la vida, no se desaniman. Peligrosa ha sido para mí esta batalla –a veces pareciera que a vida o muerte– contra los temibles ejércitos de las hipótesis, las pruebas y las refutaciones. Que los episodios de la lucha perduren auspiciosamente en mi memoria, como etapas de un rito de iniciación del que ahora salgo depurada, mejorada, es mérito exclusivamente suyo.

En esa misma línea de la moderación y el encauzamiento, Francisco Javier Claros Mellado ha ejercido, si es que puedo expresarlo así, como jefe de diplomacia, no sólo por su talante conciliador, sino porque consiguió, con mano suave pero firme, dominar mis desintegradoras pulsiones de huida, de abandono, de desaliento, con una paciencia inagotable que solo se explica por su condición de amigo verdadero.

A María Consuelo Cañadas Santiago le debo esas formas primorosas de la consolación que nuestro Miguel Hernández hubiera llamado, tal vez, "capricho de azúcar", "flequito del aire", y que no por pequeñas –o justamente por serlo– son menos fundamentales.

A mi gran colega Jesús Gallardo Romero le estoy agradecida por saber estar siempre cerca, siempre atento, siempre receptivo, justo en los momentos de más necesidad.

De Francisco Martínez González quisiera encarecer el oído para cierta música de las palabras que nosotros los matemáticos, a fuerza de movernos solo por la escala muda de la abstracción y la renuncia, acaso hemos perdido u olvidado.

A José Luis González Marí y Alfonso Ortíz Comas (q.e.p.d.) les debo mis primeros pasos en este apasionante mundo de la Didáctica de la Matemática, así como una impagable lección de humildad y modestia auténticas.

Mi admirada Carmen Azcárate me enseñó, justo cuando más lo necesitaba, esa forma esencial de generosidad entre los seres humanos que es el silencio, la atención y la escucha.

De Tomás Ortega quiero evocar en este lugar sus sabios consejos, sus acertadas observaciones y, sobre todo, el ejercicio impecable del sagrado arte de la hospitalidad.

María Victoria Velasco me mostró la fuerza que se deriva de la cohesión, y Don Miguel Herrero el cariño en el ofrecimiento de sus muchas joyas literarias.

A los profesores que, desinteresadamente, se entregaron a la no fácil labor de abrir las puertas de sus "aulas" y a los Institutos de Enseñanza Secundaria de la Comunidad Autónoma de Andalucía que me franquearon el acceso a sus valiosas bibliotecas, mi honda gratitud igualmente.

De mis alumnos brotó la semilla, el germen de este trabajo. Ellos han sido la fuente y el origen de la inspiración, el elemento de contraste externo, el factor de verificación y de falsación, el ejemplo y el contraejemplo, mi luz y mi norte, de tal manera que, en cierta medida, no es exagerado decir que *he aprendido* esta tesis directamente de aquellos a los que yo creía enseñar.

Y por último, y no menos importante, quiero dejar constancia de mi deuda con los miembros del grupo de investigación de la Universidad de Granada y del grupo de trabajo de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), por el interés mostrado en mis afanes a lo largo de todo este tiempo.

Índice

Índice de tablas

Índice de figuras

Símbolos y abreviaturas

Códigos aleatorios usados para referir once fragmentos de libros: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K.
Códigos arbitrarios usados para preservar el anonimato de centros: N, E, P, J, C y V
Códigos arbitrarios usados para preservar el anonimato de profesores: R, S, T, U, V, W, X, Y y Z
En tablas: H = Hombre; M = Mujer.

Fenómenos
- ADI: Aproximación Doble Intuitiva
- a.s.i: Aproximación Simple Intuitiva
- IVF: Ida y Vuelta en Funciones
- Iivs: Infinitud (no numerable) de ivs
- i.v.s: Ida y Vuelta en Sucesiones

Códigos de fenómeno
- G-E: Sistema de representación gráfico y formato ejemplo
- G-D: Sistema de representación gráfico y formato definición
- S-E: Sistema de representación simbólico y formato ejemplo
- S-D: Sistema de representación simbólico y formato definición
- T-E: Sistema de representación tabular y formato ejemplo
- T-D: Sistema de representación tabular y formato definición
- V-E: Sistema de representación verbal y formato ejemplo
- V-D: Sistema de representación verbal y formato definición

Conjuntos numéricos
- $\mathbb{N}$: Conjunto de los números naturales
- $\mathbb{Q}$: Conjunto de los números racionales
- $\mathbb{R}$: Conjunto de los números reales
- $\mathbb{R}^{*+}$: Conjunto de los números reales estrictamente positivos

Etapas educativas (varias leyes)
- BUP: Bachillerato Unificado Polivalente
- COU: Curso de Orientación Universitaria
- ESO: Educación Secundaria Obligatoria

Instituciones y grupos
- PNA: Pensamiento Numérico y Algebraico, grupo de la SEIEM
- SEIEM: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
- UMA: Universidad de Málaga
- UGR: Universidad de Granada

Leyes Educativas (nivel escolar)
- LGE: Ley General de Educación
- LOCE: Ley Orgánica de Calidad de la Educacion
- LOE: Ley Orgánica de Educación
- LOGSE: Ley de Ordenación General del Sistema Educativo

Otros
- PMA: Pensamiento Matemático Avanzado
- PME: Pensamiento Matemático Elemental

INTRODUCCIÓN

Pienso que si queremos aprender algo realmente profundo acerca de una cosa, hemos de estudiarla no en su forma "normal", regular o usual, sino en su estado crítico, febril y apasionado.

Imre Lakatos

Esta memoria estudia el límite finito de una función en un punto en el marco del proceso de su enseñanza y aprendizaje.

Se trata de un campo muy trabajado en Didáctica de la Matemática que, al mismo tiempo, aborda aspectos de la Filosofía o la Psicología.

El conocimiento del límite es esencial para entender la convergencia de series, la derivada o la integral y constituye, junto al conocimiento del número real, la base del Análisis Matemático. Como consecuencia, las herramientas y conceptos asociados con "el límite" son relevantes y exigen mejoras continuas en los enfoques didácticos destinados a mejorar su transmisión.

Organizamos esta memoria en seis capítulos que describimos a continuación.

En los dos primeros capítulos exponemos conexiones de nuestro trabajo con otras investigaciones y cómo, en términos generales, se distingue de ellas. Los tres siguientes capítulos son originales de nuestro trabajo. El Capítulo 3º es un estudio teórico. En los Capítulos 4º y 5º presentamos dos estudios experimentales destinados a revisar el contenido de libros de texto (Capítulo 4º) y a obtener y estudiar relatos de profesores de matemáticas (Capítulo 5º). Estos tres capítulos se desarrollan alrededor de los fenómenos organizados por varias definiciones de límite finito de una función en un punto. El Capítulo 6º reúne las conclusiones y expectativas de la investigación, para ello enumeramos las conclusiones obtenidas, estudiamos la refutación de las hipótesis enunciadas y valoramos el logro de los objetivos.

La primera etapa de nuestra investigación fue compartida con J. Claros, cuya memoria de investigación se presentó en 2010. Realizamos de manera coordinada un primer análisis de antecedentes. Esto explica referencias comunes y métodos compartidos en ambas memorias, que mencionaremos cuando haya lugar.

***

El *Capítulo 1º* reúne antecedentes del presente trabajo. Resumimos algunos aspectos de la historia del límite y destacamos la discusión sobre los tipos de infinitos. Aunque el límite de una función en un punto sea una noción relativamente reciente en la historia de las matemáticas, las ideas que permitieron su desarrollo no lo son y debieron ser refinadas durante mucho tiempo.

Algunos autores, como Williams (2001) y Blázquez (2000), clasificaron investigaciones didácticas relativas al límite de funciones. El primero organizó esas investigaciones en tres grandes áreas: (a) las que hacen uso de los términos concept image y concept definition, debidos a Tall y Vinner (1981); (b) las que se centran en los obstáculos del aprendizaje; y (c) las que se generaron por Dubinsky (1991) y Cottrill (1996), o se derivaron de ellos, que asumen la existencia de un esquema (una colección de objetos y procesos). Blázquez (2000), por su parte, estableció cuatro campos de interés para organizar las investigaciones relacionadas con el límite: (a) concepciones, (b) errores y dificultades, (c) contenidos de los manuales y (d) la enseñanza del límite. Nosotros organizamos el resto del capítulo mediante dos áreas. Por un lado, el aprendizaje y la cognición y, por otro, la enseñanza y los estudios curriculares relacionados con el conocimiento matemático objeto de estudio.

Numerosas investigaciones se han interesado por estudiar temas referentes al aprendizaje y la cognición. Las clasificamos en los dos bloques siguientes: (a) trabajos que se centran en las concepciones relativas al límite, obstáculos, errores y dificultades, y (b) las investigaciones que se ocupan de las creencias de los alumnos.

Las investigaciones relativas al tratamiento que recibe en los manuales el límite finito de una función en un punto se tratarán en el apartado sobre la enseñanza y el currículo. Para su organización distinguimos diferentes aspectos relativos a la enseñanza atendiendo a: (a) su presentación como herramienta o como objeto de enseñanza; (b) su introducción intuitiva o sintética a través de una definición y, en este último caso, de qué tipo de definición se trata; y (c) los ejemplos considerados para su ilustración o mostración.

Nuestra investigación utiliza (como se indicará más adelante) una búsqueda de libros de texto de educación secundaria. Por ello ubicamos las ideas relacionadas con el límite en los currículos de bachillerato de España.

Con esta revisión de antecedentes, constatamos, al igual que lo intuyen en su práctica tantos profesores que enseñan el límite en bachillerato y en los primeros cursos universitarios, las numerosas dificultades que es necesario afrontar para conseguir un tratamiento adecuado de la noción límite finito de una función en un punto en la educación secundaria.

La mayoría de las investigaciones consultadas reconoce que el formalismo no es la forma más adecuada de transmitir el concepto de límite en la educación preuniversitaria, donde se ha probado que los alumnos utilizan otras ideas de límite que incluso pueden estar en contradicción con una definición formal. (Véase Raman, 2002, 2004.) Además, se ha concluido que una parte de los alumnos no llega a entender la noción, aunque sí sea capaz de resolver algunos problemas algorítmicos con límites (Véase Sánchez, 1997.) Cornu (1983), entre otros, observa que se han enfatizado en exceso las rutinas algebraicas en detrimento del propio concepto.

Una de las cosas que más ha llamado la atención del equipo de investigación en la revisión de antecedentes es que, en la mayoría de los trabajos consultados, no se hacen distinciones entre los diferentes tipos de límite. Esto ha llevado a realizar dos investigaciones independientes y complementarias: la de Claros (2010), sobre el límite finito de una sucesión, y la presente investigación, que se ocupa del límite finito de una función en un punto. A lo largo de la memoria exponemos argumentos que justifican el estudio separado de las dos nociones.

***

En el *Capítulo 2º* presentamos el problema de investigación, detallamos las “herramientas” que componen el Área Problemática en la que se desarrolla el trabajo, exponemos, de forma general, la metodología empleada y enunciamos la meta general, los objetivos y las hipótesis.

El problema de investigación se comenzó a definir durante los cursos del Programa de Doctorado “Didáctica de la matemática y didáctica de las ciencias experimentales”, impartido por la Universidad de Málaga en el bienio 1998-2000 y trabajando como profesora de educación secundaria. En el equipo de investigación surgieron preguntas relativas a la noción de límite y a qué aspectos de ésta dificultan o facilitan su enseñanza. La situación de doble aproximación que todos mencionaban en el límite finito de una función en un punto, captó suficientemente la atención y llevó a estudiar la manera en que los investigadores del Área habían abordado esta situación. Diversos autores (Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995), Vinner (1991); Cottrill (1996); Mamona-Downs (2001); Sierpinska (1985)) se referían a la doble aproximación sin llegar a establecer una caracterización satisfactoria para nuestro trabajo. Necesitábamos apoyarlo en una idea que, dando sentido a la doble aproximación, integrara ésta con naturalidad en la propia definición. Freudenthal (1983) es la fuente de esta idea. Su trabajo, fundamental y ampliamente reconocido, permitió reconocer la doble aproximación como fenómeno organizado, junto con otros, por una variedad de definiciones de límite de una función en un punto. Esta idea es uno de los pilares de la investigación teórica descrita en esta memoria.

Freudenthal (1983) aportó una base para reflexionar sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje aunque lo hallemos en currículos diferentes. Algunos autores, como Dreyfus (1990) y Tall (1991), reconocen que el aprendizaje del límite, desde alguna perspectiva, requiere una capacidad lógica-abstracta y el estudio de esta cuestión plantea una discusión entre lo que diferentes autores denominan pensamiento matemático elemental (PME) y pensamiento matemático avanzado (PMA).

Asimismo las representaciones que se utilizan para la enseñanza del límite finito de una función en un punto son diferentes (Janvier, 1987; 1993).

Las fases y desarrollo temporal de la investigación también quedan descritas en el Capítulo 2º. Incluimos información relevante sobre la metodología en la que nos basamos para desarrollar y controlar los estudios teóricos y experimentales que llevamos a cabo. En los capítulos siguientes también se incluyen consideraciones metodológicas algo más detalladas.

***

El *Capítulo 3º* se compone de tres partes. La primera, más extensa, se dedica a describir y caracterizar fenómenos organizados por definiciones de límite finito de una función en un punto. Hemos hecho esto reconociendo los fenómenos organizados por cada definición y comparándolos de manera exhaustiva. Hemos establecido cómo a la equivalencia matemática entre la coloquialmente denominada "definición $\varepsilon-\delta$" de límite finito de una función en un punto y la llamada "caracterización por sucesiones" de dicho límite, le corresponde una equivalencia fenomenológica. Para comprender mejor los problemas generados por la enseñanza del límite, consideramos necesario, además de realizar un estudio detallado y minucioso de una definición seleccionada, "censar" el conocimiento matemático que se pone en juego cuando se enuncia una definición de límite finito de una función en un punto: dependencia, valor absoluto, orden total, acotación, procesos infinitos, tipos de infinitos y continuidad de la recta real o, por lo menos, la intuición de esta continuidad. También hemos detallado las conclusiones obtenidas y las hemos comparado con las expuestas por Claros (2010).

Las otras dos partes del capítulo son mucho más breves. En la segunda hemos usado argumentos fenomenológicos para establecer una distinción entre pensamiento matemático elemental y pensamiento matemático avanzado en lo relativo al límite finito de una función en un punto; se trata de una distinción extensamente buscada, en términos generales, en la investigación en educación matemática. En la tercera y última parte hemos censado las diferentes maneras de presentar los fenómenos descritos, usando como criterios los sistemas de representación enumerados por Janvier y los "formatos" en que suelen presentarlo los libros: definiciones o ejemplos.

El Capítulo 3º, en resumen, contiene ideas teóricas que, o bien hemos encontrado en la bibliografía, o bien hemos desarrollado y consideramos originales. Gracias a esto, somos capaces de dar sentido a frases como la siguiente: "la 'definición $\varepsilon-\delta$ 'de límite finito de una función en un punto organiza dos fenómenos: uno, intuitivo, que denominamos 'Aproximación Doble Intuitiva' (ADI), y otro, formal, que denominamos 'Retroalimentación' o 'Ida-vuelta en Funciones' (IVF).

La caracterización de estos fenómenos parece insuficiente si no se apoya en una validación "externa", en el sentido de que aporte pruebas o indicios que no dependan de la voluntad de la investigadora. A dicha validación se dedican los dos capítulos siguientes.

***

En el *Capítulo 4º* reunimos el trabajo realizado con libros de texto de educación secundaria, que abarca la búsqueda de libros, la organización del estudio, el diseño de un guión de trabajo que permite analizar sistemática y eficientemente, y de un modo replicable, los libros de texto, el análisis de resultados y la obtención de conclusiones.

La idea de centrar investigaciones tomando como objetos los libros de texto no es original y en el Capítulo 1º hemos mencionado a varios autores que la han seguido y fortalecido. Sánchez (1997) analiza el tratamiento que se ha dado a la noción de límite de una función en manuales de los siglos XIX y XX. Espinoza (1998) observa las reconstrucciones escolares propuestas en algunos libros de texto de 2º del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP), sobre la base de las organizaciones matemáticas y didácticas del límite de una función. Por su parte, Sierra, González y López (1999) analizan la evolución del concepto de límite de funciones en los libros de texto de bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU) entre los años 1940-1995. Las ideas intuitivas y la definición formal del límite han sido analizadas por Raman (2004). Esta autora observa que los vínculos entre ambas se han camuflado en los libros de texto de nivel universitario. La "definición $\varepsilon - \delta$" se presenta en una sección diferente de aquella en la que se discuten las ideas intuitivas acerca de los límites. Claros (2010), en su tesis, detecta los fenómenos organizados por una definición de límite finito de una sucesión en libros de texto de matemáticas de educación secundaria.

Si el Capítulo 3º describe y caracteriza fenómenos organizados por una variedad de definiciones de límite finito de una función en punto, el Capítulo 4º pretende validar externamente esta caracterización de fenómenos mediante el estudio de libros de texto de educación secundaria.

Nuestra muestra está formada por 28 libros publicados entre 1933 y 2005, lo que a nuestro entender aporta herramientas con las que describir algunas estrategias de enseñanza ofrecidas a los alumnos, a lo largo del tiempo, en lo relativo al límite finito de una función en un punto. Hemos utilizado los períodos educativos considerados por Sierra, González y López (1999), los cuales se apoyan en diferentes leyes o épocas de nuestra historia reciente. Hemos orlado con otras dos las épocas definidas por estos autores: un período inicial, previo al primero considerado por ellos y un período final. Esto extiende la búsqueda a libros que desarrollan los llamados "contenidos de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE)" y que no pudieron publicarse oficialmente hasta el año 2000.

Presentamos el estudio de uno de los libros de la muestra. Para este libro, describimos: (1) el método seguido; (2) cómo observamos los fenómenos descritos en el Capítulo 3º; (3) cómo precisamos el sistema de representación y el formato que los autores eligieron para expresarse. El estudio de los 28 libros se presenta en un anexo.

Para analizar los resultados obtenidos, hacemos una descripción global utilizando los datos recopilados en el estudio de libros. Esto incluye tablas de frecuencias absolutas para los fenómenos, su uso relativo en los sistemas de representación y el establecimiento de relaciones entre ambos fenómenos. El criterio, establecido en Sierra y González (1999) ha permitido describir la evolución de los fenómenos y observar cómo la presentación del límite finito de una función en un punto en libros de texto ha ido pasando de un estilo "formal" a un estilo "intuitivo" en el que se usan diferentes sistemas de representación a lo largo de los últimos 80 años.

***

Con el análisis de libros de texto obtenemos información que utilizamos para un segundo estudio basado en el análisis de los relatos de profesores de educación secundaria y bachillerato.

En el *Capítulo 5º*, obtenemos y estudiamos los relatos de nueve profesores. En este capítulo exponemos las etapas que hemos seguido desde la elaboración de un modelo de entrevista hasta el análisis de los datos y obtención de resultados.

Comenzamos presentando una serie de fragmentos extraídos del análisis de libros de texto, hecha en el Capítulo 4º, y justificamos esta selección. En líneas generales hemos considerado estos fragmentos porque usan los fenómenos en diferentes sistemas de representación y formatos (ejemplos-definiciones). Por tanto, pueden servir como patrón común que ayude a generar respuestas que permitan realizar un estudio de los relatos de los profesores de forma sistemática. A continuación mostramos el modelo diseñado para la realización y análisis de las entrevistas, justificando su adecuación a los fines perseguidos. Para el diseño de las nueve entrevistas llevamos a cabo entrevistas piloto y reuniones con el equipo de investigación que dieron como resultado el establecimiento de categorías y dimensiones, un protocolo de actuación para la investigadora y un guión para su entrega a los profesores en el momento de la entrevista. Parte de esta información es útil para el análisis de los datos.

A lo largo del capítulo se describe con detalle la etapa de realización de las entrevistas. En ella se deja constancia de las características que tiene la muestra y de las variables secundarias que se han obtenido, además de recoger alguno de los posibles inconvenientes que pueden surgir al realizar entrevistas semi-estructuradas.

El análisis de los relatos de los nueves profesores entrevistados se ha llevado a cabo según seis ideas organizativas, las cuales conducen a definir el “perfil fenomenológico” de cada profesor. La primera idea se refiere a la entrevista y su transcripción; ésta se distribuye en diferentes unidades de información, lo que constituye la segunda idea organizativa. Cada entrevista se desarrolla en cuatro fases: (a) presentación, (b) expresión espontánea del profesor (“fase espontánea”), (c) expresión del profesor inducida por la investigadora (“fase inducida”) y (d) término. Las unidades de información relevantes se hallan, principalmente, en las fases espontánea e inducida. Nuestra interpretación de la entrevista constituye la tercera idea organizativa. Desde ese momento usamos las palabras del profesor para asignar categorías de análisis a las opiniones y para reconocer la declaración de uso en clase (o no) de los fragmentos que el profesor ha tenido a bien considerar.

La cuarta idea organizativa son los comentarios sobre el profesor y el uso que hace de los fenómenos. La organización de esta información se hace por medio de unas categorías para cada fenómeno, teniendo en cuenta los sistemas de representación, las dos fases centrales de la entrevista y el uso o no uso declarados en el relato.

La quinta idea organizativa la constituyen una serie de comentarios sobre el profesor. Pretendemos dar una idea del manejo que el docente declara sobre los fenómenos que organizan la definición de límite finito de una función, los sistemas de representación en que se apoya y algunos elementos del contexto en que los usa, según nuestras categorías de análisis, las fases consideradas y la declaración explícita de utilización o no utilización en clase.

Con nuestra sexta y última idea organizativa pretendemos sintetizar la información obtenida del profesor. Para ello diseñamos lo que hemos denominado "perfil fenomenológico". Lo forman dos componentes, una orientada a lo numérico y otra a lo visual. La componente numérica servirá para determinar diferentes tipos de perfiles fenomenológicos.

Para terminar el Capítulo 5º enunciamos conclusiones con respecto a dos focos: los fenómenos y los profesores.

De esta forma, los Capítulos 3º, 4º y 5º incluyen nuestras aportaciones. Más concretamente:

-En el Capítulo 3º caracterizamos fenómenos organizados por definiciones de límite finito de una función en un punto.

-En el Capítulo 4º confirmamos el uso de esos fenómenos en una muestra de libros de texto que se extiende sobre unos setenta años.

-En el Capítulo 5º confirmamos el uso de esos fenómenos mediante entrevistas realizadas a nueve profesores de educación secundaria.

***

En el *Capítulo 6º* enumeramos las conclusiones obtenidas en la investigación. Estudiamos la refutación de las hipótesis enunciadas, valoramos el logro de los objetivos y recopilamos resultados obtenidos en la investigación que están relacionados con los objetivos. También mostramos la conexión que establecemos entre los capítulos de la memoria y los objetivos e hipótesis que la han guiado. Hacemos consideraciones acerca de la aplicación de los resultados obtenidos a la enseñanza y aprendizaje del límite de una función en un punto y mostramos perspectivas de aplicación de la investigación realizada con las que planteamos propuestas para continuar investigando. Por último, subrayamos la contribución de este trabajo: la descripción y caracterización de los fenómenos (ADI e IVF) organizados por una variedad de definiciones de la noción de límite finito de una función en un punto y la indagación de éstos en procesos de enseñanza-aprendizaje.

***

Hemos incluido anexos al final de cada uno de los Capítulos 3º, 4º, 5º y 6º.

El único anexo del Capítulo 3º (A3.1) contiene los requisitos matemáticos necesarios para manejar una definición de sucesión con límite finito y proviene de Claros (2010, pp.160-164). De esta manera, comparamos con comodidad dichos requisitos con los que son necesarios para manejar una definición de función con límite finito en un punto.

El Capítulo 4º contiene un extenso anexo (A4.1) con el análisis detallado y minucioso de los veintiocho libros de texto de secundaria que componen la muestra mencionada. Se han incluido en el anexo y no en el propio capítulo para hacer éste más legible.

El Capítulo 5º incluye 22 anexos. El anexo A5.1 contiene los informes de los nueve profesores que componen la muestra. El anexo A5.2 corresponde al guión que se elaboró y que, junto con los fragmentos seleccionados, se entregó a cada profesor en el primer encuentro. En el anexo A5.3 reproducimos unos materiales aportados por uno de los profesores entrevistados. El anexo A5.4 reproduce los guiones entregados a los nueve profesores en los que se recogen datos de información. Los anexos A5.5 a A5.13, reproducen las anotaciones de la investigadora en cada entrevista. Por último, los anexos A5.14 a A5.22 contienen las transcripciones íntegras de las entrevistas realizadas a cada uno de los nueve profesores de la muestra.

El Capítulo 6º contiene el anexo A6.1 que presenta el contexto personal y profesional en que se ha desarrollado la investigación.

***

Las referencias bibliográficas se han recogido al final de la memoria.

***

Los capítulos se reconocen por un número, los apartados por dos números, los epígrafes por tres números y los sub-epígrafes, cuando son necesarios, por cuatro números. En el Índice hemos incluido información hasta el nivel de sub-epígrafe (cuatro números) incluido.

Los anexos se reconocen, normalmente, mediante dos o tres números precedidos por la letra “A”; el primer número remite al capítulo y el segundo al número de orden dentro del capítulo. Cuando el anexo se refiere a un profesor, añadimos la letra-código que representa a éste.

Las tablas (respectivamente, las figuras) están numeradas de manera correlativa dentro de cada capítulo. Además de la palabra “tabla” (respectivamente, “figura”) incluimos el número del capítulo y el número de orden dentro de éste. Cuando la tabla o figura se refiere a un profesor, añadimos la letra-código que le representa y, en ocasiones, omitimos el segundo número.

La memoria incorpora tres índices (general, tablas y figuras) y una lista de símbolos y abreviaturas usados.

CAPÍTULO 1º: Antecedentes

[...] hay también otro tipo de consideración que puede conducir a los científicos a rechazar un antiguo paradigma, a favor de otro nuevo. Estos son los argumentos, raramente establecidos explícitamente, que hacen un llamamiento al sentido que tienen los individuos de lo apropiado y de lo estético: se dice que la nueva teoría es "más neta", "más apropiada" o "más sencilla" que la antigua. Es probable que esos argumentos sean menos efectivos en las ciencias que en la matemática.

Thomas S. Kuhn

Introducción

El límite (en general) es una idea en la que se sustenta el Análisis Matemático. Otras nociones, como la derivada o la integral, se construyen a partir de esa idea.

En Didáctica de la Matemática, el límite constituye un campo de investigación del que queremos mostrar algunos aspectos. Para ello organizamos el capítulo en tres apartados que corresponden, respectivamente, a cada una de las siguientes áreas: (a) Historia y Epistemología de la Matemática; (b) Aprendizaje y Cognición; (c) Enseñanza y Estudios curriculares en relación con el conocimiento matemático en estudio.

-El apartado 1.1 trata cuestiones relevantes de la evolución histórica de la noción de límite e incluye unas notas sobre los infinitos.

-En el apartado 1.2 incluimos investigaciones que se relacionan con la cognición y el aprendizaje. Consideramos, en primer lugar, los trabajos referentes a concepciones relativas al límite, obstáculos, errores y dificultades y, en segundo lugar, investigaciones que se ocupan de las creencias de los alumnos sobre el límite.

-La enseñanza y el currículo centran el contenido del apartado 1.3. Recogemos investigaciones que tratan sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite y las organizamos considerando: (a) propuesta de mejora del proceso de enseñanza; (b) investigaciones realizadas con profesores; (c) trabajos sobre el tratamiento que recibe en los manuales el límite finito de una función en un punto. Terminamos el apartado con información sobre el currículo oficial en España y en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

1.1 Historia y Epistemología

1.1.1 La noción de límite

El límite de una función en un punto es una noción relativamente reciente en la historia de las matemáticas. Esta noción reúne tres ideas: (a) número real; (b) función numérica de una variable real; y (c) límite, propiamente dicho. Nuestro recorrido histórico se apoya en autores que han estudiado la historia de las matemáticas o, al igual que nosotros ahora, han reconocido que la componente histórica no constituye su principal foco de atención.

Entre estos autores, destacamos a Blázquez (2000), Boyer (1999), Claros (2010), Cornu (1983), Robinet (1983), Sánchez (1997) y Sierra, González y López (1998).

Blázquez (2000) observa que algunos autores, como Cornu (1983), Sánchez (1997) o Sierra, González y López (1998), señalan un paralelismo entre las concepciones históricas y las concepciones del alumno y justifican la relevancia de considerar las concepciones que subyacen en las distintas etapas de la evolución histórica de la noción de límite. Siguiendo las investigaciones de Blázquez (2000), Cornu (1983) y Robinet (1983) se puede articular la evolución histórica del concepto de límite en cuatro etapas que resumimos.

Etapa 1. De Eudoxo de Cnido a la primera mitad del siglo XVIII. Métodos infinitesimales

Esta primera etapa abarca dos fases, una, que llamaremos “empírica” y otra, superadora de ésta, que debemos a Newton y a Leibnitz.

En la primera, se tienen métodos intuitivos que prefiguran el límite como herramienta para resolver cierto tipo de problemas. Presentamos algunos de estos métodos infinitesimales a continuación, siguiendo a Boyer (1999).

Método de exhausción. Los orígenes del concepto de límite los encontramos en la antigua Grecia con Eudoxo de Cnido, cuando emplea el método de exhausción para calcular el área de figuras planas, volúmenes de cuerpos, longitudes de curvas, tangentes a las curvas, etc. Según Arquímedes, Eudoxo enunció el lema que afirma que si tenemos dos magnitudes que tengan una razón, entonces se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra. Esta propiedad excluía el uso de los infinitésimos.

Método de las tangentes de Fermat. Fermat considera que la curva y su tangente en un punto coinciden en un entorno pequeño de dicho punto.

Método de los infinitésimos de Kepler. Este método se empleaba para resolver problemas relacionados con medidas de volúmenes y con problemas de astronomía. Consiste en considerar que todos los cuerpos se descomponen en infinitas partes, infinitamente pequeñas, de áreas o volúmenes conocidos. También Galileo utilizó un método semejante para mostrar que el área encerrada bajo la curva tiempo-velocidad es el espacio.

Método de los indivisibles de Cavalieri. De nuevo se trata de un método utilizado para determinar áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos. Consiste en una superposición de elementos cuya dimensión era una unidad menor. Torricelli fue uno de sus seguidores, mientras que Pascal y Fermat mejoraron el método.

Estos métodos surgieron para resolver problemas planteados por la mecánica, la astronomía o la física, y fueron el origen del cálculo infinitesimal. Eran válidos como métodos separados sin tener conciencia de sus conexiones. Se necesitaba un concepto de "límite" para armonizarlos.

La segunda fase se considera superadora de la anterior. Cubre los dos primeros tercios del siglo XVII; en ella se manejan unos elementos no demasiado bien definidos y se desarrollan varias técnicas y métodos infinitesimales, con los que se pretende resolver antiguos y nuevos problemas de un modo intuitivo que evita contradicciones y lleva, bajo una visión de generalización y unificación, al descubrimiento simultáneo de un "algoritmo universal": el Cálculo Infinitesimal por parte de Newton y Leibniz.

Newton es el creador de la teoría de las fluxiones, teoría de naturaleza geométrico-mecánica elaborada para tratar de forma general los problemas del análisis infinitesimal. Propone el *Método de las Fluxiones*, donde se estudian magnitudes variables, introducidas como abstracción de diferentes formas del movimiento mecánico continuo, denominadas fluentes. Todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo. Después se introducen las velocidades de la corriente de los fluentes, que se denominan fluxiones.

Con su teoría de las fluxiones, Newton resuelve dos problemas (determinación de la relación entre fluxiones, cuando es conocida la relación entre fluentes; y su recíproco). Para resolverlos aplicó métodos basados en el uso de cantidades infinitamente pequeñas.

En su obra *Tratatus quadratura curvarum*, de 1704, explicita el método de las "razones primeras y últimas", con el que afirma que las razones últimas en las que las cantidades desaparecen no son realmente las razones de cantidades últimas, sino los límites hacia los cuales se aproximan constantemente las razones de cantidades, que decrecen sin límite, y hacia los cuales pueden aproximarse tanto como cualquier diferencia dada, pero sin sobrepasarlos o alcanzarlos antes de que las cantidades disminuyan indefinidamente. Con este método Newton estuvo muy cerca de dar una definición del límite, aunque emplease en su terminología expresiones imprecisas.

Por su parte, Leibnitz, con su *Teoría sobre las diferenciales,* contribuye al nacimiento del análisis infinitesimal. Inquieto por la nitidez de las nociones y el aspecto formal de la matemática, observó que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas cuando estas diferencias se hacen infinitamente pequeñas.

En esta primera etapa, la concepción del límite es geométrica, ya que se trabaja con magnitudes, en problemas de índole geométrica como el cálculo de áreas de figuras planas y volúmenes de figuras espaciales o el cálculo de tangentes a curvas. Sin embargo el trabajo de Leibnitz muestra ya una transición a la siguiente etapa, al tratarse de un trabajo más algebraico, más formal. Vemos como se ha desechado el rigor de la exhausción griega, y se han ideado grandiosos métodos heurísticos. A partir de aquí se plantea la necesidad de generalizar y unificar los problemas y métodos infinitesimales mediante su reformulación sobre las bases rigurosas del nuevo Análisis Infinitesimal.

Etapa 2. Segunda mitad del siglo XVIII. Transformación de los fundamentos del análisis infinitesimal

Los matemáticos de esta época, con intención de solucionar algunos problemas, emplean infinitésimos, que surgen de la teoría de las razones primeras y últimas de Newton. Observan cómo era necesario extender las operaciones del análisis a un mayor número de funciones.

En esta época destacan los trabajos de Euler, Lagrange y D´Alembert. Euler parte del método de fluxiones de Newton y del cálculo diferencial de Leibnitz e integra ambos métodos en una rama más general de las matemáticas que se llama desde entonces Análisis y se ocupa del estudio de los procesos infinitos. Euler basó su obra en el concepto de función formulado por Bernoulli y que se define como "cualquier expresión analítica, finita o infinita, formada con la cantidad variable y números o cantidades constantes" (Boyer, 1999, p. 558). Al trabajar sobre funciones y no sobre variables, Euler separa el Cálculo de la Geometría.

Lagrange, considera el cálculo integral como inverso del cálculo de derivadas. Critica el enfoque de Newton, trabaja con desarrollos de funciones en series de potencias (series de Taylor), definiendo las derivadas como los coeficientes de las potencias sucesivas. La concepción algebraica del análisis subyace bajo su enfoque, contribuyendo al paso del dominio geométrico al dominio numérico.

D'Alembert modifica el método de las primeras y últimas razones de Newton, creando una primera teoría de límites. La primera definición de límite que D'Alembert escribió para la *Encyclopédie* fue la siguiente:

> *Definición 1. Llama a una cantidad el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella).* (Boyer, 1999, p. 56)

Este planteamiento no es algorítmico, no obtiene el suficiente reconocimiento y sus contemporáneos siguen utilizando el lenguaje y las concepciones de Leibnitz y Euler.

En esta segunda etapa, subyace básicamente una concepción algebraica, ya que los problemas de "paso al límite" se vinculan a las funciones y se resuelven con ayuda de operaciones algebraicas (manipulación de series o cálculos con infinitos). El trabajo de D'Alembert supone la transición a una nueva etapa en la que el límite se concibe numéricamente.

Etapa 3. Siglo XIX y principios del siglo XX. Aritmetización del análisis

A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX los matemáticos observaron la necesidad de construir una teoría de límites como base del Análisis Matemático. Para ello intentaron reconstruir el análisis abandonando la geometría y basándose en los conceptos aritméticos. De ahí el nombre de esta etapa: "Aritmetización del análisis". Hay dos motivos principales para este cambio, debido a los problemas que surgen: (a) ya no se pueden resolver situaciones con los infinitésimos (como la convergencia o divergencia en las series de Taylor, resolución de ecuaciones diferenciales, desarrollos asintóticos e integrales abelianas), y (b) en la física se pone de manifiesto la necesidad de modernizar los métodos utilizados hasta entonces.

Cauchy, Bolzano, Weierstrass y Heine son autores destacados en esta época. A continuación resumimos los aspectos más relevantes de sus aportaciones sobre las cuestiones mencionadas.

Cauchy rechazó el planteamiento de Lagrange y tomó como punto de partida la definición de límite dada por D'Alembert aunque le impone un carácter más aritmético y riguroso para hacerla más precisa, prescindiendo de la geometría, de los infinitésimos y de las velocidades de cambio. Cauchy formuló la siguiente definición de límite, casi tan precisa como la definición moderna.

> *Definición 2*. *Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos este último valor se llama el límite de todos los demás*. (Boyer, 1999, p. 647)

Cauchy definió también los infinitésimos como una cantidad variable que converge a cero, la derivada como el límite de los cocientes incrementales cuando el incremento de x tiende a cero y la continuidad de forma análoga a la actual.

Durante el siglo XVIII la integración y la derivación habían sido consideradas como procesos inversos. Sin embargo, la definición que daba Cauchy de derivabilidad, mostraba claramente que no existía la derivada en un punto anguloso o en un punto en que la función fuese discontinua, mientras que la integral no tenía por qué ofrecer dificultades.

Bolzano desarrolló su obra de forma paralela a la de Cauchy, trabajando en la misma idea de límite. Bolzano aportó además una definición de continuidad basada en la de límite.

Cauchy hizo uso de expresiones tales como "valores sucesivos", "aproximarse indefinidamente" o "tan pequeño como uno quiera". La formalización que estaba experimentando la Matemática en esta época hizo necesario que se reformulara la definición de límite (Boyer, 1999).

Weierstrass, entre otras muchas cosas, como por ejemplo dar una definición satisfactoria de número real, trató de dar una definición depurada de la noción de límite. Él y Heine dieron paso a la aritmetización del análisis al dar una definición depurada del límite hoy conocida como "definición $\varepsilon - \delta$".

> *Definición 3. Si dado cualquier ε, existe un η_0 tal que para $0 \prec \eta \prec \eta_0$, la diferencia $f(x \pm \eta) - L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de f(x) para $x = x_0$*. (Boyer 1999, p. 696)

Weierstrass criticó la expresión "la variable se acerca a un límite" puesto que sugiere tiempo y movimiento, en su definición se hace una formulación puramente estática. En esta definición no se exige, como se hace en la que manejamos actualmente, que ε y η sean mayores que cero. También vemos que el símbolo η ha sido sustituido por δ.

La concepción del límite es esencialmente numérica en esta tercera etapa. Se observa una evolución desde una visión "dinámica", debida a Cauchy, a otra "estática", debida a Weierstrass.

Etapa 4. Siglo XX. Generalización

En la última etapa, la aproximación al concepto de límite fue claramente topológica, ya que durante el siglo pasado se alcanzó un alto grado de abstracción y se generalizaron los conceptos del Cálculo a conjuntos no necesariamente numéricos. Los espacios topológicos permitieron construir las nociones básicas del Cálculo sobre generalizaciones de las funciones, utilizando para ello las características de que están dotados.

Como hemos podido observar no es fácil delimitar el nivel de contribución de cada matemático al nacimiento del Cálculo Infinitesimal. El descubrimiento se fue forjando de una forma gradual, en trasformaciones casi imperceptibles mediante continuadas apariciones de nuevos métodos y técnicas, que se iban entrelazando entre sí.

En la etapa empírica anterior a Newton y Leibniz hemos visto como la noción de límite se iba abriendo paso lentamente, y de qué forma estos autores, bajo concepciones y métodos infinitesimales, fueron capaces de separarse de la geometría encontrando el principio general que permitiría reducir las operaciones fundamentales del Cálculo Infinitesimal a un algoritmo universalmente válido, originando una transformación esencial en el tratamiento y resolución de problemas.

1.1.2 Unas notas sobre el infinito

Podemos situar el origen de la idea de infinito en la antigua Grecia. Según Boyer (1999), el primero en usar el símbolo "∞" en el cálculo de límites fue Wallis. Lo llamó "lazo del amor" y fue al trabajar la siguiente sucesión (con límite $\frac{1}{3}$) $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$.

Para comprender mejor los problemas generados por la enseñanza del límite, consideramos necesario "censar" el conocimiento matemático que se pone en juego cuando se enuncia una definición de límite finito de una función en un punto. Una lista más exhaustiva de requisitos se estudiará en 3.3.3; en este lugar recopilamos algunas ideas sobre los tipos de infinitos.

El *infinito potencial* y el *infinito actual* están estrechamente relacionados con la noción de infinito. El infinito potencial se relaciona con la idea de proceso infinito. Se trata de una idea que puede situarse en la antigua Grecia, donde se consideraba que el tiempo no tenía final. Ortiz (1994) observó que la noción de infinito potencial se basa en las operaciones reiteradas e interminables; por muy grande que sea n siempre podemos concebir uno mayor, y así, sucesivamente.

Aristóteles distingue dos tipos de infinitos: (a) el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y (b) el infinito como una totalidad completa. El primero puede ser considerado como lo que hoy en día denominamos infinito potencial y el segundo como el infinito actual. De todas formas, aunque en sus trabajos emplea la noción de infinito potencial, en el libro III de la Física, se hallan evidencias del rechazo que Aristóteles muestra ante el infinito actual. En este libro, refuta la existencia del infinito actual. Se basa en que, aunque el tiempo y el movimiento son procesos potencialmente infinitos, nunca están dados como una totalidad infinita. De hecho Aristóteles afirma que "los matemáticos ni necesitan ni usan el infinito" (Boyer, 1999, p.138).

Como se puede observar, la noción de infinito actual ha recibido rechazo, mientras que la de infinito potencial, no; Aristóteles y otros autores como D'Alembert negaron la existencia del primero. De hecho, Galileo Galilei empezó a admitir la existencia del infinito actual, aunque una caracterización definitiva de la idea habría de esperar a Bolzano, Cantor y Dedekind. Cantor puso de manifiesto la diferencia entre infinito potencial e infinito actual e hizo patente la existencia de varios infinitos en la matemática (numerable, no numerable, entre otros). Cantor formalizó algunos conjuntos, como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{Q}$, y empleó la correspondencia biyectiva para demostrar la numerabilidad o no numerabilidad de un conjunto numérico. Finalmente Dedekind formalizó por primera vez los conjuntos numéricos como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

La noción de infinito ha sido de gran interés también para los filósofos; recogemos aportaciones de filósofos apoyándonos en la lectura que han hecho de ellos algunos educadores matemáticos. En los trabajos de Kant se distingue entre infinito potencial e infinito actual. Kant afirma que el infinito potencial no es más que ese avance de la razón en su proceso constructivo, sin interrupción y sin límite. Por su parte sitúa el infinito actual en el mundo de las ideas, no en el de los conceptos. El infinito actual es definido por Kant como la capacidad de la razón para aprehender una totalidad infinita. También afirma que la distinción entre uno y otro debe realizarse en torno a la experiencia, según la cual el infinito potencial se puede concebir mediante ella, mientras que el infinito actual se debe construir mediante una reflexión. El infinito potencial es constructible y el actual no (Cañón, 1993).

Hitt (2003) reflexiona sobre los trabajos de Kant, Zenón de Elea, Bolzano y Cantor. Analiza los dos tipos de infinito en los trabajos de estos autores. Zenón de Elea utilizó su paradoja de Aquiles y la tortuga para distinguir los dos tipos de infinito: el potencial y el actual. El infinito potencial se observa en el hecho de que Aquiles nunca alcanza a la tortuga. Si, por el contrario, aceptamos que Aquiles la alcanza, el infinito actual está presente. Esto pone de manifiesto la conciencia de todos los elementos de un conjunto infinito de manera simultánea.

A partir de Bolzano el infinito actual pierde su carácter contradictorio y su aportación se ha mantenido hasta el momento presente. Bolzano construye su teoría basándose en la noción de infinito, a la vez que define por primera vez la idea de conjunto infinito.

Fischbein (1982) también realizó una distinción de los dos tipos de infinito. Afirma que el infinito potencial responde a una interpretación natural e intuitiva del infinito, mientras que el infinito actual es contra-intuitivo.

D'Amore (1996), además de los autores ya comentados, considera otros que también han trabajado la noción de infinito: Euclides de Alejandría, Nicolás de Oresme y René Descartes. Al igual que Aristóteles, Euclides evita el uso del infinito actual, ocupándose única y exclusivamente del infinito potencial. Oresme estudió la serie $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$, llegando a demostrar que el valor de la suma anterior es mayor que cualquier valor M que fijemos. No sabemos si Oresme se percató de que, en su trabajo están presentes los dos tipos de infinito. Por otro lado René Descartes, aunque lo trabaja, no toma una posición fuerte y propia en lo que respecta al infinito.

1.2 Cognición y aprendizaje

En este apartado repasamos investigaciones que tratan (1) concepciones, obstáculos, errores y dificultades relativas a la noción de límite y (2) creencias de los alumnos.

Sobre estas cuestiones hay una amplia bibliografía y hemos hecho una selección buscando autores con cuyas ideas estuviéramos relativamente de acuerdo. La lista de obras efectivamente manejadas es la siguiente: Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995), Barbé (2005), Blázquez (2000; 2001(a); 2001(b); 2002), Blázquez, Gatica, Benegas y Ortega (2006; 2009), Cornu (1981; 1983; 1991), Corica y Otero (2009), Cottrill (1996), Cummins (1960), Delgado (1995), Dubinsky (1991), Earles (1995), Mamona-Downs (2001; 2009), Monaghan (1991), Navarro (2002), Palmiter (1991), Przenioslo (2004), Raman (2002; 2004), Robert y Boschet (1984), Robinet (1983), Sánchez (1997), Sierpinska (1985; 1987; 1990), Sierra, González y López (1998; 1999; 2000), Sullivan (1976), Tall (1985; 1986; 1991; 1992; 1995; 1996), Tall y Schwarzenberger (1978), Tall y Vinner (1981), Vinner (1991) y Williams (1991).

1.2.1 Concepciones, obstáculos, errores y dificultades relativas a la noción de límite

Por el contenido de los textos consultados, hemos considerado conveniente separar, en nuestro resumen, los trabajos que tratan sobre concepciones y obstáculos de los que tratan sobre errores y dificultades.

Concepciones y obstáculos

Cornu (1983) se centró en concepciones y obstáculos en el aprendizaje del límite, que poseen los alumnos a priori. Este autor recoge y distingue "tender a" como aproximarse (eventualmente lejos de él), aproximarse sin llegar a alcanzarlo, aproximarse alcanzándolo, parecerse (sin variación, como en la expresión "este azul tiende a violeta"). Con respecto al "límite", este autor lo considera como límite inmóvil alcanzable, límite inmóvil inalcanzable, punto al que uno se acerca sin alcanzarlo, punto al que uno se acerca y alcanza, máximo o mínimo, límite inferior o superior, intervalo, lo que viene "inmediatamente después" de lo que se puede alcanzar, restricción, fin.

Cornu (1981) distinguió varios modelos de límite: límite a no sobrepasar, cota que uno se prohíbe alcanzar, y otros más que son utilizados en el lenguaje común. Entre todos éstos predominaba el carácter inalcanzable del límite. Este autor afirmó que, aunque la constitución del concepto de límite en un alumno no tiene por qué ser exactamente un calco resumido de la manera en que se ha llegado a formular históricamente el concepto de límite hasta llegar a un enfoque actual, aparecen ciertas semejanzas.

Distingue cuatro obstáculos principales, que describimos a continuación.

1. Transposición numérica. Una de las dificultades históricas consistía en abstraer el concepto del contexto geométrico y cinemático, para trabajar con números y no con magnitudes. Este salto, denominado “transposición numérica”, es considerado como uno de los obstáculos más difíciles de superar.

2. Noción metafísica. Se refiere a la utilización del concepto de límite como un pensamiento más abstracto, en el que interviene la idea de infinito. Las nociones de infinito y de límite son (o eran) más propias de la metafísica que de las matemáticas, e indica las reticencias a incluirlos en este campo.

3. Noción de infinitamente pequeño y de infinitamente grande. El hecho de trabajar con cantidades variables mayores que cero pero muy próximas a él, sin llegar nunca a ser cero o de cantidades mayores que cualesquiera otras.

4. Posibilidad de “alcanzar el límite”. El hecho de que el límite se alcance o no, es una dificultad histórica. Antes de que se unificara la idea de límite, los matemáticos no podían aclarar las nociones de “grandeza última”, “aproximación última” y otras semejantes. Los alumnos tienden a pensar en sucesiones monótonas que no alcanzan el límite (Cornu, 1983).

Blázquez (2000) discrepó de la idea de transposición numérica, considerando que “este obstáculo no aparece en la actualidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje puesto que los alumnos están habituados a trabajar numéricamente ciertas situaciones que relacionan magnitudes” (p. 9). Esta autora afirma que:

> *Los alumnos se encuentran también con un obstáculo que no aparece históricamente, el problema del paso de la noción estática dada en la definición del concepto y la noción dinámica que está presente en casi todos los acercamientos intuitivos al concepto*. (p. 10)

Los obstáculos relacionados con el concepto de límite han sido tratados por Sierpinska desde una perspectiva epistemológica. Sierpinska (1985) propuso una lista de obstáculos basados en la génesis histórica del concepto y clasificó los obstáculos en cuatro grupos que describimos a continuación:

1. Horror infiniti. Es la resistencia a la aceptación del infinito actual. Distingue entre los que niegan el estatus de operación matemática de "paso al límite" (son razonamientos mediante inducción incompleta, búsqueda por aproximaciones), obstáculos de tipo algebraico (se trata de asignar propiedades de los términos de una sucesión al límite) y obstáculos de tipo físico (que se refieren a la noción dinámica de acercamiento).
2. Obstáculos relacionados con el concepto de función. El propio nombre describe el tipo de obstáculos a los que hace referencia. Incluye, entre otros, olvidar el dominio, reducir el estudio al de las funciones monótonas, restringirse a sucesiones, o confundir la función con los valores que toma, generando así vaguedad entre los extremos y el límite.
3. Obstáculos de carácter geométrico. La intuición de límite como frontera de conjuntos, al igual que la idea de la diferencia entre una cantidad variable y su límite.
4. Obstáculos de carácter lógico. Surgen durante la formalización del concepto. Por ejemplo, en el intercambio de cuantificadores y en el uso del símbolo del límite. A su vez, para Sierpinska hay obstáculos "heurísticos" y "rigurísticos".

El obstáculo heurístico es el carente de rigor. *"*El paso al límite no es considerado como una operación matemática sino un método heurístico que guía al descubrimiento gracias al razonamiento basado en una inducción completa" (Sierpinska, 1985, p. 372).

Dentro de los obstáculos heurísticos diferencia entre estáticos y cinéticos, según se refiera a intuiciones no relacionadas con la idea de movimiento o a intuiciones ligadas a esta idea. En el obstáculo heurístico estático, las aproximaciones son geométricas y numéricas. En el obstáculo heurístico cinético, para encontrar el límite, es necesario aproximarse al infinito geométricamente o numéricamente.

Los dos obstáculos "rigurísticos" reciben nombres de personas: Eudoxo y Fermat. En el obstáculo Eudoxo, "el paso al límite no es una operación matemática, sino un riguroso método de demostrar ciertas relaciones entre cantidades" (p.372).

En el obstáculo Fermat, "el paso al límite es una operación matemática que consiste en sustituir números variables y omitir valores no deseados con respecto a otros" (p. 372).

En un artículo posterior, Sierpinska (1987) propuso crear situaciones didácticas que ayudasen a superar los obstáculos epistemológicos relativos al límite, que fueron descritos en Sierpinska (1985). La autora además relacionó los obstáculos con ideas como conocimiento científico, infinito, función y número real. Para llevar a cabo este proyecto, la autora presentó una serie de sesiones de 45 minutos con estudiantes de humanidades de 17 años. Eligió el tema de las sucesiones numéricas. Una de las actividades que propuso fue "0,9999....=1", con la que esperaba que los alumnos superasen, al menos, tres obstáculos: conocimiento científico, infinito y número real. Algunos alumnos pusieron de manifiesto los infinitos potencial y actual. También surgió la noción de "infinitamente pequeño".

En general, la noción de infinito generó grandes conflictos en los alumnos. Por un lado tenían la concepción primitiva de infinito como algo ilimitado. Por otro lado tenían la idea de que 0,999... era igual a 1, es decir, la sucesión se va aproximando cada vez más a uno y lo alcanza.

Para la concepción de infinito como algo ilimitado, la autora distinguió cuatro actitudes, que describimos a continuación según la actuación de los alumnos:

1. Actitud intuitiva y definidora. Todas las secuencias son finitas y el número de sus términos está bien determinado. En este caso el número 0,9999... denota una aproximación del número uno, pero no es el valor uno.
2. Actitud intuitiva, que mantiene la indefinición. Las secuencias limitadas son finitas. Se trata de un caso particular del anterior.
3. Actitud discursiva definidora. Todas las secuencias son finitas pero algunas veces es imposible determinar el número de términos; el verdadero límite de una secuencia sería su "último término". Si en algún caso no se puede determinar este último término, se puede dar una aproximación de él.
4. Actitud discursiva indefinida. Todas las secuencias con límite son finitas.

Por otro lado, la implicación "Si A es infinito entonces A es ilimitado" fue rechazada y se admitió la existencia de dos tipos de infinitos: el infinito limitado y el infinito ilimitado.

Las actitudes relativas al conocimiento y al infinito hicieron que hubiese cuatro modelos de concepciones de límites:

1. Modelo potencialista, en el cual el límite no es alcanzado.
2. Modelo potencial-actualista de límite, en el que después de un tiempo infinito la sucesión infinita se completa y el límite es alcanzado.
3. Modelo frontera del límite. Una sucesión es un conjunto, el cual puede ser limitado o ilimitado. En este caso una sucesión puede tener dos límites y ser ambos elementos de la sucesión o tener un solo límite y no ser éste un elemento propiamente dicho de la sucesión.
4. Modelo infinitesimal del límite. Surge cuando en la definición de límite se expresa que la diferencia entre un valor que consideramos límite y el conjunto de términos de la sucesión es infinitamente pequeña.

Sierpinska concluyó que, aunque ninguno de los alumnos superó de manera completa los obstáculos epistemológicos relativos al límite, surgieron conflictos que pueden ser puntos de partida para aprendizajes posteriores.

En otro artículo, Sierpinska (1990) aportó una lista de obstáculos relativos al límite secuencial y los actos de comprensión necesarios para superar dichos obstáculos. Los actos de comprensión los diferencia según tengan que ver con el sujeto, con el verbo y la frase adverbial, con el objeto y su relación con el sujeto de la frase anterior; y, por último, si tienen que ver con la definición formal.

Basándose en los modelos establecidos por Cornu (1983), Williams (1991) trató de conciliar aspectos formales e informales del análisis. El propósito de este autor fue explorar las visiones que los alumnos universitarios tienen sobre algunas concepciones del límite, distinguiendo las siguientes: (a) concepción dinámica, (b) límite como cota, (c) concepción formal, (d) límite como valor inalcanzable y (e) límite como aproximación. Para ello, puso en práctica una secuencia didáctica con 10 alumnos, basada en la presentación de descripciones y ejemplos conflictivos que pretendían la acomodación o reorganización de las concepciones. Williams observó la persistencia de las concepciones previas de los alumnos, debido a que las situaciones planteadas no constituían una alternativa. Concluyó que la concepción dinámica y la de límite como valor inalcanzable coexisten con la definición formal. Esto se puso de manifiesto porque los alumnos describieron su comprensión sobre el límite en términos de dos o más modelos informales y aceptaron diferentes descripciones de límite como válidas.

También Robinet (1983) trabajó los obstáculos con la finalidad de elaborar secuencias de enseñanza del límite en educación secundaria. Su trabajo contiene un análisis preliminar del lugar de la noción en la enseñanza, tanto en programas oficiales, como su estructura en los manuales, las estrategias de presentación, empleo de gráficas, formalización y notaciones. Además, este autor llevó a cabo un análisis histórico de la noción de límite funcional y un estudio de las posibles situaciones que pueden servir para introducir el concepto (derivada, continuidad o ramas infinitas).

La secuencia propuesta está basada en un estudio gráfico y numérico de tendencias de funciones elementales como la parábola y la hipérbola, en las que se busca la generalización. Este autor reconoció la dificultad de encontrar el equilibrio entre dos opciones a la hora de introducir la noción de límite: (a) una aproximación completamente cualitativa, que no permite establecer teoremas y propiedades, pero que vincula el límite con fenómenos reales; y (b) una aproximación completamente formal que permite resolver problemas para funciones en general. Utilizó una definición simplificada de la definición formal para introducir los teoremas generales.

En su tesis, Sánchez (1997) analizó concepciones y obstáculos en la enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función en el primer curso de una ingeniería técnica. Al igual que Cornu (1983), la investigadora concluyó que las concepciones históricas se identifican con las concepciones de los alumnos, matizando la aparición de la concepción geométrico-gráfica. También sostiene que, tras la formación, la concepción numérica estática prevalece sobre la dinámica, aunque inicialmente es al revés, favorecida por el llamado "cálculo de límites", que está desligado del concepto de aproximación y ligado al contexto algebraico.

Basándose en los trabajos referenciados anteriormente, Sánchez (1997) aportó una lista de obstáculos epistemológicos y didácticos que fueron detectados en un cuestionario que se pasó a alumnos del Curso de Orientación Universitaria (COU) (17-18 años). Resumimos estos obstáculos a continuación: (a) Centrarse en la forma de las aproximaciones de los valores de las variables independiente y dependiente más que en las propias aproximaciones. (b) Usar exclusivamente la aproximación gráfica, sin acompañarse de los correspondientes valores de las aproximaciones numéricas de las variables independiente y dependiente. (c) Creer que la existencia de límite de una función en un punto significa que los valores de la variable dependiente se acercan a algo. (d) Creer que existe el límite de una función en un punto cuando el número de valores de la variable dependiente que se acercan a él es infinito (o muy grande) y no casi todos ellos. (e) Creer que el entorno es siempre simétrico. (f) Creer que las variables independiente o dependiente toman el valor de ∞. (g) Creer que las letras $\varepsilon - \delta$, que aparecen en la definición formal de límite de una función en un punto, representan magnitudes constantes o variables. (h) Creer que existe el límite de una función en un punto porque la diferencia entre los sucesivos valores de la variable dependiente va disminuyendo. (i) Creer que el límite de una función en un punto es el valor de la función en ese punto.

Según Sánchez, los obstáculos persisten tras la fase de formación ya que, aunque los estudiantes son capaces de resolver ejercicios de cálculo algorítmico de límites, siguen sin comprender el concepto. Esto se explica si los alumnos no se han enfrentado a situaciones capaces de facilitar la realización de los actos de comprensión (en el sentido utilizado por Sierpinska) necesarios para la superación de dichos obstáculos.

Delgado (1995) y Navarro (2002), plantean secuencias didácticas con la finalidad de realizar un estudio de tipo cognitivo referente a la noción de límite. Delgado (1995) estudió la evolución de los esquemas conceptuales de los alumnos universitarios en el proceso de aprendizaje de límite y continuidad. Para ello y basándose en el protocolo de actuación de un alumno, plantea una secuencia didáctica que intenta promover el conflicto cognitivo en él.

Por su parte, Navarro (2002) explota el uso del ordenador para diseñar una estrategia metodológica. El programa utilizado fue Matlab 5.3. En primer lugar, trabajó con los alumnos para que alcanzasen una imagen visual del concepto de límite de una sucesión, con la finalidad de que a posteriori llegasen a dar una definición formal de límite de una sucesión. Los objetivos de esa tesis se pueden resumir en dos puntos: (a) Determinar los descriptores de los niveles de razonamiento del proceso de convergencia de una sucesión. (b) Presentar una propuesta metodológica que permita la comprensión del concepto de convergencia de una sucesión numérica y su introducción en cursos tempranos donde los alumnos aún no tienen la madurez necesaria que requiere la definición formal.

Errores y Dificultades

El estudio de la noción de límite realizado por Tall es relevante en la Didáctica del Análisis Matemático. En dicho estudio confluyen trabajos previos que también mencionaremos.

Tall (1991) identificó algunas de las dificultades de la noción de límite. Entre ellas, destacamos las siguientes:

1. Restricción excesiva de las funciones que se usan. En el análisis elemental, las funciones que se suelen manejar no son causantes de muchas dificultades. Sin embargo menciona dificultades cuando se trata con funciones dadas por ramas o mediante valor absoluto.
2. La notación de Leibniz. Esta notación, casi imprescindible en el análisis, provoca problemas conceptuales.
3. Traslación de problemas reales dentro de la formulación del análisis. En muchas ocasiones al examinar las nociones del análisis los profesores se centran más en la manipulación simbólica que en la resolución de problemas.
4. Selección y uso de representaciones apropiadas. A partir de los resultados de un trabajo previo de Robert y Boschet (1984), Tall afirma que los estudiantes que tienen más éxito en análisis son aquellos que pueden flexibilizar el uso de una variedad de aproximaciones: simbólica, numérica y visual.
5. Manipulaciones algebraicas o carencia de ellas.
6. Absorción de ideas complejas en un tiempo prestablecido.

El límite se considera un proceso de "proximidad creciente" y, posteriormente, se formaliza mediante una definición "$\varepsilon - \delta$". Cuando se estudian varios teoremas, la definición se suprime y se emplean solamente los teoremas demostrados. De este modo los estudiantes se van familiarizando con distintas facetas de una misma noción a lo largo de su desarrollo escolar, pero pierden de vista la definición.

En un trabajo anterior Schwarzenberger y Tall (1978) habían observado que al traducir al lenguaje informal la definición de límite secuencial y convertirla en una definición subjetiva (S es el límite de S_n si podemos tomar S_n tan cerca de S como queramos haciendo n suficientemente grande), surgían dificultades. Esta definición supone una pérdida de precisión puesto que no se especifica cómo de cerca se puede tomar la sucesión, ni se especifica la relación existente entre ε y δ. Además, la palabra *cerca* se asocia a *distinto*, y este hecho se fomenta aún más con los ejemplos utilizados, lo que lleva a los alumnos a pensar que las sucesiones constantes no tienen límite. Por estos motivos los autores proponen otra definición: Una sucesión S_n de números se dice que es una sucesión de aproximaciones al número real S si al representar gráficamente en la recta real S_n para cualquier grado de precisión, hay un número N tal que S_n, S_{n+1}, S_{n+2},... son indistinguibles de S. Traduciendo grado de precisión por ε se obtiene la definición formal. Los autores proponen la notación $S = \ell s_n$, sin hacer referencia al infinito, para evitar conflictos y para no presentar el límite como algo inalcanzable. En lugar de poner el énfasis en que n tiene que ser grande, se pone en que S y S_n son indistinguibles. Para las demostraciones del cálculo de límites proponen trabajar con el error entre el límite y su aproximación.

También Tall y Vinner (1981) habían descrito imágenes conceptuales de los alumnos sobre las nociones de límite secuencial, límite funcional y continuidad, que suelen producir un conflicto cognitivo, relacionándolas con la formación recibida. En la misma línea, Vinner (1991) enunció imágenes conceptuales que llevan a error a los alumnos:

- Una sucesión no debe alcanzar su límite (esto les puede llevar a afirmar que la sucesión 1,1,1,... no tiene límite).
- La sucesión debe ser monótona (esto les puede llevar a que sucesiones como $1 + \frac{(-1)^n}{n}$ no tienen límite).
- El límite es el último término de la secuencia.

De igual modo ocurre con el límite funcional; se asume como un proceso dinámico e inacabado: cuando x se aproxima hacia a, $f(x)$ se aproxima al límite sin alcanzarlo. De nuevo, surge la concepción de las imágenes distintas del límite. Vinner observó que estas imágenes entran en conflicto con una definición formal. Para el límite finito de la función en un punto, la concepción dinámica prevalece sobre la definición formal, no sólo cuando se pide a los alumnos una definición de la noción sino cuando han de ponerla en juego en algún ejemplo concreto o en alguna propiedad. De esta manera, muchos teoremas resultan sumamente intuitivos para ellos, pues la concepción dinámica funciona, pero son incapaces de entender la demostración formal correspondiente. En otras ocasiones, sin embargo, la concepción les lleva a resultados erróneos.

Tall (1992) recogió diferentes significados del término “análisis”:

1. Análisis informal. Se tratan ideas informales como el cálculo algorítmico de límites, reglas de diferenciación y de integración como proceso inverso a la diferenciación, y cálculo de áreas y volúmenes como aplicaciones de la integración.
2. Análisis formal. Se consideran nociones matemáticas formales, como pueden ser la completitud, definición de límite en términos de $\varepsilon - \delta$, continuidad, integral de Riemann y deducciones formales de teoremas.
3. Análisis no-estándar. Se permite el uso de infinitésimos por ampliación de los números reales a los hiperreales.
4. Análisis aproximado. Se usan manipulaciones numéricas, gráficas y simbólicas, con o sin programación.

El autor afirma también que los alumnos encuentran por primera vez conceptos que involucran procesos infinitos en el análisis, como es el caso del límite. Una posible consecuencia es que los resultados de los alumnos que cursan alguna asignatura de análisis no suelen ser muy satisfactorios.

Centrándose en la noción de límite, Tall (1992) consideró las siguientes dificultades:

1. Dificultades generadas por el uso del lenguaje.
2. Términos como *límite*, *tender* o *aproximarse* tienen un significado ordinario que distorsiona el concepto matemático formal. En esto coincide con otros autores como Monaghan (1991) o Cornu (1991).
3. Dificultades generadas por el deseo de reducir el límite a una mera operación algebraica.
4. Dificultades generadas por la identificación de una cantidad que se hace cada vez más pequeña con un infinitésimo.
5. Por analogía, una cantidad que se hace arbitrariamente grande sugiere la idea de un número infinito.
6. Dificultades relacionadas con la idea de si el límite es alcanzado o no.
7. Confusión sobre el paso de lo finito a lo infinito.

Ante estas dificultades, Tall (1992) consideró que los alumnos actúan de dos maneras diferentes. Por una parte, intentan reconciliar lo que ya saben y lo que están aprendiendo reconstruyendo una nueva estructura de conocimientos coherente. Por la otra, mantienen los elementos de conflicto en dos compartimentos separados, de manera que no se evoquen simultáneamente. Tall advirtió que algunos alumnos no suelen emplear argumentos globales, sino que usan diferentes explicaciones dependiendo del caso y aprenden las cosas que necesitan para pasar el examen.

Considerando estas características y los resultados que produce la enseñanza del Cálculo, Tall conjetura que la enseñanza de procedimientos en educación secundaria condicionaría el posterior desarrollo del análisis.

Ante esto, recomienda que no se oriente el Análisis, concretamente la noción de límite, hacia el análisis estándar y formal, sino hacia el análisis no estándar. Esta propuesta se basa, en parte, en los estudios de Sullivan (1976), quien dio evidencias del aparente éxito de tales aproximaciones.

Teniendo en cuenta lo anterior y con el fin de mejorar el aprendizaje de los estudiantes en lo referente al cálculo, Tall (1992) hizo varias propuestas para el trabajo del Cálculo: (a) aprendizaje activo, (b) construcción de intuiciones adecuadas para su futura formalización, (c) gráficos en el ordenador, (d) programas de ordenador y (e) software de manipulación simbólica.

1. *Aprendizaje activo*. Para esta propuesta Tall (1992) rescató el trabajo de Cummins (1960), quien experimentó el uso de materiales con alumnos. Cummins no apreció diferencias entre el grupo experimental y el de control respecto al manejo de operaciones básicas. Sin embargo, los resultados fueron más satisfactorios en el grupo experimental cuando se trataban cuestiones que requerían una mayor comprensión conceptual.

2. *Construcción de intuiciones adecuadas para su futura formalización*. Tall (1992) recogió la aportación de Dubinsky (1991), quien propone trabajar los conceptos del análisis en grupos con los alumnos, y reflexionar sobre la construcción de programas en un lenguaje de programación diseñado para mejorar el desarrollo del pensamiento matemático.

3. *Gráficos en el ordenador*. El uso de las gráficas en el ordenador permite experiencias diseñadas para construir intuiciones que deberán ser formalizadas. Estas gráficas ayudan a los alumnos a observar algunas propiedades de las funciones, como el ser diferenciable. Sin embargo, a pesar de la utilidad de las

gráficas, Tall (1986) afirmó que la potencia de los gráficos tiene que ser completada con aproximaciones simbólicas y numéricas, y que el éxito en cálculo está ligado a la versatilidad de representaciones y a la traducción entre unas y otras.

4. *Programas de ordenador*. Algunos profesores los ven como un problema adicional que puede incrementar la dificultad de las matemáticas. Sin embargo, para otros se trata de una actividad constructiva que permite a los estudiantes aprender los algoritmos requeridos.

5. *Software de manipulación simbólica*. Palmiter (1991) usó el software Macsyma para enseñar Cálculo Integral a un conjunto de estudiantes de primer curso durante cinco semanas. En paralelo estudió durante 10 semanas con otro conjunto de estudiantes. Los resultados extraídos fueron mejores en el grupo experimental que en el grupo de control, tanto en el examen conceptual como en el examen computacional.

Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995) estudiaron las dificultades de la noción de límite. Estos autores distinguen tres grupos de dificultades:

1. Dificultades asociadas con la complejidad de dos objetos básicos del cálculo: número real y función.

2. Una de estas dificultades surge de la asociación entre número real y decimal finito (este hecho se ve reforzado por la calculadora). Recuérdese otra asociación, entre número real y punto de la recta, que corresponde a una concepción topológica.

3. Con respecto a la noción de función, se puede identificar como función-fórmula o función-curva regular. También se observa un salto cualitativo de la función como proceso, a la función como entidad conceptual. La conversión entre representaciones provoca otra dificultad cognitiva, siendo la representación algebraica la más utilizada en la enseñanza tradicional. Por último, reflexiona sobre las dificultades de considerar las funciones como herramientas del trabajo matemático y traducir al cuadro funcional otros registros, como pueden ser el numérico o el geométrico.

4. Dificultades asociadas a la conceptualización y formalización de la noción de límite considera:

- El sentido común evoca el límite como algo inalcanzable.
- Las propiedades comunes de los elementos del proceso lo son también del límite.
- Identificación de los objetos sobre los que se lleva a cabo el proceso de límite

- Distinción entre el sentido operacional y el sentido estructural del límite.
- La formalización estándar.
- Identificación de un proceso sobre la variable y otro sobre los valores de la función.
- Salto cualitativo entre el manejo intuitivo y la noción formalizada estándar.

5. Dificultades vinculadas a la ruptura de los modos de pensamiento algebraicos.

La ruptura Álgebra/Cálculo supone un cambio de modo de razonamiento: del razonamiento por equivalencias al razonamiento por condiciones suficientes.

Cottrill (1996) mencionó dificultades de los alumnos en la comprensión de la noción de límite. Considera que la noción de límite puede ser interpretada como una colección coherente de acciones, procesos y objetos a la que llama "esquema". El límite de una sucesión o de una función es un esquema que será interpretado como un objeto. Cottrill sugiere la conveniencia de enunciar una descomposición genética de la noción de límite y procura confirmarla mediante entrevistas. Espera así aportar herramientas que ayuden a superar las dificultades y los errores y se lamenta de la escasez de documentos destinados a ayudar a los alumnos a superar las dificultades, afirmando que lo que se hace es analizar las dificultades de los alumnos en torno a esta noción, sin aportar nada para superarlas. Reconoce dos posturas con respecto al límite: la concepción estática y la concepción dinámica. Identifica la primera con la definición formal $\varepsilon-\delta$. De acuerdo con este punto de vista, el esquema de dos procesos coordinados es reconstruido para obtener un proceso descrito como $0 \prec |x-a| \prec \delta$ implica $|f(x)-L| \prec \varepsilon$. Este es un proceso mental en el sentido de ir de una hipótesis a una conclusión. El siguiente paso es encapsular este proceso dentro de un objeto y entonces aplicar un segundo nivel de cualificación.

Teniendo en cuenta la formulación anterior, el autor identifica varias dificultades que presentan los estudiantes al construir el esquema del proceso coordinado o al manejar los cuantificadores para tratar con la definición formal del concepto de límite.

En su tesis Blázquez (2000) analiza la noción de límite en la modalidad de Bachillerato "Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales". Estudia la génesis del concepto, los obstáculos de su aprendizaje y los vínculos con otros conceptos, con objeto de proponer una secuencia didáctica que mejore la comprensión de los alumnos frente a dicho tópico. Resumimos cómo confirma algunas de las dificultades y concepciones destacadas en varias de las investigaciones previas. Dejamos para otros apartados el estudio de la génesis histórica, y la propuesta de secuencia didáctica. Una de sus hipótesis de investigación es: "La noción de límite lleva consigo graves dificultades de comprensión, sea cual sea la presentación que se haga. Conocer dichas dificultades, junto con las creencias que los alumnos tiene sobre el límite es una herramienta eficaz para su enseñanza" (p. 44). Blázquez propone otras dificultades no señaladas antes por los demás autores, y que aparecen a lo largo de la puesta en práctica de la secuencia que plantea y que no detallamos en este apartado.

1. La notación utilizada para los límites laterales.
2. La interpretación de la gráfica como un dibujo, y no como forma de relacionar las variables.
3. Una interpretación excesivamente dinámica de la definición.
4. El uso excesivo del registro algebraico.
5. La visión global de las gráficas funcionales dificulta el trabajo con los aspectos locales como tendencias, asíntotas, límites o derivadas en dicho sistema de representación.
6. La identificación de límite y valor de la función en el punto.
7. La identificación de la noción de indeterminación con la no-existencia de límite, o su traducción al lenguaje habitual.

El conocimiento de las dificultades permitió a Blázquez localizar los momentos claves de la secuencia en la comprensión del límite, llegando a proponer los siguientes actos de comprensión relacionados con el límite funcional.

1. Generalizar la idea de tendencia añadiendo la combinación de tendencias finitas.
2. Sintetizar las ideas de aproximación y velocidad media, y generalizar ésta para definir la velocidad instantánea como la mejor de las aproximaciones de las velocidades medias en pequeños intervalos de tiempo, a la velocidad en un instante.
3. Discriminar entre velocidad media y velocidad instantánea o, en general, entre una variación media y una variación instantánea.
4. Identificar los valores a los que se aproximan la variable dependiente y la independiente, mediante la observación de las imágenes y el cálculo de errores, o mediante la interpretación correcta de la gráfica de la función.

5. Sintetizar las tendencias de la variable dependiente e independiente en un único proceso.
6. Discriminar entre aproximación y tendencia (aproximación óptima) y entre tendencia y movimiento.
7. Discriminar el límite y las tendencias funcionales como herramientas distintas que resuelven problemas distintos.
8. Discriminar límite y límite lateral, y límite y valor de la función en el punto.

Blázquez y Ortega (2001) indicaron que la utilización de diferentes representaciones (algebraica, numérica, gráfica y verbal) ayuda a mejorar la comprensión del límite. Blázquez (2000) incluyó un considerable número de registros diferentes con el fin de comprobar que la imagen conceptual que el alumno tiene del límite se enriquece al considerar éste desde diferentes perspectivas, aun siendo conscientes de las dificultades que pueden generar las traducciones de un registro a otro. En el desarrollo de la secuencia didáctica se observa que algunos sistemas de representación son más acertados para una determinada faceta de un concepto pero encierran dificultades con respecto a otras facetas. Por ejemplo, el sistema verbal suscita una concepción de límite dinámica, tan rigurosa y tan abstracta como la definición algebraica, pero sin el formalismo de ésta, más vinculada a fenómenos reales, y más próxima al desarrollo cognitivo del alumno en educación secundaria

Blázquez y Ortega (2002), propusieron trabajar con una nueva definición de límite, basada en lo que denominan "aproximación óptima". Dicha presentación del límite permite aprovechar el aspecto intuitivo y cercano a la realidad sin reducir el límite a una simple aproximación.

Blázquez, Gatica, Benegas y Ortega (2006), contrastan la conceptualización métrica de límite, dada por Weierstrass, que según los autores: es la que se utiliza tradicionalmente en la docencia" (p.189), con la conceptualización como aproximación óptima, dada por Bláquez y Ortega (2002). El objetivo es establecer cuál de las dos es más sencilla y apropiada para la docencia-aprendizaje inicial del concepto, en alumnos de primeros cursos universitarios de licenciaturas como matemáticas, física, estadística, ingenierías y económicas-empresariales.

Concluyen que en el caso de la aproximación óptima la mayor dificultad está en la interpretación de "mejorar cualquier aproximación", pero presenta unas dificultades de aprendizaje menores que la conceptualización métrica, cuyo formalismo les impide entender su significado. Entre las dificultades asociadas a la definición métrica destacan:

> *...las asociadas al formalismo de la escritura, las de interpretación del simbolismo algebraico asociado a la función valor absoluto y a las desigualdades, las de la implicación de pertenencia o inclusión, la confusión de los papeles de δ y ε, y, finalmente, creemos que las de dependencia de ε respecto de δ, en mayor grado, y respecto del punto y de la función, en menor, también son considerables, aunque aquí no están tratadas*. (p.205)

Además creen que la aproximación óptima es más útil y eficaz, que requiere menos capacidad de abstracción, que no se olvida tan fácilmente, que es más ventajosa por su facilidad de aplicación y que los futuros alumnos la entenderían mejor.

Sierra, González y López (1998) presentaron algunas de las dificultades que poseen los alumnos respecto a las nociones de límite y continuidad. Afirman que estas concepciones tienen relación con algunas de las que han aparecido a lo largo de la historia de las matemáticas sobre dichas nociones. Sierra, González y López (2000) diseñaron un cuestionario que se administró a 145 alumnos de bachillerato (BUP y COU). Los criterios de justificación obtenidos fueron:

> *(1) Aproximarse, (2) El valor de la función en el punto, (3) Utilización de límites laterales, (4) La función es continua, (5) Utilización de la fórmula de la derivada, (6) Utilización de funciones conocidas, (7) La función tiene ramas, (8) Concepto de indeterminación, (9) Visual, (10) Definición formal, (11) Otras. Además se ha considerado:(12) Respuesta si/no sin justificación y (13) Ausencia de respuesta*. (p. 79)

Los criterios que más utilizaron los alumnos fueron, en el orden indicado: utilización de límites laterales; aproximarse; y cálculo del valor de la función en el punto mientras que la definición formal se utilizó eventualmente. Observaron que existe una diferencia entre la definición y las concepciones, y que los alumnos utilizan evocaciones de éstas últimas cuando se enfrentan a las tareas.

Del mismo modo Mamona-Downs (2001) estudió dificultades con respecto a la noción de límite. Coincide con Cornu (1991) al reconocer las intuiciones previas como fuentes de dificultad.

A diferencia de otros autores, Mamona-Downs (2001) distinguió tipos de límites (límite de una sucesión, límite de una función o derivadas entre otros) y se centró en las sucesiones que tienen límite finito. En su análisis de la noción de límite, observó la necesidad de manejar una serie de nociones matemáticas a las que denominó prerrequisitos. Entre los citados por la autora se encuentran:

1. El número real. Es considerado uno de los elementos más importantes para el trabajo del límite. El estudio del número real puede abordarse desde una perspectiva estándar o desde una perspectiva no-estándar. En la segunda está admitido el uso de infinitésimos, de los cuales Robinson (1966) postula el empleo en la enseñanza del cálculo.

2. La noción de función. La autora matiza que a las sucesiones, extraordinariamente, se las considera funciones de $\mathbb{N}\ en\ \mathbb{R}$. Son más bien concebidas como proceso que como objeto matemático.

3. Además de estos prerrequisitos, se exige una serie de destrezas, como manejar los cuantificadores o ser capaces de comparar valores absolutos y resolver inecuaciones.

Mamona-Downs identifica dos problemas en el análisis de una definición de las sucesiones que tienen límite finito: (1) el estilo minimalista en que se expresa y (2) el contenido (aspectos cognitivos y metacognitivos).

También señala las siguientes dificultades:

1. Toda la información que se va utilizando está encaminada a desarrollar la inecuación $|a_n - L| \prec \varepsilon$.

2. Se pregunta por qué se lee la definición de izquierda a derecha, cuando en realidad se trabaja con ella empezando desde la derecha. (Éste es uno de los aspectos que tenemos en cuenta en nuestra investigación; trabajamos con funciones que tienen límite finito en un punto, no con sucesiones.)

3. Se plantea la posibilidad de sustituir la desigualdad anterior por el intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

4. En la definición de límite, L es una constante, a_n es variable y ε es un parámetro. No es una afirmación de verdad, sino que es la base de un proceso de decisión.

5. Se observan experiencias intuitivas en los alumnos, las cuales se mezclan con el nuevo formalismo.

6. Los problemas con el valor N que aparece en la definición pueden ser superados usando la representación verbal, como en la expresión: "Dado ε, hay una cierta posición a partir de la cual, todos los términos de la secuencia distan de L menos de ε" (p .277).

7. Problemas con el símbolo "ε" y con el cuantificador "para todo ε".

8. La comprensión de la frase "para todo épsilon mayor que 0" presenta dificultades cognitivas y metacognitiva.

9. Un gráfico sugiere un aspecto estático del límite mientras que lo que deseamos es un aspecto dinámico.

10. La definición de límite sirve para comprobar si un valor es el límite o no de una sucesión, pero no nos dice de antemano cuál puede ser.

11. En un principio, el significado de ε parece independiente de la sucesión, pero después se observa que ε depende de N y se puede construir la función g: $\varepsilon \rightarrow$ N que asigna a cada valor de ε un valor de N.

El objetivo principal del trabajo de Barbé (2005) es mostrar cómo las prácticas de los docentes están fuertemente condicionadas por diferentes restricciones de origen matemático y didáctico. Las de origen matemático están relacionadas con las particularidades de los contenidos que se consideran, y las de origen didáctico, con lo que implica la organización de la enseñanza de las matemáticas.

Respecto a la noción de límite funcional, destacan las dificultades que se refieren a su introducción como una herramienta funcional para mejorar en los estudiantes la capacidad de resolver problemas matemáticos. Otras restricciones provienen de la propuesta de los currículos oficiales y los libros de texto. Por ejemplo, la dificultad de dar sentido a la enseñanza de los límites de las funciones cuando éstos se presentan como una herramienta para estudiar la continuidad.

El autor considera una organización de referencia que integra dos estructuras matemáticas diferentes. La primera estructura matemática se refiere al algebra de límites. Se parte de la suposición de la existencia del límite de una función y se plantea el problema de cómo determinar su valor. Los dos tipos principales de tareas respecto a esta estructura son los siguientes:

1. Calcular el límite de una función f (x) cuando x $\to a$.
2. Calcular el límite de una función f (x) cuando x $\to \pm\infty$.
3. En ambos casos, la función f(x) se supone que es dada por su expresión algebraica, y las técnicas utilizadas para calcular los límites se basan en ciertas manipulaciones algebraicas de esta expresión (factorización, simplificación, sustitución de x por a, etc.)
4. También hay un tercer tipo de tareas, mucho menos importante, que relaciona el cálculo del límite con la gráfica de la función.
5. Determinar el límite de una función dada su gráfica cartesiana y = f (x).

Aunque ni el problema ni las técnicas correspondientes (sobre la base de la lectura e interpretación de la gráfica) son de naturaleza algebraica correcta, en la práctica este tercer tipo de tareas siempre aparece estrechamente relacionado con los otros dos.

Para generar, explicar y justificar las propiedades de los límites de las funciones, es necesario un discurso teórico mínimo, que permita resolver los problemas anteriores, fundado en el enunciado de un sistema axiomático. Se puede resumir, informalmente, en los siguientes puntos:

1. El límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus límites.
2. El límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites.
3. El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de sus límites.
4. Las desigualdades entre las funciones se conservan en la operación de "paso al límite".
5. El límite de una función compuesta de dos funciones con otras del mismo límite es igual al valor de este límite.

Esta primera estructura matemática no agota el contenido matemático que se supone que se imparte en la enseñanza secundaria en España. Esto hace que el autor considere una segunda estructura del modelo de referencia y que puede ser designada como la topología de los límites. Esta estructura matemática tiene como objetivo abordar el problema de la existencia de límite con respecto a los diferentes tipos de funciones.

Algunos tipos de problemas relacionados con la nueva estructura se muestran a continuación:

1. Mostrar la existencia (o inexistencia) del límite de una función f (x) cuando x $\rightarrow a$, donde a puede ser un número real, o x $\rightarrow +\infty$.
2. Mostrar la existencia (o inexistencia) unilateral de los límites de determinados tipos de funciones (tales como las funciones monótonas).
3. Justificación de ciertos límites utilizando las propiedades (1) - (5) mostradas anteriormente.

Las técnicas matemáticas, que por lo general, entran en juego para probar estas propiedades se basan en la "definición $\varepsilon - \delta$" o en la caracterización por sucesiones. El discurso tecnológico de la segunda estructura se centra en las propiedades de los límites de las sucesiones y en la clásica "definición $\varepsilon - \delta$", lo que proporciona recursos técnicos necesarios para resolver los problemas sobre la existencia de límites. Esta tecnología se basa en una teoría de los números reales vistos como espacio métrico, con sus diferentes propiedades: densidad o completitud, entre otros

Considerando todo lo anterior, se necesita integrar, al menos, las dos estructuras:

1. Ambas parecen estar estrechamente relacionadas. De hecho, se puede afirmar que la primera estructura está, en parte, contenida en la segunda
2. Las dos estructuras comparten la misma teoría de los números reales. Por lo tanto, es posible afirmar que se puede integrar en la misma estructura genérica que incluirá tanto a la primera, como a la segunda y sus variantes.

La representación anterior de la estructura de referencia se utiliza para describir los conocimientos matemáticos, acerca de los límites de las funciones, que aparecen en el currículo oficial de la enseñanza secundaria en España.

Los tipos de tareas problemáticas que con mayor frecuencia se presentan en los materiales curriculares y los libros de texto son los siguientes:

1. Determinar el límite de una función f(x) cuando x $\rightarrow a$, donde f(x) es una función polinómica.
2. Determinar el límite de una función f(x) cuando x $\rightarrow \pm\infty$, donde f(x) es una función polinómica.

3. Determinar el límite de una función en un punto a través de su gráfica.
4. Estudio de la continuidad de f(x).

Los tres primeros tipos de tareas son casos particulares de las tareas de la estructura primera, mientras que las tareas del número 4 no se corresponden directamente con la determinación de un límite, pero están totalmente subordinadas a ella.

Respecto a la segunda estructura, el discurso tecnológico-teórico propuesto por los planes de estudio y los libros de texto, se centra en el problema de la demostración de la existencia del límite de la función.

En resumen, los conocimientos matemáticos a enseñar propuestos en el currículo, no conectan las dos estructuras.

1.2.2 Creencias de los alumnos sobre el límite

Earles (1995) investigó las conexiones entre las creencias de los alumnos sobre el límite y su comprensión de esta noción. Para descubrirlas plantea una serie de cuestiones, como:

1. ¿Cuáles son las creencias axiomáticas de los estudiantes universitarios de Cálculo? En concreto, ¿cuáles son sus concepciones sobre los números reales, las creencias sobre el infinito, y las funciones?
2. ¿Cuál es la naturaleza de sus fuentes de convicción? ¿Cuáles son sus fuentes específicas de convicción en el contexto del límite?
3. ¿Cuáles son las relaciones (si las hay) entre las creencias axiomáticas, las fuentes de la convicción y la comprensión conceptual de límite?

Earles administró un cuestionario que evaluaba concepciones de los números reales, infinito y funciones, así como fuentes de convicción, a unos estudiantes de Cálculo. A partir de los resultados obtenidos, definió cuatro grupos de estudiantes: (a) los de creencias axiomáticas y fuentes de convicción de acuerdo con las de los matemáticos, (b) los de creencias axiomáticas dispares y fuentes de convicción coherentes, (c) los que discrepaban con la comunidad matemática sobre ambas ideas y (d) los que están de acuerdo con las creencias axiomáticas y discrepan de las fuentes de convicción. Para completar su estudio realizó entrevistas a varios estudiantes de cada grupo, en las que dieron sus definiciones sobre la noción de límite, resolvieron problemas y respondieron a afirmaciones elaboradas para alternar los conceptos de límite como inalcanzable (Tall y Schwarzenberger, 1978), en movimiento (Tall y Vinner, 1981) y delimitado (Cornu, 1981).

Algunas de las conclusiones de Earles (1995) indican que la mayoría de los estudiantes ve la recta real como un objeto sólido que contiene elementos infinitesimales y que, en general, los estudiantes no utilizan la definición de función como criterio para determinar si una relación es una función o no.

Las entrevistas pusieron de manifiesto que los grupos formados por los estudiantes cuyas fuentes de convicción estaban de acuerdo con las de los matemáticos incluían más estudiantes con conceptos estáticos de límite y menos estudiantes con las concepciones alternas de límite como delimitado o inalcanzable, que aquellos grupos formados por estudiantes con fuentes de convicción dispares. Para los estudiantes entrevistados, tanto la naturaleza de sus fuentes de convicción como sus concepciones de funciones afectaban a su idea de límite, mientras que sus creencias sobre los números reales e infinito podían no haber tenido influencia en dicha idea.

Blázquez, Ortega y Gatica (2009) contrastan si la noción de límite ligada a la definición métrica perdura en la memoria de los alumnos más que la definición como aproximación óptima dada por Blázquez y Ortega (2002). Para ello realizan un estudio experimental con alumnos de Ingeniería, que en cursos anteriores habían estudiado ambas conceptualizaciones.

Lo que más llama la atención de los autores es la diversidad de respuestas que exponen los alumnos, y sobre todo las dificultades que tienen para escribir la definición de límite funcional, incluso en muchos casos, se quedan en una definición ingenua.

Observan que la mayoría de los alumnos respondieron a sus cuestiones empleando la definición basada en la aproximación óptima exclusivamente y que los alumnos que responden con la definición métrica también lo hacen utilizando la definición como aproximación óptima. Ponen de manifiesto que los alumnos comenten muchos errores al emplear ambas definiciones, pero que aun así detectan una diferencia esencial entre una y otra definición. En palabras de los propios autores: “los errores que cometen los alumnos son menores cuando utilizan la definición como aproximación óptima, posiblemente porque ésta última tiene una representación verbal directa, mientras que la definición métrica precisa de un registro simbólico” (pp.18-19). Por otro lado concluyen que son más correctas las respuestas que se basan en la definición como aproximación óptima, lo que les lleva a afirmar que esta definición se almacena en la memoria de trabajo mejor que la definición métrica. Esa puede ser una de las razones de que la definición como aproximación óptima sea evocada con mayor facilidad y, por tanto, a la larga aporte una mayor formación.

1.3 Enseñanza y curriculum

En este apartado consideramos investigaciones que tratan la enseñanza de la noción de límite; se han revisado trabajos de los autores que se citan a continuación, ordenados por orden alfabético: Barbé (2005), Bezuidenhout (2001), Blázquez (2000), Claros (2010), Corica y Otero (2009), Delgado (1995), Espinoza (1998), Espinoza y Azcárate (2000), Hardy (2009), Ibáñez y Ortega (2004), Mamona-Downs (2001), Navarro (2002), Przenioslo (2004, 2005), Raman (2004), Robinet (1983), Sánchez (1997), Sierpinska (1987), Sierra, González y López (1999), Tall (1992), Schwarzenberger y Tall (1978) y Williams (1991).

Incluimos información sobre los currículos en España; para ello se ha consultado el Boletín Oficial del Estado y el Boletín Oficial de la Junta de Andalucía.

1.3.1 Propuesta de mejora del proceso de enseñanza

Przenioslo (2004) llevó a cabo una investigación en Polonia con el propósito de determinar las imágenes de los estudiantes sobre la noción de límite. Se propuso determinar el grado de eficiencia y las fuentes de su formación, a través de sus asociaciones, intuiciones y conceptos relacionados con los límites. Observó que la enseñanza-aprendizaje de la noción de límite parece haber dado un paso más en los últimos años, situando su medio de investigación en el nivel universitario. Para obtener información para la investigación, habló con profesores y alumnos, además de analizar algunos apuntes de clase. Pretendía involucrar a estudiantes que han completado cursos universitarios de análisis a un alto nivel y a otros que todavía no han comenzado sus estudios. Su muestra estaba formada por 238 alumnos universitarios que cursaban 3º, 4º o 5º de alguna asignatura de matemáticas, además de 182 estudiantes que aún no han comenzado sus estudios universitarios en matemáticas.

El objetivo era observar qué imágenes de límite funcional se forman en cursos universitarios de matemáticas en comparación con los que se forman en la enseñanza secundaria. Una de sus conclusiones fue que: “los estudiantes aprenden diferentes teorías matemáticas relacionadas con el límite de una función” (p.106). Afirmó que para la mayoría de los estudiantes, la “definición $\varepsilon - \delta$” parece la más inteligible y que la caracterización por sucesiones es mucho menos frecuente. También observó que a los estudiantes se les presentan nociones más generales del límite de una función considerando espacios topológicos y métricos, suponiendo que el punto x_0 en el que se calcula el límite es un punto de acumulación del dominio de la función. Observó que muchas de las concepciones mostradas por los estudiantes universitarios probablemente se formaron ya en la enseñanza secundaria. Para terminar, la autora afirma que el aprendizaje de la noción de límite lleva involucradas tantas dificultades y obstáculos que la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje requiere la adopción de medidas especiales.

Przenioslo (2005), tras estudiar algunas dificultades de la noción de límite que aparecen en los alumnos de enseñanza secundaria y primeros cursos de universidad, propuso un proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de límite de una sucesión a través de una clase guiada. Trató de fomentar la discusión alrededor de un conjunto amplio de ejemplos provocativos, problemas y cuestiones. Dos de las finalidades de los problemas que se discuten son: (a) enriquecer las discusiones alrededor del problema principal y (b) dar al profesor la posibilidad de poner al descubierto, aquellos aspectos de la convergencia de sucesiones, que están normalmente ocultos o son malinterpretados a través de concepciones espontáneas de los estudiantes. Consideró que el desarrollo de la enseñanza del concepto de límite se produce en tres pasos. El primer paso corresponde al desarrollo de concepciones relativas al significado de la frase "a partir de un cierto n". Algunos de los problemas propuestos se dedican a arrojar luz sobre esta frase. En un segundo paso se produce una percepción de nociones relativas a la idea de entornos de longitud arbitraria alrededor del valor del límite. En este apartado se fija un entorno del límite y se dibujan los valores de la sucesión que quedan dentro de la franja determinada por los extremos del entorno fijado alrededor del límite. Lo que se pretende en este estado es que los alumnos sean capaces de reconocer que las sucesiones que tienen límite cumplen que todos sus valores a partir de un cierto lugar quedan dentro de una franja de valores determinada por el límite. En el último paso se pretenden desarrollar conceptos relativos al término "alrededores". La autora afirma que una vez superados estos pasos, los estudiantes han desarrollado concepciones de sucesiones, han conectado estas concepciones con la idea de franja y la idea de entorno alrededor del límite, y se puede introducir el término convergencia y límite de una sucesión, invitando a los propios alumnos a que den su propia definición de límite de una sucesión antes de continuar enunciando una definición formal de límite. La autora concluyó que la enseñanza basada en las herramientas didácticas anteriormente propuestas permite desarrollar concepciones a los estudiantes que gradualmente se van aproximando al significado del concepto de límite de una sucesión. Los estudiantes pueden adquirir las concepciones en torno al límite y llegar a adquirir la definición formal porque los saltos entre unas concepciones y otras no son muy grandes.

Mamona-Downs (2001) planteó unas cuestiones para suscitar un debate sobre un problema planteado sobre el límite. Una vez analizadas las respuestas de los alumnos a esas cuestiones, la autora concluyó que cuando un alumno se encuentra por primera vez con la definición de límite, intenta dar sentido al simbolismo y acomodar dicha definición con sus ideas sobre el concepto de límite. Algunos alumnos participantes en su estudio captaron la definición pero otros tuvieron problemas para comprenderla, incluso llegando a no entenderla nunca. Los primeros tendrán expedito un camino para describir el proceso de "paso al límite". La autora no esperaba que los alumnos fueran capaces de construir por sí solos la definición formal. Esta afirmación está sustentada en las dificultades que ella misma enuncia y que hemos detallado más arriba. Las estrategias pedagógicas de la autora como consecuencia de su trabajo con alumnos son las siguientes:

1. Sugiere una primera aproximación a la enseñanza del límite a través de las sucesiones de Cauchy. Una sucesión puede ser de Cauchy o no y, por tanto, el límite es entonces mostrado como el único posible asociado a la propiedad que la sucesión mantiene.

2. Propone desarrollar una imagen, a partir de la definición, que altere las intuiciones originales que los alumnos tienen sobre el concepto de límite finito de una sucesión.

3. Respecto a los sistemas de representación señala que: El sistema de representación gráfico puede ser considerado como un sistema donde toda la información que conlleva la definición puede ser fielmente interiorizada, a pesar de los problemas que pueden surgir con las sucesiones constantes. Los argumentos esgrimidos en la representación gráfica pueden llevar a los estudiantes a abandonar creencias tales como: término final existente en una sucesión infinita de valores; límite que es valor y posición a la vez; e imposibilidad de alcanzar el límite, pues este es la última posición. El uso de la representación gráfica puede ayudar a alejar la idea de que el límite requiere un comportamiento monótono.

Observamos como la estrategia pedagógica propuesta por la investigadora se centra en las sucesiones.

Blázquez (2000), como dijimos, analiza la noción de límite en bachillerato de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales; centramos ahora el interés en sus propuestas de mejora del proceso de enseñanza. Para ello realiza una investigación cualitativa completando tres ciclos de investigación-acción en los que trabaja sobre una secuencia didáctica. Dicha secuencia se centra en una definición de límite como aproximación óptima en la que destaca la propiedad que tiene el límite de ser, no una simple aproximación de los valores de la función en torno a un punto a, sino la mejor de todas, en el sentido de que cualquier otra, distinta de ella, se puede mejorar con los valores que toma la función en todos los puntos x que mejoran cierta aproximación al punto a.

Bezuidenhout (2001) expuso algunos malentendidos y errores que se observan en los alumnos universitarios respecto a la comprensión de la noción de límite funcional y continuidad. Realizó pruebas orales y escritas a 630 alumnos de tres universidades sudafricanas mediante tres fases. En la primera pasó una prueba preliminar escrita. Con los resultados de esta prueba pasó a la segunda fase, también escrita, que consistía en la realización de un cuestionario. Por último, entrevistó a 15 alumnos que habían participado en las dos primeras fases, con el propósito de explorar la naturaleza y las características del conocimiento de los estudiantes y la comprensión de los conceptos básicos de Cálculo. El autor afirma que la forma de pensar que tienen los estudiantes respecto a las nociones de límite funcional y continuidad se debe principalmente a un enfoque del proceso de enseñanza-aprendizaje que destaca los aspectos de procedimiento del Cálculo y deja de lado una base sólida en la comprensión de los fundamentos conceptuales del Cálculo. Por otra parte, los ejercicios estereotipados son una característica común en algunos libros de texto. Esto fomenta un enfoque instrumental, en lugar de una comprensión relacional de conceptos de Cálculo. Por ello, no es extraño que los alumnos confundan las técnicas de manipulación con el propio conocimiento.

Hardy (2009) es otra autora que centró su trabajo en los alumnos universitarios: ¿cómo se perciben los conocimientos que hay que aprender acerca de los límites de funciones en un curso de cálculo de grado? Uno de los objetivos de la autora es investigar la influencia de las instituciones en la forma en que las definiciones, las propiedades, los ejemplos y los ejercicios aparecen en los libros de texto y exámenes. En el artículo afirma, coincidiendo con Raman (2004), que los temas relacionados con los límites no se asocian necesariamente con la noción o su definición. Por un lado, los vínculos entre las ideas intuitivas, la definición formal y las técnicas no aparecen en los libros de texto de nivel universitario. La "definición $\varepsilon-\delta$" se presenta en una sección diferente de aquella en la que se presentan las ideas intuitivas. De forma independiente, se trabajan los cálculos algebraicos utilizados en la conjetura de límites. La investigación se llevó a cabo con 14 profesores y 19 clases de entre 25 y 35 alumnos cada una. Analizó las tareas propuestas en los exámenes finales junto con los tipos de soluciones que se espera presenten los alumnos. A partir de este análisis se han construido modelos de las percepciones de los conocimientos que hay que aprender. La autora ha tenido en cuenta las diferencias entre estos modelos y la influencia que las tareas de rutina y la ausencia de discursos teóricos pueden tener en las percepciones de los estudiantes.

Claros (2010) llevó a cabo un trabajo para detectar en las producciones de los estudiantes dos fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión, uno de ellos referente al aspecto intuitivo, que denota como a.s.i. y otro centrado en el aspecto formal, que denota como i.v.s. A lo largo de su trabajo describió las etapas diseñadas para elaborar el instrumento. Consiste en un cuestionario de 4 preguntas, y la definición de una serie de categorías de análisis. Se administró a 143 alumnos de tres institutos de enseñanza secundaria de la Comunidad de Madrid. En líneas generales, observó que la mayoría de las respuestas de los alumnos se daban usando la representación verbal en el fenómeno a.s.i, pero apenas la usaron en el fenómeno i.v.s.

En el apartado 1.2 de nuestro estudio de antecedentes hemos observado que algunos autores como Delgado (1995), Navarro (2002), Robinet (1983), Sierpinska (1987), Tall (1992), Schwarzenberger y Tall (1978) y Williams (1991), también han realizado, en mayor o menor medida, un serie de propuestas de mejora del proceso de aprendizaje de la noción de límite.

1.3.2 Investigaciones realizadas con profesores

Espinoza (1998) diseñó un instrumento metodológico, basado en la *teoría de los momentos didácticos*. Dicho instrumento, aplicado a dos profesores, consta de dos tipos de tablas. La autora utiliza las tablas para analizar dos procesos de estudio sobre la noción de límite de una función, que llevan a cabo dos profesores de enseñanza secundaria. En la *Tabla tipo 1 (transcripción),* aparece un resumen del episodio, el momento didáctico, el actor principal, los objetos matemáticos presentes, las actividades de estudio y la transcripción de diálogos y actividades. En la *Tabla tipo 2 (análisis)*, se muestra el tipo de problemas que se abordan, las técnicas matemáticas, los elementos tecnológico-teóricos, el momento dominante y los elementos de técnicas didácticas locales. Algunas conclusiones son:

1. Para ambos profesores las organizaciones matemáticas que se construyen en torno a los límites poseen las mismas características, aun siendo distintos los profesores y los alumnos; se centran en el cálculo de límites, dando por hecho que, al menos, existen los laterales o son infinitos. El campo de funciones con el que se trabaja es restringido (racionales e irracionales simples) y las funciones están dadas de forma algebraica o gráfica.

2. En muy pocas ocasiones se utiliza la técnica de cálculo de límites por aproximaciones sucesivas, lo que da una visión dinámica. La mayoría de las técnicas matemáticas que se utilizan son las manipulaciones algebraicas (factorizar, simplificar, operar polinomios, multiplicar por el conjugado, aplicar el método de Ruffini, dividir por la mayor potencia, entre otras), que proporcionan una visión estática del objeto “límite de función”.

3. Uno de los profesores se inclina totalmente hacia lo algebraico.

4. La influencia que ejercen las instituciones se observa en la concordancia que existe entre la organización matemática construida y la propuesta por los programas oficiales y por los manuales.

5. En los dos procesos de estudio no se describe explícitamente la organización matemática en conjunto, no se hacen vivir los momentos tecnológico-teóricos que requiere el estudio de problemas ni se realiza el necesario trabajo de la técnica.

6. Cada profesor utiliza un estrategia diferente; uno de ellos considera como objetivo potenciar la capacidad de exploración de los alumnos, presuponiendo que los alumnos son capaces de realizar "una actividad matemática creativa", es decir, aquella en la que predomina el momento exploratorio; en cambio, la estrategia seguida por el otro profesor consiste en utilizar sobre todo momentos de

institucionalización, el proceso se basa en su discurso y se tiende al tecnicismo para que los alumnos lleven a cabo una mínima actividad.

En un artículo posterior, Espinoza y Azcárate (2000) analizan la tarea de un profesor que tiene que enseñar el concepto de límite. Se centran en el tipo de conocimiento que moviliza el profesor y las dificultades con las que se encuentra. Tuvieron en cuenta, por un lado, el pensamiento del profesor y, por otro, el conocimiento de su práctica en la enseñanza de un conocimiento matemático determinado. Al estudiar el pensamiento del profesor surgen dificultades, unas de naturaleza epistemológica y otras que se relacionan con el modo de analizar el pensamiento del profesor. Para intentar solventarlas se sitúan en el marco teórico conocido como enfoque antropológico de lo didáctico desarrollado por Chevallard (1998), que se enmarca dentro del programa de investigación más general conocido como la didáctica fundamental, iniciada por Brousseau (1983). Ésta se propone analizar el saber matemático como vía de acceso para el estudio de los fenómenos didácticos, partiendo del supuesto básico de que todo fenómeno didáctico tiene un componente matemático fundamental.

El *proceso de estudio* lo organizan a través de *seis momentos* descritos en su tesis.

Una vez desarrollado el proceso de estudio sobre el concepto de límite, pasa al análisis de la actividad del profesor, la cual se puede describir como un conjunto de organizaciones praxeológicas que conllevan un conjunto de tareas, alrededor de las cuales se desarrollan y organizan técnicas, tecnología y teoría. Se trata de problemas didácticos, técnicas didácticas, tecnología y teoría didáctica, aunque frecuentemente aparezcan implícitos o vagamente descritos dentro de dicha actividad.

Destacamos la conclusión de Azcárate y Espinosa (2000) relativa a la existencia de dos organizaciones matemáticas incompletas y desconectadas entre sí. La primera es denominada "organización matemática relativa al álgebra de límites" y responde al cálculo de límites de una función partiendo del supuesto previo de su existencia. La segunda es denominada "organización matemática relativa a la definición del objeto límite de función" y obedece a la cuestión de la enseñanza del límite. En esta última encontramos la "definición $\varepsilon - \delta$", la definición basada en entornos o la caracterización por sucesiones.

Corica y Otero (2009) también centran su trabajo en la actividad del profesor universitario que tiene que explicar el límite de una función. El propósito es describir y comprender las organizaciones matemáticas en torno a la noción de límite funcional que se estudian en la universidad, así como la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación.

En el apartado 1.2 de este capítulo de antecedentes también hemos dejado constancia de cómo el trabajo de Barbé (2005) gira en torno a las prácticas de los profesor, en el sentido de ver cómo están fuertemente condicionadas por diferentes restricciones, de origen matemático y didáctico.

1.3.3 Trabajos sobre el tratamiento que recibe en los manuales el límite finito de una función en un punto

Al estudiar trabajos realizados con manuales, hemos considerado si el límite es presentado como herramienta o como noción, si se introduce de forma intuitiva o se presenta sintéticamente a través de una definición y, en este último caso, de qué tipo de definición se trata y qué ejemplos se han considerado por los autores.

Sánchez (1997) estudió el tratamiento didáctico que se ha dado a la noción de límite de una función en manuales de los siglos XIX y XX. Considera diversos aspectos, acentuando: (a) el estatus del concepto (en el sentido de si se presenta como herramienta o como noción en sí mismo), (b) la forma en que se introduce el concepto de límite (definición intuitiva, definición formal o con ejemplos), (c) la definición utilizada (por sucesiones, métrica, topológica), (d) los ejemplos considerados, (e) las concepciones y (f) los obstáculos y dificultades que se extraen de los contenidos. El autor distingue entre manuales universitarios y no universitarios y llega a las siguientes conclusiones.

- *Manuales universitarios*. El límite evoluciona desde una consideración como herramienta para otros conceptos hasta ser considerado como un concepto. La forma de introducirlo es, sobre todo, mediante definiciones intuitivas o ejemplos y, en menor número de ocasiones, a través de una definición formal. En las primeras etapas la definición utilizada es métrica o topológica. A medida que se avanza en el tiempo, se alcanza un equilibrio, utilizándose además la caracterización por sucesiones. A partir de 1989 detectan, en los ejemplos, las funciones definidas a trozos, con lo que adquiere importancia la noción de límite lateral. Respecto a las concepciones, se observa poca presencia de la concepción geométrica y mucha presencia de la concepción geométrico-gráfica. En la mayoría se constatan numerosos obstáculos sin que se presenten suficientes situaciones donde se faciliten los actos de comprensión que permitan su superación. La aparición de los obstáculos depende únicamente de los autores y no de la época.

- *Manuales no universitarios*. En los manuales utilizados en educación secundaria se observa la misma evolución, de ser considerado herramienta hasta ser presentado como concepto. Nunca se introduce a través de la definición formal, se utilizan situaciones muy diversas, ya sea de modo intuitivo, con ejemplos, o por otros modos. En las primeras etapas se utiliza la definición intuitiva y solo al final se procura presentar la definición formal. Algunos autores utilizan más ejemplos en la última etapa. La concepción geométrica no está presente en este tipo de manuales, y sí lo está la geométrico-gráfica en la mayoría. Los obstáculos, al igual que ocurre en los manuales universitarios, están ligados a los autores.

Sobre las organizaciones matemáticas y didácticas en torno al límite de una función, Espinoza (1998) analizó las reconstrucciones escolares propuestas en los programas y en algunos libros de texto de 2º de BUP. Las conclusiones que extrae del análisis de los programas son las siguientes:

1. El énfasis se pone en los conceptos y no en el tipo de actividades.
2. El papel del límite es básico y fundamental, se propone la definición métrica y el cálculo, pero no las aplicaciones. Se da un tratamiento formal y algebraico a los problemas de cálculo.
3. Existe una contradicción entre el rigor matemático que se requiere en la enseñanza escolar y el tipo de tareas que se propone.
4. No se insta a proponer problemas reales que se pueden articular en una organización matemática más amplia.
5. Se propone introducir el número real en 1º de BUP de manera intuitiva, cultivando el sentido de la aproximación, y sin embargo no se trabaja la aproximación, sino la precisión y la exactitud, el límite aparece en forma implícita. En 3º de BUP el límite aparece en el ámbito tecnológico, mientras que en COU lo hace en forma implícita al tratar las aproximaciones de una función por polinomios, aunque la noción de aproximación no aparece anteriormente en su vertiente numérica.
6. La integral no se introduce. Se utiliza en el cálculo de áreas, por lo que el límite no aparece como un instrumento.

Sin embargo del análisis de los libros de texto de editoriales bien implantadas en el territorio andaluz, como Vicens-Vivens, Teide, Anaya y Bruño, las observaciones con respecto al límite son:

1. En la construcción de la organización matemática no se explicita de dónde surge, ni su interés, ni su pertinencia. Su tratamiento se realiza alrededor de una única cuestión: "Dada f(x) calcular el límite de la función cuando x tiende a a", es decir se hace a partir de la tecnología y la teoría, y no de los problemas". Los ejercicios que se presentan son de cálculo algebraico o gráfico de límites finitos e infinitos.
2. Las técnicas están implícitas en el discurso tecnológico, no surgen tras la exploración de problemas específicos. Las actividades carecen de los elementos formales que las alejan del mundo real. Los contenidos se presentan en varios capítulos, en unos aparece el desarrollo tecnológico y en otros las actividades que los alumnos tienen que realizar. Se hace una relación de técnicas que se utilizan para cada tipo de problema y mapas que ponen de manifiesto su estructura jerárquica. No se plantea la necesidad de realizar un análisis sobre la utilidad y limitaciones de las técnicas, ni se cuestiona la relación existente entre ellas. La técnica más utilizada es la "técnica de sustitución". A partir de ella se construyen casi todas las demás, sin tener en cuenta sus limitaciones ni la posibilidad de que dé lugar a resultados incorrectos, los cuales no se explicitan en la reconstrucción.
3. El pilar o hilo conductor de la reconstrucción que los libros proponen, son la tecnología y la teoría. Las técnicas que caracterizan la organización matemática apuntan únicamente a la resolución de problemas relacionados con el cálculo de límites, y no emergen del trabajo de exploración de tipos de problemas, sino que aparecen como aplicación o ilustración del discurso tecnológico.

Raman (2004) observa que los temas relacionados con los límites no se asocian necesariamente con el concepto de límite o su definición en la universidad. Por un lado, los vínculos entre las ideas intuitivas, la definición formal y las técnicas se han camuflado en los libros de texto de nivel universitario. La "definición $\varepsilon-\delta$" se presenta en una sección diferente de aquella en la que se discuten las ideas intuitivas acerca de los límites. La búsqueda de los posibles candidatos a límites también se presenta en secciones independientes. La enseñanza de la definición formal y de sus usos es indisociable de la enseñanza de encontrar los límites.

Sierra, González y López (1999) realizaron un análisis de la evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato COU entre los años 1940-1995. Los autores afirman que durante los últimos años y debido, en parte, al fracaso de los proyectos de reforma curricular, el interés hacia la historia de la Educación Matemática ha crecido. También destacan la necesidad de hacer un análisis de libros de texto, ya que la práctica de la enseñanza no está tan determinada por los Decretos y Órdenes Ministeriales como por los libros de texto utilizados para enseñar. Hay escasez de trabajos en este sentido, lo que se explicaría por la escasa formación matemática de los historiadores o por el escaso interés de los matemáticos por este tema. Los autores consideran tres periodos en su análisis, teniendo en cuenta los sucesivos planes de estudio: (a) entre 1940 y 1967, (b) entre 1967 y 1975 y (c) entre 1975 y 1995. El análisis de libros de texto lo llevaron a cabo en tres etapas, profundizando en cada una sobre el trabajo realizado en la etapa anterior. En la primera etapa se elaboraron fichas con los datos fundamentales del libro: título, autor/es, editorial, año de edición, plan de estudios, y un resumen del contenido de los capítulos relacionados con el límite. A continuación diseñaron unas tablas comparativas de los libros correspondientes a cada periodo, que incluyen: (a) modo de introducción del concepto (formal, heurístico o constructivo), (b) tipo de definición (topológica, métrica, geométrica o por sucesiones), (c) secuenciación y (d) tipos de ejercicios y problemas. Y por último, consideraron tres dimensiones de análisis: conceptual, didáctico-cognitivo y fenomenológico. Concluyeron que en los programas oficiales y en los libros de texto se observa una evolución desde su consideración ligado al concepto de función, pasando por un largo periodo en el que tiene entidad propia, hasta las últimas reformas en las que se enfatiza su carácter instrumental. En el periodo inicial, en torno a los años cincuenta, se dan definiciones en las que se mezcla el concepto de variable y el concepto de función, seguido de un periodo de clarificación del concepto de límite en el que se define mediante sucesiones. En el periodo correspondiente a la matemática moderna se pone el énfasis en la presentación topológica del concepto acompañado de una traducción inmediata a la definición métrica. Una vez aprobada la Ley General de Educación (LGE) se implanta BUP y en él se consolida la tendencia de la matemática moderna, considerando el concepto de límite, definiéndose como límites laterales y presentando todos los casos finitos e infinitos del límite y de la variable. Sin embargo con la entrada en vigor de los bachilleratos LOGSE, aparece una tendencia a presentar el concepto de límite en el marco de fenómenos de la naturaleza o situaciones de la vida diaria.

Ibáñez y Ortega (2004) hacen una reflexión sobre textos argumentativos, considerando que éstos deben convencer y persuadir de la veracidad del contenido que expresan. Los autores trabajan con los esquemas de prueba de los alumnos y describen las carencias ligadas a los sistemas de representación, lo que les lleva a firmar que "…éstos no constituyen auténticos textos argumentativos de forma aislada, ya que necesitan complementarse" (p.51). También hacen un breve apunte sobre textos curriculares describen numerosos ejemplos atendiendo a diferentes estilos de argumentación. Respecto a los libros de texto concluyen que observan un tratamiento bastante diferente de una editorial a otra, y apuntan la ausencia de intención didáctica y la uniformidad de métodos y estilos.

En el apartado 1.2 de este capítulo observamos que algunos autores como Barbé (2005), Blázquez (2000), Hardy (2009) y Robinet (1983), también han realizado, en mayor o menor medida, un análisis de libros de texto.

Destacamos el trabajo de Claros (2010) por los paralelismos entre su Capítulo 4 y el Capítulo 4 del presente trabajo. El autor estudia 30 libros de texto de bachillerato publicados entre 1933 y 2005. El recuento de la frecuencia con la que apareció cada fenómeno organizado por la definición de límite finito de una sucesión le permitió concluir que: (a) Hasta los años 70, el fenómeno a.s.i es casi inexistente. (b) Durante los años 80 se llevan a cabo propuestas innovadoras en los libros de texto, con presencia de diferentes códigos de fenómenos. Estos experimentos anticipan una disminución en la frecuencia del fenómeno i.v.s y un correspondiente aumento de la frecuencia del fenómeno a.s.i. (c) Tal hecho se produjo sobre todo a partir de los años 90, en los que se observó una correlativa lenta reducción de los sistemas de representación a favor del sistema de representación verbal.

1.3.4 Ubicación curricular de la noción de límite finito de una función en un punto

Las leyes vigentes en España durante el periodo que ha durado nuestra investigación han sido la LOGSE, la LOCE y la LOE. La noción de límite se define y trabaja en el bachillerato, por lo que nuestras referencias a estas leyes se limitan a esta etapa.

El Real Decreto 1467/2007 del 2 de noviembre estableció la estructura del bachillerato y fijó sus enseñanzas mínimas. Se incluyen cuatro asignaturas de matemáticas: Matemáticas I y II (en las modalidades Tecnología y Ciencias de la Naturaleza y de la Salud) y Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II (en la modalidad de Ciencias Sociales). Respecto a la noción de límite se afirma que:

> *Con la introducción de la noción intuitiva de límite y geométrica de derivada, se establecen las bases del cálculo infinitesimal en Matemáticas I, que dotará de precisión el análisis del comportamiento de la función en las Matemáticas II*. (p.45448)

Dentro de los contenidos de la asignatura Matemáticas I, el que hace referencia a la noción de límite es: "Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad". Los criterios de evaluación especifican que:

> *Se pretende comprobar con este criterio la capacidad de utilizar adecuadamente la terminología y los conceptos básicos del análisis para estudiar las características generales de las funciones y aplicarlas a la construcción de la gráfica de una función concreta. En especial, la capacidad para identificar regularidades, tendencias y tasas de variación,...* (p.45450)

Para la asignatura Matemáticas II, los contenidos que hacen referencia a la noción de límite son: "Concepto de límite de una función. Cálculo de límites". Un criterio de evaluación precisa:

> *Aplicar el concepto y el cálculo de límites y derivadas al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos y a la resolución de problemas de optimización. Este criterio pretende evaluar la capacidad para interpretar y aplicar a situaciones del mundo natural, geométrico y tecnológico, la información suministrada por el estudio de las funciones*. (p.45451)

La asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I no tiene contenidos referentes a la noción de límite.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, tiene un contenido referente a la noción de límite: "Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función" (p.45476).

El Decreto 416/2008 de 26 de agosto de 2008 de la Junta de Andalucía, en cuyo ámbito geográfico se ha desarrollado nuestra investigación, recoge el currículo correspondiente a bachillerato en esta comunidad autónoma, a través de la orden del 5 de agosto de 2008, en la que se incluyen los contenidos y criterios de evaluación establecidos para las asignaturas de matemáticas en el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, junto con las aportaciones específicas para la Comunidad Autónoma de Andalucía. Se consideran núcleos temáticos, entre los que se encuentra: "aprender de y con la historia de las matemáticas". Respecto a las asignaturas Matemáticas I y II, se sugiere*:*

> *Historia de la caracterización de números reales, estructura y topología: Cauchy, Weierstrass y Dédekind. La influencia del método griego de exahusción en el descubrimiento de la derivada. La evolución del concepto de función desde Fermat a Euler. Derivadas y Fluxiones en Leibniz y Newton. La formulación del límite de D'Alembert a Cauchy. La continuidad y la derivada desde la rigorización del límite. La evolución del concepto de integral: Leibniz, Cauchy y Riemann.* (p.171)

En las asignaturas Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II, se sugiere "Historia del concepto de función. Aproximación histórica al concepto de límite, continuidad y derivada" (p.203). Para ayudar al estudio de la componente histórica de las matemáticas, se considera de ayuda el uso de internet y la lectura de textos seleccionados de autores clásicos como son (p. 171): "«Introducción al análisis de los infinitos» y «Cartas a una princesa alemana…» de Euler; «Continuidad y números irracionales» y «¿Qué son y para qué sirven los números?» de Dedekind".

CAPÍTULO 2º: Área Problemática. Problema de investigación

[…]el alumno comienza a serlo cuando se le revela la pregunta que lleva dentro agazapada. La pregunta que es al ser formulada el inicio del despertar de la madurez, la expresión misma de la libertad

María Zambrano

Introducción

En este capítulo presentamos el problema de investigación, describimos el área problemática, exponemos, a grandes rasgos, la metodología empleada en el desarrollo de la investigación y enunciamos la meta general, los objetivos y las hipótesis.

En el apartado 2.1 hemos seleccionado, de investigaciones previas, ideas que se aproximan a algunos desarrollos presentados en el Capítulo 3º. De algún modo, esta selección constituye un inicio del problema de investigación.

En el apartado 2.2 describimos el área problemática. La hemos articulado en torno a tres pilares: pensamiento matemático avanzado, fenomenología y sistemas de representación.

El límite se estudia durante el primer curso de la titulación de Matemáticas mediante un planteamiento axiomático. En cambio, en bachillerato, se presenta de un modo menos formal. En el grupo de trabajo Pensamiento Matemático Avanzado (véase 2.2), que surgió en 1985, en el seno de la sociedad Psychology of Mathematics Education, se preguntaron acerca de la distinción entre razonamientos elementales y avanzados. Recientemente, esa pregunta se ha modificado, quedando más relacionada con las acciones del resolutor que con las matemáticas propiamente dichas. Esperamos que esta "pieza" del área problemática aporte criterios para decidir desde qué punto de vista el límite finito de una función en un punto se integra en el pensamiento matemático avanzado y desde cuál no es el caso.

La fenomenología, en el sentido de Freudenthal (1983), era un campo sin explorar en el ámbito del límite de funciones. Ésta ha aportado un enfoque que creemos adecuado, tanto desde la perspectiva de la investigación como de la enseñanza-aprendizaje. Esperamos poner de manifiesto que la fenomenología se integra cómodamente con el pensamiento matemático avanzado y los sistemas de representación y aporta resultados.

El tercer componente de nuestra área problemática está constituido por los sistemas de representación. Varios autores han observado que se emplean representaciones diversas en la enseñanza del límite. No entraremos en las representaciones personales o internas y nos limitaremos a analizar las posibilidades que generan las representaciones, en lo relativo al límite finito de una función en un punto, en el sentido dado por Janvier (1987).

Hemos incluido en el apartado 2.3 la metodología, los objetivos y las hipótesis de la investigación. Sucesivamente presentamos el estudio y su organización en dos fases (una teórica y otra experimental); enunciamos una *meta general* que da paso a *objetivos específicos,* derivándose algunos *objetivos complementarios,* más propios de la fase experimental. Finalmente, enunciamos y comentamos las hipótesis de investigación.

2.1 Inicio del problema de investigación

Esta investigación conecta con algunos trabajos mencionados en el capítulo anterior.

Vinner (1991) indicó algunas imágenes conceptuales que llevan a errar a los alumnos cuando trabajan el límite secuencial (ver 1.2.2). El límite funcional, con el cual ocurren errores análogos, se asume como un proceso dinámico e inacabado: cuando x se aproxima hacia a, $f(x)$ se aproxima al límite sin alcanzarlo. Surgen así, de nuevo, imágenes conceptuales distintas del límite. Para el límite finito de la función en un punto, la concepción dinámica prevalece sobre la definición formal, no sólo cuando se pide una definición de la noción sino cuando se ha de poner en juego en algún ejemplo concreto o en alguna propiedad. Integramos cómodamente este proceso dinámico e inacabado, según Vinner, en el fenómeno que llamamos "aproximación doble intuitiva".

Entre las dificultades asociadas a la conceptualización y formalización de la noción de límite, Artigue y otros (1995) analizaron la dificultad que consiste en distinguir dos procesos: uno sobre la variable y otro sobre los valores de la función. También integramos estos dos procesos en el fenómeno mencionado. Los autores indicados comentaron el salto cualitativo entre la intuición y la noción formal, y pusieron de manifiesto que el paso de la intuición a la formalización del límite no es trivial. En este trabajo damos una pauta fenomenológica según la cual intuición y formalización son organizadas conjuntamente por una definición de límite finito de una función en un punto.

Sierpinska (1985) enunció el siguiente *obstáculo lógico*:

> *La función nos lleva del eje x al eje y, mientras que haciendo el estudio del límite de una función en un punto, se va en sentido inverso. Esta dificultad de "mirar el eje x sobre el eje y" es fuente para este obstáculo.* (p. 54)

Ella asocia este obstáculo al orden de los cuantificadores en la definición de límite. Entendemos que se refiere al emparejamiento de épsilon con la variable *y*, y al de delta con la variable *x*. En el Capítulo 3º damos sentido a ese emparejamiento, integrándolo en lo que hemos llamado fenómeno de "retroalimentación" o "Ida y Vuelta en Funciones (IVF)". Por no considerar esta idea, descartamos la propuesta de descomposición genética de la noción de límite finito de una función en un punto hecha por Cottrill (1996) (véase apartado 1.2.2.).

Entre las dificultades enumeradas por Mamona-Downs (2001) destacamos las que contienen un acercamiento (en nuestra opinión, fragmentario) al fenómeno de retroalimentación o ida y vuelta en funciones.

Claros (2010) caracterizó y describió dos fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión y estudió las relaciones entre tales fenómenos y la propia definición (véase 1.2.2). Una vez descritos estos fenómenos, el autor los detectó en un estudio realizado con una muestra de 30 libros de texto de bachillerato publicados entre 1933 y 2005, y llevó a cabo una investigación con alumnos con el fin de buscar esos fenómenos en sus producciones. Nuestra investigación, en una primera etapa, se llevó a cabo en paralelo con la realizada por Claros. Un primer análisis de antecedentes, realizado de manera conjunta, explica referencias comunes en ambas memorias así como métodos compartidos en el estudio teórico y en el de libros de texto.

En este trabajo describimos los fenómenos en el sentido de Freudenthal (1983), organizados por definiciones de límite finito de una función en un punto. Los hemos analizado, buscado relaciones con la propia definición (y con otras definiciones de límites funcionales y de sucesiones) y detectado en un estudio de libros de texto de educación secundaria así como en relatos de profesores de enseñanza secundaria sobre su actividad en el aula al trabajar la noción de límite finito de una función en un punto. Además, proponemos criterios para decidir si un usuario de una definición de límite finito de una función en un punto utiliza el pensamiento matemático elemental (PME) o al avanzado (PMA).

2.2 Área problemática

Dreyfus (1990) y Tall (1991), entre otros autores, reconocen que el aprendizaje del límite requiere una capacidad lógica abstracta que les lleva a incluirlo en lo que se denomina pensamiento matemático avanzado.

Janvier (1987; 1993) ha observado que las nociones matemáticas se representan en uno o más de estos cuatro tipos de representaciones: (a) verbal, (b) gráfico, (c) simbólico y (d) tabular, y que las traducciones entre dichos tipos no son siempre obvias.

En nuestro equipo de investigación hemos considerado que la fenomenología, en el sentido dado por Freudenthal (1983), ofrece una perspectiva que permite afrontar cuestiones desde el punto de vista del proceso de enseñanza-aprendizaje, a la vez que las integra con el pensamiento matemático avanzado y las representaciones.

El trabajo de Claros (2010) está enmarcado teóricamente en estos pilares: “Con estas herramientas teóricas creemos que es posible abarcar la complejidad del límite” (p. 122), refiriéndose al límite finito de sucesiones.

En Claros, Sánchez y Coriat (en revisión) exponemos cómo el pensamiento matemático avanzado, la fenomenología, y las representaciones se integran en la elaboración de una secuencia didáctica sobre el límite finito de una sucesión. Esperamos adaptar esto, en el futuro, al límite finito de una función en un punto.

Con la fenomenología de Freudenthal presentamos cómo una definición de límite finito de una función en un punto organiza fenómenos, que describimos y reconocemos en el Capítulo 3º. Para propósitos de enseñanza y aprendizaje, se suelen presentar, mediante algún sistema de representación (o más de uno).

La Figura 2.1 (página siguiente) ilustra el área problemática en la que se desarrolla esta investigación.

2.2.1 Pensamiento matemático avanzado

El grupo de trabajo Pensamiento Matemático Avanzado surgió en 1985, en el seno de la sociedad Psychology of Mathematics Education con el objetivo de profundizar en los procesos cognitivos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus, 1990; Tall 1991).

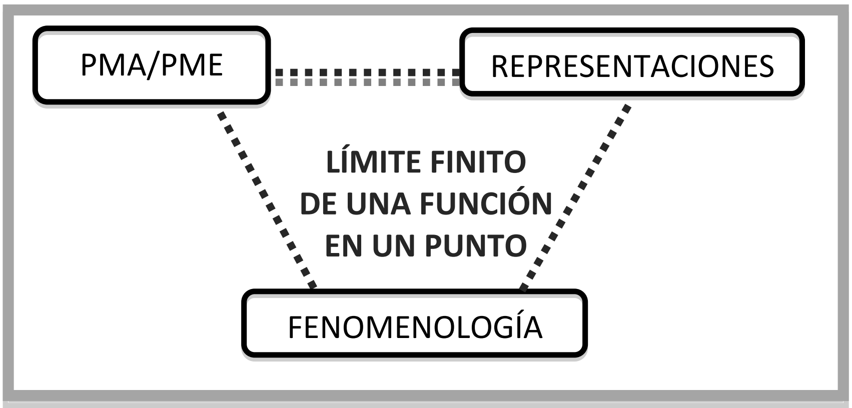


Figura 2.1 Área problemática

En torno a los años 80, el interés en Didáctica de la Matemática se desplazó hacia la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos, reorientando la preocupación hacia las competencias y habilidades. Las investigaciones evolucionaron y empezaron a ocuparse también de tópicos que, por su naturaleza y complejidad, se situaban dentro de la llamada "matemática escolar superior". Entre estos tópicos, están el límite, la derivada o la integral. Para trabajar con estas nociones se admitió que era necesario poner en juego procesos de abstracción y de generalización, que tienen un papel clave en el pensamiento matemático avanzado.

Dreyfus (1991) definió la abstracción como un proceso de construcción de objetos mentales a partir de objetos matemáticos y la generalización como derivar o inducir desde casos particulares, para identificar generalidades y expandir los dominios de validez.

Por su parte Tall (1991), a partir de los aspectos cognitivos que observó, distinguió diferentes procesos de generalización: (a) expansiva (generalización en la cual el estudiante extiende su estructura cognitiva pero sin producir cambios en las ideas corrientes), (b) reconstructiva (generalización en la cual se requiere una reconstrucción de la estructura cognitiva) y (c) disyuntiva (generalización en la que los estudiantes son capaces ahora de operar en un amplio rango de ejemplos y no parece ser muy duradera).

Tall (1981) y Vinner (1991) propusieron una teoría cognitiva sobre la forma en la que los alumnos aprendían los conceptos matemáticos. Para muchos estudiantes, una de las dificultades de la enseñanza de las matemáticas es su alto grado de abstracción.

Aunque la abstracción y la generalización no pueden ser consideradas características exclusivas del pensamiento matemático avanzado, parece haber cierto acuerdo en que éstas, junto con la definición, la demostración y la formalización, adquieren mayor importancia en el pensamiento matemático avanzado.

2.2.1.1 Pensamiento matemático, elemental y avanzado

Tall (1991) afirmó que el paso del pensamiento matemático elemental (PME) al pensamiento matemático avanzado (PMA) exige una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva con la cual se pasa, por un lado, de "describir" a "definir" y, por otro, de "convencer" a "demostrar". Concreta que los alumnos que tienen entre 16 y 20 años están intelectualmente preparados para dicha transición. Esta franja de edad corresponde a los dos cursos del bachillerato y a los dos primeros años de estudios universitarios en España. Tall expuso algunas diferencias entre el pensamiento matemático elemental y el avanzado, pero advirtió que no es fácil dar una explicación precisa o satisfactoria del paso del pensamiento matemático elemental al avanzado.

Robert y Swarzenberger (1991) propusieron diferencias entre el PME y el PMA. Afirmaron que, en el pensamiento matemático avanzado: (a) los alumnos tienen que aprender más conceptos en menos tiempo y además éstos son presentados de manera formal, (b) los conceptos enseñados llevan asociadas procesos (generalización, abstracción y formalización) que pueden entrar en conflicto con el conocimiento anterior que se tenía sobre el concepto y (c) los alumnos se enfrentan a una amplia gama de problemas que nacen de una variedad de contextos, los cuales no pueden ser discutidos con todo detalle.

Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) han propuesto una distinción entre el PME y PMA, considerando que el PMA es un "pensamiento que requiere razonamiento deductivo y riguroso acerca de nociones matemáticas que no nos son enteramente accesibles a través de los cinco sentidos" (pp. 17-18). Precisaron que un concepto se considera como parte del pensamiento matemático avanzado según los aspectos que involucre. Estos autores no creen que se pueda delimitar exactamente una línea divisoria entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado. Según estos autores el PMA forma parte de un proceso continuo de pensamiento que trasciende la experiencia procedimental o las intuiciones del pensamiento matemático elemental, sin ignorarlas ni abandonarlas. Asimismo, aceptan que el clasificar un concepto como pensamiento matemático avanzado depende del contexto en el que se esté trabajando. Ponen como ejemplo el caso del límite en el Análisis real. Su comprensión completa requiere un razonamiento deductivo y riguroso acerca de un proceso inaccesible, más bien propio del PMA. Sin embargo, muchos estudiantes de enseñanza secundaria calculan límites como un mero proceso algebraico rutinario y, por lo tanto, esta actividad no necesariamente requiere pensamiento matemático avanzado.

Para distinguir entre el PME y el PMA, Harel y Sowder (2005) separan las "formas de pensamiento" y las "formas de comprensión". Por un lado, afirman que los significados particulares que los estudiantes dan a un término, sentencia o texto, la resolución de un problema o la justificación que usan para validar o refutar una afirmación, son formas de comprensión. Por otro lado, consideran que las teorías generales implícitas o explicitas que subyacen a tales acciones son formas de pensamiento. Basándose en su afirmación anterior proponen una definición sobre cuándo un pensamiento matemático es avanzado:

> *Un pensamiento matemático es avanzado si su desarrollo involucra al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico. El nivel de adquisición para una forma de pensamiento por un individuo es determinado por la amplitud con la cual ha superado estos obstáculos.* (pp 34-35)

Estos autores enuncian tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico: (a) hay trazas de él en la historia de las matemáticas., (b) no está generado por una ausencia de conocimiento, o por una mala concepción, sino por una o más piezas de conocimiento o concepciones que producen respuestas satisfactorias en un contexto determinado, y generan respuestas inválidas fuera de ese contexto y (c) ocasiona contradicciones y genera, deseablemente, un mejor conocimiento que, sin embargo, no es suficiente para que el conocimiento anterior desaparezca.

2.2.1.2 Límite y pensamiento matemático avanzado

Tall (1991) situó la noción de límite dentro del PMA por los procesos cognitivos que consideró necesarios para su manejo. Cornu (1991) coincidió con Tall en situarlo en el PMA pero justificando su postura en que se trata de una pieza fundamental en la teoría de las aproximaciones, continuidad, derivabilidad e integración.

Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) sugirieron que la noción de límite está situada en el pensamiento matemático elemental o avanzado dependiendo de la labor que se realice. Consideraron que si solamente se trabaja cálculo de límites, no se requiere un pensamiento matemático avanzado para realizar esta operación.

Desde nuestro equipo de investigación (Claros, Sánchez y Coriat, en revisión) hemos propuesto, para las sucesiones el criterio siguiente: el límite es parte del PMA cuando el estudiante maneja los dos fenómenos organizados por la definición y es parte del PME si solamente maneja el fenómeno intuitivo. En esta memoria extendemos dicho criterio al límite finito de una función en un punto, como expondremos en el Capítulo 3º. Dicha extensión es posible y parece natural pero también veremos algunas objeciones. Las ideas correspondientes se desarrollan con más detalle en el apartado 3.4.4 y en el anexo A3.1.

2.2.2 Fenomenología

Freudenthal (1983) llama "*fenomenología*" a su método de estudio de los contenidos matemáticos. Para este autor hacer un análisis fenomenológico de un concepto u objeto matemático es describir su relación con aquello para lo que es medio de organización. Esta fenomenología parte de la contraposición, establecida en la filosofía tradicional, entre los términos "fenómeno" y "noúmeno". Para Freudenthal:

> *La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o una idea matemática significa, en mi terminología, describir este noumenon en su relación con los phainomena para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los phainomena para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos*. (p. 28)

El análisis fenomenológico desarrollado por Freudenthal, está hecho al servicio de la didáctica. No obstante distingue varios tipos de fenomenología, todos importantes desde el punto de vista de la didáctica, pero solo uno puede ser calificado como didáctico. Los tipos de fenomenología que define son: fenomenología, fenomenología didáctica, fenomenología genética y fenomenología histórica. Unas fenomenologías se diferencian de otras por los fenómenos que se tienen en cuenta con respecto al concepto matemático del que se ocupan. En el primer caso, se habla de fenómenos que están organizados por las matemáticas en el momento actual y en su uso actual. La fenomenología didáctica se ocupa de fenómenos que están presentes en el ámbito de la enseñanza. En la fenomenología genética se tratan los fenómenos que tienen en cuenta el desarrollo cognitivo de los aprendices. En la fenomenología histórica se encuentran los fenómenos que son organizados por el concepto matemático y cómo esta organización se extendió a otros fenómenos.

Freudenthal afirma: “Lo que una fenomenología didáctica puede hacer es empezar por esos fenómenos que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización” (p. 32). El objetivo del análisis fenomenológico de Freudenthal es servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas y no pretende elaborar una explicación de su naturaleza.

Otra idea desarrollada por Freudenthal es el objeto mental en contraposición al concepto. Este autor preconiza que el objetivo de la acción educativa en el sistema escolar ha de ser básicamente la constitución de objetos mentales y sólo en segundo lugar la adquisición de conceptos. En muchas ocasiones se produce un desajuste entre el objeto mental y el concepto creado a partir de él. Como ejemplo, se refiere a la continuidad. Señala que al darse la primera definición explícita de continuidad, el objeto mental continuidad fue asaltado por numerosos ejemplos. A partir de ese momento eran ejemplos de funciones continuas porque se adaptaban a la definición, pero nunca habían sido pensadas como tales con anterioridad. En definitiva, la relación entre los objetos mentales y los conceptos es variada. Ambos se constituyen como medios de organización de fenómenos.

Freudenthal y la noción de función

Freudenthal (1983) dedica un capítulo a la noción de función y distingue entre variable, dependencia y función.

Variable

A la noción de variable la llamó “nombres polivalentes” y afirma que hay una costumbre en las matemáticas actuales de llamar “variables” a lo que en realidad son medios para formular proposiciones de carácter general.

Freudenthal (1983) observó que: "Originalmente `variable´ había significado algo que realmente varía, algo del mundo físico, social o mental, o del propio mundo de las matemáticas, que se percibe o imagina que está variando" (pp. 491-492). Da varios ejemplos como el tiempo que pasa o la luna creciente. "De esta forma, desde los fenómenos físicos, sociales o mentales variables se pasa a números, magnitudes o puntos concebidos también como variable, esto es, a objetos matemáticos variables." (p. 492). Para ejemplificar aún más, utiliza expresiones como que el número e es aproximado por la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n tiende a infinito, de forma que se aprecia el aspecto cinético de la variable.

Freudenthal no se ocupó explícitamente del límite de una sucesión, pero resaltó que el aspecto cinético de una variable ha sido sustituido por definiciones precisas. Así, en lugar de escribir "x_n converge a cero", escribimos $\lim_n x_n = 0$ y lo definió como "para cada $\varepsilon \succ 0$ existe un n_0 tal que $|a_n| \prec \varepsilon$ si $n \geq n_0$".

Dependencia

En palabras del propio Freudenthal:

> *El origen fenomenológico de la noción de función surge en el momento en que se enuncia, se postula, se produce o se reproduce una dependencia entre variables, que se presenta en el mundo físico, social o mental, así como entre variables matemáticas que, a su vez, están relacionadas con variables de los otros mundos*. (p. 494)

La misma dependencia puede ser objetivada, en el sentido de que se le puede dar el estatus de objeto mental. En el proceso para esa objetivación, "la dependencia ha de ser experimentada mentalmente, usada, provocada, hecha consciente, experimentada como un objeto, nombrada como un objeto, situada en un contexto más amplio de dependencias" (p. 494).

Función

Freudenthal afirmó que una función es un tipo especial de dependencia entre dos variables, una dependiente y otra independiente. Hizo hincapié en la importancia fenomenológica de que algo varíe libremente frente a lo que varía de acuerdo con una restricción. Esta es la idea subyacente en el fenómeno que organiza la noción de función.

La definición matemática de función de Freudenthal es: "Llamamos función de A en B al hecho de asignar a cada elemento de A un único elemento de B" .Se trata de una definición dinámica. Más adelante da otra definición estática: *"*Una relación de A a B es cualquier subconjunto del producto cartesiano [A,B]. Dicha relación f se llamará función si para cada $a \in A$ existe un único $b \in B$ de forma que $a, b \in f$". Considera que ambas definiciones son equivalentes matemáticamente, pero no fenomenológicamente, ni didácticamente. En el Capítulo 3º presentaremos situaciones matemáticamente y fenomenológicamente equivalentes.

El término función no siempre se ha usado de la misma forma. Según Freudenthal, es posible interpretar funciones en las descripciones mediante tablas de los movimientos de los cuerpos celestes hechas por los astrónomos desde los tiempos paleo babilónicos. Destacamos a continuación algunas ideas que la historia enseña para una fenomenología de las funciones:

> *-Las funciones hicieron su aparición como relaciones entre magnitudes variables, cuya variabilidad se comparaba en términos infinitesimales.*
>
> *-La libertad de cambiar las variables de dependiente a independiente y entre independientes condujo a dos nuevos tipos de operaciones con funciones: la composición y la inversión. Esta nueva riqueza operatoria causó el éxito del concepto de función.*
>
> *-La necesidad de distinguir entre las variables dependientes e independientes condujo a poner en primer plano las funciones en vez de las relaciones. A pesar de lo que sugieren las expresiones algebraicas y analíticas, el desarrollo tendió hacia las funciones univalentes.*
>
> *-Un cambio de perspectiva condujo a la descripción de datos visuales (mediante funciones expresadas analíticamente) a la visualización de funciones mediante gráficas.*
>
> *-La función arbitraria hace su aparición con el cálculo variacional y la resolución de ecuaciones diferenciales. Esta arbitrariedad no sólo atañe al carácter de la dependencia funcional, sino a la naturaleza de las variables, que*

> *pueden ser números, puntos, curvas, funciones, elementos de conjuntos arbitrarios.*
>
> *-Las funciones del análisis, las transformaciones geométricas, las permutaciones de conjuntos finitos, las aplicaciones entre conjuntos arbitrarios confluyen para generar el concepto general de función.*
>
> *-Ese concepto se usa a su vez para organizar una gran variedad de objetos: desde las operaciones algebraicas a los predicados lógicos.* (pp. 527-528)

La variedad de fenómenos que se integran en el concepto de función, muchos de los cuales pertenecen al mundo de las matemáticas, hace que se trate de un objeto mental complejo.

2.2.3 Representaciones y sistemas de representación

Castro y Castro (1997) afirmaron que las representaciones ayudan a generar imágenes y objetos mentales, que colaboran en la formación de conceptos y procedimientos matemáticos. La expresión "sistema de representación" se refiere al conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permiten representar una estructura matemática. Para estos autores, se domina un concepto cuando se conocen sus principales representaciones y las traducciones entre ellas. Al analizar la relación entre representaciones y construcción de conceptos, se observa un creciente interés por las representaciones, basado en la creencia de que las representaciones externas de los conceptos mejoran su comprensión o la visualización de un proceso o concepto matemático. Esto ha generado una presencia masiva de representaciones en los libros de texto y un aumento de la producción investigadora orientada a precisar esa idea de representación y su influencia en la comprensión de los conceptos matemáticos.

En la enseñanza elemental se utilizan las representaciones, aumentando su uso y variedad en la secundaria y el bachillerato. En el ámbito universitario parece que las representaciones simbólicas, eclipsan a las demás.

Kaput (1983) afirmó que cualquier noción de representación debe involucrar la representación del mundo y el mundo representado. Debe haber además una correspondencia entre algunos aspectos del mundo representado y la representación de éste. Considera que la representación es independiente de los símbolos que se usen y es considerada como una abstracción o idealización en matemáticas. Además indicó algunas de las representaciones más comunes en matemáticas: morfismos, construcciones algebraicas genéricas, construcciones canónicas internas y externas, aproximaciones, aislamiento de propiedades y modelos lógicos.

Para Dreyfus (1991) los procesos relacionados con la representación son: representación, cambio de representaciones y traducción, y modelización.

1. *Representación:* Implica la generación de un concepto, muestra o imagen de él. Hace una distinción entre representaciones internas y externas, las internas corresponden a las que tiene el sujeto en su mente mientras que, entre las representaciones externas, menciona las representaciones simbólicas (escritas o habladas).
2. *Cambio de representaciones y traducción*: Además de conocer diferentes representaciones es necesario conocer cómo se pasa de una representación a otra para saber cuál es la más eficiente.
3. *Modelización,* o representación matemática para un objeto o proceso no matemático. Afirma que la modelización y la representación están relacionadas: en la modelización, la situación o sistema son físicos y el modelo es matemático mientras que en la representación, el objeto representado es una estructura matemática y el modelo es una estructura mental.

Janvier (1987) trabajó sobre la noción de función, considerando que las representaciones asociadas se pueden clasificar en cuatro clases: (a) analítica, (b) tabla, (c) gráfica y (d) verbal. Afirmó que, aunque todas contienen la misma información, ponen en juego diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La expresión analítica conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La representación gráfica conecta con la visualización y se relaciona con la geometría y la topología, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres.

Janvier (1993) precisó tres acepciones diferentes del término representación: (a) organización material de símbolos como diagramas o gráficos, los cuales se refieren a otras entidades o sirven como modelo para algunos procesos mentales, (b) relación entre las representaciones y los conceptos, en algunos casos identificándolos y, en otros, afirmando que las representaciones se forman a partir de los conceptos, siendo ésta la estructura que los sustenta y (c) relación entre las representaciones y las imágenes mentales.

Tall (1996) propuso una clasificación de los sistemas de representación que se usan en la enseñanza de nociones propias del análisis, particularmente del límite. Esta clasificación está sustentada en la utilización de los ordenadores como herramienta didáctica. Los clasifica de la siguiente manera: (a) *representaciones interactivas*, como la simulación de las relaciones entre espacio, tiempo y velocidad que proporciona el programa MathCars, (b) *representaciones numéricas, simbólicas y visuales*, que muestran el funcionamiento proceptual (como proceso y como concepto) y constituyen el cálculo elemental y (c) *representaciones formales* donde los objetos se manipulan a través de definiciones y no de descripciones, y que constituyen el análisis matemático.

Rico (2000) recomienda que, a la hora de considerar los sistemas de representación en la enseñanza, se seleccionen los más adecuados para cada concepto y cada edad.

Cornu (1991) señaló las distintas concepciones que los alumnos tienen de tendencia y de límite, muchas de ellas influenciadas por su uso en otros contextos.

Respecto a la enseñanza del límite de sucesiones, Mamona-Downs (2001) realizó una serie de aportaciones en relación con los sistemas de representación utilizados. Identificó que el sistema de representación gráfico puede ser considerado como un sistema donde toda la información que conlleva la definición puede ser fielmente embebida, pese a los problemas que pueden surgir al trabajar con las sucesiones constantes. También sugirió que las afirmaciones hechas en la gráfica dinámica ayudarían a persuadir a los estudiantes a abandonar creencias como las siguientes: el término final existente en una secuencia infinita; la consideración del límite como valor y posición a la vez; o el límite nunca puede ser alcanzado porque es la última posición. Termina recomendando el uso de la gráfica para ayudar a alejar la idea de que el límite requiere un comportamiento monótono.

Engler, Vrancken, Hecklein, Müller y Gregorini (2007) presentaron una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de una función en un punto. En ella insistieron en la importancia de usar las representaciones verbal, tabular, numérica, analítica y gráfica. Entre otras cosas, diseñaron actividades dirigidas a favorecer al paso de un sistema de representación a otro.

Con respecto a la noción de límite, Blázquez y Ortega (2001) trabajaron el concepto de representación. Los autores señalaron que distintas investigaciones sobre el concepto de límite funcional sugieren considerar los siguientes sistemas de representación: verbal, numérico, gráfico y algebraico; señalando que coinciden con las representaciones habituales para la noción de función. Estos autores encontraron que la utilización de representaciones verbales para trabajar el concepto de límite choca con las dificultades que entraña la asociación del término límite con su significado en el lenguaje habitual. (El término lenguaje habitual lo expresa Cornu (1991; p.154) como "el significado coloquial de los términos usados"). Emplear el término límite en el lenguaje habitual sería equivalente a usar el significado coloquial de la palabra límite, sin garantizar que ese significado esté compartido por los hablantes o lectores. Para definir el concepto de límite consideran que es adecuado presentar el límite finito como aproximación óptima porque permite aprovechar el aspecto intuitivo y cercano a la realidad sin reducir el límite a una simple aproximación. El empleo de esta definición de límite implica que, en principio, la representación a utilizar sea numérica.

Blázquez y Ortega (2000) propusieron trabajar la noción de límite en educación secundaria usando los sistemas de representación verbal, numérico, gráfico y algebraico, considerando que el concepto de límite de una función en un punto se representa verbalmente como la aproximación óptima de los valores de la función en un entorno del punto. El sistema de representación numérico es un proceso de tendencia basado en una tabla de valores e imágenes de éstos en la que cualquier aproximación del límite, distinta de él, se podría mejorar con las imágenes de valores cercanos al punto de interés. El límite, en el sistema de representación gráfico se presenta como un punto del eje OY tal que a todo segmento que le contiene le corresponde otro en torno al punto de interés, que se proyecta dentro de él. En el sistema de representación algebraico aparece la definición métrica de límite en los términos usuales de $\varepsilon-\delta$, que son los controles de las aproximaciones, o la definición topológica de entornos, Blázquez y Ortega (2001) confían en que "La utilización de distintos registros (algebraico, numérico, gráfico, verbal) mejora la comprensión del concepto de límite". (p.8). Enuncian dos conclusiones:

> *La utilización de distintos sistemas de representación a la hora de trabajar el concepto de límite choca con las dificultades del cambio de sistema de representación, que puede ser, en parte, un obstáculo didáctico, puesto que en*

la enseñanza tradicional se ha abusado del registro algebraico y, además de descuidar el resto de representaciones, no se ha incidido en los cambios entre ellos. Esta dificultad se subsana, en gran parte, si se utiliza el ordenador para traducir unos sistemas de representación a otros.

En la secuencia de enseñanza se puso de manifiesto cómo el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje y lo hace de dos formas: por un lado compensa las limitaciones de unas representaciones con otras, y por otro, permite que los alumnos se formen una imagen conceptual más rica, pudiendo escoger la representación más apropiada para cada situación. (pp.12-13).

Claros, Sánchez y Coriat (2006) y Claros (2010) han puesto de manifiesto la importancia de usar los sistemas de representación verbal, gráfico, simbólico y tabular o numérico en la enseñanza del límite. Con ayuda de los sistemas de representación se expresan y observan los fenómenos organizados por una definición de límite. En el apartado 3.8 detallamos los sistemas de representación en los que se presentan los fenómenos descritos en esta memoria.

2.3 Problema de investigación

El equipo de investigación viene analizando el campo de problemas relativo al límite y su enseñanza aprendizaje. Hasta el momento, hemos trabajado en dos límites finitos: el de sucesiones (Claros, 2010) y el de una función en un punto, estudiado en la presente memoria.

En el apartado anterior hemos explicitado nuestra área problemática, basada en el pensamiento matemático elemental o avanzado, la fenomenología y las representaciones. En este apartado exponemos nuestro problema de investigación, su origen y formulación, resumimos la metodología empleada en la investigación y enunciamos la meta general, los objetivos y las hipótesis de investigación.

La mayoría de los profesores de educación secundaria opina que la noción de límite es una de las más difíciles de entender por los alumnos de bachillerato y primeros cursos universitarios. Esta opinión correlaciona bien con el alto número de investigaciones realizadas en torno al límite, como se ha constatado en la revisión de antecedentes presentada en el Capítulo 1º de este trabajo. Todas las investigaciones consultadas, por muy diversos que sean los tratamientos elegidos, coinciden en señalar dificultades inherentes a la noción, a su enseñanza o a su aprendizaje.

Al manejar la definición de límite finito de una función en un punto observamos que, de la literatura consultada, se desprende un dilema o, al menos, un problema de decisión. Por una parte, el formalismo no parece ser la vía más adecuada para transmitir la noción de límite en la educación preuniversitaria, donde se ha probado que los alumnos utilizan otras ideas de límite que incluso pueden estar en contradicción con una definición formal. Por otra parte, una definición formal es ineludible para establecer de manera definitiva si una función tiene límite finito en un punto antes de utilizar teoremas que se apoyan en dicha definición para establecer familias de funciones que necesariamente tienen límite finito en puntos o en intervalos. Ante esta situación, afrontamos la definición formal apoyándonos en la fenomenología de Freudenthal (1983) e indagamos acerca de los fenómenos que dicha definición organiza. Nos preguntamos también si cabe facilitar la enseñanza con ayuda de esos fenómenos. Autores de libros de textos y profesores de secundaria apelan a representaciones en la presentación del límite finito de una función en un punto. A medida que avanzaba la investigación fuimos delimitando un criterio, basado en la fenomenología, para decidir, por observación, si un resolutor que maneja una definición de límite finito de una función en un punto está apelando al pensamiento matemático elemental (PME) o al pensamiento matemático avanzado (PMA).

Como consecuencia de lo dicho hasta el momento, abordamos el siguiente problema de investigación: Caracterizar fenómenos organizados por definiciones de límite finito de una función en un punto y validar esa caracterización usando fuentes de información externas.

La meta principal de este trabajo es detectar, caracterizar y describir fenómenos organizados por definiciones de límite finito de una función en un punto. Buscamos evidencias para validar esa caracterización, estudiando libros de texto de bachillerato y relatos de profesores de educación secundaria. Pretendemos con ello hacer "visibles" tales fenómenos en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Admitimos que, en el manejo del límite finito de una función en un punto se apela a diferentes representaciones, según la conveniencia del autor del libro de texto o del profesor. Dado que los fenómenos no son explícitos para los usuarios, los utilizamos para delimitar a qué tipo de pensamiento matemático (elemental o avanzado) corresponde el uso de una definición de límite cuando observamos a alguien que la está manejando.

2.3.1 Metodología

Describimos la metodología que hemos seguido en este trabajo para alcanzar los objetivos y dar sentido a las hipótesis de investigación planteadas.

Diferenciamos este trabajo de otros que han estudiado también el límite. Blázquez, (2000) se ocupó de la noción de límite en alumnos de bachillerato (modalidad de ciencias sociales) y se centró en el diseño de una secuencia de enseñanza-aprendizaje basada en una definición de límite adecuada. Claros (2010, p. 122) enunció un objetivo (que, como veremos, es análogo a uno de los objetivos de nuestra investigación), y buscó evidencias mediante un análisis de libros de texto y una encuesta a alumnos de bachillerato. En este trabajo estudiamos libros de texto para buscar evidencias relativas al límite finito de una función en un punto; además, realizamos entrevistas a profesores de matemáticas de educación secundaria y bachillerato.

La Figura 2.2 (página siguiente) resume las secuencias metodológicas empleadas en las dos investigaciones realizadas en nuestro equipo de investigación.

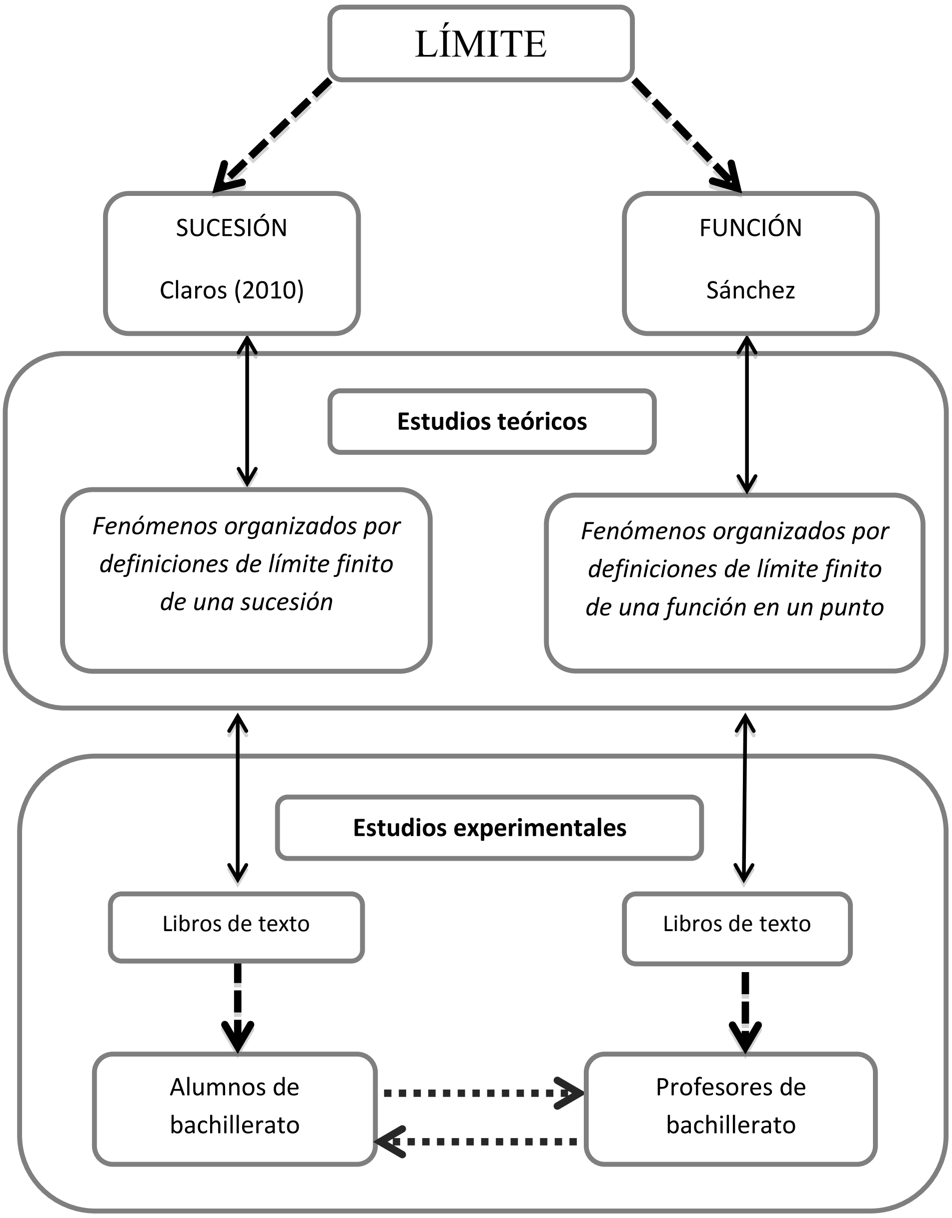


Figura 2.2 Resumen de los estudios realizados por el equipo de investigación

Para desarrollar la presente investigación desarrollamos una fase teórica y otra experimental, como se indica esquemáticamente, en la Figura 2.3 (página siguiente) y se detalla a continuación.

Fase teórica

La fase teórica comienza con una revisión de antecedentes que ha llevado a delimitar un área problemática basada en pensamiento matemático avanzado, fenomenología y sistemas de representación.

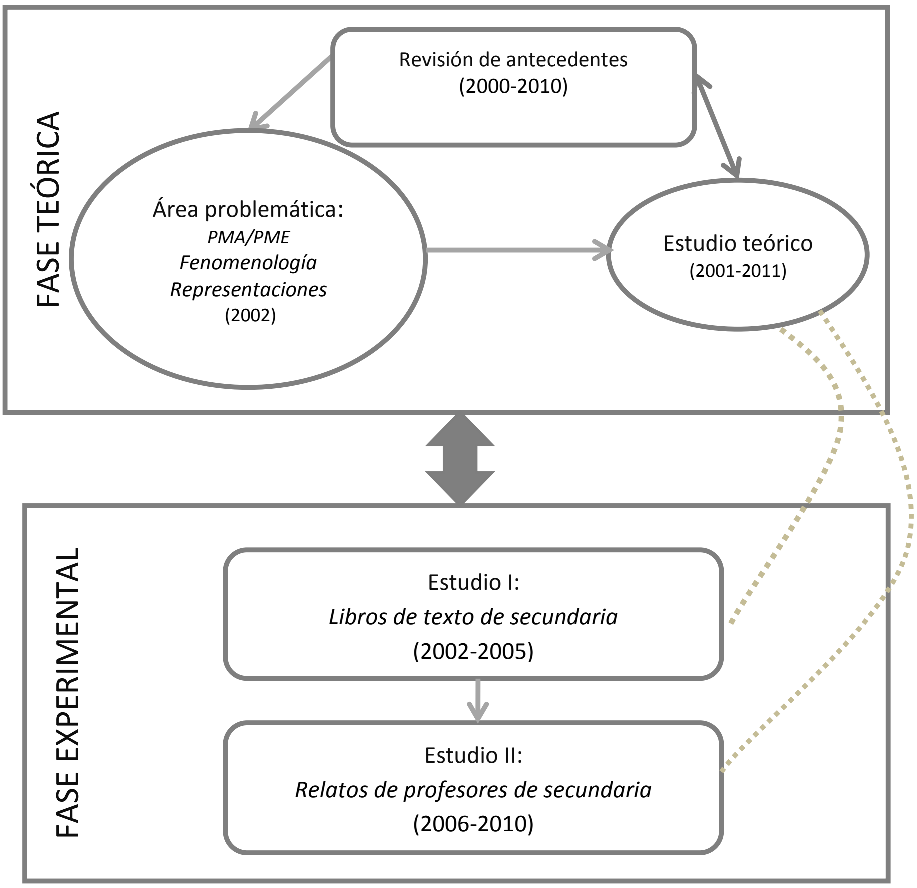


Figura 2.3 Esquema de la metodología empleada en la investigación.

La investigadora está interesada por la "doble aproximación" que parece observarse en el límite finito de una función en un punto. En el equipo de investigación hemos identificado las siguientes diferencias significativas, simbólicas o fenomenológicas, entre la definición de límite finito de una sucesión y la definición de límite finito de una función en un punto.

1. *Diferencias simbólicas*: acotación, procesos infinitos y tipos de infinitos y la dualidad discreto / continuo.

2. *Diferencias fenomenológicas*: Los fenómenos organizados por una definición de límite finito de una sucesión son distintos de los fenómenos organizados por una definición de límite finito de una función en un punto. Sin embargo, en ambas nociones, se reconoce un enfoque intuitivo y un enfoque formal. El primero, está basado en una actitud de plena confianza en el comportamiento de la función (o de la sucesión). El segundo enfoque contiene los medios para controlar y decidir si esa confianza estaba justificada.

Un enfoque intuitivo nunca es matemáticamente satisfactorio, pero en las relaciones cotidianas se suele utilizar la información que conlleva; además, la información obtenida se usa en enfoques formales.

Costó gran esfuerzo comprender que ambos enfoques están incluidos en una definición de límite finito y que cada enfoque corresponde a un fenómeno distinto organizado por esa definición. Una vez caracterizados los fenómenos organizados por ambas nociones (sucesión y función), afrontamos cuestiones teóricas como la idea de la equivalencia fenomenológica de dos definiciones matemáticamente equivalentes o la delimitación de un uso matemáticamente elemental o avanzado de una definición.

Fase experimental

Presentamos un análisis de libros de texto de educación secundaria para comprobar que los fenómenos estaban presentes, para analizar los sistemas de representación empleados por los autores al presentar los fenómenos y para estudiar la evolución en el tiempo del uso de estos fenómenos. El estudio de libros de texto se inició de manera conjunta para sucesiones y funciones. Lo referente a sucesiones se puede consultar en Claros (2010) y lo referente a funciones en el Capítulo 4º de la presente memoria. En ambos trabajos se ha empleado, esencialmente, el mismo método de extracción y análisis de información.

En ocasiones, tuvimos que revisar y perfeccionar la caracterización de los fenómenos descritos en el Capítulo 3º, hasta obtener una redacción coherente y consistente para esta memoria de investigación. Las revisiones han nutrido los contenidos de los Capítulos 3º y 4º en un proceso cíclico.

Decidimos también estudiar si esos fenómenos descritos en el Capítulo 3º eran observables en los relatos que hacen los profesores de sus enseñanzas y reconocer en ellos los fenómenos caracterizados. La manera en que se llevó a cabo el estudio de los relatos de profesores de matemáticas, así como las conclusiones, las presentamos en el Capítulo 5º de la presente memoria.

El estudio de dicho capítulo tiene carácter descriptivo, exploratorio y transversal (Cohen y Manion, 1990). El término descriptivo hace referencia a la descripción de los fenómenos que están presentes en los relatos de los profesores. El término exploratorio lo usamos para referirnos a los estudios que tienen una idea más o menos clara de lo que puede ocurrir y tienden a encontrarla. El término transversal remite al estudio de diferentes profesores en diferentes momentos. Ha resultado ser un estudio complejo, en el que la búsqueda de homogeneidad en las interpretaciones de las afirmaciones de los profesores ha exigido que fuéramos parsimoniosos en la afirmación de resultados obtenidos.

A lo largo de los Capítulos 4º y 5º se detalla la metodología utilizada en el desarrollo de cada estudio experimental (apartados 4.1 y 5.3, respectivamente).

Los resultados obtenidos con ambos estudios (libros de texto y relatos de profesores de educación secundaria) no son estadísticamente significativos, ya que las muestras usadas no son representativas.

La observación de los fenómenos en los libros de texto y el análisis de los relatos de los profesores, esperamos, refutará algunas de las hipótesis que manejamos durante todo el proceso que duró la investigación.

La variedad de estilos y secuencias de presentación de los conceptos en los libros de texto condujo a seleccionar fragmentos de los libros de texto en los que se observan diferentes sistemas de representación para presentar las definiciones y utilizarlos en las entrevistas con profesores.

Hemos diseñado un modelo de entrevista adecuado a los fines perseguidos siguiendo las recomendaciones de Cohen y Manion (1990). Se realizaron y analizaron entrevistas piloto y reuniones con el equipo de investigación antes de realizar las entrevistas definitivas. Para las entrevistas definitivas elaboramos un guión común, y establecimos categorías y dimensiones para usarlas en el análisis de los resultados. Finalmente, determinamos un protocolo de actuación para la investigadora.

La conexión entre los Capítulos 3º, 4º y 5º queda así: en el Capítulo 3º caracterizamos fenómenos organizados por definiciones de límite finito de una función en un punto; en el Capítulo 4º confirmamos el uso de esos fenómenos en una muestra de libros de texto que se extiende sobre unos setenta años; en el Capítulo 5º, confirmamos también el uso de esos fenómenos mediante entrevistas realizadas a nueve profesores de educación secundaria.

Como cada investigación tiene su propia lógica interna:

En el Capítulo 3º hemos avanzado nuestra reflexión teórica para discutir la equivalencia fenomenológica de diferentes definiciones y la caracterización de un uso matemáticamente avanzado o elemental de una definición de límite.

En el Capítulo 4º hemos estudiado la evolución del uso de los fenómenos a lo largo del tiempo, obteniendo tres períodos esenciales en lo relativo al límite finito de una función en un punto.

En el Capítulo 5º, hemos iniciado el diseño de los perfiles fenomenológicos de los profesores entrevistados, esperando que dicho diseño sea generalizable.

En el equipo de investigación consideramos imprescindible la comparación de los resultados obtenidos por Claros (2010) y por esta investigación. La desarrollamos en los Capítulos 3º y 4º de la memoria, ya que en el 5º dicha comparación no procede, ver figura 2.2.

2.3.2 Objetivos

Exponemos los objetivos de esta investigación. En primer lugar presentamos, la meta general, que expresa en términos globales la principal pretensión del estudio. Desglosamos la meta general en diversos objetivos y, algunos de éstos, los detallamos mediante lo que hemos denominado "objetivos complementarios" que hacen referencia a aspectos puntuales de la investigación.

META GENERAL

Obtener información sobre los fenómenos organizados por una variedad de definiciones de límite finito de una función en un punto, caracterizarlos, establecer relaciones y buscar evidencias que validen externamente su presencia en los procesos de enseñanza- aprendizaje.

OBJETIVOS

-Objetivo 1: Revisar y estudiar el campo de conocimientos actual en torno a la noción de límite finito de una función en un punto, sacando a la luz intereses, problemas y limitaciones enunciados.

Numerosas investigaciones enuncian dificultades que surgen al trabajar el límite con alumnos de bachillerato y primeros cursos universitarios; por eso conviene saber en qué punto se encuentra la investigación en torno a esta noción. Pretendemos integrar nuestra contribución en las investigaciones educativas sobre el límite finito de una función en un punto.

-Objetivo 2: Describir un área problemática que permita un estudio minucioso del límite finito de una función en un punto.

Una vez revisado el campo de conocimientos en torno a la noción de límite, avanzamos en algunas de las preguntas de investigación que se plantean desde el Pensamiento Matemático Avanzado. En el estado actual de conocimientos en Educación Matemática en torno a la noción de límite finito de una función en un punto, parece relevante explorar la aportación de la fenomenología. Decidimos buscar esas respuestas apoyándonos en la fenomenología de Freudenthal (1983), pues confiábamos en encontrar pautas de trabajo adecuadas para diferentes definiciones formales de límite finito de una función en un punto y para indagar acerca de los fenómenos que dichas definiciones organizan. De este modo pretendemos disponer de una nueva perspectiva que, una vez integrada con las representaciones en las que esos fenómenos se suelen presentar involucrados, permitiera abordar situaciones nuevas o complejas

-Objetivo 3: Reconocer requisitos necesarios para manejar una definición de límite finito de una función en un punto y distinguirlo de otros límites (funciones con límite infinito en un punto, límites de funciones en el infinito, y límites finitos e infinitos de sucesiones).

La revisión de antecedentes pone de manifiesto una serie de dificultades inherentes a la noción de límite, algunas de ellas se dan en todos los límites y otras son específicas de alguno de ellos. Claros (2010) analizó con detalle los requisitos matemáticos necesarios para manejar las sucesiones con límite finito. En trabajos relacionados (véase Claros, Sánchez y Coriat, 2006; 2007) analizamos las diferencias y analogías existentes entre la definición de límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto, diferencias que justifican el estudio de cada una de las definiciones de manera independiente.

***-Objetivo 4*:** Estudiar definiciones de límite finito de una función en un punto desde una perspectiva fenomenológica y detectar, describir y caracterizar fenómenos para los que dichas definiciones son medio de organización.

Este objetivo es la clave del estudio teórico. La fenomenología de Freudenthal (1983) sirve de guía para analizar una definición de límite finito; además, permite abordar cuestiones como la equivalencia fenomenológica de dos definiciones matemáticamente equivalentes o la delimitación de un uso matemáticamente elemental o avanzado de una definición.

-Objetivo 5: Detectar esos fenómenos en libros de texto de educación secundaria y organizar la información obtenida.

Buscamos evidencias de los fenómenos descritos en una muestra de libros de texto que se usan o se han usado en educación secundaria y tenemos en cuenta los períodos educativos descritos por Sierra (1999). Con respecto a este objetivo establecemos los siguientes objetivos complementarios, destinados a organizar la información obtenida:

-Objetivo 5.1: Construir tablas de frecuencias observadas de los fenómenos.

-Objetivo 5.2: Comparar las frecuencias observadas de los fenómenos y establecer relaciones entre ellas.

-Objetivo 5.3: Establecer períodos temporales al analizar los libros con el fin de observar la evolución de los fenómenos a través del tiempo.

-Objetivo 5.4: Analizar las frecuencias de los fenómenos en función de los periodos temporales considerados.

-Objetivo 5.5: Estudiar correlaciones entre las frecuencias observadas de los fenómenos teniendo en cuenta los sistemas de representación o los periodos de tiempo considerados.

-Objetivo 6: Detectar esos fenómenos en los relatos de profesores.

Buscamos evidencias de los fenómenos descritos en los relatos mediante entrevistas semiestructuradas a profesores de educación secundaria. Establecemos los siguientes objetivos complementarios, destinados a organizar la información obtenida.

-Objetivo 6.1: Enunciar dimensiones y categorías para la interpretación homogénea de la información obtenida, incluyendo la posible influencia de la investigadora.

-Objetivo 6.2: Conocer fenómenos utilizados por los profesores en las aulas y, en su caso, establecer la prevalencia de alguno de ellos.

-Objetivo 6.3: Precisar los sistemas de representación empleados para presentar los fenómenos.

-***Objetivo 6.4:*** Comparar los resultados con los obtenidos del análisis de libros de texto.

-Objetivo 6.5: Establecer perfiles de profesores. Caracterizar diferentes perfiles.

Síntesis de justificación de objetivos

Con el objetivo 1, pretendemos conocer en qué punto se encuentra la investigación en torno a la noción seleccionada, para tener herramientas con las que iniciar nuestro problema de investigación.

Planteamos el objetivo 2 porque un área problemática aporta una base sólida para afrontar el problema de investigación.

Al comenzar a trabajar la noción de límite finito de una función en un punto creímos necesario diferenciarlo del resto de límites, estudiando las características que lo hacen ser objeto matemático de nuestra investigación. Tal es la razón que lleva a enunciar el objetivo 3.

El objetivo 4 abarca el estudio teórico exigido por el problema de investigación.

Los objetivos 5 y 6 se corresponden con los estudios experimentales del problema de investigación. Estos estudios están destinados a validar la caracterización teórica de fenómenos mediante el uso de fuentes de información externas.

2.3.3 Hipótesis

Hemos clasificado las hipótesis según su carácter metodológico, teórico o experimental y las designamos por HM, HT y HE, respectivamente. Diferentes hipótesis de cada grupo se reconocen por su número de orden.

Hipótesis metodológicas

A través de un análisis detallado de antecedentes examinaremos las investigaciones teóricas destinadas al estudio de los fenómenos relacionados con el límite finito de una función en un punto.

-Hipótesis HM1: El área problemática permite acercarse a la meta general de la investigación.

-Hipótesis HM2: El problema de investigación seleccionado se afronta utilizando las herramientas presentadas.

Las herramientas utilizadas por el equipo de investigación para el desarrollo de la investigación son, desde el punto de vista teórico, las que componen el área problemática. La fenomenología, en el sentido dado por Freudenthal (1983), ofrece una perspectiva que permite afrontar cuestiones que surgen alrededor del problema de investigación y, desde el punto de vista del proceso de enseñanza-aprendizaje, admite una cómoda integración con el pensamiento matemático avanzado y las representaciones. La metodología empleada en el análisis de libros de texto y en el estudio de los relatos de profesores, proporciona un instrumento con el que validar externamente la caracterización de fenómenos que llevaremos a cabo en la fase teórica.

Hipótesis teóricas

-Hipótesis HT1: La definición de límite finito de una función en un punto, conocida coloquialmente como "definición $\varepsilon-\delta$" organiza dos fenómenos: uno de aproximación doble intuitiva (abreviado como ADI) y otro de ida-vuelta en funciones o retroalimentación (abreviado como IVF).

-Hipótesis HT2: Otras definiciones de límite finito de una función en un punto organizan los mismos fenómenos ADI e IVF.

Si los fenómenos observados no fueran los mismos, tendrá sentido indagar si a la conocida equivalencia matemática entre definiciones se le asocia una equivalencia fenomenológica.

-Hipótesis HT2B: Si se refuta HT2, se podrá establecer la equivalencia fenomenológica entre las definiciones de límite finito de una función en un punto que organicen fenómenos diferentes, con base en su equivalencia matemática.

-Hipótesis HT3: Los sistemas de representación influyen en la manera en que se presentan los fenómenos ADI e IVF.

Janvier (1987, 1993) ha observado que las nociones matemáticas se presentan en varios sistemas de representación, y que las traducciones entre dichos sistemas no son siempre obvias. Se trata de analizar si los fenómenos que se describen y caracterizan se ven afectados por las diferentes maneras de presentarlos mediante varios sistemas de representación.

-Hipótesis HT4: Los fenómenos ADI e IVF aportan un criterio que, por observación de un resolutor, permite decidir si, en lo relativo al límite finito de una función en un punto, éste maneja ideas del pensamiento matemático elemental (PME) o del pensamiento matemático avanzado (PMA).

Esta investigación pretende poner de manifiesto desde qué punto de vista el límite finito de una función se integra en el PMA y desde cuál no es el caso.

Hipótesis experimentales

Mediante un análisis de libros de texto de bachillerato observamos cómo los fenómenos de aproximación doble intuitiva y de retroalimentación, detectados en el límite finito de una función en un punto, están presentes en el diseño de procesos de enseñanza-aprendizaje.

-Hipótesis HE1: Es posible observar los fenómenos estudiando una muestra amplia de libros de texto de educación secundaria o bachillerato.

HE1 la desarrollamos mediante hipótesis que ayudan a darle mejor sentido.

-Hipótesis HES1.1: Con ayuda de los periodos educativos descritos en Sierra (1999), un muestreo de libros de texto permite describir la evolución en el tiempo de los fenómenos observados.

-Hipótesis HES1.2: El fenómeno ADI se observa con mucha más frecuencia en los libros de texto que el fenómeno IVF.

Además de observar cómo los fenómenos de aproximación doble intuitiva y de retroalimentación están presentes en el diseño del proceso de enseñanza-aprendizaje, consideramos relevante pedir a los profesores que relatasen sus enseñanzas para inferir el empleo de esos fenómenos.

-Hipótesis HE2: Es posible detectar los fenómenos en los relatos de profesores de secundaria sobre sus clases.

HE2 la desarrollamos mediante hipótesis que ayudan a darle mejor sentido.

-Hipótesis HES2.1: Los profesores emplean exclusivamente el fenómeno ADI en el aula.

-Hipótesis HES2.2: El profesorado separa una definición formal de límite finito de una función en un punto de un acercamiento intuitivo a ese límite cuando ambos fenómenos están incluidos en dicha definición formal.

Pensamos que la mayoría de los profesores son conscientes de las dificultades que surgen del formalismo pero que no son conscientes de los fenómenos y, por tanto, no los usarán sin intervención de la investigadora

Síntesis de justificación de hipótesis

Algunos enunciados de hipótesis sugieren, por su estilo de redacción, que se van a realizar contrastes estadísticos; recordaremos que la metodología de trabajo es cualitativa.

Toda la investigación se ha llevado a cabo mediante el empleo de una metodología que, esperamos, permite el acercamiento a nuestro problema de investigación, lo que llevará a refutar (o no) nuestras hipótesis metodológicas. Realizamos un estudio teórico, con el que pretendemos obtener conclusiones sobre nuestras hipótesis teóricas, y buscamos evidencias, de los fenómenos descritos, analizando libros de texto y recogiendo y estudiando relatos de profesores de matemáticas de educación secundaria y bachillerato, lo que conduce a la valoración de las hipótesis experimentales.

CAPÍTULO 3º: Estudio teórico

A la cuestión de si la intuición resulta necesaria para la resolución de los problemas matemáticos hay que responder que es precisamente el lenguaje el que procura aquí la necesaria intuición.

Ludwig Wittgenstein

Introducción

En este capítulo describimos y caracterizamos fenómenos organizados por una definición de límite finito de una función en un punto y desarrollamos algunos avances. Se estructura en tres partes, de extensiones respectivas muy diferentes.

La primera abarca los apartados 3.1 a 3.7 y es de contenido básicamente matemático y fenomenológico.

En el apartado 3.1 exponemos cómo vamos a utilizar la fenomenología de Freudenthal para nuestro propósito. El análisis fenomenológico de Freudenthal tiene como objetivo describir cuáles son los fenómenos para los que un concepto o estructura matemática es medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. Nuestro trabajo se limita al estudio de definiciones de límite finito de una función en un punto, sin entrar de lleno en los conceptos propiamente dichos.

Hemos recopilado definiciones actuando de manera confiada; al extraer definiciones de textos ajenos nuestra confianza abarca varios ámbitos que conviene mencionar: (a) reconocemos autoridad a cada autor y no sometemos a discusión el marco de rigor que dicho autor haya elegido para desarrollar su trabajo; (b) si una definición se apoya en otras definiciones, no rehacemos la cadena "hacia atrás"; en su lugar, aceptamos que el autor ha actuado de manera coherente con su idea de rigor; (c) si una definición está copiada de un libro traducido, aceptamos que el traductor ha reproducido fielmente la coherencia y el rigor deseados por el autor del texto original. En resumen, nuestra confianza conduce a reproducir de manera no crítica definiciones seleccionadas; de hecho, nuestro objetivo es realizar una lectura, contextualizada por la fenomenología de Freudenthal, de diferentes textos (definiciones), para comprender los fenómenos que organizan.

En el segundo apartado (3.2) describimos y caracterizamos el fenómeno que hemos llamado aproximación doble intuitiva (ADI); además, lo comparamos con otro fenómeno descrito por Claros (2010), relativo al límite finito de una sucesión, que denominó "aproximación simple intuitiva" (a.s.i).

El apartado 3.3 se inicia seleccionando, entre varias, una definición de límite finito de una función en un punto; a continuación, detectamos el fenómeno ADI, descrito en 3.2, y ponemos de manifiesto cómo la definición seleccionada lo organiza; por último, hacemos una revisión de los requisitos matemáticos que se ponen en juego cuando se enuncia una definición de límite finito de una función en un punto.

En el cuarto apartado (3.4) realizamos un estudio detallado y minucioso de la definición seleccionada, con objeto de describir y caracterizar el fenómeno que hemos llamado retroalimentación o ida y vuelta en funciones (IVF). Completamos el apartado exponiendo el sentido en que, a nuestro entender, la definición seleccionada organiza los fenómenos ADI e IVF. Presentamos también las relaciones que estos fenómenos mantienen entre sí y con la propia definición. Concluimos el apartado enunciando un criterio que permite discriminar entre pensamiento matemático elemental y avanzado.

Con la información recopilada, conjeturamos que cualquier definición formal, matemáticamente correcta, de límite finito de una función en un punto organiza los fenómenos ADI e IVF. El enunciado y justificación de esta conjetura se desarrolla en dos apartados. En el apartado 3.5 exponemos con detalle el contenido de la conjetura y analizamos cómo las demás definiciones consideradas (excepto una) también organizan los fenómenos ADI e IVF.

Esta conjetura solamente falla, en lo relativo al fenómeno IVF, cuando utilizamos la llamada “caracterización por sucesiones” para establecer que una función dada tiene límite finito en un punto dado. Por ello, dedicamos específicamente el apartado 3.6 a la “caracterización por sucesiones”. En él, además de enumerar los requisitos matemáticos necesarios para su manejo, identificamos los fenómenos que dicha caracterización por sucesiones organiza. Concluimos el apartado estudiando si la conocida equivalencia matemática entre la definición de límite finito de una función en un punto y la “caracterización por sucesiones” de dicho límite se traduce en términos de equivalencia fenomenológica. Nuestra conclusión sobre esta segunda cuestión es positiva.

Claros (2010) ha estudiado los fenómenos que organiza una definición de límite finito de una sucesión; como hemos utilizado sus conclusiones para nuestro estudio, consideramos conveniente comparar resultados de ambas investigaciones, lo cual hacemos en el apartado 3.7. El Anexo A3.1 reproduce unas páginas de este autor.

La segunda parte del capítulo se desarrolla en el apartado 3.8. Censamos posibles maneras de encontrar los fenómenos manejados, apoyándonos en los sistemas de representación y en lo que hemos denominado "formatos". Todos los ejemplos usados aquí fueron extraídos de libros de texto, si bien un estudio sistemático de una muestra de libros de texto de matemáticas de bachillerato que tratan el límite finito de una función en un punto se remite al Capítulo 4 de esta memoria.

La última parte, apartado 3.9, presenta un balance de logros alcanzados, dificultades observadas y cuestiones de investigación aún pendientes.

3.1 Justificación de la secuencia de estudio

El interés de los investigadores por la noción de límite ha experimentado una evolución significativa respecto a enfoques y propósitos. Azcárate y Camacho (2003) observan cómo se ha pasado de realizar estudios centrados en caracterizar las dificultades y obstáculos existentes en la comprensión del límite (Cornu (1991) Tall(1992)), a investigaciones basadas en analizar las razones que subyacen a tales dificultades y proporcionar, en base al nuevo conocimiento generado, soluciones efectivas, ya sea en forma de propuestas didácticas sustentadas en marcos teóricos operativos (Espinoza y Azcárate, 2000; Mamona-Downs, 2001), ya sea presentando nuevas definiciones de límite como *aproximación óptima,* (Blázquez y Ortega, 2002).

Nuestro estudio teórico se inicia afirmando la relevancia de la Fenomenología (véase 2.2.2) para aportar ideas o respuestas en estos nuevos enfoques. Esta idea ha sido explorada previamente. Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorg, Thomas, y Vidakovic (1996) pusieron de manifiesto lo que denominaron "descomposición genética del concepto de límite*",* en la que los autores hablan de "proceso coordinado" para referirse al proceso de evaluar el valor de la función f(x) en valores cada vez más próximos a a, cuando se intenta calcular el límite de f(x) cuando x tiende a a.

La investigación que realizamos, en cambio, se orienta a la identificación y reconocimiento de fenómenos en varias definiciones de límite finito de una función en un punto así como a la observación de dichos fenómenos en libros de texto de bachillerato y en relatos de la práctica docente de profesores de enseñanza secundaria y bachillerato.

El límite finito de una función en un punto se suele presentar, en educación secundaria, de dos maneras no excluyentes: realizando un acercamiento intuitivo o empleando una definición formal. El acercamiento intuitivo queda a la vista en frases como la siguiente*: "Si x se aproxima a* x_0 *los valores correspondientes de f(x) se aproximan hacia un número real L".* (Vizmanos, Anzola y Primo, 1981, p. 245). Observamos que si la variable independiente se acerca a un valor, la dependiente se acerca a otro. Esta observación simplemente genera nuestra convicción en tal hecho, pero no lo demuestra, matemáticamente hablando.

El plan de la prueba está incluido en la propia definición, cuando prescribe construir una función "$\varepsilon - \delta$", con dominio en un intervalo de centro L y anchura arbitraria, e imágenes en un intervalo de centro x_0, de manera que se garantice que las imágenes, por la función f de las x que se hallen en este último, pertenezcan sin excepción al entorno de L inicialmente elegido. El que esto ocurra para cualquier tamaño del entorno de centro L, lo garantiza, si la función tiene el límite indicado, la función construida $\varepsilon - \delta$, como es bien sabido. He aquí un ejemplo de definición:

> *L es el límite de la función f(x) en el punto x =* a *si y sólo si para cualquier entorno de* L *que se tome, por pequeño que sea, existe un entorno reducido de* a *cuyos elementos tienen sus imágenes dentro del citado entorno de* L. (Negro, Benedicto, Martínez y Poncela, 1997, p. 220).

En la definición de límite finito de una función en un punto se integran aspectos formales e informales, por lo que es necesario comprender cómo quedan coordinados. Algunas dificultades que surgen al coordinar aspectos formales e informales de la continuidad de funciones han sido tratadas por Raman (2002). Según esta autora, muchos estudiantes fallan al sacar provecho de la comprensión informal para producir argumentos formales, mientras que otros parecen manipular símbolos en un camino formal sin tener una profunda comprensión de lo que esos símbolos significan.

Nuestras lecturas previas así como la experiencia adquirida en este trabajo llevan a considerar los aspectos informales antes del imprescindible estudio de los aspectos formales incluidos en las definiciones de límite finito de una función en un punto.

3.2 Fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI)

Cuando los valores de las variables independiente, x, y dependiente, f(x), *parecen acercarse* a sendos valores fijos con cualquier patrón de acercamiento que se elija para la primera, nos referimos al fenómeno que llamamos “aproximación doble intuitiva” (ADI). Cuando x se acerca de cualquier manera preestablecida a x_0, entonces f(x) se acerca a un valor único, que no depende del modo de acercamiento elegido para la variable independiente.

Al usar la expresión *parecen acercarse*, queremos capturar cualquier intuición para el límite, como conjetura o como resultado del reconocimiento de una pauta (explicita o no) cuando se inspeccionan los valores concretos de ambas variables así como cualquier procedimiento matemático que permita controlar esa intuición.

Para ello, es necesario incluir una característica esencial de los números reales que se usan en los límites funcionales: la continuidad de la recta real. Esto conduce a presentar una serie de modos de acercamiento con los que pretendemos describir la complejidad del fenómeno ADI. Terminamos el apartado comparando el fenómeno ADI con el fenómeno a.s.i, descrito por Claros (2010), relativo al límite finito de una sucesión.

3.2.1 Continuidad de la recta real

Al tratarse de funciones reales de variable real, es necesario considerar la intuición de la continuidad de la recta real. En Boyer (1999) se afirma que Dedekind llegó a la conclusión de que, si se quería que el concepto de límite fuese riguroso, había que desarrollarlo de una manera puramente aritmética, sin referencia alguna a la geometría. Por eso se preguntó qué es lo que distingue a las magnitudes geométricas continuas de los números racionales. Algunos matemáticos como Galileo y Leibniz pensaban que la continuidad de los puntos de la recta era resultado de la densidad, entendida como la existencia de un punto entre dos puntos distintos cualesquiera. Hoy sabemos que los números racionales también tiene esa propiedad y sin embargo no forman un continuo.

En el prólogo de Dedekind (1998) leemos:

En la noción de aproximación de una variable a un valor límite fijo, y especialmente en la demostración del teorema que establece que toda magnitud que crece constantemente, pero no más allá de todo límite, se aproxima a un valor límite, tuve que apoyarme en evidencias geométricas. (p. 79)

Más adelante dedica un apartado a la continuidad de la recta. Pone de manifiesto que en una recta hay infinitos puntos que no corresponden a un número racional, por lo que si se pretende seguir aritméticamente todos los fenómenos de la recta, los racionales no bastan. Para que $\mathbb{Q}$ adquiera la misma continuidad que la línea recta, considera que hay que ampliar el conjunto de los números racionales a los reales.

Dedekind plasma la continuidad de la línea recta en la definición de cortadura:

Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes. (p.85)

También afirma:

En esta observación trivial se revela el secreto de la continuidad… La suposición de esta propiedad de la línea no es más que un axioma mediante el cual atribuimos a la línea por primera vez su continuidad, mediante el cual introducimos la continuidad en nuestra idea de la línea. (p.85)

Con los números racionales no se satisface esta idea de continuidad.

Boyer (1999) recoge cómo Cantor en 1878 reconoció, al igual que Dedekind, la propiedad fundamental de los conjuntos infinitos; además, observó que no todos los conjuntos infinitos son del “mismo tamaño”. Reconoció que los números “transcendentes” le dan a los números reales el fuerte carácter de “densidad” que trae como consecuencia su potencia más alta.

3.2.2 Modos de acercamiento a x_0

La continuidad de la recta permite variados modos de acercamiento de la variable independiente x al valor x_0 en el que estamos especulando sobre el límite de f. Con la intención de aclarar el fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI), presentamos, mediante ejemplos, varios modelos, sin descartar otros en los que no hayamos reparado aún.

<u>*Modelo ADI 1: Dos sucesiones coordinadas*</u>

En la función $f(x) = x^2$, si tomamos los pares de valores (1,9; 3,61), (1,99; 3,9601), (1,999; 3,99601),... se observa que cuando x se acerca a 2 los valores f(x) se acercan a 4.

Valores de la variable independiente x	1,9	1,99	1,999	…	Límite: 2
Valores de la variable dependiente f(x)	3,61	3,9601	3,996001	…	Límite: 4

En este modelo, hemos construido dos sucesiones partiendo de la función y de una pauta de construcción de una sucesión en los valores de la variable independiente.

<u>*Modelo ADI 2: Gráfica de la función*</u>

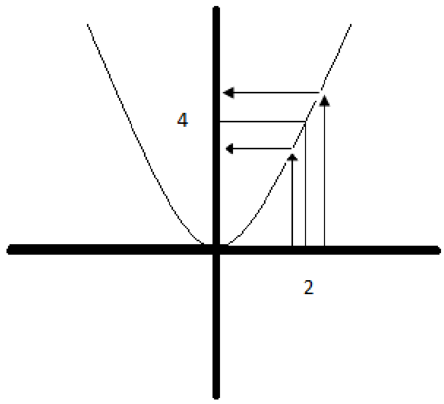


Figura 3.1 Modelo ADI 2

En la Figura 3.1 apreciamos, para la misma función que en el modelo ADI 1, un modo de acercamiento gráfico; si consideramos un intervalo de valores de x, próximos a 2, observamos una acumulación de valores f(x) en las proximidades del límite supuesto, 4. Las líneas y flechas verticales se sitúan “cerca” del valor 2 para recordar el acercamiento a x_0; las correspondientes líneas y flechas horizontales están “cerca” del 4 y dan idea del valor del límite. Aunque el dibujo es esencialmente discreto, la mirada recorre cualquier segmento que contiene el 2 en el eje de abscisas y reconoce que, en el eje de ordenadas, los valores de la función parecen situarse en un segmento que contiene el 4.

Modelo ADI 3: Dos entornos coordinados

En la función $f(x) = 3x + 1$, observamos cómo para valores de x que pertenecen a un entorno $N_1(2)$, los correspondientes valores de f(x) pertenecen a un entorno $N_2(7)$. En este modelo no podemos calcular todas las imágenes, nos conformamos con algunas parejas de valores que confirman nuestra suposición sobre el límite.

Modelo ADI 4: Distancia

Considerando la función $f(x) = 4x$, si se cumple que $0 \prec |x-1| \prec 0{,}2$ entonces observamos que $|f(x) - 4| \prec 0{,}8$

En este modelo se observa que valores de x próximos a 1 tienen sus imágenes próximas a 4. En este modelo no podemos calcular todas las imágenes, nos conformamos con algunas parejas de valores que confirman nuestra suposición sobre el límite.

Modelo ADI 5: Intervalo

Para la función $f(x) = x^2 + 1$, si tomamos valores de x en el intervalo (2,99; 3,01), las imágenes pertenecen al intervalo (9,9401; 10,0601). En este modelo no podemos calcular todas las imágenes, nos conformamos con algunas parejas de valores que confirman nuestra suposición sobre el límite.

El modelo ADI 1 (dos sucesiones coordinadas de números reales) se usa con frecuencia en la enseñanza del límite finito de una función en un punto porque aporta una discretización supuestamente más manejable que la de los restantes modelos. Acaso con ello se busque un apoyo en el límite finito de una sucesión que, posiblemente, se estudió con anterioridad. Sin embargo, en la adquisición clara del límite finito de una función en un punto juegan un papel especial la intuición de la continuidad de un intervalo de números reales y el abandono de la idea de sucesor; los modos de acercamiento describen mejor el fenómeno ADI en la medida que reflejan bien estas dos ideas.

3.2.3. Comparación con el fenómeno a.s.i

Claros (2010, pp.147-148) ha descrito exhaustivamente lo que denomina fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i) en sucesiones con límite finito: cuando los valores de n crecen, los de la sucesión parecen acercarse a un valor fijo. Se trata de una aproximación simple (la de la sucesión a su límite) e intuitiva, porque la convicción así construida constituye, como máximo, una conjetura.

En el modelo ADI 1, se manejan parejas de fenómenos a.s.i que van siendo organizados por dos sucesiones coordinadas $\{x_n\}$ y $\{f(x_n)\}$, cuyos límites respectivos son x_0 y L. Dicho con otras palabras: en el modelo ADI 1 observamos dos fenómenos de aproximación simple intuitiva (organizados por la definición de límite finito de una sucesión) que están coordinados por la dependencia funcional.

El fenómeno ADI incluye "algo más" que la coordinación de dos fenómenos de aproximación simple intuitiva, asociados a sucesiones. En los modelos ADI 2, ADI 3, ADI 4 y ADI 5, también discretos en su realización práctica con valores numéricos, se entrevé la continuidad de la recta real que, como hemos indicado, da sentido a la frase antes usada para caracterizar el fenómeno ADI: si x se acerca de cualquier manera preestablecida a x_0, entonces f(x) se acerca a un valor único, independientemente del modo de acercamiento elegido para la variable independiente.

La continuidad de la recta numérica es el sustrato que caracteriza los límites de funciones; en las sucesiones, la aproximación al límite, en cambio, es esencialmente discreta. Esta diferencia entre ambos límites explica también la riqueza de modos de acercamiento en el fenómeno ADI frente a la única opción conocida para el fenómeno a.s.i. Deducimos que, para trabajar con funciones, especialmente, en los niveles no universitarios, conviene evitar la reducción a un único modo de acercamiento; en su lugar, parece recomendable su diversificación, con objeto de suscitar la intuición de la continuidad de la recta real al transmitir una idea general o amplia del fenómeno de aproximación doble intuitiva.

La diferencia que hemos observado entre los fenómenos a.s.i y ADI lleva también a confirmar a posteriori una decisión de nuestro equipo de investigación, tomada hace varios años (Claros, Sánchez y Coriat, 2006): la dualidad discreto/continuo justifica un tratamiento diferenciado en la investigación fenomenológica de ambos límites.

3.3 Límite finito de una función en un punto: definición y requisitos matemáticos

El fenómeno ADI suscita convicción sobre el valor L del límite de la función en el punto x_0, pero solamente la verificación de la definición asegura que tal es el caso.

Como método de trabajo, en esta memoria, hemos considerado conveniente elegir una definición, realizar un análisis particular y minucioso de su contenido y, finalmente, extender nuestros resultados a otras definiciones.

3.3.1. Selección de una definición

Reunimos varias definiciones antes de precisar nuestra elección.

Definición 1: *La función f tiende hacia el límite L en a significa: para todo* $\varepsilon \succ 0$ *existe algún* $\delta \succ 0$ *tal que, para todo x, si* $0 \prec |x-a| \prec \delta$*, entonces* $|f(x)-L| \prec \varepsilon$. Spivak (1991, p. 118). Notación adaptada.

Definición 2: *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (excepto posiblemente en c) y sea L un número real. La afirmación 'La condición* $lim_{x\to c} f(x) = L'$ *significa que para todo* $\varepsilon \succ 0$ *existe un* $\delta \succ 0$ *tal que si* $0 \prec |x-c| \prec \delta$ *, entonces* $|f(x)-L| \prec \varepsilon$. Larson y Hostetler (2002, p. 52). Notación adaptada

Definición 3: $lim_{x\to a} f(x) = L$ *si para cada* $\varepsilon \succ 0$ *existe un* $\delta \succ 0$ *tal que* $|f(x)-L| \prec \varepsilon$ *para todo* $x \in A$ *tal que* $0 \prec |x-a| \prec \delta$. Fernández Novoa (1991, p. 155). Notación adaptada.

Definición 4: *En cuanto al número positivo* ε*, hay que encontrar un* $\delta \succ 0$ *(que, naturalmente, depende en general de* ε *tal que si* $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ $x \in D$ *y* $x \neq x_0$ *(el comportamiento de f en* x_0 *no afecta al límite); entonces* $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. Gaughan (1972, p. 74). Notación adaptada.

Definición 5: *El simbolismo* $lim_{x \to p} f(x) = L$ *significa que para todo entorno* $N_1(L)$ *existe un cierto entorno* $N_2(p)$ *tal que* $f(x) \in N_1(L)$ *siempre que* $x \in N_2(p)$ *y* $x \neq p$. Apostol (2005, p. 157) Notación adaptada.

Definición 6: *Diremos que* L *es el límite de f(x) cuando* $x \to a$ *si fijado un entorno de* L *se puede determinar un entorno de* a*, de modo que los valores de* $f(x)$ *correspondientes a puntos de este entorno (salvo* a *lo sumo el* $f(a)$*), quedan contenidos en el entorno de* L. Navarro y Sixto (1944, p. 101.) Notación adaptada.

Definición 7: *A toda aproximación de* L *le corresponde un entorno reducido de* a *de manera que las imágenes de los puntos de dicho entorno mejoran la aproximación*. Blázquez (2002, p. 15)

Definición 8: *Sea f una función con valores reales definida en* D *y sea* a *un punto de acumulación de* D. *Diremos que el límite de* $f(x)$*, cuando* x *tiende a* a *es* L *si para cada sucesión* $\{x_n\} \to a, x_n \neq a$*, se cumple que* $f(x_n) \to L$. Ortega (1993, p.68). Notación adaptada.

Las Definiciones 1 a 3 utilizan distancias y la Definición 4 intervalos; las catalogamos como "definiciones en estilo métrico". Las Definiciones 5 a 7 se basan en el uso de entornos, haciendo hincapié la definición 7 en el hecho de que las imágenes de los valores del entorno de a "mejoran" la aproximación. Las catalogamos como "definiciones en estilo topológico". La Definición 8 suele denominarse "la caracterización por sucesiones" del límite finito de una función en un punto y la consideramos como un estilo especial, que catalogamos como "aparentemente discretizante".

De los tres estilos hemos seleccionado el primero, por las razones históricas dadas en 1.1; con objeto de mantener un cierto paralelismo entre las dos tesis doctorales generadas por nuestro equipo de trabajo (Claros (2010) y la presente memoria), hemos elegido comenzar por la Definición 1.

3.3.2 Definición 1 y fenómeno ADI

La Definición 1 seleccionada, a la que también nos venimos refiriendo como "definición $\varepsilon-\delta$", organiza el fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI) descrito en el apartado 3.2.

Esto ocurre porque el valor del límite se propone por observación del comportamiento de la variable dependiente cuando la independiente se acerca a x_0. El fenómeno ADI se usa para obtener un candidato a límite, un valor aceptable de L que posteriormente manejaremos. Cuando se está aprendiendo la definición, aún no se conocen los teoremas sobre límites y las situaciones de indeterminación, por lo cual, el candidato L solamente puede obtenerse por ensayo y error o recurriendo a la autoridad de otra persona que ya estudió la definición.

La Definición 1 da significado al límite, mientras que el fenómeno ADI permite dar significado a la primera parte de la definición (*La función f tiende hacia el límite* L *en* a) cuando conocemos f y a.

3.3.3. Requisitos matemáticos (Definición 1)

Vamos a detallar los requisitos matemáticos necesarios para manejar la Definición 1. Los requisitos necesarios para manejar las demás definiciones, los exponemos en 3.3.4 y en 3.6.

(1) Dependencia. Como ya hemos observado en 2.2.2, Freudenthal (1983) dedica un capítulo concreto a la noción de función. Comienza haciendo un estudio detallado de las nociones de variable y dependencia.

En palabras del propio Freudenthal (1983):

> *El origen fenomenológico de la noción de función surge en el momento en que se enuncia, se postula, se produce o se reproduce una dependencia entre variables, que se presenta en el mundo físico, social o mental, así como entre variables matemáticas que, a su vez, están relacionadas con variables de los otros mundos*. (p.494)

Afirma que una función trata de un tipo especial de dependencia entre dos variables; una dependiente y otra independiente. En este sentido, observamos en la definición seleccionada dos dependencias distintas y bien definidas, la dependencia $\{x \to f(x)\}$ y la dependencia $\{\varepsilon \to \delta(\varepsilon)\}$. La primera es obvia, pues define la función, y tiene como conjuntos de partida y llegada ℝ; la segunda, debe construirse para asegurar que el candidato seleccionado es el límite de la función en el punto; su conjunto de partida, así como el de llegada, es $\mathbb{R}^{*+}$.

(2) Valor absoluto. El *valor absoluto* suele definirse como una función real de variable real, que cumple que $x \to |x| = máx\{x,-x\}$. Esta función es otro requisito necesario para la definición de límite finito de una función en un punto, y se observa en expresiones como $0 \prec |x - x_0| \prec \delta$ y $|f(x) - L| \prec \varepsilon$, siendo x_0 el punto en el que se calcula el límite y L el supuesto límite.

(3) Orden total. Al referirnos a *orden total* en ℝ, estamos hablando de una relación que cumple las propiedades de ser reflexiva, antisimétrica y transitiva, que es compatible con la suma y la multiplicación y que se aplica a cualquier pareja de números reales. En la definición de límite seleccionada, la relación de orden está obviamente presente, ya que con ella se expresa formalmente la idea intuitiva de acercamiento.

La relación de orden en ℝ , la hemos tenido en cuenta, ya que se exige: (a) Que ε y δ sean mayores que cero. (b) Que el valor absoluto de la diferencia entre los valores de x y el punto x_0 en el que se está calculando el límite sea, por una lado mayor que cero y por otro menor que δ . (c) Que el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L, supuesto límite en el punto, sea menor que ε .

(4) Acotación. Hablamos de acotación cuando se tienen números (cotas) que, si existen, son mayores (respectivamente, menores) que todos los valores de un subconjunto dado A de ℝ. La noción de acotación surge en el punto en el que se está calculando el límite, al considerar valores “cercanos a x_0” ($x_0 - \delta \prec x \prec x_0 + \delta$), y para comprobar que el candidato a límite, es el verdadero límite $(L - \varepsilon \prec x \prec L + \varepsilon)$.

Las variables independiente y dependiente de una función con límite finito en un punto están acotadas en las proximidades de ese punto.

(5) Procesos infinitos. ¿Cómo evaluar la función en todos los valores de x? Si lo hiciéramos, realizaríamos efectivamente un proceso infinito. Las diferentes posibilidades de acercamiento de los valores de la variable x a x_0, y los correspondientes acercamientos de los valores de f(x) al límite L, hacen que hayamos considerado los procesos infinitos como otro requisito matemático.

En la Definición 1 se manejan y coordinan tres procesos infinitos continuos, uno de ellos basado en la idea de función. (1º) El acercamiento de los valores de la variable independiente al punto donde se está calculando el límite; se resume con la frase $x \to x_0$. (2º) La obtención de las imágenes para todos y cada uno de los puntos que hemos considerado en el acercamiento a x_0, basado en la idea de función. (3º) El acercamiento de los valores de la variable dependiente al candidato a límite L.

(6) Tipos de infinito y continuidad de la recta numérica. El conjunto que forman la función sometida a estudio y su límite en el punto considerado tiene como cardinal el de $\mathbb{R}$. Por este motivo decimos que el infinito actual es un requisito de la definición de límite finito de una función en un punto.

No debe confundirse en la definición este infinito actual con el infinito actual y el infinito potencial generados en los procesos de discretización que hemos mencionado cuando hablábamos, en 3.2, del fenómeno ADI. En la Definición 1, solamente se da el infinito actual con el cardinal $\aleph_1 = c$ y genera, en las variables independiente y dependiente, procesos infinitos continuos.

En su tesis doctoral, Claros (2010) también analiza los requisitos necesarios para manejar una definición de límite finito de una sucesión. Si se comparan sus resultados con los de nuestra investigación, algunos de los requisitos son comunes en ambas definiciones, otros, no. Por ejemplo, en el caso de la acotación, las sucesiones con límite finito tienen acotada la variable dependiente, mientras que las funciones con límite finito en un punto, tienen acotadas ambas variables. En el apartado 3.7 hacemos un estudio comparativo detallado de los resultados teóricos obtenidos en Claros (2010) y en la presente investigación.

3.3.4 Requisitos matemáticos (Definiciones 1 a 7.)

La Tabla 3.1 resume requisitos matemáticos en las definiciones 1 a 7. Hemos añadido unas breves notas explicativas.

Tabla 3.1 *Resumen comparativo de los requisitos matemáticos en las definiciones 1 a 7*

Dependencias	Valor absoluto	Orden	Acotación	Procesos infinitos, tipos de infinitos y continuidad
		Definición 1		
$\{x \to f(x)\}$ $\{\varepsilon \to \delta(\varepsilon)\}$	$0 \prec \lvert x-a \rvert \prec \delta$ $\lvert f(x)-L \rvert \prec \varepsilon$	Sí	$a-\delta \prec x \prec a+\delta$ $L-\varepsilon \prec f(x) \prec L+$	Ver 3.3.3
		Definición 2		
$\{x \to f(x)\}$ $\{\varepsilon \to \delta(\varepsilon)\}$	$0 \prec \lvert x-c \rvert \prec \delta$ $\lvert f(x)-L \rvert \prec \varepsilon$	Sí	$c-\delta \prec x \prec c+\delta$ $L-\varepsilon \prec f(x) \prec L+$	Idénticos a Def 1
		Definición 3		
$\{x \to f(x)\}$ $\{\varepsilon \to \delta(\varepsilon)\}$	$0 \prec \lvert x-a \rvert \prec \delta$ $\lvert f(x)-L \rvert \prec \varepsilon$	Sí	$a-\delta \prec x \prec a+\delta$ $L-\varepsilon \prec f(x) \prec L+$	Idénticos a Def 1
		Definición 4		
$\{x \to f(x)\}$ $\{\varepsilon \to \delta(\varepsilon)\}$	No	Sí	$(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$	Idénticos a Def 1
		Definición 5		
$\{x \to f(x)\}$ $\left\{\begin{matrix} radio\delta, \\ radio\varepsilon \end{matrix}\right\}$	No	No	Sí	Idénticos a Def 1
		Definición 6		
$\{x \to f(x)\}$ $\left\{\begin{matrix} radio\delta, \\ radio\varepsilon \end{matrix}\right\}$	No	No	Sí	Idénticos a Def 1
		Definición 7		
$\{x \to f(x)\}$ $\left\{\begin{matrix} radio\delta, \\ radio\varepsilon \end{matrix}\right\}$	No	No	Sí	Idénticos a Def 1
Nota 1	Nota 2	Nota 3	Nota 4	Notas 5, 6 y 7

Nota 1: En las Definiciones 2, 3, 4 se da la dependencia mencionada. En las Definiciones 5, 6 y 7, se da obviamente la dependencia $\{x \to f(x)\}$ una segunda dependencia se da de un entorno con respecto a otro o, más precisamente, de un

radio δ de un entorno para la variable independiente, que depende de un radio ε de un entorno considerado en la variable dependiente.

Nota 2: El valor absoluto es otro requisito necesario en las Definiciones 2 y 3. Se observa en las expresiones "$0 \prec |x-c| \prec \delta$, $|f(x)-L| \prec \varepsilon$, $0 \prec |x-a| \prec \delta$". Por su parte en las Definiciones 4, 5, 6 y 7, no se utiliza la función valor absoluto, puesto que se trabaja con entornos e intervalos.

Nota 3: En las Definiciones 2, 3 y 4, se observa la relación de orden de la misma forma que en la definición 1. Las Definiciones 5, 6 y 7, se basan en el uso de entornos por lo que no se hace explícita la relación de orden que acabamos de mencionar.

Nota 4: En las Definiciones 2 y 3 la noción de acotación surge tanto en el punto en el que se está calculando el límite (al considerar valores cercanos $c-\delta \prec x \prec c+\delta$, $a-\delta \prec x \prec a+\delta$), como para comprobar que el candidato a límite, es el verdadero límite $L-\varepsilon \prec f(x) \prec L+\varepsilon$. En la Definición 4 también observamos la acotación en el que se está calculando el límite (al considerar valores cercano $(x_0-\delta, x_0+\delta)$), como para comprobar que el candidato seleccionado como límite, es el verdadero límite $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

En las Definiciones 5, 6 y 7, también se da la acotación, ya que se trabaja con entornos acotados.

Nota 5: En las Definiciones 2 a 7, identificamos los tres procesos infinitos descritos, para la Definición 1, en 3.3.3.

Nota 6: Los tipos de infinitos observados en la Definiciones 2 a 7, al igual que en la definición 1, se adaptan a la idea de infinito actual. Véase 3.3.3.

Nota 7: De nuevo la continuidad de la recta real, definida por Dedekind, está implícita en las Definiciones 2 a 7.

Las dos dependencias y los tres últimos requisitos se hallan, implícitos o explícitos, en todas las definiciones consideradas hasta ahora.

3.4 Fenómeno de retroalimentación o ”ida - vuelta” en funciones (IVF)

En el apartado 3.1 hemos indicado que el límite finito de una función en un punto se suele presentar de dos maneras no excluyentes: realizando un acercamiento intuitivo o empleando una definición formal. El acercamiento intuitivo lo hemos analizado en el apartado 3.2, mediante el reconocimiento y la descripción del fenómeno ADI. Este fenómeno genera convicción de que una aproximación, en la variable independiente, al valor a, conlleva una aproximación, en la variable dependiente, al valor del límite, L. En el apartado 3.3 hemos: seleccionado la Definición 1, detectado en ella el fenómeno ADI y analizado los requisitos matemáticos necesarios para su manejo.

En este apartado, reconocemos, detectamos y describimos otro fenómeno también organizado por la Definición 1.

Terminamos el apartado enunciando un criterio que permite distinguir el pensamiento matemático elemental (PME) y el pensamiento matemático avanzado (PMA) en lo relativo al límite finito de una función en un punto.

3.4.1 Fenómeno de ida-vuelta en funciones (IVF)

El análisis de la Definición 1 (véase 3.3.1) da lugar a la observación de dos procesos íntimamente relacionados:

- El primer proceso corresponde al siguiente fragmento de la Definición 1: *para todo* $\varepsilon \succ 0$ *existe algún* $\delta \succ 0$.

- El segundo proceso corresponde al siguiente fragmento de la Definición 1: *si* $0 \prec |x-a| \prec \delta$, *entonces* $|f(x)-L| \prec \varepsilon$.

La observación conjunta de estos dos procesos da lugar a lo que hemos denominado retroalimentación o “ida-vuelta” en funciones, que presentamos de manera precisa a continuación.

La retroalimentación se manifiesta al interpretar y aplicar los procesos incluidos en la definición formal de límite desde una perspectiva métrica, lo cual exige construir una nueva función $\varepsilon \to \delta(\varepsilon)$. Una vez establecido el entorno del límite (entorno asociado a la variable dependiente), partimos del valor de ε dado y buscamos en la variable independiente ("ida") para determinar el correspondiente δ asociado, según sea el caso; hecho esto, retornamos ("vuelta") a las proximidades del límite L para comprobar que las imágenes que se obtengan, compatibles con ese valor δ **,** quedan, todas ellas, más cerca de L que las ordenadas $L+\varepsilon$ y $L-\varepsilon$**.** En términos coloquiales, decimos que se trata, globalmente, de un proceso de ida-vuelta. Debe tenerse en cuenta que, en este fenómeno, la "ida" y la "vuelta" invierten, por así decir, el paso "natural" de la variable independiente a la variable dependiente.

El fenómeno de retroalimentación exige la construcción efectiva de una nueva función que queda vinculada a la función de partida. De hecho, con el apoyo de la propia función de referencia, la definición formal de límite finito de una función en un punto induce la construcción simbólica de tal función, o en su defecto la demostración de su existencia, la cual sirve a su vez para establecer que la función dada tiene límite en el punto considerado.

En resumen, la definición de límite finito de una función en un punto hace surgir una nueva función real de variable real $(\varepsilon, \delta(f(x), \varepsilon))$. Todo lo anterior conduce a hablar del fenómeno de *ida y vuelta en funciones (IVF)***.**

<u>Modelo</u>*:* Partiendo la función $f(x) = 2x$ y el punto $x_0 = 1$, se construye la función $(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$, donde $\delta \prec \frac{\varepsilon}{2}$. Fijado ε, tenemos que determinar δ con el que se cumpla que si $0 \prec |x-1| \prec \delta$ entonces observamos que $|2x-2| \prec \varepsilon$; resolviendo esta inecuación obtenemos que δ debe ser menor que $\frac{\varepsilon}{2}$.

3.4.2 Fenómenos organizados por la Definición 1

Retomando lo afirmado en 3.3.2 y 3.4.1, concluimos que la Definición 1 (véase 3.3.1) organiza dos fenómenos: el fenómeno ADI y el fenómeno IVF.

El fenómeno ADI no parece explícito; sin embargo, no es posible verificar con éxito la Definición 1 si no se tiene una idea del valor de L, idea que se adquiere por observación del comportamiento de la función usando algún modelo de acercamiento. Todos los "modelos ADI" indicados en 3.2 son aplicables; el contenido de la propia Definición 1 parece "arrastrar" al Modelo ADI 4, en particular, si se considera, fuera de contexto, el proceso 2 que recordamos: *si* $0 \prec |x-a| \prec \delta$ *entonces* $|f(x)-L| \prec \varepsilon$.

El fenómeno IVF se detecta en la observación sucesiva de los procesos de "ida" (*para todo* ε*, existe algún* δ) y de "vuelta" (si $0 \prec |x-a| \prec \delta$ *entonces* $|f(x)-L| \prec \varepsilon$).

La Tabla 3.2 resume lo anterior.

Tabla 3.2 *Fenómenos organizados por la Definición1 para la noción de límite finito de una función en un punto*

Definición 1 (ver 3.3.1)	Fenómenos observados y descritos
La función f tiende hacia el límite L en a significa: para todo $\varepsilon \succ 0$ existe algún $\delta \succ 0$ tal que, para todo x, si $0 \prec |x-a| \prec \delta$, entonces $|f(x)-L| \prec \varepsilon$	ADI IVF

3.4.3 Relación entre la Definición 1 y los fenómenos que organiza

La Figura 3.2 (página siguiente) resume la relación entre la Definición 1 y los fenómenos que organiza.

El ámbito intuitivo incluye la idea del doble acercamiento presente en la definición de límite finito de una función en un punto. Esa idea no es plenamente satisfactoria; simplemente, genera cierta convicción sobre el posible resultado de ese doble acercamiento. Con su ayuda, las personas establecemos acuerdos, aunque no estemos aún en condiciones de usar los métodos de demostración matemáticamente aceptados. Cuando un resolutor conozca teoremas sobre límites, seguramente los usará para establecer con seguridad cuál es el límite de la función en el punto considerado o para declarar que hay indeterminación. Para esta investigación, el problema que debe resolverse es el de establecer, en cada caso, un candidato a límite, que ha de ser usado, sin garantía, al aplicar la definición.

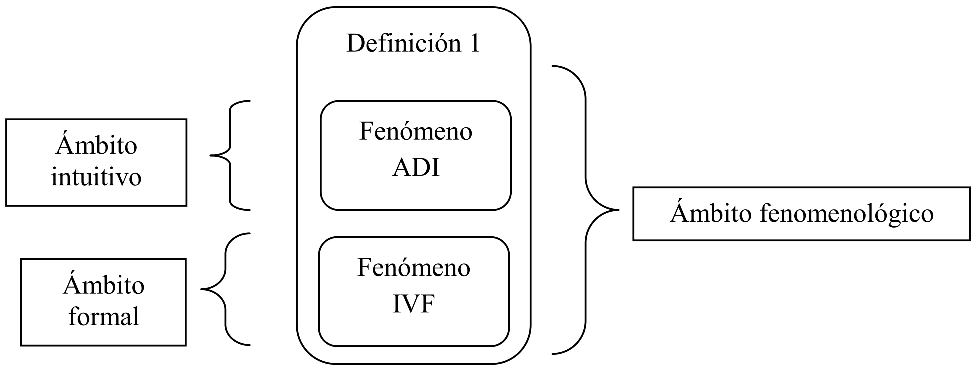


Figura 3.2 Relación entre Definición 1 y los fenómenos que organiza

En el ámbito formal, la “definición $\varepsilon-\delta$” genera la necesidad de construir una función o la de demostrar su existencia. Se construye esta función para asegurar el acercamiento relativo de x a x_0 y, a la vez, el de f(x) a L. La función ajusta cualquier distancia al supuesto límite L, con otra distancia de todos los valores de la variable independiente al valor predeterminado en el que vamos a calcular el límite, de forma que sus imágenes difieren de ese supuesto límite menos que la distancia elegida. La definición no garantiza que esa función se vaya a encontrar; deja la cuestión en manos del estudioso, que debe construirla o, al menos, demostrar que existe.

La Figura 3.2 también sugiere una relación entre los fenómenos. Con el fenómeno ADI adquirimos convicción sobre el límite; la tradición matemática genera también la necesidad de ser más convincente y esa necesidad la satisfará el fenómeno IVF.

La definición, en su abstracción, supone conocido el límite y los dos fenómenos guían la búsqueda de ese límite (fenómeno ADI) y la posible confirmación del candidato a límite con medios matemáticos (fenómeno IVF).

Si la parte formal de la definición $\varepsilon - \delta$ se aplica a un valor cualquiera para el límite, elegido sin pensar, el fenómeno IVF no será productivo, por la inadecuada elección del valor del supuesto límite.

El estudio de la Figura 3.2 no está completo, como no lo está la propia figura, ya que no estudiamos en toda su generalidad el límite (en general) de una función.

3.4.4 Límite finito de una función en un punto: PME y PMA

En el apartado 2.2.1 hemos registrado cómo Tall (1991) señala que la noción de límite se sitúa dentro del pensamiento matemático avanzado (PMA) por los procesos cognitivos que son necesarios para su manejo. También Cornu (1991) la sitúa en el PMA por su dificultad. Concretamente señala que es una pieza fundamental en la teoría de las aproximaciones, continuidad, derivabilidad e integración.

Por su parte, Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) indican que el concepto de límite estará situado en el pensamiento matemático elemental o avanzado dependiendo del trabajo que se realice con él. Si solamente se trabaja cálculo de límites, no estaríamos hablando de un concepto que requiera un pensamiento matemático avanzado para realizar esta operación.

En nuestra investigación hemos detectado y caracterizado dos fenómenos que son organizados por una definición de límite finito de una función en un punto: Aproximación Doble Intuitiva (ADI) y retroalimentación o Ida-Vuelta en Funciones (IVF). Con ellos, somos capaces de enunciar el siguiente criterio para distinguir entre el pensamiento matemático elemental y el avanzado, en lo relativo al límite de una función en un punto.

Si algún estudioso emplea de manera conjunta los fenómenos ADI e IVF, entendemos que está dentro del pensamiento matemático avanzado; en cambio, si solamente utiliza el fenómeno ADI, lo situamos en el pensamiento matemático elemental. Se necesitan investigaciones adicionales para dilucidar el supuesto en que un estudioso no utiliza correctamente el fenómeno IVF.

La Tabla 3.3 resume la opinión actual de nuestro equipo (Claros, Sánchez y Coriat, pendiente de evaluación), sobre las relaciones entre los fenómenos organizados por el límite, el PME y el PMA.

Tabla 3.3 *Relaciones entre los fenómenos organizados por el límite, el PME y el PMA*

Límite Finito de una Función en un punto	
PME	PMA
Fenómenos de aproximación	
Se observa ADI	Se observa ADI
Fenómenos de retroalimentación	
No se observa IVF	Se observa IVF

3.5 Fenómenos organizados por las Definiciones 2 a 7

Con la información recopilada conjeturamos: cualquier definición correcta de límite finito de una función en un punto organiza los fenómenos ADI e IVF.

En este apartado pondremos a prueba nuestra conjetura estudiando las Definiciones 2 a 7 y reconoceremos los fenómenos ADI e IVF en ellas. Hasta donde hemos alcanzado, nuestra conjetura solamente falla en el caso de la "caracterización por sucesiones" para límite finito de una función en un punto. Esta cuestión la estudiaremos en el siguiente apartado (3.6).

En general, el fenómeno ADI se reconoce haciendo una lectura que va de la variable independiente (*x*) y el valor x_0 (en el que estamos calculando el límite) a los valores de la función (f(x)) y a su supuesto límite L. Por su parte, el fenómeno *IVF* se reconoce analizando estructuralmente la definición en busca de dos procesos.

A continuación, reproducimos las definiciones 2 a 6, presentadas en 3.3.1, e identificamos los fenómenos ADI e IVF en cada una de ellas.

<u>Definición 2:</u> *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a c (excepto posiblemente en c) y sea L un número real. La afirmación 'La condición* $lim_{x\to c} f(x) = L'$ *significa que para todo* $\varepsilon \succ 0$ *existe un* $\delta \succ 0$ *tal que si* $0 \prec |x-c| \prec \delta$ *, entonces* $|f(x)-L| \prec \varepsilon$. Larson y Hostetler (2002, p. 52).

Fenómeno ADI: El fenómeno ADI permitirá decidir si un número real se considera o no candidato a límite L. Los valores de x cercanos a c, conduce (a través de la función) a valores de f(x) cercanos a L, como queda recogido en las afirmaciones " $0 \prec |x-c| \prec \delta$; $|f(x)-L| \prec \varepsilon$. El modo de acercamiento al que parece "arrastrar" la definición está basado en la intuición de la continuidad del intervalo, y se asemeja a nuestro modelo ADI 4 (véase 3.2).

Fenómeno IVF: Un proceso "de ida" exige asociar un número real δ a cada número real ε positivo: *para todo* $\varepsilon \succ 0$ *existe un* $\delta \succ 0$. Un proceso "de vuelta" se reconoce en la conclusión: *tal que si* $0 \prec |x-c| \prec \delta$ *, entonces* $|f(x)-L| \prec \varepsilon$.

Definición 3: $lim_{x\to a} f(x) = L$ *si para cada* $\varepsilon \succ 0$ *existe un* $\delta \succ 0$ *tal que* $|f(x) - L| \prec \varepsilon$ *para todo* $x \in A$ *tal que* $0 \prec |x - a| \prec \delta$. Fernández Novoa (1991, p. 155). Notación adaptada.

Fenómeno ADI: Los valores de f(x) son cercanos a L "porque" sus originales son cercanos a a como queda recogido en las afirmaciones $|f(x) - L| \prec \varepsilon$*;* $0 \prec |x - a| \prec \delta$. El modo de acercamiento al que parece "arrastrar" la definición está basado en la intuición de la continuidad del intervalo, y se asemeja a nuestro modelo ADI 4 (véase 3.2).

Fenómeno IVF: Un proceso "de ida" lo hallamos en el fragmento *para cada* $\varepsilon \succ 0$ *existe un* $\delta \succ 0$. El proceso "de vuelta" asociado se reconoce en el fragmento final: *tal que* $|f(x) - L| \prec \varepsilon$ *para todo* $x \in A$ *tal que* $0 \prec |x - a| \prec \delta$.

Definición 4: *En cuanto al número positivo* ε*, hay que encontrar un* $\delta \succ 0$ *(que, naturalmente, depende en general de* ε *tal que si* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $x \in D$ *y* $x \neq x_0$ *(el comportamiento de f en* x_0 *no afecta al límite); entonces* $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Gaughan (1972, p. 74). Notación adaptada.

Fenómeno ADI: Valores pertenecientes a un intervalo centrado en x_0, tienen sus imágenes en un intervalo centrado en L, tal y como especifican las afirmaciones $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$*;* $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. El modo de acercamiento al que parece "arrastrar" la definición está basado en nuestro modelo ADI 5 (véase 3.2).

Fenómeno IVF: Un proceso "de ida" lo hallamos en el fragmento: *En cuanto al número positivo* ε*, hay que encontrar un* $\delta \succ 0$ *(que, naturalmente, depende en general de* ε). "El proceso "de vuelta" asociado se reconoce en el fragmento final: *tal que si* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $x \in D$ *y* $x \neq x_0$ *(el comportamiento de f en* x_0 *no afecta al límite); entonces* $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Definición 5: *El simbolismo* $lim_{x\to p} f(x) = L$ *significa que para todo entorno* $N_1(L)$ *existe un cierto entorno* $N_2(p)$ *tal que* $f(x) \in N_1(L)$ *siempre que* $x \in N_2(p)$ *y* $x \neq p$. Apostol (2005, p. 157) Notación adaptada.

Fenómeno ADI: Valores pertenecientes a un entorno de p, tienen sus imágenes en un entorno de L. El modo de acercamiento al que parece “arrastrar” la definición está basado en nuestro modelo ADI 3 (véase 3.2).

Fenómeno IVF: Un proceso “de ida” lo hallamos en el fragmento *para todo entorno $N_1(L)$ existe un cierto entorno $N_2(p)$*. El proceso “de vuelta” asociado se reconoce en el fragmento final: *tal que* $f(x) \in N_1(L)$ *siempre que* $x \in N_2(p)$ *y* $x \neq p$.

<u>Definición 6:</u> *Diremos que* L *es el límite de f(x) cuando* $x \to a$ *; si fijado un entorno de* L *se puede determinar un entorno de* a *, de modo que los valores de* $f(x)$ *correspondientes* a *puntos de este entorno (salvo* a *lo sumo el* $f(a)$*), quedan contenidos en el entorno de* L . Navarro y Sixto (1944, p. 101.) Notación adaptada.

Fenómeno ADI: Valores pertenecientes a un entorno de a, tienen sus correspondientes imágenes en un entorno de L. El modo de acercamiento al que parece “arrastrar” la definición está basado en nuestro modelo ADI 3 (véase 3.2).

Fenómeno IVF: Un proceso “de ida” lo hallamos en el fragmento: *si fijado un entorno de* L *se puede determinar un entorno de* a . El proceso “de vuelta” se reconoce en el fragmento final: *de modo que los valores de* $f(x)$ *correspondientes* a *puntos de este entorno (salvo* a *lo sumo el* $f(a)$*), quedan contenidos en el entorno de* L .

<u>Definición 7</u>: *A toda aproximación de* L *le corresponde un entorno reducido de* a *de manera que las imágenes de los puntos de dicho entorno mejoran la aproximación*. Blázquez (2002, p. 15)

Fenómeno ADI: Para valores muy próximos a a sus imágenes son muy próximas a L. El modo de acercamiento al que parece “arrastrar” la definición está basado en nuestro modelo ADI 3 (véase 3.2).

Fenómeno IVF: Un proceso “de ida” se observa en la expresión “A toda aproximación de L le corresponde un entorno reducido de a”. Un proceso “de vuelta” se reconoce en la conclusión: de manera que las imágenes de los puntos de dicho entorno mejoran la aproximación.

El estudio de las Definiciones 1 a 7 confirma nuestra conjetura: todas ellas organizan fenómenos ADI e IVF. Los autores respectivos de cada definición sugieren modos de acercamiento, para el fenómeno ADI, que se asemejan, en su mayoría, a nuestros modelos ADI 3 y ADI 4. El fenómeno IVF, aunque cambie su expresión, se da en los siete casos.

3.6 “Caracterización por sucesiones” y límite finito de una función en un punto

En este apartado estudiamos la Definición 8 (véase 3.3.1), también conocida como “caracterización por sucesiones” del límite finito de una función en un punto.

Analizamos los requisitos matemáticos necesarios para su manejo, describimos los fenómenos que organiza, comprendemos por qué falla aquí la conjetura que enunciamos en 3.5 y preguntamos si la equivalencia matemática (entre la Definición 1 y la Definición 8) está asociada o no a una equivalencia fenomenológica. Para llevar a cabo este estudio nos apoyaremos en el trabajo de Claros (2010).

3.6.1 Requisitos matemáticos en la “caracterización por sucesiones”

Claros (2010) utilizó para su investigación la siguiente definición:

> *Sea* x_n *una sucesión en* $\mathbb{R}$*, decimos que* x_n *converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim* $x_n = x$*) si para cada* $\varepsilon \succ 0$*, existe un número natural* N_0 *tal que si* $n \geq N_0$ *se cumple que* $|x_n - x| \prec \varepsilon$. (p. 142)

Respecto a los requisitos matemáticos necesarios para el manejo de esta definición Claros (2010) afirma:

> *Para manejar diestramente la definición formal en su aspecto simbólico, es necesario, previamente, estar en condiciones de coordinar cuestiones o asuntos relacionados con orden, dependencia, acotación, procesos infinitos y tipos de infinito. Estos conceptos matemáticos subyacen en la definición formal de límite finito de una sucesión, en la cual se hallan relacionados entre sí.* (p. 160)

En el Anexo A3.1 se reproducen los requisitos expuestos por Claros.

En la caracterización por sucesiones del límite finito de una función en un punto se afirma que, a toda sucesión que se elija, que tenga por límite el punto x_0, la función le hace corresponder otra sucesión con límite L.

Esto significa que manejamos dos sucesiones con límite finito, coordinadas por la función f y, por ello, hemos de manejar "doblemente" los requisitos estudiados por Claros.

La intuición de la continuidad de la recta real es otro requisito necesario para el manejo de la "caracterización por sucesiones" del límite finito de una función en un punto: al afirmarse "si para cada sucesión $\{x_n\} \to a$, $x_n \neq a$, se cumple que $f(x_n) \to L$", deducimos que la consideración de todas las sucesiones que convergen en a se realiza en un intervalo continuo de $\mathbb{R}$. Esto no genera conflicto con la idea de que cada sucesión sea discreta. En cierto modo, desplazamos nuestra intuición de la continuidad de la recta: del intervalo de números reales (en la Definición 1) pasamos al conjunto de pares de sucesiones que, coordinadas por f, tienen límite en x_0 y en L. (Este conjunto se define gracias a la continuidad del intervalo de números reales en que la variable independiente toma sus valores.)

En la caracterización por sucesiones del límite finito de una función en un punto, por tanto, consideramos como requisitos necesarios: dependencia, orden, valor absoluto, acotación, procesos infinitos, tipos de infinito y la continuidad del intervalo de números reales, que permite construir un conjunto no numerable de parejas de sucesiones que tienden a x_0 y a L, respectivamente.

3.6.2 Caracterización por sucesiones del límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza

Consideramos la Definición 8 debida a Ortega (1993):

Sea f una función con valores reales definida en D y sea a un punto de acumulación de D. Diremos que el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a es L si para cada sucesión $\{x_n\} \to a, x_n \neq a$, se cumple que $f(x_n) \to L$. (p. 68)

Fenómeno ADI

Como hemos observado en 3.2, informalmente, la noción de límite finito de una función en un punto incluye una idea de doble aproximación, en el sentido de que los valores de la variable dependiente se aproximan a un valor L cuando los originales se acercan a un valor determinado de antemano.

La caracterización por sucesiones del límite finito de una función en un punto también incluye esa idea de la doble aproximación, como se observa en las expresiones $\{x_n\} \to a$ y $f(x_n) \to L$. La primera corresponde a una sucesión, que tiende a x_0, extraída de la variable independiente. Mientras que la segunda comporta que las imágenes de estos valores, obtenidos a través de la función, corresponden a otra sucesión que se aproxima a L. El modo de acercamiento que parece "arrastrar" la caracterización por sucesiones está basado en nuestro modelo ADI 1 (véase 3.2).

Dados f y x_0 el conjunto de sucesiones que se pueden construir con límite en x_0, tiene la potencia del continuo. En enfoques intuitivos, en lugar de considerar "infinitas" sucesiones, manejamos algunas sucesiones que tienden a x_0. Cuando hacemos esto, los valores de la función parecen aproximarse a L. A las parejas de sucesiones exigidas por la Definición 8, de las que hay un número infinito no numerable, se les exige, exclusivamente, que tengan en común los respectivos límites x_0 y L.

La parte intuitiva de la Definición 8 exige explícitamente una intuición de la continuidad (impone a x_0 la condición de ser un punto de acumulación); la situación es prácticamente idéntica a la propuesta en la Definición 1.

Por esta razón, aunque el contenido de la Definición 8 parece "arrastrar", en su parte intuitiva, solamente hacia el modelo ADI 1 (ver epígrafe 3.2.2), entendemos que, en el ámbito intuitivo, apela a la intuición de la continuidad y organiza el fenómeno ADI.

Fenómeno Iivs

La Definición 1 exige la construcción de una función $\{\varepsilon,\delta(\varepsilon,f(x))\}$ que surge de la observación de dos procesos que, conjuntamente, constituyen el fenómeno IVF. (Véase 3.4.)

En la caracterización por sucesiones, se pide que para cada sucesión $\{x_n\}\rightarrow a$, $x_n \neq a$, se tenga que $f(x_n)\rightarrow L$. Teniendo en cuenta los fenómenos de ida y vuelta en sucesiones (i.v.s), organizados por una definición de sucesión con límite finito, descritos en Claros (2010, pp.147-148), observamos que tenemos que construir parejas de funciones; la primera función, $\{\varepsilon_1,n_1(\varepsilon_1)\}$, correspondiente a la sucesión de valores que se aproxima a x_0, y la segunda función, $\{\varepsilon_2,n_2(\varepsilon_2,f(x))\}$, correspondiente a la sucesión de valores que se aproximan a L.

Estas dos nuevas funciones se construyen para las infinitas sucesiones con límite x_0. A partir de cada una de ellas se generará la correspondiente sucesión de valores f(x). En la Definición 8, en lugar del fenómeno IVF, tenemos una colección no numerable de infinitos pares de fenómenos i.v.s en los que las parejas de sucesiones asociadas tienen en común los valores límites x_0 y L, respectivamente. Esta colección la designaremos por Iivs y, conjuntamente, las infinitas (I) parejas de fenómenos de ida-vuelta en sucesiones (i.v.s) constituyen un fenómeno que es esencialmente diferente del fenómeno IVF.

Resumen de fenómenos organizados

En la Tabla 3.4 resumimos lo dicho hasta ahora.

Tabla 3.4 *Fenómenos organizados por la Definición 8 para la noción de límite finito de una función en un punto*

Caracterización por sucesiones	Fenómenos observados y descritos
Sea f una función con valores reales definida en D y sea a un punto de acumulación de D. Diremos que el límite de f(x), cuando x tiende a a es L si para cada sucesión $\{x_n\} \to a$, $x_n \neq a$, se cumple que $f(x_n) \to L$	ADI Iivs

En 3.5 hemos conjeturado que cualquier definición formal de límite finito de una función en un punto organiza los fenómenos ADI e IVF. Por lo dicho ahora, tal conjetura falla en el caso de la Definición 8 (la "caracterización por sucesiones") para el límite finito de una función en un punto. En lugar del fenómeno IVF, tenemos el fenómeno Iivs que caracterizamos como una colección no numerable de infinitos pares de fenómenos i.v.s en los que las parejas de sucesiones asociadas tienen en común los valores límites x_0 y L, respectivamente.

3.6.3 Equivalencia matemática versus equivalencia fenomenológica

Spivak (1991, p.619), como otros autores, demuestra cómo la caracterización por sucesiones es matemáticamente equivalente a la definición de límite finito de una función en un punto. Esto se consigue mediante la doble implicación: si la definición 1 se cumple, entonces también se cumple la Definición 8 y, si la Definición 1 no se cumple, tampoco se cumple la Definición 8. A esta equivalencia matemática, ¿le corresponde una "equivalencia fenomenológica"?

Para abordar esta cuestión, necesitamos establecer lo que entendemos por equivalencia fenomenológica. Enunciamos un criterio que tiene dos partes. Sean dos definiciones, cuya equivalencia matemática ha sido probada, que organizan, al menos, un fenómeno A y un fenómeno B, respectivamente. En estas condiciones:

(1) Dos fenómenos A, B, son equivalentes si la observación de A lleva asociada la de B y si la no observación de A lleva asociada la no observación de B.

(2) Dos definiciones son fenomenológicamente equivalentes si organizan fenómenos que son equivalentes.

Aplicaremos este criterio a las Definiciones 1 y 8.

Equivalencia en el ámbito intuitivo. Consecuencias

Como hemos indicado, en ambas definiciones se maneja el mismo fenómeno.

Deducimos que hay equivalencia fenomenológica obvia entre la Definición 1 y la Definición 8, ya que ambas organizan el mismo fenómeno ADI.

Equivalencia entre IVF e Iivs. Consecuencias

En 3.4 hemos descrito cómo la definición elegida de límite finito de una función en un punto organiza el fenómeno IVF. Dicha definición exige que se construya una función $(\varepsilon, \delta(f(x), \varepsilon))$ que surge de la observación de dos procesos que, conjuntamente, constituyen el fenómeno IVF. Véase la Tabla 3.2.

En la caracterización por sucesiones, tenemos infinitas parejas de funciones $\{\varepsilon_1, n_1(\varepsilon_1)\}$ y $\{\varepsilon_2, n_2(\varepsilon_2, f(x))\}$, por lo que, fenomenológicamente, tendremos infinitas parejas de fenómenos i.v.s. Véase la Tabla 3.4.

En el caso del fenómeno IVF tenemos una función real de variable real, mientras que en el caso del fenómeno Iivs tenemos una infinidad de pares de fenómenos de retroalimentación en sucesiones y sus correspondientes funciones naturales de variable real.

En la Tabla 3.5 resumimos la comparación entre la Definición 1 y la Definición 8 de límite finito de una función en un punto.

Tabla 3.5 *Resumen de fenómenos organizados por las Definiciones 1 y 8 de límite finito de una función en un punto – ámbito formal*.

Definiciones	Fenómenos	Funciones que se construyen
Definición métrica $\varepsilon - \delta$ (Definición 1)	IVF	$(\varepsilon, \delta(f(x), \varepsilon))$
Caracterización por sucesiones (Definición 8)	Iivs	$\{\varepsilon_1, n_1(\varepsilon_1)\}$; $\{\varepsilon_2, n_2(\varepsilon_2, f(x))\}$

Cuando se da el fenómeno IVF también se dan las infinitas parejas de fenómenos ivs. Cuando no se da el fenómeno IVF, es decir, cuando la función no tiene límite finito en el punto considerado, tampoco se da el fenómeno Iivs, porque es posible construir inmediatamente un ejemplo de sucesiones emparejadas tales que una tienda a x_0 y la otra no tenga límite.

Sorprendentemente, hay casos en los que es posible construir, en número infinito no numerable, sucesiones emparejadas en las que se cumple, para cada una, una pareja de fenómenos ivs.

Esto ocurre, por ejemplo con la siguiente función:

$$x \to f(x) = \begin{cases} x, & si\, x < 0 \\ x+1, & si\, x \geq 0 \end{cases}$$

En la variable independiente: con cualquier sucesión monótona decreciente con límite 0, las imágenes tienden a 1, generando así la falsa impresión de que la función tiene límite en 1. Este hecho se explica por la existencia de un límite lateral, que se comprobaría en ambos casos si adaptásemos esta exposición a dichos límites.

Como es sabido, la función no tiene límite en $x_0 = 0$; no se cumplen ni la Definición 1 ni la Definición 8.

Por ejemplo, para $\varepsilon = 0'1$ no podemos encontrar un δ de forma que si $0 \prec |x| \prec \delta$, entonces $|f(x) - 1| \prec 0'1$. Esto es debido a que si consideramos valores de x menores que 0 que cumplen $0 \prec |x| \prec \delta$, sucede que $|f(x) - 1| \succ 0'1$. Concretamente x = – 0´1, cumple que $0 \prec |x| \prec \delta$, sin embargo $|f(0'1) - 1| = 0'9$.

Paralelamente, si consideramos la sucesión $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ con límite 0, su correspondiente sucesión asociada $f(x_n) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n} & si\ n \text{ es impar} \\ \frac{(-1)^n}{n} + 1 & si \text{ n es par} \end{cases}$, no tiene límite, porque una subsucesión (la de los términos impares) tiende a 0 y otra (la de los términos pares), tiende a 1.

Retomando la Tabla 3.4 concluimos que la equivalencia matemática entre la Definición 1 y la Definición 8 lleva aparejada una correspondiente equivalencia fenomenológica.

Entendemos que el resultado obtenido sobre la equivalencia fenomenológica entre la Definición 1 y la Definición 8, en lo relativo al fenómeno IVF y a las infinitas parejas de fenómenos i.v.s, exige futuros estudios que deben conectarse con diferentes maneras de considerar o usar la continuidad de la recta numérica.

3.7 Comparación entre el límite finito de una función en un punto y el límite finito de una sucesión

Claros (2010) ha detallado los fenómenos organizados por una definición de límite finito de una sucesión. Hemos identificado fenómenos organizados por una definición de límite finito de una función en un punto. Realizamos una comparación de los resultados obtenidos en ambos trabajos. Las diferencias encontradas admiten una traducción educativa y justifican procesos de enseñanza-aprendizaje diferentes para las respectivas nociones.

3.7.1 Comparación de los requisitos matemáticos

La Tabla 3.6 muestra analogías y diferencias existentes en los requisitos matemáticos de, por una parte, el límite finito de una sucesión, y por otra, el límite finito de una función en un punto. (Fuentes: Claros (2010; p. 160-164) y 3.3.3 de esta memoria.) Hemos marcado con asterisco (*) los requisitos con diferencias que consideremos esenciales.

Tabla 3.6 *Resumen de analogías y diferencias entre el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto*.

Acotación	Dependencia	Procesos infinitos	Tipos de infinito (*)	Intuición de la continuidad del intervalo (*)
		<u>Límite finito de una sucesión</u>		
Variable independiente no acotada Variable dependiente acotada	$\{n \to x_n\}$ $\{\varepsilon \to N_0\}$	-Sin aproximación en la variable independiente -Aproximación al límite mediante valores superiores o inferiores -Procesos infinitos discretos	Infinito potencial presente Infinito actual (cardinal) numerable	No es un requisito
		<u>Límite finito de una función en un punto</u>		
Variable independiente acotada Variable dependiente acotada	$\{x \to f(x)\}$ $\{\varepsilon \to \delta(\varepsilon)\}$	-Aproximación en la variable independiente -Aproximación al límite mediante valores superiores e inferiores -Procesos infinitos continuos	Infinito potencial ausente Infinito actual (cardinal) no numerable	Es un requisito

3.7.2 Comparación de fenómenos

La Figura 3.3 resume la relación que establecemos entre los distintos fenómenos presentados en torno al límite (véase Claros, Sánchez y Coriat, 2006).

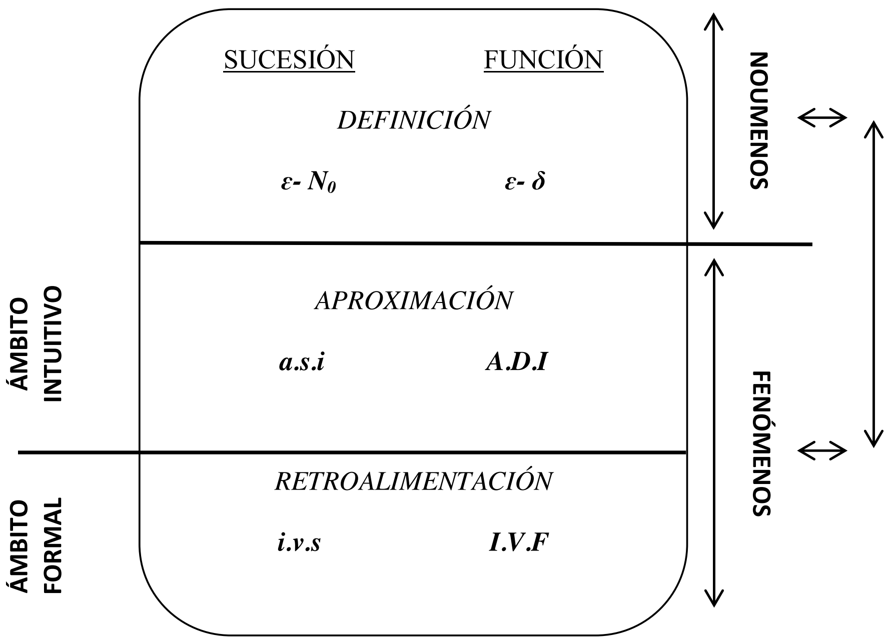


Figura 3.3 Uso de los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación en los ámbitos intuitivo y formal. Noumenos y fenómenos.

Los fenómenos organizados por las definiciones de límite finito de una sucesión y de límite finito de una función en un punto permiten poner de manifiesto lo siguiente (Claros, Sánchez y Coriat, 2006):

- En el límite finito de una sucesión hemos observado dos fenómenos: el fenómeno a.s.i, o fenómeno de aproximación simple intuitiva, y el fenómeno i.v.s, o fenómeno de ida-vuelta o retroalimentación en sucesiones. Ambos fenómenos son organizados por la definición de límite finito de una sucesión.

- En el límite finito de una función en un punto hemos observado dos fenómenos: el fenómeno ADI, o fenómeno de aproximación doble intuitiva, y el fenómeno IVF o fenómeno de ida-vuelta o retroalimentación en funciones. Ambos fenómenos son organizados por la definición de límite finito de una función en un punto.

Excepcionalmente, en la Definición 8, el segundo fenómeno es diferente y lo hemos llamado Iivs (véase 3.6.2).

Tras el estudio del apartado 3.7, de nuevo encontramos justificación a nuestra conjetura referente a las diferencias significativas entre las nociones de límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto. Esta conjetura lleva a diseñar procesos de enseñanza aprendizaje que tengan en cuenta las diferencias indicadas.

3.8 Fenómenos, sistemas de representación y formatos

Como quedó dicho en 2.2.3, los sistemas de representación más usuales en los que suele presentarse el límite son llamados verbal (V), gráfico (G), simbólico (S) y tabular (o numérico) (T). El uso de estos sistemas es señalado por Blázquez y Ortega (2000) y por Claros (2010), el cual, además de los sistemas de representación usados para presentar el límite, considera formatos de presentación, denominándolos ejemplo (E) o definición (D): “Para los primeros hay cuatro posibilidades, que designamos con los términos gráfico, verbal, tabular y simbólico, y para los segundos, dos, que designamos con los términos ejemplo y definición.” (Claros, 2010; p. 152).

En la Tabla 3.7 hemos adaptado a las funciones toda esta información; en las columnas situamos los diferentes sistemas de representación, mientras que en las filas situamos los fenómenos ADI e IVF; los formatos dividen las columnas en dos subcolumnas.

Tabla 3.7 *Fenómenos, sistemas de representación y formatos*

Sistemas de representación

		Verbal		Gráfico		Tabular		Simbólico	
Fenó-meno	ADI								
	IVF								
		Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición
		Formatos		*Formatos*		*Formatos*		*Formatos*	

Las 16 posibilidades que hemos considerado abarcan todos los casos posibles. Con el fin de simplificar la notación, usamos abreviaturas que indican el fenómeno, el sistema de representación y el formato. A continuación describimos cada una de ellas, incluyendo un ejemplo procedente del estudio que se presenta en el próximo capítulo.

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, y $x_o = 2$, se verifica:

que si consideramos la sucesión

1, 1'9, 1'99, ..., 1'999 ... que tiende a 2

entonces

$f(1) = 1^2$, $f(1'9) = 1'9^2$, ..., $(1'99 \overset{(n}{\ldots} 9)^2$, ... tiende a 4,

Figura 3.4 ADI V-E. (Martínez, Hernández y Miranda, 1976, p. 86.)

El autor se apoya en el fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI), ya que en cada una de las variables indica un valor al que plausiblemente se acercan. Para ello utiliza el modo de acercamiento basado en sucesiones emparejadas, que se asemeja a nuestro modelo ADI 1. Utiliza la representación verbal (V) y lo presenta en un ejemplo (E).

Intuitivamente, se puede pensar en el límite de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ como el valor al que tienden las imágenes, y, cuando los originales, x, tienden hacia a.

Figura 3.5 ADI V-D (Negro, Benedicto, Martínez y Poncela, 1997, p. 219)

El autor se apoya en el fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI), ya que lo único que hace notar es cómo la variable dependiente se acerca a un valor cuando la independiente se acerca al punto en el que se está calculando el límite. Para ello utiliza la representación verbal (V) y lo presenta en una definición (D).

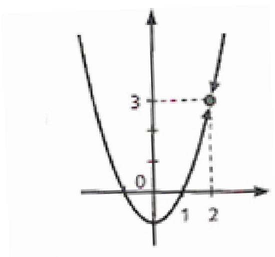


Fig. 3. $f(x) = x^2 - 1.$

Figura 3.6 ADI G-E. (Negro, Benedicto, Martínez y Poncela, 1996, p. 217.)

El autor se apoya en el fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI), a través del modo de acercamiento basado en la intuición de la continuidad que se asemeja a nuestro modelo ADI 2. Para valores cercanos a 2, se observa una acumulación de las imágenes de dichos valores en torno al 3. Para ello utiliza la representación gráfica (G) y lo presenta en un ejemplo (E).

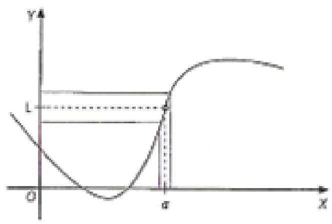


Figura 3.7 ADI G-D. (Bescos y Pena, 2002, p. 226.)

El autor se apoya en el fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI), a través del modo de acercamiento basado en la intuición de la continuidad que se asemeja a nuestro modelo ADI 2. Para valores cercanos al punto a, se observa una acumulación de las imágenes de dichos valores en torno al límite L. Para ello utiliza la representación gráfica (G) y lo presenta en un ejemplo (E).

x	…	1,9	1,99	1,999	… → 2 ← …	2,001	2,01	2,1	…
y	…	3,61	3,9601	3,996001	… → 4 ← …	4	4	4	…

Figura 3.8 ADI T-E. (Negro, Benedicto, Martínez y Poncela, 1997, p. 219.)

El autor se apoya en el fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI), ya que en cada una de las variables indica un valor al que plausiblemente se acercan. Para ello utiliza el modo de acercamiento basado en sucesiones emparejadas, que se asemeja a nuestro modelo ADI 1. Utiliza la representación tabular (T) y lo presenta en un ejemplo (E).

Intuitivamente, esto significa que si $|x-a| \to 0$, entonces $|f(x)-L| \to 0$.

Figura 3.9 ADI S-D. (Bescos y Pena, 2002, p. 226.)

El autor se apoya en el fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI), ya que en cada una de las variables indica un valor al que plausiblemente se acercan. Para ello utiliza el modo de acercamiento basado en distancias, que se asemeja a nuestro modelo ADI 4. Utiliza la representación simbólica (S) y lo presenta en una definición (D).

Es decir, que si fijamos un valor $\varepsilon > 0$, vamos a encontrar otro valor $\delta > 0$, de forma que si la distancia de x a 9 es menor que δ, la distancia de $f(x)$ a 12 será menor que ε. (Por muy pequeño que sea éste.)

Figura 3.10 IVF V-E. (Belmonte, Montero, Negro, Pérez y Sierra, 1989, p. 43.)

El autor se apoya en el fenómeno de retroalimentación o ida y vuelta en funciones (IVF), ya que se exige construir una nueva función "$\varepsilon - \delta$". De manera que con el ε dado se parte desde la variable dependiente para determinar el correspondiente δ asociado, de forma que si la distancia de x a 9 es menor δ, entonces la distancia de f(x) a 12 es menor que ε. Para ello utiliza la representación verbal (V) y lo presenta en un ejemplo (E).

Las definiciones precedentes pueden resumirse en la siguiente: *Diremos que* b *es el límite de* f(x) *cuando* x→a; *si fijado un entorno de* b *se puede determinar un entorno de* a, *de modo que los valores de* f(x) *correspondientes a puntos de este entorno (salvo a lo sumo el* f(a)), *quedan contenidos en el entorno de* b.

Figura 3.11 Ejemplo de IVF V-D. (Navarro Borras y Rios, 1944, p. 101.)

El autor se apoya en el fenómeno de retroalimentación o ida y vuelta en funciones (IVF), ya que se exige construir una nueva función "$\varepsilon - \delta$". De manera que, fijado un entorno de b (variable dependiente), puede encontrar un entorno de a (variable independiente), de forma que los valores de *f(x)* correspondientes a los puntos del entorno de a pertenezcan al entorno de b. Para ello utiliza la representación verbal (V) y lo presenta en una definición (D).

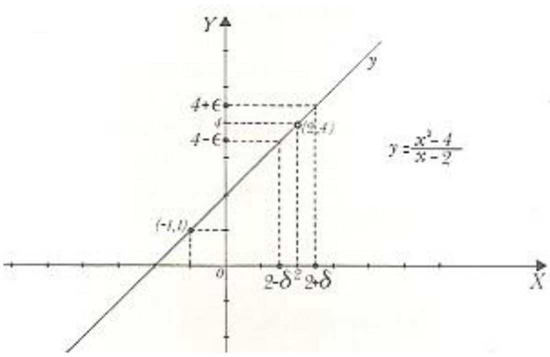


Figura 3.12 IVF G-E. (Guillén, Navarro, Peña y Ferrer, 1976, p. 52.)

El autor se apoya en el fenómeno de retroalimentación o ida y vuelta en funciones (IVF), ya que se exige construir una nueva función "$\varepsilon - \delta$". Para ello utiliza la representación gráfica (G) y lo presenta en un ejemplo (E), en el que apreciamos como de un intervalo centrado en 4 (variable dependiente), se construye un intervalo centrado en 2 (variable independiente), de forma que todos los valores que pertenecen al intervalo centrado en 2 tienen sus imágenes en el intervalo centrado en 4.

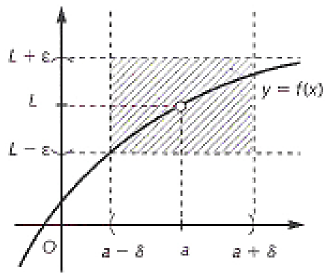


Fig. 5. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Figura 3.13 IVF G-D. (Negro, Benedicto, Martínez y Poncela Guillén, 1997, p. 220.)

El autor se apoya en el fenómeno de retroalimentación o ida y vuelta en funciones (IVF), ya que se exige construir una nueva función "$\varepsilon - \delta$". Para ello utiliza la representación gráfica (G) y lo presenta en una definición (D), en la que apreciamos como de un intervalo centrado en L (variable dependiente), se construye un intervalo centrado en a (variable independiente), de forma que todos los valores que pertenecen al intervalo centrado en a tienen sus imágenes en el intervalo centrado en L.

Por ejemplo, se verifica que $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 1) = 10$, porque elegido $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ tal que, para todo x que cumple $|x - 3| < \delta$, es $|(x^2 + 1) - 10| < \varepsilon$. En efecto $|x^2 + 1 - 10| = |x^2 - 9| = |x - 3| \cdot |x + 3| < |x - 3| \cdot 7$, para todo $x \in (2,4)$, pues en este caso $x + 3 \in (2 + 3, 4 + 3)$, o sea $x + 3 < 7$, luego, si $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}$, será:

$$|x^2 + 1 - 10| < |x - 3| \cdot 7 < \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon$$

y esto sucede para cada $\varepsilon > 0$.

Figura 3.14 IVF S-E. (Martínez, Hernández y Miranda, 1976, p. 89.)

El autor se apoya en el fenómeno de retroalimentación o ida y vuelta en funciones (IVF), ya que se exige construir una nueva función "$\varepsilon - \delta$". De manera que con el **ε** dado se parte desde la variable dependiente para determinar el correspondiente δ asociado, en este caso $\delta = \dfrac{\varepsilon}{7}$, de forma que si el valor absoluto de x menos 3 es menor que δ, entonces el valor absoluto de f(x) menos 10 es menor que ε. Para ello utiliza la representación simbólica (S) y lo presenta en un ejemplo (E).

Diremos que una función $f(x)$ tiene por límite b cuando x tiende a a, y lo simbolizaremos por

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

cuando para todo número positivo ε (por pequeño que sea) exista un número positivo δ, dependiente de ε, tal, que se cumpla:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Figura 3.15 IVF S-D. (Guillén, Navarro, Peña y Ferrer, 1976, p. 51.)

El autor se apoya en el fenómeno de retroalimentación o ida y vuelta en funciones (IVF), ya que se exige construir una nueva función "$\varepsilon - \delta$". De manera que con el ε dado se parte desde la variable dependiente para determinar el correspondiente δ asociado, de forma que si el valor absoluto de *x* menos a es menor δ y mayor que 0, entonces el valor absoluto de *f(x)* menos b es menor que ε. Para ello utiliza la representación simbólica (S) y lo presenta en una definición (D).

De las 16 posibilidades que hemos considerado en la Tabla 3.7, no hemos encontrado ejemplos de los 4 casos que hubiesen estado codificados como:

ADI T-D Fenómeno ADI sistema de representación tabular y formato definición.

ADI S-E Fenómeno ADI sistema de representación simbólico y formato ejemplo.

IVF T-E Fenómeno IVF sistema de representación tabular y formato ejemplo.

IVF T-D Fenómeno IVF sistema de representación tabular y formato definición.

Una vez terminado el estudio de libros de texto (ver Capítulo 4º), surgió la pregunta sobre esos casos ausentes: ¿es consecuencia de la muestra elegida o es imposible hallarlos? Decidimos interpretar que esta “no presencia” se debía a las muestras manejadas.

Por tanto la Tabla inicial 3.7 en la organizamos toda la información, queda como indica la Tabla 3.8.

Tabla 3.8 *Los casos efectivamente encontrados en la bibliografía consultada*

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI						**NO**	**NO**	
IVF					**NO**	**NO**		
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

3.9 Conclusiones del estudio teórico

En este apartado resumimos, a grandes rasgos, lo que hemos establecido hasta ahora, y especificamos líneas de investigaciones futuras.

- Hemos descrito y caracterizado fenómenos observados en ocho definiciones de límite finito de una función en un punto.

- En el ámbito intuitivo hemos identificado un fenómeno de *"aproximación doble intuitiva"* (ADI). En el ámbito formal hemos identificado un fenómeno de "*ida-vuelta en funciones"* (IVF) y un fenómeno que corresponde a infinitas no numerables sucesiones emparejadas con límites respectivos comunes (Iivs).

- Hemos ilustrado los principales modos de acercamiento que corresponden al fenómeno ADI: modelos ADI1 a ADI 5.

- Hemos comparado los fenómenos ADI y a.s.i (Claros, 2010). En el fenómeno ADI se utiliza la intuición de la continuidad de la recta; esto explica que sea "algo más" que dos fenómenos a.s.i coordinados por una dependencia funcional.

- Hemos seleccionado una definición de límite finito de una función en un punto; hemos censado requisitos matemáticos que se ponen en juego cuando se enuncia una definición de límite finito de una función en un punto; hemos realizado un estudio detallado y minucioso con el que hemos descrito y caracterizado el fenómeno de *retroalimentación o ida y vuelta en funciones* (IVF); hemos expuesto cómo la definición seleccionada organiza los fenómenos ADI e IVF; finalmente, hemos puesto de manifiesto relaciones que los fenómenos (ADI e IVF) mantienen entre sí, y con la propia definición.

- Hemos extendido el estudio a 7 definiciones más de límite finito de una función en un punto.

- La detección de los dos fenómenos (ADI e IVF) también se ha realizado en otras seis definiciones de límite finito de una función en un punto; suponemos que la variedad de definiciones usadas constituye una práctica totalidad de "estilos de definiciones" que podríamos encontrar en los manuales de matemáticas.

- Hemos conjeturado que cualquier definición formal, matemáticamente correcta, de límite finito de una función en un punto organiza los fenómenos ADI e IVF; hemos fundamentado nuestra conjetura de que cualquier definición formal, matemáticamente correcta, de límite finito de una función en un punto organiza los fenómenos ADI e IVF; hemos establecido cómo nuestra conjetura falla cuando consideramos la llamada caracterización por sucesiones. Ésta organiza dos fenómenos que hemos denominado ADI e Iivs.

- Hemos conjeturado una equivalencia fenomenológica entre las Definiciones 1 y 8, apoyándonos en su conocida equivalencia matemática; hemos establecido que la conjetura es aceptable con el criterio de equivalencia fenomenológica que hemos enunciado.

- Hemos comparado el límite finito de una función en un punto y el límite finito de una sucesión.

- Hemos analizado las posibles apariencias de los fenómenos ADI e IVF cuando se usan diferentes sistemas de representación y formatos.

- Quedan pendientes estudios paralelos relativos a otros límites de funciones (en el infinito; infinitos; laterales).

-Quedan pendientes aplicaciones de nuestro estudio al diseño de procesos de enseñanza aprendizaje que tengan en cuenta las diferencias significativas indicadas para el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto.

Anexo A3.1 Sucesiones con límite finito. Requisitos matemáticos para una definición

Reproducimos las páginas 160-164 de la Tesis Doctoral (Claros, 2010). La información de este anexo se utiliza en 3.6.

Para manejar diestramente la definición formal en su aspecto simbólico, es necesario, previamente, estar en condiciones de coordinar cuestiones o asuntos relacionados con orden, dependencia, acotación, procesos infinitos y tipos de infinito. Estos conceptos matemáticos subyacen en la definición formal de límite finito de una sucesión, en la cual se hallan relacionados entre sí.

Estos conceptos pueden estar presentes, o no, en otras definiciones de límite finito de una sucesión distinta de la que hemos usado. Queda para un trabajo posterior el observar la presencia de todos ellos en cualquier definición de límite finito de una sucesión con la que se trabaje.

Otro estudio pendiente de abordar exige determinar si los conceptos de orden, dependencia, acotación, procesos infinitos y tipos de infinito están presentes en la definición de límite infinito de una sucesión. Una lectura rápida de ésta da, como primera consecuencia, que el concepto de acotación no se halla en dicha definición, pero sí aparecen procesos infinitos.

- Dependencias. Observamos dos dependencia bien distintas: la dependencia $\{n \rightarrow x_n\}$ y la dependencia $\{\varepsilon \rightarrow No\}$. La primera es obvia, pues define la sucesión; la segunda, debe construirse para asegurar que el candidato es el límite de la sucesión. Estas dos de dependencia difieren en los respectivos conjuntos iniciales y finales. En la dependencia $\{n \rightarrow x_n\}$ el conjunto de partida es **N** y el de llegada **R**, mientras que en la otra se intercambiar las funciones de estos conjuntos, pues el de partida es **R** (estrictamente hablando: $\mathbf{R}^{*+}$) y el de llegada, **N**.

- Orden, valor absoluto y cota. Cuando hablamos de *orden*, nos referimos a una relación de orden total, en la cual cualquier par de números son comparables. Necesitamos el orden en **N** y el orden en **R**. La relación de orden es un prerrequisito necesario para manejar la definición de límite finito de una sucesión. La comparación de términos, está presente en ella a través de los siguientes símbolos "<", ">" y "≥".En la definición de límite de una sucesión todas las comparaciones se realizan entre números reales excepto la comparación "$n \geq N$ ", que ocurre entre dos números naturales.

Cuando hablamos de *valor absoluto*, nos referimos a una función de **R** en **R**, que cumple que $x \rightarrow |x| = \max\{x,-x\}$. Este prerrequisito se observa en expresiones como $|x_n - a|$, si a es el supuesto límite.

Cuando hablamos de cota superior (respectivamente, inferior), nos referimos a números, si existen, que son mayores (respectivamente, menores) que todos los valores de un subconjunto dado A de **R**; técnicamente, tendremos, para la cota superior de A: "Sea $A \subset \mathbf{R}$, diremos que A está acotado superiormente si y solo si $\exists\ k \in \mathbf{R}$ tal que $\forall\ x \in A \Rightarrow x \leq k$";

análogamente, para la cota inferior de A: "Sea $A \subset \mathbf{R}$, diremos que A está acotado inferiormente si y solo si $\exists\ k \in \mathbf{R}$ tal que $\forall\ x \in A \Rightarrow x \geq k$". Si ambos números existen, el *conjunto* está *acotado*. El concepto de acotación es necesario para comprobar que el candidato seleccionado como límite, es el verdadero límite. Esto se consigue cuando a partir de un cierto *n* en adelante todos los términos de la sucesión cumplen que $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$. La traducción de este prerrequisito es simple: la variable dependiente de una sucesión que tiene límite está acotada. La variable independiente, sin embargo, no está acotada, ya que n supera cualquier valor imaginable.

- Procesos infinitos. Un *proceso infinito* es una de manera de indicar el cambio experimentado por las variables, independiente y dependiente, presentes en la definición formal considerada; para el análisis de los tipos de infinitos, recurrimos a Tall (1991). En la definición de límite de una sucesión se manejan y se coordinan dos procesos infinitos basados en la idea de sucesión. El primer proceso se refiere a la variable independiente, y se resume con la frase $n \to \infty$; se trata de un avance inexorable, por lo cual, nos abstenemos de hablar de acercamiento o de aproximación. El segundo proceso infinito se genera al construir los sucesivos valores de los términos de la sucesión. Si nos limitamos a las sucesiones monótonas, en el segundo proceso infinito, la variable dependiente puede evolucionar de una de estas dos maneras: bien sus valores se acercan a un valor numérico concreto o bien se alejan de cualquier valor numérico. Los procesos infinitos que hemos descrito para cada variable son, en todos los casos, proceso infinitos discretos, ya que el cardinal de los conjuntos que manejamos tanto en la variable independiente como en la variable dependiente es $\mathbb{N}$.

-Tipos de infinitos. En el límite finito de sucesiones, el proceso infinito que aparece reflejado cuando vamos dando valores a *n* y obteniendo sus correspondientes x_n, se ajusta a la idea de infinito potencial. Por este motivo decimos que el infinito potencial se halla presente en la definición de límite finito de una sucesión. Si consideramos la sucesión y su límite como un todo estaremos aludiendo a la idea de infinito actual; el conjunto que forman la sucesión sometida a estudio y su límite tiene cardinal numerable, ya que existe una aplicación biyectiva entre el conjunto de los números naturales y los términos de la sucesión.

CAPÍTULO 4º: Fenómenos ADI e IVF en libros de texto

Y la certidumbre es algo más que la evidencia intelectual, es algo que desborda del conocimiento abstracto, teórico simplemente. Es, sí, conocimiento teórico, mas acompañado, enraizado en la que podríamos llamar evidencia del corazón.

María Zambrano

Introducción

Los libros de texto se vienen considerando como objetos de estudio de carácter didáctico. Sánchez (1997) analizó el tratamiento que se ha dado a la noción de límite de una función en manuales de los siglos XIX y XX. Estructura su estudio así: (a) el estatus del concepto de límite; (b) la forma en que se introduce; (c) la definición utilizada; (d) los ejemplos considerados; (e) las concepciones; y (f) los obstáculos y dificultades que se extraen de los contenidos.

Teniendo en cuenta las organizaciones matemáticas y didácticas en del límite de una función, Espinoza (1998) describió reconstrucciones escolares propuestas en algunos libros de texto de 2º de BUP. Sierra, González y López (1999) estudiaron la evolución del concepto de límite de funciones en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU) entre los años 1940-1995. Raman (2004) advirtió que los vínculos entre las ideas intuitivas, la definición formal del límite y las técnicas se han camuflado en los libros de texto de nivel universitario. La "definición $\varepsilon-\delta$" se presenta en una sección diferente de aquella en la que se discuten las ideas intuitivas acerca de los límites. Uno de los capítulos de la tesis de Claros (2010) versa sobre el reconocimiento de fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión, caracterizados y descritos en su investigación, en libros de texto de Matemáticas de secundaria.

En el capítulo anterior hemos descrito y caracterizado fenómenos organizados por la definición de límite finito de una función en un punto; los hemos denominado "fenómeno *ADI*" y "fenómeno *IVF*". Hemos dado ejemplos teniendo en cuenta el sistema de representación (verbal, gráfico, tabular o simbólico) en el que son expresados y el formato de presentación (ejemplo o definición); véase la Tabla 3.7 del apartado 3.8.

En este capítulo estudiamos libros de texto de secundaria con la pretensión de detectar y observar, los fenómenos *ADI* e *IVF,* en diferentes representaciones y formatos.

Hemos estudiado el contenido de 28 libros publicados entre 1933 y 2005. Hemos usado los periodos educativos enumerados por Sierra, González y López (1999) basándose en diferentes leyes o épocas de nuestra historia reciente. Hemos orlado las épocas definidas por estos autores con otras dos: un período inicial, previo al primero considerado por Sierra, González y López (1999), y un período final, porque quisimos cerrar nuestra búsqueda con libros que desarrollaran los llamados "contenidos LOGSE" y que, por tanto, no pudieron publicarse oficialmente hasta el año 2000.

Describimos algunos aspectos de la enseñanza ofrecida a los alumnos, en lo relativo al límite finito de una función en un punto, a lo largo del tiempo, reconociendo algunos cambios experimentados por la presentación de los fenómenos en los libros de texto.

En el apartado 4.1 presentamos los pasos seguidos hasta la obtención de la muestra de libros de texto y explicamos el guión de trabajo elaborado para analizar sistemática, eficientemente y de un modo replicable los libros de texto. Este guión, análogo al que presentó Claros (2010) en su memoria de investigación, se estructura mediante cuatro criterios. Para organizar la información hemos usado códigos, que también describimos.

El apartado 4.2 expone la información que, con ayuda del guión indicado, hemos obtenido estudiando uno de los libro de texto de la muestra; sirve como ejemplo para describir (1) el método seguido; (2) cómo observamos la aproximación doble intuitiva (ADI) y la retroalimentación o ida-vuelta en funciones (IVF); y (3) cómo precisamos el sistema de representación y el formato que los autores eligieron para expresarse. En el anexo A4.1 incluimos el estudio de cada libro de la muestra. Con ello, hemos pretendido hallar un equilibrio entre la conveniencia de mostrar los resultados íntegros de nuestra búsqueda y la simplificación de la secuencia de lectura del capítulo. Los modos de acercamiento, que hemos mencionado en el epígrafe 3.2.2, no los hemos tenido en cuenta, porque ningún autor de libros de texto (de la muestra) menciona la intuición de la continuidad de la recta.

En el apartado 4.3 hemos realizado una descripción global utilizando todos los resultados del estudio de libros. Hemos elaborado tablas de frecuencias absolutas para los fenómenos *(ADI e IVF),* hemos descrito el uso relativo de los fenómenos en los sistemas de representación y hemos establecido relaciones entre ambos fenómenos.

En el apartado 4.4, hemos resumido y utilizado un criterio, seguido en Sierra y González (1999), para describir la evolución de los fenómenos y hemos estructurado la muestra de libros de texto. Esto ha permitido observar cambios relevantes en la presentación que los libros de texto dan al límite finito de una función en un punto: En los últimos 80 años se ha pasado de textos más orientados hacia lo "formal" a textos más orientados hacia lo "intuitivo".

En el apartado 4.5 indicamos algunas consecuencias de nuestro estudio y comparamos brevemente nuestros resultados con los del trabajo de Claros (2010), relativo a libros de texto de educación secundaria que tratan las sucesiones con límite finito.

Este capítulo incluye dos anexos. El Anexo A4.1, como se indicó, contiene el informe de cada libro de texto estudiado. El Anexo A4.2 contiene una selección de estos libros que se utiliza en el Capítulo 5º.

4.1 Muestra y plan de estudio de libros de texto de secundaria

El contenido de este apartado lo organizamos en tres epígrafes. En 4.1.1 presentamos y explicamos con más detalle la muestra considerada, así como los criterios usados para incluir (o excluir) algunos libros de texto. En 4.1.2 exponemos el plan de trabajo o guión estructurado que hemos seguido para analizar los libros de texto. En 4.1.3, explicamos el significado de los diferentes códigos que hemos introducido para desarrollar el plan de trabajo.

4.1.1 Descripción de la muestra

Hemos estudiado 28 libros de texto, de bachillerato o de la etapa de educación secundaria, publicados entre 1933 y 2005. La muestra usada es intencional: los libros analizados están disponibles en bibliotecas de diferentes institutos a los que hemos tenido acceso, ya sea por haber ejercido como docentes o por haber estudiado en ellos. Nos propusimos tener, al menos, tres ejemplares en cada intervalo de tiempo considerado, por lo que también buscamos libros en la Biblioteca Nacional de España.

La Tabla 4.1 incluye el número de libros y de editoriales de cada periodo considerado.

Tabla 4.1 *Número de libros y de editoriales por periodo*

Período	Nº de libros	Nº de editoriales
1933-1939	3	3
1940-1966	4	3
1967-1974	3	3
1975-1994	11	9
1995-2005	7	5
1933-2005	28	23

Esta tabla resume informaciones más detalladas, relativas a la muestra utilizada en la investigación, que se muestran en la Tabla 4.2 (página siguiente). Para cada Código de libro, indicamos el período de estudio considerado, el código asignado y la editorial que lo publicó. La relación de libros estudiados se presenta en la bibliografía. El Código de libro se explica en el epígrafe 4.1.3.

El primer libro de la Tabla 4.2 (Rey Pastor, 1933) exige un comentario particular, que no se aplica a los demás libros de la muestra. Rey Pastor unificó las definiciones de límite de sucesiones y de límite de funciones, interpretando la primera como una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Por los argumentos dados en 3.7, descartamos la definición propuesta en ese libro, ya que el equipo de investigación ha optado por separar ambas definiciones. Para definir el límite de manera unificada, Rey Pastor recurre a los infinitésimos, cuya formalización exige conceptos del análisis no estándar y renunciar a palabras como “aproximarse” o “acercarse”, que constituyen la base para definir los fenómenos ADI e IVF. Esta unificación, matemáticamente inobjetable, impide la comprensión de las diferencias fenomenológicas y simbólicas, mencionadas en el apartado 3.7, entre el límite finito de una función en un punto y el límite finito de una sucesión. Sin embargo, antes de presentar su definición unificada, Rey Pastor hace consideraciones de las que extraemos ejemplos de algunos de los fenómenos descritos; estos ejemplos justifican la inclusión del libro en la muestra.

Tabla 4.2 *Muestra de libros estudiada*

Período	Código de libro	Editorial
1933-1939	LF93001	Madrid-Buenos Aires .(Cuenca)
	LF93002	Sucesores de Rivadeneyra (Madrid)
	LF93003	Ministerio de Educación y Ciencia
1940-1966	LF94001	Stylos (Madrid)
	LF96001	Saeta (Madrid)
	LF96002	Ministerio de Educación y Ciencia
	LF96003	Ministerio de Educación y Ciencia
1967-1974	LF96004	Ministerio de Educación y Ciencia
	LF97001	ECIR (Valencia)
	LF97002	U.T.E.H.A. (México)
1975-1994	LF97003	Magisterio Español
	LF97004	Tecniban S.A. (Madrid)
	LF97005	Librería General (Zaragoza)
	LF97006	S.M (Madrid)
	LF98001	S.M. (Madrid)
	LF98002	Santillana (Madrid)
	LF98003	SM (Madrid)
	LF98004	Alhambra (Madrid)
	LF98005	Edunsa
	LF98006	Vicens-Vives. Barcelona
	LF98007	Alhambra (Madrid)
1995-2004	LF99001	Santillana (Madrid)
	LF99002	Santillana (Madrid)
	LF99003	Santillana (Madrid)
	LF00001	Bruño (Madrid)
	LF00002	McGraw-Hill/Interamericana de España.
	LF00003	Oxford Educación
	LF00004	SM (Madrid)

4.1.2 Guión estructurado para el análisis de los libros de texto

En una primera época, la búsqueda de los fenómenos en los libros de texto se realizó de manera conjunta para el trabajo de Claros (2010) y para la presente memoria de investigación. Cuando disgregamos el trabajo para incorporar selectivamente el contenido en dos tesis doctorales diferentes, generamos, para cada una de ellas, un estudio de libros de texto. El guión estructurado utilizado fue esencialmente el mismo porque compartimos objetivos de nuestros estudios de libros de texto no universitarios.

Estos objetivos son: (a) dar información que permita recuperar cada documento; (b) transmitir de manera comprensible nuestro método de trabajo; (c) permitir la posibilidad de retroceder a lo largo del proceso seguido; (d) establecer el contexto de un comentario o una crítica de la investigadora; y (e) hacer posible una replicación de nuestro estudio.

Para lograr esos objetivos, estructuramos el análisis mediante cuatro criterios que permiten sistematizar la clasificación e interpretación de los datos obtenidos. Dichos criterios los llamamos, respectivamente: *ficha, secuenciación, fenómenos y resúmenes*; los describimos a continuación.

Criterio Ficha: incluye información objetiva sobre el libro de texto. Para satisfacer este requisito hemos usado siete subcriterios, cuyo contenido detallado se indica en la Tabla 4.3 (página siguiente).

Criterio Secuenciación: cada fragmento del libro en el que el autor desarrolla un contenido matemático único y que resulta cómodo de desglosar, lo llamamos *unidad de información*.

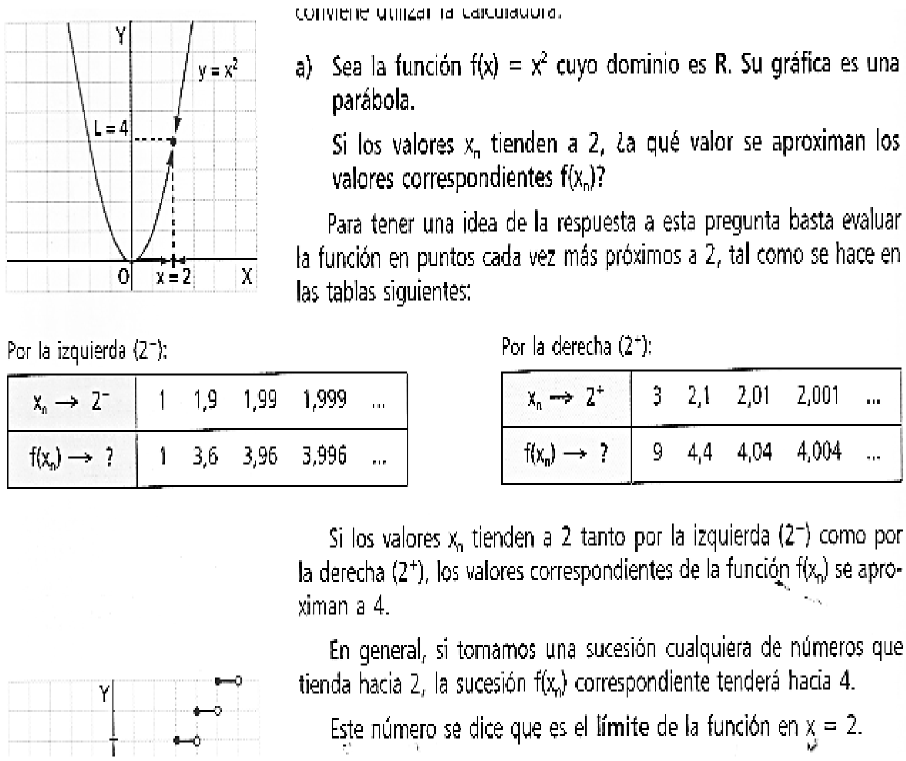
Los autores suelen usar varias unidades de información para la presentación y desarrollo de un contenido matemático.

Las unidades de información las hemos numerado correlativamente desde 01 en adelante; esta secuencia numérica forma parte de un código, como se explica en el epígrafe 4.1.3. Buscamos los fenómenos dentro de las unidades de información.

Tabla 4.3 *Subcriterios correspondientes al Criterio 1º: Ficha del libro*

Denominación	Descripción	Observaciones
Código	Identificador único del objeto físico.	Hemos preferido una secuencia cronológica, ver 4.2.3
Autor o autores	Nombres y Apellidos	Recogido(s) de la portada o de la primera página.
Título	Título del libro	Recogido literalmente de la portada o de la primera página. Si se trata de una colección, ésta no se indica, pero si se trata de una obra en varios volúmenes, se menciona el volumen.
Editorial	Nombre	Recogido literalmente de la portada o de la primera página
Año	Cuatro dígitos	Fecha de publicación del ejemplar manejado.
Ubicación	Posición física	Nombre de la biblioteca en la que localizamos el libro
Información sobre el límite de funciones	Capítulo / Apartado y páginas	Indicamos si el libro tiene un capítulo dedicado al límite de funciones o si éste se halla inmerso en un capítulo dedicado a otro asunto.

Las Figuras 4.1 y 4.2 son ejemplos de unidades de información sin codificar.



conviene utilizar la calculadora.

a) Sea la función $f(x) = x^2$ cuyo dominio es **R**. Su gráfica es una parábola.

Si los valores x_n tienden a 2, ¿a qué valor se aproximan los valores correspondientes $f(x_n)$?

Para tener una idea de la respuesta a esta pregunta basta evaluar la función en puntos cada vez más próximos a 2, tal como se hace en las tablas siguientes:

Por la izquierda (2^-):

$x_n \to 2^-$	1	1,9	1,99	1,999	...
$f(x_n) \to ?$	1	3,6	3,96	3,996	...

Por la derecha (2^+):

$x_n \to 2^+$	3	2,1	2,01	2,001	...
$f(x_n) \to ?$	9	4,4	4,04	4,004	...

Si los valores x_n tienden a 2 tanto por la izquierda (2^-) como por la derecha (2^+), los valores correspondientes de la función $f(x_n)$ se aproximan a 4.

En general, si tomamos una sucesión cualquiera de números que tienda hacia 2, la sucesión $f(x_n)$ correspondiente tenderá hacia 4.

Este número se dice que es el **límite** de la función en $x = 2$.

Figura 4.1 Unidad de información

El fragmento de la Figura 4.1 constituye una unidad de información. El autor presenta una idea general de límite finito de una función en un punto. Para lograrlo, utiliza un ejemplo y lo analiza a través de diferentes sistemas de representación.

Diremos que una función $f(x)$ tiene por límite b cuando x tiende a a, y lo simbolizaremos por

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

cuando para todo número positivo ε (por pequeño que sea) exista un número positivo δ, dependiente de ε, tal, que se cumpla:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Fíjate bien en la expresión $0 < |x - a| < \delta$. Que el valor absoluto de $x - a$ sea menor que δ equivale a decir que x se acerque a a en menos de lo que vale δ, pero además el valor absoluto de $x - a$ ha de ser mayor que 0, lo cual es equivalente a decir que 7.

Es decir, la implicación de la definición se refiere a los valores de x que, *siendo distintos de a*, se hallan a una distancia de a menor que el valor de δ. Para ellos se ha de cumplir que $|f(x) - b| < \varepsilon$, es decir, que $f(x)$ se aproxime a b en menos de lo que vale ε.

Al resaltar el carácter de «arbitrariamente pequeño» de ε, queremos destacar que podemos «pedir» a $f(x)$ que se acerque a b tanto como queramos, siempre que «concedamos» a x estar tan cerca de a como necesite. En nada influye lo que le ocurra a $f(x)$ cuando x valga a, es decir, el valor de $f(a)$: tanto da que $f(a) = b$, como que $f(a) \neq b$, o que $f(a)$ no exista.

En cambio, en la definición no se ha puesto que $|f(x) - b|$ deba ser mayor que 0. Por tanto, nada impide que $f(x)$ valga b para valores de x cercanos a a.

Figura 4.2 Unidad de información

El fragmento de la Figura 4.2 constituye una unidad de información; el autor propone una definición de límite finito de una función en un punto. Usa palabras para explicar los símbolos y expresiones simbólicas que la constituyen.

Criterio Fenómenos: Nuestro objetivo es encontrar los fenómenos *ADI* e *IVF* en las unidades de información. Para identificar inequívocamente estos fenómenos hemos usado dos ideas:

(1) Ubicar el fenómeno dentro del libro de texto estudiado. Con objeto de conseguir una etiqueta única para cada fenómeno observado, hemos concatenado el código del libro, el código de la secuenciación y el número de orden del fenómeno dentro de su unidad de información.

(2) Asociar este código de ubicación y la descripción detallada de lo observado. Elaboramos, así, una explicación que incluye:

-Si ha lugar, la presencia del fenómeno en el libro; en caso afirmativo, presentamos un fragmento escaneado del libro en el que aparece el citado fenómeno.

-Dos decisiones que el autor del libro ha podido tomar y que enunciamos como preguntas: (a) ¿Qué formato (definición, ejemplo) ha usado el autor? (b) ¿Qué sistema de representación (verbal, gráfico, tabular, simbólico) ha elegido el autor?

El código completo de los fenómenos observados se describe en el epígrafe 4.1.3.

Criterio Resúmenes: Para resumir la información extraída de cada libro, utilizamos: dos tipos de cuadros, que sintetizan el trabajo de análisis realizado, y un breve comentario. En el primer tipo de cuadro, posicionamos el fenómeno en el marco del libro; en el segundo tipo de cuadro, considerando las dieciséis posibilidades descritas en el apartado 3.7, recolocamos los fenómenos observados, utilizando para ello una tabla análoga a la Tabla 3.7.

La Tabla 4.4 describe la estructura y contenidos del primer tipo de cuadro.

Tabla 4.4. *Estructura y contenidos del primer tipo de cuadro*

Capítulo	Número del capítulo
Página	Número de la página
Figura	Indica si se usó o no una figura. En caso afirmativo, referencia en el libro[1]
Línea inicial	Se usan dos dígitos
Línea final	Se usan dos dígitos
Código	El código de ubicación del fenómeno. (Véase 4.1.3)
Fenómeno	El código del fenómeno. (Según 3.3)

[1] Para los propósitos de estos cuadros, consideramos figuras tanto las gráficas como las tablas.

La Tabla 4.5 muestra un ejemplo del primer tipo de cuadro.

Tabla 4.5 *Un ejemplo del primer tipo de cuadro*

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicio	Línea Fin	Código Ubicación	Código de Fenómeno
13	63	No	01	12	LF97006.02.03	IVF S-E

Leído de izquierda a derecha, por columnas, significa que en el capítulo 13º, página 63, líneas 1ª a 12ª, sin apoyo gráfico, o tabular, en el libro LF97006, 2ª unidad de información (02), como tercer fenómeno (03), hemos observado el fenómeno IVF en el sistema de representación simbólico (S) y con un formato de ejemplo (E).

El segundo tipo de cuadro tiene la estructura de la Tabla 3.7; en él indicamos el código de ubicación de fenómeno detectado. Para el ejemplo de la Tabla 4.5, en el segundo tipo de cuadro correspondiente, se añadirá lo indicado en la Tabla 4.6.

Tabla 4.6 *Ítem que se añade al cuadro-resumen del 2º tipo como resultado de la dicho en la Tabla 4.4*

	V		G		T		S	
ADI								
IVF							LF97006.03	
	E	D	E	D	E	D	E	D

Terminamos el análisis de cada libro con un breve comentario sobre lo observado.

El diseño de este plan de trabajo permite retroceder a lo largo del proceso, replicarlo y establecer claramente el contexto de un comentario o de una crítica.

4.1.3 Código de ubicación

A continuación explicamos el código asignado a los libros, a la secuenciación y a los fenómenos; la concatenación de todos ellos es lo que llamamos "código de ubicación" de cada fenómeno observado en la muestra.

Código asignado a cada libro

Este código, que llamamos "código de libro" identifica el libro de forma inequívoca dentro de la muestra. Tiene en cuenta: el soporte; el contenido matemático; la década de publicación; y el número de orden dentro de la muestra.

El soporte no es variable en nuestra investigación, porque solamente hemos usado libros de papel (abreviados L); sin embargo, con el avance, por ejemplo de los soportes electrónicos, será conveniente tenerlo en cuenta.

Del mismo modo añadimos el contenido matemático: el límite finito de una función en un punto (F), para especificar lo que queríamos buscar en cada libro. También es constante en la muestra.

La indicación de la década permite cotejar nuestros resultados con los de Claros (2010).

Por último, hemos establecido un número de orden, dentro de cada década, que consta de dos dígitos: considerando la población completa en el territorio Español, no hallaremos más de 99 libros diferentes de los que nos interesan.

La Tabla 4.7 ilustra la lectura del código de libro.

Tabla 4.7 *Explicación del código de libro*

Indicadores	Soporte	Contenido	Década	Orden, en la década
Código	L	F	XYZ	TU
Ejemplo	L	F	970	04
			Tres dígitos	Dos dígitos

El código LF97004 remite al libro (L) en el que hemos estudiado el límite finito de una función en un punto (F); fue publicado en la década que comenzó en los 70 (970) y ocupa cronológicamente el cuarto (04) lugar, en la muestra, de los publicados en esa década.

Código asignado a unidades de información y a fenómenos. Simplificación de códigos de ubicación.

Para identificar dentro de un libro una unidad de información concatenamos el código de libro y el código de dos dígitos correspondiente a esa unidad.

Consideremos el ejemplo de la Tabla 4.8. Un código como LF97006.02 remite a la segunda unidad de información del libro ya indicado. Los detalles del fenómenos o fenómenos hallados en esta unidad de información, se encontrarán en el "estudio detallado" y, brevemente, en el cuadro-resumen del tipo 1º. Los sistemas de representación y los formatos se han codificado con las iniciales correspondientes colocadas a continuación de la abreviatura del fenómeno, constituyendo así un *código de fenómeno*.

Tabla 4.8 *Copia de la Tabla 4.5, 2ª fila*

13	63	No	01	12	LF97006.02.03	IVF S-E

En una unidad de información es posible observar varios fenómenos; por ello, al código de la unidad de información hemos añadido, por la derecha, el código con el número de orden del fenómeno hallado. Siguiendo con el caso anterior, tiene sentido el siguiente código de ubicación de un fenómeno: LF97006.02.03. Significa que nos referimos al tercer fenómeno hallado en la segunda unidad de información del libro indicado.

Después de que hubimos asignado la totalidad de códigos en los libros de la muestra, observamos que, en ocasiones, a cada unidad de información seleccionada, le correspondía únicamente un fenómeno. Este hecho sucede con una frecuencia suficiente como para justificar el siguiente *criterio de simplificación en la escritura de códigos*: cuando hallamos un solo fenómeno en una unidad de información, omitimos el código de posición de éste. Según el contexto, hablamos de la unidad de información o del fenómeno único que hemos observado en ella. Como es obvio, el criterio de simplificación de códigos no se aplicará si en una unidad de información detectamos más de un fenómeno.

Por ejemplo, en uno de los libros incluidos en el anexo A4.1, observamos los siguientes códigos de ubicación de fenómenos: LF97005.04, LF97005.03.02 y LF97005.03.03; en el primer código de ubicación hemos aplicado el criterio de simplificación, ya que solamente hemos encontrado un fenómeno en la 4ª unidad de información. Sin embargo, en la 5ª unidad de información, hemos hallado varios fenómenos y no aplicamos el criterio de simplificación de códigos.

Asignación efectiva de códigos de fenómenos

La asignación de códigos de fenómenos es un proceso casi siempre fácil, cómodo y tedioso. Ocasionalmente, surgen situaciones de difícil asignación. Veamos algunos ejemplos de asignaciones discutibles y las razones de esa asignación.

(1) El uso de las expresiones "tan próximo como queramos", "se aproximan tanto como queramos", "suficientemente próximos" y "convenientemente próximos", exigió poner sumo cuidado a la hora de asociarlas al uso de un fenómeno u otro El fragmento codificado como LF98001.03.03 se presenta mediante el sistema de representación simbólico, por lo que asignamos el fenómeno IVF.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, *existe un* $\delta > 0$ *tal que,*

$$x \in D \quad y \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Figura 4.3 Fragmento LF98001.03.03

Por su parte el fragmento codificado como LF98001.03.02, incluye las expresiones "tan próximo como queramos" y "suficientemente próximo"

La función f converge hacia L en x_0, si podemos hacer f(x) tan próximo a L como queramos haciendo que x esté suficientemente próximo a x_0.

Figura 4.4 Fragmento LF98001.03.02

Ambos fragmentos permiten observar el proceso de ida y vuelta que caracteriza el fenómeno IVF, ya que se parte de la variable dependiente y se llega a la independiente para después volver, aunque observemos diferentes grados en la escala de rigor usada por el autor para expresarlos.

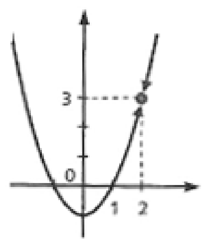
En el fragmento LF97006.01.01, se utilizan expresiones análogas, pero no se observa el proceso de "ida y vuelta" que caracteriza al fenómeno IVF; en su lugar, se tiene un camino que va de la variable independiente a la dependiente, lo que lleva a asignarle el fenómeno ADI.

Si cuando la variable independiente x se aproxima tanto cuanto queramos al número real l, los correspondientes valores de f(x) también se aproximan cuanto queramos al número L, decimos que el límite de la función f(x) es el número L cuando x tiende a l. Pero esta definición es intuitiva

Figura 4.5 Fragmento LF97006.01.01

(2) En ocasiones, el sistema de representación gráfico genera dificultades de asignación.

El fragmento codificado como LF99001.02.04, sugiere sin dificultad el fenómeno ADI.



$f(x) = x^2 - 1.$

Figura 4.6 Fragmento LF99001.02.04

En cambio, el fragmento codificado como LF97004.01.03, utiliza trazos verticales y horizontales que sugieren el proceso de "ida y vuelta" y, por tanto, el fenómeno IVF.

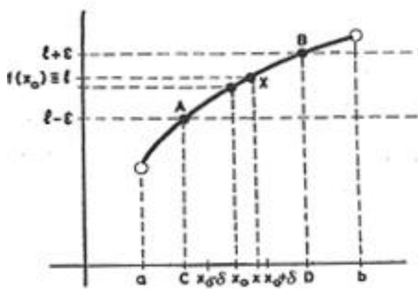


Figura 4.7 Fragmento LF97004.01.03

En el fragmento codificado como LF98001.02.09 también se emplean trazos verticales y horizontales no señalizados en los ejes y la flecha vertical que "toca" a la gráfica en x_0=2 parece indicar el camino de la variable independiente a la dependiente característico del fenómeno ADI.

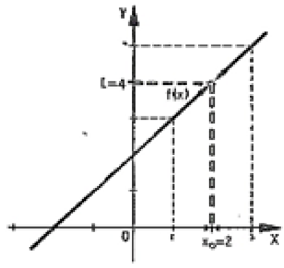


Figura 4.8 Fragmento LF98001.02.09

(3) En algunas ocasiones los autores emplean, a la vez, en una misma expresión del fenómeno, varios sistemas de representación. Ibáñez y Ortega (2004) observan que, "los diferentes sistemas de representación necesitan complementarse" (p.51). Sin embargo, los libros de texto no precisan las razones por las que sus autores han decidido enriquecer puntualmente las representaciones usadas. Este hecho genera ciertos inconvenientes al caracterizar uno de los sistemas de representación. Por ejemplo, en el fragmento codificado como LF97006.01.02, se emplea el sistema de representación verbal y el simbólico. La investigadora decidió asignar el sistema de representación verbal por entender que tenía más peso relativo dentro del fragmento.

Decimos que la función $f(x)$ tiene por límite L cuando x tiende a 1, si fijado un número real positivo ε se puede determinar un número real positivo δ dependiente de ε, tal que, para todos los valores de x que verifican la condición $0 < |x - 1| < \delta$, también se verifica que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Figura 4.9 Fragmento LF97006.01.02

(4) Por último, en el fragmento codificado como LF94001.01.01, se utilizan dos listas e, implícitamente, parece esperarse su emparejamiento. Le hemos asignado el sistema de representación tabular.

$x=0{,}9$	$f(x)=0{,}47$
$x=1{,}1$	$f(x)=0{,}52$
$x=0{,}99$	$f(x)=0{,}497$
$x=1{,}01$	$f(x)=0{,}502$
$x=0{,}999$	$f(x)=0{,}4997$
$x=1{,}001$	$f(x)=0{,}5002$
$x=0{,}999$	$f(x)=0{,}49997$

Figura 4.10 Fragmento LF94001.01.01

4.2 Fenómenos observados en un libro de texto

Este apartado contiene la información que, siguiendo el guión presentado en el apartado 4.1, hemos obtenido del libro que ocupa el lugar 15º de la muestra (Tabla 4.1), obtenido por sorteo. No se han numerado las tablas, ya que solamente pretenden ilustrar el guión presentado en 4.1. La correspondiente información, obtenida de los 28 libros de la muestra, se halla en el Anexo A4.1.

LF98001 Ficha

Código	LF98001
Autor	Vizmanos-Anzola-Primo
Titulo	Funciones-2 Matematicas 2º B.U.P. Teoría y Problemas
Editorial	S.M (Madrid)
Año	1981
Ubicación	I.E.S Cristóbal de Monroy. Alcalá de Guadaira.
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite de funciones. Capítulo XV. Funciones reales convergentes en R. Páginas 244-255

LF98001 Secuenciación

1) Introducción
2) "*Concepto de función convergente".* Se presentan tres ejemplos para introducir una idea intuitiva de límite: $f(x)=x^2$; $f(x)=E[x]$, siendo E la parte entera; $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ todas en el punto $x_0=2$. Véase LF9801.02.01; LF9801.02.02; LF9801.02.03; LF9801.02.04; LF9801.02.05; LF9801.02.06; LF9801.02.07; LF9801.02.08; LF9801.02.09; LF9801.02.10.
3) Definiciones métrica, simbólica ε-δ y topológica de límite finito de una función en un punto. Véase LF9801.03.01; LF9801.03.02; LF9801.03.03; LF9801.03.04.
4) Definición de límites laterales. Relación con el límite en un punto.
5) Límites de funciones elementales.

LF98001 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF98001.02.01 ADI V-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

«¿Si x se "aproxima hacia x_0" los valores correspondientes f(x) se "aproximan hacia un número real L" o no?».

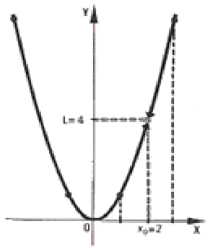
Fragmento código: LF98001.02.01

<u>LF98001.02.02 ADI T-E</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

Izquierda de x_0		Derecha de x_0
x	f(x)	x
1	1	
	9	3
1,5	2,25	
	6,25	2,5
1,8	3,24	
	4,84	2,2
1,9	3,61	
	4,41	2,1
1,95	3,8025	
	4,2025	2,05
1,99	3,9601	
	4,0401	2,01
1,999	3,996001	
	4,004001	2,001
1,9999	3,9996	
	4,0004	2,0001
....	....	....

Fragmento código: LF98001.02.02

<u>LF98001.02.03 ADI G-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98001.02.03

<u>LF98001.02.04 ADI V-E</u>. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

De esta tabla podemos deducir que si nos aproximamos a $x_0 = 2$, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores correspondientes de la función f, se aproximan hacia L = 4. Dicho de

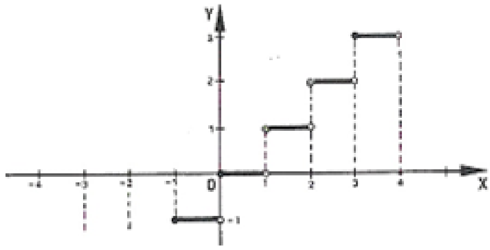
Fragmento código: LF98001.02.04

<u>LF98001.02.05 ADI T-E</u>. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

Izquierda de x_0		Derecha de x_0
x	f(x)	x
1	1	
	3	3
1,5	1	
	2	2,5
1,8	1	
	2	2,2
1,9	1	
	2	2,1
1,95	1	
	2	2,05
1,99	1	
	2	2,01
1,999	1	
	2	2,001
1,9999	1	
	2	2,0001
....	....	....

Fragmento código: LF98001.02.05

<u>LF98001.02.06 ADI G-E</u>. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98001.02.06

<u>LF98001.02.07 ADI V-E</u>. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Observando la tabla podemos deducir que los valores f(x) no se aproximan a ningún número real fijo; por la izquierda de $x_0 = 2$ se aproximan hacia 1 y por la derecha se aproximan hacia 2.

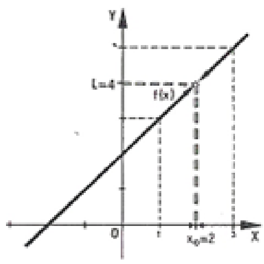
Fragmento código: LF98001.02.07

<u>LF98001.02.08 ADI T-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

Izquierda de x_0		Derecha de x_0
x	f(x)	x
1	3	
	5	3
1,5	3,5	
	4,5	2,5
1,8	3,8	
	4,2	2,2
1,9	3,9	
	4,1	2,1
1,95	3,95	
	4,05	2,05
1,99	3,99	
	4,01	2,01
1,999	3,999	
	4,001	2,001
1,9999	3,9999	
	4,0001	2,0001
....	....	....

Fragmento código: LF98001.02.08

<u>LF98001.02.09 ADI G-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98001.02.09

LF98001.02.10 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Observando la tabla podemos deducir que f(x) se **aproxima** hacia L = 4 cuando x se aproxima hacia $x_0 = 2$, tanto por la derecha como por la izquierda de $x_0 = 2$.

Fragmento código: LF98001.02.10

LF98001.03.01 ADI V-D. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

cuando a valores x próximos a x_0 corresponden por f valores f(x) próximos a L.

Fragmento código: LF98001.03.01

LF98001.03.02 IVF V-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

La función f converge hacia L en x_0, si podemos hacer f(x) tan próximo a L como queramos haciendo que x esté suficientemente próximo a x_0.

Fragmento código: LF98001.03.02

LF98001.03.03 IVF S-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

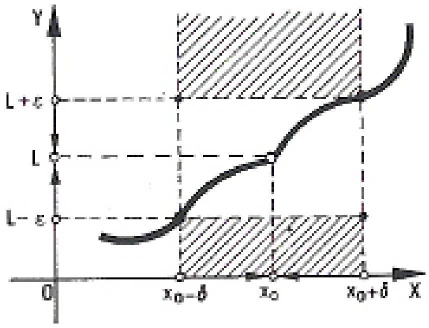
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que,

$$x \in D \quad y \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Fragmento código: LF98001.03.03

LF98001.03.04 IVF G-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



Fragmento código: LF98001.03.04

LF98001 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XV	245		09	10	LF98001.02.01	ADI V-D
	245		22	22	LF98001.02.02	ADI T-E
	245	15.1	-	-	LF98001.02.03	ADI G-E
	246		01	02	LF98001.02.04	ADI V-E
	246		13	13	LF98001.02.05	ADI T-E
	246	15.2	-	-	LF98001.02.06	ADI G-E
	247		02	03	LF98001.02.07	ADI V-E
	247		09	09	LF98001.02.08	ADI T-E
	247	15.3	-	-	LF98001.02.09	ADI G-E
	247		10	11	LF98001.02.10	ADI V-E
	248		09	09	LF98001.03.01	ADI V-D
	248		11	12	LF98001.03.02	IVF V-D
	248		24	28	LF98001.03.03	IVF S-D
	248	15.4	-	-	LF98001.03.04	IVF G-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF98001.02.04 LF98001.02.07 LF98001.02.10	LF98001.02.01 LF98001.03.01	LF98001.02.03 LF98001.02.06 LF98001.02.09		LF98001.02.02 LF98001.02.05 LF98001.02.08			
IVF		LF98001.03.02		LF98001.03.04				LF98001.03.03
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF98001 Comentario

Los autores de este libro tratan los dos fenómenos. Para presentar el fenómeno ADI, usan los sistemas de representación verbal, tabular y gráfico, principalmente, mediante ejemplos. Para presentar el fenómeno IVF, apelan a sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico, principalmente mediante definiciones.

El análisis completo y detallado de los 28 libros de texto de la muestra se presenta en el Anexo A4.1.

4.3 Los fenómenos ADI e IVF en la muestra de libros

En este apartado hacemos un breve análisis descriptivo de la muestra; hemos elaborado tablas de frecuencias absolutas para los fenómenos ADI (epígrafe 4.3.1) e IVF (epígrafe 4.3.2). A partir de los datos recogidos, hemos analizado el uso relativo de los fenómenos ADI e IVF en los sistemas de representación (epígrafe 4.3.3) y hemos establecido relaciones entre los fenómenos ADI e IVF (epígrafe 4.3.4).

4.3.1 Tabla de frecuencias del fenómeno ADI

En la Tabla 4.9 (página siguiente) reunimos información obtenida de la muestra, relativa al fenómeno ADI. La primera columna se refiere al código de fenómeno; la segunda, a la frecuencia asociada a la muestra y la tercera remite a los códigos de ubicación. Los códigos de fenómeno se describieron en el capítulo 3º; los códigos de ubicación se explicaron en 4.1.3 y se presentan en el anexo A4.1, con el estudio detallado de la muestra. La Figura 4.3 (página siguiente) resume e ilustra la información de la Tabla 4.9.

Los siguientes comentarios sobre el fenómeno ADI se basan en el contenido de la Tabla 4.9 y de la Figura 4.3.

- El fenómeno ADI, en el sistema de representación verbal y el formato ejemplo, es el de mayor frecuencia absoluta (31), constituyendo la moda de la distribución de frecuencias.
- Otros códigos de fenómeno que sobresalen en frecuencia absoluta son ADI T-E (22) y ADI V-D (18).
- De los 8 códigos de fenómeno posibles, hay dos que no se observan en ninguno de los libros estudiados: ADI T-D y ADI S-E.
- Cuando los autores de la muestra usan el formato definición, presentan el fenómeno ADI apoyándose principalmente en la representación verbal.
- Cuando los autores de la muestra usan el formato ejemplo, presentan el fenómeno ADI usando las representaciones verbal, gráfica y tabular.
- El fenómeno ADI en el sistema de representación simbólico, solo aparece una vez en el caso de una definición.

Tabla 4.9 *Recuento del fenómeno ADI*

Código de fenómeno	Frecuencia (Recuento)	Códigos de ubicación
ADI V-E	31	LF93003.01.04, LF93003.01.05, LF96003.01.01, LF97003.03.01, LF97004.01.04, LF98001.02.04, LF98001.02.07, LF98001.02.10, LF98002.01.01, LF98002.01.02, LF98004.02.01, LF98004.02.04, LF98005.01.02, LF98005.05, LF98006.05.01, LF98006.06.02, LF98007.02.01, LF99001.02.02, LF99001.02.07, LF99003.01.01, LF99003.01.02, LF99003.01.04, LF99003.02.02, LF99003.02.04, LF00002.04.01, LF00003.07.04, LF00003.07.05, LF00003.07.06, LF0004.01, LF0004.07.03, LF0004.07.05
ADI V-D	18	LF93003.01.01, LF94001.02, LF97001.02.01, LF97003.01, LF97004.01.01, LF97006.01.01, LF98001.02.01, LF98001.03.01, LF98003.01.02, LF98004.01, LF98006.02.01, LF99001.02.01, LF99001.02.08, LF99002.03.01, LF99002.03.02, LF00001.01, LF00002.04.04, LF00003.08.01
ADI G-E	14	LF98001.02.03, LF98001.02.06, LF98001.02.09, LF98004.02.03, LF98005.01.01, LF98006.06.01, LF98007.02.02, LF99001.02.04, LF99001.02.06, LF99002.03.04, LF99002.03.06, LF00002.04.02, LF00004.07.02, LF0004.07.06
ADI G-D	2	LF00001.02, LF00003.08.02
ADI T-E	22	LF94001.01.01, LF97006.02.04, LF98001.02.02,LF98001.02.05, LF98001.02.08, LF98002.01.03,LF98004.02.02, LF98006.06.03, LF99001.02.03,LF99001.02.05, LF99002.03.03, LF99002.03.05,LF99003.01.03, LF99003.02.01, LF99003.02.05,LF00001.04, LF00002.04.03, LF00003.07.01,LF00003.07.02, LF00003.07.03, LF0004.07.01,LF0004.07.04
ADI T-D	0	No observado en la muestra
ADI S-E	0	No observado en la muestra
ADI S-D	1	LF00003.08.03

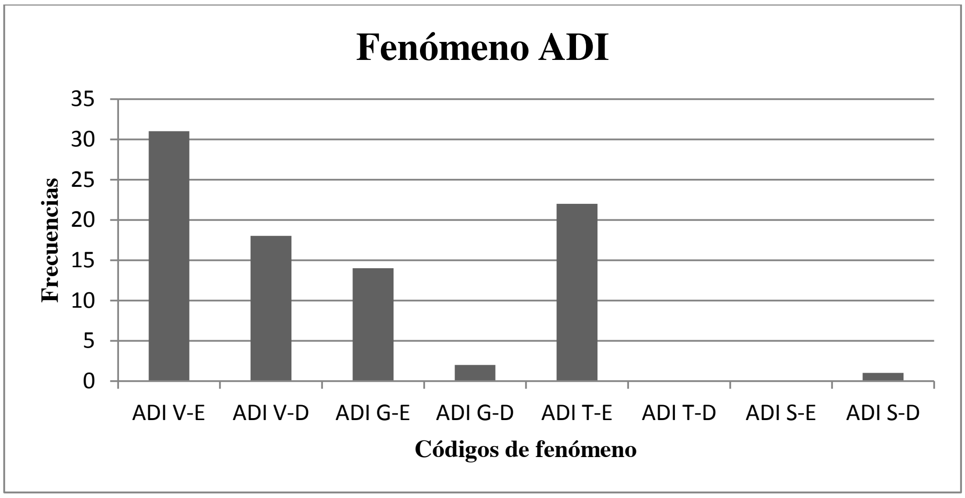


Figura 4.11 Fenómeno ADI en la muestra de libros

- El fenómeno ADI en el sistema de representación tabular con el formato definición y en el sistema de representación simbólica con el formato ejemplo, no se ha observado en la muestra estudiada.

Si en la Tabla 4.9 sumamos las frecuencias absolutas asociadas al fenómeno ADI en cada sistema de representación, agregando los formatos, observamos:

- Para presentar el fenómeno ADI en los libros de texto de la muestra, se usan, preferentemente los sistemas de representación verbal (49 ocurrencias), tabular (22) y gráfico (16); hay testimonio de uso del sistema de representación simbólico (1).

Si en la Tabla número 4.9 sumamos las frecuencias absolutas asociadas al fenómeno en cada formato, agregando los sistemas de representación, observamos:

- Para presentar el fenómeno ADI, en los libros de texto de la muestra, se usa, preferentemente, el formato ejemplo (67 ocurrencias) y, en menor medida, el formato definición (21 ocurrencias). La razón de ocurrencias es prácticamente de 7:2.

4.3.2 Tabla de frecuencias del fenómeno IVF

Para analizar el fenómeno IVF hemos construido la Tabla 4.10 y la Figura 4.4, página siguiente. En su diseño son análogas a la Tabla 4.9 y a la Figura 4.3, respectivamente, presentadas en 4.3.1.

- El fenómeno IVF, en el sistema de representación verbal y el formato definición, es el de mayor frecuencia absoluta (21), constituyendo la moda de la distribución de frecuencias.
- Otros códigos de fenómeno que sobresalen en frecuencia absoluta son IVF S-D (17) e IVF S-E (15).
- De los 8 códigos de fenómeno posibles, hay dos que no se observan en ninguno de los libros estudiados: IVF T-E e IVF T-D.

Tabla 4.10 *Recuento del fenómeno IVF*

Código de fenómeno	Frecuencia (Recuento)	Códigos de ubicación
IVF V-E	12	LF93003.01.03, LF94001.01.02, LF94001.01.03, LF96003.01.03, LF97002.03.01, LF97003.03.02, LF97004.01.05, LF98002.02.01, LF98004.06.01, LF98004.06.03, LF98007.02.03, LF99002.04.04
IVF V-D	21	LF93001.04, LF93002.04, LF93003.01.02, LF94001.06, LF96002.01.01, LF96003.02.01, LF96004.02.01, LF97001.02.02, LF97002.03.02, LF97003.02.02, LF97004.01.02, LF97005.03.01, LF97006.01.02, LF98001.03.02, LF98002.03.01, LF98004.05, LF98006.02.02, LF98006.05.02, LF99002.04.01, LF99002.05.02, LF99003.02.03
IVF G-E	8	LF96003.01.02, LF97003.03.03, LF97004.01.06, LF97006.02.02, LF98002.02.02, LF98002.03.02, LF98004.06.02, LF99002.04.05
IVF G-D	12	LF94001.03.02, LF96002.01.02, LF96003.02.02, LF96004.01, LF96004.02.03, LF97001.02.03, LF97004.01.03, LF97004.01.07, LF97005.04, LF98001.03.04, LF98002.03.05, LF99002.04.02
IVF T-E	0	No observado en la muestra
IVF T-D	0	No observado en la muestra
IVF S-E	15	LF94001.01.04, LF94001.04, LF96002.01.03, LF97004.02.02, LF97005.03.02, LF97005.03.03, LF97006.02.01, LF97006.02.03, LF98002.03.04, LF98003.01.03, LF98004.08, LF98005.06.01, LF98005.06.02, LF98005.06.03, LF99002.04.06
IVF S-D	17	LF94001.03.01, LF96001.01, LF96003.03, LF96004.02.02 LF97003.02.01 LF97004.01.08, LF97004.02.01, LF97005.02, LF97006.01.03, LF98001.03.03, LF98002.03.03, LF98003.01.01, LF98004.07, LF98005.02, LF98007.02.04, LF99002.04.03, LF99002.05.01

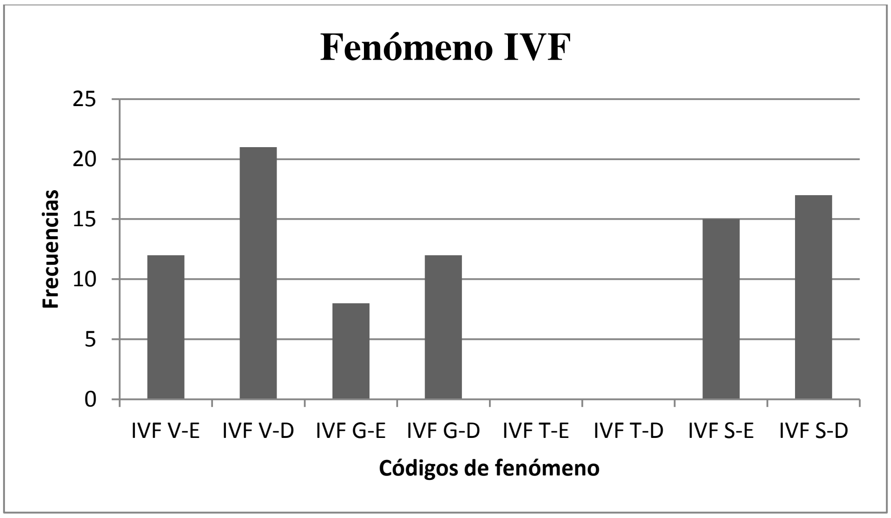


Figura 4.12 Fenómeno IVF en la muestra de libros

- El sistema de representación tabular no se utiliza, para el fenómeno IVF, en ningún libro de la muestra utilizada.

Si en la Tabla 4.10 sumamos las frecuencias absolutas asociadas al fenómeno IVF en cada sistema de representación, agregando los formatos, observamos:

- Para presentar el fenómeno IVF, en los libros de texto de la muestra, los sistemas de representación se usan en el siguiente orden de ocurrencias: verbal (33) simbólico (32) y gráfico (20). Uno de ellos (tabular) no se observa.

Si en la Tabla 4.10 sumamos las frecuencias absolutas asociadas al fenómeno IVF en cada formato, agregando los sistemas de representación, observamos:

- Para presentar el fenómeno IVF, en los libros de texto de la muestra, se usa el formato ejemplo (51 ocurrencias) algo más que el formato definición (34 ocurrencias). La razón de ocurrencias es, prácticamente de 3:2.

Si prestamos atención a cada sistema de representación, el uso relativo de los fenómenos ADI e IVF muestra algunas peculiaridades, que describimos a continuación.

- Sistemas de representación verbal y gráfico: El fenómeno ADI es más frecuente en el formato ejemplo, mientras que el fenómeno IVF es más frecuente en el formato definición.
- Sistema de representación tabular: El fenómeno ADI solo se utiliza en el formato ejemplo; no consta el uso del fenómeno IVF.
- Sistema de representación simbólico: El fenómeno ADI solo se usa en una ocasión en el formato definición; el fenómeno IVF se usa en los dos formatos.

La información obtenida al unificar las frecuencias absolutas de ambos fenómenos se recoge en la Tabla 4.11.

Tabla 4.11 *Frecuencias totales de los fenómenos*

Fenómeno	ADI	IVF
Frecuencias	88	85

La razón entre ellos es de aproximadamente 1. Asociamos este número con la razón de uso de ambos fenómenos por los autores de la muestra.

4.3.3 Relación entre los fenómenos ADI e IVF

Suponemos que los códigos de fenómeno respectivamente asociados a los fenómenos ADI e IVF son valores de variables aleatorias cualitativas, a las que llamamos respectivamente X e Y:

X = "Códigos del fenómeno ADI" = {ADI V-E, ADI V-D, ADI G-E, ADI G-D, ADI T-E, ADI T-D, ADI S-E, ADI S-D}. Asociamos a cada valor de X la frecuencia indicada en las columnas 1ª y 2ª de la Tabla 4.9.

Y = "Códigos del fenómeno IVF" = {IVF V-E, IVF V-D, IVF G-E, IVF G-D, IVF T-E, IVF T-D, IVF S-E, IVF S-D}. Asociamos a cada valor de Y la frecuencia indicada en las columnas 1ª y 2ª de la Tabla 4.10.

A continuación hemos construido una nueva tabla (Tabla 4.12) con los pares de frecuencias (X, Y), asociando un emparejamiento de los valores cuando coinciden las respectivas dos últimas letras de sus códigos.

Tabla 4.12 *Emparejamiento de variables*

		V-E	V-D	G-E	G-D	T-E	T-D	S-E	S-D
ADI	X	31	18	14	2	22	0	0	1
IVF	Y	12	21	8	12	0	0	15	17

Examinado la Tabla 4.12 concluimos:

1. A los fenómenos ADI e IVF, considerados globalmente, no les corresponden frecuencias numéricamente equilibradas, con la posible excepción del caso "V-D".(La columna "T-D" no es significativa por no haberse hallado ejemplos.) El "exceso" resulta favorable al fenómeno ADI en tres casos y al fenómeno IVF en otros tres.
2. Globalmente, el fenómeno ADI predomina, básicamente, en el sistema de representación verbal (con 49 ocurrencias) y en el formato ejemplo (con 31 ocurrencias), mientras que el fenómeno IVF predomina, básicamente, en el sistema de representación simbólico (con 32 ocurrencias) y en el formato definición (50 ocurrencias).
3. Algo más del 55% de las ocurrencias del fenómeno ADI se concentra en el sistema de representación verbal, tanto en el formato ejemplo como en el definición. En

cambio, algo más del 70% de las ocurrencias del fenómeno IVF se reparte entre dos sistemas de representación: simbólico y verbal.

4.4 Estudio de los fenómenos por períodos educativos

Para el estudio de la evolución de los fenómenos en los libros de texto a través del tiempo hemos tenido en cuenta el trabajo de Sierra, González y López (1999). Estos autores establecieron, en su estudio sobre el límite de funciones, tres períodos educativos que abarcan desde 1940 hasta 1995. Con objeto de ajustar la idea de estos autores con la muestra de libros manejados, consideramos cinco periodos educativos,.

- Periodo 1930 y 1939. Desde los años anteriores a la Guerra Civil Española hasta la terminación de ésta. (Periodo introducido por nosotros.)
- Periodo 1940 - 1966. Desde el final de la Guerra Civil Española hasta los primeros textos piloto para la introducción de la matemática moderna.
- Periodo 1967 - 1974. Desde la llamada "matemática moderna" hasta la promulgación del BUP.
- Periodo 1975 - 1994. Desde el B.U.P hasta el inicio de las modalidades de bachillerato establecidas en la LOGSE.
- Periodo 1995 - 2005. Desde el bachillerato LOGSE hasta la LOCE (2004) y la LOE (2005). (Periodo introducido por nosotros.)

A lo largo del apartado, estudiaremos los fenómenos ADI e IVF en los períodos educativos (epígrafes 4.4.1 y 4.4.2). Dedicaremos especial atención a observar la evolución, en dichos periodos, de los códigos de fenómenos ADI e IVF (epígrafes 4.4.3 y 4.4.4). Terminaremos el apartado 4.4 comparando la evolución en el uso de ambos fenómenos (epígrafe 4.4.5).

4.4.1 Tabla de frecuencias del fenómeno ADI

Hemos adoptado el convenio de sumar las ocurrencias de cada fenómeno para todos los libros que fueron publicados en el mismo período educativo. La Tabla 4.13 y la Figura 4.5 (página siguiente) ilustran la evolución del fenómeno ADI en los diferentes sistemas de representación y en los diferentes formatos, a lo largo de los periodos educativos indicados en la Tabla 4.1.

- Llama la atención el hecho de que en los tres primeros períodos educativos considerados, el fenómeno ADI es prácticamente inobservable (8 ocurrencias). En cambio, en los dos últimos periodos, se observa "masivamente" (81 ocurrencias).
- El fenómeno ADI principalmente se usa para definir el límite de una función en un punto en el sistema de representación verbal.

Tabla 4.13 *Códigos del fenómeno ADI observados en libros, agregados por períodos educativos*

	1930-1939	1940-1966	1967-1974	1975-1994	1995-2005	Recuento por código de fenómeno
ADI V-E	2	1		14	14	31
ADI V-D	1	1	1	8	7	18
ADI G-E				7	7	14
ADI G-D					2	2
ADI T-E		1		7	14	22
ADI T-D						0
ADI S-E						0
ADI S-D					1	1
Recuento por periodos	3	3	1	36	45	88

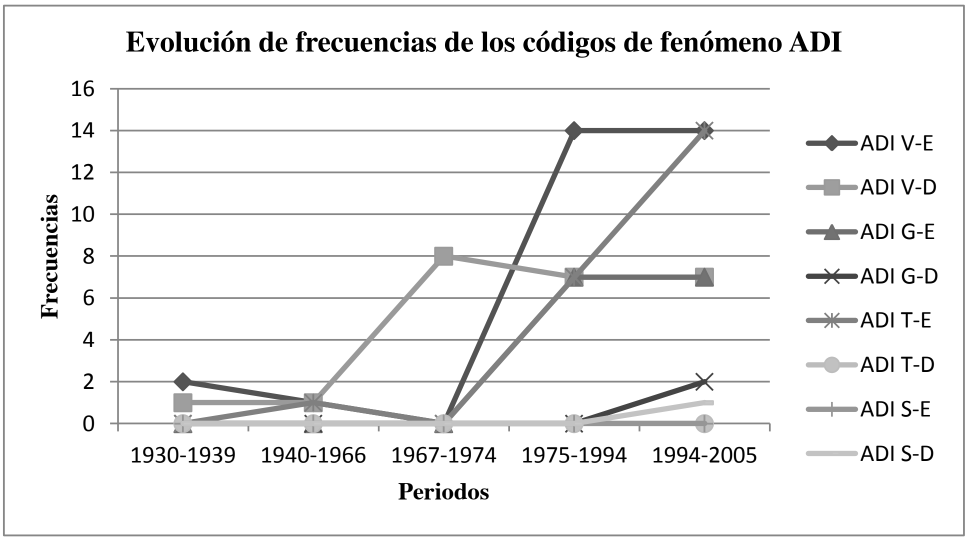


Figura 4.13 Evolución de frecuencias del código del fenómeno ADI

- El sistema de representación gráfico se usa con el fenómeno ADI, por primera vez, en el periodo 1975-1995, y desde entonces, lo observamos, con más o menos ocurrencias, en los libros de texto estudiados.
- Las ocurrencias del fenómeno con código ADI T-E han aumentado en los últimos años analizados; han ido creciendo, desde "cero" hasta igualar las ocurrencias del fenómeno con código ADI V-E.
- El código de fenómeno ADI V-E alcanza su frecuencia máxima en los periodos BUP y LOGSE (1975-2005); con anterioridad, el uso no existe o es muy escaso. Análogamente, y con menor número de ocurrencias, el código de fenómeno ADI V-D alcanza su frecuencia máxima en los periodos BUP y LOGSE (1975-2005); con anterioridad, no se observa su uso. Las frecuencias totales (31 y 18, respectivamente) corresponden a una razón del orden de 2:1. Este resultado sugiere que, cuando se usa el

sistema de representación verbal para presentar el fenómeno ADI, en todos los periodos educativos se observa una cierta preferencia hacia el formato ejemplo, frente al formato definición.

- El código de fenómeno ADI G-E solamente se usa en los periodos BUP y LOGSE (1975-2005). Por su parte, el código de fenómeno ADI G-D se observa ocasionalmente, solamente en el período LOGSE. Así, desde 1975 se constata el uso de la representación gráfica, principalmente, en el formato ejemplo.
- El código de fenómeno ADI T-E no se observa, prácticamente, antes del período 1975-1994. Desde entonces, aumenta considerablemente su uso, alcanzando el máximo número de ocurrencias en el periodo LOGSE. El código de fenómeno ADI T-D no se observa.
- Detectamos una sola ocurrencia del código de fenómeno ADI S-D, en el período LOGSE.

4.4.2 Tabla de frecuencias del fenómeno IVF

Usamos el mismo convenio que en 4.4.1: sumar las ocurrencias para todos los libros que fueron publicados en el mismo período educativo La Tabla 4.14 y la Figura 4.11 (página siguiente) ilustran la evolución del fenómeno IVF en los diferentes sistemas de representación y en los diferentes formatos, a lo largo de los periodos educativos indicados en la Tabla 4.1.

- El sistema de representación tabular no se utiliza en ningún formato ni periodo.
- 1975-94 es el periodo de apogeo del fenómeno IVF. Hay coincidencia con el periodo de apogeo del fenómeno ADI. (Véase Tabla 4.13 o Figura 4.5.)
- Durante el periodo que se inicia en 1995, los códigos de fenómeno IVF experimentan una considerable disminución con respecto al anterior período, pero se mantienen, aproximadamente, con respecto a los períodos precedentes (hasta 1974).
- El código de fenómeno IVF V-E tiene escasa frecuencia en todos los periodos, aumentando en el periodo BUP (1975-1994). El mismo comportamiento, con valores ligeramente mayores, corresponde al código de fenómeno IVF V-D. En ambos casos, se observa una cierta preferencia hacia el formato definición. Lo contrario ocurre con el fenómeno ADI en el mismo sistema de representación.
- Los códigos de fenómeno IVF G-E e IVF G-D tienen escasa frecuencia en todos los periodos, aumentando ligeramente en el periodo BUP (1975-1994). El formato definición es algo más usado que el formato ejemplo.

Tabla 4.14 *Códigos asociados al fenómeno IVF observados en libros, agregados por períodos educativos*

	1930-1939	1940-1966	1967-1974	1975-1994	1995-2005	Recuento por código de fenómeno
IVF V-E	1	3	1	6	1	12
IVF V-D	3	3	3	9	3	21
IVF G-E		1		6	1	8
IVF G-D		3	3	5	1	12
IVF T-E						0
IVF T-D						0
IVF S-E		3		11	1	15
IVF S-D		3	1	11	2	17
Recuento por periodos	4	16	8	48	9	85

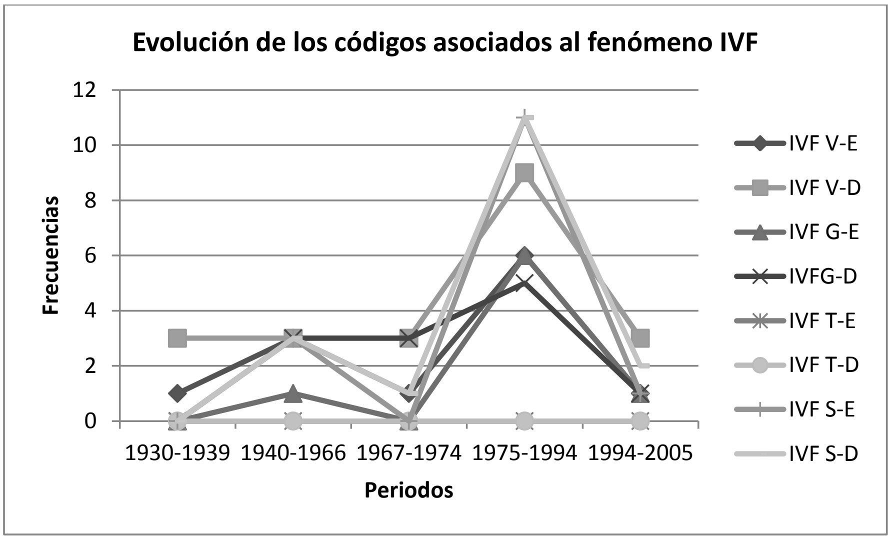


Figura 4.14 Evolución de frecuencias de los códigos asociados al fenómeno IVF

- Los códigos de fenómeno IVF S-E e IVF S-D tienen poca presencia en todos los periodos, excepto en el periodo BUP (1975-1994). Cuando se usan, los dos formatos se observan con el mismo número de ocurrencias, aproximadamente.

4.4.3. Comparación de fenómenos ADI e IVF en los periodos educativos

La observación de la constancia de los máximos de frecuencias en el periodo 1975-94, hace pensar que fue un periodo durante el cual los autores de libros de texto experimentaron diferentes maneras de presentar el límite finito de una función en un punto. Esto explica la variedad de ejemplos de fenómenos ADI e IVF en ese período.

Al reunir los recuentos totales por períodos de las tablas 4.13 y 4.14, obtenemos la Tabla 4.15 (página siguiente). Se observa claramente cómo, hasta el periodo 1975-1994, el fenómeno IVF supera en frecuencia al fenómeno ADI. La preponderancia de un fenómeno con respecto al otro se invierte desde 1995. Este cambio coincide en el tiempo con la promulgación de la LOGSE.

Tabla 4.15 *Recuentos totales por fenómeno en cada periodo*

	1933-1939	1940-1966	1967-1974	1975-1994	1995-2005
Fenómeno ADI	3	3	1	36	45
Fenómeno IVF	4	16	8	48	9

En esta tabla, la razón de ocurrencias de los fenómenos ADI e IVF se acerca a 5:1 (45:9 en recuentos) en el periodo 1995-2005; en el periodo 1933-1974 la misma razón es 1:4 (7:28 en recuentos). Parece sensato concluir que se constata un cambio en la presentación del límite finito de una función en un punto en los libros de texto de bachillerato y educación secundaria; cabe decir que éstos, de proponer un tratamiento del límite finito de una función en un punto basado en el fenómeno IVF, pasan a otro, basado en el fenómeno ADI.

4.5 Avances provisionales

Observamos discrepancias de planteamiento de la noción de límite finito de una función en un punto por parte de los autores respectivos. Hemos encontrado textos de orientación más formal, como LF96002, LF96004, LF97002 o LF97005, que emplean básicamente el fenómeno IVF, y otros textos de orientación más intuitiva como LF99001, LF00001, LF00002, LF00003 y LF00004 que emplean básicamente el fenómeno ADI.

4.5.1 Propuesta de períodos

Por lo que respecta al límite finito de una función en un punto, proponemos tres períodos básicos, cuya caracterización exponemos a continuación.

Período 1: Hasta los años 70. El fenómeno IVF fue el más usual en los libros de texto; muchos de éstos, ni siquiera se apoyaban en la componente intuitiva incorporada en la definición (fenómeno ADI).

Período 2: Década de los 80. En estos años, los autores afrontan un problema de decisión que se pone de manifiesto en la variedad de ensayos. El libro que hemos codificado como LF98004 es el que más claramente representa el problema de decisión afrontado por los autores; la frecuencia con la que aparecen los fenómenos ADI e IVF es de 6 y 5, respectivamente, prácticamente la misma. Los libros de la muestra en este periodo hacen ver ese problema de decisión.

Período 3: A partir de 1990. El uso del fenómeno ADI pasa a ser preponderante; de hecho, los cuatro últimos libros analizados únicamente manejan el fenómeno ADI. En este período se observa una reducción de los sistemas de representación, con aumento en la tendencia de uso del sistema de representación verbal.

Las explicaciones que encontramos para dar sentido a este cambio no son incompatibles entre sí; por ejemplo, las numerosas leyes educativas aprobadas y la poca aplicación extraescolar que los alumnos de secundaria encuentran para la definición, así como su dificultad, podrían esgrimirse a este respecto.

Usando ideas que hemos presentado en Claros, Sánchez y Coriat (en revisión) el paso en el uso del fenómeno IVF al fenómeno ADI como núcleo del límite finito de una función en un punto admite también una interpretación desde la investigación educativa, pues lleva a pensar que, en los niveles no universitarios de nuestro país, esta noción se desvincula definitivamente del pensamiento matemático avanzado y sitúa resueltamente en el pensamiento matemático elemental. (Véase el epígrafe 3.4.4.)

4.5.2 Comparación con los resultados obtenidos por Claros (2010)

Períodos

Claros (2010) afirma, refiriéndose al límite finito de sucesiones: "Si nuestra muestra fuera representativa, lo esencial de lo observado en el estudio de los libros de texto podría reducirse a tres etapas temporales" (p. 230). Nosotros confirmamos esta conclusión para el límite finito de funciones (4.5.1); en un primer período, los fenómenos IVF e i.v.s eran los más habituales en los libros de texto. Durante los años 80 se inicia un cambio en el que el peso de la frecuencia entre los fenómenos intuitivos (ADI y a.s.i) y los formales (IVF e i.v.s) prácticamente se iguala. Por último, en los libros analizados pertenecientes a los periodos más recientes, observamos un aumento considerable en el uso de los fenómenos intuitivos, en detrimento de los formales.

Fenómenos

Respecto a los fenómenos ADI y a.s.i observamos que se usa preferentemente el sistema de representación verbal (para el fenómeno ADI) y el gráfico (para el fenómeno a.s.i), en los libros de texto de ambas muestras; por lo que respecta a los formatos la razón del número de ocurrencias entre el formato ejemplo y el formato definición es alta en ambos casos: de 6:2, para el fenómeno ADI y de 10:1, para el fenómeno a.s.i.

Respecto a los fenómenos IVF e i.v.s observamos que se utilizan preferentemente los sistemas de representación verbal y simbólico, en los libros de texto de ambas muestras; por lo que respecta a los formatos la razón del número de ocurrencias entre el formato ejemplo y el formato definición es del orden de la unidad: de 3:2, para el fenómeno IVF y de 1:1, para el fenómeno i.v.f.

Al reunir la información obtenida en ambas investigaciones obtenemos la Tabla 4.16.

Tabla 4.16 *Frecuencias totales de los fenómenos*

	Límite finito de una función en un punto		Limite finito de una sucesión	
Fenómenos	ADI	IVF	a.s.i	i.v.s
Frecuencias	88	85	81	107

4.5.3 Aportaciones

Con nuestro estudio de libros de texto de educación secundaria en lo relativo al límite finito de una función en un punto, en este apartado hemos observado los fenómenos ADI e IVF en diferentes sistemas de representación y formatos.

Hemos caracterizado tres períodos en los que es posible describir una inversión en el énfasis dado por los autores de libros de texto a los fenómenos ADI e IVF y hemos propuesto una conexión de esta inversión con el PME y el PMA.

Anexos al Capítulo 4º

Incluimos en el anexo A4.1el estudio detallado de los 28 libros de texto que componen la muestra utilizada. El apartado 4.2 explica los criterios y códigos usados. Los resultados se han utilizado en los apartados 4.4 y 4.5.

Presentamos los libros estudiados mediante una secuencia cronológica estructurada con ayuda de los períodos indicados en la Tabla 4.1. Cada período comienza en una nueva página, al igual que el informe de cada libro.

En el anexo A4.2 presentamos fragmentos que empleamos en el Capítulo 5º para realizar entrevistas a profesores.

Anexo A4.1 Fenómenos hallados en cada libro

A4.1.1 Periodo 1933-1939

Tres son los libros analizados en este periodo. Son libros de texto de los años '30, y los tres se encuentran ubicados en el IES "Pedro Espinosa" (Antequera, Málaga).

LF93001Ficha

Código	LF93001
Autor	J. Rey Pastor
Titulo	Curso Cíclico de Matemáticas. Cálculo Infinitesimal. Tomo II
Editorial	Madrid-Buenos Aires. (Cuenca)
Año	1933
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera
Información sobre límites	Capítulo I. Lección primera. Límites e infinitésimos. Páginas 01-09

LF93001 Secuenciación

1) Números racionales: En el paso de fracción a decimal se usa el concepto de límite. Se seleccionan fracciones que tengan una expresión decimal infinita (periódico puro y periódico mixto), como por ejemplo se considera el número 0.3333.. con cualquier número de cifras, se afirma que nunca vale 1/3 pero sí que se va aproximando de manera que llega a diferir de 1/3 tanto como se quiera.
2) Números decimales con expresiones infinitas no periódicas: por ejemplo π.
La forma de hacerlo es considerando simultáneamente los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos a una circunferencia e ir aumentando el número de lados, de esta forma se construyen dos sucesiones cuyo límite se define como π.
3) Definición general del límite en el caso de sucesiones y funciones. Véase LF93001.04
Se hace una puntualización *"cuando la variable y es función se x, la sucesión de valores de y está determinada por los de x y hay que indicar si ésta toma valores que tienden a un número a, o bien crecen infinitamente"*
4) Definición de infinitésimos y propiedades de estos.
5) Cálculo de límites: límite de la suma y del producto, utilizando infinitésimos.
6) Aplicaciones de los infinitésimos y del límite en las ciencias físicas.

LF93001 Detalles de los fenómenos observados

Definición conjunta de límite de sucesiones y funciones.

> ble crece y decrece sin ley regular. Además de estas sucesiones *discretas* cuyos valores se pueden numerar: 1.º, 2.º, 3.º ...., hay otras sucesiones *continuas*, en que los valores están ordenados en correspondencia con los puntos de un segmento; por ejemplo, los valores de x^2 al tomar x todos valores desde 0 hasta 1. Pero cualquiera que sea la naturaleza de la variable y, las características del límite son:

Se expresa que la variable y tiende al límite l escribiendo:

$$\text{lím.}\, y = l \qquad \text{o bien} \qquad y \to l,$$

donde la letra y representa toda la sucesión de valores que puede tomar; cuando la variable y es función de x, la sucesión de valores de y está determinada por los de x y hay que indicar si ésta toma valores que tienden a un número a, o bien crecen infinitamente; en el primer caso anotaremos $x \to a$ debajo del símbolo lím., o bien aparte y en el 2.º caso pondremos $x \to \infty$. Es decir:

$$\lim_{x \to 0} y \qquad \lim_{x \to \infty} y$$

Fragmento código: LF93001

<u>LF93001.04 IVF V-D.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición. (Considerando la definición anteriormente dada)

1.ª El límite es un número, es decir, una *constante*. 2.ª La diferencia entre la variable y su límite llega a conservarse menor que cualquier número positivo prefijado, desde un término de la sucesión de valores de y en adelante.

Fragmento código: LF93001.04

LF93001 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
I	04	No	12	15	LF93001.04	IVF V-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI								
IVF		LF93001.04						
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF93001 Comentario

Como se dijo más arriba, Rey Pastor propuso unificar las definiciones de límite de sucesión y de funciones. Podríamos considerar que solo trata el fenómeno IVF, para presentarlo apela al sistema de representación verbal mediante una definición.

LF93002 Ficha

Código	LF93002
Autor	Félix Alonso Misol
Titulo	Elementos de Análisis Matemático y sus aplicaciones. Libro Primero: Teoría general de funciones y derivadas
Editorial	Sucesores de Rivadeneyra. (Madrid)
Año	1934
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera
Información sobre límites	Capítulo IV. Elementos de la teoría de límites. Páginas 92-126

LF93002 Secuenciación

1) Definición de límite finito de una sucesión. Comienza el apartado con una definición intuitiva de lo que se va a entender como límite de una variable y a continuación se prepara al lector para la definición formal.
2) Definición de límite infinito y de límite cero de una sucesión, a los que llamará infinitesimales.
3) Observaciones a la definición de límite de sucesiones: el límite puede pertenecer o no a la sucesión, nos acercamos al límite de manera continua o dando saltos
4) Definición de límite finito de una función en un punto por la derecha y se supone la definición análoga para el límite por izquierda. En un apartado de la misma página se hace la definición análoga en el caso del límite infinito en un punto. Véase LF93002.04
5) Caracterización del límite finito de una función por sucesiones, acompañada de la demostración utilizando un razonamiento por reducción al absurdo.
6) Teoremas y principios notables de la teoría de límites.

LF93002 Detalles de los fenómenos observados

LF93002.04 IVF V-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Supongamos una función $u = f(x)$ y consideremos un dominio de valores de la variable y en él un punto a que sea punto de acumulación sinistrorsum de los puntos de ese dominio superiores al a; $x > a$.

Después haremos un razonamiento idéntico para los puntos del dominio imaginando que a es punto de acumulación dextrorsum.

Imaginemos además que $f(x)$ está *definida* para los puntos del dominio sin que sea preciso que lo esté para $x = a$ (*).

Diremos que la función $f(x)$ admite a L como *límite dextrorsum* para $x = a$ cuando dado un número positivo arbitrariamente pequeño ε, se le puede hacer corresponder otro número positivo β, tal que

$$| L - f(x) | < \varepsilon$$

para *todo valor* de x que verificase la relación

$$0 < x - a < \beta.$$

Fragmento código: LF93002.04

LF93002 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
IV	98	No	07	19	LF93002.04	IVF V-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI								
IVF		LF93002.04						
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF93002 Comentario

En este libro observamos sólo un código de fenómeno IVF, se expresa de modo verbal, en formato definición.

LF93003 Ficha

Código	LF93003
Autor	Daniel Marín Toyos
Titulo	Tratado elemental de Matemáticas
Editorial	Librería Santarén, (Valladolid)
Año	1939
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera
Información sobre límites	Segunda Parte (Análisis) Capítulo III. Límite de las funciones. Continuidad. Páginas 211-235

LF93003 Secuenciación

1) El título del apartado es *"Límite de una función"*, y comienza con la construcción general de dos sucesiones: una, en la variable independiente y otra, en la dependiente. Formaliza el límite de ambas utilizando la definición de límite de una sucesión. Véase LF93003.01.01
A continuación se afirma que, si no se añade una dependencia entre estos dos límites, en el sentido ε-δ, no se puede afirmar la existencia de límite de una función en un punto por lo que se pasa a dar la definición formal. Véase LF93003.01.02
Se completa el apartado con el ejemplo $f(x) = x^3 - x + 2$ en el que se afirma que la función tiene límite 2 cuando x tiende a 1. Véase LF93003.01.03
Como ejemplo de que la existencia de los límites de las sucesiones de la variable independiente, por una lado, y la dependiente, por otro, no nos llevan a la existencia del límite, sino que hay que añadir una dependencia entre ambos, se utiliza la expresión $f(x) = \frac{2}{1+3^{1/x}}$. Véase LF93003.01.04 y LF93003.01.05
2) El capítulo continúa con otros 6 apartados en los que se tratan: Límites de algunas funciones de variable real; Función continua en un punto; Interpretación geométrica de la continuidad; Continuidad de una función en un intervalo; Continuidad de las funciones simples; Algunas propiedades de las funciones continuas.

LF93003 Detalles de los fenómenos observados

LF93003.01.01 ADI V-D. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

11. Límite de una función.—Consideremos la función $y = f(x)$ y demos a x como valores los de una sucesión de números reales

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots \qquad (2)$$

A esta sucesión de valores de x corresponden para la y los términos de otra sucesión, a saber:

$$f(x_1), \quad f(x_2), \quad f(x_3), \quad \ldots, \quad f(x_n), \quad \ldots \qquad (3)$$

que se obtienen sin más que reemplazar la x en la $f(x)$ por los términos de la primera sucesión. Puede ocurrir que la sucesión (2) tenga un límite que llamaremos a, en cuyo caso la diferencia $a - x_n$, tomada en valor absoluto, es, a partir de un cierto valor de n, menor que un valor dado, tan pequeño como se quiera, según la propia definición de límite de una sucesión. Si también la sucesión (3) tiene límite y este es, por ejemplo, b, ocurrirá asimismo que la diferencia $b - f(x_n)$ es, en valor absoluto, tan pequeña como se desee, a condición de tomar un término de la sucesión (3), suficientemente avanzado.

Se dice entonces que la función f(x) *tiende al límite* b, *cuando la variable* x *tiende a* a, *o también que tiende al límite* b *en el punto* a.

Fragmento código: LF93003.01.01

LF93003.01.02 IVF V-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

expresa diciendo que, dado un valor β, se puede hacerle corresponder otro α de tal modo que para valores de x que cumplan la condición $|a - x| < \alpha$, se tiene como consecuencia necesaria que $|b - f(x)| < \beta$.

Fragmento código: LF93003.01.02

LF93003.01.03 IVF V-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Ejemplo.—La función entera $y = x^3 - x + 2$ tiene el límite 2 cuando x tiende a 1. Se tiene, en efecto:

$$y - 2 = x^3 - x = x(x - 1)(x + 1).$$

Si damos como valores a x los de una sucesión creciente de números positivos que tenga por límite 1, el valor absoluto del factor x es inferior a 1, y el del factor $x + 1$ es inferior a 2; luego el valor absoluto de $y - 2$ cumplirá la condición

$$|y - 2| < 2|x - 1|,$$

de donde se deduce que si queremos que $|y - 2|$ sea, por ejemplo, inferior a $\frac{1}{10^5}$, bastará hacer

$$2|x - 1| < \frac{1}{10^5},$$

es decir, tomar

$$|x - 1| < \frac{1}{2 \cdot 10^5}.$$

Fragmento código: LF93003.01.03

<u>LF93003.01.04 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Así, por ejemplo, la función

$$y = \frac{2}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}$$

toma, para $x = 0$, el valor $y = 0$. Demos a x los valores de la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

tal que los denominadores de sus términos se van, sin cesar, duplicando. Es evidente que tal sucesión tiende al límite cero. El exponente $\frac{1}{x}$ va tomando los valores $1, 2, 4, 8, \dots$, es decir, crece indefinidamente y con él la exponencial $3^{\frac{1}{x}}$, luego la función tiende al valor cero para semejante sucesión de valores de x. Su límite coincide con el valor de y en el punto $x = 0$.

Fragmento código: LF93003.01.04

<u>LF93003.01.05 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

bién tenga por límite cero. Por ejemplo:

$$-1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{8}, \quad \dots$$

en la cual se van también duplicando los denominadores. El exponente $\frac{1}{x}$ adquiere, sucesivamente, los valores

$$-1, \quad -2, \quad -4, \quad -8, \quad \dots$$

y la exponencial $3^{\frac{1}{x}}$, los valores

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3^2}, \quad \frac{1}{3^4}, \quad \frac{1}{3^8}, \quad \dots$$

cuyo límite es cero. La función y tiende, por tanto, al límite 2,

Fragmento código: LF93003.01.05

LF93003 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
III	211		01	18	LF93003.01.01	ADI V-D
	212		01	02		
	212		12	15	LF93003.01.02	IVF V-D
	212		16	26	LF93003.01.03	IVF V-E
	213		01	02		
	213		17	24	LF93003.01.04	ADI V-E
	214		01	03		
	214		06	12	LF93003.01.05	ADI V-E

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Verbal</th><th colspan="2">Grafico</th><th colspan="2">Tabular</th><th colspan="2">Simbólico</th></tr>
<tr><td>ADI</td><td>LF93003.01.04
LF93003.01.05</td><td>LF93003.01.01</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>IVF</td><td>LF93003.01.03</td><td>LF93003.01.02</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td></tr>
</table>

LF93003 Comentario

En este libro observamos cinco códigos de fenómenos: tres del tipo ADI y dos del tipo IVF. Todos se expresan de modo básicamente verbal; dos, en formato definición y tres en el formato ejemplo.

A4.1.2 Periodo 1939-1966

Hemos analizado cuatro libros de texto de los años 1939 y 1966. Dos, se hallaron en el IES "Pedro Espinosa" (Antequera, Málaga), otro se localizó en la Biblioteca Nacional de España. Y el cuarto es préstamo de la biblioteca personal del profesor MH.

Queremos subrayar, como en el periodo anterior, la dificultad para encontrar libros tan antiguos, ya que la mayoría de los institutos en los que hemos trabajo como docentes tenían una antigüedad menor de 30 años.

LF94001 Ficha

Código	LF94001
Autor	F. Navarro Borras y Sixto Rios
Titulo	Curso Preliminar de Análisis Matemático
Editorial	Stylos (Madrid)
Año	1944
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera
Información sobre límites	Capítulo IV. Límites de funciones 97-111

LF94001 Secuenciación

1) Comienza con el ejemplo $f(x)=\dfrac{x^2-1}{4(x-1)}$ en el punto $x_0=1$, y afirma que el límite es lo que le ocurre a valores cercanos al punto y que no tiene nada que ver con el propio punto. Véase LF94001.01.01; LF94001.01.02; LF94001.01.03 y LF94001.01.04.
2) Noción de límite finito de una función en un punto. Véase LF94001.02
3) Definición de límite finito de una función en un punto, mediante distancias. Véase LF94001.03.01 y LF94001.03.02
4) Se presenta la función $f(x)=x sen\left(\frac{1}{x}\right)$ y se emplea la definición para demostrar que dicha función tiene límite cero en el punto cero. Véase LF94001.04
5) Hace referencia a los límites finitos en el infinito, y a los límites infinitos en un punto.
6) Definición de límite finito de una función en un punto, mediante entornos. Véase LF94001.06.
7) Caracterización del límite finito de una función en un punto por sucesiones.
8) Propiedades de los límites finitos (teorema de unicidad, y operaciones con límites, acotación).

LF94001 Detalles de los fenómenos observados

LF94001.01.01 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

$x=0,9$	$f(x)=0,47$
$x=1,1$	$f(x)=0,52$
$x=0,99$	$f(x)=0,497$
$x=1,01$	$f(x)=0,502$
$x=0,999$	$f(x)=0,4997$
$x=1,001$	$f(x)=0,5002$
$x=0,999$	$f(x)=0,49997$

Fragmento código: LF94001.01.01

<u>LF94001.01.02 IVF V-E.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Se ve que los valores de $f(x)$ pueden llegar a diferir de 0,5 tan poco como queramos, tomando valores de x cuya diferencia con 1 sea suficientemente pequeña.

Fragmento código: LF94001.01.02

<u>LF94001.01.03 IVF V-E.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Límites de las funciones

Podemos precisar más: los valores de $f(x)$ diferirán de 0,5 en menos de un número prefijado ε siempre que los puntos x disten del punto 1 menos de 4ε. En efecto, de la relación

Fragmento código: LF94001.01.03

<u>LF94001.01.04 IVF S-E.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

disten del punto 1 menos de 4ε. En efecto, de la relación

$$|x-1|<4\varepsilon \quad \text{resulta:} \quad \left|\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\right|<\varepsilon$$

luego

$$\left|\frac{x+1}{4}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \quad \therefore \quad \left|\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)4}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

o bien

$$\left|\frac{x^2-1}{4}-0,5\right|<\varepsilon \qquad \text{c. q. d.}$$

Fragmento código: LF94001.01.04

<u>LF94001.02 ADI V-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Vemos, pues, que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a, es el número b, si se verifica que al aproximarse indefinidamente x a a, los valores de la función $f(x)$ se aproximan indefinidamente a b.

Fragmento código: LF94001.02

<u>LF94001.03.01 IVF S-D.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

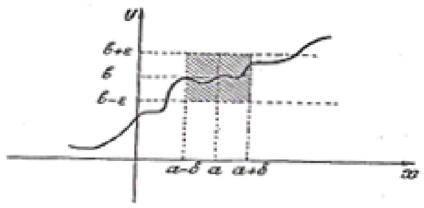
Precisando estas ideas, diremos que: b *es el límite de* f(x) *cuando* x *tiende a* a, *y escribiremos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \text{o bien} \qquad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} b$$

si dado un número $\varepsilon > 0$, *se puede determinar otro número* δ, *de modo que para todo punto* x *tal que* $0 < |x - a| < \delta$, *se verifique* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Fragmento código: LF94001.03.01

<u>LF94001.03.02 IVF G-D.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



Fragmento código: LF94001.03.02

<u>LF94001.04 IVF S-E.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

$$\lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$

Si tomamos $|x| < \varepsilon$ resulta:

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| < |x| < \varepsilon$$

Fragmento código: LF94001.04

<u>LF94001.06 IVF V-D.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Las definiciones precedentes pueden resumirse en la siguiente: *Diremos que* b *es el límite de* f(x) *cuando* $x \to a$; *si fijado un entorno de* b *se puede determinar un entorno de* a, *de modo que los valores de* f(x) *correspondientes a puntos de este entorno* (*salvo a lo sumo el* f(a)), *quedan contenidos en el entorno de* b.

Fragmento código: LF94001.06

LF94001 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
IV	97		14	14	LF94001.01.01	ADI T-E
	97		15	17	LF94001.01.02	IVF V-E
	98		01	03	LF94001.01.03	IVF V-E
	98		04	08	LF94001.01.04	IVF S-E
	98		15	18	LF94001.02	ADI V-D
	98		27	32	LF94001.03.01	IVF S-D
	99	28	-	-	LF94001.03.02	IVF G-D
	99		15	16	LF94001.04	IVF S-E
	101		19	24	LF94001.06	IVF V-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF94001.01.02	LF94001.02			LF94001.01.01			
IVF	LF94001.01.02 LF94001.01.03	LF94001.06		LF94001.03.02			LF94001.01.04 LF94001.04	LF94001.03.01
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF94001 Comentario

Los autores de este libro tratan los dos fenómenos. Para presentar el fenómeno ADI, usan los sistemas de representación verbal, tanto en ejemplos como en definiciones. Para presentar el fenómeno IVF, apelan a los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico, tanto en ejemplos como en definiciones.

LF96001 Ficha

Código	LF96001
Autor	J. Rey Pastor. A. De Castro Brzezicki
Titulo	Elementos de Matemáticas
Editorial	Saeta. (Madrid)
Año	1963
Ubicación	Biblioteca personal de profesor MH
Información sobre límites	Fascículo II. Capítulo XIII. Variables, Funciones, Límites. Páginas 299-329.

LF96001 Secuenciación

1) El tercer apartado “Límites de funciones de una variable”, es el que nos ocupa; en el primer punto, se observa que las sucesiones estudiadas en el capítulo XI se pueden considerar como funciones de variable natural, por lo que la teoría de límites ya desarrollada puede servir de pauta para una teoría más general de los límites de funciones. En el siguiente punto, se da la definición de límite finito de una función real. Véase LF96001.01

Este punto se completa con una serie de ejemplos ($f(x)=\cos x$ en $x_0=0$ que tiene límite 1; $f(x)=\dfrac{sen(2x)}{senx}$ en $x_0=0$ que tiene límite 2; $f(x)=(1+x)^{1/x}$ en $x_0=0$ que tiene límite e). Los siguientes puntos se dedican a la definición de límite finito en el infinito y a la presentación de distintas propiedades de los límites de funciones.

2) El capítulo tiene un cuarto apartado de “Operaciones con límites”, y termina con un bloque de ejercicios.

LF96001 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF96001.02.01 IVF S-D.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Se dice que: lím $y(x)=l$, para $x \longrightarrow x_0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|y(x)-l| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad 0 < |x-x_0| < \delta. \qquad (*) \qquad [3.\ 3]$$

Fragmento código: LF96001.02.01

LF96001 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XIII	311	No	10	12	LF96001.01	IVF S-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI								
IVF								LF96001.01
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF96001 Comentario

En este libro observamos solamente el fenómeno IVF en el formato definición y mediante el sistema de representación simbólico.

LF96002 Ficha

Código	LF96002
Autor	Sixto Rios, A. Rodríguez Sanjuan
Titulo	Matemáticas sexto curso de bachillerato. Nociones de cálculo infinitesimal y geometría analítica
Editorial	Ministerio de Educación y Ciencia
Año	1966
Ubicación	Biblioteca Nacional
Información sobre límites	Lección 7. Punto 3. Idea de límite de una función. Páginas 64-67.

LF96002 Secuenciación

1) Límite finito: Definición verbal del concepto de límite finito de una función en un punto. Véase LF96002.01.01. Se acompaña la definición verbal de una gráfica y se tienen en cuenta dos ejemplos. En uno de ellos se comprueba la existencia de un límite, y en el otro la de que no existe. Curiosamente estas comprobaciones se realizan de forma simbólica y no verbal tal y como se ha dado la definición. Véase LF96002.01.02 y LF96002.01.03
2) Infinitésimos: Se define un infinitésimo como el caso en el que el límite de una función en un punto salga cero.
3) Límite infinito: Comienzan observando que no se cumple la definición dada anteriormente de límite finito de una función en un punto. Por lo que se da una nueva definición para el caso del límite infinito. A continuación se ven un par de ejemplos.
4) Límite para valores infinitamente crecientes de la variable: De nuevo se da una definición verbal al respecto, la cual se acompaña de un par de ejemplos.

LF96002 Detalles de los fenómenos observados

LF96002.01.01 IVF V-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

DEFINICIÓN. *El límite de la función* f(x), *cuando* x *tiende a* a, *es el número* b, *si se verifica que los valores de la función* f(x) *se aproximan tanto como queramos a* b, *tomando los valores de la variable* x *convenientemente próximos a* a (*no se hace ninguna hipótesis sobre el valor de la función en el punto* a).

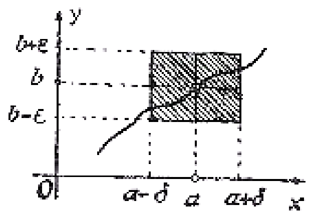
Escribiremos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \text{o bien} \quad f(x) \longrightarrow b, \quad \text{cuando} \quad x \longrightarrow a$$

que se lee $f(x)$, tiende a b, cuando x tiende a a.

Fragmento código: LF96002.01.01

LF96002.01.02 IVF G-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición. La gráfica se acompaña de una explicación de la misma a través del sistema de representación verbal.



Geométricamente, en el diagrama cartesiano de la función (fig. 3) esto quiere decir que, fijada una banda de anchura $2\varepsilon > 0$ (limitada por las rectas $y = b - \varepsilon$, $y = b + \varepsilon$) los puntos representativos de la función correspondientes a un cierto intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ suficientemente pequeño de a,

Fragmento código: LF96002.01.02

LF96002.01.03 IVF S-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Ejemplos. 1. El límite de una constante es la misma constante. Si es $f(x) = k$, se verifica siempre $\lim f(x) = k$, pues se tiene, evidentemente $|f(x) - k| < \varepsilon$, cualquiera que sea $\varepsilon < 0$, para todo valor de x. Vemos que la función puede alcanzar el límite.

Fragmento código: LF96002.01.03

LF96002 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
	64		16	23	LF96002.01.01	IVF V-D
7	65	Fig 3	-	-	LF96002.01.02	IVF G-D
	65		03	08	LF96002.01.03	IVF S-E

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI								
IVF		LF96002.01.01		LF96002.01.02			LF96002.01.03	
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF96002 Comentario

Solamente se observa el fenómeno IVF. Los sistemas de representación usados son el simbólico, el verbal y el gráfico. Los formatos, definición o ejemplo, prevaleciendo, no obstante, el primero.

LF96003 Ficha

Código	LF96003
Autor	P. Abellanas Cebollero, Joaquín García Rúa, Alfredo Rodríguez Labajo, Juan Casulleras Regás, Francisco Marcos de Lanuza
Titulo	Bachillerato superior, Matemática Moderna, 5º Curso
Editorial	Ministerio de Educación y Ciencia
Año	1967
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera.
Información sobre límites	El límite de funciones aparece inmerso en el Capítulo XVII, Función de variable real. Apartado VII. Límite y continuidad de una función en un punto. Páginas 230-233

LF96003 Secuenciación

1) Comienza con el ejemplo $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ y se estudia el comportamiento de la función en las proximidades del punto $x_0=1$; para ello, se calcula $f(1+\varepsilon)$. Véase LF96003.01.01; LF96003.01.02 y LF96003.01.03
2) Utilizando el concepto de entornos y aplicándolo a una función continua, el autor presenta qué ocurrirá cuando calculemos el límite de una función continua. En este caso, el límite de f(x) cuando x tiende a "a" tiene que ser f(a). Véase LF96003.02.01 y LF96003.02.02
3) A partir de estos dos razonamientos formaliza la definición de límite finito de una función en un punto mediante entornos. Véase LF96003.03.

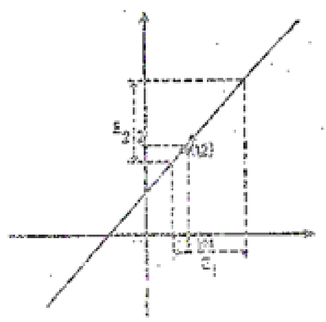
LF96003 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF96003.01.01 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

si $\varepsilon \neq 0$, $f(1+\varepsilon) = 2+\varepsilon$. Con lo cual observamos que cuando ε es muy pequeño, $f(1+\varepsilon)$ vale aproximadamente 2. Sin embar-

Fragmento código: LF96003.01.01

<u>LF96003.01.02 IVF G-E.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF96003.01.02

<u>LF96003.01.03 IVF V-E.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Tomando un entorno E_2 del punto $y = 2$, vemos en la figura que

$$f^{-1}(E_2) = E_1 - 1,$$

Fragmento código: LF96003.01.03

<u>LF96003.02.01 IVF V-D.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Diremos que la función $f(x) = y$ tiene por límite b para $x = a$ cuando para todo entorno E_b del punto b se verifica

$$f^{-1}(E_b) = E_a - a,$$

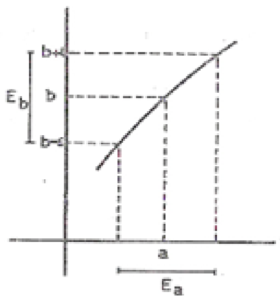
o bien

$$f^{-1}(E_b) = E_a.$$

En el segundo de estos casos decimos que, además, la función es *continua* en el punto a. En este caso el límite en $x = a$ coincide con el valor de la función $f(a)$ (fig. 54).

Fragmento código: LF96003.02.01

<u>LF96003.02.02 IVF G-D.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



Fragmento código: LF96003.02.02

<u>LF96003.03 IVF S-D.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Se deduce de aquí una nueva definición de límite: una función $f(x)$ se dice que tiene límite b para $x = a$ cuando fijado un entorno de b cualquiera $\mathcal{E}(b, \varepsilon)$ existe un entorno E_a de a tal que para todo $x \in E_a$, $x \neq a$,

$$f(x) = b + \eta \qquad |\eta| < \varepsilon.$$

Fragmento código: LF96003.03

LF96003 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XVII	231		02	02	LF96003.01.01	ADI V-E
	231	53	-	-	LF96003.01.02	IVF G-E
	231		09	11	LF96003.01.03	IVF V-E
	232		12	18	LF96003.02.01	IVF V-D
	232	54	-	-	LF96003.02.02	IVF G-D
	233		23	27	LF96003.03	IVF S-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF96003.01.01							
IVF	LF96003.01.03	LF96003.02.01	LF96003.01.02	LF96003.02.02				LF96003.03
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF96003 Comentario

El fenómeno de retroalimentación predomina sobre el de aproximación doble intuitiva. Para presentar el fenómeno ADI, se usa el sistema de representación verbal y el formato ejemplo. En el caso del IVF, la representación verbal y la gráfica son las más utilizadas, seguidas de la simbólica; se emplean tanto el formato ejemplo como en definición.

A4.1.3 Periodo 1967-1975

En este periodo se han analizado tres libros de texto: uno de 1969, cuatro de1973 y uno de 1974. Los libros se encuentran ubicados en los institutos “Cristóbal de Monroy”, situado en la localidad sevillana de Alcalá de Guadaira y “Pedro Espinosa”, situado en la localidad malagueña de Antequera. Otro de ellos es préstamo de la biblioteca personal del profesor MH.

LF96004 Ficha

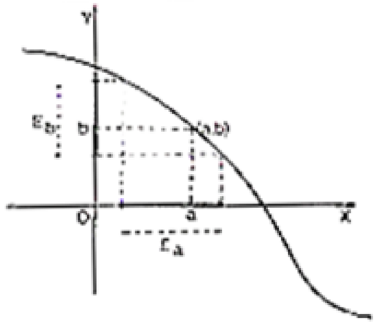
Código	LF96004
Autor	P. Abellanas Cebollero, Joaquín García Rúa, Alfredo Rodríguez Labajo, Juan Casulleras Regás, Francisco Marcos de Lanuza
Titulo	Bachillerato superior, Matemática Moderna, 6º Curso
Editorial	Ministerio de Educación y Ciencia
Año	1969
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera.
Información sobre límites	El límite de funciones aparece inmerso en el Capítulo III, Función de variable real. Apartado VII. Continuidad y discontinuidad. Páginas 37-60

LF96004 Secuenciación

1) Comienza analizando dos gráficas: una, de una función continua en el punto $x = a$, y otra, de una función discontinua en el punto $x = a$, en el que se calcula el límite. Véase LF96004.01
2) Definición de límite finito de una función en un punto usando entornos; partir de esta definición, se enuncia la definición de función continua en un punto. Véase LF96004.02.01; LF96004.02.02 y LF96004.02.03
3) Operaciones con límites: suma, resta y producto de límites.

LF96004 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF96004.01 IVF G-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



Fragmento código: LF96004.01

LF96004.02.01 IVF V-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

La definición dada de límite nos dice que si una función (figura 17)

$$y = f(x)$$

tiene límite b en el punto a, cada entorno de b tiene como imagen inversa, o bien un entorno de a, o dicho entorno menos el punto a.

Fragmento código: LF96004.02.01

LF96004.02.02 IVF S-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

El punto b es límite de $f(x)$ para $x = a$, si fijado $\varepsilon > 0$ arbitrario, se puede determinar un $\eta > 0$ conveniente tal que para todos los valores de x que verifiquen

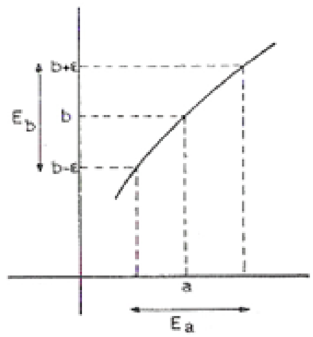
$$|x - a| < \eta$$

sea

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon.$$

Fragmento código: LF96004.02.02

LF96004.02.03 IVF G-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



Fragmento código: LF96004.02.03

LF96004 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
III	48	15;16	-	-	LF96004.01	IVF G-D
	49		14	18	LF96004.02.01	IVF V-D
	49		24	27	LF96004.02.02	IVF S-D
	50		02	03		
	50	17	-	-	LF96004.02.03	IVF G-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI								
IVF		LF96004.02.01		LF96004.01 LF96004.02.03				LF96004.02.02
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF96004 Comentario

Solamente se observa el fenómeno IVF, sin que haya alusión a la aproximación doble intuitiva. Solo se emplea el formato definición en los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico. Suponemos que esto responde a la importancia que en aquellos años se daba al desarrollo formal de los conceptos matemáticos.

LF97001 Ficha

Código	LF97001
Autor	Salvador Segura Domenech
Titulo	Matemáticas
Editorial	ECIR. (Valencia)
Año	1973
Ubicación	Préstamo de una colección particular. (MH)
Información sobre límites	El límite de funciones aparece inmerso en el Capítulo III Las funciones. Lección 7. Conceptos fundamentales. Páginas 37-50

LF97001 Secuenciación

1) La lección comienza con una revisión del concepto de función y su representación gráfica.
2) El siguiente apartado, titulado" Idea de límite de una función" es el que nos interesa y se introduce mediante la idea de límite de una función por sucesiones. Véase LF97001.02.01. Utilizando la definición de límite de sucesiones, se hace una "traducción" de lo que sería la definición de límite de funciones. Véase LF97001.02.02. Se continúa con una interpretación geométrica. Véase LF97001.02.03
3) La lección continúa con el estudio de los límites infinitos, los incrementos, la continuidad, funciones inversas monótonas y termina proponiendo una serie de ejercicios.

LF97001 Detalles de los fenómenos observados

LF97001.02.01 ADI V-D. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Idea de límite de una función.—Dada una función $y = f(x)$ cuyo campo de existencia comprende el valor x_0, se puede considerar una sucesión de valores de dicho campo que tenga por límite x_0, es decir,

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots \to x_0$$

Los correspondientes valores de la función forman otra sucesión:

$$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \ldots\ y_n = f(x_n),\ \ldots$$

y puede ocurrir que esta sucesión tenga por límite el valor L.

Fragmento código: LF97001.02.01

LF97001.02.02 IVF V-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

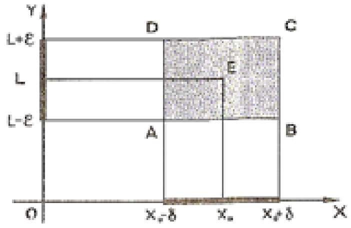
Se dice que una función $y = f(x)$, *tiene por límite* L *en el punto* x_0, *si para todo valor de* x *que cumpla la condición*

$$[I] \qquad |x - x_0| < \delta, \textit{ se verifica } |f(x) - L| < \varepsilon \qquad [II]$$

siendo ε *un número positivo arbitrariamente pequeño y* δ *otro número positivo que se puede determinar en cada caso.*

Fragmento código: LF97001.02.02

LF97001.02.03 IVF G-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



Fragmento código: LF97001.02.03

LF97001 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
III	39		10	16	LF97001.02.01	ADI V-D
	39		27	31	LF97001.02.02	IVF V-D
	40	5	-	-	LF97001.02.03	IVF G-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI		LF97001.02.01						
IVF		LF97001.02.02		LF97001.02.03				
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF97001 Comentario

En este libro observamos tres códigos de fenómenos: dos del tipo IVF y uno del tipo ADI. Todos se expresan en el formato definición. El ADI a través del sistema de representación verbal, y el IVF mediante el verbal y el gráfico.

LF97002 Ficha

Código	LF97002
Autor	Original: C.W. Lucas y R. T. James Traducción: Susana Blumovicz de Siperstein y Santiago Alonso
Titulo	Matemáticas I
Editorial	U.T.E.H.A (México)
Año	1974
Ubicación	I.E.S Cristóbal de Monroy. Alcalá de Guadaira.
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite finito de funciones. Capítulo 5.Páginas 97-109

LF97002 Secuenciación

1) El capítulo empieza con una introducción, en la que se presentan dos problemas, en el primero se trata de calcular la velocidad en un instante determinado; en el segundo hallar el área de una circunferencia, de radio la unidad, que está contenida en un cuadrado de lado 2 y tiene en su interior un cuadrado de lado $\sqrt{2}$.
2) El primer apartado sólo trata los límites de sucesiones y de las propiedades que estos posen.
3) El segundo apartado sí que se refiere concretamente al límite de funciones, y comienza con un par de ejemplos, uno de ellos con límite finito en un punto y el otro con límite infinito. Para dar paso después a la definición formal de límite finito de una función en un punto. Véase LF97002.03.01 y LF97002.03.02
4) Ejemplos de cálculo de límites usando propiedades.
5) Último apartado del capítulo dedicado a la continuidad.

LF97002 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF97002.03.01 IVF V-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

En esta etapa conjeturaremos que el $\lim_{x \to 1} f(x)$ es 2; pues los valores de $|f(x) - 2|$ son 1, 0.9, 0.5, 0.1, respectivamente. Parecerá que podemos hacer que $|f(x) - 2|$ sea tan pequeño como queramos eligiendo un valor de x lo suficientemente cercano a 1. En otras palabras, si se elige un valor para $|f(x) - 2|$ debemos poder hallar otro de x que nos dé para $|f(x) - 2|$ un valor aún menor. Por ejemplo, cuando $|f(x) - 2| = 0.01$, $x = 0.99$ y así podemos tomar $x = 0.995$, que nos dará $|f(x) - 2| < 0.01$.

Si $|f(x) - 2| = 0.001$, $x = 0.999$, y tomaremos $x = 0.9995$.
Si $|f(x) - 2| = 1 - \varepsilon$, $x = \varepsilon$, . y tomaremos $x > \varepsilon$.

Fragmento código: LF97002.03.01

<u>LF97002.03.02 IVF V-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Definición 5.2

$\underset{x \to a}{Lím}\, f(x) = L$ *si, tomando* x *suficientemente próxima a* a,

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \textit{donde} \quad \varepsilon > 0.$$

Fragmento código: LF97002.03.02

LF97002 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
V	103		12	22	LF97002.03.01	IVF V-E
	104		10	11	LF97002.03.02	IVF V-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI								
IVF	LF97002.03.01	LF97002.03.02						
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF97002 Comentario

En este libro se trata solo el fenómeno IVF en el sistema de representación verbal y en los dos formatos, ejemplo y definición.

A4.1.4 Periodo 1975-1995

Se han analizado once libros de texto publicados en este período: tres, de 1976, uno de 1977, otro de 1981, y otro de 1986, tres de 1987 y uno de 1989. Los libros proceden de varios IES y de nuestra colección personal de libros de texto.

En 1975 se produjo la implantación del BUP (bachillerato unificado polivalente), que perduró hasta la promulgación de la LOGSE.

LF97003 Ficha

Código	LF97003
Autor	Javier Guillén Barona, Roberto Navarro, Juan Antonio Peña y Sebastián Ferrer Martínez.
Titulo	Matemáticas 2º Bachillerato
Editorial	Magisterio Español .Madrid
Año	1976
Ubicación	I.E.S Mayorazgo. Málaga.
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite finito de funciones: Tema 5. El límite funcional. Páginas 50-62

LF97003 Secuenciación

1) Tras exponer los objetivos, comienza matizando lo que va a entenderse por función y lo que va a entenderse por límite de esa función. Véase LF97003.01
2) Continúa con la definición de límite finito de una función en un punto. Véase LF97003.02.01y LF97003.02.02
3) Ejemplos: (1º) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$; (2º) $f(x)=\begin{cases}1, si\ x\in\mathbb{Z}\\ 2, si\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$; (3º) $f(x)=E[x]$, donde E representa la función parte entera. Véase LF97003.03.01, LF97003.03.02 y LF97003.03.03
4) Definición de límites laterales, cuestiones y ejercicios.
5) Límites funcionales (infinito y en el infinito).

LF97003 Detalles de los fenómenos observados

LF97003.01 ADI V-D. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

se quiera, siempre que se avance en la sucesión tanto como sea preciso. Algo parecido va a ocurrir en el límite funcional finito, sólo que el acercamiento tendrá que ser doble, por parte de la variable y por parte de la función, tal como vamos a ver

Fragmento código: LF97003.01

LF97003.02.01 IVF S-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Diremos que una función $f(x)$ tiene por límite b cuando x tiende a a, y lo simbolizaremos por

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

cuando para todo número positivo ε (por pequeño que sea) exista un número positivo δ, dependiente de ε, tal, que se cumpla:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Fragmento código: LF97003.02.01

<u>LF97003.02.02 IVF V-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Fíjate bien en la expresión $0 < |x - a| < \delta$. Que el valor absoluto de $x - a$ sea menor que δ equivale a decir que x se acerque a a en menos de lo que vale δ, pero además el valor absoluto de $x - a$ ha de ser mayor que 0, lo cual es equivalente a decir que 7.

Es decir, la implicación de la definición se refiere a los valores de x que, *siendo distintos de* a, se hallan a una distancia de a menor que el valor de δ. Para ellos se ha de cumplir que $|f(x) - b| < \varepsilon$, es decir, que $f(x)$ se aproxime a b en menos de lo que vale ε.

Al resaltar el carácter de «arbitrariamente pequeño» de ε, queremos destacar que podemos «pedir» a $f(x)$ que se acerque a b tanto como queramos, siempre que «concedamos» a x estar tan cerca de a como necesite. En nada influye lo que le ocurra a $f(x)$ cuando x valga a, es decir, el valor de $f(a)$: tanto da que $f(a) = b$, como que $f(a) \neq b$, o que $f(a)$ no exista.

En cambio, en la definición no se ha puesto que $|f(x) - b|$ deba ser mayor que 0.

Por tanto, nada impide que $f(x)$ valga b para valores de x cercanos a a.

Fragmento código: LF97003.02.02

<u>LF97003.03.01 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Aunque $f(2)$ no exista, basta tomar x suficientemente próximo a 2 para que $f(x)$ se aproxime a 4 cuanto se desee. En la figura se ve que cuando x se acerca a

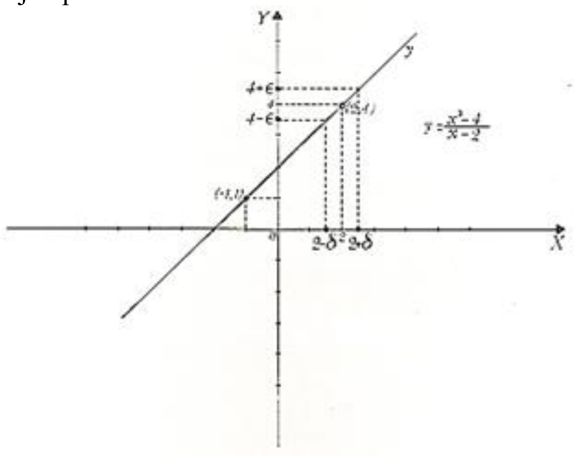
Fragmento código: LF97003.03.01

<u>LF97003.03.02 IVF V-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

$f(x)$ se aproxime a 4 cuanto se desee. En la figura se ve que cuando x se acerca a 2 en menos de δ, es decir, cuando queda comprendido entre $2 - \delta$ y $2 + \delta$, $f(x)$ se acerca a 4 en menos de ε, es decir, toma valores mayores que $4 - \varepsilon$ y a la vez menores que $4 + \varepsilon$. Por pequeño que sea el ε elegido, siempre encontraremos un valor de δ para él. Por consiguiente, se puede escribir:

Fragmento código: LF97003.03.02

LF97003.03.03 IVF G-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF97003.03.03

LF97003 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
V	51		09	11	LF97003.01	ADI V-D
	51		13	18	LF97003.02.01	IVF S-D
	51		19	33	LF97003.02.02	IVF V-D
	52		04	05	LF97003.03.01	ADI V-E
	52		05	09	LF97003.03.02	IVF V-E
	52	1	-	-	LF97003.03.03	IVF G-E

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF97003.03.01	LF97003.01						
IVF	LF97003.03.02	LF97003.02.02	LF97003.03.03					LF97003.02.01
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF97003 Comentario

El fenómeno de retroalimentación predomina sobre el de aproximación doble intuitiva y la representación verbal sobre la simbólica. Los formatos ejemplo y definición tienen el mismo peso.

LF97004 Ficha

Código	LF97004
Autor	Ángel Martínez Losada, Fernando Hernández Aina, Francisco Lorenzo Miranda
Titulo	Matemáticas 2º B.U.P.
Editorial	Tecniban S.A. Madrid
Año	1976
Ubicación	I.E.S Cristóbal de Monroy. Alcalá de Guadaira.
Información sobre límites	Capítulo VI dedicado al límite de funciones. Límites de funciones reales. Páginas 85-96

LF97004 Secuenciación
1) Para definir el concepto de límite finito de una función en un punto se utilizan tres ejemplos:
(1º) A partir de la gráfica de una función continua cualquiera observa que, a medida que se acerca a x_0, los valores de la función se aproximan a $f(x_0)$. Utiliza la caracterización por sucesiones para definir lo que será el límite. Las afirmaciones enunciadas las concreta con el siguiente ejemplo $f(x)=x^2$ y $x_0=2$. Véase LF97004.01.01; LF97004.01.02; LF97004.01.03; LF97004.01.04; LF97004.01.05 y LF97004.01.06
(2º) A partir de la gráfica de una función discontinua (discontinuidad evitable) en un punto, observa que, a medida que nos acercamos a x_0 (mediante la sucesión x_1, x_2,….) la sucesión formada por las imágenes de la sucesión anterior tiende a l. Véase LF97004.01.07 y LF97004.01.08.
(3º) A partir de la gráfica de una función discontinua (discontinuidad de 1ª especie salto finito) en un punto, observa que, cuando nos acercamos a x_0 por la izquierda las imágenes por f se acercan a l'. Si nos acercamos a x_0 por la derecha las imágenes por f se acercan a l''. El autor concluye que la función no tiene límite.
2) El autor presenta la definición formal de límite finito de una función en un punto. A continuación, la usa para demostrar que el límite, cuando x tiende a 3, de $f(x)=x^2+1$, es igual a 10. Termina el apartado proponiendo unos ejercicios. Véase LF97004.02.01 y LF97004.02.02
3) Plantea una serie de ejercicios.

LF98001 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF97004.01.01 ADI V-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Ejemplo 1

La gráfica 1 es la de una función f(x) definida en el intervalo (a, b). En ella puede observarse que, para valores de x «muy próximos» a x_0, los valores de f(x) son «muy próximos» al número ℓ; es decir, que si se elige una sucesión numérica $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ que tiende a x_0, se verifica que la sucesión numérica

$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ tiende al número ℓ,

Fragmento código: LF97004.01.01

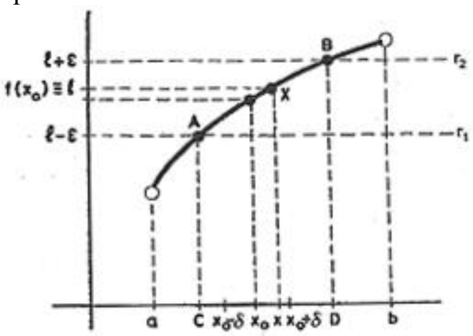
<u>LF97004.01.02 IVF V-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Con más precisión, este hecho se expresa así: si se elige un entorno cualquiera $(\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$ de ℓ, las rectas r_1 y r_2 (fig. 2) «cortan» a la gráfica de $f(x)$ en A y B. Entonces, para cualquier entorno $(x_o - \delta, x_o + \delta)$ de x_o, contenido en el segmento CD, se verifica que, si $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$, $x \neq x_o$, los valores $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$. Se dice, por ello, que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_o, es el número ℓ y se escribe

$$\lim_{x \to x_o} f(x) = \ell, \text{ o } f(x) \to \ell, \text{ cuando } x \to x_o.$$

Fragmento código: LF97004.01.02

<u>LF97004.01.03 IVF G-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF97004.01.03

<u>LF97004.01.04 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, y $x_o = 2$, se verifica:

que si consideramos la sucesión

1, 1'9, 1'99, ..., 1'999 ... que tiende a 2

entonces

$f(1) = 1^2$, $f(1'9) = 1'9^2$, ..., $(1'99 \overset{(n}{\dots} 9)^2$, ... tiende a 4,

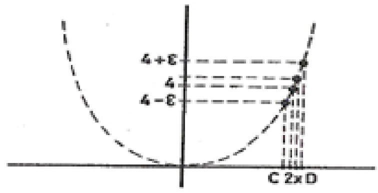
Fragmento código: LF97004.01.04

<u>LF97004.01.05 IVF V-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

O bien, si elegimos un entorno $(4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$ de 4, queda determinado un intervalo CD, de extremo $+\sqrt{4 - \varepsilon}$ y $+\sqrt{4 + \varepsilon}$, tal que, si x pertenece a un entorno $(2 - \delta, 2 + \delta)$, contenido en CD, entonces $f(x) \in (4 - \varepsilon, 4 + \varepsilon)$; en este caso se dice que $f(x) \to 4$, cuando $x \to 2$, o que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

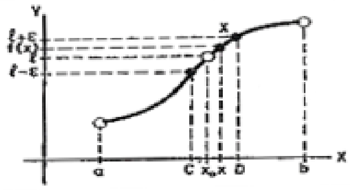
Fragmento código: LF97004.01.05

<u>LF97004.01.06 IVF G-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF97004.01.06

<u>LF97004.01.07 IVF G-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



Fragmento código: LF97004.01.07

<u>LF97004.01.08 IVF S-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

entorno, esta propiedad se puede expresar así: **Para cada** $\varepsilon > 0$, **existe un** $\delta > 0$ **tal que para todo x** que cumple $0 < |x - x_0| < \delta$ (o sea $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $x \neq x_0$), se verifica que $|f(x) - \ell| < \varepsilon$, (o sea $f(x) \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$).

Fragmento código: LF97004.01.08

<u>LF97004.02.01 IVF S-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

b) cuando, **para cada** $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, **tal que para todo** x que cumpla $0 < |x - x_0| < \delta$, se verifica $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Fragmento código: LF97004.02.01

<u>LF97004.02.02 IVF S-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Por ejemplo, se verifica que $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 1) = 10$, porque elegido $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ tal que, para todo x que cumple $|x - 3| < \delta$, es $|(x^2 + 1) - 10| < \varepsilon$. En efecto $|x^2 + 1 - 10| = |x^2 - 9| = |x - 3| \cdot |x + 3| <$ $< |x - 3| \cdot 7$, para todo $x \in (2,4)$, pues en este caso $x + 3 \in (2 + 3, 4 + 3)$, o sea $x + 3 < 7$, luego, si $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}$, será:

$$|x^2 + 1 - 10| < |x - 3| \cdot 7 < \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon$$

y esto sucede para cada $\varepsilon > 0$.

Fragmento código: LF97004.02.02

LF97004 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
VI	85		06	17	LF97004.01.01	ADI V-D
	86		07	13	LF97004.01.02	IVF V-D
	86	2	No	No	LF97004.01.03	IVF G-D
	86		14	18	LF97004.01.04	ADI V-E
	87		05	08	LF97004.01.05	IVF V-E
	87	3	No	No	LF97004.01.06	IVF G-E
	87	4	No	No	LF97004.01.07	IVF G-D
	87		13	20	LF97004.01.08	IVF S-D
	89		11	12	LF97004.02.01	IVF S-D
	89		14	20	LF97004.02.02	IVF S-E

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF97004.01.04	LF97004.01.01						
IVF	LF97004.01.05	LF97004.01.02	LF97004.01.06	LF97004.01.03 LF97004.01.07			LF97004.02.02	LF97004.01.08 LF97004.02.01
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF97004 Comentario

El fenómeno de retroalimentación se da cuatro veces más que el de aproximación doble intuitiva. Para el fenómeno de retroalimentación se emplean casi en la misma medida los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico; todos ellos tanto en formato ejemplo como en definición. Para el fenómeno de aproximación doble intuitiva solo se emplea el sistema de representación verbal.

LF97005 Ficha

Código	LF97005
Autor	María Dolores Terrisse Jardi, Margarita Dávila García-Miranda
Titulo	Matemática Curso 2º B.U.P
Editorial	Librería General. Zaragoza.
Año	1976
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite de funciones: Capítulo III. Función real de variable real. Límite. Continuidad. Páginas 40-83

LF97005 Secuenciación

1) Estudio de lo que serán las funciones reales de variable real. Observaciones previas a la definición de límite: definiciones de punto, intervalo y distancia.
2) Definición de límite finito en un punto, en términos de $\varepsilon-\delta$. A continuación se realizan una serie de observaciones sobre la definición de límite: (a) f(x_0) puede no existir; (b) si dado un ε encontramos un δ, todos los menores que este δ también sirven; (c) si es posible encontrar un ε>0 tal que, para todo δ, exista x que pertenezca al entorno (x_0 - δ, x_0 + δ) y que verifica $|f(x)-1| \geq \varepsilon$ entonces 1 no es el límite de f cuando x tiende a x_0. Véase LF97005.02.
3) Usando la definición formal $\varepsilon-\delta$, se demuestra que el límite de $f(x)=2x-1$ en $x_0=1$ vale 1 y que el de $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ en $x_0=-1$ vale -2. Véase LF97005.03.0; LF97005.03.02 y LF97005.03.03
4) Representación gráfica del límite finito de una función en un punto. Se realiza una representación gráfica del entorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ en el eje OX y del entorno $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ en el eje OY. Véase LF97005.04.

LF97005 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF97005.02 IVF S-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Definición: Sea f una función definida en un entorno de x_0, I, (salvo, tal vez, en el mismo x_0). Se dice que la función f admite el límite, l, cuando x tiende a x_0 si para todo número positivo ε, existe un número δ tal que

$$x \in I,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Luego

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \text{tal que} \\ x \in I,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{cases}$$

Fragmento código: LF97005.02

<u>LF97005.03.01 IVF V-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

«La distancia de los valores de la función al límite l, es menor que ε para todos los valores de x, cuya distancia a x_0 es menor que δ.»

Fragmento código: LF97005.03.01

LF97005.03.02 IVF S-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Ejemplos:

1.º Sea $f(x) = 2x - 1$. Comprobar que

$$\lim_{x \to 1} (2x - 1) = 1$$

Supongamos $\varepsilon = \frac{1}{10}$; habrá que hallar un δ que nos diga para qué valores de x se cumple

$$|f(x) - 1| < \frac{1}{10}$$

o sea, en nuestro caso:

$$|(2x - 1) - 1| < \frac{1}{10}; \qquad |2x - 2| < \frac{1}{10}; \qquad |x - 1| < \frac{1}{20}$$

luego para los

$$|x - 1| < \frac{1}{20} \Leftrightarrow \frac{-1}{20} < x - 1 < \frac{1}{20} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{20} < x < 1 + \frac{1}{20};$$

es para los que la distancia de los valores de la función a 1, es menor que $\frac{1}{10}$.

Si

$$\varepsilon = \frac{1}{100}, \qquad \delta \text{ es } \frac{1}{200}$$

$\left(\textit{y todo número positivo menor que } \frac{1}{200}. \right)$

Es decir: las abscisas cuyas distancias a x_0, son menores que el δ *hallado*, tienen imágenes cuyas distancias a l son menores que el $\varepsilon > 0$ *fijado*.

Fragmento código: LF97005.03.02

LF97005.03.03 IVF S-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

2.º Vamos a comprobar que es -2 el límite de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

cuando $x \to -1$.

Observemos que la función dada no está definida para $x = -1$ pero sí, para todo entorno del mismo.

Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}$:

$$\left| \frac{x^2-1}{x+1} - (-2) \right| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x+1| < \frac{1}{2}$$

«Para valores de x, tales que

$$|x-(-1)| < \frac{1}{2} = \delta \qquad es \qquad |f(x)-(-2)| < \frac{1}{2}».$$

En general si

$$|x-(-1)| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x)-(-2)| < \varepsilon$$

o sea que los valores de la función distan de -2 menos que ε para todos los de x cuya distancia a -1 sea menor que δ. (En este ejemplo ε y δ resultan iguales). Observemos que podemos escribir la igualdad

$$\left| \frac{x^2-1}{x+1} - (-2) \right| = |x+1|$$

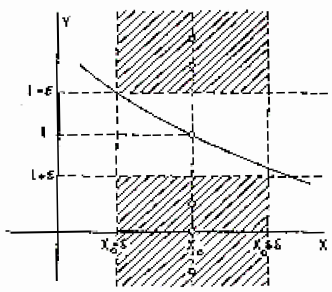
para todo $x \in \mathbf{R} - \{-1\}$.

Fragmento código: LF97005.03.03

LF97005.04 IVF G-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.

Interpretación geométrica

Se ve en la figura, que para que los valores de $f(x)$ disten de l menos de ε, es preciso tomar valores de x solo del intervalo $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ únicos cuya distancia a x_0 es menor que δ. De esta observación se excluye, repetimos, el valor $f(x_0)$.



Fragmento código: LF97005.04

LF97005 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
III	53		21	23	LF97005.02	IVF S-D
	53		25	26	LF97005.03.01	IVF V-D
	54		11	20	LF97005.03.02	IVF S-E
	54		23	27	LF97005.03.03	IVF S-E
	55		01	11		
	55	X	-	-	LF97005.04	IVF G-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI								
IVF		LF97005.03.01		LF97005.04			LF97005.03.02 LF97005.03.03	LF97005.02
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF97005 Comentario

Solamente se observa el fenómeno IVF. Los sistemas de representación usados son el verbal el gráfico y el simbólico, y los formatos, ejemplo o definición, prevaleciendo, no obstante, el segundo.

LF97006 Ficha

Código	LF97006
Autor	Valentín López, José Luis Sánchez Martín
Titulo	Matemáticas 2 Bachillerato
Editorial	S.M. Madrid
Año	1977
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera
Información sobre límites	Capítulo V. Límite de las funciones. Páginas 61-80

LF97006 Secuenciación

1) Definición de límite finito de una función en un punto. Véase LF97006.01.01; LF97006.01.02 y LF97006.01.03

2) Ejemplos: $f(x) = 2x$ en $x_0 = 2$ y $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ en $x_0 = 2$, en los que se demuestra usando la definición formal $\varepsilon - \delta$ que los límites son 6 y 4 respectivamente. Véase LF97006.02.01; LF97006.02.02; LF97006.02.03 y LF97006.02.04.

LF97006 Detalles de los fenómenos observados

LF97006.01.01 ADI V-D. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Si cuando la variable independiente x se aproxima tanto cuanto queramos al número real l, los correspondientes valores de f(x) también se aproximan cuanto queramos al número L, decimos que el límite de la función f(x) es el número L cuando x tiende a l. Pero esta definición es intuitiva

Fragmento código: LF97006.01.01

LF97006.01.02 IVF V-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Decimos que la función f(x) tiene por límite L cuando x tiende a l, si fijado un número real positivo ε se puede determinar un número real positivo δ dependiente de ε, tal que, para todos los valores de x que verifican la condición $0 < |x - l| < \delta$, también se verifica que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Fragmento código: LF97006.01.02

LF97006.01.03 IVF S-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

$$\lim_{x \to 1} f(X) = L \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) /\ \text{si } 0 < |x - 1| < \delta$$

$$\text{entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Fragmento código: LF97006.01.03

LF97006.02.01 IVF S-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Ejemplo 1:

Sea la función $f(x) = 2x$ definida en todo el campo R. Hallar el límite cuand tiende a 3.

Solución

Se verifica que: $\lim_{x \to 3} 2x = 6$

pues fijado un $\varepsilon = 0{,}01$, el valor de δ correspondiente se obtiene tomando un p del entorno de 3:

$$x = 3 + h$$

Entonces:

$$f(x) - 6 = 2 \cdot (3 + h) - 6 = 6 + 2h - 6 = 2h$$

Si:

$$f(x) - 6 < \varepsilon = 0{,}01 \text{ entonces } 2h < \varepsilon \Rightarrow h < \frac{\varepsilon}{2}$$

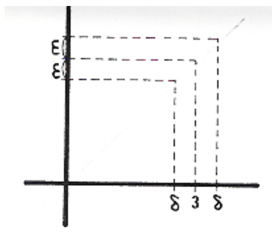
Es decir:

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2} = 0{,}005$$

Para que $f(x) = 2x$ se aproxime a 6 en menos que 0,01 basta que x se aproxi a 3 en menos que 0,005.

Fragmento código: LF97006.02.01

LF97006.02.02 IVF G-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF97006.02.02

LF97006.02.03 IVF S-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Ejemplo 3:

Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Hallar su límite cuando x tiende a 2.

Solución

Su límite cuando x tiende a 2 es 4

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Si $x = 2 + h$, $\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 = x + 2 - 4 = 2 + h + 2 - 4 = h$

$$\Rightarrow \delta = \varepsilon$$

Fragmento código: LF97006.02.03

<u>LF97006.02.04 ADI T-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

Ejemplo 3:

Sea la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. Hallar su límite cuando x tiende a 2.

Solución

Su límite cuando x tiende a 2 es 4

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

En efecto, para

$x = 1{,}9 \rightarrow 3{,}9$
$x = 1{,}99 \rightarrow 3{,}99$
$x = 2{,}01 \rightarrow 4{,}01$

Fragmento código: LF97006.02.04

LF97006 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XIII	61		03	05	LF97006.01.01	ADI V-D
	61		11	15	LF97006.01.02	IVF V-D
	61		17	18	LF97006.01.03	IVF S-D
	62		01	16	LF97006.02.01	IVF S-E
	62	X	-	-	LF97006.02.02	IVF G-E
	63		01	12	LF97006.02.03	IVF S-E
	63		07	09	LF97006.02.04	ADI T-E

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI		LF97006.01.01			LF97006.02.04			
IVF		LF97006.01.02	LF97006.02.02				LF97006.02.01 LF97006.02.03	LF97006.01.03
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF97006 Comentario

El fenómeno de retroalimentación predomina sobre el de aproximación doble intuitiva. Para el fenómeno ADI se emplean los sistemas de representación verbal en el formato definición y tabular en el formato ejemplo, por su parte para el fenómeno IVF se emplean los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico tanto en ejemplos como en definiciones.

LF98001 Ficha

Código	LF98001
Autor	Vizmanos-Anzola-Primo
Titulo	Funciones-2 Matematicas 2º B.U.P. Teoría y Problemas
Editorial	S.M (Madrid)
Año	1981
Ubicación	I.E.S Cristóbal de Monroy. Alcalá de Guadaira.
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite de funciones. Capítulo XV. Funciones reales convergentes en R. Páginas 244-255

LF98001 Secuenciación

1) Introducción
2) "*Concepto de función convergente".* Se presentan tres ejemplos para introducir una idea intuitiva de límite: $f(x)=x^2$; $f(x)=E[x]$(siendo E la parte entera); $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, todas en el punto $x_0=2$.Véase LF9801.02.01; LF9801.02.02; LF9801.02.03; LF9801.02.04; LF9801.02.05; LF9801.02.06; LF9801.02.07; LF9801.02.08; LF9801.02.09; LF9801.02.10.
3) Definiciones métrica, simbólica $\varepsilon-\delta$ y topológica de límite finito de una función en un punto. Véase LF9801.03.01; LF9801.03.02; LF9801.03.03; LF9801.03.04.
4) Definición de límites laterales. Relación con el límite en un punto.
5) Límites defunciones elementales.

LF98001 Detalles de los fenómenos observados

LF98001.02.01 ADI V-D. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

«¿Si x se ''aproxima hacia x_0'' los valores correspondientes f(x) se ''aproximan hacia un número real L'' o no?».

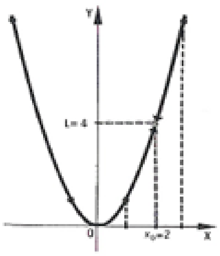
Fragmento código: LF98001.02.01

LF98001.02.02 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

Izquierda de x_0		Derecha de x_0
x	f(x)	x
1	1	
	9	3
1,5	2,25	
	6,25	2,5
1,8	3,24	
	4,84	2,2
1,9	3,61	
	4,41	2,1
1,95	3,8025	
	4,2025	2,05
1,99	3,9601	
	4,0401	2,01
1,999	3,996001	
	4,004001	2,001
1,9999	3,9996	
	4,0004	2,0001
....	....	....

Fragmento código: LF98001.02.02

<u>LF98001.02.03 ADI G-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98001.02.03

<u>LF98001.02.04 ADI V-E</u>. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

De esta tabla podemos deducir que si nos aproximamos a $x_0 = 2$, tanto por la derecha como por la izquierda, los valores correspondientes de la función f, se aproximan hacia L = 4. Dicho de

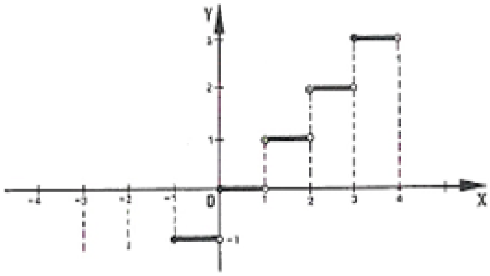
Fragmento código: LF98001.02.04

<u>LF98001.02.05 ADI T-E</u>. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

Izquierda de x_0		Derecha de x_0
x	f(x)	x
1	1	
	3	3
1,5	1	
	2	2,5
1,8	1	
	2	2,2
1,9	1	
	2	2,1
1,95	1	
	2	2,05
1,99	1	
	2	2,01
1,999	1	
	2	2,001
1,9999	1	
	2	2,0001
....	....	....

Fragmento código: LF98001.02.05

LF98001.02.06 ADI G-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98001.02.06

LF98001.02.07 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Observando la tabla podemos deducir que los valores f(x) no se aproximan a ningún número real fijo; por la izquierda de $x_0 = 2$ se aproximan hacia 1 y por la derecha se aproximan hacia 2.

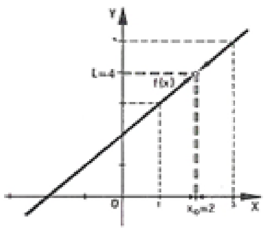
Fragmento código: LF98001.02.07

LF98001.02.08 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

Izquierda de x_0		Derecha de x_0
x	f(x)	x
1	3	
	5	3
1,5	3,5	
	4,5	2,5
1,8	3,8	
	4,2	2,2
1,9	3,9	
	4,1	2,1
1,95	3,95	
	4,05	2,05
1,99	3,99	
	4,01	2,01
1,999	3,999	
	4,001	2,001
1,9999	3,9999	
	4,0001	2,0001
....	....	....

Fragmento código: LF98001.02.08

<u>LF98001.02.09 ADI G-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98001.02.09

<u>LF98001.02.10 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Observando la tabla podemos deducir que f(x) se **aproxima** hacia L = 4 cuando x se aproxima hacia $x_0 = 2$, tanto por la derecha como por la izquierda de $x_0 = 2$.

Fragmento código: LF98001.02.10

<u>LF98001.03.01 ADI V-D</u>. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

cuando a valores x próximos a x_0 corresponden por f valores f(x) próximos a L.

Fragmento código: LF98001.03.01

<u>LF98001.03.02 IVF V-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

La función f converge hacia L en x_0, si podemos hacer f(x) tan próximo a L como queramos haciendo que x esté suficientemente próximo a x_0.

Fragmento código: LF98001.03.02

<u>LF98001.03.03 IVF S-D.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

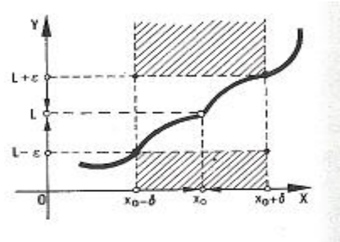
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si para cualquier $\varepsilon > 0$*, existe un* $\delta > 0$ *tal que,*

$$x \in D \quad y \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Fragmento código: LF98001.03.03

<u>LF98001.03.04 IVF G-D.</u> Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.



Fragmento código: LF98001.03.04

LF98001 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XV	245		09	10	LF98001.02.01	ADI V-D
	245		22	22	LF98001.02.02	ADI T-E
	245	15.1	-	-	LF98001.02.03	ADI G-E
	246		01	02	LF98001.02.04	ADI V-E
	246		13	13	LF98001.02.05	ADI T-E
	246	15.2	-	-	LF98001.02.06	ADI G-E
	247		02	03	LF98001.02.07	ADI V-E
	247		09	09	LF98001.02.08	ADI T-E
	247	15.3	-	-	LF98001.02.09	ADI G-E
	247		10	11	LF98001.02.10	ADI V-E
	248		09	09	LF98001.03.01	ADI V-D
	248		11	12	LF98001.03.02	IVF V-D
	248		24	28	LF98001.03.03	IVF S-D
	248	15.4	-	-	LF98001.03.04	IVF G-D

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Verbal</td><td colspan="2">Grafico</td><td colspan="2">Tabular</td><td colspan="2">Simbólico</td></tr>
<tr><td>ADI</td><td>LF98001.02.04
LF98001.02.07
LF98001.02.10</td><td>LF98001.02.01
LF98001.03.01</td><td>LF98001.02.03
LF98001.02.06
LF98001.02.09</td><td></td><td>LF98001.02.02
LF98001.02.05
LF98001.02.08</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>IVF</td><td></td><td>LF98001.03.02</td><td></td><td>LF98001.03.04</td><td></td><td></td><td></td><td>LF98001.03.03</td></tr>
<tr><td></td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td><td>Ejemplo</td><td>Definición</td></tr>
</table>

LF98001 Comentario

El fenómeno de aproximación doble intuitiva predomina sobre el de retroalimentación. Para el fenómeno IVF se emplean los sistemas de representación verbal gráfico y simbólico en el formato definición, por su parte para el fenómeno ADI se emplean los sistemas de representación verbal, gráfico y tabular principalmente en ejemplos.

LF98002 Ficha

Código	LF98002
Autor	José Caruncho Castro, Maria Gutiérrez de Sande ,José Gil Martos
Titulo	Matemáticas 2º B.U.P
Editorial	Santillana. Madrid.
Año	1986
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera
Información sobre límites	Capítulo XV. Funciones apartado III. Límite de funciones. Páginas 160- 163.

LF98002 Secuenciación

1) Introducción intuitiva al concepto de límite finito de una función en un punto usando dos funciones por ramas que no son continuas en el punto en el que se calcula el límite. Se propone un ejercicio para trabajar lo visto en los ejemplos. Véase LF98002.01.01; LF98002.01.02 y LF98002.01.03

2) Introducción a la definición mediante el ejemplo $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$,en $x_0=2$,cuyo límite vale 4. Véase LF98002.02.01 y LF9802.02.02.

3) Definición del límite finito de una función en un punto, usando entornos y definición ε-δ. Véase LF98002.03.01; LF98002.03.02; LF98002.03.03; LF98002.03.04 y LF98002.03.05.

LF98002 Detalles de los fenómenos observados

LF98002.01.01 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

> En la figura se observa que para valores de x muy próximos a 3, los valores correspondientes de la función se aproximan a -1.

Fragmento código: LF98002.01.01

LF98002.01.02 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

> En la tabla del margen se observa que al acercarse el valor de x a 1, el valor de la función se aproxima a 2,

Fragmento código: LF98002.01.02

LF98002.01.03 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	$f(x) = x^2 + 1$
0,5	1,25
0,9	1,81
0,99	1,980
0,999	1,998

Fragmento código: LF98002.01.03

<u>LF98002.02.01 IVF V-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

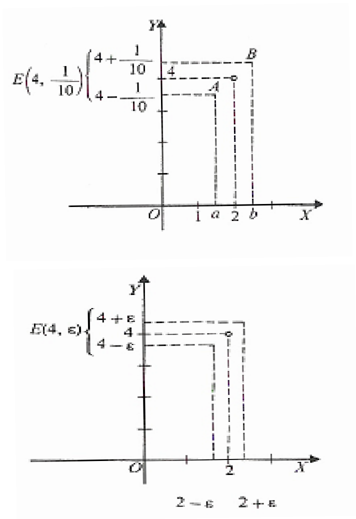
En general, si tomamos en la gráfica de h un entorno $E(4, \varepsilon)$ de 4 de radio ε, se puede encontrar un entorno $E(2, \delta)$ de 2 de radio δ tal que $\forall x \in E(2, \delta)$, $x \neq 2$, se verifica $f(x) \in E(4, \delta)$ o, lo que es lo mismo,

$$f(E(2, \delta) - \{2\}) \subset E(4, \varepsilon)$$

Esto indica que $\lim_{x \to 2} h(x) = 4$ (ver segunda figura).

Fragmento código: LF98002.02.01

<u>LF98002.02.02 IVF G-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfica y el formato ejemplo.



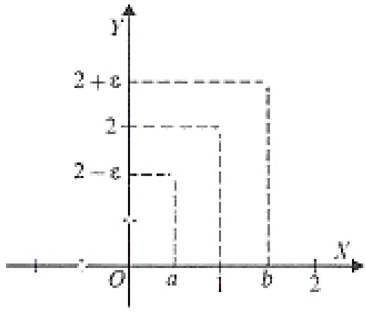
Fragmento código: LF98002.02.02

<u>LF98002.03.01 IVF V-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Se dice que la función f tiene como límite el número real L cuando x tiende a a si para todo entorno $E(L, \varepsilon)$ de L de radio ε se puede encontrar un entorno $E_1(a, \delta)$ de a de radio δ tal que si $x \in E_1(a, \delta)$, $x \neq a$, se verifica $f(x) \in E(L, \varepsilon)$.

Fragmento código: LF98002.03.01

LF98002.03.02 IVF G-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfica y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98002.03.02

LF98002.03.03 IVF S-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Se dice que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Fragmento código: LF98002.03.03

LF98002.03.04 IVF S-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

EJEMPLOS

- Sea f la función constante de valor c, es decir, $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = c$. Entonces $\lim_{x \to a} f(x) = c$. En efecto, si nos dan $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ se tiene que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

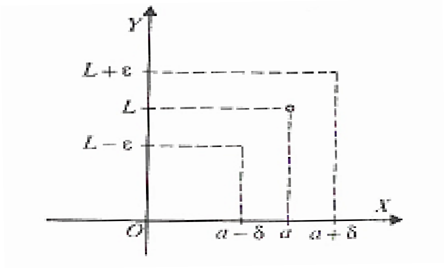
$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

- Sea $1_{\mathbb{R}}$ la función identidad, es decir, $1_{\mathbb{R}}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x \to a} 1_{\mathbb{R}}(x) = x$, ya que dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ se tiene que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$|1_{\mathbb{R}}(x) - 1_{\mathbb{R}}(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$

Fragmento código: LF98002.03.04

LF98002.03.05 IVF G-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfica y el formato definición



Fragmento código: LF98002.03.05

LF98002 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XV	160		10	12	LF98002.01.01	ADI V-E
	160		23	24	LF98002.01.02	ADI V-E
	160	X	-	-	LF98002.01.03	ADI T-E
	161		29	34	LF98002.02.01	IVF V-E
	161	X	-	-	LF98002.02.02	IVF G-E
	162		09	13	LF98002.03.01	IVF V-D
	162	X	-	-	LF98002.03.02	IVF G-E
	163		22	25	LF98002.03.03	IVF S-D
	163		-	-	LF98002.03.04	IVF S-E
	163	X	-	-	LF98002.03.05	IVF G-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF98002.01.01 LF98002.01.02				LF98002.01.03			
IVF	LF98002.02.01	LF98002.03.01	LF98002.02.02 LF98002.03.02	LF98002.03.05			LF98002.03.04	LF98002.03.03
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF98002 Comentario

El fenómeno de retroalimentación predomina sobre el de aproximación doble intuitiva. Para el fenómeno ADI se emplean los sistemas de representación verbal y tabular en el formato ejemplo, por su parte para el fenómeno IVF se emplean los sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico tanto en ejemplos como en definiciones.

LF98003 Ficha

Código	LF98003
Autor	Ángel Primo Martínez
Titulo	Matemáticas C.O.U.
Editorial	S.M (Madrid)
Año	1987
Ubicación	I.E.S Cristóbal de Monroy. Alcalá de Guadaira
Información sobre límites	El límite de funciones aparece inmerso en otro capítulo: Tema14.Continuidad de una función. Páginas:217-233

LF98003 Secuenciación

1) Definición de límite de una función. Se dan las definiciones de límite finito de una función cuando x tiende a x_0, límite finito cuando x tiende a infinito, límite infinito cuando x tiende a x_0 y límite infinito cuando x tiende a infinito. Véase LF98003.01.01

Observaciones a la definición de límite. El punto x_0, no tiene por qué ser del dominio, por ello se excluye de la definición. Además, se exige que x_0 sea punto de acumulación del domino para asegurarse de que el conjunto $E^*(x_0,\delta)\cap D$ sea un conjunto infinito. Véase LF98003.01.02. Ejemplo: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ tiene límite 4 en $x_0=2$. Se demuestra usando la definición $\varepsilon-\delta$ la diferencia entre f(x) y 4 es menor que ε, siempre que $|x-2|\prec\delta$. Véase LF98003.01.03.

2) Límites laterales.
3) Funciones continuas.
4) Tipos de discontinuidades.
5) Operaciones con funciones continuas.
6) Continuidad de la función compuesta.
7) Propiedades generales de las funciones continuas.
8) Continuidad uniforme.
9) Propiedades de las funciones continuas en un intervalo cerrado.

LF98003 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF98003.01.01 IVF S-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 . \exists\delta>0 \quad \text{tal que}$$
$$\forall x: 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

Fragmento código: LF98003.01.01

<u>LF98003.01.02 ADI V-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

En la función de la figura adjunta se observa que cuando nos acercamos al punto x_o, los valores transformados se aproximan a l; sin embargo, obser-

Fragmento código: LF98003.01.02

LF98003.01.03 IVF S-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Ejemplo

La función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, tiene por dominio de definición al conjunto de todos los números reales excepto el punto $x=2$ donde la función carece de sentido, aunque sí es un punto de acumulación de dicho conjunto. Se tiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

ya que fijado un entorno del punto 4, $E(4, \varepsilon)$ existe un entorno reducido del punto 2, $E^*(2, \delta)$, tal que

$$\forall x \in E^*(2, \delta) \quad \text{se verifica} \quad |f(x)-4| = \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| = \left|\frac{x^2-4x+4}{x-2}\right| = |x-2| < \delta$$

Bastará tomar como radio del entorno del punto 2 el valor $\delta = \varepsilon$ para que se verifique que

$$|f(x)-4| < \varepsilon$$

y, por tanto, la función f(x) tiene por límite 4 cuando x tiende hacia 2.

Fragmento código: LF98003.01.03

LF98003 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XIV	217		12	13	LF98003.01.01	IVF S-D
	218		07	09	LF98003.01.02	ADI V-D
	218		15	22	LF98003.01.03	IVF S-E

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI		LF98003.01.02						
IVF							LF98003.01.03	LF98003.01.01
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF98003 Comentario

Los autores de este libro tratan los dos fenómenos. Para presentar el fenómeno ADI, se usa el sistema de representación verbal y el formato definición. Para presentar el fenómeno IVF, apelan al sistema de representación simbólico, principalmente mediante ejemplos y definiciones.

LF98004 Ficha

Código	LF98004
Autor	César Benedicto y Adolfo Negro
Titulo	Matemáticas 2º B.U.P.
Editorial	Alhambra. Madrid
Año	1987
Ubicación	I.E.S Mayorazgo. Málaga
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite de funciones: Tema 4. Límite de funciones. Continuidad. Páginas 61-82

LF98004 Secuenciación

1) Observación previa: Se enuncia la dificultad del concepto de límite de función y se le compara con el límite de una sucesión, haciendo referencia a que aquél es un concepto local. Véase LF98004.01

2) A partir del ejemplo $f(x)=x^2$ en el punto $x_0=2$ se introduce de manera intuitiva el concepto de límite finito de una función en un punto. Véase LF98004.02.01, LF98004.02.02; LF98004.02.03 y LF98004.02.04

3) Se completa el ejemplo anterior con un par de ejemplos de funciones, una de ellas presenta una discontinuidad evitable y la otra una discontinuidad no evitable de salto finito.

4) Entre estos dos ejemplos aparece la caracterización de límite finito en un punto mediante sucesiones.

5) Comentando los ejemplos anteriores, concluye con la definición de límite de una función en un punto (mediante entornos), debido a la imposibilidad de aplicar la caracterización por sucesiones. Véase LF98004.05

6) Ejemplo en el que se aplica la definición anterior. Véase LF98004.06.01 LF98004.06.02 y LF98004.06.03.

7) Definición formal de límite finito de una función en un punto mediante $\varepsilon-\delta$. Véase LF98004.07.

8) En el ejemplo $f(x)=x^2$ en el punto $x_0=2$ se aplica la definición de $\varepsilon-\delta$. Véase LF98004.08.

LF98004 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF98004.01 ADI V-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Vamos a llamar límite de la función $f(x)$ en el punto x_0, al valor al que se van acercando las imágenes (las y) cuando los originales (las x) se acercan al valor x_0.

Fragmento código: LF98004.01

<u>LF98004.02.01 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

La gráfica nos dice que al acercarse las x a 2, las $f(x)$ tienden a 4.

Fragmento código: LF98004.02.01

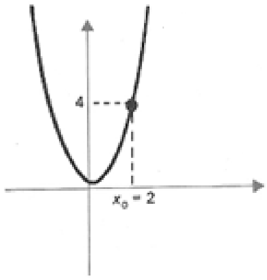
LF98004.02.02 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	$f(x)$
1,9	$1,9^2 = 3,61$
1,99	$1,99^2 = 3,9601$
1,999	$1,999^2 = 3,996001$
⋮	⋮
↓	↓
2	4

x	$f(x)$
2,1	$2,1^2 = 4,41$
2,01	$2,01^2 = 4,0401$
2,001	$2,001^2 = 4,004001$
⋮	⋮
↓	↓
2	4

Fragmento código: LF98004.02.02

LF98004.02.03 ADI G-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfica y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98004.02.03

LF98004.02.04 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Tanto si nos acercamos a 2 por la derecha (2,1, 2,01, 2,001...), como si nos acercamos por la izquierda (1,9, 1,99...) las imágenes se acercan a 4.

Fragmento código: LF98004.02.04

LF98004.05 IVF V-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ si y sólo si, para cualquier entorno de L que tomemos, por pequeño que sea su radio ε, existe un entorno de x_0, $E_\delta(x_0)$(*), cuyos elementos (sin contar a x_0), tienen sus imágenes dentro del entorno de L, $E_\varepsilon(L)$.

Fragmento código: LF98004.05

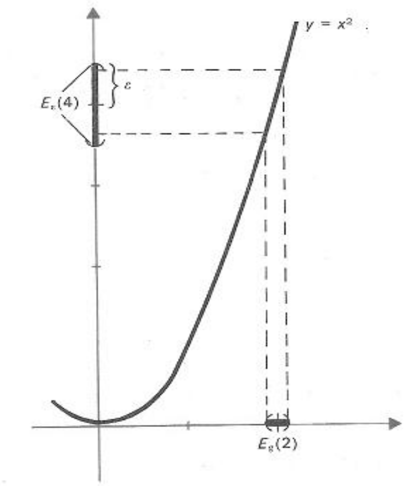
LF98004.06.01 IVF V-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

La figura 4.4 indica el sentido de esta definición. Hemos tomado un entorno cualquiera de 4, $E_\varepsilon(4)$, y hemos encontrado un entorno de 2, $E_\delta(2)$ cuyos elementos (a excepción quizá de x_0), tienen sus imágenes en $E_\varepsilon(4)$.

Por eso $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Fragmento código: LF98004.06.01

<u>LF98004.06.02 IVF G-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98004.06.02

<u>LF98004.06.03 IVF V-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Si $\varepsilon = 0{,}01$ (por ejemplo), podemos tomar* $\delta = 0{,}002$ y se cumple que si $x \in E_{0.002}(2) = (1{,}998, 2{,}002)$, entonces $f(x) \in E_{0.01}(4) = (3{,}99, 4{,}01)$ ya que:

$$f(1{,}998) = 3{,}992004 \in E_{0.01}(4)$$
$$f(2{,}002) = 4{,}008004 \in E_{0.01}(4)$$

Fragmento código: LF98004.06.03

<u>LF98004.07 IVF S-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

$L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ si y sólo si para cualquier número positivo ε que tomemos, por pequeño que sea, existe otro número positivo δ tal que si 0 ** $< |x - x_0| < < \delta$, entonces se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Fragmento código: LF98004.07

LF98004.08 IVF S-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

EJEMPLO 5

Siguiendo con el ejemplo anterior: existe una distancia $\delta = 0{,}002$ *tal que los puntos que distan de* $x_0 = 2$ *menos de* $0{,}002$, *tienen sus imágenes a una distancia del límite* 4, *menor de* 0,01. *Esto es:*

$$|x - 2| < 0{,}002 \Rightarrow |f(x) - 4| < 0{,}01$$

Como esto se puede realizar con cualquier distancia ε que tomemos, se tiene $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

Fragmento código: LF98004.08

LF98004 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
IV	61		14	15	LF98004.01	ADI V-D
	61		21	21	LF98004.02.01	ADI V-E
	61		23	23	LF98004.02.02	ADI T-E
	62	4.1	-	-	LF98004.02.03	ADI G-E
	62		03	04	LF98004.02.04	ADI V-E
	64		22	24	LF98004.05	IVF V-D
	64		27	29	LF98004.06.01	IVF V-E
	65	4.4	-	-	LF98004.06.02	IVF G-E
	65		02	03	LF98004.06.03	IVF V-E
	65		09	11	LF98004.07	IVF S-D
	66		03	06	LF98004.08	IVF S-E

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF98004.02.01 LF98004.02.04	LF98004.01	LF98004.02.03		LF98004.02.01			
IVF	LF98004.06.01 LF98004.06.03	LF98004.05	LF98004.06.02				LF98004.08	LF98004.07
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF98004 Comentario

Los autores de este libro tratan los dos fenómenos. Para presentar el fenómeno ADI, usan los sistemas de representación verbal, tabular y gráfico, principalmente, mediante ejemplos. Para presentar el fenómeno IVF, apelan a sistemas de representación verbal, gráfico y simbólico, principalmente tanto en ejemplos como en definiciones.

LF98005 Ficha

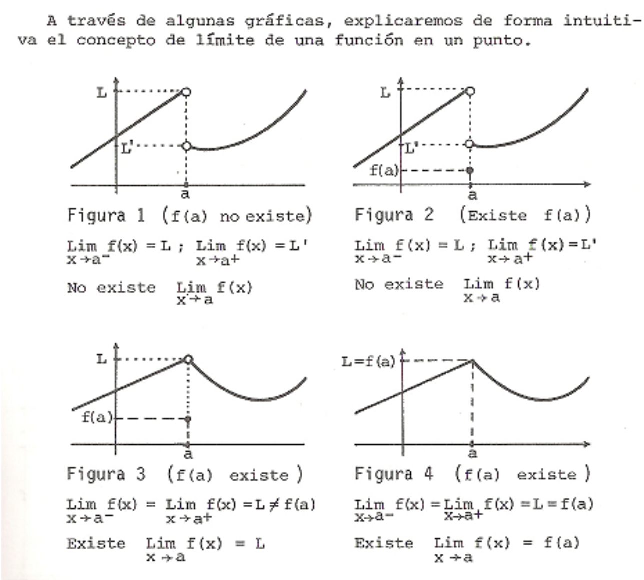
Código	LF98005
Autor	F. Gonzalez y J. Villanova
Titulo	Curso práctico de matemáticas 2º B.U.P.
Editorial	Edunsa
Año	1987
Ubicación	I.E.S Mayorazgo. Málaga
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite de funciones. Tema 9. Límite de funciones I. Páginas: 123-144

LF98005 Secuenciación

1) Introducción intuitiva del concepto de límite utilizando gráficas de funciones continuas y discontinuas. Véase LF98005.01.01 y LF98005.01.02.
2) Concepto de límite de una función en un punto. Definición de límite finito en un punto. Véase LF98005.02. Definiciones de límites infinitos y asíntotas verticales.
3) Definiciones de límites en el infinito.
4) Propiedades de los límites.
5) Ejemplo de cálculo de límites usando la gráfica de una función. Véase LF98005.05
6) Ejemplos de funciones en los que se estudia la existencia o no de límites. Véase LF98005.06.01; LF98005.06.02 y Lf98005.06.03.
7) Problemas de cálculo de límites de funciones.

LF98005 Detalles de los fenómenos observados

LF98005.01.01 ADI G-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98005.01.01

LF98005.01.02 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Explicación de las figuras

En la figura 1 se observa:

1º) Si la variable x se acerca al punto a por la izquierda (recorriendo el eje horizontal) entonces la gráfica se aproxima al punto (a,L), o sea, el valor de f(x) se aproxima al número L. Para expresar este hecho, se escribe la igualdad $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$, y al número L se le llama límite por la izquierda de la función f en el punto a. (la expresión $x \to a^-$ significa que x tiende al valor a, siendo $x < a$)

2º) Si la variable x se acerca al punto a por la derecha, entonces el valor de f(x) se aproxima a L'. Para expresar este hecho se escribe $\lim_{x \to a^+} f(x) = L'$, y se dice que L' es el límite por la derecha de f en el punto a. (La expresión $x \to a^+$ significa que x tiende al punto a, siendo $x > a$)

Fragmento código: LF98005.01.02

LF98005.02 IVF S-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Límite en un punto

Si L es un número real, la igualdad $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que "para todo número real $\varepsilon > 0$ existe otro nº $\delta > 0$, de modo que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$$

Fragmento código: LF98005.02

LF98005.05 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Si un punto x, sobre el eje horizontal, se va acercando al 1 por la izquierda, el punto correspondiente sobre la gráfica tederá a ocupar la posición del punto (1,2). Por tanto, podemos escribir $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$. En cambio, si x se aproxima al 1 por la derecha, la gráfica se dirigirá hacia el punto (1,3). Por tanto, podemos escribir $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$

Fragmento código: LF98005.05

<u>LF98005.06.01 IVF S-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

b) <u>Demostración de la igualdad:</u> $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$

Para demostrar la igualdad anterior, escribe su significado:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 2-\delta < x < 2 \implies |f(x)-1| < \varepsilon$$

es decir, "suponiendo que ε es un número real positivo, arbitrario, tienes que hallar un nº $\delta > 0$, tal que de las desigualdades $2-\delta < x < 2$ se deduzca $|f(x)-1| < \varepsilon$

El camino a seguir en estos casos suele ser el siguiente : <u>Operar en la expresión final, $|f(x)-1|$, hasta encontrar otra, equivalente a ella, en la cual aparezca como factor $x-2$, ó $2-x$, ó $|x-2|$</u>.

No debemos olvidar que estamos considerando $x < 2$ y que, por tanto, se cumple $f(x) = -x+3$. Entonces,

$$|f(x)-1| = |-x+3-1| = |2-x| \underset{*}{=} 2-x \qquad (\text{* porque es } 2-x > 0)$$

Así, ya sabemos que habrá que hallar un número $\delta > 0$ tal que

$$2-\delta < x < 2 \quad \text{implique} \quad 2-x < \varepsilon \qquad (1)$$

Ahora bien, $2-\delta < x < 2 \implies 2-\delta < x \implies 2-x < \delta$, luego, comparando con (1), resulta evidente que podemos tomar $\delta = \varepsilon$

<u>Demostración de la igualdad:</u> $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$

Igual que antes, detallaremos primero lo que queremos probar:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 2 < x < 2+\delta \implies |f(x)-0| < \varepsilon$$

Puesto que consideramos $x > 2$, resulta $f(x) = 2x-4$, luego

$$|f(x)-0| = |2x-4| = 2\cdot|x-2| \underset{*}{=} 2(x-2) \qquad (\text{* porque } x-2 > 0)$$

Así, ya sabemos que habrá que hallar un número $\delta > 0$ tal que

$$2 < x < 2+\delta \quad \text{implique} \quad 2(x-2) < \varepsilon \qquad (2)$$

Ahora bien, $2 < x < 2+\delta \implies x < 2+\delta \implies x-2 < \delta \implies 2(x-2) < 2\delta$ luego, comparando con (2), vemos que basta tomar $2\delta = \varepsilon$, es decir, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Fragmento código: LF98005.06.01

<u>LF98005.06.02 IVF S-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

5. Dada la función $f(x) = 5x - 2$, se pide:

a) Hallar un nº $\delta > 0$ tal que la condición $0 < |x-2| < \delta$ implique $|f(x) - f(2)| < 0'01$

b) Siendo $\varepsilon > 0$, hallar un $\delta > 0$ tal que la condición $0 < |x-2| < \delta$ implique $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$

c) ¿Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$? ¿Cuál es su valor?

a) $|f(x) - f(2)| = |5x-2 - (5 \cdot 2-2)| = |5x - 10| = 5 \cdot |x - 2|$

Entonces, ya sabemos que hay que hallar un nº $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-2| < \delta \quad \text{implique} \quad 5 \cdot |x-2| < 0'01 \qquad (1)$$

Ahora bien, $0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow |x-2| < \delta \Longrightarrow 5 \cdot |x-2| < 5\delta$, luego, comparando con (1), podemos tomar $5\delta = 0'01$, o sea, $\delta = \frac{0'01}{5}$

b) Razona como en el apartado a), poniendo ε en vez de 0'01, y obtendrás fácilmente $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$

c) Según el apartado b), para todo número $\varepsilon > 0$ hay un $\delta > 0$ (por ejemplo $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$) tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(2)| < \varepsilon$$

Fragmento código: LF98005.06.02

<u>LF98005.06.03 IVF S-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

7. Demuéstrese que $\lim_{x \to 3} (x^2 + 3x - 1) = 17$

La igualdad a demostrar significa que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x^2+3x-1 - 17| < \varepsilon \qquad (1)$$

Descomponiendo en factores la expresión final, $x^2 + 3x - 18$, y teniendo en cuenta que es $|x-3| < \delta$, obtenemos:

$$|x^2+3x-1 - 17| = |x^2+3x - 18| = |x-3|\,|x+6| < \delta \cdot |x+6| \qquad (2)$$

Ahora, teniendo en cuenta de nuevo que es $|x-3| < \delta$, vamos a acotar el valor de la expresión $|x+6|$ que aparece en (2). Observa:

$$|x-3| < \delta \Longrightarrow -\delta < x-3 < \delta \Longrightarrow -\delta+3 < x < \delta+3 \Longrightarrow -\delta+9 < x+6 < \delta + 9$$

$$\underset{*}{\Longrightarrow} |x + 6| < \delta + 9 \qquad (\text{* Porque } -(\delta+9) < (-\delta+9))$$

Llevando esta última desigualdad a (2) deducimos:

$$|x^2+ 3x-1 - 17| < \delta(\delta + 9) \qquad (3)$$

Finalmente, comparando (3) con (1), se ve claramente que basta elegir δ de modo que sea positivo y cumpla $\delta(\delta + 9) = \varepsilon$

Entonces,

$$\delta(\delta + 9) = \varepsilon \Longrightarrow \delta^2 + 9\delta - \varepsilon = 0 \Longrightarrow \delta = \frac{-9 + \sqrt{81 + 4\varepsilon}}{2}$$

Nota. Después de la desigualdad (3) se puede terminar de un modo más elegante: Como se trata de hallar solo un valor de δ, podemos intentar buscar un δ que sea menor que 1. Entonces, de (3) se deduce $|x^2 + 3x-1 - 17| < \delta(\delta+9) < \delta(1+9) = 10\delta$. Por tanto, basta elegir δ de modo que sea $\delta < 1$ y $10\delta < \varepsilon$, es decir, basta tomar un δ cualquiera que sea menor que 1 y que $\frac{\varepsilon}{10}$

Fragmento código: LF98005.06.03

LF98005 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
IX	123		05	12	LF98005.01.01	ADI G-E
	123		13	19	LF98005.01.02	ADI V-E
	124		01	07		
	125		01	05	LF98005.02	IVF S-D
	128		10	15	LF98005.05	ADI V-E
	132		04	20	LF98005.06.01	IVF S-E
	133		01	07		
	133		10	25	LF98005.06.02	IVF S-E
	135		05	25	LF98005.06.03	IVF S-E
	136		01	02		

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF98005.01.02 LF98005.05		LF98005.01.01					
IVF							LF98005.06.01 LF98005.06.02 LF98005.06.03	LF98005.02
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF98005 Comentario

El fenómeno de aproximación retroalimentación predomina sobre el aproximación doble intuitiva. Para el fenómeno IVF solo se emplea el sistema de representación simbólico en ambos formatos, por su parte para el fenómeno ADI se emplean los sistemas de representación verbal y gráfico únicamente en ejemplos.

LF98006 Ficha

Código	LF98006
Autor	F. Álvarez Herrero, C. García Jiménez, L. M. Garrido Fernández, A. Vila Mitjà.
Titulo	Matemáticas. Factor-2
Editorial	Vicens-Vives. Barcelona
Año	1987
Ubicación	I.E.S Mayorazgo. Málaga
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite de funciones. Capítulo12. Funciones continuas. Límite de una función en un punto. Páginas 157 -183

LF98006 Secuenciación

1) Define, de forma intuitiva, una función continua.
2) Definición de continuidad. Véase LF98006.02.01 y LF98006.02.02
3) Algebra de las funciones continuas.
4) Algebra de las funciones continuas.
5) Límite finito de una función en un punto. Introduce de forma intuitiva la idea de límite con ayuda de un ejemplo. Continúa con la definición. Véase LF98006.05.01 y LF98006.05.02.
6) Ejercicios resueltos. Véase LF98006.06.01; LF98006.06.02 y LF98006.06.03
7) Límites de funciones continuas.
8) Límites laterales.
9) Operaciones con límites finitos.
10) Límite infinito de una función en un punto.
11) Límites de las funciones racionales.
12) Funciones sin límite.

LF98006 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF98006.02.01 ADI V-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

$f(x_0)$. Más aún, *si x lo aproximamos a x_0, hasta que llegue a confundirse con él, $f(x)$ también se aproxima a $f(x_0)$, hasta llegar a alcanzarlo.*

Fragmento código: LF98006.02.01

<u>LF98006.02.02 IVF V-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

lores de $f(x)$ también sean próximos a $f(x_0)$, de manera que la distancia $|f(x) — f(x_0)|$ puede hacerse tan pequeña como queramos, con tal de que la distancia $|x — x_0|$ sea suficientemente pequeña.

Fragmento código: LF98006.02.02

<u>LF98006.05.01 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

si x está *muy cercano* a 2 (pero es distinto de 2), entonces $f(x)$ está *muy cercano* a 4.

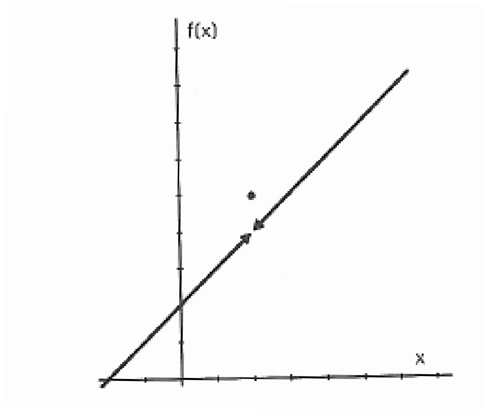
Fragmento código: LF98006.05.01

<u>LF98006.05.02 IVF V-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

también están muy cercanos a l, de manera que la distancia $|f(x)-l|$ puede ser tan pequeña como queramos, con tal de que la distancia $|x-x_0|$ sea suficientemente pequeña.

Fragmento código: LF98006.05.02

<u>LF98006.06.01 ADI G-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98006.06.01

<u>LF98006.06.02 ADI V-E</u>. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

$\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, porque, como ya hemos visto, cuando x se aproxima mucho a 2, $f(x)$ se aproxima mucho a 4.

Comprobamos que, conforme x se aproxima a 2, $f(x)$ se acerca a una cantidad que, si continuásemos indefinidamente el proceso, resultaría ser 2,7725884...

Fragmento código: LF98006.06.02

<u>LF98006.06.03 ADI T-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	$f(x)$
1,9	2,678
1,99	2,763
1,999	2,771
2	no existe
2,001	2,773
2,01	2,782
2,1	2,870

Fragmento código: LF98006.06.03

LF98006 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XII	159		12	13	LF98006.02.01	ADI V-D
	159		20	22	LF98006.02.02	IVF V-D
	163		08	08	LF98006.05.01	ADI V-E
	163		23	24	LF98006.05.02	IVF V-D
	164	5.1; 5.2	-	-	LF98006.06.01	ADI G-E
	164		12	13	LF98006.06.02	ADI V-E
	165		01	03		
	164		19	19	LF98006.06.03	ADI T-E

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF98006.05.01 LF98006.06.02	LF98006.02.01	LF98006.06.01		LF98006.06.03			
IVF		LF98006.02.02 LF98006.05.02						
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF98006 Comentario

Este libro muestra un cambio de tendencia respecto a los anteriores, produciéndose un aumento del fenómeno ADI (5 ocurrencias) frente al fenómeno IVF (2 ocurrencias). Se observa como los códigos del fenómeno ADI se sitúan en los sistemas de representación verbal, gráfico y tabular, principalmente en ejemplos. Frente a los de retroalimentación que únicamente se expresan en el sistema de representación verbal en los dos formatos.

LF98007 Ficha

Código	LF98007
Autor	J. M. Belmonte, G. Montero, Adolfo Negro, Santiago Pérez, Tomas Sierra.
Titulo	Matemáticas 2 Bachillerato
Editorial	Alhambra (Madrid)
Año	1989
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera.
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite de funciones. Capítulo III. Límite de funciones. Continuidad. Páginas 39 –52.

LF98007 Secuenciación

1) Límite de una función en el infinito.
2) Límite de una función en un punto; límites infinitos; límites finitos:

Se plantea el ejemplo $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ en $x_0=3$ y se demuestra de forma intuitiva que su límite es 6. A continuación sobre el mismo ejemplo pero en $x_0=9$ se usa la definición para demostrar que su límite vale 12. Véase LF98007.02.01; LF98007.02.02 y LF98007.02.03.
Definición de límite finito en un punto. Véase LF98007.02.04.

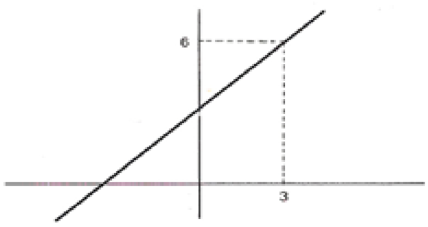
LF98007 Detalles de los fenómenos observados

LF98007.02.01 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Sin embargo, al tomar valores de x muy próximos a 3, sus imágenes van a estar muy próximas a 6.

Fragmento código: LF98007.02.01

LF98007.02.02 ADI G-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF98007.02.02

LF98007.02.03 IVF V-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Es decir, que si fijamos un valor $\varepsilon > 0$, vamos a encontrar otro valor $\delta > 0$, de forma que si la distancia de x a 9 es menor que δ, la distancia de $f(x)$ a 12 será menor que ε. (Por muy pequeño que sea éste.)

Fragmento código: LF98007.02.03

<u>LF98007.02.04 IVF S-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ si}$$

$$\text{dado } \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \text{ si } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Fragmento código: LF98007.02.04

LF98007 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
III	43		05	06	LF98007.02.01	ADI V-E
	43	3.9	-	-	LF98007.02.02	ADI G-E
	43		12	15	LF98007.02.03	IVF V-E
	43		18	18	LF98007.02.04	IVF S-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF98007.02.01		LF98007.02.02					
IVF		LF98007.02.03						LF98007.02.04
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF98007 Comentario

Este libro incluye ambos fenómenos, ADI e IVF. El único sistema de representación no usado es el tabular. El fenómeno ADI se ve solamente en el formato ejemplo, y el IVF en el formato definición.

A4.1.5 Periodo 1995-2005

En este periodo analizamos siete libros: uno de 1996, dos de 1997, otro de 2001, dos de 2002 y uno de 2004. Proceden de los institutos “Pedro Espinosa”, de Antequera (Málaga), “ Mayorazgo”, de Málaga, y nuestra biblioteca personal.

Durante este periodo se promulga y desarrolla la LOGSE en toda España y se inician diferentes críticas que conducirán, sucesivamente, en el siguiente lapso, a nuevas leyes orgánicas. También es este periodo se promulgan la LOCE (2004) aunque su vigencia será muy corta, y la LOE, actualmente en vigor. Sin embargo, los libros estudiados solamente reflejan, como mucho, las críticas recibidas por la LOGSE.

LF99001 Ficha

Código	LF99001
Autor	Adolfo Negro, Cesar Benedicto, Mariano Martínez y José Manuel Poncela. Grupo Azul 21
Titulo	Matematicas 1. CCNN.
Editorial	Santillana. (Madrid)
Año	1996
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera.
Información sobre límites	El límite de funciones aparece inmerso en otro capítulo: Bloque III.Tema 12 Funciones II. Páginas 214 - 225

LF99001 Secuenciación

1) Presenta conocimientos previos necesarios para el desarrollo del tema, incluye ejercicios referentes a estos conocimientos previos y los objetivos que pretende alcanzar.
2) En una introducción a la continuidad, se presentan dos gráficas que corresponden, respectivamente, a la variación de la densidad del agua en función de la temperatura y al rendimiento de un catalizador en función a la temperatura. Se observa que “*para estudiar la continuidad de una función es necesario manejar el concepto de límite de una función en un punto*” y se da una definición intuitiva del límite finito de una función en un punto Véase LF99001.02.01.
Presenta dos ejemplos. Véase LF99001.02.02, LF99001.02.03 y LF99001.02.04
Definición intuitiva de límites laterales. Estudia f(x)=parte decimal de x. Inicia el estudio más detallado con el ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x+4, si\ x \le 0 \\ \dfrac{1}{3x^2-2x+3}, si\ x > 0 \end{cases}$$

cuyos límites laterales, se demuestra, valen, respectivamente, 4 y 3. Véase LF99001.02.05; LF99001.02.06; LF99001.02.07 y LF99001.02.08.

LF99001 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF99001.02.01 ADI V-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Intuitivamente se puede pensar en el límite de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ como el valor al que tienden las imágenes, y, cuando los originales, x, tienden hacia a. Así, si representamos por L el valor del límite cuando la variable x tiende al valor a, se escribe:

Fragmento código: LF99001.02.01

<u>LF99001.02.02 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Tomemos a izquierda y derecha de $x = 2$ sucesiones de valores que tiendan a ese punto, y calculemos los correspondientes valores de $y = f(x)$:

Parece que, tanto por la izquierda como por la derecha, si x tiende a 2, la función tiende a 3. Efectivamente, como muestra la gráfica, $\lim_{x \to 2} (x^2 - 1) = 3$.

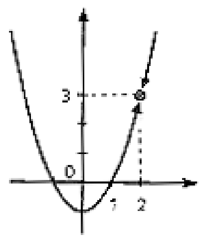
Fragmento código: LF99001.02.02

<u>LF99001.02.03 ADI T-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	…	1,9	1,99	1,999	…		…	2,001	2,01	2,1
y	…	2,61	2,9601	2,996001	…		…	3,004001	3,0401	3,41
				$\longrightarrow$		L	$\longleftarrow$			

Fragmento código: LF99001.02.03

<u>LF99001.02.04 ADI G-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfica y el formato ejemplo.



$f(x) = x^2 - 1.$

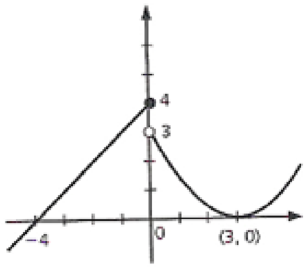
Fragmento código: LF99001.02.04

<u>LF99001.02.05 ADI T-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	…	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	…		…	0,001	0,01	0,1
y	…	3,9	3,99	3,999	…		…	2,998	2,980	2,803
	Semientorno $(-r, 0) \longrightarrow$					?	$\longleftarrow$ Semientorno $(0, +r)$			

Fragmento código: LF99001.02.05

<u>LF99001.02.06 ADI G-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfica y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF99001.02.06

<u>LF99001.02.07 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Cuando nos acercamos a 0 por la izquierda, la función tiende a 4; si lo hacemos por la derecha, tiende a 3, como puede observarse en la figura.

Fragmento código: LF99001.02.07

<u>LF99001.02.08 ADI V-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Se dice que I es el límite lateral por la izquierda de la función $f(x)$, cuando x tiende al número a, si al tomar x valores en un semientorno de la izquierda de a, cada vez más próximos a ese punto, la función toma valores que tienden a I; y se escribe:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = I$$

De manera análoga se define el límite lateral por la derecha, y su expresión es:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = D$$

Para que una función tenga límite en un punto es necesario y suficiente que tenga límite por la derecha y por la izquierda en ese punto, y que ambos coincidan.

Fragmento código: LF99001.02.08

LF99001 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XII	217		12	15	LF99001.02.01	ADI V-D
	217		22	26	LF99001.02.02	ADI V–E
	217		24	24	LF99001.02.03	ADI T-E
	217	3	-	-	LF99001.02.04	ADI G-E
	218		06	06	LF99001.02.05	ADI T-E
	218	5	-	-	LF99001.02.06	ADI G-E
	218		03	06	LF99001.02.07	ADI V-E
	218		11	19	LF99001.02.08	ADI V-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF99001.02.02 LF99001.02.07	LF99001.02.01 LF99001.02.08	LF99001.02.04 LF99001.02.06		LF99001.02.03 LF99001.02.05			
IVF								
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF99001 Comentario

En este libro solamente se observa el fenómeno ADI. No usan la retroalimentación ni la representación simbólica.

LF99002 Ficha

Código	LF99002
Autor	Adolfo Negro, Cesar Benedicto, Mariano Martínez y José Manuel Poncela. Grupo Azul 21
Titulo	Matemáticas 2. CCNN.
Editorial	Santillana. (Madrid)
Año	1997
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera.
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite de funciones. Bloque III. Tema XII Apartado II. Límite de una función en un punto. Páginas 214 –231

LF99002 Secuenciación

1) Presenta conocimientos previos necesarios para el desarrollo del tema, incluye ejercicios referentes a estos conocimientos previos y los objetivos que pretende alcanzar.
2) Límites de sucesiones.
3) Limite de una función en un punto. Presenta el límite de una función en un punto apoyándose en la definición mediante sucesiones. Da una definición intuitiva de límite finito de una función en un punto y concreta aún más la definición utilizando la definición de límite de una sucesión. Véase LF99002.03.01 y LF99002.03.02
Ejemplo de una función a trozos continua, cuyo límite se estudia, de manera intuitiva, en el punto $x_0 = 2$
Siendo
$f(x) = \begin{cases} x^2 \; si \; x \le 2 \\ 4 \; si \; x > 2 \end{cases}$. Análogamente, se estudia, de manera intuitiva, en $x_0 = 1$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Véase LF99002.03.03; LF99002.03.04; LF99002.03.05; LF99002.03.06.
4) Observa la imposibilidad de demostrar la existencia del límite mediante la caracterización por sucesiones, lo que plantea la necesidad de buscar otra definición de límite que asegure la existencia de éste. Definición de límite usando entornos; a la expresión simbólica le acompaña una gráfica. Véase LF99002.04.01; LF99002.04.02; LF99002.04.03. Se plantea la misma función a trozos del apartado anterior y se usa la definición dada para asegurar que el límite en $x_0 = 2$ vale 4, se acompaña de la gráfica y de la demostración usando el lenguaje simbólico, véase LF99002.04.04; LF99002.04.05 y LF99002.04.06.
5) Observa el paralelismo entre entornos y distancias, en el sentido de que un entorno de centro a y radio δ, quiere decir que la distancia entre x y a es positiva y menor que el radio δ; vuelve a expresar todas las definiciones anteriores en términos de distancias. Véase LF99002.05.01 y LF99002.05.02
6) Límites laterales.

LF99002 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF99002.03.01 ADI V-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Intuitivamente, se puede pensar en el límite de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ como el valor al que tienden las imágenes, y, cuando los originales, x, tienden hacia a.

Fragmento código: LF99002.03.01

<u>LF99002.03.02 ADI V-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

L es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = a$, si y sólo si tomando cualquier sucesión de originales distintos de $a (x_1, x_2 \ldots x_n \ldots)$ que tiende hacia a, la sucesión de sus imágenes $(f(x_1), f(x_2) \ldots f(x_n) \ldots)$ tiende hacia L.

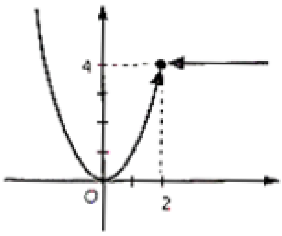
Fragmento código: LF99002.03.02

<u>LF99002.03.03 ADI T-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	…	1,9	1,99	1,999	… → 2 ← …	2,001	2,01	2,1	…
y	…	3,61	3,9601	3,996001	… → 4 ← …	4	4	4	…

Fragmento código: LF99002.03.03

<u>LF99002.03.04 ADI G-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfica y el formato ejemplo.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 2 \\ 4 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

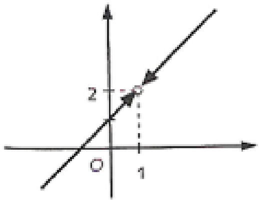
Fragmento código: LF99002.03.04

<u>LF99002.03.05 ADI T-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	…	0,9	0,99	0,999	… → 1 ← …	1,001	1,01	1,1	…
y	…	1,9	1,99	1,999	… → 2 ← …	2,001	2,01	2,1	…

Fragmento código: LF99002.03.05

<u>LF99002.03.06 ADI G-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfica y el formato ejemplo.



$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

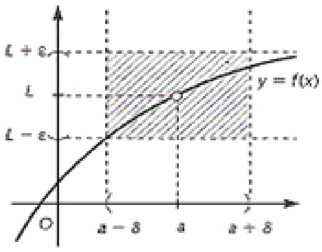
Fragmento código: LF99002.03.06

LF99002.04.01 IVF V-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

L es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ si y sólo si para cualquier entorno de L que se tome, por pequeño que sea, existe un entorno reducido de a cuyos elementos tienen sus imágenes dentro del citado entorno de L.

Fragmento código: LF99002.04.01

LF99002.04.02 IVF G-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Fragmento código: LF99002.04.02

LF99002.04.03 IVF S-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Utilizando lenguaje simbólico, queda:

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall E_\varepsilon (L), \exists E_\delta^* (a) \text{ tal que si } x \in E_\delta^* (a) \text{ entonces } f(x) \in E_\varepsilon (L) \quad [2]$$

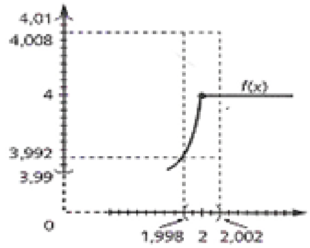
Fragmento código: LF99002.04.03

LF99002.04.04 IVF V-E. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 2 \\ 4 \text{ si } x > 2 \end{cases}$ del ejemplo 1 de la página anterior, halla un entorno reducido de $x = 2$ cuyos elementos tengan sus imágenes en el entorno $E_{0,01}$ (4).

Fragmento código: LF99002.04.04

<u>LF99002.04.05 IVF G-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

Fragmento código: LF99002.04.05

<u>LF99002.04.06 IVF S-E</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato ejemplo.

Para que $x^2 \in E_{0,01}(4) = (3{,}99,\ \ 4{,}01)$ se necesita que $\begin{cases} 3{,}99 < x^2 \\ x^2 < 4{,}01 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{3{,}99} < x < \sqrt{4{,}01} \Rightarrow 1{,}9974984 < x < 2{,}0024984$

Por tanto, si tomamos, por ejemplo, el entorno $E^*_{0,002}(2) = (1{,}998,\ \ 2{,}002) - \{2\}$, estamos seguros de que si $x \in E^*_{0,002}(2)$ entonces $f(x) \in E_{0,01}(4)$ (fig. 6).

Fragmento código: LF99002.04.06

<u>LF99002.05.01 IVF S-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

$$L = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Fragmento código: LF99002.05.01

<u>LF99002.05.02 IVF S-D</u>. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

L es el límite de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ si y sólo si para cualquier distancia ε que se tome, por pequeña que sea, existe otra distancia δ, tal que si la distancia entre x y a es menor que δ entonces la distancia entre $f(x)$ y L se mantiene menor que ε.

Fragmento código: LF99002.05.02

LF99002 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XII	219		09	11	LF99002.03.01	ADI V-D
	219		15	17	LF99002.03.02	ADI V-D
	219		25	25	LF99002.03.03	ADI T-E
	219	3	-	-	LF99002.03.04	ADI G-E
	219		31	31	LF99002.03.05	ADI T-E
	219	4	-	-	LF99002.03.06	ADI G-E
	220		09	12	LF99002.04.01	IVF V-D
	220	5	-	-	LF99002.04.02	IVF G-D
	220		14	14	LF99002.04.03	IVF S-D
	220		18	20	LF99002.04.04	IVF V-E
	220	6	-	-	LF99002.04.05	IVF G-E
	220		22	27	LF99002.04.06	IVF S-E
	220		32	32	LF99002.05.01	IVF S-D
	220		34	37	LF99002.05.02	IVF V-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI		LF99002.03.01 LF99002.03.02	LF99002.03.04 LF99002.03.06		LF99002.03.03 LF99002.03.05			
IVF	LF99002.04.04	LF99002.04.01 LF99002.05.02	LF99002.04.05	LF99002.04.02			LF99002.04.06	LF99002.04.03 LF99002.05.01
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF99002 Comentario

En este libro observamos los fenómenos ADI e IVF, en 6 ocasiones y en 8, respectivamente. Los autores usan los cuatro sistemas de representación que hemos considerado, aunque sobresale el interés que prestan al sistema verbal; el que menos se observa es el sistema de representación tabular (2 ocasiones).

LF99003 Ficha

Código	LF99003
Autor	Grupo Arrixaca. Pedro Jiménez López, Francisco Lozano, Antonio Miñano, Andres Nortes
Titulo	Matematicas 2º Bach. CCSS
Editorial	Santillana. (Madrid)
Año	1997
Ubicación	I.E.S Pedro Espinosa. Antequera.
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite de funciones. Tema 6. Límites y continuidad. Páginas 120 - ¿?

LF99003 Secuenciación

1) Aproximación a la idea de límite de una función. Se presentan ejemplos de la vida diaria para introducir una noción intuitiva de límite. Véase LF99003.01.01; LF99003.01.02. Plantea $f(x)=(x-2)^2$ y estudia cuál es el valor del límite cuando x tiende a 2, de manera intuitiva; para ello elabora dos tablas, una con valores más grandes que 2 y otra con valores más pequeños, ambas con sus respectivas imágenes para cada uno de esos valores, y " observa cómo al ir tomando x valores cada vez más próximos a 2, tanto mayores como menores que él, los correspondientes valores de la función f(x) se van aproximando a 0." Véase LF99003.01.03; LF99003.01.04 Termina el aparado con una serie de ejercicios propuestos.

2) Límite de una función. Plantea $f(x)=\dfrac{x^2(x-2)}{x-2}$ y estudia su límite, de manera intuitiva, cuando x se aproxima a 2; para ello elabora dos tablas, una con valores más grandes que 2 y otra con valores más pequeños, ambas con sus respectivas imágenes para cada uno de esos valores, y observa cómo al aproximarse x a 2, tanto por la derecha $(x \succ 2)$ como por la izquierda $(x \prec 2)$, los valores correspondientes de la función tienden a 4. A este número se le llama límite de la función cuando x tiende a 2." Véase LF99003.02.01; LF99003.02.02 Da una definición de límite finito de una función en un punto. "*Una función f (x) tiene límite L en el punto x = a, cuando podemos hacer f(x) tan próximo a L como queramos, siempre que x esté suficientemente próximo al valor a, pero distinto de a*." Véase LF99003.02.03. Para terminar el apartado se trabaja con el ejemplo $f(x)=E[x]$, donde E es la parte entera, y se estudia su límite cuando x tiende a 3, el razonamiento es el mismo que en los casos anteriores a diferencia de que al ser una función discontinua de salto finito, los límites por la izquierda y la derecha serán distintos, tratándose así los límites laterales. Véase LF99003.02.04; LF99003.02.05.

3) Propiedades de los límites (suma, producto, cociente, y unicidad).

4) Límites infinitos y en el infinito.

LF99003 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF999003.01.01 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

A medida que el tiempo va transcurriendo, la distancia que le separa de su casa va aumentando hasta ser de 10 km.

Conforme transcurre el tiempo, la distancia tiende a diez: $D \to 10$.

Fragmento código: LF99003.01.01

LF999003.01.02 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Conforme transcurre el tiempo, la temperatura del agua va cambiando, se va aproximando a 30° C, la temperatura tiende a treinta: $T \to 30$.

Fragmento código: LF99003.01.02

LF999003.01.03 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

$x < 2$	1	1,5	1,9	1,99	1,999
$f(x)$	1	0,25	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}

$x > 2$	3	2,5	2,1	2,01	2,001
$f(x)$	1	0,25	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}

Fragmento código: LF99003.01.03

LF999003.01.04 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Observa cómo al ir tomando x valores cada vez más próximos a 2, tanto mayores como menores que él, los correspondientes valores de la función $f(x)$ se van aproximando a 0.

Fragmento código: LF99003.01.04

LF999003.02.01 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

$x > 2$	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001
$f(x)$	6,25	4,41	4,04	4,004	4,0004

$x < 2$	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999
$f(x)$	2,25	3,61	3,96	3,996	3,9996

Fragmento código: LF99003.02.01

LF999003.02.02 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Observa cómo al aproximarse x a 2, tanto por la derecha ($x > 2$) como por la izquierda ($x < 2$), los valores correspondientes de la función tienden a 4. Si

Fragmento código: LF99003.02.02

LF99003.02.03 IVF V-D. Se observa el fenómeno IVF, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Una función $f(x)$ tiene límite L en el punto $x = a$, cuando podemos hacer $f(x)$ tan próximo a L como queramos, siempre que x esté suficientemente próximo al valor a, pero distinto de a. Se representa por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{o} \quad f(x) \to L \ \ \textbf{cuando} \ \ x \to a$$

Fragmento código: LF99003.02.03

<u>LF999003.02.04 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

cuando x tiende a 3, no tiende a un valor determinado. Al aproximarse x a 3 por la derecha, $f(x)$ tiende a 3, y cuando lo hace por la izquierda, $f(x)$ tiende a 2. En este caso, la función no tiene límite en el punto $x = 3$.

Si hacemos tender solamente x por la derecha de 3 ($x \to 3^+$), la función $E(x)$ tiende a 3. En este caso decimos que el límite por la derecha de la función es 3 y lo representamos por $\lim\limits_{x \to 3^+} E(x) = 3$ o $E(x) \to 3$ cuando $x \to 3^+$.

Si hacemos tender solamente x por la izquierda de 3 ($x \to 3^-$), la función $E(x)$ tiende a 2. En este caso decimos que el límite por la izquierda de la función es 2, y lo representamos por $\lim\limits_{x \to 3^-} E(x) = 2$ o $E(x) \to 2$ cuando $x \to 3^-$.

Fragmento código: LF99003.02.04

<u>LF999003.02.05 ADI T-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

Tabla de $f(x) = E(x)$

$x > 3$	3,5	3,1	3,01
$f(x)$	3	3	3

$x < 3$	2,5	2,9	2,99
$f(x)$	2	2	2

Fragmento código: LF99003.02.05

LF99003 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
VI	121	No	08	10	LF99003.01.01	ADI V-E
	121	No	14	15	LF99003.01.02	ADI V-E
	121	No	26	27	LF99003.01.03	ADI T-E
	121	No	28	30	LF99003.01.04	ADI V-E
	122	No	06	06	LF99003.02.01	ADI T-E
	122	No	08	12	LF99003.02.02	ADI V-E
	122	No	15	17	LF99003.02.03	IVF V-D
	122	No	23	32	LF99003.02.04	ADI V-E
	122	3	-	-	LF99003.02.05	ADI T-E

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF99003.01.0 LF99003.01.02 LF99003.01.04 LF99003.02.02 LF99003.02.04				LF99003.01.03 LF99003.02.01 LF99003.02.05			
IVF		LF99003.02.03						
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF99003 Comentario

El fenómeno de aproximación doble intuitiva predomina sobre el de retroalimentación. Para presentar el fenómeno ADI, se usa los sistemas de representación verbal y tabular, únicamente con el formato ejemplo. El fenómeno IVF, solo lo observamos en una ocasión mediante el sistema de representación verbal y el formato definición.

LF00001 Ficha

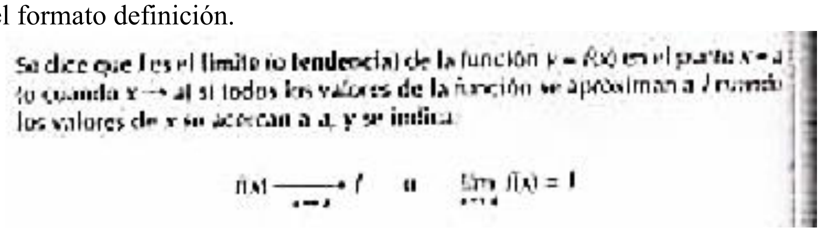
Código	LF00001
Autor	Miguel Ángel Martín Martín, Manuel Morán
Titulo	Matemáticas 1º Bachillerato Ciencias de la Salud, Naturaleza y Tecnología
Editorial	Bruño (Madrid)
Año	2001
Ubicación	I.E.S Mayorazgo. Málaga
Información sobre límites	El límite de funciones aparece inmerso en el Capítulo X: Continuidad y límites de funciones. Páginas 258-283.

LF00001 Secuenciación

1) Definición intuitiva de límite de la función en un punto. Véase LF00001.01
2) Representación gráfica. Utiliza en tres ejemplos: una función continua y dos funciones discontinuas (en la primera el valor de $f(x)$ en $x_0 = a$
x=a no coincide con $f(a)$; en la segunda no está definida $f(x)$ en $x_0 = a$). Véase LF00001.02
3) Ejemplos cotidianos donde aparece el concepto de límite: tiempo de reacción en un frenazo (velocidad de ejecución de un acto que tiende a aproximarse a cero) y colgar un cuadro (encontrar un punto de equilibrio; para que quede colgado correctamente, el valor del ángulo se debe aproximar a 0).
4) Calcula el límite de $f(x) = x^2 + 1$ cuando x tiende a 2. Para ello, se elaboran dos tablas que se acercan por la derecha y por la izquierda a 2. Presenta también una representación gráfica del resultado obtenido. Véase LF00001.04.
5) Calcula el valor del límite de la función $v(t) = v_0\left(1 + \left(t/273\right)\right)$ cuando t tiende a -273, obteniéndose 0 como dicho valor. A continuación se realiza la representación gráfica.

LF00001 Detalles de los fenómenos observados

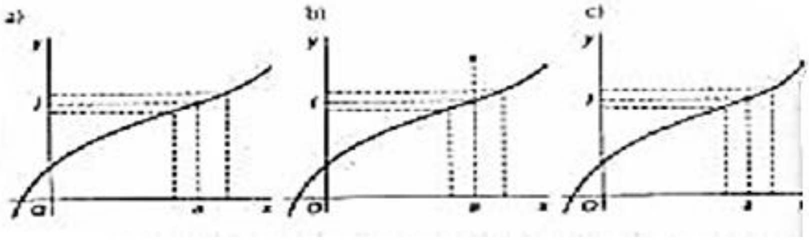
<u>LF00001.01 ADI V-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.


Se dice que l es el límite o tendencia de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ (o cuando $x \to a$) si todos los valores de la función se aproximan a l cuando los valores de x se acercan a a, y se indica

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a} f(x) = l$$

Fragmento código: LF00001.01

<u>LF00001.02 ADI G-D.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



Fragmento código: LF00001.02

<u>LF00001.04 ADI T-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	1	1,9	1,99	1,999	1,9999
f(x)	2	4,61	4,9601	4,9960	4,9936

x	3	2,1	2,01	2,001	2,0001
f(x)	10	5,41	5,0401	5,0040	5,0004

Fragmento código: LF00001.04

LF00001 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XV	272		06	11	LF00001.01	ADI V-D
	272	10.12	-	-	LF00001.02	ADI G-D
	273		19	20	LF00001.04	ADI T-E

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI		LF00001.01		LF00001.02	LF00001.04			
IVF								
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF00001 Comentario

En este libro solamente se observa el fenómeno ADI. No usan la retroalimentación ni la representación simbólica.

LF00002 Ficha

Código	LF00002
Autor	Adolfo Negro Fernández, Antonio Nevot Luna, Roberto Rodríguez del Rio, Javier Soler Areta, Alicia Delibes
Titulo	Matemáticas Aplicadas a las CCSS 1
Editorial	McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U
Año	2002
Ubicación	Biblioteca personal
Información sobre límites	Unidad 11: Límites y continuidad. Páginas: 211-230

LF00002 Secuenciación

1) Presentación del tema a través de ejemplos de la vida cotidiana.
2) Sucesiones.
3) El número e.
4) Límite de una función en un punto. Límites laterales. Se comienza con un ejemplo concreto de la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, y se observa que su dominio son todos los reales excepto el número 2. Por eso se comienza a estudiar lo que ocurre justamente alrededor del 2. Se hacen unas tablas y gráficas de la función, y con la ayuda de las mismas se comenta lo que sería le límite. Se afirma también que como los límites laterales han salido iguales, la función tiene límite, y que este valor es justamente el 4. Véase LF00002.04.01; LF00002.04.02 y LF00002.04.03. El siguiente paso es intentar definir el concepto de límite. Véase LF00002.04.04 Y por último en el apartado se pone un ejemplo de una función a trozos para comprobar que en este caso los límites laterales no son iguales. Se termina el apartado con una serie de actividades propuestas.
5) Continuidad.
6) Límites en el infinito. Asíntotas.
7) Cálculo de límites: límites en un punto.
8) Cálculo de límites: límites en el infinito.

LF00002 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF00002.04.01 ADI V-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

En primer lugar, hay que tener en cuenta que, a diferencia de lo que ocurre con las sucesiones, en las que n siempre tiende a $+\infty$, al número 2 es posible acercarse desde la izquierda o desde la derecha. Se prueba entonces con algunos valores de x a la izquierda y a la derecha.

Se comprueba que el número al que se acerca es 4, o sea, que en este caso 4 es el *límite de f(x) cuando x tiende a 2 por la izquierda,* y se representa así:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=4$$

También ahora se produce un acercamiento al número 4, por lo que se puede afirmar que 4 es el *límite de* $f(x)$ *cuando x tiende a 2 por la derecha*, y se representa:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

A los límites por la izquierda y por la derecha se les llama **límites laterales.**

Cuando, como en este caso, los dos límites existen y son iguales, se dice que existe el límite cuando x tiende a 2, y su valor es precisamente el de los límites laterales, es decir, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$.

Fragmento código: LF00002.04.01

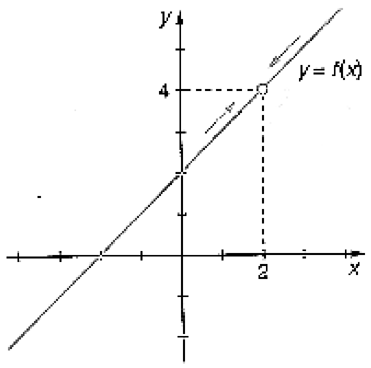
LF00002.04.02 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	1,75	1,9	1,99	1,999
$f(x)$	3,75	3,9	3,99	3,999

x	2,25	2,1	2,01	2,001
$f(x)$	4,25	4,1	4,01	4,001

Fragmento código: LF00002.04.02

LF00002.04.03 ADI G-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Gráfica de y = f(x)

Fragmento código: LF00002.04.03

LF00002.04.04 ADI V-D. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

El límite de una función $f(x)$ en un punto a es el valor L al que se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima al valor de a. Simbólicamente: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Fragmento código: LF00002.04.04

LF00002 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
VI	215		10	27	LF00002.04.01	ADI V-E
	215		15	22	LF00002.04.02	ADI T-E
	215	11.1	-	-	LF00002.04.03	ADI G-E
	216		04	05	LF00002.04.04	ADI V-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF00002.04.01	LF00002.04.04	LF00002.04.03		LF00002.04.02			
IVF								
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF00002 Comentario

Los autores de este libro solo tratan el fenómeno ADI, principalmente a través del formato ejemplo. No emplean el sistema de representación simbólico.

LF00003 Ficha

Código	LF00003
Autor	Esther Bescos, Zoila Pena
Titulo	Matemáticas 1º Bach (Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología)
Editorial	Oxford Educación
Año	2002
Ubicación	Biblioteca personal
Información sobre límites	Capítulo dedicado al límite de funciones. Tema 9. Límite y continuidad Páginas 202 – 229

LF00003 Secuenciación

1) Comienza el primer punto tratando las sucesiones.
2) En el segundo punto se trabaja la ”idea intuitiva del límite de una sucesión”.
3) A continuación se trabaja con las operaciones con sucesiones.
4) Para pasar al cálculo de límites.
5) Y particularmente con el número e.
6) El sexto apartado ya comienza a tratar los límites de las funciones, con un primer bloque en el que se ven los límites en el infinito.
7) En el apartado titulado “Límites laterales de una función en un punto”, trabaja de forma paralela a las sucesiones, en el sentido de que utiliza ejemplos usando algunos de los sistemas de representación simbólico, tabular y gráfico: $f(x) = x^2 - 1$ y estudia qué ocurre cuando nos acercamos a 3 por la derecha y por la izquierda; $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ y estudia qué ocurre en los valores cercanos a 2 por la derecha y por la izquierda; $f(x) = E[x]$, donde E representa la parte entera, y se estudia qué ocurre en los valores cercanos a 1 por la derecha y por la izquierda; por último, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, y se estudia qué ocurre en los valores cercanos a 0 por la derecha y por la izquierda. Véase LF00003.07.01; LF00003.07.02; LF00003.07.03; LF00003.07.04; LF00003.07.05; LF00003.07.06
Presenta la gráfica de una función que tiene límites laterales distintos en 2 y propone una serie de actividades.
8) Dedica un apartado al “Límite de una función en un punto” y comienza puntualizando la relación entre el límite y los límites laterales: *“si existen los dos límites laterales de una función en a, son finitos y coinciden; entonces existe también el límite de la función cuando x tiende a a. Si no es así la función no tiene límite en x = a.”* Se hace referencia a los límites infinitos y se da la siguiente definición *“Se dice que el número real, L, es el límite de una función en el punto a si, al tomar valores de x cada vez más próximos a a, sus imágenes correspondientes, f(x), están también más próximas a L”;* incluye una gráfica y la afirmación “*si* $|x - a|$ *tiende a 0 entonces* $|f(x) - L|$ *tiende a 0”*. Véase LF00003.08.01; LF00003.08.02 y LF00003.08.03.

LF00003 Detalles de los fenómenos observados

<u>LF00003.07.01 ADI T-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	2,90	2,95	2,99	3	3,01	3,05	3,10
f(x)	7,41	7,7025	7,94	8	8,0601	8,3025	8,61

Fragmento código: LF00003.07.01

LF00003.07.02 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	1,95	1,99	1,999	...	2,001	2,01	2,05
f(x)	3,95	3,99	1,999	...	4,001	4,01	4,05

Fragmento código: LF00003.07.02

LF00003.07.03 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
f(x)	0	0	0	1	1	1	1

Fragmento código: LF00003.07.03

LF00003.07.04 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Como se observa en la tabla, los valores leídos de izquierda a derecha hacia $x = 3$ y los leídos de derecha a izquierda hacia $x = 3$, convergen en el valor 8. Por eso se escribe $\lim_{x \to 3} (x^2 - 1) = 8$. Además, $f(3) = 8$.

Fragmento código: LF00003.07.04

LF00003.07.05 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Si nos aproximamos a $x = 2$ tomando valores cada vez más cercanos a 2 por la izquierda, el límite de las imágenes es 4, igual que si lo hacemos por la derecha. Por tanto, se escribe:

Fragmento código: LF00003.07.05

LF00003.07.06 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

- Para valores de x tan próximos a 1 como se desee, pero menores que él, las imágenes siempre son cero.
- Para valores de x tan próximos a 1 como se desee, pero mayores que él, las imágenes siempre valen 1.

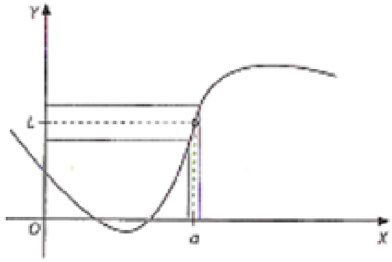
Fragmento código: LF00003.07.06

LF00003.08.01 ADI V-D. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato definición.

Se dice que un número real, L, es el límite de una función en el punto a si, al tomar valores de x cada vez más próximos a a, sus imágenes correspondientes, $f(x)$, están también más próximas a L (figura 9.23).

Fragmento código: LF00003.08.01

LF00003.08.02 ADI G-D. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato definición.



Fragmento código: LF00003.08.02

LF00003.08.03 ADI S-D. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación simbólico y el formato definición.

Intuitivamente, esto significa que si $|x - a| \to 0$, entonces $|f(x) - L| \to 0$.

Fragmento código: LF00003.08.03

LF00003 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
IX	223		15	15	LF00003.07.01	ADI T-E
	223		27	27	LF00003.07.02	ADI T-E
	224		13	13	LF00003.07.03	ADI T-E
	223		16	18	LF00003.07.04	ADI V-E
	223		29	31	LF00003.07.05	ADI V-E
	224		07	10	LF00003.07.06	ADI V-E
	226		14	16	LF00003.08.01	ADI V-D
	226	9.23	-	-	LF00003.08.02	ADI G-D
	226		17	17	LF00003.08.03	ADI S-D

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF00003.07.04 LF00003.07.05 LF00003.07.06	LF00003.08.01		LF00003.08.02	LF00003.07.01 LF00003.07.02 LF00003.07.03			LF00003.08.03
IVF								
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF00003 Comentario

Los autores de este libro solo tratan el fenómeno ADI, principalmente a través del formato ejemplo.

LF00004 Ficha

Código	LF00004
Autor	J. R Vizmanos M. Anzola
Titulo	Algoritmo. Matemáticas Aplicadas a las CCSS 1
Editorial	Ediciones SM, Madrid.
Año	2004
Ubicación	Biblioteca personal
Información sobre límites	Análisis de funciones II. Tema 12: Tendencia y continuidad. Páginas: 173-190

LF00004 Secuenciación

1) Presentación del tema a través de ejemplos de la vida cotidiana. Véase LF0004.01
2) Tendencia y límite: sucesiones nulas.
3) Tendencia y límite: sucesiones no nulas.
4) Límite más infinito de una sucesión.
5) Límite menos infinito de una sucesión.
6) La avaricia del usurero y el número e.
7) Límite de funciones: idea intuitiva.
Se inicia el apartado comentando que se utilizaran las sucesiones para el estudio de la tendencia y el límite. También se sugiere utilizar la calculadora.
Se comienza con un ejemplo concreto de la función $f(x) = x^2$, y se observa a través de varios sistemas de representación, concretamente el gráfico el tabular y el verbal, la idea intuitiva de que al tomar valores cercanos a 2 sus imágenes están cercanas a 4. Se pone otro ejemplo en el que no se cumple lo anterior. Concretamente la función $f(x) = E[x]$. Con el fin de observar la diferencia entre los límites laterales. Y también se presenta un tercer ejemplo para observar la idea de límite infinito en un punto. Se termina con una serie de ejercicios resueltos. Véase LF0004.07.01; LF0004.07.02; LF0004.07.03; LF0004.07.04; LF0004.07.05 y LF0004.07.06
8) Límite de funciones: definición. La definición de límite que se da es la de la caracterización por sucesiones, que no se trabaja en la investigación.
9) Límites determinados e indeterminados.
10) Límite de funciones racionales.
11) Límite de funciones irracionales.
12) Continuidad en un punto

LF00004 Detalles de los fenómenos observados

LF00004.01 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Si el kilo de caramelos está próximo a 10 €, el coste de 5 kg está próximo a 50 €.

Si el kilo de jamón serrano cuesta alrededor de 20 €, un jamón de 5 kg costará aproximadamente 100 €.

En esta unidad se formaliza la idea «tendencia y límite» estudiada en cursos anteriores.

Fragmento código: LF00004.01

LF00004.07.01 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

Por la izquierda (2^-):

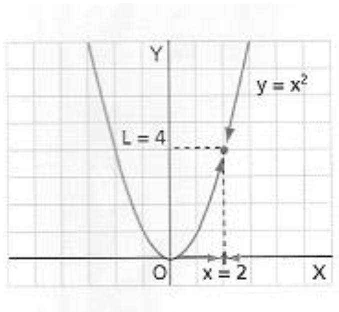
$x_n \longrightarrow 2^-$	1	1,9	1,99	1,999	...
$f(x_n) \longrightarrow ?$	1	1	1	1	...

Por la derecha (2^+):

$x_n \longrightarrow 2^+$	3	2,1	2,01	2,001	...
$f(x_n) \longrightarrow ?$	3	2	2	2	...

Fragmento código: LF00004.07.01

LF00004.07.02 ADI G-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfica y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF00004.07.02

LF00004.07.03 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

Si los valores x_n tienden a 2 tanto por la izquierda (2^-) como por la derecha (2^+), los valores correspondientes de la función $f(x_n)$ se aproximan a 4.

En general, si tomamos una sucesión cualquiera de números que tienda hacia 2, la sucesión $f(x_n)$ correspondiente tenderá hacia 4.

Este número se dice que es el **límite** de la función en $x = 2$.

Fragmento código: LF00004.07.03

LF00004.07.04 ADI T-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación tabular y el formato ejemplo.

$x_n \longrightarrow 2^-$	1	1,9	1,99	1,999	...
$f(x_n) \longrightarrow ?$	3	6,5	6,95	6,995	...

Fragmento código: LF00004.07.04

LF00004.07.05 ADI V-E. Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación verbal y el formato ejemplo.

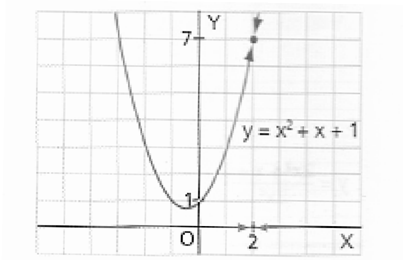
1. Calcular el límite de la función $f(x) = x^2 + x + 1$ cuando x tiende a 2 utilizando una tabla de valores.

Observando la tabla se ve que la sucesión de los valores de la función tiende hacia 7. Si se repite con cualquier otra sucesión se obtendría el mismo valor.

El límite de la función f(x) en x = 2 es 7.

Fragmento código: LF00004.07.05

<u>LF00004.07.06 ADI G-E.</u> Se observa el fenómeno ADI, usan el sistema de representación gráfico y el formato ejemplo.



Fragmento código: LF00004.07.06

LF00004 Cuadros resumen

Capítulo	Página	Figura	Línea Inicial	Línea Final	Código	Fenómeno
XII	173		01	03	LF0004.01	ADI V-E
	180		11	13	LF0004.07.01	ADI T-E
	180	Fig 1	-	-	LF0004.07.02	ADI G-E
	180		14	19	LF0004.07.03	ADI V-E
	181		20	21	LF0004.07.04	ADI T-E
	181		18	24	LF0004.07.05	ADI V-E
	181	Fig 2	-	-	LF0004.07.06	ADI G-E

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI	LF0004.01 LF0004.07.03 LF0004.07.05		LF0004.07.02 LF0004.07.06		LF0004.07.01 LF0004.07.04			
IVF								
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

LF00004 Comentario

Los autores de este libro solo tratan el fenómeno ADI. No emplean el sistema de representación simbólico ni el formato definición.

Anexo A4.2 Fragmentos utilizados en entrevistas a profesores

Creímos conveniente seleccionar fragmentos de libros de texto de la muestra para su discusión con profesores de educación secundaria. En este anexo presentamos esos fragmentos y su ubicación, además del código asignado para su uso en el segundo estudio empírico con profesores. El contexto de uso se presenta en el Capítulo 5.

1.- Fenómeno ADI sistema de representación verbal formato definición (ADI V-E). Asignado como fragmento I, en las entrevistas a profesores.

LF97004.01.04

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, y $x_o = 2$, se verifica:

que si consideramos la sucesión

$$1,\ 1'9,\ 1'99,\ \ldots,\ 1'999\ \ldots \text{ que tiende a } 2$$

entonces

$$f(1) = 1^2,\ f(1'9) = 1'9^2,\ \ldots,\ (1'99 \overset{n}{\ldots} 9)^2,\ \ldots \text{ tiende a } 4,$$

(Fragmento tomado de Martínez Losada Ángel, Hernández Aina Fernando y Lorenzo Miranda Francisco (1976) .*Matemáticas 2º B.U.P*. Madrid: Tecniban S.A.)

2.- Fenómeno ADI sistema de representación verbal formato definición (ADI V-D).

Asignado como fragmento E, en las entrevistas a profesores.

LF99001.02.01

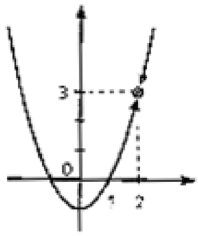
Intuitivamente se puede pensar en el límite de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ como el valor al que tienden las imágenes, y, cuando los originales, x, tienden hacia a. Así, si representamos por L el valor del límite cuando la variable x tiende al valor a, se escribe:

(Fragmento tomado de Negro Adolfo, Benedicto Cesar, Martínez Mariano y Poncela José Manuel (1997) .*Matemáticas 2*. *CCNN*. Madrid: Santillana.)

3.- Fenómeno ADI sistema de representación gráfico formato ejemplo (ADI G-E)

Asignado como fragmento D, en las entrevistas a profesores.

LF99001.02.04



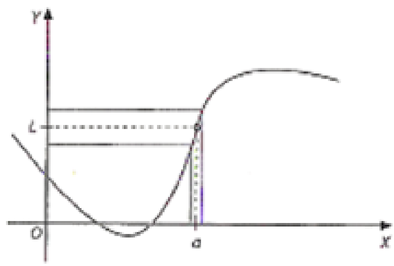
$f(x) = x^2 - 1.$

(Fragmento tomado de Negro Adolfo, Benedicto Cesar, Martínez Mariano y Poncela José Manuel (1996) .*Matemáticas 1*. *CCNN*. Madrid: Santillana.)

4.- Fenómeno ADI sistema de representación gráfico formato definición (ADI G-**D)**

Asignado como fragmento F, en las entrevistas a profesores.

LF00003.08.02



(Fragmento tomado de Bescos Esther y Pena Zoila (2002). *Matemáticas 1º Bach (Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*. *Tecnología)*. Madrid: Oxford Educación.)

5.- Fenómeno ADI sistema de representación tabular formato ejemplo (ADI T-E)

Asignado como fragmento A, en las entrevistas a profesores.

LF99002.02.03

x	…	1,9	1,99	1,999	… → 2 ← …	2,001	2,01	2,1	…
y	…	3,61	3,9601	3,996001	… → 4 ← …	4	4	4	…

(Fragmento tomado de Negro Adolfo, Benedicto Cesar, Martínez Mariano y Poncela José Manuel (1997) .*Matemáticas 2*. *CCNN*. Madrid: Santillana)

6.- Fenómeno IVF sistema de representación verbal formato ejemplo (IVF V-E)

Asignado como fragmento G, en las entrevistas a profesores.

LF98007.02.03

Es decir, que si fijamos un valor $\varepsilon > 0$, vamos a encontrar otro valor $\delta > 0$, de forma que si la distancia de x a 9 es menor que δ, la distancia de $f(x)$ a 12 será menor que ε. (Por muy pequeño que sea éste.)

(Fragmento tomado de Belmonte J. M., Montero G., Negro Adolfo, Pérez Santiago y Sierra Tomas. (1989). *Matemáticas 2* Madrid: Alhambra.)

7.- Fenómeno IVF sistema de representación verbal formato definición (IVF V-D)

Asignado como fragmento K, en las entrevistas a profesores.

LF94001.06

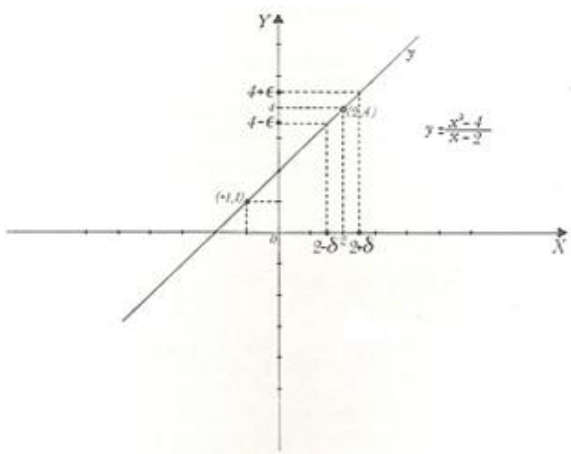
Las definiciones precedentes pueden resumirse en la siguiente: *Diremos que* b *es el límite de* f(x) *cuando* x→a; *si fijado un entorno de* b *se puede determinar un entorno de* a, *de modo que los valores de* f(x) *correspondientes a puntos de este entorno (salvo a lo sumo el* f(a)*), quedan contenidos en el entorno de* b.

(Fragmento tomado de Navarro Borras F. y Rios Sixto (1944) *Curso Preliminar de Análisis Matemático*. Madrid: Stylos)

8.- Fenómeno IVF sistema de representación gráfico formato ejemplo (IVF G-E)

Asignado como fragmento C, en las entrevistas a profesores.

LF97003.03.03

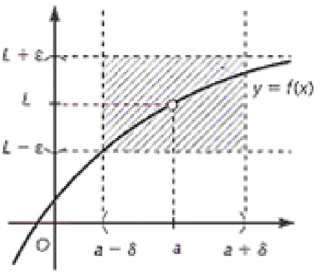


(Fragmento tomado de Guillén Barona Javier, Navarro Roberto, Peña Juan Antonio y Ferrer Martínez Sebastián (1976) .*Matemáticas 2º Bachillerato*. Madrid: Magisterio Español)

9.- Fenómeno IVF sistema de representación gráfico formato definición (IVF G-D)

Asignado como fragmento H, en las entrevistas a profesores.

LF99002.04.02



$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

(Fragmento tomado de Negro Adolfo, Benedicto Cesar, Martínez Mariano y Poncela José Manuel (1997) .Matemáticas 2. CCNN. Madrid: Santillana.)

10.- Fenómeno IVF sistema de representación simbólico formato ejemplo (IVF S-E)

Asignado como <u>fragmento B</u>, en las entrevistas a profesores.

LF97004.02.02

Por ejemplo, se verifica que $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 1) = 10$, porque elegido $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \frac{\varepsilon}{7}$ tal que, para todo x que cumple $|x - 3| < \delta$, es $|(x^2 + 1) - 10| < \varepsilon$. En efecto $|x^2 + 1 - 10| = |x^2 - 9| = |x - 3| \cdot |x + 3| < |x - 3| \cdot 7$, para todo $x \in (2,4)$, pues en este caso $x + 3 \in (2 + 3, 4 + 3)$, o sea $x + 3 < 7$, luego, si $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}$, será:

$$|x^2 + 1 - 10| < |x - 3| \cdot 7 < \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 = \varepsilon$$

y esto sucede para cada $\varepsilon > 0$.

(Fragmento tomado de Martínez Losada Ángel, Hernández Aina Fernando y Lorenzo Miranda Francisco (1976) .*Matemáticas 2º B.U.P*. Madrid: Tecniban S.A.)

11.- Fenómeno IVF sistema de representación simbólico formato definición (IVF S-D)

Asignado como <u>fragmento J</u>, en las entrevistas a profesores.

LF97003.02.01

Diremos que una función $f(x)$ tiene por límite b cuando x tiende a a, y lo simbolizaremos por

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

cuando para todo número positivo ε (por pequeño que sea) exista un número positivo δ, dependiente de ε, tal, que se cumpla:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

(Fragmento tomado de Guillén Barona Javier, Navarro Roberto, Peña Juan Antonio y Ferrer Martínez Sebastián (1976) .*Matemáticas 2º Bachillerato*. Madrid: Magisterio Español)

CAPÍTULO 5º: Los fenómenos ADI e IVF en relatos de profesores

[...] la posibilidad de la conversación descansa sobre el juego de arrojarse mutuamente preguntas y respuestas. Ahora bien, no hay una sola declaración que no reciba su sentido último [...] de la pregunta a la que da una respuesta. A esto le llamo yo el carácter hermenéutico del hablar: al hablar, no nos transmitimos mutuamente estados de cosas bien determinados, sino que, a través del diálogo con el otro, trasponemos nuestro propio saber y aspiraciones a un horizonte más amplio y más rico.

Hans-Georg Gadamer

Introducción

Este capítulo describe evidencias, obtenidas mediante entrevistas, acerca de cómo usan los profesores de secundaria los fenómenos ADI e IVF.

El apartado 5.1 explica el proceso seguido hasta obtener conclusiones. En los siguientes apartados desarrollamos los principales “momentos” del proceso.

En el apartado 5.2 describimos la selección de fragmentos entregados a los profesores que abarcan, cada uno, un ejemplo de código de fenómeno hallado efectivamente en algún libro de texto.

En el apartado 5.3 recogemos el diseño del modelo de entrevista, incluyendo las entrevistas piloto y reuniones del equipo de investigación que dieron, como principales resultados:

- Un guión para las entrevistas definitivas.
- La explicitación de las categorías y dimensiones usadas para el análisis de los resultados.
- Un protocolo de actuación para la investigadora durante las entrevistas.

El apartado 5.4 lo dedicamos a describir la muestra de profesores mediante algunas variables secundarias. Mencionamos algunas amenazas asociadas a la práctica de las entrevistas semi-estructuradas.

El análisis de la información obtenida se realizó en dos niveles. El primer nivel corresponde al estudio sistemático de lo dicho por cada profesor, basado en cinco ideas destinadas a definir lo que denominamos el “perfil fenomenológico” de cada profesor. En el apartado 5.5 presentamos el estudio correspondiente a un profesor, y remitimos la secuencia completa de estudios individuales al Anexo A5.1, desarrollando un plan análogo al del Capítulo 4º.

El apartado 5.6 contiene una propuesta de integración de los estudios individuales, apelando a dos focos de interés propios de esta memoria: los fenómenos ADI e IVF y los profesores de educación secundaria.

Hemos dedicado el apartado 5.7 a comparar los resultados de estas entrevistas con los resultados obtenidos en el análisis de libros de texto de secundaria (Capítulo 4º).

El apartado 5.8 cierra el capítulo con el enunciado de conclusiones obtenidas.

Este capítulo incluye los siguientes anexos:

A5.1 Relatos de los profesores

A5.2 Guión entregado a los profesores en el primer encuentro, diseñado como resultado de las entrevistas piloto y las reuniones del equipo de investigación.

A5.3 Documento escaneado de materiales aportados por el "profesor X" durante el desarrollo de su entrevista.

A5.4 Fragmentos escaneados de los guiones entregados a los profesores en los que se recoge información general.

A5.5 a A5.13 Fragmentos escaneados de las anotaciones de la investigadora en cada entrevista.

A5.14 a A5.22 Transcripciones de las entrevistas.

5.1 Panorámica del proceso seguido

Hemos entrevistado a profesores de educación secundaria para analizar los relatos que hacen de su enseñanza sobre el límite finito de una función en un punto y para extraer información sobre los fenómenos que hemos descrito en el Capítulo 3º y que hemos observado en libros de texto (ver Capítulo 4º). Este apartado resume el modo en que hemos actuado, el cual estructuramos así: (a) materiales empleados en las entrevistas, (b) diseño del modelo de entrevista, (c) realización de las entrevistas y (d) conclusiones.

Materiales empleados en las entrevistas

El objetivo principal de estas entrevistas es obtener relatos de la enseñanza del límite finito de una función en un punto. Un requisito esencial es disponer de un patrón común, para generar respuestas, que permita realizar a posteriori un estudio individual sistemático y estudios más globales. Este patrón común lo hemos extraído de los libros de texto estudiados, seleccionando fragmentos relativos a los dos fenómenos que nos ocupan (ADI e IVF). Corresponden a once de los doce códigos de fenómeno hallados en la muestra de libros de texto. Descartamos un fragmento por haberse encontrado el código de fenómeno correspondiente solamente en un caso. Con la elección de los fragmentos hemos procurado abarcar el periodo de tiempo 1944-2002. Estos fragmentos se describen en el apartado 5.2 y se han reproducido en el Anexo A4.2.

Diseño del modelo de entrevista

El modelo de entrevista se elaboró de modo inductivo; cuatro entrevistas piloto y tres reuniones del equipo de investigación, progresivamente, permitieron establecer un modelo de entrevista semi-estructurada que se ajustaba a los fines perseguidos.

El modelo de entrevista fue discutido en un seminario de investigación del grupo Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM y está descrito en Sánchez, Claros y Coriat (2008). (Véase el apartado 5.3.)

Realización de las entrevistas

Hemos entrevistado, por separado, a nueve profesores de matemáticas de bachillerato de ambos sexos que trabajan en la provincia de Málaga y cuya antigüedad es variada. En el apartado 5.4 exponemos datos de la muestra y las variables secundarias obtenidas, así como los posibles inconvenientes asociados a la práctica de las entrevistas semi-estructuradas.

Conclusiones de las entrevistas

El estudio y análisis de cada entrevista y las principales pautas para obtener conclusiones fueron guiados, a grandes rasgos, por un protocolo de actuación que describimos en 5.3.1. Cada entrevista se estudió por separado; además, elaboramos un estudio destinado a integrar resultados. Cada estudio individual se ha desarrollado sistemáticamente en torno a seis criterios. El estudio global lo desarrollamos con respecto a dos focos cercanos a este trabajo: los fenómenos y los profesores. Los dos estudios que, conjuntamente, permiten obtener conclusiones se han desarrollado, sucesivamente, en los apartados 5.5 (individuales) y 5.6 (global).

5.2 Materiales empleados en las entrevistas

Seleccionamos fragmentos de libros de texto para presentar a los profesores entrevistados. Conjeturamos que la autoridad implícitamente asignada a los libros de texto evitaría cualquier discusión sobre el contenido matemático de los fragmentos. La Tabla 5.1, similar a las Tablas 3.7 y 3.8, recoge la distribución por sistemas de representación y formatos de los once códigos de fenómeno empleados en las entrevistas a profesores. Las cinco celdillas rayadas corresponden a códigos de fenómeno no empleados en las entrevistas.

Tabla 5.1 *Los 11 códigos de fenómeno empleados en las entrevistas a profesores*

	Verbal		Grafico		Tabular		Simbólico	
ADI								
IVF								
	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición	Ejemplo	Definición

Como disponíamos de varias instancias posibles para cada código de fenómeno, enunciamos criterios para dirigir la elección de once fragmentos concretos. Dichos criterios fueron: (a) "dilatación" en el tiempo, (b) variedad de autores y editoriales y (c) expectativas de la investigadora sobre la clara comprensión del contenido por parte de los profesores que se habrían de entrevistar. Los fragmentos están identificados por su código de ubicación; no obstante, para simplificar la referencia a los fragmentos, el equipo, como veremos, decidió asignar a cada fragmento una letra. Esto se hizo por sorteo.

En el Anexo A4.2 (Capítulo 4º) se han presentado los once fragmentos seleccionados, detallando la referencia del libro del que cada uno ha sido extraído y su código de localización, además de la letra que se utilizó para designar cada fragmento en todas las entrevistas. A continuación, los comentamos brevemente.

Fragmento A. El fragmento cuyo código de ubicación es LF99002.03.03, ha sido designado con la letra A. Incluye el código de fenómeno ADI T-E porque el autor está utilizando tanto la variable independiente como la dependiente, no se construye la función $\varepsilon - \delta$, el sistema de representación empleado es el tabular y se trabaja con un ejemplo.

Fragmento B. El fragmento cuyo código de ubicación es LF97004.02.02, ha sido designado con la letra B. Incluye el código de fenómeno IVF S-E porque el autor está utilizando tanto la variable independiente como la dependiente, se construye la función $\varepsilon-\delta$, el sistema de representación empleado es el simbólico y se trabaja con un ejemplo.

Fragmento C. El fragmento cuyo código de ubicación es LF97003.03.03, ha sido designado con la letra C. Incluye el código de fenómeno IVF G-E porque el autor está utilizando tanto la variable independiente como la dependiente, se construye la función $\varepsilon-\delta$, el sistema de representación empleado es el gráfico y se trabaja con un ejemplo.

Fragmento D. El fragmento cuyo código de ubicación es LF99001.02.04, ha sido designado con la letra D. Incluye el código de fenómeno ADI G-E porque el autor está utilizando tanto la variable independiente como la dependiente, no se construye la función $\varepsilon-\delta$, el sistema de representación empleado es el gráfico y se trabaja con un ejemplo.

Fragmento E. El fragmento cuyo código de ubicación es LF99001.02.01, ha sido designado con la letra E. Incluye el código de fenómeno ADI V-D porque el autor está utilizando tanto la variable independiente como la dependiente, no se construye la función $\varepsilon-\delta$, el sistema de representación empleado es el verbal y se trabaja con una definición.

Fragmento F. El fragmento cuyo código de ubicación es LF00003.08.02, ha sido designado con la letra F. Incluye el código de fenómeno ADI G-D porque el autor está utilizando tanto la variable independiente como la dependiente, no se construye la función $\varepsilon-\delta$, el sistema de representación empleado es el gráfico y se trabaja con una definición.

Fragmento G. El fragmento cuyo código de ubicación es LF98007.02.03, ha sido designado con la letra G. Incluye el código de fenómeno IVF V-E porque el autor está utilizando tanto la variable independiente como la dependiente, se construye la función $\varepsilon-\delta$, el sistema de representación empleado es el verbal y se trabaja con un ejemplo.

Fragmento H. El fragmento cuyo código de ubicación es LF99002.04.02, ha sido designado con la letra H. Incluye el código de fenómeno IVF G-D porque el autor está utilizando tanto la variable independiente como la dependiente, se construye la función $\varepsilon-\delta$, el sistema de representación empleado es el gráfico y se trabaja con una definición.

Fragmento I. El fragmento cuyo código de ubicación es LF97004.01.04, ha sido designado con la letra I. Incluye el código de fenómeno ADI V-E porque el autor está utilizando tanto la variable independiente como la dependiente, no se construye la función $\varepsilon - \delta$, el sistema de representación empleado es el verbal y se trabaja con un ejemplo.

Fragmento J. El fragmento cuyo código de ubicación es LF97003.02.01, ha sido designado con la letra J. Incluye el código de fenómeno IVF S-D porque el autor está utilizando tanto la variable independiente como la dependiente, se construye la función $\varepsilon - \delta$, el sistema de representación empleado es el simbólico y se trabaja con una definición.

Fragmento K. El fragmento cuyo código de ubicación es LF94001.06, ha sido designado con la letra K. Incluye el código de fenómeno IVF V-D porque el autor está utilizando tanto la variable independiente como la dependiente, se construye la función $\varepsilon - \delta$, el sistema de representación empleado es el verbal y se trabaja con una definición.

5.3 Diseño de la entrevista

5.3.1 Etapas seguidas en el diseño

Como consecuencia de la primera entrevista piloto, decidimos tener en cuenta lo siguiente:

a) El profesor debe disponer con antelación suficiente de los once fragmentos. Esto da tiempo para reflexionar sobre ellos e implica que debe haber dos encuentros: uno para presentar la investigación y entregar los fragmentos y otro para realizar la entrevista propiamente dicha.

b) En el primer encuentro con el profesor además de entregar los fragmentos se debe instruir al profesor sobre el objetivo de la entrevista, para evitar en lo posible que se aborden temas que no son de interés para la investigación.

c) Es necesario referirse a los fragmentos en voz alta por su letra, con objeto de que la transcripción de las grabaciones permita determinar con precisión y rapidez, el fragmento al que se esté refiriendo el profesor.

En la primera reunión que el equipo de investigación dedicó al diseño de la entrevista, se acordó nombrar los fragmentos al azar utilizando las primeras once letras del abecedario. Véase el resultado en el Anexo A4.2.

Se esbozaron también las siguientes hojas de datos para recoger información de los encuentros (Figuras 5.1 y 5.2).

Primer encuentro: Datos relativos a la presentación de la investigación y entrega de documentos.
- Fecha:
- Hora:
- Lugar:
- Duración:
- Entrega de materiales por parte de la investigadora al profesor entrevistado.
- Cita para el día de la entrevista.
- Impresión sobre el profesor.

Figura 5.1 Procedimiento: 1er Encuentro investigadora-profesor

Segundo encuentro: Datos relativos a la realización de la entrevista.
- Fecha:
- Hora:
- Lugar:
- Duración:
- Anotaciones de la investigadora. Anexo [número]:
- Materiales aportados por el profesor. Si los hubiera. Anexo [número]:
- Impresión sobre el profesor:
- Condiciones ambientales durante el desarrollo de la entrevista.

Figura 5.2 Procedimiento: 2º Encuentro investigadora-profesor

Se tuvo en cuenta todo lo anterior en una segunda entrevista piloto y los resultados fueron satisfactorios.

Una vez estudiada por la investigadora la segunda entrevista piloto, el equipo de investigación llegó a la conclusión de que la entrevista se había realizado a un profesor con no demasiada experiencia docente y que quizá podría ser más fructífero entrevistar, para propósitos de diseño, a un profesor con más experiencia.

Así se hizo en la tercera entrevista, en la que pudimos contar con un profesor de 31 años de experiencia docente; los resultados obtenidos no fueron satisfactorios. No fue posible establecer una buena comunicación con dicho profesor; al escuchar la grabación se tiene la impresión de que éste, de alguna manera, "impuso" temas no relacionados con la investigación.

En la siguiente reunión del equipo de investigación, elaboramos un guión de referencia en las entrevistas para ser entregado junto con los fragmentos; en él se expone el objetivo de la entrevista: conversar sobre los fenómenos observados en los libros de texto.

En la cuarta entrevista piloto se tuvo en cuenta todo lo anterior y, tras su estudio, la investigadora consideró útil para ella el disponer de un protocolo de actuación que sirviera en todas las entrevistas.

En la última reunión del equipo de investigación, previa a las entrevistas: (a) Mejoramos el guión para la entrevista. Este guión fue entregado a cada profesor junto con los fragmentos seleccionados, véase Anexo A5.2. (b) Determinamos y enunciamos dimensiones y categorías para el análisis de las entrevistas, ver 5.3.2 y 5.3.3. (c) Elaboramos un protocolo de actuación para la investigadora.

Este protocolo de actuación incluyó la entrega al profesor (durante el primer encuentro) de dos sobres, etiquetados como “utiliza” y ”no utiliza”, con el fin de facilitar al profesor la organización de las ideas que expusiera durante la entrevista.

El protocolo aporta una estructura estable a los encuentros con cada profesor, especialmente durante la realización de la entrevista, y se tiene en cuenta en el análisis de la información obtenida. Las entrevistas debían desarrollarse en no más de 20 minutos y con cuatro fases:

-En la *Fase 1*, de corta duración, la investigadora presenta al profesor y le sitúa en la investigación a través del guión que se entregó en el primer encuentro.

-En la *Fase 2*, que hemos llamado “espontánea”, la investigadora procura que la intervención corresponda principalmente al profesor entrevistado: le invita a comentar la clasificación realizada por él o ella en los sobres, a justificarla y a enunciar algunas conclusiones. La investigadora anota, de manera provisional, categorías asignables a comentarios del profesor y marca si éste utiliza o no, en el aula, el fragmento que se esté comentando.

-En la *Fase 3*, que hemos llamado “inducida”, la investigadora toma la iniciativa de la conversación, con objeto de comprender por qué un profesor no ha comentado un fenómeno o por qué ella no ha entendido alguna de las opiniones expresadas por el profesor. Además, procura que el profesor mantenga una participación opinando sobre lo afirmado por la investigadora y debatiendo con ella. La investigadora anota posibles categorías que puede ir asignando a los comentarios del profesor y confirma su primera impresión (de la Fase 2) acerca de si éste declara utilizar o no el fragmento que se esté comentando en el aula.

-En la *Fase 4*, se termina la entrevista, los interlocutores se despiden y la investigadora agradece la desinteresada colaboración del profesor.

A lo largo de cada una de las entrevistas, la investigadora toma notas que quedan recogidas en la documentación. Estas notas se incluyen en los anexos A5.5 a A5.13. Si alguno de los profesores entregó algún material a la investigadora también queda recogido: véase el Anexo A5.3.

5.3.2 Dimensiones para el análisis de las entrevistas

Dimensión UTILIZACIÓN- NO UTILIZACIÓN

Estamos interesados en obtener evidencias sobre el uso que los profesores (en sus relatos de clases) dicen que hacen de los fenómenos, aunque no esperamos que usen los términos de esta memoria. Un primer indicador de uso viene de la declaración de utilización de los fragmentos, que aporta información al clasificar los fragmentos en dos sobres, etiquetados, respectivamente, como UTILIZA y NO UTILIZA. Esto se refiere a la idea contenida en el fragmento, no al fragmento propiamente dicho.

Dimensión ESPONTÁNEO-INDUCIDO

La entrevista consta de cuatro fases y la información más relevante se obtiene en las dos fases centrales, a las que corresponden las posibilidades previstas en esta categoría; consideramos espontáneos los comentarios hechos por el profesor sobre los fragmentos y sobre la clasificación que ha realizado, si se dan en la Fase 2. En cambio, si estos comentarios ocurren en la Fase 3, consideramos que son inducidos por la investigadora porque son consecuencia de su intervención.

Dimensión SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN Y FORMATOS

Para propósitos de la investigación, los once fragmentos se distinguen por su código de fenómeno, que tiene en cuenta el fenómeno, el sistema de representación y el formato. Al estudiar las respuestas y comentarios de los profesores hemos observado que los formatos no son relevantes en sus relatos; por ello, solamente hemos considerado, para cada fenómeno, los sistemas de representación. (Véase 5.6.1.1.)

5.3.3 Categorías para el análisis de las respuestas

La investigadora estructuró la información obtenida enunciando categorías que tienen por objetivo valorar e interpretar los comentarios de los profesores.

Las categorías definidas son las siguientes:

En su relato, el profesor hace un comentario sobre el fenómeno ADI que:

Consideramos genérico: C1A

Remite a alumnos concretos: C2A

Remite a dificultades concretas de los fragmentos: C3A

Explicita el fenómeno: C3*A.

En su relato, el profesor hace un comentario sobre el *fenómeno IVF* que:

Consideramos genérico: C1I

Remite a alumnos concretos: C2I

Remite a dificultades concretas de los fragmentos: C3I

Explicita el fenómeno: C3*I

Cuando la investigadora asigna la categoría al comentario, si procede, codifica el sistema de representación y el formato al que se refiere. Las iniciales de los sistemas de representación y de los formatos se reproducen aquí por comodidad. (Véase el apartado 3.8.)

V-E: Sistema de representación verbal formato ejemplo.

V-D: Sistema de representación verbal formato definición.

G-E: Sistema de representación gráfico formato ejemplo.

G-D: Sistema de representación gráfico formato definición.

T-E: Sistema de representación tabular formato ejemplo.

T-D: Sistema de representación tabular formato definición.

S-E: Sistema de representación simbólico formato ejemplo.

S-D: Sistema de representación simbólico formato definición

Por ejemplo, un código como C1AT-E indica que, en su relato, el profesor hizo un comentario que consideramos genérico sobre el fenómeno ADI, en el sistema de representación tabular y en el formato ejemplo.

Una vez realizadas las entrevistas, observamos que los profesores no siempre se refirieron al sistema de representación asociado al fragmento concreto que se comentaba; cuando se dio esa situación usamos una categoría sin asociar sistemas de representación y que expresamos con el código “Sin SR”.

En ocasiones, manejaremos las categorías sin precisar el fenómeno asociado; por ejemplo, escribimos C1 para referirnos a la idea correspondiente sin mencionar uno de los dos fenómenos. Esto lo hacemos solamente cuando no hay lugar a confusión.

5.4 Contextos de las entrevistas

En este apartado recogemos las que, en nuestra previsión, consideramos como posibles amenazas durante la realización de las entrevistas y describimos la muestra.

5.4.1 Amenazas previstas

Tras las entrevistas piloto conseguimos enunciar posibles amenazas al transcurso deseado de cada entrevista y la investigadora se preparó para afrontarlas, en lo posible. Son las siguientes:

1. La entrevista deriva hacia temas no relacionados con la investigación.
2. El profesor no utiliza los materiales entregados o los organiza de manera irrelevante para la investigación.
3. El profesor improvisa y no analiza uno o más fragmentos.
4. Aunque esté trabajando con fragmentos que contienen un fenómeno, el profesor hace comentarios sobre otro fenómeno; si esto ocurre, decimos que se ha producido una transición.
5. Las condiciones ambientales del lugar que el profesor haya elegido para hacer la entrevista pueden no ser favorables, por el ruido o posibles interrupciones.

5.4.2 Información sobre la muestra

Hemos seleccionado a nueve profesores de matemáticas de seis centros diferentes por ser conocidos y accesibles a la investigadora. En la Tabla 5.2 (página siguiente) recogemos las localidades en las que se ubican los centros, el tipo de centro, el número de profesores que participó de cada centro y la fecha de realización de la entrevista.

Tabla 5.2 *Distribución de la muestra de profesores*

Localidades	Códigos	Tipos	Nº de profesores de cada centro	Fecha de realización de la entrevista
Nerja	N	Público	1	06-08-2008
Estepona	E	Público	1	06-02-2009
Antequera	P	Público	3	04-12-2007
				06-05-2008
				12-05-2008
	J	Público	1	02-04-2008
	C	Público	2	29-05-2008
				29-05-2008
	V	Concertado	1	20-05-2008

Hemos solicitado y recogido algunas datos académicos de los profesores (véase la Figura 5.3)

RECOGIDA DE DATOS DE INFORMACIÓN GENERAL:
1.- Titulación:
2.- Expedida por la Universidad de:
3.- Año en el que obtuvo su titulación:
4.- Años de docencia impartiendo cursos de matemáticas:
5.- Tipo de centros: públicos _, concertados _, privados _, rurales _, urbanos _
6.- Último curso académico en que explicó el concepto de límite finito de una función en un punto:

Figura 5.3 Recogida de datos académicos de los profesores

En la Tabla 5.3 resumimos información relevante obtenida a partir del formulario de las Figuras 5.1 y 5.2.

Tabla 5.3 *Distribución de los datos de la muestra de profesores*

Código de profesor	Titulación	Universidad	Años de docencia en matemáticas	Sexo	Tipos de centros
R	Matemáticas	UMA	22	H	Público urbano
S	Matemáticas	UMA	12	H	Público urbano
T	Matemáticas	UMA	16	M	Público urbano
U	Matemáticas	UGR	31	H	Público urbano
V	Matemáticas	UGR	9	H	Concertado urbano
W	Matemáticas	UMA	2	M	Público urbano
X	Matemáticas	UGR	29	M	Público urbano
Y	Matemáticas	UMA	7	H	Público urbano
Z	Matemáticas	UMA	8	M	Público urbano

Resultó difícil hallar profesores accesibles para la realización de las entrevistas. Sin embargo los profesores que se han prestado a colaborar en la investigación mostraron gran interés en la realización.

De las posibles amenazas al transcurso de cada entrevista, presentadas en el epígrafe 5.4.1, queremos observar que las condiciones ambientales no fueron las mismas en todas las entrevistas, ya que algunas se realizaron en las salas de profesores de los centros en los que los éstos trabajan. Otras, sin embargo, se llevaron a cado en departamentos o despachos y en esos casos las condiciones ambientales fueron mucho más favorables. Solo al final de una de las entrevista el profesor derivó a temas no relacionados con la investigación. Muchos de los profesores no analizaron todos los fragmentos. Al trabajar con el fenómeno IVF en el sistema de representación gráfico, los profesores hacían comentarios sobre el fenómeno ADI, es decir se produjeron transiciones. Es obligado destacar la amabilidad con la que fuimos recibidos.

5.5 Informes individuales

5.5.1 Estructura de los informes individuales

El informe e interpretación de cada relato lo desarrollamos siguiendo 6 criterios.

Criterio 1. Se refiere a la entrevista y su transcripción. Incluimos el alias del profesor y del centro, la titulación que posee, los años de carrera profesional y la última fecha en la que declara haber explicado el límite finito de una función en un punto. Mencionamos, sucesivamente, los dos encuentros con la investigadora (fecha, hora, lugar, duración e impresiones o anotaciones de ésta). Finalmente, ubicamos el anexo correspondiente a la transcripción y, en su caso, a los posibles materiales entregados por el profesor.

Cada transcripción se presenta secuenciada con ayuda de un código de nueve caracteres. Los tres primeros caracteres son numéricos y corresponden al orden correlativo de intervención. El cuarto carácter es una letra que indica el interlocutor que habla: profesor (su código) o la investigadora (I); los cinco últimos caracteres indican el minuto y segundo, separados por una coma, en que comienza a decirse lo transcrito. Por ejemplo, 024T05,52 indica que, la vigésima cuarta intervención de la entrevista al profesor T la inició éste a los cinco minutos y cuarenta y dos segundos de haber comenzado la entrevista.

Criterio 2. Estos códigos y las transcripciones correspondientes los hemos reunido en unidades de información. Se trata de intervalos temporales contiguos en los que se conversa o se monologa sobre un mismo asunto. Cada unidad de información la caracterizamos mediante un número de orden (dentro de la transcripción) y dos códigos temporales, uno de inicio y uno de fin. Por ejemplo, 3: [03,00-04,26] remite a la tercera unidad de información, que se extiende desde el minuto 03 hasta que el temporizador marca 04 minutos y 26 segundos. La investigadora incluye una breve reseña de lo ocurrido en la entrevista durante ese lapso.

Así, cada entrevista puede abordarse en tres niveles de detalle: fase, unidad de información y código de intervención. Las unidades de información relevantes se hallan principalmente en las fases que hemos llamado espontánea e inducida.

Criterio 3. Corresponde a nuestra interpretación de la entrevista. Hasta aquí hemos interpretado exclusivamente las palabras dichas durante la entrevista; a partir de ahora, usamos esas palabras para asignar categorías de análisis a las opiniones y para reconocer la declaración de uso en clase (o no) de los fragmentos que el profesor ha tenido a bien considerar. Esta interpretación la presentamos con ayuda de tablas, una por cada fase en que haya información pertinente. Cada tabla tiene su título identificativo y contiene la unidad de información (UI), su código temporal, la categoría que asignamos, acompañada, en ocasiones de comentarios sobre lo que dice el profesor, y finalmente, la declaración de utilización o no utilización en las clases (U-NU) que, a nuestro juicio, ha hecho el profesor.

Criterio 4. Se refiere a la distribución de esas categorías para cada fenómeno, teniendo en cuenta los sistemas de representación (o la ausencia de referencia a éstos), las dos fases centrales de la entrevista (espontánea, E, e inducida, I) y el uso o no uso declarado en el relato. Obtenemos así una primera información relevante global sobre el relato del profesor y sobre el reconocimiento de los fenómenos ADI e IVF. Dicha información la presentamos mediante tablas-resumen parecidas a las tablas de contingencia. En las celdillas interiores de estas tablas explicitamos las categorías detectadas, mientras que en las celdillas de la columna derecha y de la fila inferior mostramos los subtotales (respectivamente, por filas y por columnas) de cada categoría en su orden: 1, 2, 3 y 3*. (Estos números son partes de las categorías definidas en 5.3.3.)

Criterio 5. Se trata de comentarios sobre el profesor elaborados a partir de las tablas-resumen. Dan idea del manejo que declara el profesor sobre los fenómenos organizados por la definición de límite finito de una función (ADI e IVF), los sistemas de representación en que se apoya (para cada uno) y algunos elementos del contexto en que los usa, según nuestras categorías de análisis, las fases consideradas y la declaración explícita de utilización o no utilización en clase.

Criterio 6. Al sintetizar la información sobre cada profesor, hemos hallado dos modos diferentes (entre varios posibles) de considerar las opiniones recopiladas: una, más orientada a lo numérico ("componente numérica") y otra, más orientada a lo visual ("componente visual"). Conjuntamente, constituyen lo que hemos denominado el "perfil fenomenológico del profesor", que pasamos a describir.

Componente numérica del perfil fenomenológico. Partiendo de las afirmaciones hechas por el profesor, hemos contabilizado como positivos los comentarios relativos a la utilización y como negativos los relativos a la no utilización en el aula. Hemos asignado un factor 2 a los comentarios que se han emitido en la fase espontánea y un factor 1 a los comentarios emitidos en la fase inducida. Finalmente, en el numerador hemos puesto el cómputo del fenómeno ADI y en el denominador el del fenómeno IVF.

Componente visual del perfil fenomenológico. Resume lo dicho por el profesor sobre los dos fenómenos (ADI e IVF) y los sistemas de representación (V, G, T, S) o la ausencia de referencia a los sistemas de representación (Sin SR) . En cada caso, se han puesto marcas que tienen en cuenta las fases espontánea e inducida y el uso o no uso declarados en el aula, de esos fenómenos. La leyenda se explica en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4 *Signos convencionales usados en la componente visual*

✓	El profesor afirma utilizar el fragmento y lo hace en la fase espontánea.
☑	El profesor afirma utilizar el fragmento y lo hace en la fase inducida.
✗	El profesor afirma no utilizar el fragmento y lo hace en la fase espontánea.
☒	El profesor afirma no utilizar el fragmento y lo hace en la fase inducida.
♒	Se ha producido una transición en el comentario. Es decir, aunque el fragmento contenga uno de los fenómenos, el comentario del profesor se refiere al otro fenómeno
	Hueco cuando no se realiza ningún comentario
Las celdillas rayadas en la Tabla 5.1 corresponden a situaciones que no se hallaron con frecuencia mayor que 1 en los libros de texto y, por tanto, no se generaron, para las entrevistas, fragmentos representativos de fenómenos	

Los estudios detallados de cada profesor han permitido realizar un estudio más global que desarrollamos en el apartado 5.6.

5.5.2 Relato del profesor V

Siguiendo la estructura de análisis descrita en 5.5.1, presentamos en este epígrafe la información que hemos obtenido de la entrevista que ocupa el lugar 5º de la muestra (Tabla 5.3), obtenido por sorteo. La correspondiente información, obtenida de las nueve entrevistas realizadas, se halla en el Anexo A5.1.

Profesor V: La entrevista y su transcripción

V es un hombre que trabaja en el centro S, como profesor de matemáticas. Lo es desde hace 9 años y ha trabajado en un instituto urbano concertado; se licenció en Matemáticas por la Universidad de Granada en el año 1996; ha explicado por última vez el límite finito de una función en un punto en el curso 2006 - 2007.

Nuestro primer encuentro se produjo el 13 de mayo de 2008, a las 11,40 de la mañana, en la Sala de Profesores del centro S; duró aproximadamente 10 minutos. La investigadora entregó los documentos y concertamos la entrevista para el 20 de mayo de 2008, en el propio centro S, a las 13,40 de la tarde; la impresión que tuvo la investigadora sobre el profesor fue de bastante interés en la investigación y disposición ante la perspectiva de colaboración con la investigadora.

La entrevista se llevo en la fecha, hora y lugar previstos; por tiempo de grabadora, duró 9 minutos 35 segundos; las condiciones ambientales fueron idóneas; no hubo interrupciones.
La transcripción fue muy cómoda de realizar debido a las óptimas condiciones ambientales y a las diferencias en los tonos de voz del profesor V y la investigadora. La transcripción íntegra de esta entrevista se acompaña como Anexo A5.18.

Profesor V: Unidades de información

Fase I: Presentación

U-I 1: [00,00-00,49] Intervención de la investigadora.

Fase II: Espontánea

U-I 2: [00,49-03,34] El profesor V comenta los fragmentos que afirma no utilizar en el aula, explica algunos de los motivos que lo han llevado a no utilizarlos. Observa que algunas veces ha trabajado con alguno de ellos, pero matizando que cuando ha encontrado un alumnado muy específico y solo a título informativo para que vean como la intuición es formalizada.
U-I 3: [03,34-05,10] De los fragmentos entregados, V comenta los que sí utiliza en el aula afirmando que son todos "de la misma escuela intuitiva" y que son los que aparecen en los libros de texto.
U-I 4: [05,10-06,21] El profesor V vuelve a comentar los fragmentos que no utiliza por lo que la investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, pregunta por experiencias concretas; el profesor V comenta dificultades de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF pero sin hacer referencia al fenómeno en concreto.

Fase III: Inducida

U-I 5: [06,21-07,16] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, intenta hacer ver a R los distintos fenómenos que ella observa en los fragmentos. V acepta la presencia de los fenómenos y afirma que a los alumnos les resulta más fácil lo intuitivo, el fenómeno ADI, y que a fin de cuentas es eso con lo que se trabaja.
U-I 6: [07,16-08,25] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, pregunta por experiencias concretas con alumnos específicos, el profesor comenta que lo que intenta es adecuar el fenómeno ADI al formalismo, pero que realmente no trabaja el fenómeno IVF.
U-I 7: [08,25-09,22] El profesor V resume sus comentarios y saca algunas conclusiones.

Fase IV: Término

U-I 9: [09,22-09,35] La investigadora concluye la entrevista agradeciendo al profesor la desinteresada colaboración.

Profesor V: Interpretación de la entrevista

Tabla 5.V.1 *Categorías asignadas a las opiniones de V en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 2: 008V01,12: El del K sí exactamente, este no porque verdaderamente aunque sí les doy un poquito de entorno a la gente de primero de sociales,….. Luego no lo utilizo.	C1I V-D (K) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF V-D, afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 2: 013V01,32: El J que no. Es que no utilizo δ ε,…, en ningún momento.	C1I S-D (J) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF S-D, afirmando que no lo utiliza en el aula. Es curioso cómo en su discurso habla en primer lugar de la variable independiente.	NU
U-I 2: 016V01,46: Alguna vez he utilizado esto con cursos de tecnológico de segundo de bachillerato. Buenos. Simplemente para que lo vean.	C2I S-D (J) El profesor comenta que en algunas ocasiones con alumnos muy concretos, ha utilizado en el aula un fragmento que contiene el fenómeno IVF S-D.	U
U-I 2: 021V02,20: Exacto. Éste es lo mismo pero gráficamente utilizando el δ y el ε, pues no, no lo utilizo. U-I 2: 022V02,25: Con gráficamente el H.	C1I G-D (H) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF G-D, afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 2: 023V02,27: Luego aquí tenemos con distancias,…., también con δ… U-I 2: 025V02,28: El G tampoco	C1I V-E (G) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF V-E, afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 2: 025V02,32: Si parecido, pues nada. Y el C lo mismo con un ejemplo	C1I G-E (C) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF G-E, afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 2: 029V02,57: El B vamos… U-I 2: 034V03,26: Es poco recomendable. Y sobre todo con los horarios tan apretados.	C1I S-E (B) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF S-E, afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 3: 037V03,36: Pues el I que es con sucesiones. U-I 3: 038V03,46: Que es el que utilizo además en todos los cursos y lo suelen entender bastante bien. Esa idea intuitiva de que cuanto más se acerca a más se acerca a, pero utilizando…. además te puedo enseñar exámenes que los estoy corrigiendo.	C3*A T-E (I) El profesor hace un comentario sobre el propio código de fenómeno ADI T-E, en uno de los fragmentos que lo contienen , el comentario es referente a la utilización en el aula.	U
U-I 3: 042V04.04: El de I. Luego estos de manera intuitiva U-I 3: 043V04,06: Si la F.	C1A G-D (F) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno ADI G-D, afirmando que lo utiliza en el aula.	U
U-I 3: 047V04,23: Luego el intuitivo U-I 3: 048V04,30: El E. Que se puede pensar el límite como el valor al que tienden las imágenes cuando los originales .., al fin y al cabo es lo que	C3*A V-D (E) El profesor hace un comentario sobre el propio fenómeno ADI V-D, en uno de los fragmentos que lo contienen, el	U

Tabla 5.V.1 *Categorías asignadas a las opiniones de V en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
hemos visto de las tablas	comentario es referente a la utilización en el aula.	
U-I 3: 049V04,38: El D lo mismo que te he dicho antes. Lo utilizo mucho y además con este ejemplo en concreto.	C1A G-E (D) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno ADI G-E, afirmando que lo utiliza en el aula.	U
U-I 3: 052V04,49: Y aquí tenemos una tabla a izquierda y derecha. U-I 3: 053V04,52: Que se utiliza para sobre todo con los límites por la izquierda y derecha, es el que hacemos.	C1A T-E (A) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno ADI T-E, afirmando que lo utiliza en el aula.	U
U-I 4: 057V05,07: Y yo sinceramente también los prefiero para empezar a…..a explicar este tipo de cosas	C1A El profesor hace un comentario genérico sobre los fragmentos que contienen el fenómeno ADI. Afirmando que lo utiliza en el aula.	U
U-I 4: 058V05,10: Si nos metiéramos en otro tipo de cosas δ, perdidos.	C1I El profesor hace un comentario genérico sobre los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 4: 062V05,46: Si para empezar la manera de escribir. U-I 4: 063V05,48: El para todo el existe el implica..eso ya… U-I 4: 064V05,59: Es otro idioma si..Claro y luego cuando les dices que este valor absoluto significa que esto se hace muy pequeño y que esto se hace muy pequeño, pues entienden…no entienden que eso signifique eso, pero te lo aceptan. U-I 4: 065V06,03: Te lo aceptan a vale lo más chico.. y eso es lo que pone ahí U-I 4: 066V06,15: Pero realmente no creo que nadie,.., yo tampoco me he esforzado mucho sinceramente en que ellos entiendan realmente lo que significa eso.	C3I El profesor hace varios comentarios sobre algunas de las dificultades que presentan los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU

Tabla 5.V.2 *Categorías asignadas a las opiniones de V en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 5: 071V06,58: Debes buscar lo otro es cierto. Yo creo que les resulta más sencillo que sea la x la que primero se mueva y luego la f a ver lo que le pasa U-I 5: 072V07,05: Y además luego tienen muchas más que ver con lo que hacemos, al fin y al cabo lo que les dices es: sustituye U-I 5: 073V07,07: Entonces es la x la que U-I 5: 074V07,13: Y sale… por eso lo veo más lógico la verdad el hacerlo así.	C3*A El profesor hace un comentario genérico sobre el propio fenómeno ADI. De hecho es en este momento cuando el profesor observa el fenómeno IVF, sin hacer ningún comentario específico al respecto.	U
U-I 6: 076V07,25: En lo poquito que lo he utilizado nadie tampoco se ha dado cuenta de que este es realmente a este aunque yo creo que cuando lo explico digo cuando este sale pequeño este sale pequeño es al revés ,ja,ja.. U-I 6: 077V07,30: La explicación que yo les doy pues se la intento adecuar a esta definición y efectivamente me voy a lo último primero y luego me voy a este. U-I 6: 078V07,39: Encima le das la vuelta U-I 6: 079V07,46: Pero yo se lo explico,.., no aunque esté al final esto es lo primero que vimos y esto es lo siguiente, siempre lo hemos hecho así	C3I* El profesor hace un comentario sobre una dificultad del propio fenómeno IVF. Particularmente sugiere cómo subsana esta dificultad.	NU
U-I 7: 086V08,42: Yo lo del δ ε por lo menos tal y como tenemos ahora mismo el sistema, la exigencias.. U-I 7: 087V08,47: El tiempo. Yo lo destierro.	C1I El profesor hace un comentario genérico sobre los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU

Profesor V: Distribución de categorías, por fenómenos, en el relato

En las Tablas 5.V.3 y 5.V.4, respectivamente, presentamos, para cada fenómeno, la distribución de categorías según los sistemas de representación y dimensiones consideradas. La columna derecha y la fila inferior incluyen los subtotales de cada categoría.

Tabla 5.V.3 *Profesor V. Fenómeno ADI. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	3*				0,0,0,1
Tabular	3*,1				1,0,0,1
Gráfico	1,1				2,0,0,0
Simbólico					
(No indica)	1		3*		1,0,0,1
Subtotales, por fase y uso / no uso	4,0,0,2		0,0,0,1		

Tabla 5.V.4 *Profesor V. Fenómeno IVF. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal		1,1			2,0,0,0
Tabular					
Gráfico		1,1			2,0,0,0
Simbólico	2	1,1			2,1,0,0
(No indica)		1,3		3*,1	2,0,1,1
Subtotales, por fase y uso / no uso	0,1,0,0	7,0,1,0		1,0,0,1	

Profesor V: Comentarios

(V1) En las Tablas V5.3 y V5.4, registramos más comentarios sobre el fenómeno IVF (11) que sobre el ADI (7).
(V2) Los comentarios sobre el fenómeno ADI indican la utilización en el aula; los correspondientes comentarios sobre el fenómeno IVF indican la no utilización, excepto un comentario referente a un alumnado muy concreto.
(V3) El número de comentarios espontáneos (6) es seis veces mayor que el número de comentarios inducidos(1) en el fenómeno ADI; el número de comentarios inducidos (2) es aproximadamente la cuarta parte de los espontáneos (9) en el IVF.
(V4) Distribución de comentarios por categorías.
-Categoría C1, o comentarios que consideramos genéricos: Son la mitad de los comentarios en el caso del fenómeno ADI (3), todos ellos espontáneos, y en el caso del fenómeno IVF son casi tres cuartas partes (8), los comentarios realizados en la fase espontánea son siete veces más que los realizados en la inducida.
-Categoría C2, o comentarios que, a nuestro entender, remiten a alumnos concretos: solo se da uno en la fase espontánea en relación con el fenómeno IVF.
- Categoría C3, o comentarios referentes a dificultades concretas de los fragmentos que contienen los fenómenos: solo se da uno, espontáneo, en relación con el fenómeno IVF.
- Categoría C3*, o comentarios en los que detectamos explícitamente los fenómenos: corresponden a la otra mitad en el caso del fenómeno ADI (3), siendo el doble los realizados en la fase espontánea que en la inducida, y uno solo, en la fase inducida en el caso del fenómeno IVF.
(V5) Distribución de comentarios por sistemas de representación.
-Verbal: Se realizan (2) comentarios para cada fenómeno, en el caso del fenómeno ADI (los dos en la fase espontánea y referentes a la utilización), y en el IVF (los dos en la fase espontánea y referentes a la no utilización).
-Tabular: Solo se realiza un comentario en el caso del fenómeno ADI (en la fase espontánea y referente a la utilización).
-Gráfico: Se realizan (2) comentarios en el caso del fenómeno IVF (los dos en la fase espontánea y referentes a la no utilización), y uno solo en el caso del fenómeno ADI (en la fase espontánea y referente a la utilización).
-Simbólico: Aparece en 3 ocasiones en el caso del fenómeno IVF (las tres en la fase espontánea, dos referentes a la utilización y una a la no utilización).
- Sin referencia a sistema de representación concreto: En el caso del fenómeno ADI se da en (2) ocasiones (referentes ambas a la utilización, una en la fase espontánea y la otra inducida), en el caso del fenómeno IVF aparece en (4) ocasiones, (2) de ellas

espontáneas y otras (2) inducidas.; de las cuales (1) es referente específicamente al fenómeno.

Profesor V: Perfil fenomenológico

El profesor V utiliza en el aula todos los fragmentos presentados que contienen el fenómeno ADI. La mayoría de los comentarios sobre el fenómeno son espontáneos y genéricos, a la vez que realiza comentarios explícitos del propio fenómeno. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el simbólico, aunque también ha hecho dos comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto.
El mismo profesor no utiliza en el aula los fragmentos presentados que contienen el fenómeno IVF, excepto al trabajar con un alumnado muy concreto algún fragmento expresado en el sistema de representación simbólico. Los comentarios se reparten entre las fases espontánea e inducida, han sido genéricos, de alumnos concretos, de aspectos particulares de los fragmentos que contienen el fenómeno y explícitos, estos últimos se dan en la fase inducida. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el tabular, aunque también ha hecho comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto.

Componente Numérica

Para el fenómeno ADI 2*6 – 0 + 1*1 - 0 = 13
Para el fenómeno IVF 2*1 – 2*8 + 0 –1*2 = - 16
La razón de uso de los fenómenos en el profesor V es de 13 / -16

Componente Visual

PROFESOR V						
ADI	C3*A	✓		✓		☑
	C3A					
	C2A					
	C1A		✓✓	✓		✓
FENÓMENO	CATEGORÍAS	V	G	T	S	Sin SR
IVF	C1I	✗✗	✗✗		✗✗	✗ ☒
	C2I				✓	
	C3I					✗
	C3*I					☒

Figura 5.V Componente visual del perfil

El numerador de la razón de uso es positivo; interpretamos que el fenómeno ADI está presente en el relato que hace V de su aula; este hecho queda corroborado en la mitad superior de la Figura 5.V La mayoría de los comentarios son espontáneos y muestra una dispersión de marcas entre dos de las categorías, al igual que entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación.
El denominador de la razón de uso es negativo; interpretamos que el fenómeno IVF no está presente en el relato que hace V de su aula; la mitad inferior de la Figura 5.V muestra una dispersión de marcas entre categorías, dispersión que también se observa respecto a los sistemas de representación, las marcas se concentran sobre todo en los

comentarios que se realizan sin referencia a un sistema de representación concreto, solo dos de los comentario son inducidos.
La razón de uso 13/-16 indica que, en el relato que hace V de su aula, el fenómeno IVF recibe más importancia que el fenómeno ADI. Concluimos que, en el relato del profesor V, el fenómeno ADI se utiliza en el aula, se presenta a todos en varios sistemas; en cambio el fenómeno IVF no se utiliza. Comentarios específicos del fenómeno ADI han surgido en ambas fases; mientras que del IVF solo han surgido en la fase inducida.

5.6 Síntesis de los relatos

Integramos los nueve relatos mediante dos focos o centros de interés: los fenómenos y los profesores. Básicamente, totalizamos resultados. Pensamos que nuestro estudio, por ser sistemático, permite considerar los relatos de manera conjunta. Con el primer foco reunimos información sobre los fenómenos, apoyando la recopilación en las dimensiones y categorías definidas en el apartado 5.3; con el segundo foco reunimos información sobre los profesores, organizando los respectivos perfiles fenomenológicos y buscando patrones en ellos: la componente numérica ha permitido enunciar un criterio y ha servido para agrupar a profesores en tipos de perfiles.

5.6.1 Foco I: Fenómenos

Este foco da una visión de conjunto acerca del uso de los fenómenos ADI e IVF.

5.6.1.1 Fenómenos, Sistemas de representación y Dimensiones

Las Tablas 5.5 y 5.6 (página siguiente) muestran las distribuciones de comentarios por fragmentos (sistemas de representación y formatos) y por dimensiones (declaración de uso y fases). La fila inferior y la columna derecha incluyen los subtotales de fila y de columna, respectivamente.

Tabla 5.5 *Distribución de comentarios referentes al fenómeno ADI por fragmentos y dimensiones*

Fragmentos	Código de fenómeno	Fase espontánea/uso	Fase inducida/uso	Fase espontánea/no uso	Fase inducida/no uso	Subtotales por fragmentos
I	ADI V-E	7				7
E	ADI V-D	9	1			10
A	ADI T-E	8		2		10
D	ADI G-E	10				10
F	ADI G-D	8				9
Sin SR	ADI	3	3			6
Subtotales por dimensiones		45	4	2		51

Nota: "Sin SR" se refiere a los comentarios que realizan los profesores respecto al fenómeno ADI sin mencionar un sistema de representación concreto.

También hemos comparado los resultados obtenidos de ambos fenómenos; la comparación se realiza sobre el número de comentarios, el uso y las fases y sobre los sistemas de representación. Para ello agrupamos los formatos ejemplo-definición para cada sistema de representación.

La práctica totalidad de los comentarios sobre el fenómeno ADI (47 de 51) se ha recogido en la fase espontánea de las entrevistas y atañe al uso del fenómeno en el aula (49 de 51). Cada fragmento ha recibido, aproximadamente, el mismo número de comentarios.

Tabla 5.6 *Distribución de comentarios referentes al fenómeno IVF por fragmentos y dimensiones*

Fragmentos	Código de fenómeno	Fase espontánea/uso	Fase inducida/uso	Fase espontánea/no uso	Fase inducida/no uso	Subtotales por fragmentos
G	IVF V-E	2		3		5
K	IVF V-D	5		2		7
C	IVF G-E	6		3		9
H	IVF G-D	5		4		9
B	IVF S-E	5	1	6	1	13
J	IVF S-D	4	1	6		11
Sin SR	IVF	3	10	7	13	33
Subtotales por dimensiones		30	12	31	14	87

Nota: “Sin SR” se refiere a los comentarios que realizan los profesores respecto al fenómeno IVF sin mencionar un sistema de representación concreto.

En 42 de los 87 comentarios los profesores declaran que usan el fenómeno IVF en el aula. 61 comentarios (un 70%) se recogieron en la fase espontánea. La mayoría de los comentarios sobre los fragmentos (33) se ha hecho sin precisar un sistema de representación; llama la atención la secuencia numérica asociada al total de comentarios por cada sistema de representación: 12 (verbal), 18 (gráfico) y 24 (simbólico).

Los profesores han comentado en más ocasiones los fragmentos relativos al fenómeno IVF (64%) que los relativos al fenómeno ADI (36%); en este caso, un 96% de los comentarios atañe al uso de los fragmentos en el aula, tal porcentaje se reduce a la mitad en el caso del fenómeno IVF; los comentarios realizados en la fase espontánea corresponden a un 92% para el fenómeno ADI y un 70% para el IVF.

Al agregar por formatos (ejemplo o definición) las tablas 5.5 y 5.6 observamos que el número de comentarios es prácticamente el mismo en todos los casos. Aunque algunos sistemas de representación han sido comentados más que otros por los profesores, los subtotales de comentarios por sistema de representación se hallan bien equilibrados, lo cual apoya a posteriori la idea de que la muestra de los once fragmentos seleccionada del análisis de libros de texto ha sido adecuada.

Solamente se han registrado comentarios en el sistema de representación tabular en relación con el fenómeno ADI. El sistema de representación simbólico solamente se ha registrado en los comentarios relativos al fenómeno IVF. Los sistemas de representación verbal y gráfico se utilizan para comentar ambos fenómenos. Los comentarios correspondientes al sistema de representación gráfico, en el caso del fenómeno ADI, se refieren a la utilización en el aula. En el caso del fenómeno IVF se realizan comentarios tanto sobre el uso como sobre el no uso, siendo de destacar que, en el primer caso (uso), se detectan transiciones hacia el fenómeno ADI. No se observa transición alguna hacia el fenómeno IVF. Los comentarios "sin SR" (realizados sin mención de un sistema de representación) se hacen en mayor número para el fenómeno IVF que para el fenómeno ADI.

5.6.1.2 Fenómenos, categorías y dimensiones

Las Tablas 5.7 y 5.8 (página siguiente) muestran las distribuciones de comentarios por categorías, y por dimensiones (declaración de uso y fases). La fila inferior y la columna derecha incluyen los subtotales de fila y de columna, respectivamente. Las filas inferiores de 5.7 y 5.8 no coinciden con las filas inferiores de las tablas 5.5 y 5.6 como consecuencia de las transiciones que se han producido en algunos de los comentarios realizados por los profesores.

Tabla 5.7 *Distribución de comentarios referentes al fenómeno ADI por categorías y dimensiones*

Categoría	Fase espontánea/uso	Fase inducida/uso	Fase espontánea/ no uso	Fase inducida/ no uso	Subtotales por categoría
C1A	34	1			35
C2A	11				11
C3A	1		2		3
C3*A	10	3			13
Subtotales por dimensiones	56	4	2		62

Los comentarios sobre el fenómeno ADI, se distribuyen irregularmente entre las cuatro categorías; la frecuencia máxima (35) corresponde a la categoría C1A (comentarios tipificados como genéricos), se observa en la fase espontánea y se hallan en la dimensión de uso en clase, según los profesores.

La frecuencia mínima (3) corresponde a la categoría C3A.

El 20% aproximado de los comentarios corresponde a la categoría C3*A (ésta se asigna cuando detectamos una mención del fenómeno ADI), se halla en la dimensión de uso en clase y se reparte entre las fases espontánea e inducida en la proporción de 3 a 1.

Tabla 5.8 *Distribución de comentarios referentes al fenómeno IVF por categorías y dimensiones*

Fragmentos	Fase espontánea/uso	Fase inducida/uso	Fase espontánea/ no uso	Fase inducida/ no uso	Subtotales por categorías
C1I	1		26	2	29
C2I	13	2			15
C3I	3	3	4	6	16
C3*I	2	6	1	7	16
Subtotales por dimensiones	19	11	31	15	76

Los comentarios sobre el fenómeno IVF se distribuyen irregularmente entre las cuatro categorías; la frecuencia máxima (29) corresponde a la categoría C1I (comentarios tipificados como genéricos); éstos se observan en la fase espontánea y se hallan, mayoritariamente en la dimensión de no uso en clase, según los profesores.

La frecuencia mínima (15) corresponde a la categoría C2I (ésta se asigna cuando el comentario se refiere a un alumnado concreto); los comentarios correspondientes se hallan en la dimensión de uso en clase y se reparten entre las fases espontánea e inducida en la proporción aproximada de 6 a 1.

El 21% aproximado de los comentarios corresponde a la categoría C3*I (ésta se asigna cuando detectamos una mención del fenómeno IVF); los comentarios respectivos se hallan distribuidos en partes casi iguales en la dimensión de uso en clase y se reparten, entre las fases inducida y espontánea, en la proporción de 2 a 1.

Otro 21% de los comentarios corresponde a la categoría C3I; en su mayoría se realizaron durante la fase inducida y confirman el no uso del fenómeno IVF.

Si comparamos las tablas 5.7 y 5.8, observamos que los totales N de cada categoría se reparten así: N(C1A) > N(C1I). En cambio, en las otras tres categorías, las frecuencias correspondientes al fenómeno IVF son mayores que las del fenómeno ADI.

5.6.1.3 Principales resultados obtenidos en el Foco I

En las aulas, el fenómeno ADI se usa de modo generalizado; el fenómeno IVF parece, en cambio, supeditado a un alumnado concreto. El sistema de representación simbólico parece ligado al fenómeno IVF y al formato definición. El sistema de representación tabular, que se observa solamente en uno de los fragmentos, suscita algunas dificultades y recibe valoraciones positivas en conexión con el uso de la calculadora. El sistema de representación gráfico, a juzgar por los comentarios, parece más apropiado para trabajar, en el aula, el fenómeno ADI . La mayoría de comentarios referentes a aspectos concretos de los fragmentos se ha realizado sobre el fenómeno IVF y remite a dificultades observadas por los profesores, como: valores absolutos, desigualdades o entornos.

5.6.2 Foco II: Profesores

Esbozamos una síntesis de los perfiles fenomenológicos de los profesores (véase 5.5.1 y Anexo A5.1) con el objetivo de entender, aunque sea de modo provisional e incompleto, cómo se integran los fenómenos en los relatos.

5.6.2.1 Tipos de perfiles fenomenológicos

Recordemos, del epígrafe 5.5.1: en la componente numérica del perfil fenomenológico, el numerador está asociado al fenómeno ADI y el denominador al fenómeno IVF; el factor 2 se aplicó a los comentarios emitidos en la fase espontánea; en la fase inducida 1; un sumando lo consideramos positivo en el caso de que se declare el uso y negativo en el caso de que se declare el no uso. El Anexo A5.1 contiene la componente numérica del perfil fenomenológico de cada profesor de la muestra.

Hay cuatro posibles repartos de signos entre numeradores y denominadores de la componente numérica. De estas cuatro posibilidades descartamos el supuesto de que el numerador sea negativo y el denominador positivo; si aceptásemos ese caso, no seríamos coherentes con las consideraciones teóricas expuestas en los epígrafes 3.4.3 y 3.4.4: la definición de límite finito de una función en un punto organiza los dos fenómenos ADI e IVF, que deben ser observables en el caso del pensamiento matemático avanzado. En el caso del pensamiento matemático elemental, hemos aceptado la posibilidad de que se use solamente el fenómeno ADI, pero no concebimos que se use solamente el fenómeno IVF en la enseñanza del límite finito de una función en un punto.

Hay un supuesto de dudosa observación. Si el numerador y el denominador de la fracción son ambos negativos, esto se deberá bien a que el profesor no usa ninguno de los fenómenos o bien a que no usa ninguno de los fragmentos aportados (manejando, en su lugar, fragmentos, desconocidos por nosotros, cuyos códigos de fenómeno corresponderían a las celdas rayadas de la Tabla 5.1).

En todos los casos, el valor absoluto de la fracción puede ser mayor que 1, o menor o igual que 1. Este valor absoluto lo hemos introducido por comodidad, pero no lo interpretamos sin conocer los signos del numerador y del denominador. Por ejemplo, con el numerador positivo y el denominador negativo, un valor absoluto mayor que 1 indica que parece más relevante la declaración de uso del fenómeno ADI que el reconocimiento de no uso del fenómeno IVF; en cambio, si el valor absoluto fuera menor o igual que uno, la relevancia anterior se invertiría, pasando a ser mayor la declaración de no uso del fenómeno IVF que la de uso del fenómeno ADI.

Establecemos, finalmente, seis tipos de perfiles, dos de los cuales tienen una remota posibilidad de ser observados. Si designamos con N+ el numerador positivo, N- el numerador negativo, D+ el denominador positivo, D- el denominador negativo, M los números mayores que 1 y m los menores o iguales que 1, estos seis tipos de perfiles se denotarían así:

Tipo 1A: (N+,D+,M)

Tipo 1B: (N+,D+,m)

Tipo 2A: (N+,D-,M)

Tipo 2B: (N+,D-,m)

Tipo 3A:(N-,D-,M)

Tipo 3B: (N-,D-,m)

Los dos últimos son remotamente posibles.

En la muestra, solamente hemos hallado tres de esos seis tipos de perfiles. La Tabla 5.9 (página siguiente) indica el reparto de los nueve profesores y los tipos para los que no tenemos ejemplo.

Tabla 5.9 *Componente numérica de los perfiles fenomenológicos y tipo de perfil asignado*

Tipos de perfiles detectados en la muestra	Código de profesor	Componente numérica del perfil
Tipo 1A	S	12/17
	U	13/8
	X	8/6
	Y	22/16
Tipo 1B	Sin ejemplo	Sin ejemplo
Tipo 2A	R	17/-10
Tipo 2B	T	9/-11
	V	13/-16
	W	10/-17
	Z	4/-10
Tipo 3A	Sin ejemplo	Sin ejemplo
Tipo 3B	Sin ejemplo	Sin ejemplo

5.6.2.2 Los tipos de perfiles en la muestra

Tipo 1A: Al ser positivos el numerador y el denominador de la componente numérica, los profesores, en su discurso, afirman emplear en el aula ambos fenómenos. El valor absoluto de la fracción (mayor que 1) indica que los profesores consideran más relevante o asignan más importancia a la declaración de uso del fenómeno ADI que a la del fenómeno IVF.

De los cuatro profesores que comparten este tipo de perfil (véase Tabla 5.4), tres tienen experiencia docente de más de 12 años, uno es mujer y todos trabajan en centros públicos urbanos.

Si pasamos a la componente visual, en los cuatro profesores (véase, en el Anexo A5.1: Figura 5.S, Figura 5.U, Figura 5.X y Figura 5.Y) observamos comentarios en las dos mitades de las figuras correspondientes. En la mitad superior la mayoría de los comentarios se realiza en la fase espontánea; referente al fenómeno IVF, muchos comentarios se realizan en la fase inducida. Para el fenómeno ADI se tratan todos los sistemas de representación. En todos los profesores es considerable el número de comentarios que se realiza sin referencia a sistema de representación concreto al tratar el fenómeno IVF. Para ambos fenómenos, se realizan comentarios en todas las categorías.

En tres de los cuatro profesores se observan transiciones del fenómeno IVF hacia el ADI, aunque solo al comentar el uso del sistema de representación gráfico.

Tipo 2A: La componente numérica de los perfiles fenomenológicos asociados tiene el numerador positivo y el denominador negativo; esto indica el uso en el aula del fenómeno ADI y el no uso del fenómeno IVF. El valor absoluto de la fracción es mayor que 1, por lo que interpretamos como más relevante la declaración de uso del fenómeno ADI que la de no uso del fenómeno IVF.

El único profesor de la muestra con perfil de Tipo 2A (profesor R) es un hombre con 22 años de experiencia docente en centros públicos urbanos.

Tipo 2B: Entre este tipo y el anterior solamente cambia el valor absoluto de la razón de uso. Se mantienen todas las consideraciones sobre los signos del numerador y del denominador. El valor absoluto de la fracción es menor o igual que 1, por lo que interpretamos como menos relevante la declaración de uso del fenómeno ADI que la de no uso del fenómeno IVF.

De los cuatro profesores que comparten este tipo de perfil tres son mujeres que trabajan en centros públicos urbanos y uno hombre que trabaja en un centro concertado; los cuatro tienen menos de 16 años de experiencia docente.

Si pasamos a la componente visual, en los cuatro profesores (véase, en el Anexo A5.1: Figura 5.T, Figura 5.V, Figura 5.W y Figura 5.Z), casi la totalidad de los comentarios relativos a uso de los fenómenos en el aula se sitúa en la mitad superior de las tablas correspondientes. En la mitad inferior solo tres de los cuatro profesores hace algún comentario relativo al uso del fenómeno IVF, pero en todos los casos corresponden a trabajo con alumnos concretos. Para el fenómeno ADI se tratan todos los sistemas de representación; no se observa ningún comentario sobre alumnado concreto. Dos profesores comentan el fenómeno ADI.

La componente visual permite establecer diferencias en los relatos de los profesores. Los que hemos situado en los tipos 2A y 2B apenas hacen comentarios referentes al uso del fenómeno IVF. En cambio, los profesores que comparten el perfil del tipo 1A hacen comentarios sobre el uso del fenómeno IVF en el aula.

5.3.2.3 Principales resultados obtenidos en el Foco II

Para analizar de forma sistemática los relatos de profesores hemos descrito una serie de categorías y dimensiones, que han permitido determinar, mediante una componente numérica y otra visual, perfiles fenomenológicos de profesores. Hemos establecido tipos de perfiles, usando la componente numérica y observando a posteriori similitudes (entre los profesores a los que hemos asignado mismo tipo de perfil) y diferencias (entre profesores con tipos de perfiles diferentes).

La investigación sobre relatos ha puesto al descubierto la dificultad de extraer información sobre los fenómenos. Básicamente, los profesores mencionan espontáneamente el uso del fenómeno ADI; es más difícil conseguir una declaración sobre el uso del fenómeno IVF.

Cuando en sus relatos los profesores afirmaron que empleaban el fenómeno IVF en su aula, advirtieron que lo hacían para trabajar con un alumnado concreto y no como explicación sistemática para toda la clase.

5.7 Comparación de resultados con los libros de texto

En el Capítulo 3º hemos caracterizado fenómenos organizados por definiciones de límite finito de una función en un punto. A lo largo de los Capítulos 4º y 5º hemos buscado evidencias para validar esa caracterización, estudiando libros de texto de bachillerato y relatos de profesores de educación secundaria, con la finalidad de "hacer visibles" tales fenómenos en los procesos de enseñanza-aprendizaje. Realizamos, en este apartado, una comparación de los resultados obtenidos en ambos capítulos.

Es necesario precisar qué es lo que se va a comparar, ya que ambos estudios tienen en común algunas cosas, como el objetivo, pero no otras, como el método o los "sujetos de estudio" (libros, en un caso, profesores, en el otro).

Cabe comparar ambos estudios si prestamos atención a los sistemas de representación y los formatos, que se manejan en ambos capítulos. Algunas diferencias no es posible soslayarlas; por ejemplo: (a) En los libros no cabe considerar dimensiones "fases" (espontánea o inducida) o "uso / no uso". (b) Las grabaciones sonoras contienen relatos, mientras que los libros contienen explicaciones.

Las discrepancias halladas y las analogías buscadas solamente tienen una finalidad descriptiva.

5.7.1 Fenómeno ADI: comparación libros-profesores

El sistema de representación verbal es el más utilizado para el fenómeno ADI; en el caso de los libros, es mayor el porcentaje del formato ejemplo (57%), y en los profesores el formato definición (100%). En los sistemas de representación gráfico y tabular, se observa una notable diferencia entre libros y profesores: para el sistema de representación gráfico y formato definición se observa que el 78% de los profesores lo utiliza, frente al 7% de libros; en el formato ejemplo, no es tan exagerada la diferencia, aunque sigue siendo mayor en el caso de los profesores (89%) que en los libros (39%). En el sistema de representación tabular con formato ejemplo los porcentajes son del (78% en profesores y 46% en libros).

Comparativamente, los profesores afirman utilizar el fenómeno ADI con frecuencias mayores que las observadas en los libros de texto.

Conjeturamos que la disparidad de los resultados se explica si tenemos en cuenta que la muestra de libros abarca desde 1933 hasta 2005, mientras que la experiencia docente de los profesores no era, en el año de las entrevistas, mayor de 35 años.

Si extraemos los porcentajes, análogos a los anteriores, para los libros del periodo 1995-2005, obtenemos: El sistema de representación tabular, en el formato ejemplo, es el más utilizado por los libros en ese periodo (100%); le sigue el sistema de representación verbal en el formato definición, lo cual coincide con el máximo porcentaje de profesores. En general todos los sistemas de representación y formatos tienen porcentajes considerables. Concluimos que los resultados se acercan a los porcentajes de uso obtenidos de las entrevistas con profesores

5.7.2 Fenómeno IVF: comparación libros-profesores

El sistema de representación simbólico es el más empleado por los profesores, con un 45% de comentarios igualmente repartidos, aproximadamente, entre los formatos ejemplo y definición. En los libros de texto los sistemas de representación más empleados son el simbólico (39%) y el verbal (38%), y no se observan diferencias considerables respecto a la utilización de los formatos ejemplo-definición. Para el sistema de representación gráfico los porcentajes son de 33% en profesores y de 23% en los libros.

Hemos calculado los porcentajes de frecuencias del fenómeno IVF en los libros de texto en el último periodo analizado (1995-2005), y en este caso todos los porcentajes de frecuencias de utilización en profesores, superan a los porcentajes de frecuencias de utilización en los libros.

5.8 Conclusiones sobre los relatos

Mencionamos algunos resultados relevantes de este capítulo y enunciamos algunas conclusiones.

5.8.1 Dimensiones

-Uso/no uso de los fragmentos en el aula

Todos los profesores afirman utilizar en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno ADI, y los que también afirman utilizar los fragmentos que contienen el fenómeno IVF se refieren siempre a un alumnado concreto.

-Fases (espontánea/inducida)

Si revisamos la componente visual de los nueve perfiles fenomenológicos (Anexo A5.1) observamos cómo la mayoría de comentarios realizados en la fase espontánea corresponde al fenómeno ADI mientras que la mayor parte de los realizados en la fase inducida corresponden al fenómeno IVF.

- Sistemas de representación

El sistema de representación simbólico se observa en dos fragmentos (B y J) de libros que contienen el fenómeno IVF, los profesores lo utilizan al trabajar con un alumnado concreto y en la mayoría de los casos con el formato definición.

El sistema de representación tabular se observa en un fragmento (A) de libro que contiene el fenómeno ADI. Los profesores entrevistados se reparten entre los que valoran positivamente su uso y los que declaran no utilizarlo por sus inconvenientes.

El sistema de representación verbal se observa en cuatro fragmentos, dos de los cuales (I y E) contienen el fenómeno ADI, y los otros dos (G y K) contienen el fenómeno IVF. Este sistema de representación es utilizado por los profesores para trabajar ambos fenómenos, aunque se emplea en más ocasiones para el fenómeno ADI que para el IVF, como comprobamos comparando dos razones: el total de comentarios realizados sobre cada fenómeno ADI/IVF (51/ 87 = 0,58) y el de comentarios que se dedican al sistema de representación verbal en ambos fenómenos (17/12 = 1,41).

Por su parte el sistema de representación gráfico se observa en otros cuatro fragmentos, dos de los cuales (D y F) contienen el fenómeno ADI , y los otros dos (C y H) contienen el IVF. Este sistema de representación es empleado por los profesores para trabajar el fenómeno ADI. Deducimos que los profesores de nuestra muestra, consideran el sistema de representación gráfico mucho más apropiado para trabajar en el aula el fenómeno ADI que el IVF; hay dos argumentos para esta conclusión: (a) si comparamos la razón anterior (17/12) con la de comentarios relativos al sistema de representación gráfico (28/7), observamos un aumento y (b) todos los comentarios de profesores sobre el sistema de representación gráfico para el fenómeno IVF o contienen una transición hacia el fenómeno ADI o entran en la dimensión de “no utilización”.

5.8.2 Categorías

Categoría C1 (comentarios genéricos): Para el fenómeno ADI todos los comentarios (C1A) son relativos al uso y se producen en la fase espontánea, mientras que para el IVF el 97% de los comentarios (C1I) se refieren al no uso y se producen en el fase inducida.

Categoría C2 (alumnado concreto): (No hay comentario especial sobre esta categoría.)

Categoría C3 (aspectos concretos de los fragmentos que contienen los fenómenos): la razón observada respecto a los fenómenos ADI e IVF es (3/16 = 0,19). Esta disminución con respecto al total de comentarios (51/ 87 = 0,58), sugiere que la mayoría de comentarios referentes a aspectos concretos de los fragmentos se ha realizado con respecto al fenómeno IVF.

Categoría C3* (comentarios relativos a los fenómenos): si calculamos las razones que se obtienen de comparar el número total de comentarios sobre cada fenómeno con los asignados como C3* (véase Tablas 5.8 y 5.9), (ADI 13/62 = 0,21 e IVF 16/76 = 0,21) no observamos diferencias notables entre uno y otro fenómeno. Si consideramos los comentarios que se refieren al uso del fenómeno, en el caso del fenómeno ADI todos los comentarios son relativos al uso, mientras que para el IVF los comentarios relativos al uso se reducen a la mitad. En ambos casos los comentarios se reparten entre las fase espontánea e inducida, aunque para el fenómeno IVF se realizan cuatro veces más en la fase inducida que en la espontánea.

5.8.3 Logros y avances

Con nuestro estudio de relatos de profesores de educación secundaria y bachillerato sobre la noción de límite finito de una función en un punto, hemos puesto de manifiesto el uso de los fenómenos ADI e IVF en diferentes sistemas de representación y formatos.

Concluimos que el fenómeno ADI es utilizado en el aula por la mayoría de los profesores, y que los que afirman emplear el fenómeno IVF, lo hacen cuando trabajan con un alumnado específico y no como explicación sistemática para toda la clase.

Los profesores de nuestra muestra consideran el sistema de representación gráfico mucho más apropiado para trabajar en el aula el fenómeno ADI que el IVF.

El sistema de representación simbólico solo lo emplean para ocuparse del fenómeno IVF; el sistema de representación tabular solo se emplea para trabajar el fenómeno ADI.

El sistema de representación verbal lo utilizan con ambos fenómenos.

Respecto al fenómeno IVF, los profesores han realizado un número considerable de comentarios referentes a dificultades concretas relacionadas con el formalismo, entre las que destacan los valores absolutos, el empleo del ε y el δ, las desigualdades, los entornos, etc.

Anexos al Capítulo 5º

El periodo de diseño de la entrevistas ha sido muy extenso y costoso, se han llevado a cabo hasta cuatro entrevistas piloto y una serie de reuniones del equipo de investigación, pero todo ello ha servido para que la realización y análisis de entrevistas haya sido metódico. Hemos observado como con el protocolo de actuación de la investigadora se ha logrado que, incluso con personas diferentes, la estructura de las entrevistas haya sido similar, lo que ha permitido un análisis sistemático mediante el uso de dimensiones y categorías también obtenidos en el proceso de diseño.

En el cuerpo del capítulo hemos presentado el proceso de diseño, la metodología del análisis, al análisis detallado de la entrevista del profesor V y los resultados obtenidos.

El Anexo A5.2 incluye el guión entregado a los nueve profesores en el primer encuentro, diseñado como resultado de las entrevistas piloto y las reuniones del equipo de investigación.

En el Anexo A5.3 hemos reproducimos los materiales aportados por el “profesor X” durante el desarrollo de su entrevista.

El Anexo A5.4 contiene la reproducción de fragmentos de los guiones entregados a los profesores en los que se recoge información general.

El grupo de Anexos A5.5 a A5.13 reproduce las anotaciones de la investigadora en cada entrevista.

Finalmente, en los Anexos A5.14 a A5.22 aportamos la transcripción de las nueve entrevistas.

Anexo A5.1 Relatos de los profesores

Anexo A5.1.1 Relato del profesor R

Profesor R: La entrevista y su transcripción

R es un hombre que trabaja en el centro P, como profesor de matemáticas. Lo es desde hace 22 años y ha trabajado en institutos rurales y urbanos, todos públicos; se licenció en Matemáticas por la Universidad de Granada en el año 1977; ha explicado por última vez el límite finito de una función en un punto en el curso 2005 / 2006.
Nuestro primer encuentro se produjo el 18 de noviembre de 2007, a las 12 de la mañana, en la Jefatura de Estudios del centro P; duró aproximadamente 10 minutos. La investigadora entregó los documentos y concertamos la entrevista para el 4 de diciembre de 2007, en el propio centro P, a las 11,45 de la mañana; la impresión que tuvo la investigadora sobre el profesor fue de interés en colaborar con la investigación, pero expresó su escasa disponibilidad, por su cargo en la junta directiva de un Instituto con muchos alumnos.
La entrevista se llevo en la fecha, hora y lugar previstos; por tiempo de grabadora, duró 13 minutos 50 segundos; en las proximidades, unos operarios manejaban máquinas generadoras de ruido; no hubo interrupciones.
En la transcripción debimos superar las difíciles condiciones ambientales indicadas; las diferencias en los tonos de voz del profesor R y la investigadora, en cambio, han aportado cierta comodidad a la escucha de la grabación. La transcripción íntegra de esta entrevista se acompaña como Anexo A5.14.

Profesor R: Unidades de información

Fase I: Presentación

U-I 1: [00,00-00,46] Intervención de la investigadora.

Fase II: Espontánea

U-I 2: [00,46-03,00] El profesor R comenta a grandes rasgos la dificultad del límite y los bajos niveles de los actuales alumnos en secundaria. Compara el tratamiento que se da a este concepto según la modalidad y curso de bachillerato en que se enseñe; considera que el llegar al razonamiento formal de δ ε es casi una utopía, que solo se puede conseguir con cursos muy concretos y con un grupo de alumnos muy concreto que lo faciliten, de otro modo, le parece imposible; por ello está descartando tratar en el aula fragmentos que contengan el razonamiento δ ε. Finalmente, compara los nuevos bachilleratos con los anteriores y con el COU.
U-I 3: [03,00-04,26] De los fragmentos entregados, R descarta los que contienen el razonamiento ε-δ. Observa que suele comenzar con razonamientos más intuitivos y comenta alguno de los fragmentos que contienen esos razonamientos.
U-I 5: [04,26-04,52] Si se les comenta le definición formal es con cursos muy concretos y al final de todo lo anterior, para que tengan la información pero poco más.
U-I 5: [04,52-05,23] R menciona algunas dificultades concretas de los fragmentos ε-δ, que explican por qué no los utiliza.

U-I 6: [05,23-08,26] R vuelve a comentar los fragmentos que utiliza, dando más detalles. Resalta, como curiosidad, el cambio que hemos dado a la enseñanza; antes, definiciones seguidas de ejemplos; ahora, ejemplos seguidos de definiciones.
U-I 7: [08,26-11,52] Por iniciativa de la investigadora, R retoma los fragmentos que contienen los fenómenos IVF y hace algunos comentarios genéricos sin profundizar en los fenómenos. Vuelve a mencionar los fragmentos que sí usa y el orden en que lo hace. Hace un comentario en el que surge una duda sobre la dependencia de ε sobre δ, e inmediatamente observa como esa dependencia es en el otro sentido δ sobre ε, lo que lleva a la investigadora, siguiendo su protocolo de actuación, a inducir al profesor sobre los fenómenos.

Fase III: Inducida

U-I 8: [11,52-13,39] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, intenta hacer ver a R los distintos fenómenos que ella observa en los fragmentos. R comenta dificultades concretas que tiene el fenómeno IVF sin referencia al razonamiento formal.

Fase IV: Término

U-I 9: [13,39-13,48] El profesor resume todo lo que ha comentado y la investigadora concluye la entrevista agradeciendo al profesor la desinteresada colaboración.

Profesor R: Interpretación de la entrevista

Tabla 5.R.1 *Categorías asignadas a las opiniones de R en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 3: 006R03,00:…la opción B esta es muy difícil tratarla con alumnos en bachillerato,…	C1I S-E (B) El profesor afirma en la fase genérica una dificultad del fragmento que contiene el fenómeno IVF S-E.	NU
U-I 3: 006R03,00: …. en primero cual era el objetivo pues con la idea de que entendieran bien el concepto de límite pues como mucho empezar eso con definiciones intuitivas por ejemplo la A U-I 3: 007R03,23: Este si es muy apropiado tanto para los principios de ciencias como en matemáticas aplicadas esta es casi la base ¿no?, empiezas a darle valores próximos y es la única manera , creo yo, de que ellos vean algo de la idea de límite, como empieces por el e-d de antemano están perdidos toda la U-I 3: 008R03,28: Están perdidos para toda la clase de límites. Entonces normalmente se suele empezar esto con el A	C2A T-E (A) El profesor afirma en la fase genérica utilizar en el aula con determinados alumnos el fenómeno ADI T-E	U
U-I 3: 010R04,04:…. con el B, ilustrada con algunos gráficos por ejemplo el bueno, gráficos pueden servir por ejemplo el D o el H, o sea que ahí ven ellos más o menos, ehm relacionan con esto ¿no?	C1A G-E (D) C1A G-D (H) El profesor afirma en la fase genérica la utilización del fenómeno ADI G-E en el aula. En el caso del fragmento H se produce una transición hacia el fenómeno ADI.	U
U-I 3: 011R05,16….. bueno el I ,el I prácticamente con el A. Entonces de esa manera vas introduciendo un poco y se van ellos ¿no?,	C1A V-E (I) El profesor afirma en la fase genérica la utilización del fenómeno ADI V-E .	U

Tabla 5.R.1 *Categorías asignadas a las opiniones de R en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
empiezan a manejar el concepto		
U-I 5: 016R05,01: De antemano el ε δ, eso que es, eso ya les suena a chino, no a Griego sino a chino,	C3I El profesor hace una afirmación genérica sobre la dificultad del uso de las letras griegas en los fragmentos que contienen el fenómeno IVF, sin referirse a ningún sistema de representación concreto.	NU
U-I 6: 018R05,27: …idea intuitiva con uso de la calculadora incluso, yo creo que lo mejor es esta la A, U-I 6: 019R05,43: Porque ahí es donde ellos ven efectivamente que es eso de tomar valores próximos y muy muy próximos y que entre uno y otro, porque ellos después del 1,9 lo primero que piensan es que está el 2, bueno y no hay otro ahí en medio y ahí ya empiezas a hacerles pensar, U-I 6: 020R05,49: … y ya si pues se dan cuenta de que efectivamente tu vas añadiendo valores y que nunca acabas ¿no?	C1A T-E (A) El profesor afirma en la fase genérica la utilización del fenómeno ADI T-E en el aula. E incluso comenta la utilidad que puede tener en este tipo de razonamientos el uso de la calculadora.	U
U-I 6: 024R06,24: Exactamente, pues verbalmente esto quiere decir esto que estamos haciendo aquí con los numeritos quiere decir que cuando la x se aproxima a U-I 6: 025R06,33:… a dos pues la y se va acercando cada vez más a 5, lo ¿veis? Si se ve en la gráfica también, bueno pues esto se escribe de esta forma, entonces ya aprovechas la punta de U-I 6: 030R07,15:,.., y a fuerza de eso de ir dándole valores incluso con eso con calculadora U-I 6: 031R07,33: Que vean ellos la intuición esa de que cuando se aproxima a tal pues la,…, que lo vean ellos prácticamente porque sino no se dan cuenta. ..	C3*A V-E(I) C3*A G-E(D) El profesor hace una afirmación concreta sobre el fenómeno ADI, refiriéndose a él como tal fenómeno. Y lo hace a través de los sistemas de representación verbal y gráfico mediante un ejemplo. Y afirmando su utilización en el aula.	U
U-I 7: 058R10,50: Pero ya te digo fundamentalmente mi idea siempre es esa comenzar por la parte práctica , U-I 7: 059R10,55: ..ésta acompañada de gráficas que ellos lo vean realmente U-I 7: 050R11,06:… incluso en las de aplicadas, pues empezamos viendo gráficas ¿no?. Vamos a ver está el límite pues aquí cuál es, qué ocurre si la x se va acercando a tal por dónde va la gráfica	C2A El profesor afirma en la fase genérica utilizar en el aula con determinados alumnos el fenómeno ADI apoyándose en diferentes sistemas de representación.	U
U-I 7: 052R11,18:… eso si resulta, ahora de eso a a la definición de e y d, ya están perdidos, ya eso les cuesta a ellos trabajo	C1I El profesor afirma en la fase genérica la no utilización del fenómeno IVF en el aula	NU

Tabla 5.R.2 *Categorías asignadas a las opiniones de R en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 8: 054R11,43:…claro ellos lo ven así es verdad porque esto que hemos estado viendo que es cuando los imágenes se van acercando aquí los originales, o sea al revés cuando los originales se van acercando aquí las U-I 8: 055R11,46:…van acercándose al límite	C1I El profesor afirma en la fase genérica la no utilización del fenómeno IVF en el aula. De hecho en su propio discurso y sin ser consciente utiliza el fenómeno de IVF, y sin embargo el mismo se auto-corrige	NU

Tabla 5.R.2 *Categorías asignadas a las opiniones de R en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
¿no?	afirmando que es al revés.	
U-I 8: 056I11,52: Pero en esta sin embargo es un poco al revés ¿no?, empiezas también por la variable dependiente ¿no?” U-I 8: 057R11,57: Exactamente, lo cual eso ya les lía más U-I 8: 059R12,06, Pero bueno si lo que hay que mirar es ver cuando nos acercamos aquí ver es donde van los otros, como ahora lo haces al revés ¿no?. Entonces claro el entorno el otro es el que te condiciona este , y eso ya es que les cuesta más	C3*I El profesor comenta una dificultad concreta sobre el fenómeno IVF, que justifica, a su parecer, la no utilización en el aula.	NU
U-I 8: 060R12,13: Por eso lo más dentro de la definición formalista, la más asequible para ellos es la vamos yo creo que es la E U-I 8: 062R12,21: Que es el proceso natural que ellos hacen en la práctica U-I 8: 063R12,29: Empiezan a darle valores a la x, próximo y entonces ya van viendo la y es lo natural, es que eso es lo más intuitivo, lo otro	C3*A V-D(E) El profesor hace una afirmación concreta sobre el fenómeno ADI, refiriéndose a él como tal fenómeno. Y lo hace a través del sistema de representación verbal mediante una definición. Y afirmando lo conveniente de su utilización en el aula frente a los argumentos que apoyan el uso fenómeno IVF.	U
U-I 8: 065R12,38: Lo otro ya les vuelve la tortilla y eso ya, ja,ja , los pierde, a la mitad los pierde..	C3*I El profesor comenta una dificultad concreta sobre el fenómeno IVF, que justifica, a su parecer, la no utilización en el aula.	NU
U-I 8: 065R12,44: Ya empezamos ahí, valor absoluto y eso como era y eso que uh ,ja ,ja eso ya 8: 066R12,57: Impensable.	C3I El profesor comenta una dificultad concreta de los fragmentos que incluyen el fenómeno IVF.	NU
U-I 8: 067R12,50: Ésta si ésta ya , fuh, (la B) U-I 8: 068R13,01: Ahí ya que se pierden además, esto de darse cuenta de que esto es suma por diferencia, y esto entonces esto como este es menor que este ya encaja y..	C3I S-E (B) El profesor comenta una dificultad concreta de los fragmentos que incluyen el fenómeno IVF, en particular cuando se utiliza el sistema de representación simbólico y con un ejemplo.	NU

Profesor R: Distribución de categorías, por fenómenos, en el relato

En las Tablas 5.R.3 y 5.R.4, respectivamente, presentamos, para cada fenómeno, la distribución de categorías según los sistemas de representación y dimensiones consideradas. La columna derecha y la fila inferior incluyen los subtotales correspondientes.

Tabla 5.R.3 *Profesor R. Fenómeno ADI. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	1,3*		3*		1,0,0,2
Tabular	1,2				1,1,0,0
Gráfico	1,1,3*				2,0,0,1
Simbólico					
(No indica)	2				0,1,0,0
Subtotales, por fase y uso / no uso	4,2,0,2		0,0,0,1		

Tabla 5.R.4 *Profesor R. Fenómeno IVF. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal					
Tabular					
Gráfico					
Simbólico		1		3	1,0,1,0
(No indica)		1,3		1,3,3*,3*	2,0,2,2
Subtotales, por fase y uso / no uso		2,0,1,0		1,0,2,2	

Profesor R: Comentarios

(R1) En las tablas 5.5.R.3 y 5.5.R.4, registramos aproximadamente la misma cantidad de comentarios sobre los fenómenos: 9, corresponden al fenómeno ADI y 8 al fenómeno IVF.
(R2) Los comentarios sobre el fenómeno ADI indican la utilización en el aula; los correspondientes comentarios sobre el fenómeno IVF indican la no utilización.
(R3) El número de comentarios espontáneos (8) es ocho veces mayor que el número de comentarios inducidos (1) en el fenómeno ADI; el número de comentarios inducidos (5) es aproximadamente el doble de los espontáneos (3) en el IVF. La investigadora ha podido influir en los comentarios de la fase inducida. Si no fuera éste el caso, concluiríamos que hay, por parte del profesor R, un cierto anhelo del fenómeno IVF.
(R4) Distribución de comentarios por categorías.
-Categoría C1: comentarios que consideramos genéricos. Son aproximadamente la mitad de los comentarios totales en ambos fenómenos; en el caso del fenómeno ADI (4), todos ellos son espontáneos, en el caso del fenómeno IVF (3), los comentarios realizados en la fase espontánea son el doble que en la inducida.
-Categoría C2: comentarios que, a nuestro entender, remiten a alumnos concretos. Se detecta uno, en la fase espontánea. en relación con el fenómeno ADI.
- Categoría C3: comentarios referentes a dificultades concretas de los fragmentos que contienen los fenómenos. Solo se observan en relación con el fenómeno IVF (3), siendo los inducidos el doble de los espontáneos.
- Categoría C3*: comentarios en los que detectamos explícitamente los fenómenos. Corresponden a una tercera parte en el caso del fenómeno ADI (3), siendo el doble los

realizados en la fase espontánea que en la inducida, y una cuarta parte (2) en el caso del fenómeno IVF, todos en la fase inducida.
(R5) Distribución de comentarios por sistemas de representación sistemas de representación.
-Verbal: Se realizan 2 comentarios en el caso del fenómeno ADI (los dos en la fase espontánea y referentes a la utilización).
-Tabular: Se realizan 2 comentarios en el caso del fenómeno ADI (los dos en la fase espontánea y referentes a la utilización).
-Gráfico: En el caso del fenómeno ADI, se dan 3 comentarios (en la fase espontánea y referente a la utilización), observándose en uno de ellos una transición del fenómeno IVF hacia el ADI. (Véase U-I 3*: 010R04,04*.)
-Simbólico: 2 comentarios en el caso del fenómeno IVF (uno en la fase espontánea y otro en la fase inducida, ambas referentes a la no utilización).
- Sin referencia a sistema de representación concreto: En el caso del fenómeno ADI solo se da en una ocasión (en la fase espontánea y referente a la utilización con alumnos concretos), en el caso del fenómeno IVF aparece en (6) ocasiones, (2) de ellas espontáneas y las (4) restantes inducidas.; de las cuales (2) son referentes específicamente al fenómeno.

Profesor R: Perfil fenomenológico

El profesor R utiliza en el aula todos los fragmentos presentados que contienen el fenómeno ADI. La mayoría de los comentarios sobre el fenómeno son espontáneos y genéricos, a la vez que realiza comentarios referentes a alumnos concretos y explícitos del propio fenómeno. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el simbólico, aunque también ha hecho un comentario sin apoyarse en un sistema de representación concreto.
El mismo profesor no utiliza en el aula los fragmentos presentados que contienen el fenómeno IVF. Los comentarios se reparten entre las fases espontánea e inducida, han sido genéricos, de aspectos concretos de los fragmentos que contienen el fenómeno y explícitos, estos últimos se dan todos en la fase inducida. Solo ha mencionado el sistema de representación simbólico, aunque también ha hecho comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto; en una ocasión, hemos detectado una transición entre el fenómeno (IVF) contenido en un fragmento expresado en el sistema de representación gráfico y el fenómeno ADI.

Componente Numérica

Para el fenómeno ADI 2*8 – 0 + 1*1 - 0 = 17
Para el fenómeno IVF 0 – 2*3 + 0 –1* 4 = - 10
La razón de uso de los fenómenos en el profesor R es de 17 / -10

Componente Visual

PROFESOR R						
ADI	C3*A	✓☑	✓			
	C3A					
	C2A			✓		
	C1A	✓	✓♒	✓		✓
FENÓMENO	CATEGORÍAS	V	G	T	S	Sin SR
IVF	C1I				✗	✗⊠
	C2I					
	C3I				⊠	✗⊠
	C3*I					⊠⊠

Figura 5.R Componente visual del perfil

El numerador de la razón de uso es positivo; interpretamos que el fenómeno ADI está presente en el relato que hace R de su aula; este hecho queda corroborado en la mitad superior de la Figura 5.R. La mayoría de los comentarios son de la fase espontánea y muestra una dispersión de marcas entre categorías, al igual que entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación.
El denominador de la razón de uso es negativo; interpretamos que el fenómeno IVF no está presente en el relato que hace R de su aula; la mitad inferior de la Figura 5.R muestra una dispersión de marcas entre categorías. En cambio respecto a los sistemas de representación no observamos dispersión, todas las marcas se concentran en el simbólico y sobre todo en los comentarios que se realizan sin referencia a un sistema de representación concreto, la mayoría de los comentarios se produjeron en la fase inducida..
La razón de uso 17/-10 indica que, en el relato que hace de su aula, el fenómeno ADI recibe más importancia que el fenómeno IVF. Concluimos que, en el relato del profesor R **,** el fenómeno ADI se utiliza en el aula, se presenta a todos en varios sistemas; en cambio el fenómeno IVF no se utiliza. Respecto al sistema de representación gráfico hemos detectado una transición del fenómeno IVF hacia el ADI. Comentarios específicos del fenómeno ADI han surgido en ambas fases; mientras que del IVF solo han surgido en la fase inducida.

Anexo A5.1.2 Relato del profesor S

Profesor S: La entrevista y su transcripción

S es un hombre que trabaja en el centro J, como profesor de matemáticas. Lo es desde hace 12 años y ha trabajado en institutos rurales y urbanos, todos públicos; se licenció en Matemáticas por la Universidad de Málaga en el año 1994; ha explicado por última vez el límite finito de una función en un punto en el curso 2006 / 2007.
Para la entrega de documentos, nuestro primer encuentro se produjo el 25 de marzo de 2008, a las 11,30 de la mañana, en la sala de profesores del centro J; duró aproximadamente 10 minutos. La investigadora entregó los documentos y concertamos la entrevista para el 2 de abril de 2008, en el propio centro J, a las 11,30 de la mañana; la impresión que tuvo la investigadora sobre el profesor fue de no demasiado interés en la investigación, aunque sí que se encontraba comprometido con la investigadora.
La entrevista se llevo en la fecha, hora y lugar previstos; por tiempo de grabadora, duró 11 minutos 50 segundos; la hora de la entrevista coincidió con guardia de recreo del profesor lo que provocó que aunque no hubiese interrupciones, las condiciones ambientales no fueran demasiado idóneas. En la transcripción debimos superar las difíciles condiciones ambientales indicadas; las diferencias en los tonos de voz del profesor S y la investigadora, en cambio, han aportado cierta comodidad a la escucha de la grabación. La transcripción íntegra de esta entrevista se acompaña como Anexo A5.15.

Profesor S: Unidades de información.

Fase I: Presentación

U-I 1: [00,00-01,59] Intervención de la investigadora.

Fase II: Espontánea

U-I 2: [01,59-02,39] El profesor S comenta que ha sido una grata sorpresa para él, el hecho de utilizar todos los fragmentos; incluso se los entregó a sus propios alumnos para que ellos le comentarán cuales se habían usado en el aula y estuvieron de acuerdo en que todos.
U-I 3: [02,39-03,15] A continuación pasa a realizar una secuencia de cómo los utiliza en su aula. Verbalmente, tablas gráficas…y luego formalizando de alguna manera: con palabras,..
U-I 5: [03,15-04,43] Por sugerencia de la investigadora comenta y resume todo lo anterior haciendo referencia a los fragmentos concretos; el profesor especifica que tiene en cuenta como dos “grupos”, cinco fragmentos con los intuitivos y luego los otros seis con los que se llega al formalismo con sus diferentes sistemas de representación; observa que termina con los ejercicios que es lo que más trabajo les cuesta.
U-I 5: [04,43-05,30] Hace la observación de que al entregarle los fragmentos a los alumnos les ha preguntado en qué momento ellos han entendido el concepto de límite; respondieron que el empezar con la parte intuitiva y en especial con las gráficas les ha ayudado mucho. La investigadora matiza que si en el sentido de la variable independiente a la dependiente; el profesor afirma que en ese sentido; y que lo que más

les cuesta es la definición pero que con ejercicios concretos es cuando van afianzando el concepto.

Fase III: Inducida

U-I 6: [05,30-06,31] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, intenta hacer ver a S los distintos fenómenos que ella observa en los fragmentos. S intenta justificar que sus alumnos los utilizan fundamentalmente al trabajar con ejemplos concretos en los que él da un ε y sus alumnos deben encontrar el δ que cumpla lo que se pide.
U-I 7: [06,31-10,13] La investigadora, sigue insistiendo a través del protocolo de actuación, y S hace comentarios que se centran fundamentalmente en el formalismo y no en el fenómeno; de hecho afirma que con respecto al fenómeno no observa dificultades.
U-I 8: [10,13-10,39] Como todo lo comentado por el profesor hasta el momento se ha centrado en el trabajo con un alumnado muy concreto, la investigadora pregunta por lo que ha ocurrido al trabajar con otro tipo de alumnado; el profesor afirma no recordarlo por llevar tiempo sin trabajar el concepto de límite.

Fase IV: Término

U-I 10: [10,39-11,50] El profesor resume todo lo que ha comentado y la investigadora concluye la entrevista agradeciendo al profesor la desinteresada colaboración.

Profesor S: Interpretación de la entrevista

Tabla 5.S.1 *Categorías asignadas a las opiniones de S en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
3: 011S024,48: Hacia un límite…eh..fuimos haciendo tablas 3: 012S02,53: Ejemplo práctico con tablas..	C2A T-E (A) El profesor afirma en la fase genérica utilizar en el aula con determinados alumnos el fenómeno ADI T-E	U
3: 015S03,06: Como yo digo en clase. Luego ya con la idea de gráfica. 3: 015S03,12: Una función cualquiera pues viendo la gráfica de la función y apoyándola eso..viendo un cierto punto viendo a donde tienden las imágenes	C2A G-E (D) C2A G-D (F) El profesor afirma en la fase genérica utilizar en el aula con determinados alumnos el fenómeno ADI a través del sistema de representación gráfico.	U
3: 016S03,15: Y luego ya pues formalizándolo de alguna manera, pues con palabras…	C2A V-D (E) El profesor afirma en la fase genérica utilizar en el aula con determinados alumnos el fenómeno ADI V-D	U
4: 018S03,36: Si la idea es esa de que cuando vemos una gráfica, pues la idea de… límite cuando se acerca uno a un punto en el eje de abcisas pues las imágenes a donde tienden. 4: 019S03,52: Eso ya también en un dibujo ya más formal no con una función concreta. Sino con un entorno.	C3*A G-E (D) C3*A G-D (F) El profesor hace una afirmación concreta sobre el fenómeno ADI, refiriéndose a él como tal fenómeno. Y lo hace a través del sistema de representación gráfico. Y afirmando su utilización en el aula.	U
4: 020S03,48: Hasta llegar ya por fin a lo que es la definición formal de límite ¿no? con ε y δ. 4: 022S04,05: Y luego ...vaya estos enfoques pues de entorno y tal .. 4:023S04,07: Conforme vamos practicando pues	C2I El profesor afirma en la fase genérica que con un grupo concreto de alumnos utiliza el fenómeno IVF en su aula sin apoyarse en sus argumentos en ningún sistema de	U

Tabla 5.S.1 *Categorías asignadas a las opiniones de S en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
se van introduciendo..., una vez se lo dices de una manera otra vez se lo dices de otra forma.. 4. 024S04,22: Para que ellos vayan viendo justamente las variantes ¿no?. Corrijo un ejercicio y lo utilizas de otra manera para que ellos vean el ..pues de alguna manera pues trabajar con sinónimos en este caso o ideas….parecidas..	representación en concreto.	
5: 026S04,33: Y…ya para que..porque ellos lo que encuentran más dificultad en ese concepto teórico de ε δ..pues trabajar en estos ejercicios.. 5: 027S04,43: Exactamente, para terminar en ejercicios donde ellos realmente palpen quien es ε y quien es δ. Con números concretos.	C3I S-E (B) El profesor comenta una dificultad concreta de los fragmentos que incluyen el fenómeno IVF, en particular cuando se utiliza el sistema de representación simbólico y con un ejemplo.	U

Tabla 5.S.2 *Categorías asignadas a las opiniones de S en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
6: 034S05,30: Y.., les costó más obviamente la definición…y luego ya con esto con los ejercicios consiguieron…pues viendo ya casos concretos ..dado un δ calcular un ε…dado un ε calcular el δ correspondiente. Pues…	C2I El profesor afirma en la fase genérica utilizar en el aula con determinados alumnos el fenómeno IVF , sin referirse a ningún sistema de representación concreto. Sin embargo en su discurso razona en primer lugar de la variable independiente a la dependiente, aunque cuando se da cuenta rectifica.	U
7: 048S06,40: Claro..las letras..ellos cuando ven letras ya formalizar..todo lo que no sean números incluso en segundo de bachillerato eh.. 7: 049S06,52: Les choca les choca todavía. El hecho de que también se trabaje con valores absolutos,…,pues en principio pues dudan un poquito también… Trabajar con una inecuación. 7: 050S07,00: Estos conceptos previos que a ellos deben tener, pero claro en ese momento…. No los recuerdan. Y entonces en esa aplicación es en lo que fallan. Y luego que claro ε y δ. 7: 051S07,06: Pues ellos ven dos dibujos raros que no saben exactamente lo que representan. 7: 052S07,18: Y...y eso es lo que les cuesta un poquito más. 7: 056S08,03: En general el tema de los símbolos y el tema de las inecuaciones. Eso les choca…Cuando ves que han cogido ya el..la idea..o la inecuación… lo recuerdan que ya lo vieron en cuarto.	C3I S-D (J) C3I S-E (B) El profesor afirma que con un grupo concreto de alumnos al utilizar fragmentos que contienen el fenómeno IVF encuentra unas dificultades muy concretas, particularmente cuando se utiliza el sistema de representación simbólico.	U

Profesor S: Distribución de categorías, por fenómenos, en el relato

En las Tablas 5.S.3 y 5.S.4, respectivamente, presentamos, para cada fenómeno, la distribución de categorías según los sistemas de representación y dimensiones consideradas. La columna derecha y la fila inferior incluyen los subtotales de cada categoría.

Tabla 5.S.3 *Profesor S. Fenómeno ADI. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	2				0,1,0,0
Tabular	2				0,1,0,0
Gráfico	2,2,3*,3*				0,2,0,2
Simbólico					
(No indica)					
Subtotales, por fase y uso / no uso	0,4,0,2				

Tabla 5.S.4 *Profesor S. Fenómeno IVF. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal					
Tabular					
Gráfico					
Simbólico	3		3,3		0,0,3,0
(No indica)	2		2		0,2,0,0
Subtotales, por fase y uso / no uso	0,1,1,0		0,1,2,0		

Profesor S: Comentarios

(S1) En las Tablas 5.S.3 y 5.S.4, registramos aproximadamente el mismo número de comentarios sobre el fenómeno ADI (6) que sobre el IVF (5).
(S2) Los comentarios sobre el fenómeno ADI indican el uso en el aula; los correspondientes comentarios sobre el fenómeno IVF indican el uso en el aula siempre que se trabaje con alumnos muy concretos.
(S3) Cuando se indica el uso en el aula, en el caso del fenómeno ADI, todos los comentarios son espontáneos; y en el fenómeno IVF, 2 de los comentarios son espontáneos y los 3 restantes inducidos.
(S5) Distribución de comentarios por categorías.
-Categoría C1: no observados.
-Categoría C2, o comentarios que, a nuestro entender, remiten a alumnos concretos: en conjunto más de la mitad de los comentarios, el 65% en el caso del fenómeno ADI, y el 40% en el IVF.
- Categoría C3, o comentarios referentes a dificultades concretas de los fragmentos que contienen los fenómenos: solo se observan en relación con el fenómeno IVF (3), siendo los inducidos el doble de los espontáneos.
- Categoría C3*, o comentarios en los que detectamos explícitamente los fenómenos: se dan solamente en el caso del fenómeno ADI en 2 ocasiones, ambas en la fase espontánea.
(S5) Distribución de comentarios por sistemas de representación sistemas de representación.

-Verbal: Solo se realiza 1 comentario en el caso del fenómeno ADI (en la fase espontánea y referente a la utilización con alumnos concretos).
-Tabular: Se da solamente en el caso del fenómeno ADI en una ocasión (en la fase espontánea y referente a la utilización con alumnos concretos).
-Gráfico: Solo en el caso del fenómeno ADI se da en 5 ocasiones (en la fase espontánea y referentes a la utilización), la mitad de los comentarios son referentes a alumnos concretos y la otra mitad explícitos sobre el fenómeno.
-Simbólico: Solo aparece en 1 ocasión en el caso del fenómeno IVF (en la fase espontánea y referente a la utilización).
- Sin referencia a sistema de representación concreto: Se da solamente en el caso del fenómeno IVF en (2) ocasiones (una en la fase espontánea y la otra inducida y ambos casos referentes a la utilización con alumnos concretos).

Profesor S: Perfil fenomenológico

El profesor S utiliza en el aula todos los fragmentos presentados que contienen el fenómeno ADI. La mayoría de los comentarios sobre el fenómeno son espontáneos y sobre un alumnado concreto. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el simbólico.
El mismo profesor utiliza en el aula los fragmentos presentados que contienen el fenómeno IVF siempre que se trabaje con un alumnado concreto. Los comentarios se reparten entre las fases espontánea e inducida. Solo ha mencionado el sistema de representación simbólico, aunque también ha hecho comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto. También ha que ha hecho comentarios explícitos sobre el fenómeno ADI.

Componente Numérica

Realizando los cálculos descritos en la introducción obtenemos:
Para el fenómeno ADI 2*6 – 0 + 0 - 0 = 12
Para el fenómeno IVF 2*2 – 0 + 1*3 – 0 = 7
Por tanto la razón de uso de los fenómenos en el profesor S es de 12 / 7.

Componente Visual

PROFESOR S						
ADI	C3*A		✓✓			
	C3A					
	C2A	✓	✓✓	✓		
	C1A					
FENÓMENO	CATEGORÍAS	V	G	T	S	Sin SR
IVF	C1I					
	C2I					✓☑
	C3I				✓☑☑	
	C3*I					

Figura 5.S Componente visual del perfil

El numerador de la razón de uso es positivo; interpretamos que el fenómeno ADI está presente en el relato que hace S de su aula; este hecho queda corroborado en la mitad

superior de la Figura 5.S. Todos los comentarios son espontáneos y se concentran mayoritariamente en categoría correspondiente a comentarios sobre alumnos concretos, y un par de ellos son explícitos sobre el fenómeno ADI; se reparten entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación.
El denominador de la razón de uso también es positivo; interpretamos que el fenómeno IVF está presente en el relato que hace S de su aula; la mitad inferior de la Figura 5.S muestra también una concentración de marcas entre las categorías C2 y C3. En cambio, el único sistema de representación comentado ha sido el simbólico.
La razón de uso 12/7 indica que, en el relato que hace S de su aula, el fenómeno ADI recibe más importancia que el fenómeno IVF. Concluimos que, en el relato del profesor S, ambos fenómenos se utilizan en el aula, con la particularidad de que más de la mitad de los comentarios han sido referentes a un alumnado concreto tanto en uno como en otro fenómeno; el fenómeno ADI se presenta en varios sistemas; en cambio el fenómeno IVF solo con el simbólico y con finalidades específicas. Comentarios explícitos del fenómeno IVF no han surgido en ninguna fase; mientras que del ADI han surgido en la fase espontánea.

Anexo A5.1.3 Relato del profesor T

Profesor T: La entrevista y su transcripción

T es una mujer que trabaja en el centro P, como profesora de matemáticas. Lo es desde hace 16 años y ha trabajado en institutos rurales y urbanos, todos públicos; se licenció en Matemáticas por la Universidad de Granada en el año 1989; ha explicado por última vez el límite finito de una función en un punto en el curso 2006 / 2007 .
Para la entrega de documentos, nuestro primer encuentro se produjo el 26 de mayo de 2008, a las 11.50 de la mañana, en la Sala de Profesores del centro P; duró aproximadamente 10 minutos. La investigadora entregó los documentos y concertamos la entrevista para el 6 de mayo de 2008, en el propio centro P, a las 8.30 de la mañana; la impresión que tuvo la investigadora sobre la profesora fue de interés en la investigación y disposición a colaborar.
La entrevista se llevo en la fecha, hora y lugar previstos; por tiempo de grabadora, duró 10 minutos 55 segundos; las condiciones ambientales fueron favorables; no hubo interrupciones.
En la transcripción hubo que superar las coincidencias en los tonos de voz de al profesora T y la investigadora. La transcripción íntegra de esta entrevista se acompaña como Anexo A5.16.

Profesor T: Unidades de información.

Fase I: Presentación

U-I 1: [00,00-00,55] Intervención de la investigadora.

Fase II: Espontánea

U-I 2: [00,55-02,12] El profesor T comenta a grandes rasgos que los fragmentos que contienen el razonamiento ε-δ no los utiliza; para utilizarlos debería tener unas condiciones muy favorables y sería todo a título informativo, quizá en lo que fue BUP si pudo hacerlo.
U-I 3: [02,12-03,28] De los fragmentos entregados, T descarta los que contienen el razonamiento ε-δ, y afirma que quizá a lo largo de la entrevista descarte alguno más.
U-I 4: [03,28-05,40] T comenta los fragmentos que utiliza dando detalles y hace la observación de que algunos los utilizaría dependiendo del alumnado concreto con el que trabaje; haciendo por tanto tres agrupaciones: los no utilizados, los utilizados y los que dependen del alumnado.

Fase III: Inducida

U-I 5: [05,40-06,32] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, intenta hacer ver a T los distintos fenómenos que ella observa en los fragmentos. T comenta dificultades concretas que tienen los fragmentos sin referirse al fenómeno IVF.
U-I 6: [06,32-10,24] Por iniciativa de la investigadora , T retoma los fragmentos que contienen los fenómenos IVF y hace algunos comentarios genéricos sin profundizar en los fenómenos.

Fase IV: Término

U-I 7: [10,24-10,45] La investigadora concluye la entrevista agradeciendo al profesor la desinteresada colaboración.

Profesor T: Interpretación de la entrevista

Tabla 5.T.1 *Categorías asignadas a las opiniones de T en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 2: 001T01,10: Bueno pues,…, así a grandes rasgos, lo primero que detecté fue, que hay algunas definiciones que usan el ε el δ, y eso ya no,…, no se	C1I El profesor afirma en la fase genérica que no utiliza en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno IVF	NU
U-I 2: 003T01,55: Se bloquean y ya, pues no hay manera de entrarles. A lo mejor si ves que el grupo es muy bueno, que el nivel es alto y en cursos altos, mínimo de primero de bachillerato, le puedes hacer una introducción, algo, puedes hacer una especie de visión.., pero sin más pretensiones	C2I El profesor afirma que utiliza en el aula algunos fragmentos que contiene el fenómeno IVF cuando las condiciones son muy favorables y a grandes rasgos.	U
U-I 3: 008T02,25: El B U-I 3: 010T02,33: Con el entorno pues no. Este… U-I 3: 011T02,38: Tampoco, por,….,por lo mismo. U-I 3: 017T03,21: La J, pues,…, U-I 3: 018T03,25: Igual, lo mismo.	C1I S-E (B) C1I V-E (G) C1I S-D (J) El profesor afirma en la fase genérica que no utiliza en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Particularmente en los sistemas de representación simbólico tanto en ejemplo como en definición, y el verbal con un ejemplo.	NU
U-I 4: 021T03,39: El de las sucesiones lo más intuitivo, es lo que ellos más ven y… U-I 4: 022T03,51 : La tablita de valores U-I 4: 023T03,59: Cuando x tiende a tal y va a tal, eso sí	C3*A T-E (A) El profesor hace una afirmación concreta sobre el fenómeno ADI T-E, refiriéndose a él como tal fenómeno y afirmando su utilización en el aula.	U
U-I 4: 026T04,09: Concreto, entonces pues esta es de los que.. U-I 4: 028T04,14: Si que no es seguro. Esta es…	C1I G-E (C) C1I G-D (H) El profesor afirma en la fase genérica que no utiliza en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Particularmente en el caso en el que se usa el sistema de representación gráfico tanto en ejemplos como en definiciones.	NU
U-I 4: 029T04,21: La K bueno es que según es que no la estoy ahora leyendo… U-I 4: 031T04,40: Hablar de entornos,.., si hay un grupo que veo que me,…, sigue entonces, sí, y ya te digo a nivel de bachillerato.	C2I V-D (K) El profesor afirma que cuando las condiciones son muy favorables utiliza en el aula algunos fragmentos que contiene el fenómeno IVF V-E.	U
U-I 4: 033T04,46: La I. Sí, esta es con un ejemplo concreto,..	C1A V-E (I) El profesor afirma en la fase genérica que utiliza en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno ADI V-E.	U
U-I 4: 035T05,59: La E. Es la idea intuitiva, y esta que es con el grafico pues también.	C1A V-D (E) El profesor afirma en la fase genérica que utiliza en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno ADI V-D.	U

Tabla 5.T.1 *Categorías asignadas a las opiniones de T en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 4: 036T05,03: La D. También. Y más o menos se puede	C1A G-E (D) El profesor afirma en la fase genérica que utiliza en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno ADI G-E.	U

Tabla 5.T.2 *Categorías asignadas a las opiniones de T en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 5: 055T06,10: A ellos les cuesta la abstracción, el ver algo que no palpan,….., y entonces…., la idea de entorno como tal, pues..,no…no…la ven U-I 5: 055T06,28: No la ven. Entonces no sé si por madurez, o por el proceso que ellos han tenido de.., no llegan a asimilar el… que significa un entorno.	C3I El profesor comenta una dificultad concreta de los fragmentos que incluyen el fenómeno IVF.	NU
U-I 6: 056T06,32:Qué relación existe entre un entorno y un límite. U-I 6: 058T07,03: Ellos ven más lógico.., el que,…., como siempre van tomando valores de x…. U-I 6: 059T07,08: El,…,el …, a partir de los valores de x pues deducir que le pasa a la y	C3*A El profesor hace una afirmación genérica sobre el fenómeno ADI, refiriéndose a él como tal fenómeno. Y de afirmación de utilización en el aula.	U
U-I 6: 050T07,13: Al revés es ¿?¿?¿?¿?, también.. U-I 6: 051T07,28: Si todo lo que es abstracción, les cuesta, pero aparte de eso que también es verdad, el que…..pensar en la función en los dos sentidos pues también los pierde,… sobre todo al principio…	C3*I El profesor comenta una dificultad concreta sobre el fenómeno IVF, que justifica, a su parecer, la no utilización en el aula.	NU
U-I 6: 060T08,57: Que si ya la han ido,…., paso a paso, si la hubieran trabajado bien en 5º o lo hubieran trabajado bien en 1º de bachillerato, y tienes tiempo, en 2º de bachillerato la metes.. U-I 6: 067T10,09: El ε con el entorno con los valores absolutos,…, con,…y yo decía ¡esto que es!. Y porque hay tanto…	C3I El profesor comenta una dificultad concreta de los fragmentos que incluyen el fenómeno IVF, que justifica, a su parecer, la no utilización en el aula.	NU

Profesor T: Distribución de categorías, por fenómenos, en el relato

En las Tablas 5.T.3 y 5.T.4, respectivamente, presentamos, para cada fenómeno, la distribución de categorías según los sistemas de representación y dimensiones consideradas. La columna derecha y la fila inferior incluyen los subtotales de cada categoría.

Tabla 5.T.3 *Profesor T. Fenómeno ADI. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	1,1				2,0,0,0
Tabular	3*				0,0,0,1
Gráfico	1				1,0,0,0
Simbólico					
(No indica)			3*		0,0,0,1
Subtotales, por fase y uso / no uso	3,0,0,1		0,0,0,1		

Tabla 5.T.4 *Profesor T. Fenómeno IVF. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal		1			1,0,0,0
Tabular	2				0,1,0,0
Gráfico		1,1			2,0,0,0
Simbólico		1,1			2,0,0,0
(No indica)	2	1		3,3*,3	1,1,2,1
Subtotales, por fase y uso / no uso	0,2,0,0	6,0,0,0		0,0,2,1	

Profesor T: Comentarios

(T1) En las Tablas 5.T.3 y 5.T.5, registramos más del doble de comentarios sobre el fenómeno IVF (11) que sobre el ADI (5).
(T2) Los comentarios sobre el fenómeno ADI indican la utilización en el aula; los correspondientes comentarios sobre el fenómeno IVF indican la no utilización, excepto si se trabaja con alumnos muy concretos.
(T3) El número de comentarios espontáneos (5) es cuatro veces mayor que el número de comentarios inducidos (1) en el fenómeno ADI; el número de comentarios inducidos (3) es aproximadamente la tercera parte de los espontáneos (8) en el IVF. En este sentido, cabe sospechar la influencia de la investigadora respecto al fenómeno IVF.
(T4) Distribución de comentarios por categorías.
-Categoría C1, o comentarios que consideramos genéricos: Son más de la mitad de los comentarios totales en ambos fenómenos; en el caso del fenómeno ADI (3) y en el IVF (6), todos ellos son espontáneos.
-Categoría C2, o comentarios que, a nuestro entender, remiten a alumnos concretos: solo se dan un par de ellos en la fase espontánea en relación con la escasa utilización del fenómeno IVF.
- Categoría C3, o comentarios referentes a dificultades concretos de los fragmentos que contienen los fenómenos: solo se observan en relación con el fenómeno IVF (2), siendo ambos inducidos.
- Categoría C3*, o comentarios en los que detectamos explícitamente los fenómenos: corresponden a casi una tercera parte en el caso del fenómeno ADI (2), habiéndose realizado uno en la fase espontánea y el otro en la inducida, y solamente uno en la fase inducida en el caso del fenómeno IVF.

(T5) Distribución de comentarios por sistemas de representación sistemas de representación.
-Verbal: Se realizan (2) comentarios en el caso del fenómeno ADI (los dos en la fase espontánea y referentes a la utilización), y otros (2) en el IVF (los dos espontáneos, uno de ellos referente a la no utilización, y el otro a la utilización con un alumnado muy concreto).
-Tabular: Solo se realiza (1) comentario explícito sobre el fenómeno ADI (en la fase espontánea y referente a la utilización).
-Gráfico: En el caso del fenómeno ADI se da en 1 ocasión (en la fase espontánea y referente a la utilización), y en el IVF se da en (2) ocasiones (también en la fase espontánea pero referentes a la no utilización).
-Simbólico: Solo aparece en 2 ocasiones en el caso del fenómeno IVF (ambas en la fase espontánea y referentes a la no utilización).
- Sin referencia a sistema de representación concreto: En el caso del fenómeno ADI solo se da en una ocasión (en la fase espontánea, referente y explícito sobre el fenómeno), en el caso del fenómeno IVF aparece en (5) ocasiones, (2) de ellas espontáneas y las (3) restantes inducidas.; de las cuales (1) es referente explícitamente al fenómeno.

Profesor T: Perfil fenomenológico

El profesor T utiliza en el aula todos los fragmentos presentados que contienen el fenómeno ADI. La mayoría de los comentarios sobre el fenómeno son espontáneos y genéricos, a la vez que realiza comentarios explícitos del propio fenómeno. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el simbólico, aunque también ha hecho un comentario sin apoyarse en un sistema de representación concreto.
El mismo profesor no utiliza en el aula los fragmentos presentados que contienen el fenómeno IVF. Los comentarios se reparten entre las fases espontánea e inducida, han sido genéricos, de alumnos muy concretos, de aspectos particulares de los fragmentos que contienen el fenómeno y explícitos, estos últimos se dan en la fase inducida. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el tabular, aunque también ha hecho comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto.

Componente Numérica

Para el fenómeno ADI 2*4 – 0 + 1*1 - 0 = 9
Para el fenómeno IVF 2*2 – 2*6 + 0 - 1*3 = -11
La razón de uso de los fenómenos en el profesor T es de 9 / -11

Componente Visual

PROFESOR T						
ADI	C3*A			✓		☑
	C3A					
	C2A					
	C1A	✓✓	✓			
FENÓMENO	CATEGORÍAS	V	G	T	S	Sin SR
IVF	C1I	✗	✗✗		✗✗	✗
	C2I	✓				✓
	C3I					⊠⊠
	C3*I					⊠

Figura 5.T Componente visual del perfil

El numerador de la razón de uso es positivo; interpretamos que el fenómeno ADI está presente en el relato que hace T de su aula; este hecho queda corroborado en la mitad superior de la Figura 5.T. La mayoría de los comentarios son espontáneos y muestra una dispersión de marcas entre las categorías C1 y C3*, lo que nos da una idea de que los comentarios han sido muy genéricos o del fenómeno ADI específicamente.; al igual que entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación.
El denominador de la razón de uso es negativo; interpretamos que el fenómeno IVF no está presente en el relato que hace T de su aula; la mitad inferior de la Figura 5.T muestra una dispersión de marcas entre categorías, al igual que entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación, y sobre todo en los comentarios que se realizan sin referencia a un sistema de representación concreto, una tercera parte de los comentarios son inducidos.
La razón de uso 9/-11 indica que, en el relato que hace T de su aula, el fenómeno ADI recibe menos importancia que el fenómeno IVF. Concluimos que, en el relato del profesor T **,** el fenómeno ADI se utiliza en el aula, se presenta a todos en varios sistemas; en cambio el fenómeno IVF no se utiliza, a no ser con un alumnado muy concreto. Comentarios explícitos del fenómeno ADI han surgido en ambas fases; mientras que del IVF solo han surgido en la fase inducida.

Anexo A5.1.4 Relato del profesor U

Profesor U: La entrevista y su transcripción

U es un hombre que trabaja en el centro P, como profesor de matemáticas. Lo es desde hace 31 años y ha trabajado en institutos rurales y urbanos, todos públicos; se licenció en Matemáticas por la Universidad de Granada en el año 1974; ha explicado por última vez el límite finito de una función en un punto en el curso 2006 / 2007.
Nuestro primer encuentro se produjo el 5 de mayo de 2008, a las 11,50 de la mañana, en la Sala de Profesores del centro P; duró aproximadamente 10 minutos. La investigadora entregó los documentos y concertamos la entrevista para el 12 de mayo de 2008, en el propio centro P, a las 11,40 de la mañana; la investigadora tuvo la impresión de que el profesor mostraba interés en colaborar con el estudio.
La entrevista se llevo en la fecha, hora y lugar previstos; por tiempo de grabadora, duró 13 minutos 39 segundos; las condiciones ambientales no fueron demasiado favorables porque la en entrevista se llevó a cabo en la Sala de Profesores del centro P en una hora de guardia del profesor; hubo un par de interrupciones.
En la transcripción debimos superar las difíciles condiciones ambientales indicadas; las diferencias en los tonos de voz del profesor U y la investigadora, en cambio, han aportado cierta comodidad a la escucha de la grabación. La transcripción íntegra de esta entrevista se acompaña como Anexo A5.17.

Profesor U: Unidades de información

Fase I: Presentación

U-I 1: [00,00-01,04] Intervención de la investigadora.

Fase II: Espontánea

U-I 2: [01,04-05,42] El profesor U realiza sus comentarios siguiendo el orden alfabético de los fragmentos, no utilizó los sobres como sugirió la investigadora.
U-I 3: [05,42-07,39] El profesor U hace algunos comentarios sobre el fenómeno IVF, matizando que no hace demasiado hincapié.
U-I 4: [07,39-09,09] El profesor U saca conclusiones de lo sucedido a través de toda su experiencia docente, particularmente en la evolución de los contenidos.

Fase III: Inducida

U-I 5: [09,09-10,45] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, hace algunas observaciones al profesor U acerca de los distintos fenómenos que ella observa en los fragmentos. U comenta que a la hora de ocuparse del concepto de límite utiliza aproximaciones y se prioriza el trabajar primero con la variable independiente, que la utilización del fenómeno IVF sería para una especie de "segunda precisión" en el trabajo sobre el concepto de límite, que solo se puede realizar en circunstancias muy específicas.
U-I 6: [10,45-12,05] La investigadora intenta que el profesor U comente dificultades que haya tenido con ese alumnado específico con el que ha trabajado el fenómeno IVF, el profesor U comenta que si tuviese tiempo no tendrían problemas.

U-I 7: [12,05-13,29] La investigadora solicita el profesor U que cuente alguna experiencia concreta con el fenómeno ADI, U comenta que el sistema de representación tabular es muy apropiado y acompañado del uso de la calculadora.

Fase IV: Término

U-I 9: [13,29-13,39] La investigadora concluye la entrevista agradeciendo al profesor la desinteresada colaboración.

Profesor U: Interpretación de la entrevista

Tabla 5.U.1 *Categorías asignadas a las opiniones de U en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 2:003U01,04: En respuesta a la ficha A, si es una manera de presentar el límite,… U-I 2:005U01,16: De una función con aproximaciones sucesivas, quizás también la más socorrida dependiendo de los niveles ¿no?	C1A T-E (A) El profesor afirma en la fase genérica la utilización de fragmentos que contienen el fenómeno ADI T-E en el aula.	U
U-I 2:006U01,49: La ficha B, pues nos sugiere la presentación del concepto mediante valoración de ε y δ, pues casi, casi ,casi ,casi que la tenemos descartada ya, porque,…, por falta de tiempo, por falta de nivel. Quizá en algún primero de Ciencias se pueda dar si hay desahogo de tiempo,…. U-I 2:007U01,59: En algún segundo de Ciencias, cuando hay,…, tiempo también, pero desde luego no en primero de Matemáticas Aplicadas a las CSS. U-I 2:008U02,10: Únicamente a título informativo a los de ciencias si se les suele decir que la formalización de este concepto, pues sería de este modo. Se les pone con todo con cuantificadores y todo. U-I 2:009U02,19: Pero no se insiste demasiado en su uso práctico ni en su interpretación lógica por..	C2I S-E (B) El profesor afirma que en circunstancias muy concretas y con cursos muy concretos utiliza fragmentos que contienen el fenómeno IVF S-E en su aula, aunque solo sea a título informativo, que no se insiste demasiado.	U
U-I 2:010U02,21: En la ficha C U-I 2:011U02,28: Si se suele usar este tipo de,.., de conceptualización, de aproximación a la idea ¿no? U-I 2:012U02,33: De entornos desde el punto de vista gráfico. U-I 2:013U02,44: Exactamente, de ejemplos concretos. Un entorno gráfico de los,.., de los puntos próximos a un límite, los puntos próximos al punto… U-I 2:014U02,48: Sobre los ejes e, Y y X ¿no? U-I 2:015U02,57: Gráfico sí, la idea intuitiva y llevada a la gráfica.	C1A G-E(C) El profesor afirma en la fase genérica la utilización de fragmentos que contienen el fenómeno ADI G-E. En el caso concreto de este fragmento se produce una transición hacia el fenómeno ADI. De hecho en su propio argumento habla en primer lugar de la variable dependiente, lo que implícitamente contiene el fenómeno IVF.	U
U-I 2:016U02,59: En el, en la ficha D. Si vemos una presentación también, esta si se suele utilizar también. U-I 2:017U03,07: La D es la que más se practica después para que sobre la gráfica se identifique la idea de límite. U-I 2:018I03,15: "Si la comparamos con la C ¿no?, la C también tiene los ε y los δ." U-I 2:018U03,19: Si la C tiene los ε y los δ y	C1A G-E(D) El profesor afirma en la fase genérica la utilización de fragmentos que contienen el fenómeno ADI G-E en el aula. La investigadora compara este fragmento con el C para observar al profesor los diferentes fenómenos, por eso este afirma que esta es más intuitiva	U

Tabla 5.U.1 *Categorías asignadas a las opiniones de U en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
sobre todo la visualización del entorno. U-I 2:019U03,28: Aparte del valor del ε y el δ, la cosa que en el otro D, .., pues bueno ya se habla más intuitivamente, más superficialmente		
U-I 2:021U03,35: En la E,…., si es la misma idea se le suele decir.. U-I 2:022U03,55: Es la que suele venir principalmente en los libros, es en la que se suele insistir también para,…, para su comprensión	C1AV-D (E) El profesor afirma en la fase genérica la utilización de fragmentos que contienen el fenómeno ADI V-D en el aula.	U
U-I 2 :023U03,56: En la ficha F… U-I 2 :024U04,00: Tenemos aproximaciones desde un punto de vista gráfico, pues sí, sí se podría ..	C1AG-D(F) El profesor afirma en la fase genérica la utilización de fragmentos que contienen el fenómeno ADI G-D en el aula.	U
U-I 2: 026U04,23: En la G solo se da a título informativo en algún nivel de primero o segundo de bachillerato de ciencias. Porque no se puede insistir mucho.	C2I V-E(G) El profesor afirma que en circunstancias muy concretas y con cursos muy concretos se utilizan fragmentos que contiene el fenómeno IVF V-E en su aula, aunque solo sea a título informativo, que no se insiste demasiado.	U
U-I 2 :027U04,34: La H,……, pues,…., no se suele usar.	C1I G-D(H) El profesor afirma en la fase genérica la no utilización de fragmentos que contienen el fenómeno IVF G-D en el aula.	NU
U-I 2: 028U04,44: Sí la I si se suele usar porque incluso por la,.., se les hace uso de la calculadora. U-I 2: 029U04,04: Para que vean que efectivamente es una manera de comprobar también el límite ¿no?. En expresiones más difíciles, pues,…., se les toma por aproximación de valores	C1AV-E(I) El profesor afirma en la fase genérica la utilización de fragmentos que contienen el fenómeno ADI V-E en el aula. Hace la observación del uso que este fragmente propicia de las calculadoras.	U
U-I 3: 034U04,42: En la, en la ficha J.. U-I 3: 035U06,01: Pues sí, se suele usar también alguna vez, sobre todo a título informativo como formalización del concepto. U-I 3: 036U06,10: Si la implicación es cierta pues entonces es cierto el,…,el hecho de que el límite sea el punto que se ha dado, que existe el límite y que sea el punto b, pero no se suele insistir demasiado sobre la, la…, el valor de esa implicación. U-I 3: 037U06,13: Porque claro habría que desarrollar mucho en que casos la implicación falla,.. U-I 3: 038U06,30: Cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente falso,… No se insiste mucho siempre por falta de tiempo, o porque vemos también más práctico utilizarlo en los ejemplos que no dedicar tiempo a la teoría	C3*I S-D(J) El profesor hace un comentario referente al fenómeno IVF en sí mismo. Afirmando la utilización de fragmentos que contienen el fenómeno IVF S-D en el aula a. Pero también comenta que no insiste demasiado y que tampoco lo hace siempre.	U
U-I 3: 039U06,40: Y por último en la ficha K,…, U-I 3: 040U06,41: El límite de f(x) cuando x tiende a a, si fijado un entorno así,…., se suele usar también desde el punto de vista gráfico porque así desde el momento que se usa gráficamente pues la manera de presentar esa gráfica es con el texto que vemos.	C3*I V-D(K) El profesor hace un comentario referente al fenómeno IVF en sí mismo. Afirmando la utilización de fragmentos que contienen el fenómeno IVF V-D en el aula.	U

Tabla 5.U.1 *Categorías asignadas a las opiniones de U en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 3: 041U07,06: Sí, ahora es señalarles en el gráfico el entorno sobre el eje de la Y, el entorno reducido sobre el eje de la X, se suele usar este contenido. U-I 3: 042U07,13: Apoyado al mismo tiempo lo que sería gráfico y textual ¿no?		

Tabla 5.U.2 *Categorías asignadas a las opiniones de U en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 5: 046U09,37: Si eso es un camino,…, la verdad es que a la hora de acercarnos a la idea de límite, de precisar si el límite es correcto o no es correcto y eso muchas veces tenemos que centrarnos en la idea de aproximación y no priorizamos si la aproximación primero se plantea desde el punto de las imágenes y consecuentemente se encuentra la aproximación de los originales o al revés	C1A El profesor afirma en la fase genérica la utilización del fenómeno ADI en el aula, sin hacer referencia a ningún sistema de representación en concreto.	U
U-I 5: 047U09,53: Eso sería para una segunda precisión que a veces no,….., U-I 5: 048U10,25: Parten de la idea primaria de que con el valor del ε encontrar el δ,….,pero cuesta un poquito hasta que no se digiere bien …, y quizá haya que sacrificar un poco el rigor conceptual ante el rigor comprensivo y gráfico	C3*I El profesor hace un comentario referente al fenómeno IVF en sí mismo. Afirmando la utilización del mismo en el aula, pero sin hacer referencia a ningún sistema de representación en concreto. Además de observar la dificultad que entraña.	U
U-I 6: 049U11,38: Si en la intuición pues claro se pierde la precisión por supuesto, y se perdería a la hora de un caso difícil de entenderlo, se perdería la precisión. Pero,……., bueno la práctica pues nos da que casi, casi hay que ir más a lo…..a groso modo diríamos que no precisar. Cuando hay un grupo bueno, que ocasionalmente ocurre, y se puede parar en un, un caso un poquito más difícil y fija que,…., eh, priorizar el concepto desde el modo…desde el punto de vista de que no para todo ε, hay algún ε para el cual ya no existe el δ, pues sí y además el alumno pues puede llegar a comprenderlo sin dificultad pero si ha habido tiempo, si le puedes dedicar un poquito más y si el curso lo permite…también. U-I 6: 050U11,45: Sí, no todos los ambientes de clase nos permiten llegar siempre a ese segundo grado ¿no? de precisión	C3*I El profesor hace un comentario referente al fenómeno IVF en sí mismo. Afirmando la utilización del mismo en el aula, pero sin hacer referencia a ningún sistema de representación en concreto. Lo que ocurre es que no con todos los alumnos se puede realizar. .	U

Profesor U: Distribución de categorías, por fenómenos, en el relato

En las Tablas 5.U.3 y 5.U.4, respectivamente, presentamos, para cada fenómeno, la distribución de categorías según los sistemas de representación y dimensiones consideradas. La columna derecha y la fila inferior incluyen los subtotales de cada categoría.

Tabla 5.U.3 *Profesor U. Fenómeno ADI. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	1,1				2,0,0,0
Tabular	1				1,0,0,0
Gráfico	1,1,1				3,0,0,0
Simbólico					
(No indica)			1		1,0,0,0
Subtotales, por fase y uso / no uso	6,0,0,0		1,0,0,0		

Tabla 5.U.4 *Profesor U. Fenómeno IVF. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización espontánea	No utilización espontánea	Utilización inducida	No utilización inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	2,3*				0,1,0,1
Tabular					
Gráfico		1			1,0,0,0
Simbólico	2,3*				0,1,0,1
(No indica)			3*,3*		0,0,0,2
Subtotales, por fase y uso / no uso	0,2,0,2	1,0,0,0	0,0,0,2		

Profesor U: Comentarios

(U1) En las tablas 5.4.3 y 5.4.4, registramos el mismo número de comentarios (7) sobre cada fenómeno.
(U2) Los comentarios sobre el fenómeno ADI indican el uso en el aula; los correspondientes comentarios sobre el fenómeno IVF indican el uso en el aula siempre que se trabaje con alumnos muy concretos.
(U3) Cuando se indica el uso en el aula, el número de comentarios espontáneos (6) es seis veces mayor que el número de comentarios inducidos (1), en el caso del fenómeno ADI; este factor se reduce a 2 en el caso del fenómeno IVF.
(U4) Distribución de comentarios por categorías.
-Categoría C1, o comentarios que consideramos genéricos: En el caso del fenómeno ADI, esta categoría abarca la totalidad de los comentarios. En el caso del fenómeno IVF, la categoría se recuenta una sola vez (comentario espontáneo de no utilización del fenómeno).
-Categoría C2, o comentarios que, a nuestro entender, remiten a alumnos concretos: en la fase espontánea en relación con el fenómeno IVF.
- Categoría C3: no observados.
-Categoría C3*, o comentarios en los que detectamos explícitamente los fenómenos: se dan solamente en el caso del fenómeno IVF en 4 ocasiones, de las cuales 2 corresponden a la fase espontánea y otras dos a la inducida.
(U5) Distribución de comentarios por sistemas de representación sistemas de representación.
-Verbal: En ambos fenómenos se da en 2 ocasiones (las dos en la fase espontánea y referentes a la utilización). Uno de los comentarios es explícito sobre el fenómeno IVF.

-Tabular: Se da solamente en el caso del fenómeno ADI en una ocasión (en la fase espontánea y referente a la utilización).
-Gráfico: En el caso del fenómeno ADI se da en 3 ocasiones (en la fase espontánea y referentes a la utilización), siendo una de ellas una transición que hemos detectado del fenómeno IVF hacia el ADI. Véase: desde U-I 2:010U02,21 hasta U-I 2:015U02,57. En el caso del fenómeno IVF solo se da en una ocasión (en la fase espontánea y referentes a la no utilización)
-Simbólico: Solo aparece en 2 ocasiones en el caso del fenómeno IVF (en la fase espontánea y referentes a la utilización), una de ellas es explícita sobre el fenómeno.
- Sin referencia a sistema de representación concreto: En ambos fenómenos solo aparecen en la fase inducida y referentes a la utilización; del fenómeno ADI solamente se realiza un comentario, del fenómeno IVF se realizan dos, ambos explícitos sobre el fenómeno.

Profesor U: Perfil fenomenológico

El profesor U utiliza en el aula todos los fragmentos presentados que contienen el fenómeno ADI. La mayoría de los comentarios sobre el fenómeno son espontáneos y genéricos. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el simbólico.
El mismo profesor utiliza en el aula los fragmentos presentados que contienen el fenómeno IVF siempre que se trabaje con un alumnado concreto. Los comentarios se reparten entre las fases espontánea e inducida. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el tabular, aunque también ha hecho comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto; en una ocasión, hemos detectado una transición entre el fenómeno (IVF) contenido en un fragmento expresado en el sistema de representación gráfico y el fenómeno ADI. También ha que ha hecho comentarios explícitos sobre el propio fenómeno IVF.

Componente Numérica

Para el fenómeno ADI 2*6 – 0 + 1*1 - 0 = 13
Para el fenómeno IVF 2*4 – 2*1 + 1*2 – 0 = 8
La razón de uso de los fenómenos en el profesor U es de 13 / 8

Componente Visual

PROFESOR U						
ADI	C3*A					
	C3A					
	C2A					
	C1A	✓✓	✓♒✓	✓		☑
FENÓMENO	CATEGORÍAS	V	G	T	S	Sin SR
IVF	C1I		✗			
	C2I	✓			✓	
	C3I					
	C3*I	✓			✓	☑☑

Figura 5.U Componente visual del perfil

El numerador de la razón de uso es positivo; interpretamos que el fenómeno ADI está presente en el relato que hace U de su aula; este hecho queda corroborado en la mitad

superior de la Figura 5.U La mayoría de los comentarios son espontáneos y se concentran en una sola categoría (correspondiente a comentarios genéricos), se reparten entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación.
El denominador de la razón de uso también es positivo; interpretamos que el fenómeno IVF está presente en el relato que hace U de su aula; la mitad inferior de la Figura 5.U muestra una dispersión de marcas entre categorías, dispersión que no se observa en la mitad superior. En cambio, entre sistemas de representación no hay diferencias, salvo en la intensidad de uso, pues ambas mitades tienen indicaciones en todas las marcas previstas.
La razón de uso 13/8 indica que, en el relato que hace U de su aula, el fenómeno ADI recibe más importancia que el fenómeno IVF. Concluimos que, en el relato del profesor U **,** ambos fenómenos se utilizan en el aula; el fenómeno ADI se presenta a todos en varios sistemas; en cambio el fenómeno IVF se utiliza con finalidades específicas, apoyado en el sistema de representación verbal o el simbólico, respecto al sistema de representación gráfico hemos detectado una transición del fenómeno IVF hacia el ADI. Comentarios específicos del fenómeno ADI no han surgido en ninguna fase; mientras que del IVF han surgido tanto en la fase espontánea como inducida.

Anexo A5.1.5 Relato del profesor V

Profesor V: La entrevista y su transcripción

Ves un hombre que trabaja en el centro S, como profesor de matemáticas. Lo es desde hace 9 años y ha trabajado en un instituto urbano concertado; se licenció en Matemáticas por la Universidad de Granada en el año 1996; ha explicado por última vez el límite finito de una función en un punto en el curso 2006 / 2007.
Nuestro primer encuentro se produjo el 13 de mayo de 2008, a las 11,40 de la mañana, en la Sala de Profesores del centro S; duró aproximadamente 10 minutos. La investigadora entregó los documentos y concertamos la entrevista para el 20 de mayo de 2008, en el propio centro S, a las 13,40 de la tarde; la impresión que tuvo la investigadora sobre el profesor fue de bastante interés en la investigación y disposición ante la colaboración con la investigadora.
La entrevista se llevo en la fecha, hora y lugar previstos; por tiempo de grabadora, duró 9 minutos 35 segundos; las condiciones ambientales fueron idóneas; no hubo interrupciones.
La transcripción fue muy cómoda de realizar debido a las óptimas condiciones ambientales y a las diferencias en los tonos de voz del profesor V y la investigadora. La transcripción íntegra de esta entrevista se acompaña como Anexo A5.5.

Profesor V: Unidades de información

Fase I: Presentación

U-I 1: [00,00-00,49] Intervención de la investigadora.

Fase II: Espontánea

U-I 2: [00,49-03,34] El profesor V comenta los fragmentos que afirma no utilizar en el aula, explica algunos de los motivos que lo han llevado a no utilizarlos. Observa que algunas veces ha trabajado con alguno de ellos, pero matizando que cuando ha encontrado un alumnado muy específico y solo a título informativo para que vean como la intuición es formalizada.
U-I 3: [03,34-05,10] De los fragmentos entregados, V comenta los que sí utiliza en el aula afirmando que son todos “de la misma escuela intuitiva” y que son los que aparecen en los libros de texto.
U-I 4: [05,10-06,21] El profesor V vuelve a comentar los fragmentos que no utiliza por lo que la investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, pregunta por experiencias concretas; el profesor V comenta dificultades de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF pero sin hacer referencia al fenómeno en concreto.

Fase III: Inducida

U-I 5: [06,21-07,16] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, intenta hacer ver a R los distintos fenómenos que ella observa en los fragmentos. V acepta la presencia de los fenómenos y afirma que a los alumnos les resulta más fácil lo intuitivo, el fenómeno ADI, y que a fin de cuentas es eso con lo que se trabaja.

U-I 6: [07,16-08,25] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, pregunta por experiencias concretas con alumnos específicos, el profesor comenta que lo que intenta es adecuar el fenómeno ADI al formalismo, pero que realmente no trabaja el fenómeno IVF.
U-I 7: [08,25-09,22] El profesor V resume sus comentarios y saca algunas conclusiones.

Fase IV: Término

U-I 9: [09,22-09,35] La investigadora concluye la entrevista agradeciendo al profesor la desinteresada colaboración.

Profesor V: Interpretación de la entrevista

Tabla 5.V.1 *Categorías asignadas a las opiniones de V en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 2: 008V01,12: El del K si exactamente, este no porque verdaderamente aunque si les doy un poquito de entorno a la gente de primero de sociales,….. Luego no lo utilizo.	C1I V-D (K) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF V-D, afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 2: 013V01,32: El J que no. Es que no utilizo δ ε,…, en ningún momento.	C1I S-D (J) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF S-D, afirmando que no lo utiliza en el aula. Es curioso como en su discurso habla en primer lugar de la variable independiente.	NU
U-I 2: 016V01,46: Alguna vez he utilizado esto con cursos de tecnológico de segundo de bachillerato. Buenos. Simplemente para que lo vean.	C2I S-D (J) El profesor comenta que en algunas ocasiones con alumnos muy concretos, ha utilizado en el aula un fragmento que contiene el fenómeno IVF S-D.	U
U-I 2: 021V02,20: Exacto. Este es lo mismo pero gráficamente utilizando el δ y el ε, pues no, no lo utilizo. U-I 2: 022V02,25: Con gráficamente el H.	C1I G-D (H) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF G-D, afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 2: 023V02,27: Luego aquí tenemos con distancias,…., también con δ… U-I 2: 025V02,28: El G tampoco	C1I V-E (G) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF V-E, afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 2: 025V02,32: Si parecido, pues nada. Y el C lo mismo con un ejemplo	C1I G-E (C) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF G-E, afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 2: 029V02,57: El B vamos… U-I 2: 034V03,26: Es poco recomendable. Y sobre todo con los horarios tan apretados.	C1I S-E (B) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF S-E, afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 3: 037V03,36: Pues el I que es con sucesiones. U-I 3: 038V03,46: Que es el que utilizo además en todos los cursos y lo suelen entender bastante bien. Esa idea intuitiva de que cuanto más se acerca a más se acerca a, pero utilizando…. además te puedo enseñar exámenes que los estoy corrigiendo.	C3*A T-E (I) El profesor hace un comentario sobre el fenómeno ADI T-E es sí mismo, en uno de los fragmentos que lo contienen , el comentario es referente a la utilización en el aula.	U
U-I 3: 042V04.04: El de I. Luego estos de manera intuitiva U-I 3: 043V04,06: Si la F.	C1A G-D (F) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno ADI G-D, afirmando que lo utiliza en el aula.	U
U-I 3: 047V04,23: Luego el intuitivo U-I 3: 048V04,30: El E. Que se puede pensar el límite como el valor al que tienden las imágenes cuando los originales .., al fin y al cabo es lo que hemos visto de las tablas	C3*A V-D (E) El profesor hace un comentario sobre el fenómeno ADI V-D es sí mismo, en uno de los fragmentos que lo contienen , el comentario es referente a la utilización en	U

Tabla 5.V.1 *Categorías asignadas a las opiniones de V en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
	el aula.	
U-I 3: 049V04,38: El D lo mismo que te he dicho antes. Lo utilizo mucho y además con este ejemplo en concreto.	C1A G-E (D) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno ADI G-E, afirmando que lo utiliza en el aula.	U
U-I 3: 052V04,49: Y aquí tenemos una tabla a izquierda y derecha. U-I 3: 053V04,52: Que se utiliza para sobre todo con los límites por la izquierda y derecha, es el que hacemos.	C1A T-E (A) El profesor hace un comentario genérico sobre uno de los fragmentos que contienen el fenómeno ADI T-E, afirmando que lo utiliza en el aula.	U
U-I 4: 057V05,07: Y yo sinceramente también los prefiero para empezar a…..a explicar este tipo de cosas	C1A El profesor hace un comentario genérico sobre los fragmentos que contienen el fenómeno ADI. Afirmando que lo utiliza en el aula.	U
U-I 4: 058V05,10: Si nos metiéramos en otro tipo de cosas δ, perdidos.	C1I El profesor hace un comentario genérico sobre los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU
U-I 4: 062V05,46: Si para empezar la manera de escribir. U-I 4: 063V05,48: El para todo el existe el implica..eso ya… U-I 4: 064V05,59: Es otro idioma si..Claro y luego cuando les dices que este valor absoluto significa que esto se hace muy pequeño y que esto se hace muy pequeño, pues entienden…no entienden que eso signifique eso, pero te lo aceptan. U-I 4: 065V06,03: Te lo aceptan a vale lo más chico.. y eso es lo que pone ahí U-I 4: 066V06,15: Pero realmente no creo que nadie,.., yo tampoco me he esforzado mucho sinceramente en que ellos entiendan realmente lo que significa eso.	C3I El profesor hace varios comentarios sobre algunas de las dificultades que presentan los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU

Tabla 5.V.2 *Categorías asignadas a las opiniones de V en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 5: 071V06,58: Debes buscar lo otro es cierto. Yo creo que les resulta más sencillo que sea la x la que primero se mueva y luego la f a ver lo que le pasa U-I 5: 072V07,05: Y además luego tienen muchas más que ver con lo que hacemos, al fin y al cabo lo que les dices es sustituye U-I 5: 073V07,07: Entonces es la x la que U-I 5: 074V07,13: Y sale… por eso lo veo más lógico la verdad el hacerlo así.	C3*A El profesor hace un comentario genérico sobre el propio fenómeno ADI. De hecho es en este momento cuando el profesor observa el fenómeno IVF, sin hacer ningún comentario específico al respecto.	U
U-I 6: 076V07,25: En lo poquito que lo he utilizado nadie tampoco se ha dado cuenta de que este es realmente a este aunque yo creo que cuando lo explico digo cuando este sale pequeño	C3I* El profesor hace un comentario sobre una dificultad del propio fenómeno IVF. Particularmente sugiere como subsana	NU

Tabla 5.V.2 *Categorías asignadas a las opiniones de V en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
este sale pequeño es al revés ,ja,ja.. U-I 6: 077V07,30: La explicación que yo les doy pues se la intento adecuar a esta definición y efectivamente me voy a lo último primero y luego me voy a este. U-I 6: 078V07,39: Encima le das la vuelta U-I 6: 079V07,46: Pero yo se lo explico,.., no aunque esté al final esto es lo primero que vimos y esto es lo siguiente, siempre lo hemos hecho así	esta dificultad.	
U-I 7: 086V08,42: Yo lo del δ ε por lo menos tal y como tenemos ahora mismo el sistema, la exigencias.. U-I 7: 087V08,47: El tiempo. Yo lo destierro.	C1I El profesor hace un comentario genérico sobre los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Afirmando que no lo utiliza en el aula.	NU

Profesor V: Distribución de categorías, por fenómenos, en el relato

En las Tablas 5.V.3 y 5.V.4, presentamos (respectivamente), para cada fenómeno, la distribución de categorías según los sistemas de representación y dimensiones consideradas. La columna derecha y la fila inferior incluyen los subtotales de cada categoría.

Tabla 5.V.3 *Profesor V. Fenómeno ADI. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	3*				0,0,0,1
Tabular	3*,1				1,0,0,1
Gráfico	1,1				2,0,0,0
Simbólico					
(No indica)	1		3*		1,0,0,1
Subtotales, por fase y uso / no uso	4,0,0,2		0,0,0,1		

Tabla 5.V.4 *Profesor V. Fenómeno IVF. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal		1,1			2,0,0,0
Tabular					
Gráfico		1,1			2,0,0,0
Simbólico	2	1,1			2,1,0,0
(No indica)		1,3		3*,1	2,0,1,1
Subtotales, por fase y uso / no uso	0,1,0,0	7,0,1,0		1,0,0,1	

Profesor V: Comentarios

(V1) En las Tablas V5.3 y V5.4, registramos más comentarios sobre el fenómeno IVF (11) que sobre el ADI (7).
(V2) Los comentarios sobre el fenómeno ADI indican la utilización en el aula; los correspondientes comentarios sobre el fenómeno IVF indican la no utilización, excepto un comentario referente a un alumnado muy concreto.
(V3) El número de comentarios espontáneos (6) es seis veces mayor que el número de comentarios inducidos(1) en el fenómeno ADI; el número de comentarios inducidos (2) es aproximadamente la cuarta parte de los espontáneos (9) en el IVF.
(V4) Distribución de comentarios por categorías.
-Categoría C1, o comentarios que consideramos genéricos: Son la mitad de los comentarios en el caso del fenómeno ADI (3), todos ellos espontáneos, y en el caso del fenómeno IVF son casi tres cuartas partes (8), los comentarios realizados en la fase espontánea son siete veces más que los realizados en la inducida.
-Categoría C2, o comentarios que, a nuestro entender, remiten a alumnos concretos: solo se da uno en la fase espontánea en relación con el fenómeno IVF.
- Categoría C3, o comentarios referentes a dificultades concretos de los fragmentos que contienen los fenómenos: solo se uno espontáneo en relación con el fenómeno IVF.
- Categoría C3*, o comentarios en los que detectamos explícitamente los fenómenos: corresponden a la otra mitad en el caso del fenómeno ADI (3), siendo el doble los realizados en la fase espontánea que en la inducida, y uno solo, en la fase inducida en el caso del fenómeno IVF.
(V5) Distribución de comentarios por sistemas de representación sistemas de representación.
-Verbal: Se realizan (2) comentarios para cada fenómeno, en el caso del fenómeno ADI (los dos en la fase espontánea y referentes a la utilización), y en el IVF (los dos en la fase espontánea y referentes a la no utilización).
-Tabular: Solo se realiza un comentario en el caso del fenómeno ADI (en la fase espontánea y referente a la utilización).
-Gráfico: Se realizan (2) comentarios en el caso del fenómeno IVF (los dos en la fase espontánea y referentes a la no utilización), y uno solo en el caso del fenómeno ADI (en la fase espontánea y referente a la utilización).
-Simbólico: Aparece en 3 ocasiones en el caso del fenómeno IVF (las tres en la fase espontánea, dos referentes a la utilización y una a la no utilización).
- Sin referencia a sistema de representación concreto: En el caso del fenómeno ADI se da en (2) ocasiones (referentes ambas a la utilización, una en la fase espontánea y la otra inducida), en el caso del fenómeno IVF aparece en (4) ocasiones, (2) de ellas espontáneas y otras (2) inducidas.; de las cuales (1) es referente específicamente al fenómeno.

Profesor V: Perfil fenomenológico

El profesor V utiliza en el aula todos los fragmentos presentados que contienen el fenómeno ADI. La mayoría de los comentarios sobre el fenómeno son espontáneos y genéricos, a la vez que realiza comentarios explícitos del propio fenómeno. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el simbólico, aunque también ha hecho dos comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto.
El mismo profesor no utiliza en el aula los fragmentos presentados que contienen el fenómeno IVF, excepto al trabajar con un alumnado muy concreto algún fragmento

expresado en el sistema der representación simbólico. Los comentarios se reparten entre las fases espontánea e inducida, han sido genéricos, de alumnos concretos, de aspectos particulares de los fragmentos que contienen el fenómeno y explícitos, estos últimos se dan en la fase inducida. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el tabular, aunque también ha hecho comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto.

Componente Numérica

Para el fenómeno ADI 2*6 – 0 + 1*1 - 0 = 13
Para el fenómeno IVF 2*1 – 2*8 + 0 –1*2 = - 16
La razón de uso de los fenómenos en el profesor V es de 13 / -16

Componente Visual

PROFESOR V						
ADI	C3*A	✓		✓		☑
	C3A					
	C2A					
	C1A		✓✓	✓		✓
FENÓMENO	CATEGORÍAS	V	G	T	S	Sin SR
IVF	C1I	✗✗	✗✗		✗✗	✗ ☒
	C2I				✓	
	C3I					✗
	C3*I					☒

Figura 5.V Componente visual del perfil

El numerador de la razón de uso es positivo; interpretamos que el fenómeno ADI está presente en el relato que hace V de su aula; este hecho queda corroborado en la mitad superior de la Figura 5.V La mayoría de los comentarios son espontáneos y muestra una dispersión de marcas entre dos de las categorías, al igual que entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación.

El denominador de la razón de uso es negativo; interpretamos que el fenómeno IVF no está presente en el relato que hace V de su aula; la mitad inferior de la Figura 5.V muestra una dispersión de marcas entre categorías, dispersión que también se observa respecto a los sistemas de representación, las marcas se concentran sobre todo en los comentarios que se realizan sin referencia a un sistema de representación concreto, solo dos de los comentario son inducidos.

La razón de uso 13/-16 indica que, en el relato que hace V de su aula, el fenómeno IVF recibe más importancia que el fenómeno ADI. Concluimos que, en el relato del profesor V, el fenómeno ADI se utiliza en el aula, se presenta a todos en varios sistemas; en cambio el fenómeno IVF no se utiliza. Comentarios específicos del fenómeno ADI han surgido en ambas fases; mientras que del IVF solo han surgido en la fase inducida.

Anexo A5.1.6 Relato del profesor W

Profesor W: La entrevista y su transcripción

W es una mujer que trabaja en el centro P, como profesor de matemáticas. Lo es desde hace 2 años y ha trabajado en un instituto urbano y público; se licenció en Matemáticas por la Universidad de Málaga en el año 2003; ha explicado por última vez el límite finito de una función en un punto en el curso 2006 / 2007.
Nuestro primer encuentro se produjo el 22 de mayo de 2008, a las 11,40 de la mañana, en la Sala de Profesores del centro C; duró aproximadamente 10 minutos. La investigadora entregó los documentos y concertamos la entrevista para el 29 de mayo de 2008, en el propio centro C, a las 11,25 de la mañana; la impresión que tuvo la investigadora sobre el profesor fue de bastante interés en la investigación.
La entrevista se llevo en la fecha, hora y lugar previstos; por tiempo de grabadora, duró 5 minutos 56 segundos; las condiciones ambientas fueron óptimas, con un poco de ruido de fondo; no hubo interrupciones.
En la transcripción debimos superar la leve dificultad del ruido de fondo. La transcripción íntegra de esta entrevista se acompaña como Anexo A5.19

Profesor W: Unidades de información

Fase I: Presentación

U-I 1: [00,00-00,37] Intervención de la investigadora.

Fase II: Espontánea

U-I 2: [00,37-01,41] El profesor W comienza descartando de utilizar en clase todos los fragmentos que contienen el razonamiento ε δ. Y comenta que su elección es debida a la abstracción que posee dicho razonamiento.
U-I 3: [01,41-02,31] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, pregunta al profesor a que se refiere con el adjetivo de “abstracción”, si al formalismo.., y el profesor afirma que esencialmente no, sino al propio fenómeno IVF. También matiza que por su corta experiencia no ha dado clase en bachilleratos de ciencias y que ese hecho tampoco le ha permitido poder intentar utilizarlo en su aula.
U-I 4: [02,31-03,25] De los fragmentos entregados, W comenta los fragmentos que si ha utilizado en el aula, haciendo una ordenación de los mismos.

Fase III: Inducida

U-I 5: [03,25-05,32] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, intenta que W le comente dificultades concretas sobre los fragmentos.
U-I 6: [05,32-05,51] El profesor W resume en pocas palabras como trabaja en clase, en relación al los fragmentos que le hemos entregado.

Fase IV: Término

U-I 7: [05,51-05,56] El profesor vuelve a resumir todo lo que ha comentado y la investigadora concluye la entrevista agradeciendo al profesor la desinteresada colaboración.

Profesor W: Interpretación de la entrevista

Tabla 5.W.1 *Categorías asignadas a las opiniones de W en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 2: 004W00,55: Es que estas fichas las encuentro como más abstractas para ellos U-I 2: 005W01,00: En todas las que aparezca algo de ε o δ….no lo veo	C1I El profesor afirma en la fase genérica que no utiliza en el aula ninguno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF.	NU
U-I 2: 006W01,05: La K no U-I 2: 007W01,05: La J tampoco U-I 2: 008W01,09: Ni la H ...ni la G ni la C.. U-I 2: 009W01,10: Ni la B	C1I V-D (K) C1I S-D (J) C1I G-D (H) C1I V-E (G) C1I G-E (C) C1I S-E (B) El profesor afirma en la fase genérica que no utiliza en el aula ninguno de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Particularmente cuando se emplean los sistemas de representación gráfico simbólico y verbal tanto en ejemplos como en definiciones	NU
U-I 3: 015W01,49: Pues....el valor absoluto no tanto sino por el formalismo que tiene…simplemente. U-I 3: 016W01,56: Y porque a lo mejor eso de tomar un ε aquí.. y luego encontrar el δ.	C3*I El profesor comenta una dificultad concreta que tienen los fragmentos que ha descartado y es precisamente el fenómeno IVF.	NU
U-I 4: 022W02,37: Las que he utilizado...me parecen válidas son la I, es válida. U-I 4: 026W02,55: La F por verlo un poco gráficamente U-I 4: 027W03,00: Exactamente. La D que también…. U-I 4: 028W03,05: Se vería gráficamente, con un ejemplo en concreto. Y la A que básicamente es igual que la I. U-I 4: 029W03,13: Luego la E. U-I 4: 030W03,15: Que es prácticamente como un gráfica abstracta pero hablando…con palabras Es que creo yo que para introducir a los alumnos en los límites estas son las más adecuadas	C1A V-E (I) C1A G-D (F) C1A G-E (D) C1A T-E (A) C1A V-D (E) El profesor afirma en la fase genérica que utiliza en el aula todos los fragmentos que contienen el fenómeno ADI. Particularmente cuando se emplean los sistemas de representación gráfico simbólico tabular y verbal tanto en ejemplos como en definiciones	U

Tabla 5.W.2 *Categorías asignadas a las opiniones de W en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 5: 035W03,53: Exactamente es como siempre se hace normalmente… U-I 5: 036W03,56: Tu en una función comienzas dándole valores a la x y la x te da la y.. U-I 5: 037W04,03: Entonces si les metemos esto estamos diciendo como que es lo contrario. Entonces ya los liamos. U-I 5: 046W04,58: Entonces para dar una cosa que al final no comprenden...., pues prefiero no darlo.	C3*I El profesor comenta una dificultad concreta que tienen los fragmentos que ha descartado y es precisamente el fenómeno IVF.	NU

Profesor W: Distribución de categorías, por fenómenos, en el relato

En las Tablas 5.W.3 y 5.W.4, respectivamente, presentamos, para cada fenómeno, la distribución de categorías según los sistemas de representación y dimensiones consideradas. La columna derecha y la fila inferior incluyen los subtotales de cada categoría.

Tabla 5.W.3 *Profesor W. Fenómeno ADI. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	1,1				2,0,0,0
Tabular	1				1,0,0,0
Gráfico	1,1				2,0,0,0
Simbólico					
(No indica)					
Subtotales, por fase y uso / no uso	5,0,0,0				

Tabla 5.W.4 *Profesor W. Fenómeno IVF. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal		1,1			2,0,0,0
Tabular					
Gráfico		1,1			2,0,0,0
Simbólico		1,1			2,0,0,0
(No indica)		1,3*		3*	1,0,0,2
Subtotales, por fase y uso / no uso		7,0,0,1		0,0,0,1	

Profesor W: Comentarios

(W1) En las tablas 5.5.W.3 y 5.5.W.4, registramos más del doble de comentarios sobre el fenómeno IVF (9) que sobre el ADI (4).
(W2) Los comentarios sobre el fenómeno ADI indican la utilización en el aula; los correspondientes comentarios sobre el fenómeno IVF indican la no utilización.
(W3) Todos comentarios sobre el fenómeno ADI son espontáneos; el número de comentarios espontáneos (8) es ocho veces mayor que los inducidos (1) en el IVF.
(W4) Distribución de comentarios por categorías.
-Categoría C1, o comentarios que consideramos genéricos: Son más del 85% de los comentarios totales en ambos fenómenos; en el caso del fenómeno ADI son la totalidad (4) y en el IVF (7), todos ellos son espontáneos.
-Categoría C2: no observada
- Categoría C3: no observada
-Categoría C3*, o comentarios en los que detectamos explícitamente los fenómenos: solo se da en (2) ocasiones para el fenómeno IVF, habiéndose realizado una en la fase espontánea y la otra en la inducida.
(W5) Distribución de comentarios por sistemas de representación sistemas de representación.
-Verbal: Se realizan (2) comentarios en el caso del fenómeno ADI (los dos en la fase espontánea y referentes a la utilización),y otros (2) en el IVF (los dos espontáneos y referentes a la no utilización).
-Tabular: Solo se realizan (2) comentarios sobre el fenómeno ADI (en la fase espontánea y referentes a la utilización).
-Gráfico: Se realizan (2) comentarios en el caso del fenómeno ADI (los dos en la fase espontánea y referentes a la utilización),y otros (2) en el IVF (los dos espontáneos y referentes a la no utilización).
-Simbólico: Solo aparece en 2 ocasiones en el caso del fenómeno IVF (ambas en la fase espontánea y referentes a la no utilización).
- Sin referencia a sistema de representación concreto: En el caso del fenómeno IVF aparece en (2) ocasiones, (1) de ellas espontánea y la otra inducida; las dos se refieren explícitamente al fenómeno.

Profesor W: Perfil fenomenológico

El profesor W utiliza en el aula todos los fragmentos presentados que contienen el fenómeno ADI. Los comentarios sobre el fenómeno son espontáneos y genéricos, a la vez que no realiza comentarios explícitos del propio fenómeno. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el simbólico. El mismo profesor no utiliza en el aula los fragmentos presentados que contienen el fenómeno IVF. Los comentarios se reparten entre las fases espontánea e inducida, han sido genéricos y explícitos sobre el fenómeno. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el tabular, aunque también ha hecho comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto.

Componente Numérica

Para el fenómeno ADI $2*5 - 0 + 0 - 0 = 10$
Para el fenómeno IVF $0 - 2*8 + 0 - 1*1 = -17$
La razón de uso de los fenómenos en el profesor W es de 10 / -17

Componente Visual

PROFESOR W						
ADI	C3*A					
	C3A					
	C2A					
	C1A	✓✓	✓✓	✓		
FENÓMENO	CATEGORÍAS	V	G	T	S	Sin SR
IVF	C1I	××	××		××	×
	C2I					
	C3I					
	C3*I					× ☒

Figura 5.W Componente visual del perfil

El numerador de la razón de uso es positivo; interpretamos que el fenómeno ADI está presente en el relato que hace W de su aula; este hecho queda corroborado en la mitad superior de la Figura 5.W. Todos los comentarios son espontáneos y se concentran en la categoría C1, lo que nos da una idea de que los comentarios han sido muy genéricos; sin embargo si muestra dispersión entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación.

El denominador de la razón de uso es negativo; interpretamos que el fenómeno IVF no está presente en el relato que hace W de su aula; la mitad inferior de la Figura 5.W muestra una dispersión de marcas entre categorías C1 y C3*, lo que nos da una idea de que los comentarios han sido muy genéricos o del fenómeno IVF específicamente. Al igual que entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación, y de comentarios que se realizan sin referencia a un sistema de representación concreto.

La razón de uso 10/-17 indica que, en el relato que hace W de su aula, el fenómeno ADI recibe menos importancia que el fenómeno IVF. Concluimos que, en el relato del profesor W**,** el fenómeno ADI se utiliza en el aula, se presenta a todos en varios sistemas; en cambio el fenómeno IVF no se utiliza. Comentarios explícitos del fenómeno ADI no han surgido; mientras que del IVF han surgido en ambas fases.

Anexo A5.1.7 Relato del profesor X

Profesor X: La entrevista y su transcripción

X es una mujer que trabaja en el centro C, como profesora de matemáticas. Lo es desde hace 29 años y ha trabajado en institutos rurales y urbanos, todos públicos; se licenció en Matemáticas por la Universidad de Granada en el año 1975; ha explicado por última vez el límite finito de una función en un punto en el curso 2006 / 2007.
Nuestro primer encuentro se produjo el 22 de mayo de 2008, a las 11,50 de la mañana, en la Sala de Profesores del centro C; duró aproximadamente 10 minutos. La investigadora entregó los documentos y concertamos la entrevista para el 29 de mayo de 2008, en el propio centro C, a las 11,50 de la mañana; la impresión que tuvo la investigadora sobre el profesor fue de bastante interés en la investigación. La entrevista se llevo en la fecha, hora y lugar previstos; por tiempo de grabadora, duró 20 minutos 50 segundos; las condiciones ambientales no fueron muy favorables ya que había mucho ruido de fondo; no hubo interrupciones.
En la transcripción debimos superar las condiciones ambientales indicadas; las diferencias en los tonos de voz del profesor X y la investigadora, en cambio, han aportado cierta comodidad a la escucha de la grabación. La transcripción íntegra de esta entrevista se acompaña como Anexo A5.20.

Profesor X: Unidades de información

Fase I: Presentación

U-I 1: [00,00-00,49] Intervención de la investigadora.

Fase II: Espontánea

U-I 2: [00,49-05,05] El profesor R comenta que en principio el único fragmento que ha descartado es el correspondiente al fenómeno IVF S-E, observa que cuando existía el BUP trabaja con sucesiones ejercicios parecidos aunque especificando numéricamente el ε y el N_0. Adjunta un ejemplo de este tipo de ejercicios, véase Anexo A 5.7.2.
U-I 3: [05,05-07,06] De los fragmentos entregados, X comenta los que si utiliza, haciendo a su vez dos clasificaciones; en primer lugar los que utilizaba con planes de estudio anteriores, y los que utiliza ahora. descarta los que contienen el razonamiento ε-δ. Observa que suele comenzar con razonamientos más intuitivos y comenta alguno de los fragmentos que contienen esos razonamientos.
U-I 4: [07,06-10,50] En esta unidad de información el profesor X vuelve a comentar los fragmentos que utiliza en la actualidad y a continuación deriva su discurso hacia los problemas del sistema educativo actual.
U-I 4: [10,50-12,03] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, pregunta al profesor por un fragmento concreto que ha descartado de utilizar en el aula, el profesor X afirma que por falta de tiempo no lo puede utilizar en la actualidad.

Fase III: Inducida

U-I 6: [12,03-14,23] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, intenta hacer ver a X los distintos fenómenos que ella observa en los fragmentos. X comenta que sería cuestión de insistir sobre el tema para que se entendieran los fenómenos y de nuevo vuelve a resaltar el problema de la falta de tiempo. Aunque no hace ningún comentario específico sobre los fenómenos.

U-I 7: [14,23-15,55] El profesor X comenta lo poco acostumbrados que están los alumnos actuales al formalismo matemático.

U-I 8: [15,55-19,38] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, intenta hacer que el profesor X haga comentarios más específicos sobre el fenómeno, el profesor X lo que realiza son comentarios referentes a dificultades que observa en los fragmentos que contienen el fenómeno, pero no específicos sobre el propio fenómeno.

U-I 9: [19,38-20,47] La investigadora intenta dar por concluida la entrevista porque ha observado que el profesor tiene en mente otras dificultades ajenas a los fenómenos.

Fase IV: Término

U-I 10: [20,47-20,50] La investigadora concluye la entrevista agradeciendo al profesor la desinteresada colaboración.

Profesor X: Interpretación de la entrevista

Tabla 5.X.1 *Categorías asignadas a las opiniones de X en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 2: 009X01,46: Así que en el concepto de límite de sucesiones sí que hacíamos con los alumnos de 2 de BUP, con problemas de ε y δ. Lo que ocurre es que para que no se les dificultara mucho establecíamos un valor para ε y δ.	C3I S-E (B) El profesor comenta un aspecto concreto referente a una dificultad presente en el fragmento que contiene el fenómeno IVF S-E.	U
U-I 2: 013X02,15: Lo trabajaban si, … Nunca se enteraron U-I 2: 014X02,20: Quiero decir nosotros lo hacíamos porque venía en los temarios, parecía que había que darlo, pero claro ellos no comprendían bien el concepto de límite, con el ε y el δ no lo comprendían.	C1I S-E (B) El profesor hace un comentario genérico sobre el fragmento que contiene el fenómeno IVF S-E.	U
U-I 2: 022X03,09: Porque de sucesiones aproximándose a un valor de x y sus imágenes en y U-I 2: 023X03,22: Y ya lo comprendían muy bien. Aquí ya adquirían un concepto muy claro del límite de una función en un punto. Hoy en día …la cosa ha cambiado mucho	C3*A El profesor hace un comentario genérico referente al propio fenómeno ADI sin referirse a ningún sistema de representación en concreto.	U
U-I 4: 056X07,18: Aquí empezamos el concepto de límite, y esto es lo que yo aplico ya en un punto. Y exactamente es como viene en esta cartulina, yo la defino así.	C1A V-D (E) El profesor hace un comentario genérico sobre el fragmento que contiene el fenómeno ADI V-D.	U
U-I 4: 058X07,22: Y no puedo profundizar más que eso. U-I 4: 059X07,25: Lo del ε y el δ nada, de entornos nada.	C1I S-D (J) El profesor hace un comentario genérico sobre el fragmento que contiene el fenómeno IVF S-D.	NU
U-I 4: 062X07,38: Que se dibuja y con un punto en concreto se va haciendo el límite….. U-I 4: 065X07,58: Este concepto también en los primeros de bachillerato, cuando damos ya la interpretación geométrica del punto, pues básicamente es este dibujo	C2A G-D (H) El profesor afirma en la fase genérica utilizar en el aula con determinados alumnos el fenómeno ADI G-D. En el caso del fragmento H se produce una transición hacia el fenómeno ADI.	U

Tabla 5.X.1 *Categorías asignadas a las opiniones de X en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 4: 073X08,48: Esta también se la podemos dar, a un grupo de 2 de bachillerato se les puede dar también esta gráfica. U-I 4: 074X08,53: Sin ningún problema. Podrían comprenderla …….Y esta	C2A G-D (F) El profesor afirma en la fase genérica utilizar en el aula con determinados alumnos el fenómeno ADI G-D.	U
U-I 4: 075X08,57: Y esta con calzador..	C1A G-E (C) El profesor afirma en la fase genérica utilizar en el aula con determinados alumnos el fenómeno ADI G-E. En el caso del fragmento C se produce una transición hacia el fenómeno ADI.	U
U-I 5: 088X10,59: No la verdad. Porque la A está sujeta a que básicamente trabajes sucesiones.	C3A T-E (A) El profesor hace un comentario sobre un aspecto concreto del fragmento que contiene el fenómeno ADI T-E, afirmando la no utilización en el aula.	NU

Tabla 5.X.2 *Categorías asignadas a las opiniones de X en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 6: 099X13,01: El concepto de límite abstracto a ellos siempre les ha costado mucho trabajo, yo a veces he pensado que quizá el nivel aquel que daban en segundo de BUP.... podíamos habérsela dado en tercero y la hubieran captado mucho mejor. Las cosas como son.	C2I El profesor hace un comentario genérico sobre el fenómeno IVF. Matizando que se podía trabajar con unos determinados alumnos.	U
U-I 6: 103X13,32: Si aunque yo les diera uno fijo, ellos sabían que era la definición de ε, pero que yo les ponía un valor para que ellos no trabajaran con las letras.	C3I El profesor hace una observación sobre una dificultad de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Particularmente de como él intentaba subsanarla.	U
U-I 6: 104X13,42: Pero yo creo que…., es verdad que es diferente, marca la y la x, pero sí lo. al final lo cogían bien ….. U-I 6: 105X13,47: Sí lo comprendían, nos costaba mucho. Los alumnos “buenos” lo captaban, los menos buenos a duras penas….	C3*I El profesor hace un comentario genérico sobre el propio fenómeno IVF.	U
U-I 6: 121X16,06: Sería muy complicado, ¿eh?.Y me cuesta…, tengo que repetir cien mil veces que las gráficas se leen de derecha a izquierda y unos siguen leyéndola…. de izquierda a derecha....	C3I El profesor hace una observación sobre una dificultad de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Particularmente cuando se trabaja con el sistema de representación gráfico.	U

Profesor X: Distribución de categorías, por fenómenos, en el relato

En las Tablas 5.X.3 y 5.X.4, respectivamente, presentamos, para cada fenómeno, la distribución de categorías según los sistemas de representación y dimensiones consideradas. La columna derecha y la fila inferior incluyen los subtotales de cada categoría.

Tabla 5.X.3 *Profesor X. Fenómeno ADI. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	1				1,0,0,0
Tabular		3			0,0,1,0
Gráfico	2,2,1				1,2,0,0
Simbólico					
(No indica)	3*				0,0,0,1
Subtotales, por fase y uso / no uso	2,2,0,1	0,0,1,0			

Tabla 5.X.4 *Profesor X. Fenómeno IVF. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal					
Tabular					
Gráfico					
Simbólico	3,1	1			2,0,1,0
(No indica)			2,3,3*,3		0,1,2,1
Subtotales, por fase y uso / no uso	1,0,1,0	1,0,0,0	0,1,2,1		

Profesor X: Comentarios

(X1) En las tablas 5.5.X.3 y 5.5.X.4, registramos ligeramente más comentarios sobre el fenómeno IVF (7) que sobre el ADI (6).
(X2) LA mayoría de los comentarios sobre el fenómeno ADI indican el uso en el aula; los correspondientes comentarios sobre el fenómeno IVF indican el uso en el aula siempre que se trabaje con alumnos muy concretos.
(X3) En el caso del fenómeno ADI todos los comentarios son espontáneos; y en el del fenómeno IVF (3) son espontáneos y (4) inducidos. En este sentido, cabe sospechar la influencia de la investigadora respecto al fenómeno IVF.
(X4) Distribución de comentarios por categorías.
-Categoría C1, o comentarios que consideramos genéricos: Para ambos fenómenos se realizan (2), todos ellos son espontáneos.
-Categoría C2, o comentarios que, a nuestro entender, remiten a alumnos concretos: En el caso del fenómeno ADI (2), ambos espontáneos, en el caso del fenómeno IVF solo uno en la fase inducida.
en la fase espontánea en relación con el fenómeno IVF.
- Categoría C3: o comentarios en los que detectamos explícitamente los fenómenos: Se dan en el caso del fenómeno ADI en (1) ocasión en la fase espontánea, y en el IVF en 3 ocasiones, de las cuales (2) corresponden a la fase inducida y (1) a la espontánea.
- Categoría C3*: Para ambos fenómenos se realiza (1) comentario, para el fenómeno ADI en la fase espontánea y para el IVF inducida.
(U5) Distribución de comentarios por sistemas de representación sistemas de representación.
-Verbal: Se da solamente en el caso del fenómeno ADI en una ocasión (en la fase espontánea y referente a la utilización).

-Tabular: Se da solamente en el caso del fenómeno ADI en una ocasión (en la fase espontánea y referente a la no utilización).
-Gráfico: En el caso del fenómeno ADI se da en 3 ocasiones (en la fase espontánea y referentes a la utilización), siendo dos de ellas transiciones que hemos detectado del fenómeno IVF hacia el ADI. Véase: U-I 4: 065X07,58 y
U-I 4: 075X08,57.
-Simbólico: Solo aparece en 2 ocasiones en el caso del fenómeno IVF (en la fase espontánea y referentes a la utilización), una de ellas es explícita sobre el fenómeno.
- Sin referencia a sistema de representación concreto: En el caso del fenómeno ADI solo se da en una ocasión (en la fase espontánea y referente a la utilización con alumnos concretos), en el caso del fenómeno IVF aparece en (4) ocasiones, todas inducidas.; de las cuales (1) es referente explícitamente al fenómeno.

Profesor X: Perfil fenomenológico

El profesor X utiliza en el aula todos los fragmentos presentados que contienen el fenómeno ADI. Los comentarios sobre el fenómeno son espontáneos, genéricos, sobre alumnos concretos, ha referido una dificultad concreta del sistema de representación tabular y ha hacho comentarios explícitos sobre el fenómeno. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el simbólico.
El mismo profesor utiliza en el aula los fragmentos presentados que contienen el fenómeno IVF siempre que se trabaje con un alumnado concreto. Los comentarios se reparten entre las fases espontánea e inducida. Solo ha mencionado el sistema de representación simbólico, aunque también ha hecho comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto; en dos ocasiones, hemos detectado una transición entre el fenómeno (IVF) contenido en un fragmento expresado en el sistema de representación gráfico y el fenómeno ADI. También ha que ha hecho comentarios explícitos sobre el propio fenómeno IVF.

Componente Numérica

Para el fenómeno ADI $2*5 - 2*1 + 0 - 0 = 8$
Para el fenómeno IVF $2*2 - 2*1 + 1*4 - 0 = 6$
La razón de uso de los fenómenos en el profesor X es de 8 / 6

Componente Visual

PROFESOR X						
ADI	C3*A					✓
	C3A			✗		
	C2A		✓♒			
	C1A	✓	♒			
FENÓMENO	CATEGORÍAS	V	G	T	S	Sin SR
IVF	C1I				✓✗	
	C2I					☑
	C3I				✓	☑ ☑
	C3*I					☑

Figura 5.X Componente visual del perfil

El numerador de la razón de uso es positivo; interpretamos que el fenómeno ADI está presente en el relato que hace U de su aula; este hecho queda corroborado en la mitad superior de la Figura 5.X. Todos los comentarios son espontáneos y muestran una dispersión entre las categorías; al igual que entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación.
El denominador de la razón de uso también es positivo; interpretamos que el fenómeno IVF está presente en el relato que hace U de su aula; la mitad inferior de la Figura 5.X muestra una dispersión de marcas entre categorías. En cambio respecto a los sistemas de representación no observamos dispersión, todas las marcas se concentran en el simbólico y sobre todo en los comentarios que se realizan sin referencia a un sistema de representación concreto, la mayoría de los comentarios son inducidos.
La razón de uso 8/6 indica que, en el relato que hace X de su aula, el fenómeno ADI recibe más importancia que el fenómeno IVF. Concluimos que, en el relato del profesor X**,** ambos fenómenos se utilizan en el aula; el fenómeno ADI se presenta a todos en varios sistemas; en cambio el fenómeno IVF se utiliza con finalidades específicas, apoyado en el sistema de representación simbólico, respecto al sistema de representación gráfico hemos detectado dos transiciones del fenómeno IVF hacia el ADI. Comentarios específicos del fenómeno ADI han surgido en la fase espontánea; mientras que del IVF han surgido en la inducida.

Anexo A5.1.8 Relato del profesor Y

Profesor Y: La entrevista y su transcripción

Y es un hombre que trabaja en el centro N, como profesor de matemáticas. Lo es desde hace 7 años y ha trabajado en institutos urbanos, todos públicos; se licenció en Matemáticas por la Universidad de Málaga en el año 1998; ha explicado por última vez el límite finito de una función en un punto en el curso 2007 / 2008.
Nuestro primer encuentro se produjo el 1 de agosto de 2008, a las 11 de la mañana, en la Sala de Profesores del Centro de Aprendizaje Thera; duró aproximadamente 10 minutos. La investigadora entregó los documentos y concertamos la entrevista para el 6 de agosto de 2008, en el propio centro Thera, a las 18,00 de la tarde; la impresión que tuvo la investigadora sobre el profesor fue de bastante interés en colaborar con la investigación.
La entrevista se llevo en la fecha, hora y lugar previstos; por tiempo de grabadora, duró 24 minutos 54 segundos; las condiciones ambientales fueron idóneas; no hubo interrupciones.
La transcripción fue muy cómoda de realizar debido a las condiciones ambientales indicadas y las diferencias en los tonos de voz del profesor. La transcripción íntegra de esta entrevista se acompaña como Anexo A5.21

Profesor Y: Unidades de información

Fase I: Presentación

U-I 1: [00,00-00,49] Intervención de la investigadora.

Fase II: Espontánea

U-I 2: [00,49-02,14] El profesor Y comenta los fragmentos que utiliza en el aula y descarta aquellos que utilizan el típico razonamiento ε δ.
U-I 3: [02,14-07,18] De los fragmentos entregados, Y da detalles de los que utiliza en el aula, haciendo la observación de que aquellos que están expresados a través del sistema de representación gráfico los utiliza más para trabajar la continuidad.
U-I 4: [07,18-16,17] El profesor Y comenta los que no utiliza habitualmente, ya que si que los trabaja con alumnos muy concretos, y afirma que lo hace de esa forma debido a las dificultades que plantea el formalismo.

Fase III: Inducida

U-I 5: [16,17-18,35] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, intenta hacer ver a Y los distintos fenómenos que ella observa en los fragmentos. Y comenta dificultades concretas que tiene el fenómeno IVF sin referencia al razonamiento formal.
U-I 6: [18,35-19,39] Y vuelve a comentar el fragmento H haciendo comentarios más específicos que aclaran a la investigadora, afirma que los alumnos se centran en la segunda parte de la definición.
U-I 7: [19,39-23,51] Por iniciativa de la investigadora, se habla de experiencias concretas con alumnos concretos, pero los comentarios que realiza el profesor Y al respecto son referentes a otros conceptos como la continuidad o los límites infinitos

U-I 8: [23,51-24,45] La investigadora intenta resumir lo comentado por el profesor Y a la vez que éste lo confirma

Fase IV: Término

U-I 9: [24,45-24,52] Se concluye la entrevista agradeciendo al profesor la desinteresada colaboración.

Profesor Y: Interpretación de la entrevista

Tabla 5.Y.1 *Categorías asignadas a las opiniones de Y en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 2: 003Y01,18: El H. En el que si bien aparece el razonamiento ε α, si se establece….es similar a este de intuitivamente… U-I 2: 004Y01,21: Al E. Este a lo mejor no hago uso de él, pero cuando hago la explicación de límite en primero si que puede aparecerlo lo de que eh…centrado en el punto a y cogiendo un intervalo hay un correspondiente en el eje de ordenadas que se corresponde al intervalo eso sí…	C2A V-D(E) C2A G-D(H) El profesor afirma que utiliza en el aula con alumnos concretos algunos fragmentos que contiene el fenómeno ADI, a través de los sistemas de representación verbal y gráfico. En el caso del fragmento H se produce una transición hacia el fenómeno ADI.	U
U-I 2: 005Y01,37: Este un poco más pero los que….el B G U-I 2: 006Y01,41: J y K. U-I 2: 007Y01,55: Son los que no hago uso de ellos salvo que cuando di en el curso de segundo de bachillerato y también para momentos muy contados no para demostraciones en general sino cosas muy particulares.	C2I S-E(B) C2I V-E(G) C2I S-D(J) C2I V-D(K) El profesor afirma que utiliza en el aula con alumnos concretos algunos fragmentos que contiene el fenómeno IVF.	U
U-I 3: 010Y02,26: Entonces pues sí, rápidamente pues para introducir estos conceptos tenemos tablas de valores, viendo que a cualquier función o a cualquier sucesión.. U-I 3: 011Y02,32: Como la A como la ficha A. U-I 3: 012Y02,53: Introducimos que los valores de la x se aproximan a uno determinado y simultáneamente los de la y tienen un comportamiento distinto	C3*A T-E (A) El profesor comenta un aspecto particular del fenómeno ADI T-E.	U
U-I 3: 013Y02,57: Seguidamente la tabla E o sea la ficha E	C1A V-D (E) El profesor afirma en la fase genérica que utiliza en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno ADI V-D.	U
U-I 3: 015Y03,06: La I, prácticamente es análoga a la A. U-I 3: 017Y03,13: No es solo una tabla de resultados sino un poco de expresión de lenguaje	C1A V-E (I) El profesor afirma en la fase genérica que utiliza en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno ADI V-E.	U

Tabla 5.Y.1 *Categorías asignadas a las opiniones de Y en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 3: 018Y03,27 : Y la C ¿D? y F, pues también las hago aunque más que para explicar el concepto de límite, muchas veces cuando estamos explicando continuidades. Hago más uso de ellas para explicar discontinuidades que límite.	C1A G-E (C) C1A G-E (D) C1A G-D (F) El profesor afirma en la fase genérica que utiliza en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno ADI. En el caso del fragmento C se produce una transición hacia el fenómeno ADI.	U
U-I 3: 021Y03,46: Que si que es un algoritmo, lo que ellos no entienden físicamente es que significa que una función tenga límite cuatro cuando el x se acerca al tres U-I 3: 022Y03,56: Entonces ellos cuando ven gráficas como estas sí, si entienden que si me acerco….no ya mirando el eje x sino si transcurro por encima de la gráfica ,voy a parar a algún sitio. U-I 3: 023Y04,04: Para esto si lo ven. Muchas veces me pasa que entienden el concepto de límite que ya hemos explicado y se supone que está entendido, cuando ven esto. U-I 3: 025Y04,15: La que hace si, más que ser como un apoyo es como una explicación.	C3A G-E (C) El profesor afirma en la fase genérica que utiliza en el aula los fragmentos que contienen el fenómeno ADI G-E. En el caso del fragmento C se produce una transición hacia el fenómeno ADI.	U
U-I 3: 027Y04,34: Por la gráfica, ellos trabajan con el grafo, y yo he visto que ellos ellos no entienden que cuando yo les, o me parece a mí que no lo entienden cuando yo les digo ¿Qué ocurre cuando la x se acerca al cuatro que le pasa a la y?. U-I 3: 029Y04,47: Sin embargo cuando les digo bueno si las, si nos acercamos por aquí con la, haciendo simulación con ordenador claro, cuando me acerco al 2 sobre la gráfica que le ocurre a la función si me acerco por la izquierda o si me acerco por la derecha U-I 3: 032Y05,07: Pues tienen muchos problemas en distinguir eje x eje y.	C3*A G-E (C) El profesor comenta un aspecto concreto del fenómeno ADI G-E en sí mismo. En el caso del fragmento C se produce una transición hacia el fenómeno ADI.	U
U-I 4: 054Y08,23: En primero de bachillerato no, a lo mejor lo ponía con números, aquí ponía 3 más…. coge un intervalo de amplitud...... ¿cuál? el 7 , pues venga 5 más 7 y 5 menos 7. Levantamos perpendiculares y vemos que haciendo paralelas al eje de ordenadas…	C2A G-D(H) El profesor afirma que utiliza en el aula con alumnos muy concretos algunos fragmentos que contiene el fenómeno ADI G-D. En el caso del fragmento H se produce una transición hacia el fenómeno ADI.	U
U-I 4: 064Y09,33: Si si, el para todo…, esa es la definición que yo doy de límite en segundo de bachillerato, en primero doy la misma pero como digo yo traducida a un lenguaje más coloquial.	C2I S-D(J) C2I V-D(K) El profesor afirma que utiliza en el aula con alumnos muy concretos algunos fragmentos que contiene el fenómeno IVF.	U
U-I 4: 067Y10,22: Para todo … mayor que... tienen problemas al acabar la secundaria con el mayor y menor. Y…en bachillerato yo me he encontrado muchas veces que al analizar funciones a trozos … También huyen mucho de las letras …..	C3I El profesor comenta algunas dificultades concretas de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Como son el formalismo, los valores absolutos los entornos…	U

Tabla 5.Y.1 *Categorías asignadas a las opiniones de Y en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 4: 068Y10.24: De las castellanas y ya no te digo nada de las griegas. Entonces si..pero eso yo lo he notado paulatinamente cada vez huyen más de la simbología matemática, no también muchas veces pienso por problema nuestro que no la trabajamos lo suficiente La simbología,…, lo único que utilizan es ε mayor que cero y un δ mayor que cero que a lo más dices bueno existe un intervalo positivo o un número positivo que le sumo y pasa lo que sea. U-I 4: 076Y12,18: Más que intervalo los entornos les cuesta un poco más. U-I 4: 091Y14,44: Pero si que eso que principalmente ya es por…no creo yo que sea por el concepto de límite como tal sino por la simbología que se utiliza para ello y no tampoco la simbología que tiene sino por el desuso que se ha hecho anteriormente de simbología, entonces no podemos llegara a bachillerato empezar a utilizar límites ε δ, cuando en la vida se ha dado para todo o pertenece..		

Tabla 5.Y.2 *Categorías asignadas a las opiniones de Y en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 5: 101Y17,03: Una aproximación en la x, que si si...., no ellos lo que pasa es que más…tienen problemas en eso…que …ellos um..en fin lo que tú has dicho. Que ellos tienden más, por eso también a lo mejor es más difícil introducir esto, que ellos tienden más a mirar a partir de la x que ocurre en la y. No no ellos por ejemplo les dices que para todo ε mayor que cero….y ellos no miran el eje vertical, ellos están mirando si yo me estoy acercando al cuatro que pasa después, como que la variable x es la que manda. Entonces… U-I 5: 106Y18,00: Si vamos… yo eso… particularmente yo no lo he…notado en ellos muchas veces también tienes el problema añadido de que no te dicen lo que no….no te lo dicen o tu no entiendes lo que ellos no entienden.	C3*I El profesor comenta una dificultad concreta del fenómeno en sí mismo en algunos fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Como es el hecho de que los alumnos trabajan del eje x al y lo que es un problema añadido a todo lo anterior..	U
U-I 6: 114Y18,52: Cuando coges la y va a la x y la x … U-I 6: 119Y19,22: Un intervalo en la x...pero ellos se centran en en la fase que…empieza lo de aquí U-I 6: 120Y19,27: En la fase que si yo levanto perpendiculares voy a parar aquí. U-I 6: 121Y19,30: Para ellos lo importante es	C3*I El profesor comenta una dificultad concreta de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF. Como es el hecho de que aunque tú insistas en el doble camino del fenómeno IVF, los alumnos solo se centran en la segunda parte la que va de la variable independiente a la dependiente.	U

Tabla 5.Y.2 *Categorías asignadas a las opiniones de Y en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
que si salgo de aquí llego aquí.. U-I 6: 122Y19,34: Pero no ven que este intervalo viene dado por este.		

Profesor Y: Distribución de categorías, por fenómenos, en el relato

En las Tablas 5.Y.3 y 5.Y.4, respectivamente, presentamos, para cada fenómeno, la distribución de categorías según los sistemas de representación y dimensiones consideradas. La columna derecha y la fila inferior incluyen los subtotales de cada categoría.

Tabla 5.Y.3 *Profesor Y. Fenómeno ADI. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	2,1,1				2,1,0,0
Tabular	3*				0,0,0,1
Gráfico	2,1,1,1,3,3*,2				3,2,1,1
Simbólico					
(No indica)					
Subtotales, por fase y uso / no uso	5,3,1,2				

Tabla 5.Y.4 *Profesor Y. Fenómeno IVF. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	2,2,2				0,3,0,0
Tabular					
Gráfico					
Simbólico	2,2,2				0,3,0,0
(No indica)	3		3*,3*		0,0,1,2
Subtotales, por fase y uso / no uso	0,6,1,0		0,0,0,2		

Profesor Y: Comentarios

(Y1) En las Tablas 5.Y.3 y 5.Y.4, registramos ligeramente más comentarios sobre el fenómeno ADI (11) que sobre el IVF (9).
(Y2) Los comentarios sobre el fenómeno ADI indican el uso en el aula; los correspondientes comentarios sobre el fenómeno IVF indican el uso en el aula siempre que se trabaje con alumnos muy concretos.
(Y3) En el caso del fenómeno ADI todos los comentarios son espontáneos, y en el del IVF los comentarios espontáneos (7) son aproximadamente tres veces los inducidos (2).

(Y4) Distribución de comentarios por categorías.
-Categoría C1, o comentarios que consideramos genéricos: Solo se realizan en el caso del fenómeno ADI, y esta categoría abarca la mitad de los comentarios.
-Categoría C2, o comentarios que, a nuestro entender, remiten a alumnos concretos: corresponden aproximadamente a una tercera parte en el caso del fenómeno ADI (3), siendo todos espontáneos, y dos terceras partes (6) en el caso del fenómeno IVF, también todos en la fase espontánea.
- Categoría C3: En ambos fenómenos, la categoría se recuenta una sola vez y en la fase espontánea.
- Categoría C3*, o comentarios en los que detectamos explícitamente los fenómenos: en el caso del fenómeno ADI se da en 2 ocasiones, ambas corresponden a la fase espontánea, y en el fenómeno IVF otras 2, pero en este caso en la fase inducida.
(Y5) Distribución de comentarios por sistemas de representación sistemas de representación.
-Verbal: En ambos fenómenos se da en 3 ocasiones (todas en la fase espontánea y referentes a la utilización).
-Tabular: Se da solamente en el caso del fenómeno ADI en una ocasión (en la fase espontánea y referente a la utilización).
-Gráfico: En el caso del fenómeno ADI se da en 7 ocasiones (en la fase espontánea y referentes a la utilización), siendo cinco de ellas transiciones que hemos detectado del fenómeno IVF hacia el ADI. Véase: U-I 2: 003X01,18 , U-I 3: 018X03,27 , U-I 3: 021X03,46 , U-I 3: 022X03,56, U-I 3: 023X04,04 , U-I 3: 025X04,15,U-I 3: 027X04,34, U-I 3: 029X04,47 y U-I 3: 032X05,07.
-Simbólico: Solo aparece en 3 ocasiones en el caso del fenómeno IVF (en la fase espontánea y referentes a la utilización).
- Sin referencia a sistema de representación concreto: Únicamente se realizan para el fenómeno IVF en (3) ocasiones , una de ellas espontánea y las otras (2) inducidas, siendo estas últimas explícitas sobre el fenómeno.

Profesor Y: Perfil fenomenológico

El profesor Y utiliza en el aula todos los fragmentos presentados que contienen el fenómeno ADI. Los comentarios sobre el fenómeno son espontáneos, genéricos, sobre alumnos concretos, ha referido una dificultad concreta del sistema de representación gráfico y ha hacho comentarios explícitos sobre el fenómeno. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el simbólico.
El mismo profesor utiliza en el aula los fragmentos presentados que contienen el fenómeno IVF siempre que se trabaje con un alumnado concreto. Los comentarios se reparten entre las fases espontánea e inducida. Ha mencionado los sistemas de representación verbal y simbólico, aunque también ha hecho comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto; en cinco ocasiones, hemos detectado transiciones entre el fenómeno (IVF) contenido en fragmentos expresados en el sistema de representación gráfico y el fenómeno ADI. También ha que ha hecho comentarios explícitos sobre el propio fenómeno IVF.

Componente Numérica

Para el fenómeno ADI 2*11 – 0 + 0 - 0 = 22
Para el fenómeno IVF 2*7 – 0 + 1*2 – 0 = 16
La razón de uso de los fenómenos en el profesor Y es de 22 / 16

Componente Visual

PROFESOR Y						
ADI	C3*A		♒	✓		
	C3A		♒			
	C2A	✓	♒♒			
	C1A	✓✓	✓✓♒			
FENÓMENO	CATEGORÍAS	V	G	T	S	Sin SR
IVF	C1I					
	C2I	✓✓✓			✓✓✓	
	C3I					✓
	C3*I					☑☑

Figura 5.Y Componente visual del perfil

El numerador de la razón de uso es positivo; interpretamos que el fenómeno ADI está presente en el relato que hace Y de su aula; este hecho queda corroborado en la mitad superior de la Figura 5.Y. Todos los comentarios son espontáneos y muestran una dispersión entre las categorías; al igual que entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación.

El denominador de la razón de uso también es positivo; interpretamos que el fenómeno IVF está presente en el relato que hace Y de su aula; la mitad inferior de la Figura 5.Y muestra una dispersión de marcas entre categorías. Respecto a los sistemas de representación todas las marcas se concentran en el verbal y el simbólico, y en los comentarios que se realizan sin referencia a un sistema de representación concreto, la mayoría de los comentarios son espontáneos.

La razón de uso 22/16 indica que, en el relato que hace Y de su aula, el fenómeno ADI recibe más importancia que el fenómeno IVF. Concluimos que, en el relato del profesor Y, ambos fenómenos se utilizan en el aula; el fenómeno ADI se presenta a todos en varios sistemas; en cambio el fenómeno IVF se utiliza con finalidades específicas, apoyado en los sistemas de representación verbal y simbólico, respecto al sistema de representación gráfico hemos detectado cinco transiciones del fenómeno IVF hacia el ADI. Comentarios específicos del fenómeno ADI han surgido en la fase espontánea; mientras que del IVF han surgido en la inducida.

Anexo A5.1.9 Relato del profesor Z

Profesor Z: La entrevista y su transcripción

Z es una mujer que trabaja en el centro E, como profesora de matemáticas. Lo es desde hace 8 años y ha trabajado en institutos rurales y urbanos, todos públicos; se licenció en Matemáticas por la Universidad de Granada en el año 1999; ha explicado por última vez el límite finito de una función en un punto en el curso 2008 / 2009.
Nuestro primer encuentro se produjo el 3 de febrero de 2009, a las 12,10 de la mañana, en la Sala de Profesores del centro E; duró aproximadamente 10 minutos. La investigadora entregó los documentos y concertamos la entrevista para el 6 de febrero de 2009, en el propio centro E, a las 12,15 de la tarde; la impresión que tuvo la investigadora sobre el profesor fue de bastante interés en colaborar con la investigación.
La entrevista se llevo en la fecha, hora y lugar previstos; por tiempo de grabadora, duró 10 minutos 37 segundos; las condiciones ambientales fueron muy favorables; no hubo interrupciones.
La transcripción fue cómoda de realizar debido a las condiciones ambientales adecuadas y a las diferencias en los tonos de voz del profesor Z. La transcripción íntegra de esta entrevista se acompaña como Anexo A5.22.

Profesor Z: Unidades de información

Fase I: Presentación

U-I 1: [00,00-00,50] Intervención de la investigadora.

Fase II: Espontánea

U-I 2: [00,50-03,00] El profesor Z comenta los fragmentos que no utiliza en el aula, pasando a continuación a comentar los que sí utiliza, clasificando éstos últimos en dos grupos a los que llama “gráficas” y “definiciones”.
U-I 3: [03,00-03,58] La investigadora intenta resumir lo que ha ido comentando el profesor Z.

Fase III: Inducida

U-I 4: [03,58-05,31] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, intenta hacer ver a Z los distintos fenómenos que ella observa en los fragmentos. Z comenta que ha trabajado el fenómeno con un alumnado muy específico y que no observó dificultades concretas. Utiliza la expresión “IDA-VUELTA” para referirse al fenómeno IVF.
U-I 5: [05,31-05,54] La investigadora intenta resumir lo que ha ido comentando el profesor Z.
U-I 6: [05,54-06,59] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, pregunta a Z porque cree que ocurre este hecho de que solo unos pocos alumnos puedan “entender” estos fenómenos, a lo que Z contesta observando una serie de dificultades que a su parecer tiene el concepto de límite.
U-I 7: [06,59-08,28] La investigadora intenta resumir lo que ha ido comentando el profesor Z.

U-I 8: [08,28-08,59] La investigadora pregunta por experiencias concretas con alumnos concretos por ejemplo al trabajar con el sistema de representación gráfico, a lo que el profesor contesta con que, a su parecer, es con el que mejor se trabaja el concepto de límite.
U-I 9: [08,59-09,28] El profesor intenta justificar la no utilización de alguno de los fragmentos por falta de tiempo, que únicamente se acaba trabajando sobre las indeterminaciones y el cálculo de límites.
U-I 10: [09,28-10,24] La investigadora, siguiendo el protocolo de actuación, vuelve a insistir sobre un fragmento concreto (H), el profesor Z vuelve a confirma que con este tipo de fragmentos solo trabaja el fenómeno ADI, que el fenómeno IVF solo lo ha podido trabajar en unas pocas ocasiones con un alumnado muy concreto y sin dificultades.

Fase IV: Término

U-I 9: [10,24-10,37] La investigadora concluye la entrevista agradeciendo al profesor la desinteresada colaboración.

Profesor Z: Interpretación de la entrevista

Tabla 5.Z.1 *Categorías asignadas a las opiniones de Z en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 2: 004Z01,12: El B definición formal con el ε δ….Con valor absoluto tampoco. Lo hice una vez en un segundo de bachillerato pero no lo entendieron no funcionó U-I 2: 007Z01,32: Entonces no me funciona…y tampoco el J	C1I S-E-D(B-J) El profesor afirma en la fase genérica la no utilización de fragmentos que contienen el fenómeno IVF S-D.	NU
U-I 2: 008Z01,34: Por las distancias o el valor absoluto.	C3I S-E-D(B-J) El profesor comenta una dificultad concreta de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF S-E-D.	NU
U-I 2: 006Z01,27: A la tabla de valores tampoco suelo porque si he tenido problemas, que se paran en un momento dado y me dicen que el límite es 1 con 99 … o el 3 con 99…, el valor que ellos han sacado te dicen que es el límite.	C3A T-E (A) El profesor comenta una dificultad concreta en la utilización del fenómenos ADI T-E.	NU
U-I 2: 012Z01,56: Si que he utilizado en el aula…uhm..los modelos gráficos U-I 2: 013Z01,59: Con el dibujo sí que se suelen enterar bien	C1A G-E-D(C D F H) El profesor afirma en la fase genérica la presencia en el aula de los fragmentos expresados en el sistema de representación gráfico tanto en ejemplos como en definiciones. En el caso de los fragmentos H y C se produce una transición hacia el fenómeno ADI.	U
U-I 2: 018Z02,15: Y en cuanto a definiciones...si intuitivamente. La E	C1A V-D (E) El profesor afirma en la fase genérica que si utiliza en el aula el fragmento que contiene el fenómeno ADI V-D.	U

Tabla 5.Z.1 *Categorías asignadas a las opiniones de Z en la fase espontánea*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 3: 031Z03,31: Solamente lo he hecho con un segundo de bachillerato un año que sí eran más menos bueno porque al año siguiente ….. ni entré en la formal, sino simplemente intuitiva y ya está. Y luego te vas al cálculo. U-I 3: 033Z03,44: No había problemas con el ε y el δ. Ellos entendían que era algo muy pequeño muy pequeño y lo entendieron.	C2I V-D (K) El profesor comenta que no tuvo problemas en trabajar el fenómeno IVF V-D con un grupo de alumnos muy concretos.	U

Tabla 5.Z.2 *Categorías asignadas a las opiniones de Z en la fase inducida*

U-I, Ubicación y transcripción	Asignación de categorías y comentarios	U-NU
U-I 4: 037Z05,05: La de ida y vuelta la mayoría no terminan…ya te digo con ε δ… U-I 4: 038Z05,07: Solamente ese año con ese par de alumnos que si eran buenos.. U-I 4: 039Z05,11: Si lo entendieron ellos si lo entendieron el resto de la clase no U-I 4: 044Z05,31: La mayoría no llegan a ver eso ..que no lo han entendido que no han terminado de entenderlo	C3*I El profesor comenta que algunos de los fragmentos que contienen el fenómeno IVF solo los puede trabajar con alumnos muy concretos, debido a la dificultad del propio fenómeno en sí mismo.	U
U-I 6: 056Z06,17: Uhm...es que no sé, es que no es un concepto sencillo. U-I 6: 057Z06,25: Y el hecho simplemente de que ellos entiendan que ε es una variable que es algo muy pequeño que no el construir la nueva función que no se stp….quieren… U-I 6: 049Z06,35: El hecho de que ellos entiendan que una letra simboliza un valor que no está fijado U-I 6: 050Z06,52: Ya les cuesta… U-I 6: 051Z06,53: Claro. Eso ya les cuesta entonces yo creo que se pierden ahí en la notación. No….ya ven ahí la amalgama de letras y ahí se quedan no son capaces de llegar más allá e intentar escuchar.	C3I El profesor comenta dificultades concretas en la utilización de fragmentos que contienen el fenómeno IVF, como es la nueva función, con el simbolismo que ello conlleva. Pero no referentes al propio fenómeno en sí mismo.	NU
U-I 7: 054Z07,15: Yo creo que sí, porque los niños que yo te digo son niños con muchos muchos problemas de cálculo. De que les resultaba pues no sé….cualquier cosita de..una igualdad notable ya no la veían. U-I 7: 058Z07,36: Ya simplemente el aspecto es lo que los echa para atrás. Y no hacen ni siquiera el esfuerzo de aprenderlo..	C3I El profesor comenta dificultades concretas en la utilización de fragmentos que contienen el fenómeno IVF, como el hecho de los conocimientos anteriores necesarios. Pero no referentes al propio fenómeno en sí mismo	NU
U-I 8: 061Z08,01: Si porque también el concepto de infinito, es un concepto que a algunos les cuesta ¿eh?. U-I 8: 062Z08,11: Yo he tenido alumnos que no…no llegan a comprender…. U-I 8: 064Z08,19: Entonces..es verdad que la abstracción	C3I El profesor comenta dificultades concretas en la utilización de fragmentos que contienen el fenómeno IVF, como es el concepto de infinito.	NU

Profesor Z: Distribución de categorías, por fenómenos, en el relato

En las Tablas 5.Z.3 y 5.Z.4, respectivamente, presentamos, para cada fenómeno, la distribución de categorías según los sistemas de representación y dimensiones consideradas. La columna derecha y la fila inferior incluyen los subtotales de cada categoría.

Tabla 5.Z.3 *Profesor Z. Fenómeno ADI. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	1				1,0,0,0
Tabular		3			0,0,1,0
Gráfico	1,1,1,1				4,0,0,0
Simbólico					
(No indica)					
Subtotales, por fase y uso / no uso	5,0,0,0	0,0,1,0			

Tabla 5.Z.4 *Profesor Z. Fenómeno IVF. Categorías y su cómputo*

Sistema de representación	Utilización Espontánea	No utilización Espontánea	Utilización Inducida	No utilización Inducida	Subtotales, por sistema de representación
Verbal	2				0,1,0,0
Tabular					
Gráfico					
Simbólico		1,1,3,3			2,0,2,0
(No indica)				3,3,3,3*	0,0,3,1
Subtotales, por fase y uso / no uso	0,1,0,0	2,0,2,0		0,0,3,1	

Profesor Z: Comentarios

(Z1) En las Tablas 5.Z.3 y 5.Z.4, registramos ligeramente más comentarios sobre el fenómeno IVF (9) que sobre el ADI (6).
(Z2) Los comentarios sobre el fenómeno ADI indican la utilización en el aula; los correspondientes comentarios sobre el fenómeno IVF indican la no utilización.
(Z3) Todos los comentarios son espontáneos en el fenómeno ADI; el número de comentarios espontáneos (6) es el doble de los inducidos (3) en el IVF.
(Z4) Distribución de comentarios por categorías.
-Categoría C1, o comentarios que consideramos genéricos: Son aproximadamente la mitad de los comentarios totales; en el caso del fenómeno ADI (5) es decir el 80%, todos ellos son espontáneos, y en el caso del fenómeno IVF (2), realizados también en la fase espontánea.
-Categoría C2, o comentarios que, a nuestro entender, remiten a alumnos concretos: solo se da uno en la fase espontánea en relación con el fenómeno IVF.
- Categoría C3, o comentarios referentes a dificultades concretos de los fragmentos que contienen los fenómenos: en relación con el fenómeno ADI se observa un comentario espontáneo y del IVF (5), siendo (3) de ellos inducidos y (2) espontáneos.
- Categoría C3*, o comentarios en los que detectamos explícitamente los fenómenos: solo se da uno en la fase inducida en relación con el fenómeno ADI.

(Z5) Distribución de comentarios por sistemas de representación sistemas de representación.
-Verbal: Solo se realizan (2) comentarios, uno para cada fenómeno (los dos en la fase espontánea y referentes a la utilización).
-Tabular: Solo se realiza (1) comentario en el caso del fenómeno ADI (en la fase espontánea y referente a la no utilización).
-Gráfico: Solo en el caso del fenómeno ADI se da en 4 ocasiones (en la fase espontánea y referentes a la utilización), siendo dos de ellas transiciones que hemos detectado del fenómeno IVF hacia el ADI. Véase: U-I 2: 012Z01,56 y
U-I 2: 013Z01,59
-Simbólico: Aparece en 4 ocasiones en el caso del fenómeno IVF (todas en la fase espontánea y referentes a la no utilización).
- Sin referencia a sistema de representación concreto: En el caso del fenómeno IVF aparece en (4) ocasiones, (todas inducidas.; de las cuales (1) es referente explícitamente al fenómeno.

Profesor Y: Perfil fenomenológico

El profesor Z utiliza en el aula todos los fragmentos presentados que contienen el fenómeno ADI. Los comentarios sobre el fenómeno son espontáneos y genéricos, a la vez que realiza un comentario referente a un dificultad concreta del fragmento presentado en el sistema de representación tabular. Ha mencionado todos los sistemas de representación, excepto el simbólico. El mismo profesor no utiliza en el aula los fragmentos presentados que contienen el fenómeno IVF. Los comentarios se reparten entre las fases espontánea e inducida, han sido genéricos, de alumnos particulares, de aspectos concretos de los fragmentos que contienen el fenómeno y explícitos, estos últimos se dan todos en la fase inducida. Solo ha mencionado los sistemas de representación verbal y simbólico, aunque también ha hecho comentarios sin apoyarse en un sistema de representación concreto; en dos ocasiones, hemos detectado una transición entre el fenómeno (IVF) contenido en un fragmento expresado en el sistema de representación gráfico y el fenómeno ADI.

Componente Numérica

Para el fenómeno ADI $2*5 – 2*1 + 0 - 0 = 8$
Para el fenómeno IVF $2*1 – 2*4 + 0 –1* 4 = - 10$
La razón de uso de los fenómenos en el profesor Z es de 4 / -10

Componente Visual

PROFESOR Z						
ADI	C3*A					
	C3A			✘		
	C2A					
	C1A	✓	✓♒✓♒			
FENÓMENO	CATEGORÍAS	V	G	T	S	Sin SR
IVF	C1I				✘✘	
	C2I	✓				
	C3I				✘✘	☒☒☒
	C3*I					☑

Figura 5.Z Componente visual del perfil

El numerador de la razón de uso es positivo; interpretamos que el fenómeno ADI está presente en el relato que hace Z de su aula; este hecho queda corroborado en la mitad superior de la Figura 5.Z. Todos los comentarios son espontáneos y muestra una dispersión de marcas entre las categorías C1 y C3, al igual que entre todas las marcas previstas para los sistemas de representación.
El denominador de la razón de uso es negativo; interpretamos que el fenómeno IVF no está presente en el relato que hace Z de su aula; la mitad inferior de la Figura 5.Z muestra una dispersión de marcas entre categorías. En cambio respecto a los sistemas de representación no observamos dispersión, todas las marcas se concentran en el verbal y el simbólico y sobre todo en los comentarios que se realizan sin referencia a un sistema de representación concreto, muchos de los comentarios son inducidos.
La razón de uso 4/-10 indica que, en el relato que hace Z de su aula, el fenómeno IVF recibe más importancia que el fenómeno ADI. Concluimos que, en el relato del profesor Z**,** el fenómeno ADI se utiliza en el aula, se presenta a todos en varios sistemas; en cambio el fenómeno IVF no se utiliza. Respecto al sistema de representación gráfico hemos detectado un par de transiciones del fenómeno IVF hacia el ADI. Comentarios específicos del fenómeno ADI no se han realizado; mientras que del IVF han surgido en la fase inducida.

Anexo A5.2 Guión entregado a los profesores

Tratamiento del limite finito de una función en un punto
María Teresa Sánchez Compaña

RECOGIDA DE DATOS DE INFORMACIÓN GENERAL:
1.- Titulación:
2.- Expedida por la Universidad de:
3.- Año en el que obtuvo su titulación:
4.- Años de docencia impartiendo cursos de matemáticas:
5.- Tipo de centros: públicos □, concertados □, privados □ , rurales □, urbanos □
6.- Último curso académico en que explicó el concepto de límite finito de una función en un punto:

Estoy realizando una investigación didáctica centrada en el concepto de límite finito de una función en un punto usando la definición ε-δ.

En los centros de secundaria y bachillerato de la provincia de Málaga, evidentemente, se utilizan diferentes presentaciones del concepto indicado, como las basadas en la caracterización por sucesiones, en los límites laterales o la continuidad, además de la ε-δ utilizada en la investigación, por citar solamente algunos casos documentados.

En cualquiera de ellas solemos iniciar la secuenciación del concepto (de límite finito de una función en un punto) apoyándonos, por ejemplo, en casos particulares o presentando las ideas de manera informal.

En la fase actual pretendo analizar, mediante entrevistas personales, en qué medida mis conclusiones provisionales se acercan a los tratamientos que distintos profesores dan en clase a este concepto matemático (o darían si usaran la misma definición que la investigación).

Para organizar la entrevista adjunto once fragmentos referentes al concepto de *límite finito de una función en un punto*; estos fragmentos han sido obtenidos de libros de texto de diferentes editoriales y periodos y contienen "modelos/argumentaciones" relacionados con la enseñanza de este concepto en el sentido que se acaba de indicar.

Tras reflexionar sobre ellos le pido que ,utilizando los dos sobres que también le adjunto, agrupe los fragmentos de forma que en un sobre introduzca todos aquellos que utiliza o ha utilizado alguna vez en el aula con los alumnos y en el otro los que no. Para la agrupación de los fragmentos en los sobres, si lo desea, considere las siguientes sugerencias:

1.- Cursos o Niveles con los que ha trabajado alguno de los "modelos/argumentaciones" propuestos (o todos).
2.- Dificultades que sus alumnos han encontrado si, por casualidad, usó en clase algunas ideas contenidas en esos fragmentos.
3.-Las preferencias de usted hacia algunos de los fragmentos (entendidos como modelos o argumentaciones) para trabajar con ellos en el aula.

En el momento de la entrevista comentaremos la agrupación personal que usted ha hecho de los fragmentos, e intentaremos establecer los detalles que distinguen, en los procesos de enseñanza, los acercamientos "intuitivos" de los acercamientos más formales basados en la definición ε-δ.

La información recopilada se procesará de manera que se respete el anonimato.

Muchas gracias por su colaboración. María Teresa Sánchez Compaña

Anexo A5. 3 Materiales aportados por el profesor X

$$\forall n > 7'1 \Rightarrow n \geq 8 \quad a_n \in E_{0'1}(2/3)$$

Ejercicio Demuestra a partir de qué término la sucesión $a_n = \frac{n-1}{4n-1} \in E_{0'1}\left(\frac{1}{4}\right)$. Interpreta el resultado
Demuestra que su límite es $\frac{1}{4}$

$$\left| a_n - \frac{1}{4} \right| < 0'1$$

$$\left| \frac{n-1}{4n-1} - \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{4n-4-4n+1}{4(4n-1)} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\left| \frac{-3}{16n-4} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{16n-4} < \frac{1}{10}$$

$$30 < 16n-4$$

$$30+4 < 16n \Rightarrow 16n > 34$$

$$n > \frac{34}{16} = \frac{17}{8} = 2'1$$

$$\forall n > 2'1 \Rightarrow \forall n \geq 3 \quad a_n \in E_{0'1}(1/4)$$

Interpretación:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n-1}{4n-1} = \frac{1}{4}$$

Anexo A5.4 Información aportada por los profesores.

Profesor R

RECOGIDA DE DATOS DE INFORMACIÓN GENERAL:

1.- Titulación: LDO. MATEMATICAS
2.- Expedida por la Universidad de: MALAGA
3.- Año en el que obtuvo su titulación: 1984.
4.- Años de docencia impartiendo cursos de matemáticas: 22.
5.- Tipo de centros: públicos ☒, concertados ☐, privados ☒ , rurales ☐, urbanos ☒
6.- Último curso académico en que explicó el concepto de límite finito de una función en un punto: 2007/08.

Profesor S

RECOGIDA DE DATOS DE INFORMACIÓN GENERAL:

1.- Titulación: Lcdo Matemáticas -(Estadística)
2.- Expedida por la Universidad de: Málaga
3.- Año en el que obtuvo su titulación: 1995
4.- Años de docencia impartiendo cursos de matemáticas: 1996 – (12 años)
5.- Tipo de centros: públicos ☒, concertados ☐, privados ☐ , rurales ☐, urbanos ☐
6.- Último curso académico en que explicó el concepto de límite finito de una función en un punto: 2007-08

Profesor T

RECOGIDA DE DATOS DE INFORMACIÓN GENERAL:
1.- Titulación: LDO. MATEMATICAS
2.- Expedida por la Universidad de: Granada
3.- Año en el que obtuvo su titulación: 1991
4.- Años de docencia impartiendo cursos de matemáticas: 16
5.- Tipo de centros: públicos ☒ concertados ☐, privados ☐ , rurales ☐, urbanos ☒
6.- Último curso académico en que explicó el concepto de límite finito de una función en un punto: 2007-2008

Profesor U

RECOGIDA DE DATOS DE INFORMACIÓN GENERAL:
1.- Titulación: LCDO. EN MATEMATICAS
2.- Expedida por la Universidad de: GRANADA
3.- Año en el que obtuvo su titulación: 1976
4.- Años de docencia impartiendo cursos de matemáticas: 31
5.- Tipo de centros: públicos ☒, concertados ☐, privados ☐ , rurales ☐, urbanos ☒
6.- Último curso académico en que explicó el concepto de límite finito de una función en un punto: 2007 - 2008

Profesor V

RECOGIDA DE DATOS DE INFORMACIÓN GENERAL:
1.- Titulación: LICENCIADO EN MATEMÁTICAS
2.- Expedida por la Universidad de: GRANADA
3.- Año en el que obtuvo su titulación: 1996
4.- Años de docencia impartiendo cursos de matemáticas: 9
5.- Tipo de centros: públicos ☐, concertados ☒, privados ☐ , rurales ☐, urbanos ☐
6.- Último curso académico en que explicó el concepto de límite finito de una función en un punto: 2007/08

Profesor W

RECOGIDA DE DATOS DE INFORMACIÓN GENERAL:
1.- Titulación: LICENCIADO EN MATEMÁTICAS
2.- Expedida por la Universidad de: MÁLAGA
3.- Año en el que obtuvo su titulación: 2006
4.- Años de docencia impartiendo cursos de matemáticas: 2 cursos (incluido éste)
5.- Tipo de centros: públicos ☒, concertados ☐, privados ☐ , rurales ☐, urbanos ☐
6.- Último curso académico en que explicó el concepto de límite finito de una función en un punto: 2007/2008

Profesor X

RECOGIDA DE DATOS DE INFORMACIÓN GENERAL:
1.- Titulación: Matemáticas
2.- Expedida por la Universidad de: Granada
3.- Año en el que obtuvo su titulación: 1978
4.- Años de docencia impartiendo cursos de matemáticas: 29
5.- Tipo de centros: públicos ☒, concertados ☐, privados ☐ , rurales ☐, urbanos ☒
6.- Último curso académico en que explicó el concepto de límite finito de una función en un punto: 2007-2008

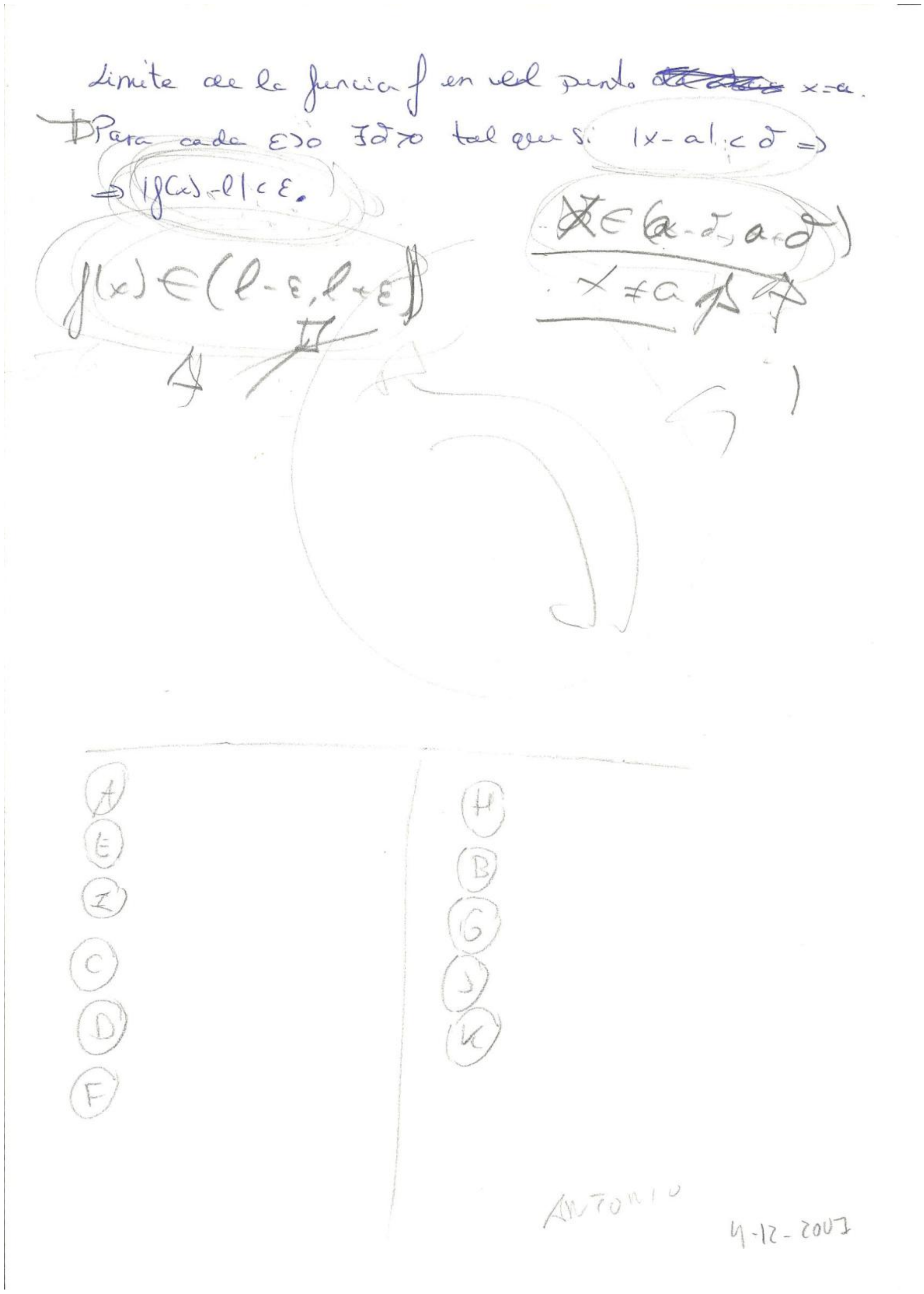
Profesor Y

RECOGIDA DE DATOS DE INFORMACIÓN GENERAL:
1.- Titulación: MATEMÁTICAS
2.- Expedida por la Universidad de: MÁLAGA
3.- Año en el que obtuvo su titulación: 1998
4.- Años de docencia impartiendo cursos de matemáticas: 7 años
5.- Tipo de centros: públicos ☒, concertados ☐, privados ☐ , rurales ☒, urbanos ☒
6.- Último curso académico en que explicó el concepto de límite finito de una función en un punto: 2007 - 08

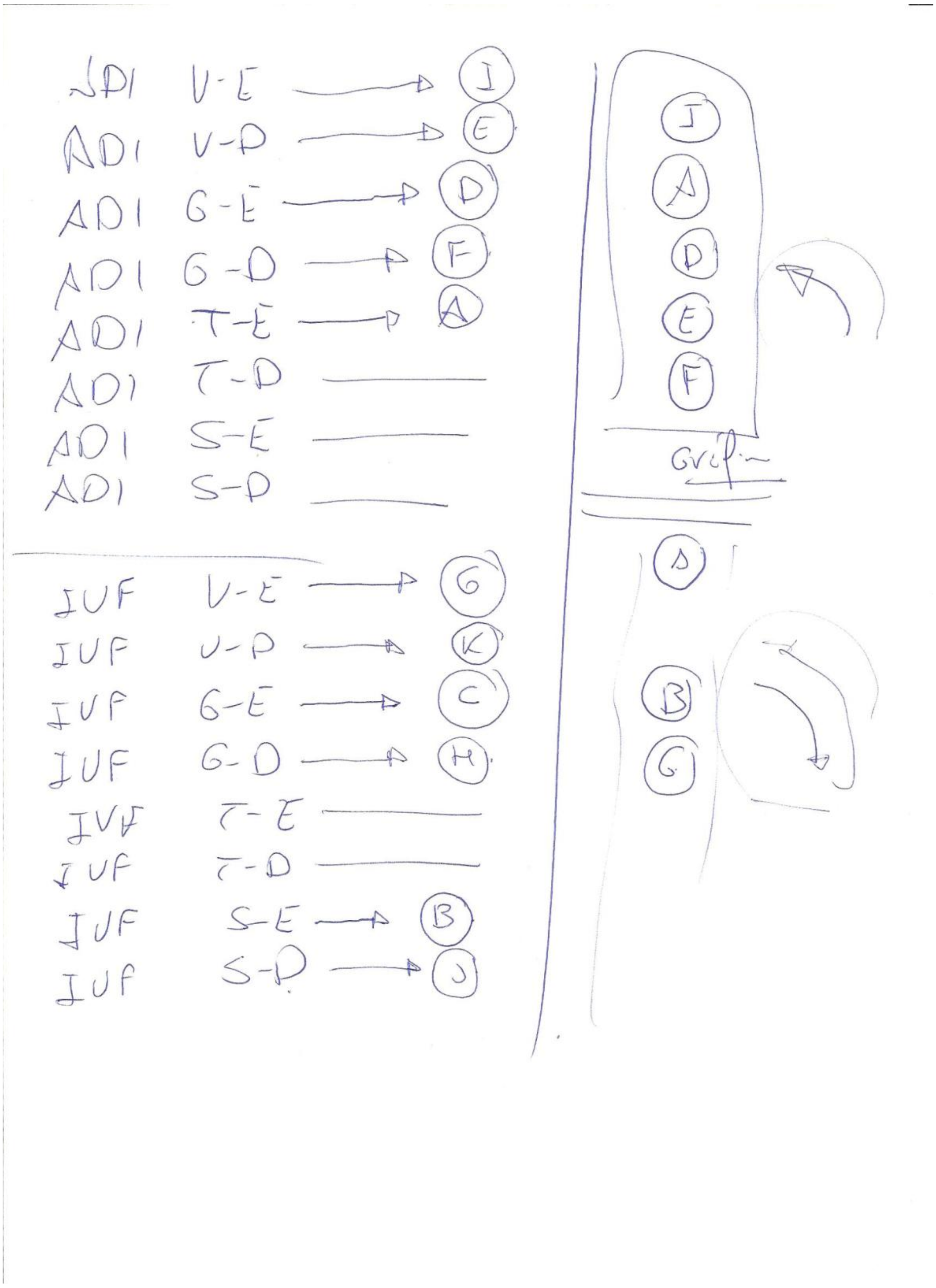
Profesor Z

RECOGIDA DE DATOS DE INFORMACIÓN GENERAL:
1.- Titulación: Licenciada en Matemáticas
2.- Expedida por la Universidad de: Málaga
3.- Año en el que obtuvo su titulación: 1998
4.- Años de docencia impartiendo cursos de matemáticas: 8
5.- Tipo de centros: públicos ☒, concertados ☐, privados ☐ , rurales ☐, urbanos ☒
6.- Último curso académico en que explicó el concepto de límite finito de una función en un punto: 2007/2008

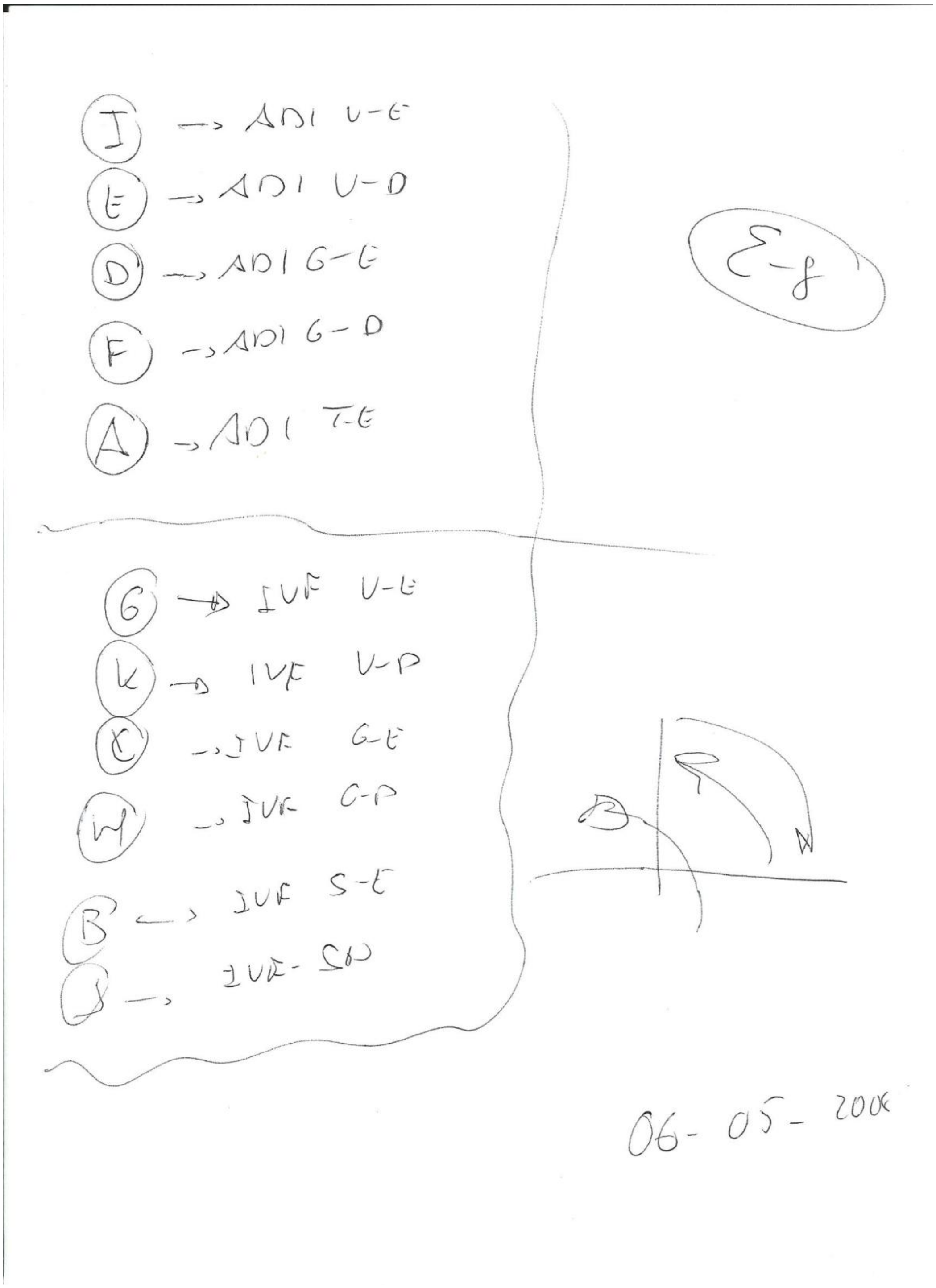
Anexo A5.5 Anotaciones de la investigadora a lo largo de la entrevista del profesor R



Anexo A5.6 Anotaciones de la investigadora a lo largo de la entrevista del profesor S



Anexo A5.7 Anotaciones de la investigadora a lo largo de la entrevista del profesor T

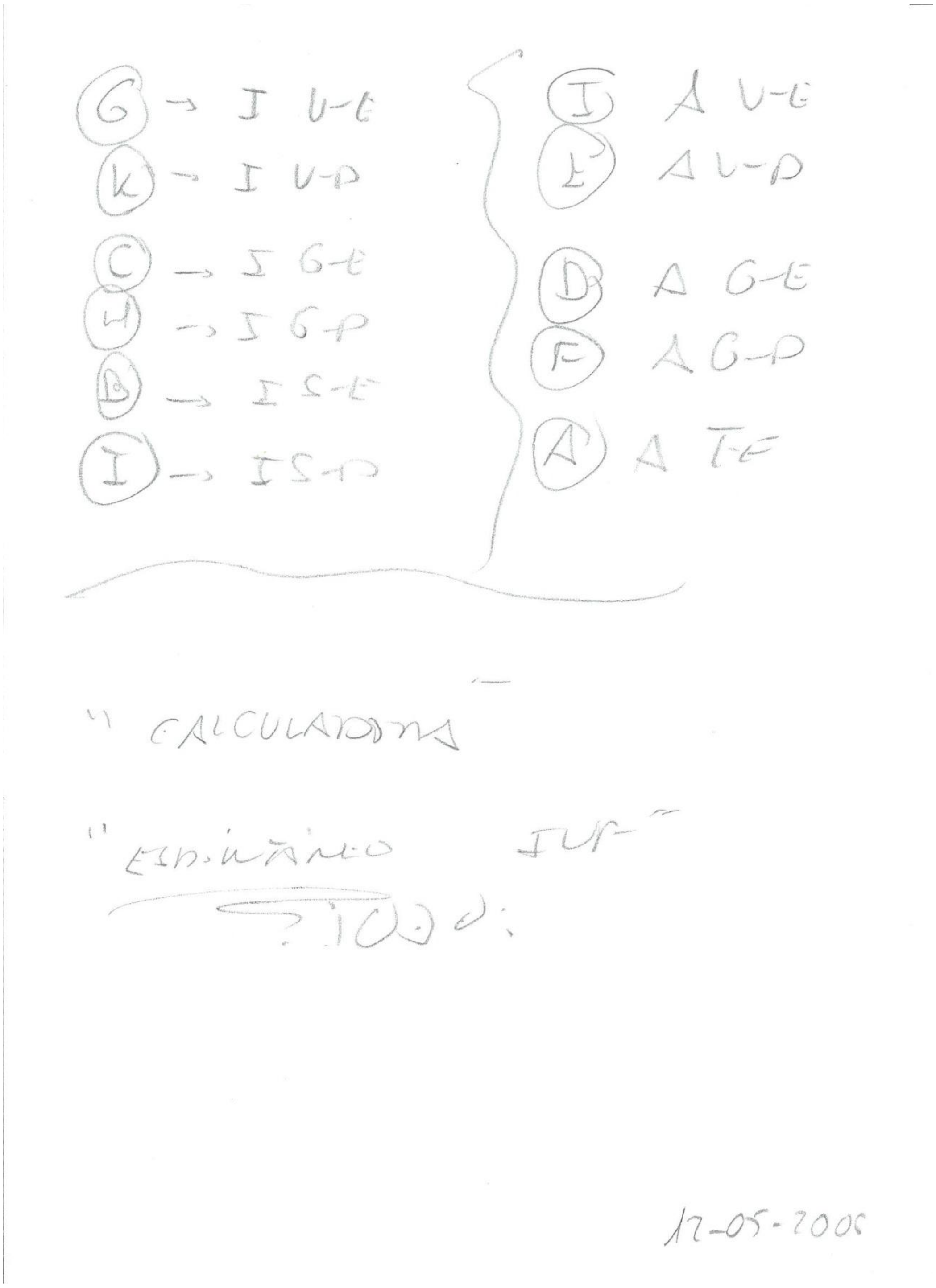

I → ADI V-E
E → ADI V-D
D → ADI G-E
F → ADI G-D
A → ADI T-E

G → IVF V-E
K → IVF V-D
C → IVF G-E
H → IVF G-D
B → IVF S-E
J → IVF- SD

E-f

06-05-2006

Anexo A5.8 Anotaciones de la investigadora a lo largo de la entrevista del profesor U



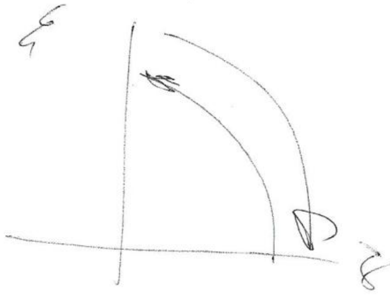
Anexo A5.9 Anotaciones de la investigadora a lo largo de la entrevista del profesor V

ADI		IVF	
J	V-E	G	V-E
E	V-D	K	V-D
D	G-E	C	G-E
F	G-D	H	G-D
A	T-E	B	S-E
		J	S-P

· SIMBÓLICO SOLO LA VUELTA.

· ASÍ SE AHORRA EL FENÓMENO Y METE EL FORMALISMO

¡OJO!



20-05-2008

Anexo A5.10 Anotaciones de la investigadora a lo largo de la entrevista del profesor W

I → A V-E

E → A V-D

D → A G-E

F → A G-D

A → A T-E

NO TABLAS

G → I V-E

K → I V-D

C → I G-E

H → I G-D

B → I S-E

J → I S-D

¡OJO!

ESPONTÁNEO

¡IUP!!

"POCA" EXPERIENCIA PERO INTERESADA

29-05-2008

Anexo A5.11 Anotaciones de la investigadora a lo largo de la entrevista del profesor X

A	ADI	TL-E	B	IVF	S-E
D	ADI	G-E	C	IVF	G-E
E	ADI	V-D	G	IVF	V-E
F	ADI	V-G	H	IVF	G-D
I	ADI	V-E	J	IVF	S-D
			K	IVF	V-D

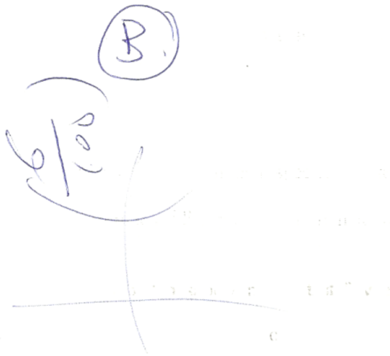
K IVF ~~V-D~~

J IVF ~~S-D~~

A ADI T-E

I ADI V-E

G IVF V-E



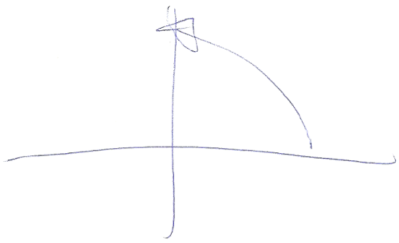
E

D

H

F

C



3 CARMEN

Anexo A5.12 Anotaciones de la investigadora a lo largo de la entrevista del profesor Y

MANOLO

6-8-2008

I.E.S Sierra Almijara

NERJA

E-8

A
E
I

C
D
F

¿Cual x → 3?

H → E

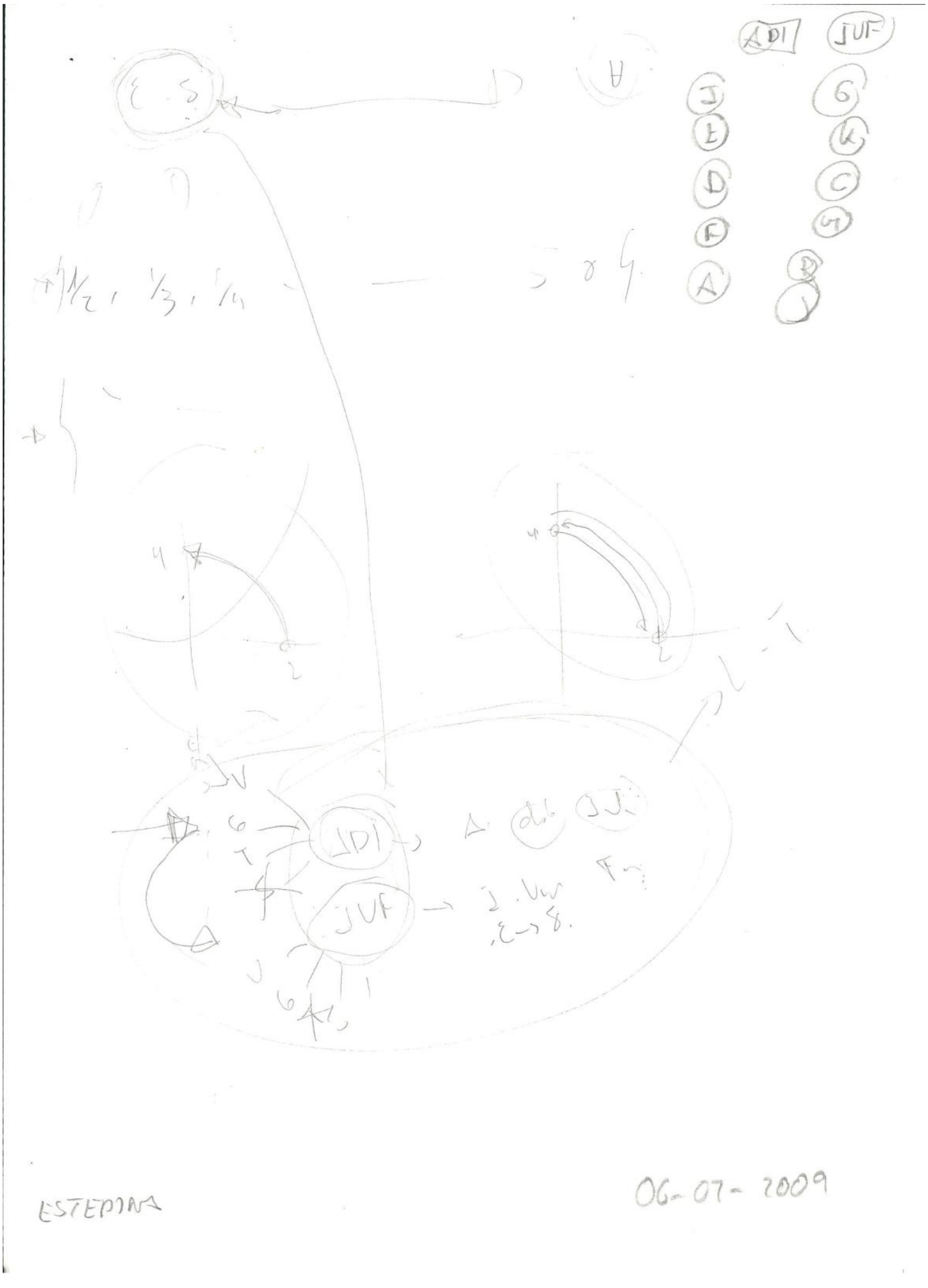
B → ~~B~~

G →

J

K

Anexo A5.13 Anotaciones de la investigadora a lo largo de la entrevista del profesor Z



Anexo A5.14 Transcripción de la entrevista al profesor R

FASE 1: PRESENTACIÓN

001I00,46: Hoy es 4 de diciembre de 2007 estamos en el I.E.S. "P" haciendo la entrevista a un profesor del departamento de Matemáticas. Entonces le entregado unos documentos en los que le he pedido lo que yo quería, y después le he dado 11 fragmentos extraídos de libros de texto y él ha analizado si los utiliza en clase o no los utiliza y si lo hace de que manera y si ha podido hacer relaciones entre ellos y entonces ahora nos va a comentar que es lo que, que es lo que, también por cursos, le sugería a él que sí, [TOSO], que pensara por cursos el primero de bachillerato usaba uno en segundo en la ESO o si había algún fragmento que no utilizaba,…,Entonces nos va a comentar un poco que es lo que él piensa o que es lo que él trabaja en el aula. Le doy la palabra al compañero.

FASE 2: ESPONTÁNEA

001R01,08: Pues gracias, bueno eh no cabe duda de que el concepto de límite que es uno de los que les puede resultar más complicado a los alumnos entender, entender bien, ¿no?, pues que cada vez nos las vemos y nos las deseamos para conseguir llegar a ese objetivo de que lo entiendan, por lo menos intentarlo otra cosa es …
002I01,09: ….que lo consigamos...
002R01,37: ..que lo consigamos, ¿no?, pero lo que si es verdad es que tal y como están los niveles cada día más en detrimento y con la perspectivas que tenemos pues cada año vamos a menos a menos ¿no? ,entonces claro (uhm) el concepto de límite se ve en , lo vemos en primero de bachillerato en ciencias y ahora lo estoy viendo también , que precisamente estoy empezando ahora en segundo de matemáticas aplicadas, en segundo de bachillerato
003I01,38: …. en sociales…
003R02,10: Entonces claro el tratamiento, [RUIDO], el tratamiento que se pueda dar en una o en otra asignatura es bien distinto. En el primero de ciencias pues se entiende que los alumnos el enfoque que llevan es más matemático por decirlo de alguna forma, y entonces ahí si se les exige un poco más ¿no?, en primero de , digo en segundo de aplicadas de matemáticas aplicadas pues ahí uhm ya cuesta trabajo hacerle ver la idea intuitiva,
004I02,11: Claro.
004R02,17: O sea que ahí llegar a formalismos con definiciones formales es casi casi una utopía ¿no? Tal y como está hoy los niveles
005I02,18: La cosa
005R02,23: ... los niveles. Yo me acuerdo de los tiempos de COU de hace no tanto 14
006I02,24: 14 o 15 años
006R03,00: 15 años, pues el cambio ha sido abismal ¿no? Hay una diferencia enorme ¿no? Entonces por ir un poco concretando pues por ejemplo el , la opción B esta es muy difícil tratarla con alumnos en bachillerato, no sé si en segundo de bachillerato de ciencias que esa la da otro compañero, no sé si ahí llegará un poco más en profundidad a esto ¿no? Pero lo que es en primero es muy difícil, en primero cual era el objetivo pues con la idea de que entendieran bien el concepto de límite pues como mucho empezar eso con definiciones intuitivas por ejemplo el A
007I03,01: ... el A
007R03,23: Este si es muy apropiado tanto para los principios de ciencias como en matemáticas aplicadas esta es casi la base ¿no?, empiezas a darle valores próximos próximos y es la única manera , creo yo, de que ellos vean algo de la idea de límite, como empieces por el ε-δ de antemano están perdidos toda la
008I03,24: .. ya ves
008R03,28: Están perdidos para toda la clase de límites. Entonces normalmente se suele empezar esto con el A
009I03,29: Con el A

009R03,50: Incluso ya te digo, en ese bachillerato de ciencias de primero sobre todo al principio ¿no? para eso para hacerles a ellos ver la idea, uhm en el de ciencias de primero pues si el grupo responde todo depende de lo que tengas enfrente ¿no? Si el grupo responde pues entonces una vez que empiezas a manejar límites y empiezan ya con esta base de,..
010I03,51: Con la tabla de valores…
010R04,04: Con el A, ilustrada con algunos gráficos por ejemplo el bueno, gráficos pueden servir por ejemplo el D o el H, o sea que ahí ven ellos más o menos, ehm relacionan con esto ¿no?
011I04,06: Con la tabla y la gráfica
011R04,16: El I también ¿no?, bueno el I ,el I prácticamente con el A. Entonces de esa manera vas introduciendo un poco y se van ellos ¿no?, empiezan a manejar el concepto
012I04,17: El concepto claro.
012R04,26: Entonces que he hecho yo otros años pues cuando por ejemplo ves que ya que curso responde, que maneja esto y tal pues entonces ya empiezas con la definición formal
013I04,27: Claro,
013R04,36: Les metes la definición formal, pero casi casi al final y ya te digo algunos años que he tenido unos niveles, unos cursos muy bajos, pues casi la definición formal ni…
014I04,37: … la has dado
014R04,44: Si la das es a título ilustrativo, es decir, que sepáis que esta es la definición que todo lo que hemos estado haciendo matemáticamente se define así pero para que lo entendáis
015I04,46: Lo vamos a poner de esta manera..
015R04,52: Que básicamente esta es la idea, pero que el concepto el formalismo del ε-δ, ahí se pierden vamos..
016I04,55: Se te pierden, si por la experiencia que has tenido vamos..
016R05,01: De antemano el ε-δ, eso que es, eso ya les suena a chino, no a Griego sino a chino,
017I05,02: … a chino, ja, ja,
017R05,22: Precisamente y con eso se pierden , luego que ocurre que hombre en las matemáticas aplicadas pues casi la definición es irá como en los grupos esos más, más bajos que te he dicho casi como ilustrativo al final porque ahí la idea es que vean más práctico la idea in..de límites
018I05,23: Idea intuitiva así un poco,
018R05,27: Idea intuitiva con uso de la calculadora incluso, yo creo que lo mejor es esta la A,
019I05,28: La A
019R05,43: Porque ahí es donde ellos ven efectivamente que es eso de tomar valores próximos y muy muy próximos y que entre uno y otro, porque ellos después del 1,9 lo primero que piensan es que está el 2, bueno y no hay otro ahí en medio y ahí ya empiezas a hacerles pensar,.
020I05,44: Claro,
020R05,49: Y ya si pues se dan cuenta de que efectivamente tu vas añadiendo valores y que nunca acabas ¿no?
021I05,51: ¿ Y las verbales las utilizas?
021R06,05: Las verbales muy poco cualquier definición esta o esta pues como mucho eso casi al final y en ciencias en ciencias y casi al final para que tengan la idea formal de límite en primero
022I06,13: ¿Y esta tampoco la I?, por ejemplo
022R06,14: Imagino que en segundo imagino que en segundo si se dan ya los compañeros con un poquito más de profundidad, esta sí la I básicamente si
023I06,16: Es lo mismo,
023R06,17: Porque es traducir esto un poco más matemático
024I06,21: Que también se lo dices verbalmente vamos.
024R06,24: Exactamente, pues verbalmente esto quiere decir esto que estamos haciendo aquí con los numeritos quiere decir que cuando la x se aproxima a
025I06,25: …no se quien..
025R06,33: …a dos pues la y se va acercando cada vez más a 4, lo ¿veis? Si se ve en la gráfica también, bueno pues esto se escribe de esta forma, entonces ya aprovechas la punta de
026I06,35: Si que después de haber utilizado la tabla acompañada de la gráfica…

026R06,36: Exactamente
027I06,37: Luego ya pondríamos la…
027R06,39: La definición
028I06,40: ….definición..
028R06,50: Pero es curioso es que le hemos dado la vuelta a los hábitos normales ¿no? Lo normal en nuestros tiempos que era definiciones, definición de límite ponte y tal pon pon pon y que hacemos, y límites y más límites
029I06,52: Si del tipo ejercicio como el B por ejemplo
029R07,00: Eso eso exactamente. Pero ahora sin embargo es que empiezas así y ya te pierdes en la primera, te quedas solo ¿no?, entonces claro un poco para ir
030I07,01: Tienes que adaptarte claro
030R07,14: Tirando del nivel del grupo que no se te quede atrás, pues empiezas así hacemos esto y ahora el x cuadrado y luego el x cuadrado más y luego le metes una grado 2 o 3, y poco a poco se van , y a fuerza de eso de ir dándole valores incluso con eso con calculadora
031I07,15: …con calculadora, si que utilizas la calculadora..
031R07,33: Que vean ellos la intuición esa de que cuando se aproxima a tal pues la,…, que lo vean ellos prácticamente porque sino no se dan cuenta. Cuando a ellos les sale allí, incluso algunas veces les salen barbaridades y ellos no tienen, hay algunos que no tienen capacidad para decir pues esto es una barbaridad aquí, pues que ocurre que seguramente me he equivocado
032I07,35: En el cálculo ¿no?
032R07,44: Y volver atrás ¿no?, ayer mismo me pasaba con un examen de matrices ¿no? No se dan cuenta que una inversa, me ha salido mal, pero vamos si son dos minutos, párate compruébala
033I07,45: Sino la haces otra vez
033R07,49: Asegura lo que has hecho, te has equivocado en dos signos y ya tienes mal
034I07,50: El ejercicio entero claro
034R07,54: Asegura de lo, porque es una cosa que sabes porque eso todo el mundo lo sabe hacer
035I07,55: Lo sabe hacer claro, si es que es muy mecánico
035R08,09: No, ése es quizá uno de los grandes fallos que tenemos hoy en día con los, con el alumnado sea ése ¿no?, que no, que ellos no se paran a ver la realidad de esto, ellos ven algo mecánico y si les sale 8, es porque lo da la calculadora
036I08,10: Algoritmos ¿no?
036R08,16: Y eso es lo que da y es lo ha salido entonces pues no se paran a pensar, vamos a ver el 8 aquí no encaja pues entonces vamos a repasar porque puede que me haya equivocado ¿no?
037I08,26: Claro. Entonces la ε -δ no la usas aparte de, solamente por el ε -δ o hay algo más que no, por ejemplo la verbal que creo que,..
037R08,27: Esta sí, esta verbal sí se usa
038I08,32: Pero me refiero por ejemplo a la K, que sería la ε-δ pero verbalmente ahí como no aparecen los ε-δ
038R08,33: Si,
039I08,36: ¿Tampoco la utilizarías?, o quizá si te meterías algo más
039R09,03: Quizá pero muy poco ¿eh?. Con el entorno pues si igual que esta, o sea, pues eh otra manera de decir esto es, cuando estamos en los entornos de ¿Qué quiere decir?, que cuando estamos en los alrededores de este punto siempre un lenguaje muy llegado a ellos, porque sino es que te pierdes de verdad. Que los alrededores cuando estamos aquí en los alrededores muy muy próximos a tal pues entonces la f hace este comportamiento ¿no?, y ya les puedes dar la definición como entornos,
040I09,04: Si, de ésa manera
040R09,26: Pero que los niveles que tenemos hoy día tienes que bajar mucho mucho a este terreno porque si no es que te pierdes ¿no?. Yo no sé luego en la Universidad como enganchan con lo que llevamos de aquí ¿no? Porque la verdad es que les cuesta trabajo. Seguramente ya, hombre los de segundo de ciencias sí empezarán a manejar un poco más esto yo es que hace que no doy a ese segundo un montón de tiempo,
041I09,27: Si por eso poníamos en aquí lo del tiempo que llevabas en los de estos ¿no? sin

041R09,31: Exactamente,..
042I09,39: Aunque aquí lo ponía en general sin utilizar el límite ¿no?, pero es verdad que no es lo mismo un segundo del tecnológico, que uno un primero.
042R09,50: Es que es así, que un primero, de todas maneras en ciencias ha habido años en que se ha encontrado un grupo bueno, hace dos o tres años tuve un grupo muy bueno y claro ahí daba gusto
043I09,51: Claro,
043R09,57: Dar clase ¿no?, y todo lo que les metías eso era una esponja ¿no?, todo lo que les dieras lo absorbían ¿no?, pero claro eso no ocurre…
044I09,58: Todos los años.
044R10,00: Todos los años ¿no? Y desgraciadamente ..
045I10,02: Si que depende mucho del grupo que te encuentres para,..
045R10,16: Depende muchas veces, hombre es que para que, condensar todo el bachillerato en dos años, eh con la base que traen de la ESO, pues les, es que, es un es un mundo, sobre todo el primero de ciencias, es que son tantísimas las cosas
046I10,17: Que verles claro,
046R10,25: Tan poco tiempo, los grupos tan heterogéneos que se te forman, porque vienen de todos los centros unos han dado una cosa otros otra, hasta que unificas y un poco empiezas a,
047I10,26: ...a moldearlos ¿no?
047R10,43: Así te tiras medio tri, medio curso prácticamente ¿no?. Y claro luego los límites com están ya casi en la última parte ¿no? Pues entonces que ocurre, que depende del juego que te den esos pues, como lo enfocas ¿no?
048I10,44: Como los vas ,
048R10,50: Si un poco más teórico o un poco más en la práctica ¿no?. Pero ya te digo fundamentalmente mi idea siempre es esa comenzar por la parte práctica ,
049I10,51: Si tu experiencia ha sido esa
049R10,55: Ésta acompañada de gráficas que ellos lo vean realmente
050I10,56: Si que relacionen un sistema de representación y otro ¿no?
050R11,06: Incluso en las de aplicadas, pues empezamos viendo gráficas ¿no?. Vamos a ver ésta el límite pues aquí cual es, que ocurre si la x se va acercando a tal por donde va la gráfica
051I11,07: Porque lo ven ,
051R11,11: Ellos lo van viendo claro eso si les ayuda a ellos
052I11,12: La gráfica ayuda mucho ,
052R11,18: Eso si resulta, ahora de eso a a la definición de ε-δ, ya están perdidos, ya eso les cuesta a ellos trabajo
053I11,28: Si es un salto enorme, si a lo mejor no es solo también por el lenguaje sino por el formalismo que lleva también la definición al hablar no solo del entorno y tal,
053R11,33: Exactamente, porque por ejemplo esta, aunque es una definición también es así formal pero si le es más amena.
054I11,34: Claro ,
054R11,43: Claro ellos lo ven así es verdad porque esto que hemos estado viendo que es cuando los imágenes se van acercando aquí los originales, o sea al revés cuando los originales se van acercando aquí las
055I11,44: Las imágenes se acercan al límite ,
055R11,46: Van acercándose al límite ¿no?

FASE 3: INDUCIDA

056I11,52: Pero en esta sin embargo es un poco al revés ¿no?, empiezas también por la variable dependiente ¿no?
056R11,53: Claro,
057I11,56: Fijando el entorno ,
057R11,57: Exactamente, lo cuál eso ya les lia más
058I11,58: Porque claro es como ,

058R11,59: Pero bueno si lo que hay que mirar es ver cuando nos acercamos aquí ver es donde van los otros
059I12,00: Es un reflejo ¿no? ,
059R12,06: Como ahora lo haces al revés ¿no?. Entonces claro el entorno el otro es el que te condiciona este , y eso ya es que les cuesta más
060I12,07: Les cuesta más
060R12,13: Por eso lo más dentro de la definición formalista, la más asequible para ellos es la vamos yo creo que es la E
061I12,17: Si claro que es la que lleva el camino eso de la variable independiente a la dependiente
061R12,18: Exactamente, a la otra
062I12,19: Porque meterse con la otra es y a
062R12,2: Que es el proceso natural que ellos hacen en la práctica
063I12,23: En la práctica ,
063R12,29: Empiezan a darle valores a la x, próximo y entonces ya van viendo la y es lo natural, es que eso es lo más intuitivo, lo otro
064I12,30: Claro ,
064R12,38: Lo otro ya les vuelve la tortilla y eso ya, ja,ja , los pierde, a la mitad los pierde..
065I12,40: Y luego ya si encima les pones el valor absoluto, el ε-δ
065R12,44: Ya empezamos ahí, valor absoluto y eso como era y eso que uh,ja,ja eso ya
066I12,46: Eso ya es impensable ¿no?
066R12,47: Impensable.
067I12,49: Bueno ya y con un ejemplo así ya bueno
067R12,50: Ésta si esta ya , fuh,
068I12,53: Como la B nada ¿verdad¿ claro
068R13,01: Ahí ya que se pierden además, esto de darse cuenta de que esto es suma por diferencia, y esto entonces esto como este es menor que este ya encaja y..
069I13,07: Si aplicar aparte del e y el d millones de propiedades matemáticas que hay,…, que se ven es 2º de la ESO
069R13,13: Que hacen que demuestre que un alumno domina la asignatura, que desgraciadamente, uhm, eso deja mucho que desear.
070I13,14: Claro ,
070R13,16: Es que hay que ver lo que hemos perdido en un montón de años,..
071I13,18: En poco tiempo, claro ,
071R13,26: De eso de niveles y de número de horas también, porque antes había un montón de matemáticas más y hoy en día es que hay poquísimos grupos, en bachillerato poquísimos, porque unos se van por,…
072I13,28: Hay muchas optativas ,
072R13,36: Las optativas claro, además como las matemáticas como les cuesta trabajo, van corriendo de ellas. En el momento que puedan correr de ellas vamos,.., se quitan del medio

FASE 4: TÉRMINO

073I13,39: Bueno quieres entonces comentar algo más o ya,…
073R13,43: Más o menos , yo creo que esa es la idea, por lo menos mi experiencia
074I13,44: Tu experiencia en el aula
074R13,45: En lo que yo llevo aquí.
075I13,46: Pues entonces muchísimas gracias y ,
075R13,47: Y nada gracias a ti y suerte.
076I13,48: Nada. Gracias

Anexo A5.15 Transcripción de la entrevista al profesor S

FASE 1: PRESENTACIÓN

001I01,59: Bueno hoy es 2 de Abril de 2008,nos encontramos en el IES "J" y vamos a hacer la entrevista a un compañero del departamento de matemáticas. Entonces la investigación que se está realizando está centrada en el límite finito de una función en un punto utilizando, exclusivamente la definición ε-δ. Y como es lógico en los centros de secundaria y bachillerato de la provincia de Málaga se utilizan diferentes presentaciones de este concepto como las que están basadas en la caracterización por sucesiones, límites laterales continuidad, además de la ε-δ utilizada en la investigación. En cualquiera de ellas solemos iniciar la secuenciación del concepto apoyándonos por ejemplo en casos particulares o presentando las ideas de manera informal. En la fase actual pretendemos analizar mediante entrevistas personales en qué medida mis conclusiones provisionales se acercan a los tratamientos que distintos profesores dan en clase a este concepto matemático , o darían si utilizaran la misma definición de la ..de la investigación. Para organizar la entrevista le he adjuntado al compañero once fragmentos referentes al concepto de límite finito de una función en un punto. Estos fragmentos se han extraídos de libros de texto de diferentes editoriales y periodos y contienen modelos o argumentaciones relacionadas con la enseñanza de este concepto en el sentido que se acaba de indicar, es decir utilizando la definición ε δ. Tras reflexionar sobre ello, le pido que utilizando los dos sobres que también le he adjuntado agrupe los fragmentos en la fase que en un sobre introduzca todos los fragmentos que utiliza o ha utilizado alguna vez en el aula con los alumnos y en el otro los que no. Para la agrupación de los fragmentos si lo deséale hecho una serie de sugerencias, por ejemplo los cursos o niveles con los que ha trabajado alguno de os fragmentos o todos, las dificultades que los alumnos han encontrado si por casualidad usó alguno de las ideas en clase y las preferencias que tiene como profesor para trabajar con ellos en el aula. Así que ya estamos en el momento de la entrevista y lo que vamos a ver es la agrupación que este compañero ha hecho, y que nos explique un poco porque…o el criterio que él ha seguido. Entonces vamos a empezar viendo las agrupaciones que el compañero ha hecho.

FASE 2: ESPONTÁNEA

001S02,03: Te comento, pues cuando lo ha visto pasando uno por uno..
002I02,04: Uhum
002S02,08: Y realmente me he llevado la grata sorpresa de que los trabajamos todos.
003I02,12: Uhum
003S02,13: Particularmente como este año estaba fresco porque lo he trabajado este año con segundo de bachillerato.
004I02,14: Uhum
004S02,15: He visto que los he trabajado todos.
005I02,16: Has trabajado todos. Uhum
005S02,22: Incluso pensando que yo pudiese ser demasiado optimista y me valorase más de lo que realmente había hecho.
006I02,23: Uhum
006S02,29: Se lo he pasado a los alumnos con los que he estado trabajando en clase y les he dicho que ellos hiciesen esa misma clasificación.
007I02,30: Uhum
007S02,31:Y me ha sorprendido que ellos…
008I02,32: Han hecho la misma..
008S02,35: Dicen que…efectivamente los habían visto todos
009I02,36: Uhum
009S02,39: Los habían visto. Y luego pues me he permitido ordenártelos la secuencia tal y como yo he ido….
010I02,40: Ah perfecto

010S02,45: Explicando en clase..es decir primero fuimos trabajando lo que es la idea de la sucesión..
011I02,46: Uhum
011S02,48: Hacia un límite…eh..fuimos haciendo tablas
012I02,50: Tablas
012S02,53: Ejemplo práctico con tablas..
013I02,55: Si empezaríais como verbalmente ¿no?, luego construirías como la tabla ¿no?.
013S02,56: Efectivamente. Para ir viendo el concepto de límite a través de……haciendo números..
014I03,00: Uhum. Sí, sí.
014S03,06: Como yo digo en clase. Luego ya con la idea de gráfica.
015I03,07: Uhum. Apoyando
015S03,12: Una función cualquiera pues viendo la gráfica de la función y apoyándola eso..viendo un cierto punto viendo a donde tienden las imágenes.
016I03,13: Las imágenes.
016S03,15: Y luego ya pues formalizándolo de alguna manera, pues con palabras…
017I03,19: Si lo que sería la definición ¿no?. Lo que sería el fragmento E ¿verdad?.
017S03,20: Uhum
018I03,25: Hemos ordenado el I el A el D y ahora nos estamos..
018S03,36: Si la idea es esa de que cuando vemos una gráfica, pues la idea de… límite cuando se acerca uno a un punto en el eje de abcisas pues las imágenes a donde tienden.
019I03,37: Si intuitivamente como dice ¿no?. Uhum al otro…. Estupendo.
019S03,42: Eso ya también en un dibujo ya más formal no con una función concreta. Sino con un entorno.
020I03,44: Sí en plan definición un poco
020S03,48: Hasta llegar ya por fin a lo que es la definición formal de límite ¿no? con ε y δ.
021I03,53: Si a lo que es el formalismo. Si has considerado que como que una diferencia clara entre los cinco primeros fragmentos que me acabas de comentar y los seis de los que vamos a hablar…
021S03,59: Eso es sería este que marcaría como el punto medio ¿no? hasta llegar..una introducción hasta llegar a la formal
022I04,00: A la formal uhum
022S04,05: Y luego ...vaya estos enfoques pues de entorno y tal ..
023I04,06: Uhum
023S04,07: Conforme vamos practicando pues se van introduciendo..., una vez se lo dices de una manera otra vez se lo dices de otra forma..
024I04,11: Si dependiendo de lo que la clase te va pidiendo..
024S04,22: Para que ellos vayan viendo justamente las variantes ¿no?. Corrijo un ejercicio y lo utilizas de otra manera para que ellos vean el ..pues de alguna manera pues trabajar con sinónimos en este caso o ideas….parecidas..
025I04,24: Si un sistema de representación diferente
025S04,26: De lo que hemos definido como concepto de límite
026I04,27: Uhum
026S04,33: Y…ya para que..porque ellos lo que encuentran más dificultad en ese concepto teórico de ε δ..pues trabajar en estos ejercicios..
027I04,34: Uhum la B ¿no?, el ejercicio tipo B
027S04,43: Exactamente, para terminar en ejercicios donde ellos realmente palpen quien es ε y quien es δ. Con números concretos.
028I04,45: Para la relación funcional nueva que ahí se establece ¿no?.Del ε δ.
028S04,54: Exactamente. Yo les he preguntado además como…forma que en qué momento les había resultado más sencillo….que en que momento ellos habían alcanzado la definición de límite
029I04,55: Uhum, si, si.
029S05,01: Y….hombre la mayoría dicen que les vino muy bien lo que es la parte…primera la introducción.

030I05,02: La parte intuitiva.
030S05,04: Las gráficas es como mejor lo comprenden.
031I05,05: Con la gráfica ¿no?
031S05,06: Uhum
032I05,11: Uhum si apoyarse en todos los sistemas pero quizá en ese que es el visual ¿no? y ver el camino de aproximación en..
032S05,12: Exactamente, verlo...
033I05,13: En el sentido ese de la independiente a la dependiente.
033S05,15: A a las imágenes. Eso es.
034I05,16: Uhum.
034S05,30: Y.., les costó más obviamente la definición…y luego ya con esto con los ejercicios consiguieron…pues viendo ya casos concretos ..dado un δ calcular un ε…dado un ε calcular el δ correspondiente. Pues…

FASE 3: INDUCIDA

035I05,38: Si porque eso es lo que yo creo que puede haber un punto, porque el camino que llevamos en el intuitivo sería como por llamarlo de alguna manera de "ida"¿no?, sería de la variable independiente como tú has dicho antes a la dependiente
035S05,39: Uhum
036I05,40: Sin embargo ya en las otras el camino es un poco a la inversa ¿no?.
036S05,45: Uhum
037I05,47: Empiezas con el ε ¿no? y
037S05,48: Claro y tienes que buscar el δ correspondiente.
038I05,49: Y luego le marcas ya el ..
038S05,54: Trabajando con entornos o al revés.
039I05,55: Uhum.
039S05,57: Y...bueno esta que es muy similar a la anterior la G ¿no?
040I05,58: Uhum
040S05,59: La de dado un valor ε pues encontrar el δ ¿no?.
041I06,00: La G
041S06,02: Esto es ya de aplicación.
042I06,03: Si con ejemplos..
042S06,05: Esto es lo que te digo que hemos trabajado.
043I06,08: Uhum
043S06,09: Es decir que todas han sido trabajadas.
044I06,12: En el aula, si al haber sido un segundo de bachillerato..¿que es un tecnológico o algo?..
044S06,16: Si es de ciencias..., el bueno, ja,..ja.
045I06,18: Si que has tenido la opción de…poder trabajar con ellos en esta curso..
045S06,20: He tenido buenos alumnos
046I06,21: Uhum
046S06,30: Y la verdad es que he trabajado muy bien con ellos y....lo.. vamos este es el segundo trimestre. A partir de Enero empezamos a trabajar en el segundo trimestre.
047I06,31: Uhum. Y que te iba a comentar Javier.., las dificultades que ellos han podido encontrar más….aparte de las cinco primeras intuitivas, por llamarlas de alguna manera..,
047S06,37: Uhum.
048I06,38: En las otras seis más formales.., ¿que es lo que a ellos más trabajo les ha podido costar?.¿Algún sistema de representación concreto el trabajar con entornos..?.
048S06,40: Claro..las letras..ellos cuando ven letras ya formalizar..todo lo que no sean números incluso en segundo de bachillerato eh..
049I06,51: Uhum
049S06,52: Les choca les choca todavía. El hecho de que también se trabaje con valores absolutos,…,pues en principio pues dudan un poquito también… Trabajar con una inecuación.
050I06,59: Uhum

050S07,00: Estos conceptos previos que a ellos deben tener, pero claro en ese momento….
051I07,03: Si aplicarlos..
051S07,06: No los recuerdan. Y entonces en esa aplicación es en lo que fallan. Y luego que claro ε y δ. Pues ellos ven dos dibujos raros que no saben exactamente lo que representan.
052I07,16: Lo que representan.
052S07,18: Y...y eso es lo que les cuesta un poquito más.
053I07,21: Uhum. Y ¿has notado alguna dificultad particular en esto que te he comentado..en el camino..que en las intuitivas podemos llamar solamente de ida ¿no? Y en las otras como inverso ¿no? Empezar en la dependiente terminar en la independiente y luego probar que verdaderamente funciona. ¿tu has notado ahí algo..¿o? no no has notado..de ida y vuelta
053S07,39: Uhum. La verdad no he notado..
054I07,40: No has notado dificultad concreta.
054S07,41: No
055I07,42: Si más en eso ¿no?.
055S07,43: Uhum
056I07,49: En entornos.. en valor absoluto..
056S08,03: En general el tema de los símbolos y el tema de las inecuaciones. Eso les choca…Cuando ves que han cogido ya el..la idea..o la inecuación… lo recuerdan que ya lo vieron en cuarto..
057I08,07: Si como por ejemplo, la B que es donde viene…
057S08,08: Exactamente ahí tienes que arrastrar una inecuación…
058I08,09: Uhum. Y por ejemplo vamos a ver… la gráfica.., vamos a ver una gráfica..que sería la ..C por ejemplo ¿no?.
058S08,20: Uhum
059I08,21: En la gráfica C no has visto así dificultad… grande bueno en la que…
059S08,30: La verdad es que no la veía bien del todo, entiendo que…, que en un entorno del dos..
060I08,38: Tiene dos menos δ dos más δ..
060S08,40: Ah.. que es una función concreta ¿no?
061I08,42: Sí, yo creo que es el x cuadrado menos cuatro partido x menos dos.
061S08,45: En cambio un teórica que sería la H..
062I08,48: Uhum
062S08,49: Creo que es la H , sí.
063I08,51: La H sería como la teórica y está un poquito más clarita.
063S08,53: Exactamente
064I08,55: Y la otra sería como un casito concreto
064S09,00: Si, sí.. yo eso lo había dado como igual.., no lo veía bien y creía que era…
065I09,01:Uhum, que era teórica. Entonces no has tenido problema en eso en lo que es ver el ε δ.
065S09,14: No no. Ya te digo una vez que lo vimos con un ejemplo concreto de función y lo definimos, esto quedaba ya bastante claro.
066I09,18: Más claro
066S09,21: En un entorno del punto a ver las imágenes tienen..se acercan a un límite…en un entorno de ε para las imágenes
067I09,23: Para las imágenes. Si que no han visto….
067S09,25: No no
068I09,26: No han visto ahí gran problema.
068S09,30: No.
069I09,32: Si que aquí..sería a lo mejor más fácil incluso que la que hemos hablado antes…la B. ¿no? Al trabajar en esta con valores absolutos y…
069S09,34: Claro claro..
070I09,43: Acotación y demás…, con las gráficas quizá les resulte más fácil ¿no?. Y la G sería pues más o menos, es la misma pero claro dicho de.. un poco en la fase verbal ¿no?
070S09,47: Eso es cuando vas trabajando…el problema..pues lo vas..
071I09,49: Lo vas moldeando con diferentes sistemas de representación.

071S09,51: De una manera …luego lo vas poniendo de otra forma..hablando de entornos…
072I09,53: uhum
072S10,03: Lo utilizas sobre todo cuando corriges ¿no?..cuando ves que dando la explicación machacarlos con demasiadas conceptos nuevos..pues..les das un concepto y luego cuando ya se corrige pues le vas viendo las distintas variantes que ….
073I10,04: Claro
073S10,08: Que eso es lo que yo he visto en las distintas láminas ¿no?
074I10,11: Láminas. Claro.
074S10,13: Que es justamente los distintos enfoques que le vamos dando al mismo concepto
075I10,14: Al mismo concepto claro. Y en otros cursos en primero de bachillerato o algo así…., has podido llegar a ver todos los fragmentos o has tenido más dificultad…
075S10,23: Ahí...es que..no doy de hecho llevo tiempo sin dar…,los dos últimos años llevo con segundo de bachillerato.
076I10,25: Uhum
076S10,27: Y primero ..bueno….como en Mollina solo teníamos hasta cuarto de la ESO
077I10,29: Solo la ESO.
077S10,31: Pues primero de bachillerato llevo tiempo….tiempo sin dar.
078I10,32: Uhum
078S10,34: Por eso te voy a decir que los dos últimos años he tenido justamente el segundo..
079I10,37: De bachillerato…pero vamos es que te ha ido bien con ellos ..
079S10,39: Si sí..
080I10,45: Es que al ser alumnado que se prestaba has podido..llegar.. a ello..¿no?. Bueno pues entonces si quieres comentar algo más….y sino pues…
080S010,46: Pues….

FASE 4: TÉRMINO

081I10,49: Agradecerte la colaboración.
081S11,00: De nada. Ya te digo la satisfacción de ver hombre que ..ni …demasiado desfasado ni demasiado bueno ¿no?. Que lo he trabajado todo, que me he alegrado y que….los alumnos..son capaces.. que ha sido así.
082I11,01: Que ha sido así.
082S11,02: Bueno que era un concepto que habían asimilado y ..que parece..
083I11,03: Difícil..
083S11,04: Que yo cuando lo vi….era difícil…realmente difícil
084I10,06: Sí si no es nada fácil
084S10,10: Yo en matemáticas en su día cuando estaba de alumno me…costo entenderlo..
085I10,13: Si que eras uno de los alumnos prototipo de los que tú tienes ahora ¿no?.., de ciencias que te gustaban las matemáticas..¿no?..
085S11,21: Sí...y recuerdo que me costó..al principio la formalización del ε el δ.
086I11,23: Uhum
086S11,25: Y..por eso que me preguntabas cuando habían alcanzado el …
087I11,27: El punto..
087S11,29: Pues yo creo que sí que lo habían alcanzado y..
088I11,31: Uhum
088S11,33: Agradecían mucho ..pues los ejemplos de introducción .., primero de gráficas.
089I11,35: Sí el introducir la parte intuitiva y luego ya meterse en …
089S11,37: En el ..
090I11,38: En el formalismo.
090S11,45: De los conceptos.
091I11,48: Uhum. Entonces nada si ya no hay nada más que comentar pues..Muchas gracias.
091S11,50: A ti.

Anexo A5.16 Transcripción de la entrevista al profesor T

FASE 1: PRESENTACIÓN

001I00,55: Bueno hoy es 6 de mayo del 2008, estamos en el I.E.S “P” y vamos a realizar la entrevista a una compañera del departamento de Matemáticas. Estuve aquí la semana pasada le entregué unos materiales en los que aparecían 11 fragmentos referentes al concepto de límite finito de una función en un punto basada en la definición ε-δ concretamente. Y le pedí que tras reflexionar un poquito sobre los fragmentos que le entregaba, que me los agrupase en dos grupos, que los metiese en dos sobres. En uno de ellos introdujera los fragmentos que ella utiliza o ha utilizado alguna vez en el aula, y en otro los que no. Y ahora en el momento de la entrevista comentaremos esa agrupación que ella ha hecho, así que le cedo la palabra a la compañera y que nos comente.

FASE 2: ESPONTÁNEA

001T01,10: Bueno pues,…, así a grandes rasgos, lo primero que detecté fue, que hay algunas definiciones que usan el ε el δ, y eso ya no,…, no se
002I01,12: No los puedes utilizar en el aula,….¿no?...uhum
002T01,15: Eso no, en cuanto ven algún…
003I01,44: Simbología de ese tipo ya,…
003T01,45: Se bloquean y ya, pues no hay manera de entrarles. A lo mejor si ves que el grupo es muy bueno, que el nivel es alto y en cursos altos, mínimo de primero de bachillerato, le puedes hacer una introducción, algo, puedes hacer una especie de visión.., pero sin más pretensiones
004I01,45: Sin ejemplos concretos ni nada….
004T01,55: Así de cómo ¿saciantes? de demostraciones ε-δ, de demostrar en límite con entornos, demostración….o sea como
005I01,56: Si como hay algún fragmento hay…nada ¿verdad?
005T02,09: No eso no, eso vamos ya no. Cuando era BUP si. ,uhum, pero ya no, ya no se puede hacer. Y,…, porque se te despistan porque desconectan
006I02,12: Desconectan completamente.
006T02,15: Entonces los más que he quitado, pues…., de entrada no sé si alguno más….caerá
007I02,19: Caerá, ja,ja,….
007T02,22: Pero así, medio medio, bueno este por supuesto..
008I02,23: El B ¿no?
008T02,25: El B
009I02,27: Si que es lo que hablamos ¿no?,
009T02,28: Si
010I02,30: El hacerlo con la demostración con el entorno en un ejemplo concreto
010T02,33: Con el entorno pues no. Este…
011I02,36: El G ¿no?
011T02,38: Tampoco, por,….,por lo mismo.
012I02,43: Si, utiliza otro sistema de representación pero está realizando el mismo.
012T02,45: Este es el que a lo mejor le puedes hacer, uhm, uhm,
013I02,50: Sería,.., gráfico
013T02,51: Si el grupo es nuevo, es bueno y tal, yo si lo hecho alguna vez, el gráfico. Para que lo vean. Eh así, creo que aquí había otro.
014I03,00: Si que había otro, el F por ejemplo ¿no?
014T03,02: Pues si te lo he metido aquí porque a lo mejor, uhm….
015I03,05: Si no utiliza quizá el lenguaje también el δ el ε y eso.
015T03,13: Sino a lo mejor un poquito, que no le metes el δ k el ε, pero bueno. Este regular pero..
016I03,15: Si pero que es la idea, más o menos.

016T03,18: Si la idea, la idea. Y esta que es la
017I03,19: La J
017T03,21: La J, pues,…,
018I03,24: Si que sería con el simbolismo, igual,..
018T03,25: Igual, lo mismo.
019I03,26: Simbólico, con definición.
019T03,28: Luego ya de estos ya unos más y otros menos
020I03,30: Aha,..
020T03,32: Pues, por ejemplo vamos a ir,.., este si.
021I03,35: El A ¿verdad?
021T03,39: El de las sucesiones lo más intuitivo, es lo que ellos más ven y…
022I03,40: Si con la tablita de valores
022T03,41: La tablita de valores
023I03,41: La tablita de valores
023T03,49: Cuando x tiende a tal y va a tal, eso sí .Esta que es …
024I03,50: Esta es que se veía regular…
024T03,51: Sí, esta es que se ve regular. Yo creo que no metí, esta es como esta,
025I03,59: Si, la C sí se podría catalogar como la H, parecidas..
025T04,00: Parecido
026I04,04: Si lo que pasa es que claro con un ejemplo concretito
026T04,09: Concreto, entonces pues esta es de los que …
027I04,09: Depende donde, el grupo
027T04,10: Como esta ¿no?
028I04,12: Como la F sí, que no puedes
028T04,14: Si que no es seguro. Esta es…
029I04,16: Esta era la K ¿no?
029T04,21: La K bueno es que según es que no la estoy ahora leyendo…
030I04,22: Aha,..
030T04,25: Esta es la,…, también como esta…
031I04,28: Sí un poco pibote que depende,…, del grupo ¿no?,
031T04,40: Hablar de entornos,.., si hay un grupo que veo que me,…, sigue entonces, sí, y ya te digo a nivel de bachillerato.
032I04,41: En la ESO,..
032T04,42: En cuarto de la ESO no. Esta sí.
033I04,44: Esta también ¿verdad?, la I ¿no?
033T04,46: Sí, esta es con un ejemplo concreto,..
034I04,50: Sí puede ser parecida a la A pero con lenguaje verbal
034T04,53: Esta ya la he comentado. Esta sí.
035I04,46: Uhum, la E ¿también?
035T04,59: Es la idea intuitiva, y esta que es con el grafico pues también.
036I05,01: Con su grafiquita ,también la D¿no?
036T05,03: También. Y más o menos se puede …
037I05,05: Que esa es la agrupación,…
037T05,07: En tres, más que en dos en tres.
038I05,08: Si una que no, otra que sí y otra que
038T05,09: Y otra que depende…
039I05,09: Que depende del grupo que tengas. Uhum
039T05,11: Del nivel
040I05,12: Que la has trabajado
040T05,14: Que siempre va a haber algunos que pueden, que pueden conectar más otros que pueden conectar menos, pero si el grupo en general veo que me sigue o…o un…
041I05,22: O un sector ¿no?
041T05,32: Un sector significativo, pues entonces si se lo meto. Lo que no hago seguro es la demostración
042I05,34: Sí el tipo B ¿no?, el ejemplo ese concreto de ….

042T05,35: No porque ese, se te irían dos días y medio …
043I05,37: Y no conseguirías al final..
043T05,40: Y al final los resultados no,.., son muy pocos

FASE 3: INDUCIDA

044I05,43: No conseguirías tu objetivo.
Y sería simplemente el no utilizar estas ¿sería solamente por el formalismo. Por no utilizar el ε el δ, el entorno?, o tú ves que hay algo más en las definiciones a parte del formalismo que…los pierde a ellos.
044T06,10: A ellos les cuesta la abstracción, el ver algo que no palpan,….., y entonces…., la idea de entorno como tal, pues..,no…no…la ven
045I06,12: Si no aterrizan en la idea esa…
045T06,28: No la ven. Entonces no sé si por madurez, o por el proceso que ellos han tenido de.., no llegan a asimilar el… que significa un entorno.
046I06,30: Un entorno en un punto, claro.
046T06,32: Qué relación existe entre un entorno y un límite.
047I06,55: Y un límite. Si claro y además otra cosa que se puede observar es que en estas intuitivas, por llamarlas de alguna manera, (palabra que tu también has utilizado),
el acercamiento es como de la variable x a la y ¿no?, es decir si la x se acerca a fulanito la y se acerca a menganito. Mientras que en estas es un poco al revés ¿no?, empiezas por la , por la y, y esta te marca una x y luego como que..
047T06,55: Ajá
048I06,57: Tienes que,…, una doble dirección ¿no?
048T07,03: Ellos ven más lógico.., el que,…., como siempre van tomando valores de x….
049I07,03: …eso es….
049T07,08: El,…,el …, a partir de los valores de x pues deducir que le pasa a la y
050I07,09: Que le pasa a la y, eso es, uhum,…
050T07,13: Al revés es ¿?¿?¿?¿?, también..
051I07,18: Es que a parte de todo el simbolismo,.., y todo lo que lleva la definición…les cuesta
051T07,28: Si todo lo que es abstracción, les cuesta, pero a parte de eso que también es verdad, el que…..pensar en la función en los dos sentidos pues también los pierde,… sobre todo al principio…
052I07,29: Claro
052T07,36: Es que no es lo mismo a lo mejor si este concepto lo ven en un curso a un nivel a otro.
053I07,38: Incluso en bachilleratos diferentes ¿no? , en bachilleratos de sociales o el tecnológico.
053T07,42: Si pero
054I07,43: También es diferente
054T07,59: Pero el,…, aquí hay un problema un problema de tiempo enorme,…, entonces si llegas,…, funciones se pueden, límites de funciones se pueden,…, se dan en 4º, eso por primera vez. Pero llegas a un ritmo que prácticamente les cuentas la idea intuitiva y poco más..
055I08,00: Y fuera
055T08,05: En primero de bachillerato tienes que dar desde números enteros ..
056I08,07: Sí repasarlo todo, claro…
056T08,32: Hasta integrales, que nunca llegas. Entonces,…., digamos que des derivadas. Si tienes que hacer todo ese proceso en nueve meses tu no puedes entretenerte en una definición de límite. Porque tu cuando llegas al análisis seguramente estas ya en el mes de Mayo y tu el tiempo que tienes por delante,…., entonces pues. Que cojan la idea de límite, que la entiendan y cálculo,…, de límites.
057I08,33: Claro.
057T07,38: Entonces meterte en la definición, en que trabajen la definición, supondría tener mucho tiempo.., sería muy bonito….
058I08,40: Hombre ya ves…

058T08,42: Pero……
059I08,43: Si que es un concepto que la verdad es bastante interesante…
059T08,44: Es muy bonito, pero….
060I08,49: Y eso aparte también es lo que tu dices, la abstracción que lleva el concepto, ¿no?....
060T08,57: Que si ya la han ido,…., paso a paso, si la hubieran trabajado bien en 4º o lo hubieran trabajado bien en 1º de bachillerato, y tienes tiempo, en 2º de bachillerato la metes..
061I08,59: Si te puedes poner con este tipo de …
061T09,00: Pero que tal como está la programación,…
062I09,08: Si no has podido ponerte a experimentar con ellos a ver si proceso este "contrario" de la independiente a la dependiente,….
062T09,13: De dedicarle a disfrutar con este concepto, pues,…., no se puede. ES la realidad.
063I09,21: Si es todo trabajar con el, con la…, parte intuitiva con los diferentes sistemas de representación…..
063T09,30: Que lleguen a entenderlo, que por lo menos vean un límite de una función y no digan un disparate. Que no digan pues cuando x tiende a donde va…,que te lo hacen al principio…
064I09,31: Si claro…
064T09,45: Pero si ya llegan a asimilar bien el concepto, y que no confundan el valor de la función con el límite, que vean que pueden existir funciones que no están definidas pero tienen límite. Que no tiene nada que ver,…., que no es el mismo concepto que continuidad,…..
065I09,47: Si claro que son cosas diferentes..
065T09,48: Ese tipo de cosas que le cojan…….
066I09,57: Sí, pero no te puedes entretener a ver este tipo de cosas del salto de una definición a otra o de un fragmento a otro…
066T10,03: Que ahí más como me lo dieron a mí por ejemplo, que me dieron de sucesiones 6 definiciones seguidas en 2º de BUP. Distintas….
067I10,05: Si que es verdad con el ε el δ
067T10,09: El ε con el entorno con los valores absolutos,…, con,…y yo decía ¡esto que es!. Y porque hay tanto…
068I10,13: Si que al final el concepto no, no….
068T10,18: Para que tal día cuando haces lista de definiciones diferentes de lo mismo, los lías. No tiene interés, es mejor ……
069I10,21: Si centrarse en una, claro..
069T10,24: Y que la cojan bien.

FASE 4: TÉRMINO

070I10,33:Bueno ¿quieres comentar algo más Leticia más concretamente tu experiencia , así como una caso concreto que hayas tenido con algún crío, que te haya sorprendido algún comentario que te haya hecho,…..
070T10,35: No recuerdo,….
071I10,36: No recuerdas ningún caso así concreto ¿no?...
071T10,37: No, no recuerdo…
072I10,40: Pues entonces ya si no queremos comentar nada más pues, te lo agradezco enormemente..
072T10,41: Encantada.
073I10,43: Y, y muchas gracias.
073T10,44: A ti. Pues nada.
074I10,45: Y venga.

Anexo A5.17 Transcripción de la entrevista al profesor U

FASE 1: PRESENTACIÓN

001I00,01: Bueno hoy es 12 de mayo del 2008,
001U00,02: De mayo, mañana es 13 de mayo
002I00,03:Martes 13
002U00,04: Martes 13 de mayo.
003I00,59:Estamos en el IES "P" y vamos a realizar la entrevista a un compañero del departamento de Matemáticas. Entonces comentamos rápidamente que le entregué hace un par de semanas unos materiales que están formados por 11 fichas, que contenían fragmentos extraídos de libros de texto y entonces, yo le pedí si podía hacer el favor de echarles un vistacito y tras reflexionar un poquito sobre ellas, pues comentarme cuales de ellas utilizaba en el aula con sus alumnos y cuáles no utilizaba, y ahora en el momento de la entrevista pues vamos a comentar porqué él ha hecho esta especie de ordenación personal, por qué su experiencia en el aula le ha llevado a hacer esta ordenación. Entonces le cedo la palabra al compañero y que nos comente.

FASE 2: ESPONTÁNEA

003U01,04: En respuesta a la ficha A, si es una manera de presentar el límite,…
004I01,10: ¡Uhum!
004U01,16: De una función con aproximaciones sucesivas, quizás también la más socorrida dependiendo de los niveles ¿no?
005I01,17: ¡Uhum!
005U01,19: Donde se llega a explicar esta,.., esta definición.
006I01,21: Pero vamos que esta sí se usa en el aula
006U01,49: Esa si se usa, es bastante socorrida. La ficha B, pues nos sugiere la presentación del concepto mediante valoración de ε y δ, pues casi, casi ,casi ,casi que la tenemos descartada ya, porque,…, por falta de tiempo, por falta de nivel. Quizá en algún primero de Ciencias se pueda dar si hay desahogo de tiempo,….
007I01,50: ¡Uhum!
007U01,59: En algún segundo de Ciencias, cuando hay,…, tiempo también, pero desde luego no en primero de Matemáticas Aplicadas a las CSS.
008I02,00: Descartada completamente
008U02,10: Únicamente a título informativo a los de ciencias si se les suele decir que la formalización de este concepto, pues sería de este modo. Se les pone con todo con cuantificadores y todo.
009I02,11: ¡Uhum!
009U02,19:Pero no se insiste demasiado en su uso práctico ni en su interpretación lógica por..
010I02,20:¡Uhum!
010U02,21: En la ficha C
011I02,22:La C ¿no?
011U02,28: Si se suele usar este tipo de,.., de conceptualización, de aproximación a la idea ¿no?
012I02,29: ¡Uhum!
012U02,33:De entornos desde el punto de vista gráfico.
013I02,35:Gráficos ¿verdad?, con un ejemplo a lo mejor concreto ¿no?
013U02,44: Exactamente, de ejemplos concretos. Un entorno gráfico de los,.., de los puntos próximos a un límite, los puntos próximos al punto…
014I02,45:¡Uhum!
014U02,48: Sobre los ejes e, Y y X ¿no?
015I02,51:Sí utilizando el sistema de representación gráfico…
015U02,57: Gráfico sí, la idea intuitiva y llevada a la gráfica.
016I02,58:¡Uhum!

016U02,59: En el, en la ficha D. Si vemos una presentación también, esta si se suele utilizar también.
017I03,00:La D ¿no?, también,…
017U03,07: La D es la que más se practica después para que sobre la gráfica se identifique la idea de límite.
018I03,14: Si la comparamos con la C ¿no?, la C también tiene los ε y los δ.
018U03,19: Si la C tiene los ε y los δ y sobre todo la visualización del entorno.
019I03,20: Si del entorno
019U03,28:Aparte del valor del ε y el δ, la cosa que en el otro D, .., pues bueno ya se habla más intuitivamente, más superficialmente
020I03,29: Intuitivamente claro.
020U03,33: De puntos próximos, de puntos pertenecientes a un entorno
021I03,34:¡Uhum!. De puntos pertenecientes a un entorno
021U03,35: En la E,…….., si es la misma idea se les suele decir…
022I03,42: El lenguaje verbal
022U03,54: Es la que suele venir principalmente en los libros, es en la que se suele insistir también para,…, para su comprensión
023I03,55: ¡Uhum!
023U03,56: En la ficha F…
024I03,57: ¡Uhum!
024U04,00: Tenemos aproximaciones desde un punto de vista gráfico, pues sí, sí se podría ..
025I04,05: Se podría comparar un poquito con la que has dicho con la C ¿no?, que también tiene el entorno…
025U04,06: Solo cambiando…., solo cambiándolo
026I04,12: Solo no se marcan el ε y el δ, y en la C si se marcaban ¿no?
026U04,23: En forma de gráfica sí.
En la G solo se da a título informativo en algún nivel de primero o segundo de bachillerato de ciencias. Porque no se puede insistir mucho.
027I04,26: Si como en la B que hemos dicho.
027U04,34: La H,……, pues,…., no se suele usar.
028I02,37: Si porque aunque sea otra gráfica ya es más teórica quizá ¿no?
028U04,54: Si, está utilizando otra vez,….[interrupción]. Sí la I si se suele usar porque incluso por la,.., se les hace uso de la calculadora.
029I04,55: ¡Uhum!
029U05,04: Para que vean que efectivamente es una manera de comprobar también el límite ¿no?. En expresiones más difíciles, pues,…., se les toma por aproximación de valores
030I05,04: De valores
030U05,15: Es una manera además de comprobar si el límite es fiable o no. El resultado es fiable o no, es utilizando la calculadora para función como viene aquí cuadrática …
031I05,16: Sencillitas cuadráticas….
031U05,17: Y para funciones incluso trascendentes.
032I05,18: ¡Uhum!
032U05,21: Bien para ejercitarlos en el uso de la calculadora, una función tipo trascendental
033I05,22: ¡Uhum!
033U05,33: Pues se les suele aplicar al final para ver, hallar el,.., la función en un valor próximo al punto para comprobar que el límite verdaderamente coincide con la idea ....
034I05,34: Que las imágenes se van acercando a ,.., lo que hemos dicho claro
034U05,42: En la, en la ficha J..
035I05,43: ¡Uhum!
035U06,01: Pues sí, se suele usar también alguna vez, sobre todo a título informativo como formalización del concepto.
036I06,03: Si lo que hemos dicho en los bachilleratos estos.
036U06,10: Si la implicación es cierta pues entonces es cierto el,…,el hecho de que el límite sea el punto que se ha dado, que existe el límite y que sea el punto b, pero no se suele insistir demasiado sobre la, la…, el valor de esa implicación.

037I06,11: ¡Uhum!
037U06,13: Porque claro habría que desarrollar mucho en que casos la implicación falla,..
038I06,14: Claro
038U06,30: Cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente falso,… No se insiste mucho siempre por falta de tiempo, o porque vemos también más práctico utilizarlo en los ejemplos que no dedicar tiempo a la teoría.
039I06,31: Que no a la teoría.
039U06,40: Y por último en la ficha K,…,
040I06,43: Sería como la misma pero en el lenguaje verbal ¿no?
040U06,51: El límite de f(x) cuando x tiende a a, si fijado un entorno así,…., se suele usar también desde el punto de vista gráfico porque así desde el momento que se usa gráficamente pues la manera de presentar esa gráfica es con el texto que vemos.
041I06,53: Claro lo apoya con su lenguaje verbal.
041U07,06: Sí, ahora es señalarles en el gráfico el entorno sobre el eje de la Y, el entorno reducido sobre el eje de la X, se suele usar este contenido.
042I07,07: Este contenido
042U07,13: Apoyado al mismo tiempo lo que sería gráfico y textual ¿no?
043I07,14: ¡Uhum!
043U07,39: Pero lo que sí hemos perdido en, al perder tiempo de dedicación a la asignatura pues, hemos tenido que perder tiempo en la faselización de conceptos. Vamos a los conceptos del punto de vista más intuitivo y práctica, localización en la práctica. Comprensión práctica más que intuitiva, lógica y conceptual,.., ¿no? Propiamente.
044I07,43: Si lo que es realmente la definición formal del límite
044U08,00: Se está perdiendo como la de continuidad, con la continuidad se busca más la parte prácticas, intuitiva y gráfica que la conceptual, porque….. se les dice para que en cursos posteriores no les choque que esa es la definición lógica…
045I08,04: Si que realmente no tiene nada que ver con la intuitiva
045U08,34: Si eso es, que las matemáticas no han perdido precisión. Que no se crean que las matemáticas ya han perdido el rigor que tenía este campo ¿no? Las matemáticas siguen siendo rigurosamente precisas aunque sea en un concepto tan difícil para ellos como puede ser el límite y la continuidad, pero que, pero que…esa formalización esa conceptualización la verán en cursos próximos con un lenguaje lógico más preciso.

FASE 3:INDUCIDA

046I09,09: Si más formal…., y no se si has observado también Juan, que la diferencia también entre lo que podríamos llamar las intuitivas y las formales ¿no? De alguna manera, que también ocurre y es que en las intuitivas la dirección que llevamos en la aproximación ¿no? Sería de la variable independiente a la dependiente, por ejemplo si cogemos la A ¿no?, que la teníamos por aquí la tablita, o incluso esta otra que creo que, esta…., la I, ¿no? Estamos hablando que una aproximación en la variable independiente provoca una aproximación en la variable dependiente ¿no?
046U09,37: Si eso es un camino,…, la verdad es que a la hora de acercarnos a la idea de límite, de precisar si el límite es correcto o no es correcto y eso muchas veces tenemos que centrarnos en la idea reaproximación y no priorizamos si la aproximación primero se plantea desde el punto de las imágenes y consecuentemente se encuentra la aproximación de los originales o al revés
047I09,38: ¡Uhum!
047U09,43: Eso sería para una segunda precisión que a veces no,…..,
048I09,59: No da tiempo, claro es que también creo que ahí hay otra dificultad ¿no? , en que todas las intuitivas podríamos decir que llevan como que ese camino de la variable independiente a la dependiente, mientras que las formales llevan como que un camino doble ¿no? , de la dependiente a la independiente y luego confirmar….

048U10,25: Parten de la idea primaria de que con el valor del ε encontrar el δ,….,pero cuesta un poquito hasta que no se digiere bien (pequeña pausa porque entra una compañera del centro)…, y quizá haya que sacrificar un poco el rigor conceptual ante el rigor comprensivo y gráfico
049I10,45: ¡Uhum!. Pero es que muchas veces nos perdemos en que, o nos centramos en que los críos con el tema del entorno les cuesta trabajo, el hablar de valores absolutos, y yo creo que aparte de la dificultad que la definición tiene en sí misma, está esta otra ¿no? Que es como que el camino doble que llevaría el formalismo, cosa que en la intuición no les hacemos ver ¿no?
049U11,38: Si en la intuición pues claro se pierde la precisión por supuesto, y se perdería a la hora de un caso difícil de entenderlo, se perdería la precisión. Pero,……., bueno la práctica pues nos da que casi, casi hay que ir más a lo…..a groso modo diríamos que no precisar. Cuando hay un grupo bueno, que ocasionalmente ocurre, y se puede parar en un, un caso un poquito más difícil y fija que,…., eh, priorizar el concepto desde el modo…desde el punto de vista de que no para todo ε, hay algún ε para el cual ya no existe el δ, pues sí y además el alumno pues puede llegar a comprenderlo sin dificultad pero si ha habido tiempo, si le puedes dedicar un poquito más y si el curso lo permite…también.
050I11,40: Si claro que no todos
050U11,45: Sí, no todos los ambientes de clase nos permiten llegar siempre a ese segundo grado ¿no? de precisión
051I12,05: ¡Uhum!. Bueno pues Juan yo creo que podríamos dar por concluida la entrevista a no ser que quieras comentar algo más, alguna experiencia concreta que tu hayas tenido a lo mejor en el aula que recuerdes a lo mejor a lo largo de tu tiempo de docencia como un comentario concreto que haya hecho algún alumno o que..
051U12,13: Bueno yo lo que si les digo es que la calculadora es un instrumento muy muy muy potente.
052I13,14: ¡Uhum!
052U13,00: Que por ejemplo en otros, en otras épocas la comprobación de un límite no era fácil para,…., en mi caso por ejemplo cuando yo abordaba las primeras veces los límites porque esa herramienta calculadora no la teníamos, y entonces pues comprobar un límite con una función exponencial con una función transcendente tipo seno coseno logaritmo neperiano y demás, era…o incluso trigonométrica inversas arcoseno y eso era prácticamente imposible en nuestros tiempos. Sin embargo hoy con una calculadora cualquier función que esté, que se pueda encontrar en la calculadora, que se pueda calcular pues permite, eh…, la comprobación de un límite por enrevesado por difícil que parezca.
053I13,01: Claro
053U13,10: Eso es una gran ventaja. Intento siempre fomentarlo porque con eso consigues que el alumno además de que se adiestra en la calculadora vea el potencial que tiene ahí con…simplemente con las teclas ¿no? Con las funciones…
054I13,11: ¡Uhum!
054U13,21: Que no son algebraicas y que comprueba además situaciones difíciles que podrían ser pues un límite una derivada o una integral cuando llegue el caso en que ellos aborden estos problemas ¿no?

FASE 9: TÉRMINO

055I13,29: ¡Uhum! . Pues bueno Juan si no quieres hacer ningún comentario más, te lo agradezco enormemente y..
055U13,37: Las gracias a ti por tu interés y que te sea provechoso, las experiencias a veces positivas y a veces menos gratificantes también.
056I13,39: Pues venga muchísimas gracias.

Anexo A5.18 Transcripción de la entrevista al profesor V

FASE 1: PRESENTACIÓN

001I00,18: Bueno hoy es 20 de mayo de 2008, estamos en el I.E.S "S" y vamos a realizar la entrevista a un profesor del Departamento de Matemáticas
001V00,19: Ciencias.
002I00,20:De ciencias
002V00,21: Aquí no tenemos Departamento de Matemáticas, ja,ja,…., somos pobres.
003I00,22: Aquí no tenéis departamento concreto ¿no?.
003V00,22: No
004I00,49: Entonces hace unos días le envié unos documentos con los 11 fragmentos extraídos de los libros de texto y le sugerí que tras analizarlos y reflexionar un poquito sobre ellos, los agrupara en dos sobres ¿no?, en uno de ellos introdujera los fragmentos que él utiliza o ha utilizado en algún momento en el aula y en otro que introdujera los que no. Entonces ahora vamos a comentar porque ha hecho esta agrupación y vamos a ver los motivos que…le han llevado a hacerla.

FASE 2: ESPONTÁNEA

004V00,50: Por donde empiezo
005I00,54: Pues si quieres empezamos por los que no utilizas. Vamos descartando y luego ya…
005V00,55: Vale.
006I00,56: Sorpresa.
006V01,01: Ja,ja…Vale. El primero.
007I01,01: El primero.
007V01,02: Que es el de entorno.
008I01,03: Uhum, el del K ¿no?
008V01,12: El del K si exactamente, este no porque verdaderamente aunque si les doy un poquito de entorno a la gente de primero de sociales,….. Luego no lo utilizo.
009I01,13: Uhum,
009V01,16: Y entonces me parece que si no utilizo el entorno, para que voy a utilizar el límite de un modo en el que se utilizan los entornos.
010I01,18: De un modo que se utilicen los entornos.
010V01,19: No me parece demasiado apropiado.
011I01,20: Uhum
011V01,21: Entonces por eso este no lo utilizo.
012I01,23: No lo utilizas
012V01,29: Por eso. Luego tenemos uno aquí con este δ ε ,….
013I01,30: El J ¿no?
013V01,32: El J que no. Es que no utilizo δ ε,…, en ningún momento.
014I01,33: Para nada. Uhum
014V01,34: Ya veremos cuales utilizo aquí…¿no?
015I01,35: En el de ese....
015V01,40: Y entonces primero no lo piden en selectividad, no viene casi en ningún libro,……
016I01,41: Uhum
016V01,46: Alguna vez he utilizado esto con cursos de tecnológico de segundo de bachillerato. Buenos. Simplemente para que lo vean.
017I01,47: Claro
017V01,56: Que lo que les explicas de manera un poco más intuitiva, o un poco de otra,…., utilizando sucesiones y tal…Se puede hacer de esta manera, y cuando yo digo que esto es más pequeño y esto es más pequeño es la diferencia entre …
018I01,57: La diferencia entre los dos…   y darles un poquito en la faselismo.

018V02,04: Efectivamente. Para que pongan los ojos muy abiertos y se asusten un poco. Ja,ja…Pero no…, como ejemplo.
019I02,05: Pero no lo trabajas.
019V02,06: No lo trabajo no.
020I02,10: Si en un grupo muy concreto, no se te ocurre en un primero de sociales.
020V02,13: No en la vida, en un segundo tecnológico y que sea bueno.
021I02,14: Si que tampoco…
021V02,20: Exacto. Este es lo mismo pero gráficamente utilizando el δ y el ε, pues no, no lo utilizo.
022I02,24: Si otro sistema de representación, pero es lo mismo
022V02,25: Con gráficamente el H.
023I02,26: Uhum
023V02,27: Luego aquí tenemos con distancias,…., también con δ…
024I02,27: El G
024V02,28: El G tampoco.
025I02,29: Si es igual solo que con otro sistema de representación
025V02,32: Si parecido, pues nada. Y el C lo mismo con un ejemplo concreto.
026I03,34: Es el que se ve poquito.
026V02,37: De hecho es una indeterminación 0 entre 0 como estoy viendo.
027I02,38: Si
027V03,49: Y también utiliza δ y ε, y no me merece la pena.
028I02,40: Uhum. Trabajar con este tipo de…
028V02,44: Y esto ya que es mayorar y minorar como que lo dejamos.
029I02,46: El B ya, ja,ja…
029V02,47 : El B vamos…
030I02,48: Eso ya…vamos
030V02,56: Ya buf y gracias…Y yo creo que esto en la facultad…., no conozco los planes de estudio pero no creo ni que en ingeniería lo vean.
031I02,57: Yo creo que no, que hacen un cálculo numérico..
031V03,05: Muy rápido.., y no les merece la pena. Yo creo vamos pero…. yo recuerdo haberlo hecho, pero chica creo que no.
032I03,08: Que nada, que ahora mismo nada.
032V03,09: Me voy a poner yo a utilizar…
033I03,12: Y eso las identidades notables, valores absolutos…
033V03,14: Valores absolutos.
034I03,15: Si aquí hay muchos…
034V03,26: Es poco recomendable. Y sobre todo con los horarios tan apretados.
035I03,28: Si que aunque tengas grupos que a lo mejor te den pie a que puedas trabajar con ellos no te puedes, no te puedes parar.
035V03,30: Es que te ves negro para acabar el temario.
036I03,31: Ya ves.
036V03,34: Y luego los utilizados.
037I03,35: Los utilizados.
037V03,36: Pues el I que es con sucesiones.
038I03,37: Uhum
038V03,46: Que es el que utilizo además en todos los cursos y lo suelen entender bastante bien. Esa idea intuitiva de que cuanto más se acerca a más se acerca a, pero utilizando…. además te puedo enseñar exámenes que los estoy corrigiendo.
039I03,47: Que es ese ejemplo si, la x cuadrado que es..
039V03,50: Los de toda la vida. Y con el dos. Además en todos los libros lo ponen….Lo utilizan mucho.
040I03,55 : Si, si, si, pero es por eso.
040V04,00: Porque si fuera la x cuadrado con uno ya no sale uno, uno…no.
041I04,01: Si es verdad.
041V04,02: Y este es el que más suelo utilizar de estos

042I04,03: Claro la I
042V04.04: El de I. Luego estos de manera intuitiva.
043I04,05: La F.
043V04,06: Si la F.
044I04,08: Acompañando a su gráfica.
044V04,10:Además lo uso mucho para distinguir entre….porque tu que lo estas haciendo ¿con límite o con continuidad?
045I04,11: Con límite
045V04,12: Límite
046I04,13: Solamente el límite
046V04,20: Además se utiliza mucho para distinguir entre límite y continuidad. Cuando tienes el puntito vacío o el puntito lleno. Que da igual que te acerques que estés que no estés. Eso es el límite y lo otro. Este también sí, gráficamente sí.
047I04,21: El F también.
047V04,23: Luego el intuitivo
048I04,25: El E.
048V04,30: El E. Que se puede pensar el límite como el valor al que tienden las imágenes cuando los originales .., al fin y al cabo es lo que hemos visto de las tablas.
049I04,33: Si que es lo que hemos dicho con otro sistema de representación.
049V04,38: El D lo mismo que te he dicho antes. Lo utilizo mucho y además con este ejemplo en concreto.
050I04,39: Uhum
050V04,42: Para cuanto más se acerca y que da igual que el punto no esté. Y se quedan muy pillados te dicen ¿el punto no está? Y les digo es que no se ve.
051I04,43: Ja, ja…
051V04,45: Lo he puesto así para que lo veáis vosotros pero no está.
052I04,47: Para que lo veáis vosotros, pero no está.
052V04,49: Y aquí tenemos una tabla a izquierda y derecha.
053I04,50: La A. Uhum
053V04,52: Que se utiliza para sobre todo con los límites por la izquierda y derecha, es el que hacemos.
054I04,53: A derecha.Uhum
054V04,54: Siempre
055I04,55: Si que lo hace, si se utiliza.
055V04,56: Son todos más o menos de la misma escuela.
056I04,58: De la misma escuela, si además que son prácticamente los que suelen aparecer..
056V04,59: En los libros.
057I05,02: En los libros de texto.
057V05,07: Y yo sinceramente también los prefiero para empezar a…..a explicar este tipo de cosas
058I05,09: Uhum
058V05,10: Si nos metiéramos en otro tipo de cosas δ, perdidos.
059I05,13: Perdidos. Si excepto eso algún grupo concreto que te de pie.
059V05,16: Y como curiosidad.
060I05,19: Si que tampoco.
060V05,24: Porque no se lo van a pedir en selectividad, no les hace falta. Que de hecho ni siquiera la definición se la piden.
061I05,25: Uhum
061V05,27: No les piden una aplicación directa de un límite más complicado o de L'Hopital.
062I05,45: Ya nada nada. Y entonces aparte de eso de la complicación de que no te lo pongan en selectividad …, cuando tu has trabajado alguna vez con ese tipo de definiciones en el aula ¿te has encontrado alguna definición con …o sea alguna dificultad concreta con los alumnos en algún aspecto concreto…
062V05,46: Si para empezar la manera de escribir.
063I05,47: La manera de escribir

063V05,48: El para todo el existe el implica..eso ya…
064I05,49: El valor absoluto…
064V05,59: Es otro idioma si..Claro y luego cuando les dices que este valor absoluto significa que esto se hace muy pequeño y que esto se hace muy pequeño, pues entienden…no entienden que eso signifique eso, pero te lo aceptan.
065I06,00: Te lo creen ¿no?
065V06,03: Te lo aceptan a vale lo más chico.. y eso es lo que pone ahí
066I06,05: Uhum
066V06,14: Pero realmente no creo que nadie,.., yo tampoco me he esforzado mucho sinceramente en que ellos entiendan realmente lo que significa eso.
067I06,16: Si que es más el formalismo
067V06,19: Que es más el formalismo, y que vean que todo lo que hacemos, se puede hacer de otra manera un poquito más complicada pero más formal
068I06,20: Más matemática
068V06,21: Eso es,…, no más matemática todo es matemática, más formal.

FASE 3: INDUCIDA

069I06,45: Más formal. También otra cosita que no sé si te habrá pasado con ellos en el aula es que en todas las que hemos dicho que se utiliza el acercamiento que se produce va como que de la variable independiente a la dependiente, ¿no? Lo que hemos comentado al acercarse la x a a la y se acerca a tal, y sin embargo en los otros que no utilizas ..
069V06,46: Correcto
070I06,48: El acercamiento es al revés ¿no?
070V06,50: Se acercan las..
071I06,53: Esta produce un acercamiento y luego debes volver ¿no?
071V06,58: Debes buscar lo otro es cierto. Yo creo que les resulta más sencillo que sea la x la que primero se mueva y luego la f a ver lo que le pasa
072I07,01: Ver lo que le pasa
072V07,04: Y además luego tienen muchas más que ver con lo que hacemos, al fin y al cabo lo que les dices es sustituye
073I07,05: Claro
073V07,07: Entonces es la x la que
074I07,10: La que sustituye ,…, en el cálculo de límite.
074V07,13: Y sale… por eso lo veo más lógico la verdad el hacerlo así.
075I07,14: Que no has encontrado así no te has dado cuenta…
075V07,15: No no
076I07,16: En tu experiencia concreta no
076V07,25: en lo poquito que lo he utilizado nadie tampoco se ha dado cuenta de que este es realmente a este aunque yo creo que cuando lo explico digo cuando este sale pequeño este sale pequeño es al revés ,ja,ja..
077I07,26: Es al revés. Entonces..
077V07,30: La explicación que yo les doy pues se la intento adecuar a esta definición y efectivamente me voy a lo último primero y luego me voy a este.
078I07,35: Claro es que aparte de toda la complicación del formalismo del ε…
078V07,39: Encima le das la vuelta
079I07,40: Encima le das la vuelta al acercamiento ¿no?
079V07,46: Pero yo se lo explico,.., no aunque esté al final esto es lo primero que vimos y esto es lo siguiente, siempre lo hemos hecho así
080I07,48: Uhum, si aunque esa sea la definición formal siempre intentas ..
080V07,54: Pero esta hará quizá tres años que no la escribo yo en la pizarra. Claro cuando empiezas si que les pones más cosas pero luego te das cuenta de que ..
081I07,56: Que no te siguen..
081V07,59: Que es mejor irse a lo concreto y a lo práctico.

082I08,04: Si a la parte intuitiva por llamarla de alguna manera quede fuerte ¿no? y luego trabajar el cálculo.
082V08,12: Yo siempre les digo eso, cuando están sustituyendo al final siempre tenéis que acordaros de hay alguna tabla en algún sitio que…
083I08,15: Si como la A esa de la que hemos hablado en el ejemplo
083V08,18: Ya cuando han dado filosofía les digo en el mundo de las ideas hay una tabla,…, se ríen mucho pero tampoco lo entienden.
084I08,19: Tampoco lo entienden
084V08,20: Ja,ja
085I08,25: Bueno si quieres comentar algo más y sino…
085V08,36: No no no no realmente no, me ha hecho añorar cosas esto del δ ε, pero bueno….., ya con la experiencia de unos pocos de años me doy cuenta de que hay cosas que se podrían pero quizá no se deben.
086I08,37: Uhum
086V08,42: Yo lo del δ ε por lo menos tal y como tenemos ahora mismo el sistema, la exigencias..
087I08,45: El tiempo..
087V08,47: El tiempo. Yo lo destierro.
088I08,55: Si es que además tiene mucha complicación ¿no?. No es solo la parte matemática.., el formalismo todo lo que arrastra.
088V09,08: No merece la pena ..Porque si tu quieres hacer esto ya tienes que hacerlo con las derivadas, tienes que hacerlo con las integrales y lo tienes que hacer con todo. Y ¿ merece la pena meter una laguna ahí en la faselismo para que luego no lo van más?.
089I09,09: Uhum
089V09,13: Ya te he dicho lo he hecho en algunos cursos que han sido buenos que he visto interesados para que les suene y que digan úhi esto como será.
090I09,19: Pero poco más a título informativo, para que cuando lleguen a la facultas digan eso lo escuché yo alguna vez ¿no? en el instituto.
090V09,20: Te suena.

FASE 4: TÉRMINO

091I09,22: Pues bueno si no hay nada más que comentar..
091V09,23: Lo que tu me digas..
092I09,25: Te lo agradezco y..
092V09,28: ¿Esto lo oye Moisés?
093I09,30: Esto no sé si lo oirá Moisés, pero vamos.
093V09,32: Pues le das recuerdos. Fui alumno suyo en el año 93
094I09,34: Alumno suyo, ja,ja..Pues bueno Enrique gracias
094V09,3: Venga..

Anexo A5.19 Transcripción de la entrevista al profesor W

FASE 1: PRESENTACIÓN

001I00,36: Bueno hoy es 29 de Mayo de 2008 estamos en el IES “C” y vamos a hacer la entrevista a una compañera del Departamento de Matemáticas. Entonces, yo le entregué los fragmentos sacados de libros de texto el otro día..ella ha reflexionado sobre ellos y le pedí que los introdujera en dos sobres en uno los que utilizaba en el aula y en el otro los que no, y ahora lo que vamos a comentar es sencillamente porque ella ha hecho esa agrupación de los fragmentos. Entonces le cedo la palabra a la compañera y que me vaya comentando.

FASE 2: ESPONTÁNEA

001W00,37: Voy a hacer primero los que no ¿vale?
002I00,38:Vale primero por los que no. Estupendo.
002W00,43: Que no es que los encuentre menos válidos sino que es que en al aula hay todo tipo de alumnos..
003I00,44: Uhum
003W00,49: Algunos a los que se les da bien las matemáticas a otros a los que no, algunos que trabajan otros que no y…
004I00,53: Claro es que en función ..
004W00,55: Es que estas fichas las encuentro como más abstractas para ellos
005I00,58: Más abstractas ¿verdad?
005W01,00: En todas las que aparezca algo de ε o δ….no lo veo
006I01,03: Serían la K ¿no?
006W01,04: La K no
007I01,04: La J tampoco
007W01,05: Tampoco
008I01,09: Ni la H ...ni la G ni la C..
008W01,10: Ni la B
009I01,17: Ni la B ¿verdad?. Perfecto..bueno entonces serían...tu comentas todas en las que aparezca algo de ε y δ ¿verdad?
009W01,19: Exactamente
010I01,20: Uhum
010W01,26: Todo lo que sea un poco más abstracto…de hecho yo…particularmente…., la B la primera vez que vi esto de la B fue en la en la facultad….
011I01,27: Uhum…en la facultad ¿no?
011W01,28: Con lo cual no se lo voy a poner a ellos.
012I01,33: Si que le encuentras que a lo mejor hay dificultad para que ellos puedan…
012W01,34: Si razonar eso
013I01,37: Uhum…comprenderlo es lo que sería la parte de ….
013W01,39: Exactamente….porque es un poco como más abstracto….
014I01,40: Por la abstracción que tienen ¿verdad?
014W01,41: Si por la abstracción.
015I01,44: ¿y...por el formalismo también,….el valor absoluto y este tipo de historias también…?
015W01,49:Pues....el valor absoluto no tanto sino por el formalismo que tiene…simplemente.
016I01,50: Uhum
016W01,56: Y porque a lo mejor eso de tomar un ε aquí.. y luego encontrar el δ …..
017I02,04: Si el empezar en lo que es la variable dependiente…., si el empezar en lo que es la y …¿no? y que la y te lleve a la x y luego que la x te vuelva a llevar a la y ¿no? ese procedimiento quizá les….
017W02,11: Si...exactamente…., es más de hecho yo lo único que he dado hasta el momento han sido las matemáticas en Primero de Bachillerato de Humanidades.

018I02,12: Uhum
018W02,14: Es decir Matemáticas Aplicadas a las CCSS
019I02,16: Claro
019W02,17: Que son alumnos que….normalmente las matemáticas mucho no les gustan
020I02,18: No les gusta...claro partes de esa…de esa premisa..
020W02,27: Y tampoco trabajan mucho con lo cual …con que tengan mas o menos la idea gráfica del límite y sepan calcularlos…con eso me basta.
021I02,29: Te vas conformando con eso claro
021W02,31: Entonces por eso..
022I02,32: Uhum en el otro sobre ¿no?
022W02,37: Las que he utilizado...me parecen válidas son la I, es válida..
023I02,39: La I uhum
023W02,43: Supongo que así es como…. se comienza por primera vez…a calcular un límite
024I02,47: Claro...si con su tablita, bueno sin ser tablita pero vamos una serie de valores para la x que..
024W02,48: Si..que te den automáticamente los de y.
025I02,49: La imagen
025W02,50 : Sustituyendo en la función.
026I02,51: Aha
026W02,55: La F por verlo un poco gráficamente
027I03,47: Claro acompañando..
027W03,00: Exactamente. La D que también….
028I03,03: Sí sería otra gráfica con un ejemplo ¿no?, la otra sería un poco más teórica y esta sería más un ejemplo concreto
028W03,05: Se vería gráficamente, con un ejemplo en concreto. Y la A que básicamente es igual que la I.
029I03,10: Que la I claro, solamente con la estructura de la tablita.
029W03,13: Luego la E.
030I03,14: Uhum
030W03,15: Que es prácticamente como un gráfica abstracta pero hablando…con palabras
031I03,20: En el lenguaje verbal diciéndolo…
031W03,22: Es que creo yo que para introducir a los alumnos en los límites estas son las más adecuadas
032I03,25: Las más adecuadas
032W03,30: Esto ya es para cuando saben calcular el límite, estar un poco más en el tema.

FASE 3: INDUCIDA

033I03,35: Si profundizarles un poco más decirles cuál es la definición además lo que tú has comentado ¿no?.
033W03,36: Exactamente
034I03,45: En estas como que se empieza por la variable independiente, la independiente te lleva a la dependiente, perdón al revés...empiezas por la y la y te lleva a la x y luego compruebas que verdaderamente funciona ¿no?.
034W03,47: Exactamente
035I03,50: Mientras que en estas es como que la x es la que te manda a la y…
035W03,53: Exactamente es como siempre se hace normalmente…
036I03,54: Claro, claro
036W03,56: Tu en una función comienzas dándole valores a la x y la x te da la y..
037I03,57: Uhum
037W04,03: Entonces si les metemos esto estamos diciendo como que es lo contrario. Entonces ya los liamos.
038I04,04: Uhum Bueno y no te ha dado tiempo de ver con ningún alumno en concreto matices de dificultad ….claro
038W04,09: No

039I04,10: Simplemente has tenido un primero de sociales no has comprobarlo…
039W04,13: Exactamente
040I04,14: Si pero que le ves la idea en eso ¿no?, que quizá la dificultad esté mas ahí que en lo que es los valores absolutos y todo el formalismo.
040W04,20: Exactamente, es más yo cuando fui alumna yo recuerdo que esta definición nos la dio el profesor…
041I04,27: La G ¿no?
041W04,28: No la G no... la típica del ε y δ.
042I04,30: La J
042W04,31: Ésta...la dio el profesor, y yo hasta que no llegué a la universidad no la comprendí.
043I04,42: Uhum
043W04,43: Entonces yo trato de dar clase basándome en mis experiencias.
044I04,45: Claro
044W04,50: Y digo si yo eso no lo comprendía si yo no sabía ni para lo que servía. Y además dio la definición y luego no se practicó nada de..la B
045I04,55: Del tipo B. Claro se te quedó ahí… abstracto.
045W04,55: Abstracto
046I04,56: Uhum
046W04,58: Entonces para dar una cosa que al final no comprenden..., pues prefiero no darlo.
047I05,03: Y la falta de tiempo que también hay…., el alumnado….que tampoco.
047W05,11: Falta de tiempo, y eso que cuando tu estas por ejemplo en la carrera de matemáticas...todos tienen interés por las matemáticas…pero aquí no.
048I05,20: Si y además lo que has dicho, tú que eras una persona interesada por lo que eran las matemáticas, te las explicaron en segundo de bachiller y te quedaste como el que nada, cuanto y más una criatura que encima las matemáticas no..
048W05,23: No le gustan o no se le dan bien
049I05,24: No le gustan ¿no?, uhum
049W05,26: Porque yo esto lo entendí cuando llegué a la facultad
050I05,29: Cuando llegaste a la facultad claro, el tipo de la J , y el estar practicándolas con la B.
050W05,30: Exactamente.
051I05,32: O sea que realmente en clase lo que trabajas es … las que hemos dicho
051W05,34: La I la A la F la D y la E
052I05,36: La F y la D cada una en su variante..pero
052W05,37: Si
053I05,38: Esas sería con las que trabajas
053W05,39: La I y la A para introducirlo
054I05,40: Para introducirlas
054W05,43: Y ya la F la D y la E ,pues sería el siguiente paso
055I05,48: Para completarlas un poquito que lo vean en diferentes sistemas de representación
055W05,49: Exactamente

FASE 4: TÉRMINO

056I05,51: Pues si no quieres comentar nada más.
056W05,52: No nada más
057I05,54: Pues te lo agradezco enormemente y...
057W05,55: Gracias
058I05,56: Venga gracias

Anexo A5.19 Transcripción de la entrevista al profesor X

FASE 1: PRESENTACIÓN

001I00,48: Bueno hoy es 29 de Mayo de 2008, estamos en el I.E.S "C" y vamos a realizar la entrevista a una compañera del Departamento de Matemáticas. Estuve aquí hace una semana y le entregué los fragmentos extraídos de libros de texto, le pedí que les echara un vistacito, reflexionara sobre ellos y que los introdujera en dos sobres, que también le entregué, en uno de ellos le dije que introdujera los fragmentos que utiliza o ha utilizado alguna vez en el aula y en el otro los que no, y hoy lo que vamos es a comentar es esa agrupación que ha hecho ella y los motivos que la han llevado a hacerla. Le cedo la palabra a la compañera.

FASE 2: ESPONTÁNEA

001X00,49: Yo he rellenado uno mucho y otro poco.
002I00,50: Mucho y poco, ja,ja,…nada.
002X00,52: Bueno hablamos primero del que no,..
003I00,55: Del que no, de acuerdo.
003X00,58: Casi no lo he utilizado, similar sí, pero..
004I00,59: Uhum..
004X01,06: Con un nivel de ε y δ sin especificar no.
005I01,07: Sin especificar, sería el B ¿verdad?
005X01,12: Si. Yo me he traído un documento del….
006I01,13: Ja, ja….
006X01,18: Hace 15 años, pero válido y que es lo que más se parece a lo que sería..
007I01,19: Claro
007X01,25: Porque el concepto que se daba antiguamente en BUP era exactamente el de límite de sucesión..
008I01,27: De sucesión , uhum..
008X01,29: Y luego eso ya desapareció.
009I01,30:Si
009X01,46 : Así que en el concepto de límite de sucesiones si que hacíamos con los alumnos de 2 de BUP, con problemas de ε y δ. Lo que ocurre es que para que no se les dificultara mucho establecíamos un valor para ε y δ.
010I01,49: Se lo dabais vosotros, aja….Estupendo
010X01,51: Decíamos los entornos, la amplitud y entonces ellos hacían unas cosas similares a esto pero claro más facilitas..
011I01,53: Más facilitas claros, dándoles el δ correspondiente al ε que le…dabais.
011X01,55: Si
012I02,00: Hombre claro estamos hablando de un segundo de BUP,.., que sería el 4º de la ESO de ahora.
012X02,05: Lo que ocurre es que…
013I02,10: Si pero por lo menos que trabajaran un poquito con la definición.
013X02,14: Lo trabajaban si, … Nunca se enteraron
014I02,16: Uhum..
014X02,20: Quiero decir nosotros lo hacíamos porque venía en los temarios, parecía que había que darlo, pero claro ellos no comprendían bien el concepto de límite, con el ε y el δ no lo comprendían.
015I02,21: Uhum..
015X02,23: Luego cuando ya lo interpretábamos en función, ya en función si lo veían
016I02,25: Si lo veían más claro ¿verdad?
016X02,27: Si en función sí que lo veían ellos, pero claro..
017I02,29: Y en límite de una función en un punto o en el límite en el infinito..
017X02,30: No en el límite en un punto

018I02,32: En un punto el que estamos….
018X02,34: En un punto en un punto.
019I02,35: Estupendo
019X02,36:En el límite en un punto lo comprendían.
020I02,39: Si porque ven a lo mejor el acercamiento en las dos variables ¿no?
020X02,41: Ellos ven el dibujo e interpretaban luego mucho mejor
021I02,42:Uhum..
021X02,49: Ya ellos entendían lo que habían hecho, claro ese concepto les llevaba dos años comprenderlo. Porque en segundo hacían límite de sucesiones y un poquito de funciones pero ya en tercero que daban el concepto..
022I02,50: Más fuerte claro
022X03,09: Pues ahí ya cuando se les volvía a recordar lo que era el concepto de límite de una función en un punto, ya ellos habían comprendido perfectamente el porque les hablo de entornos, porque de sucesiones aproximándose a un valor de x y sus imágenes en y..
023I03,11: En y claro
023X03,22: Y ya lo comprendían muy bien. Aquí ya adquirían un concepto muy claro del límite de una función en un punto. Hoy en día …la cosa ha cambiado mucho
024I03,26: Ha cambiado mucho ¿verdad?
024X03,29: Sucesiones no lo ven, no entienden lo que es una sucesión.
025I03,33: Se limitan a la progresión aritmética y geométrica, sus fórmulas y ya está.
025X03,43:Y sucesiones con términos generales prácticamente no se tocan, y el concepto de límite se les da directamente con función.
026I03,44:Con función.
026X03,46: Con función en un punto
027I03,47:Uhum
027X03,49: Y no se les pone este tipo de problemas.
028I03,50:Tu te refieres a este tipo de ejercicios ¿no?..
028X03,52: Si
029I03,56: Pues si no te importa después hago una fotocopia para tenerla.
029X04,05: Porque este tipo de problemas ya es demasiado abstracto, en bachiller, en COU si se les podría haber dado, pero no podíamos parar en hacer este tipo de cosas
030I04,08: Sobre todo con el tema de la selectividad y demás
030X04,14: Si se podría haber llegado a este nivel pero no podíamos porque era como …, pasábamos sobre los límites con una velocidad…
031I04,20: Lo vieron el año anterior recordarlo un poquito…., un par de clases como mucho y..
031X04,24: Las indeterminaciones más importantes se hacían un par de ejemplillos y ..
032I04,25: Uhum
032X04,27: Si se trabajaba mejor la continuidad claro, la derivación..
033I04,28: Uhum. Estupendo
033X04,32: Pero salían más formados porque tenían una capacidad de abstracción bastante mayor de la que tienen ahora.
034I04,33: Mayor que la que hay ahora ¿verdad?
034X04,37: Actualmente todo se da a modo de receta.
035I04,40: Uhum
035X04,45: Tú hacías muchos problemas muy teóricos, y en cambio ahora ya no se hace nada de eso.
036I04,46: Uhum
036X04,48: Van formados de manera muy distinta a la universidad.
037I04,50: Ja, ja,
037X04,51: Es muy diferente lo que les está llegando a la universidad.
038I04,57: Luego en comparación no tiene nada que ver con lo que había antes. Entonces únicamente la B es la que..
038X05,05: Si esta es la que he descartado yo, porque es demasiado el nivel que esta puesto en la cartulina. Y si quieres comentamos ahora…..
039I05,07: Los que si has utilizado.

039X05,09: Los he ordenado un poquillo….
040I05,10: Si ja,ja…
040X05,14: Bueno vamos a ver, yo he ordenado al principio…..
041I05,16: La K la primera ¿no?..
041X05,22: Si he ordenado yo en función de lo que he visto a lo largo de mi…..,mi ..
042I05,24: Experiencia profesional.
042X05,28: Yo siempre he empezado, a veces hablo en plural porque el departamento es el que …
043I05,31: Siempre hace lo mismo…
043X05,33: Hace lo mismo, entonces siempre damos la definición, siempre, siempre utilizábamos
044I05,35: La J….después ¿no?
044X05,37: Si usábamos esta nomenclatura, siempre la usábamos. Siempre utilizábamos estos ejemplos,…
045I05,40: La tablita la de la A, la tablita de doble entrada a izquierda y derecha ¿no?
045X05,44: Si eso es…., a izquierda y derecha siempre. De hecho usábamos la función x cuadrada en el límite en el punto dos..
046I06,01: En el punto dos, por eso está porque es la que más aparecía en los libros de texto. Entonces por eso es el ejemplo que se ha…., porque esa sería la I ¿verdad?
046X06,02: Si, si, si…
047I06,06: Esa es parecida a la A, esta utiliza un lenguaje un poco más verbal y la otra la tablita..
047X06,10: Un poco diferente sí, la tabla o un poco más a mano. Sí. A lo mejor esta pues la usamos más cuando dábamos clase de recuperación….
048I06,16: De recuperación,…, la I ¿no?, claro..
048X06,17: Y ya hablamos un poco más,…, más..
049I06,19: Si en el lenguaje…
049X06,20: Coloquial
050I06,21: Coloquial, ja, ja…Después la G ¿no?
050X06,36: Si, va en grado de dificultad de mayor a menor. Cada vez utilizamos un lenguaje más claro, y vamos rebajando el nivel…..hasta que los chicos pudiesen comprender
051I06,37: Ja, ja….pudiesen comprenderlo claro.
051X06,43: También esto a este nivel lo comprendían. La definición
052I06,44: Ajá..
052X06,50: De hecho la preguntábamos en clase como pregunta de examen y funcionaba
053I06,52: Y funcionaba. La E ¿no?
053X06,57: Si y en esto, aquí es más o menos lo que ahora tenemos, ahora este es el punto de partida
054I06,59: Esto sería como el salto al ahora ja, ja…
054X07,03: Hasta aquí teníamos, la verdad es que ellos comprendían y aprendían esto.
055I07,04: Uhum
055X07,06: A partir de ahora no, ahora ya empezamos aquí.
056I07,07: En la K
056X07,18: Aquí empezamos el concepto de límite, y esto es lo que yo aplico ya en un punto. Y exactamente es como viene en esta cartulina, yo la defino así.
057I07,19: Intuitivamente se puede pensar en el límite….
057X07,20: Así la defino yo.
058I07,21: Uhum..
058X07,22: Y no puedo profundizar más que eso.
059I07,23: Más que eso..
059X07,24: Lo del ε y el δ nada, de entornos nada.
060I07,25: Nada.
060X07,28: Y estos son los problemas, los ejemplos típicos que se usan ahora….
061I07,31: Ahora que se acompañan, si la D ¿no?
061X07,34: Sí, una parábola facilita, la x cuadrada o la x cuadrada menos uno.

062I07,36: Por ejemplo, que es del estilo ¿no?
062X07,38: Que se dibuja y con un punto en concreto se va haciendo el límite…..
063I07,45: Si vas viendo como al acercarse los valores al 2 las imágenes se te están acercando al 3, vamos, un poco….
063X07,48: Que esto se da actualmente ya en primero de bachillerato.
064I07,49: Uhum…
064X07,52: Esta también…
065I07,53: La H ¿no?
065X07,58: Este concepto también en los primeros de bachillerato, cuando damos ya la interpretación geométrica del punto, pues básicamente es este dibujo
066I07,59: Uhum
066X08,02: Se dibuja..
067I08,05: Si y ya se pone el intervalo con le, con el δ el ε….
067X08,15: Y también aquí he notado diferencias porque este tipo de nomenclatura, que hasta el año pasado yo lo he utilizado sin ningún problema, yo creo que aquí…., en
068I08,16: En Andalucía.
068X08,20: En Andalucía….., los niños tienen más problemas para….., para ellos…. seguir
069I08,24: La gráfica ¿no?, con la interpretación gráfica.
069X08,27: Una gráfica general, no tanto una particular..
070I08,30: Una específica como la D ¿no?, que sería una parábola
070X08,36: Pero tienen problemas cuando se les habla de una gráfica en general, como que somos reticentes a que se les dé algo de teoría.
071I08,37: Uhum
071X08,39: No quieren, no comprenden. O no se esfuerzan.
072I08,42: O se cierran, claro
072X08,45: Si, y bueno esta..
073I08,46:La F.
073X08,48: Esta también se la podemos dar, a un grupo de 2 de bachillerato se les puede dar también esta gráfica.
074I08,49: Uhum
074X08,53: Sin ningún problema. Podrían comprenderla …….Y esta
075I08,55: La C
075X08,57: Y esta con calzador..
076I09,03: Ja,Ja….Si ya claro con el ejemplo concreto pues ya por ahí ¿no?
076X09,18: Si con calzador porque ellos ya claro en el momento en que yo les doy este tipo de función, saben dibujarla con sus asíntotas, y en varios trozos.., y ya claro hablar de simplificarla y convertirla en otra ya…., entraría con calzador dependiendo de que el grupo sea mejorcito o no.
077I09,19: O no claro, Uhum..
077X09,20: Y de lo que hayan visto en los cursos anteriores
078I09,22: En los cursos anteriores, claro.
078I09,38: Es muy importante porque aquí yo notaba mucha diferencia,….., incluso los ni….los cursos anteriores no están completos. Yo he tenido alumnos y grupos en 2 de bachillerato tecnológicos que tenían un nivel de secundaria ...
079I09,40: Unum ..., y además no estaba uniforme el nivel ¿no?. Habría gente que si, gente que no..
079X09,44: No, no….y habían dado muy poquito de los contenidos de primero.
080I09,45:Uhum
080X09,52 : Entonces claro no es lo mismo encontrarte alumnos de 2 de bachillerato que ya han completado todos los contenidos de primero
081I09,55: De límite, claro que no es empezar con el…
081X09,58 : De límite, han hecho bien la continuidad han derivado e incluso han tocado un poco la integración
082I09,59: La integral…
082X10,02:A alumnos que no recuerdan lo que era un límite.

083I10,03: Para nada
083X10,04: Y de ahí en adelante…
084I10,06: Si nada…, la derivada más simple y lo demás para nada
084X10,10: En un 2 de bachillerato es muy complicado retomar con las prisas de selectividad…
085I10,13: Si de selectividad…
085X10,20: Preparar a los alumnos para que mediocremente entren en la universidad, en condiciones,……, para defenderse un poquito
086I10,25: Ja, ja, claro para lo que les van a pedir en lo que es el examen, ya no te puedes para quizá en este tipo de cosas.
086X10,35: Para que luego en la realidad no se llevan un varapalo tan grande, que se van a llevar. Es muy complicado nivelarlos cuando en primero tienen tantas deficiencias, es complicadísimo.
087I10,42: Es complicado. No eso te quiero preguntar, la A que la has puesto….., no la A no mentira, no si esa la A.
087X10,44: A la A. Buscamos la A.
088I10,50: ¿Esta la trabajas ahora con los alumnos de ahora?
088X10,59: No la verdad. Porque la A está sujeta a que básicamente trabajes sucesiones.
089I11,00: Claro.
089X11,01: Entornos con sucesiones.
090I11,02: Uhum..
090X11,18: Y es que ahora mismo no se les puede pedir…, yo sé que ahora para la nueva, el primero de bachi.., creo que es primero que van a …, o en cuarto,…, se les va a introducir otra vez sucesiones. Pero no creo que se les vea el concepto de límite
091I11,19: Que se les pueda…
091X11,22: Uhum, ojalá
092I11,28: Si claro ni la A entonces ni la I que serían de lo que hemos hablado, de los….
092X11,30: Ahora mismo yo, ya te digo que yo ahora mismo la señal la pongo aquí en el ..
093I11,32: En el ¿F,E?, ja, ja..
093X11,34: Que esto es lo que yo he dado siempre, y que esto es lo que puedo dar ahora.

Fase 3: INDUCIDA

094I12,03: Lo que puedes dar ahora. Y otra cosa te iba a decir que esta agrupación que has hecho de lo que podrías dar ahora y lo que has podido dar siempre, hemos hablado de la abstracción que tiene ¿no? El simbolismo, el entorno, el valor absoluto y además de eso también has observado que como por ejemplo en estas últimas que me has puesto es como si el acercamiento fuese de la variable independiente a la dependiente, o sea siempre vamos de la x a la y ¿no?, cuando x se acerca a fulanito pues entonces y se acerca
094X12,06: Si, si….no aplicamos, no aplicamos otras cosas,…
095I12,10: Claro, sin embargo en las otras es un poco como que al revés…
095X12,14: Más general.
096I12,17:La y te marca la x, y luego la x te vuelve a llevar a la y…Entonces si ahí has encontrado algo, algo concreto…¿no?, porque el ejemplo que me has sacado que me ha parecido estupendo,…, realmente es eso ¿no? lo que se está viendo, como el ε está marcando el δ…,aunque se lo dierais vosotros para…..
096X12,19: Si
097I12,32: Para, para facilitarlo, pero si ahí notabais dificultad o no notabais dificultad en ninguna, o sea aunque se lo dierais vosotros ellos veían que el proceso era como a la inversa ¿no?
097X12,33: Si
098I12,38: O sea que…
098X12,45: Vamos…..estaban capacitados y lo comprendían,…., si
099I12,51: Uhum,…, aunque las intuitivas llevaran un camino que la formal llevara como que el contrario ¿no?

099X13,01: El concepto de límite abstracto a ellos siempre les ha costado mucho trabajo, yo a veces he pensado que quizá el nivel aquel que daban en segundo de BUP.... podíamos habérsela dado en tercero y la hubieran captado mucho mejor. Las cosas como son.
100I13,03: Uhum, si mucho mejor lo que hemos hablado.
100X13,10: Pero finalmente como les insistíamos muchísimo, yo recuerdo haber insistido mucho en este tipo de problemas y haberlo puesto en todos los exámenes….
101I13,11: Uhum
101X13,13: En todos.
102I13,19: O sea que no solo te metías en el cálculo del 0 partido 0 e infinito partido infinito, sino que te metías fuerte en estos…..en estos temas ¿no?
102X13,22: No era obligatorio, ellos sabían que hasta en el examen final les caía, les caía un problema de ε, sí.
103I13,26: Les caía uno,….., si aunque tu les dieras realmente para el ε su δ pero….., no importa
103X13,32: Si aunque yo les diera uno fijo, ellos sabían que era la definición de ε, pero que yo les ponía un valor para que ellos no trabajaran con las letras.
104I13,34: Uhum ,…,concreto para….. la abstracción,….., claro.
104X13,42: Pero yo creo que…., es verdad que es diferente, marca la y la x, pero sí lo…. al final lo cogían bien …..
105I13,43: Uhum.
105X13,47: Sí lo comprendían, nos costaba mucho. Los alumnos “buenos” lo captaban, los menos buenos a duras penas….
106I13,54: Uhum,…, si a lo mejor lo aprendían un poco en plan algoritmo,…, pero lo acababan haciendo.
106X14,00: Lo aprendían, sí, si. Además ten en cuenta que antes en segundo de BUP, era obligatorio todos,…., no como ahora que cuarto de la ESO tiene dos optati…..dos opciones.
107I14,05: Sí la matemática fácil, como dicen ellos ¿no?, y la…. difícil.
107X14,09: Entonces eran todos los alumnos, allí teníamos alumnos con muchas dificultades.
108I14,13: Gente que a lo mejor acababan en el bachillerato de letras puras y sin embargo tenían las mismas matemáticas
108X14,17: Iban a letras puras, tenían que hacer las matemáticas obligatoriamente y las aprendían,.., y se lo aprendían ..…
109I14,21:Si al igual que nosotros lo hacíamos también con el latín ¿no?, era un poco más fuerte…
109X14,23 : Eso es hacíamos el latín en segundo de manera obligatoria…
110I14,33: Pues,…., me pareció muy interesante vamos todo lo que me has contado, si me quieres comentar algo más, sino,……,
110X14,35:Que más te puedo contar aparte de la diferencia de niveles tan grande, ja ,ja…..
111I14,38: Ja, ja….si que ahora sería impensable hacer este tipo de …
111X14,44: Impensable, impensable. Yo te digo que tendría problemas incluso en los bachilleratos porque no están acostumbrados a que se les dé la teoría.
112I14,45: Uhum…
112X15,03: Y como….., bueno por supuesto de eso nosotros tenemos la culpa porque no les damos teoría, no les damos nada de teoría. Y yo repaso mis apuntes de BUP y de COU y era una teoría muy estricta y muchos problemas muy teóricos,…, y utilizaban el lenguaje matemático y la simbología, todos…
113I15,09: Si por eso no les costaba tanto lo que es el valor absoluto menor que el δ el ε ¿no?...
113X15,10: Eso
114I15,11: Si que no había quizá tanto…
114X15,17: Y ahora mismo no. Ahora mismo imposible, imposible meterle… cuando utilizas en ángulos un α ya no…., ya se utilizan las mayúsculas.
115I15,18: Uhum
115X15,22: Entonces ya es siempre ir en contra de que les añadas cualquier expresión matemática
116I15,23: Uhum

116X15,27: Y de hecho este año tenemos directrices de que…..al contrario les obliguemos a utilizar el lenguaje un poco….
117I15,29: Claro empezar…..
117X15,34: Y para todo, el tal que, el existe el no existe…., hay que utilizarlo. Yo sigo utilizándolo constantemente.
118I15,35: Uhum
118X15,42: Las llaves para conjuntos, y los niños siempre en contra tuya que no quieren esa expresión, que la quieren gramatical.
119I15,43: Claro
119X15,44: Una lucha.
120I15,45: Ja, ja..
120X15,49: El alumno va a lo fácil, a lo cómodo y a lo….
121I15,55:Si hoy en día pensar lo de esto, en volver de la variable y a la x eso ya sería impensable ¿no?, aparte de todo….. el formalismo y todo.
121X16,06: Sería muy complicado, ¿eh?.Y me cuesta…, tengo que repetir cien mil veces que las gráficas se leen de derecha a izquierda y unos siguen leyéndola…. de izquierda a derecha....
122I16,08: O de arriba a abajo
122X16,17: O se lían, crecen, decrecen. Lo lían todo porque….. algo tan… tonto, que yo no creo haber hecho hincapié en que las gráficas se leen de izquierda a derecha….
123I16,18: Sí, si obvio ¿no?.

123X16,20: Era obvio que se leen así…, en una dirección
124I16,22:Siempre se avanza hacia la derecha ¿no?. Claro
124X16,26: Y aquí hay gente que sí que lo pone …… y ven que es así
125I16,40: Si y en las aproximaciones del límite en un lado y otro, pues ya….., es tremendo, o sea son muchos…., muchos detallitos que se unen y que lo complican.
125X16,44 : De todas formas ahora mismo…., los contenidos yo no sé como habría que hacerlo.
126I16,48: Si,.., empezar muy pronto.
126X16,54: Yo de todas formas como vengo de otra comunidad,…., los problemas que hay en Andalucía no los hay allí….
127I16,55: Uhum…
127X17,00: Ocasionados por el tipo de organización de trabajo. En Madrid es impensable que los alumnos se desplacen de unos pueblos a otros cuando cambian de primer ciclo de la ESO a segundo.
128I17,10: A segundo
128X17,15: O de segundo ciclo a bachiller. Allí se intenta que todos los centros completan totalmente….., su ciclo….
129I17,18: Sí, su ciclo hasta el final.
129X17,22: Eso quiere decir que además el cien por cien de las plantillas de los institutos son fijos….,
130I17,23: Uhum..
130X17,29: Eso significa que todos los alumnos de los centros no solo son alumnos durante todos los estudios sino que los profesores son los mismos.
131I17,30: Son los mismos.
131X17,35: Todos los niños están nivelados, todos los departamentos funcionan en la fase homogénea.
132I17,36: Uhum
132X17,57: Sus integrantes llevan mucho tiempo trabajando en conjunto, todo va muy muy muy estudiado y muy milimetrado. Tú cuando recoges alumnos de otro compañero sabes lo que han hecho, han dado los contenidos completos, todo ha quedado registrado convenientemente es las actas. Todo ha quedado cerrado en el curso anterior….
133I17,58: Uhum..
133X18,01: Con lo cual los niveles muy muy muy parejos…
134I18,02: Sí, está todo muy establecido, claro..…

134X18,10:Muy parejo, y aquí yo veo aquí, cada uno,….., bueno alteraciones que no puede creer que funcionen las cosas así.
135I18,15: Te encuentras en una clase a niños que no tienen nada que ver…
135X18,18: Vienen de otros centros que solamente tienen primer ciclo y han dado,…., prácticamente nada.
136I18,19: Uhum…
136X18,30: Mientras aquí en un tercero tienen básicamente un nivel de primaria, luego niños que vienen de los cuartos, saben que van a hacer aquí los bachilleratos pero tienen vienen unos cuartos que nos son cuartos han sido terceros.
137I18,31: Claro
137X18,35: Entonces claro, ahora tienes que perder mucho tiempo,….
138I18,36: En homogeneizar ese grupo.
138X18,38: Ese tiempo es evidente que,…, no se terminan los contenidos.
139I18,40: Lo estas perdiendo
139X18,45: No se terminan los de cuarto, no se terminan los de primero, y a segundo se llega como los locos.
140I18,47: Ya este tipo de cosas es…. impensable…. Dedicarle…
140X18,59: No. Esto no creo yo que…..Otra cosa que me ha parecido una una diferencia enorme con otras comunidades es que aquí cuando un profesor está de baja no se cubren, o sea si ese profesor falta un mes no se cubre…
141I19,01:Uhum,…..,claro
141X19,04 : Un mes que los niños están con las clases sin dar…. , es que vamos
142I19,06: Sí que no son dos días vamos…
142X19,10: No, un profesor si falta un mes porque tiene una operación, operación que además está prevista…
143I19,13: Sí que está previsto que…
143X19,15: No se cubren estas bajas….esto es impensable…
144I19,17: Impensable…ja,ja..
144X19,20: Es un atentado contra la calidad de la enseñanza.
145I19,21: Ya
145X19,22: Porque son grupos que pueden ser buenos,…., pero no han tenido profesor de matemáticas un mes…
146I19,23: Claro
146X19,27: Como los puedes tú luego nivelar…, cuando te incorpores
147I19,29: Nivelar claro. Y este tipo de cosas es ya impensable.
147X19,32: Si es que todo repercute en la formación del alumno. Esto es increíble… Yo sé….
148I19,38: Bueno me querías comentar algo más de esto…
148X19,41: De esto si ahora vuelven a introducir sucesiones.
149I19,42: Uhum
149X19,47: Las pudiéramos trabajar en condiciones normales….
150I19,50:Quizá ¿no?
150X19,52 : El concepto de límite se volvería a retomar en las sucesiones..
151I19,53:Claro. Si lo que me has comentado, y luego ya meter..
151X19,56 : Meterlo en funciones. Que ellos ya lo verían muy fácil porque lo habrían visto en sucesiones.
152I19,59: En sucesión claro.
152X20,01: Entonces verían como su aplicación práctica. Sería la parte fácil de lo anterior
153I20,09: Si una aproximación sola y ahora ya tenemos dos, una en la x que provoca otra en lo que sería, en lo que sería la y…
153X20,10: Eso es
154I20,12: Bueno entonces sino tienes nada más…
154X20,17: Vamos a ver ahora como aparece el tema de sucesiones, como lo vamos a ver. Como se puede dar.
155I20,18: Uhum
155X20,19: Según el nivel que podamos darle…

156I20,20: Que te…., como se podría enfocar, claro.
156X20,22:Las sucesiones podrían aparecer.
157I20,25: Es que lo suyo es empezar con la sucesión y luego completarlo..
157X20,29: Cuando yo daba BUP para mí era impensable que yo me saltara esto …
158I20,31: Que empezaras directamente por la E, ¿no?
158X20,33: Yo nunca hubiera pensado dar el concepto de límite sin haberlo dado en sucesiones…
159I20,35: Descabellado,….., en sucesiones
159X20,38: Ahora en cambio….
160I20,40: Sí nos encontramos esto y hacemos lo que…, lo que podemos
160X20,44:Lo que queremos

Fase 4: TÉRMINO

161I20,47: Bueno pues si quieres lo dejamos, lo dejamos aquí. Te lo agradezco y …
161X20,49:Ha cambiado mucho.
162I20,50:Gracias

Anexo A5.21 Transcripción de la entrevista al profesor Y

FASE 1: PRESENTACIÓN

001I00,48:
Bueno hoy es 6 de Agosto de 2008, estamos en Málaga y vamos a realizar la entrevista a un compañero del de matemáticas del I.E.S Sierra Almijara de Nerja. Entonces…, hace unos días le entregué unos materiales que estaban formados por las 11 fichas extraídas del análisis de libros de texto y….el guión para realizar la entrevista. El compañero ha hecho una ordenación, ha hecho dos grupos y ahora nos va a comentar porque…o que criterios ha seguido para hacer esa ordenación particular, así que le paso la palabra al compañero y nos diga que grupos ha hecho,…, que empiece por el que quiera el que se utiliza el que no y comentar.

FASE 2: ESPONTÁNEA

001Y00,49: Bueno yo en principio he hecho dos grupos, he subdividido por una parte los que utilizo habitualmente en clase….
002I00,50: Uhum
002Y01,13: Principalmente hasta primero de bachillerato, ya que segundo solo lo he impartido una vez. Y el otro grupo en el que la mayoría son los que tienen el razonamiento típico ε α. Que son los que….hasta primero de bachillerato no hago uso, y en segundo de bachillerato pues así esporádicamente cuando se veía, pero como ya he comentado lo hice solo una vez. Hay uno de ellos que es este del principio, el H.
003I01,14: Uhum
003Y01,18: En el que si bien aparece el razonamiento ε α, si se establece….es similar a este de intuitivamente…
004I01,20: Al E ¿no?
004Y01,21: Al E. Este a lo mejor no hago uso de él, pero cuando hago la explicación de límite en primero sí que puede aparecerlo lo de que eh…centrado en el punto a y cogiendo un intervalo hay un correspondiente en el eje de ordenadas que se corresponde al intervalo eso sí…
005I01,36: Uhum
005Y01,37: Este un poco más pero los que….el B G
006I01,40: B uhum
006Y01,41: J y K.
007I01,43: Si
007Y01,54: Son los que no hago uso de ellos salvo que cuando di en el curso de segundo de bachillerato y también para momentos muy contados no para demostraciones en general sino cosas muy particulares.
008I01,56: Si cosas muy particulares, en concreto.
008Y02,14: Con respecto a los que sí he usado. Que serían los restantes, pues sí yo he…., indicar que yo cuando introduzco el concepto de límite como normalmente lo hago con las progresiones lo suelo acercar un poco con la suma de los términos infinitos de una progresión geométrica con razón menor que uno.
009I02,18: Si. Menor que...uno
009Y02,19: Menor en valor absoluto que la unidad. Entonces hay cosas que si las hago,….,hago recordatorios del tema y entonces parto de ahí
010I02,20: Uhum
010Y02,26: Entonces pues sí, rápidamente pues para introducir estos conceptos tenemos tablas de valores, viendo que a cualquier función o a cualquier sucesión..
011I02,27: La A esta sería la A ¿no?
011Y02,32: Como la A como la ficha A.
012I02,35: Esa la utilizas siempre en todos los cursos.
012Y02,53: Sí esa sí tanto en cuarto de la ESO como en primero de bachillerato. Para introducir límite, hombre en primero de bachillerato cuando son cursos que tenía igual en cuarto pues a lo

mejor esto lo omito recordando un poco lo del curso anterior para pasar ya a otros desarrollos, pero normalmente sí. Introducimos que los valores de la x se aproximan a uno determinado y simultáneamente los de la y tienen un comportamiento distinto.
013I02,55:Se aproximan a otro.
013Y02,57: Seguidamente la tabla E o sea la ficha E
014I02,58: Uhum
014Y03,01: Porque es lo mismo que la A pero dicho de otra manera.
015I03,04: En otro sistema de representación, como en el verbal podríamos decir ¿no?
015Y03,06: La I, prácticamente es análoga a la A.
016I03,07: Uhum
016Y03,08: Es como combinar la A y la E
017I03,11: Uhum
017Y03,13:No es solo una tabla de resultados sino un poco de expresión de lenguaje
018I03,14:De expresión mezclándolas las dos.
018Y03,27:Y la C ¿D? y F, pues también las hago aunque más que para explicar el concepto de límite, muchas veces cuando estamos explicando continuidades. Hago más uso de ellas para explicar discontinuidades que límite.
019I03,28:Que límite
019Y02,36:Porque yo en primero..
020I02,39:Quizá para el límite más la H que me has dicho antes aunque utilice….
020Y03,38:Si aunque yo muchas veces también es verdad que los alumnos más que entender esto..
021I03,39:La A
021Y03,46:Que si que es un algoritmo, lo que ellos no entienden físicamente es que significa que una función tenga límite cuatro cuando el x se acerca al tres
022I03,47:Uhum
022Y03,56:Entonces ellos cuando ven gráficas como estas sí, si entienden que si me acerco….no ya mirando el eje x sino si transcurro por encima de la gráfica ,voy a parar a algún sitio.
023I03,57:Uhum
023Y04,04:Para esto si lo ven. Muchas veces me pasa que entienden el concepto de límite que ya hemos explicado y se supone que está entendido, cuando ven esto.
024I04,06:La continuidad y la utilizan.
024Y04,09:Pero ellos no no, parece que lo entienden pero no entienden como es ..que es el límite, hasta que no….
025I04,11:Si la gráfica es la que tú piensas que les hace…
025Y04,14:La que hace si, más que ser como un apoyo es como una explicación.
026I04,18:Si y no desde un eje al otro, no la aproximación en x provoca la aproximación en y..
026Y04,23:No no eso no
027I04,28:Sino desplazándote a lo largo alrededor de lo que es la misma gráfica
027Y04,34:Por la gráfica, ellos trabajan con el grafo, y yo he visto que ellos ellos no entienden que cuando yo les, o me parece a mí que no lo entienden cuando yo les digo ¿Qué ocurre cuando la x se acerca al cuatro que le pasa a la y?.
028I04,35:Uhum
028Y04,36:Ellos no entienden lo que yo estoy diciendo con esas palabras.
029I04,37:Uhum
029Y04,47:Sin embargo cuando les digo bueno si las, si nos acercamos por aquí con la, haciendo simulación con ordenador claro, cuando me acerco al 2 sobre la gráfica que le ocurre a la función si me acerco por la izquierda o si me acerco por la derecha
030I04,48:Por la derecha
030Y04, 51:Hace lo mismo, van a parar al mismo sitio. Eso de donde van a parar si lo entienden más.
031I04,52:Lo entienden más
031Y05,01:Lo que sí les pasa también es que luego cuando les…hago ejercicios o en exámenes de el límite de, indica gráficamente cual es el límite cuando x tiende a 4.

032I05,02:Si
032Y05,07:Pues tienen muchos problemas en distinguir eje x eje y.
033I05,08:Uhum. Si cuando dices tiende 4 no saben si te estás refiriendo a la x o a la y.
033Y05,25:O a la y ahí se pierden un poco. Bueno ya te digo cuanto es el límite cuando x tiende a 3, y muchas veces me dicen el valor de la ordenada otra veces me dicen el valor…sobre todo, no es el caso, pero sobre todo cuando trabajamos con los límites.. ya metemos los límites infinitos , ahí ya si que no.
034I05,26: Uhum
034Y05,30: No distinguen muy bien si tienen que hablar de eje x o del eje y.
035I05,31: El eje y
035Y05,32: Ellos entienden y muchas veces….
036I05,32: Pero dudan..
036Y05,51: Si . Yo en algún libro de estos que he visto yo este año por ejemplo, en el curso he visto que alguno de los libros de texto esto lo subsanaban bien. O sea lo subsanaban bien no, a mi me parecía que lo subsanaban mal, pero para ellos lo subsanaban bien porque lo que hacían era quitarles el fallo. Porque lo que ponían era por ejemplo para la ¿utilidad? ponían el punto (1,4), entonces al poner el par ordenado ya tenían….
037I05,52: Ya lo tienen claro
037Y05,55: No no no lo tienen claro, lo ponen bien pero no saben lo que están poniendo
038I05,56:Uhum
038Y06,07:Entonces ellos no se equivocan pero no saben lo que es. Entonces lo que hacen evitarles que se equivoquen ellos, eso es lo que yo veía. Entonces si es verdad que ellos así lo ponían bien, ponían el punto (1,4) y ya sabían que el 1 iba delante
039I06,07:Y el 4 iba detrás, que al 1 le correspondía el 4
039Y06,11:Cuando el x valía 1….el 4.
040I06,17:Uhum. Eso respecto entonces a la, al primer grupo este que hemos dicho
040Y06,18:Sí, sobre…
041I06,19:Que estos siempre los usas en clase, podríamos decir.
041Y06,30:Ya con respecto a la ordenación entre ellos pues la verdad es que no, …… la C D F las podría ordenar indistintamente vamos, no he seguido ninguna pauta general para con ellas.
042I06,32:Si hay algunas más teóricas y algunas con un ejemplo concreto ¿no?
042Y06,38:Si aquí aparece el.., bueno sí. Vamos tampoco me he parado a mirar si una tenía el..
043I06,39:Si una función concreta..
043Y06,46:Una función concreta, y no era un dibujo. Cuando explico, también cuando suelo explicar el concepto de límite huyo bastante de poner a lo mejor números.
044I06,48:Ejemplos concretos..
044Y07,02:Les pongo $x_{0,}$ y …o a y b. No les quiero poner números porque como les ponga números se centran al concepto de lo que es un número. Si luego les pregunto algo se vuelven al tres y se les cambio el tres por un cuatro parece que no explico lo mismo.
045I07,03:Si concretamente...uhum. Si que empiezas por la parte teórica es lo que vienes a decir y luego ya pasas…
045Y07,11:O hago dibujos, hago dibujos sin poner escala, pongo una rayita pongo a.
046I07,12:Y ya esta
046Y07,15:No pongo escala
047I07,16:Uhum
047Y07,18:Para que no vean ellos lo que va aumentando. Y....¿que más?...
048I07,23:Vamos a hablar si quieres un poquito de las que no usas, porque concretamente me has dicho que no las usas, porque me has dicho que la H si ¿no?..
048Y07,36:La H si un poco, en el sentido de que cuando la x se acerca al……, esto me surge porque este año por ejemplo en primero de bachillerato había algunas dudas porque cuando poníamos funciones que eran continuas por un lado y por otro no…
049I07,37:Uhum
049Y07,51:Los niños pues decían claro es que por aquí si me acerco si vale o simplemente para el concepto de límite, pero yo les hacía ver que lo de acercarse quería decir a a a a alrededor de

ella pero…..en un intervalo muy pequeño, que no era acercarme desde más quinientos. Como muchas veces me decían.
050I07,52:Uhum
050Y07,54:Entonces al hacer eso si es verdad que hacía un poquillo uso de este esta tipología
051I07,57:De este tipo de argumentación ¿no? como la H
051Y08,00:Si si que acercarse quiere decir a intervalos cada vez más pequeños y que se cumple siempre.
052I08,01:Uhum
052Y08,05:o sea acercarse siempre no..en unos casos si y en otros casos no..
053I08,06:En otros casos no
053Y08,07:Entonces cuando hacíamos eso pues sí hacíamos este uso. Hombre …
054I08,09:Pero con el ε y el δ ¿o?..
054Y08,23: En primero de bachillerato no, a lo mejor lo ponía con números, aquí ponía 3 más…. coge un intervalo de amplitud...... ¿cual? el 7 , pues venga 5 más 7 y 5 menos 7. Levantamos perpendiculares y vemos que haciendo paralelas al eje de ordenadas…
055I08,28:O sea va el camino de la variable independiente a la dependiente. O sea la x provoca el acercamiento en la y. Uhum
055Y08,29:En la y si
056I08,33:Esa sería la idea ¿no?.Estupendo. Por ejemplo la B.
056Y08,35:La B
057I08,39:Que es la siguiente que has dicho que no …
057Y08,41:Pues te puedo decir la B…. y otra que es muy similar. Bueno vamos a empezar por la B.
058I08,41:Vamos a empezar por la B
058Y08,53:La B...el problema de esto, bueno la verdad es que yo en segundo de bachillerato si lo he usado alguna vez este razonamiento, pero como te digo para cosas muy…muy de hacer un ejemplo de que se hace así..
059I08,54:Y ya está. Para que vean ..
059Y09,02:Y muchas veces también es cierto que en selectividad si les ponen algún razonamiento de este tipo, entonces bueno pues se ve uno casos muy sencillos y muy escuetos para que vean ellos como sería la forma de….trabajar
060I08,58:Uhum
060Y09,08:Pero no para explicarlo como tal. Más que como explicación como ejercicio.
061I09,09:Uhum
061Y09,14:De razonamiento, existe un ep… es verdad que la definición si, existe un n tal que para todo ε existe un δ tal tal, y la cosa es …
062I09,16:Y la definición podríamos ¿a cuál de ellas?..
062Y09,23:La definición que doy yo esta...la K…¿eh?...
063I09,26:La K que sería la ….la verbal ¿no?
063Y09,30:La J. La J es la definición de ….
064I09,32:Uhum. La J es la que darías como definición ¿no?. Utilizando el ε y el δ ¿no?.
064Y09,33:Si si, él para todo…, esa es la definición que yo doy de límite en segundo de bachillerato, en primero doy la misma pero como digo yo traducida a un lenguaje más coloquial.
065I09,41:Uhum
065Y09,52:En segundo de bachillerato si daría la J perfectamente, ahora lo que te digo ya a ti es que esto que una definición pues luego esto sería más como una ¿? que ellos no lo vean que lo tengan que demostrar por definición.
066I09,53:Que tu ya les das un ε…
066Y10,01:Problema, problemas que tenía por ejemplo en primero de bachillerato para explicar esto o que me he encontrado yo pues, primero que ellos uhum, eh,… cualquier cosa que se simbología matemática…
067I10,02:Valor absoluto…el menor..
067Y10,22:Para todo … mayor que... tienen problemas al acabar la secundaria con el mayor y menor. Y…en bachillerato yo me he encontrado muchas veces que al analizar funciones a

trozos tienen problemas con saber que significa por la izquierda y por la derecha. Entonces pues ellos lo de ε mayor que 0 y δ mayor….a lo mejor ni siquiera saben lo que es.
068I10,23:Uhum
068Y10.24,:También huyen mucho de las letras …..
069I10,25:De las griegas ¿no?
069Y10,35:De las castellanas y ya no te digo nada de las griegas. Entonces si..pero eso yo lo he notado paulatinamente cada vez huyen más de la simbología matemática, no también muchas veces pienso por problema nuestro que no la trabajamos lo suficiente.
070I10,36:Uhum
070Y10,54:Habría que…, pues al igual que….en inglés se utiliza la lengua inglesa, pues en matemáticas hombre no vamos a abusar del uso pero bueno un para todo o existe o perteneciente a un intervalo no son tampoco unos términos muy difíciles. Y esto a mi yo pienso que lo que provocaría es que se me ..se abandonaran durante la explicación.
071I10,55:Uhum. Si por el tema del formalismo ¿no?
071Y11,21:Y...si, más por la forma que por el fondo porque realmente es lo mismo que haces pero no saben trabajar, con el valor absoluto también muchos problemas en…. a la hora de utilizarlo no lo entienden bien lo que quiere decir y si metemos variables….o sea indeterminadas dentro de un valor absoluto…las inecuaciones tienen problemas en representar la solución así que al dividir un valor absoluto y ver los espacios pues tampoco. Y claro les resulta mucho más difícil esto….
072I11,23:Si esto más que las otras que hemos hablado antes.
072Y11,33:Si más intuitivas más gráficas a lo mejor. La G eh ,uhm esto si lo pueden….
073I11,34:Ver más un poco
073Y11,42:Es verdad lo pueden ver más pero como te he dicho anteriormente que, además yo les digo a ellos esto y en la gráfica si están viendo ellos que si cogen un intervalo pues van a parar a otro.
074I11,43:Como que les complementas una y con otra ¿no?
074Y12,00:Lo ven como más dibujo, es verdad que ellos también en las demostraciones a lo largo del bachillerato, que me salto a cuarto, porque es verdad que en cuarto la introducción de límite es un poco muy literal, más que nada para hacer algoritmos de cálculo. Entonces en bachillerato es verdad que ellos la la mayoría de las demostraciones, para ellos son demostraciones cuando lo ven gráficamente, no cuando lo demuestran matemáticamente.
075I12,01:Uhum
075Y12,06:Entonces esto sí es verdad que ellos lo entenderían mejor o si lo verían más como ejemplo…
076I12,11:Ya has quitado el problema del valor absoluto de las inecuaciones la simbología…y demás.
076Y12,18:La simbología,…, lo único que utilizan es ε mayor que cero y un δ mayor que cero que a lo más dices bueno existe un intervalo positivo o un número positivo que le sumo y pasa lo que sea.
077I12,19:Un valor, uhum
077Y12,30:Entonces ellos obviarían este trozo y lo demás si que lo pueden entender más. La J, pues si hemos dicho que el problema está en la simbología..
078I12,31:La simbología.
078Y12,46:En primero no porque en primero además también, están…viendo un poco todavía lo que son los límites…dependiendo también del curso por eso te he dicho la distinción antes…. me obligaba, pero si es cierto que este año por ejemplo que he tenido primero de bachillerato de CCSS, pues claro hablar de esto de introducción del límite en CCSS y en CCNN y de la Salud…
079I12,47:Es diferente
079Y12,53:Es diferente, entonces los míos en cuarto de la ESO no vieron por ejemplo nada de límites y claro…
080I12,54:Les cuesta..
080Y13,01:Para ellos la simbología del límite es novedosa. Cuando más si acaba un tema de límites y empiezo a utilizar eso para definirme más cosas, entonces ellos…

081I13,02:Uhum. Integrales derivadas..
081Y13,22:Entonces claro lo tienes que introducir en la fase muy…., muy esquemática muy gráfica. Y la simbología vamos…esta que no entienden muchas veces lo que están haciendo cuando me…. al calcular por ejemplo en las límite cuando x tiende a 4 pues si f(x) lo cambio por una expresión y empiezan a hacer cambios…pues el límite cuando x tiende a 4 va desapareciendo…
082I13,23:Uhum. Sí que lo mismo lo ponen que no lo ponen
082Y13,28:Entonces claro ellos ellos no entienden que significa….límite cuando x tiende a 4 de una expresión
083I13,29:Que están haciendo en un límite....
083Y13,34:Ellos hacen operaciones en la expresión, algoritmos…pero lo del límite delante..
084I13,35:Si los trucos que tú le vas dando…
084Y13,36:Si les explicas..
085I13,38:Pero no son conscientes de….nada.
085Y13,42:No no no entienden la diferencia en poner delante el límite y quitar el límite
086I13,43:Uhum
086Y13,52:Yo si este año conseguí un poco que ellos entendieran que cuando la x estaba tenía que aparecer el límite y cuando la x la sustituía por un valor al final pues entonces ya no aparecía un límite.
087I13,53:Ya lo habías calculado.
087Y13,58:Quería decir que ya habías hecho un aproximación, es que ellos en el momento que yo hacía algo ya quitaban el límite porque ya se había calculado algo.
088I13,59:Uhum
088Y14,06:Pero bueno eso, tras arduas peleas con ellos. Y….el K.
089I14,07:Uhum. Eses cuesta más trabajillo sería como verbalmente la B¿no?.
089Y14,16:Si es similar.
090I14,17:Uhum
090Y14,19:Si a mí lo que… yo…
091I14,21:Si que la G es parecida a la ¿? pero un poco más teórica ¿no?
091Y14,54:Si la única que..es que la K utiliza el concepto de entorno que a veces pues lo ven o no lo ven y es un problema añadido más. Más que intervalo los entornos les cuesta un poco más. Pero si que eso que principalmente ya es por…no creo yo que sea por el concepto de límite como tal sino por la simbología que se utiliza para ello y no tampoco la simbología que tiene sino por el desuso que se ha hecho anteriormente de simbología, entonces no podemos llegara a bachillerato empezar a utilizar límites ε δ, cuando en la vida se ha dado para todo o pertenece..
092I14,55:O pertenece..
092Y15,00:Es muy diferente expresar una idea con palabras y ahora expresarlo matemáticamente
093I15,06:Si intuitivamente, como la A por ejemplo que hemos visto antes ¿no? tu tablita de valores y ahora de pronto encontrarte….
093Y15,07:con…
094I15,09: Con esto ¿no?
094Y15,20:Pues si lo principal... el..problema que veo principal al concepto de límite que es el particular que estamos tratando pero a muchos otros es lo mismo que se produce un salto muy cualitativo de secundaria a bachillerato de no…no es no explicar nada pero..
095I15,23:De la intuición al formalismo podríamos decir así a..
095Y15,34:Si si a groso modo sí. Y muchas veces no solo por los contenidos sino por nuestro uso. También yo la mayoría de las veces veo a compañeros que huyen más de explicar lo que es un límite.
096I15,35:Uhum
096Y15,42:Centrándose en calcular el límite entonces es muy difícil que si tu tienes alumnos que han estado un año calculando límites ahora quieres que entiendan lo que es hacer eso..
097I15,45:El concepto claro …que no tiene nada que ver .
097Y15,51:Muchas veces ellos lo que saben es calcular cosas pero no saben lo que es esa cosa.
098I15,52:Uhum

098Y15,56:Si para eso encima le quieres meter un razonamiento más abstracto o más matemático pues es problema añadido.
099I16,00:O sea que en líneas generales esas serían las grandes diferencias que tú ves entre un tipo de argumentaciones y otras.
099Y16,10:Si las argumentaciones gráficas les llegan más a ellos les parecen más intuitivas e…parece que entienden lo tu les estas explicando entienden un poco el acercarse a cuando me acerco a no se quien…
100I16,13:Uhum. Provoca un acercamiento a tal
100Y16,17:Que para todo ε existe un entorno…ellos no ven la correspondencia entre dos intervalos..

FASE 3: INDUCIDA

101I16,39:No sé si habrás notado también que en este segundo grupo de la H la D la G, esa aproximación en la x que provoca una aproximación en la y también va un poco como que al revés ¿no?, como que la aproximación en la y es la que provoca la aproximación en la x y luego realmente compruebo….que es verdad que es como un camino como doble, no sé si eso también lo habrás notado en ellos
101Y17,03:Una aproximación en la x, que si si...., no ellos lo que pasa es que más…tienen problemas en eso…que …ellos um..en fin lo que tú has dicho. Que ellos tienden más, por eso también a lo mejor es más difícil introducir esto, que ellos tienden más a mirar a partir de la x que ocurre en la y. No no ellos por ejemplo les dices que para todo ε mayor que cero….y ellos no miran el eje vertical, ellos están mirando si yo me estoy acercando al cuatro que pasa después, como que la variable x es la que manda. Entonces…
102I17,05:La x la que manda y la y la que responde ¿no?
102Y17,07:Ahí está, entonces no buscan el sentido inverso.
103I17,10:Claro que es otro problema añadido, que podían tener a parte de todo del formalismo y de todo.
103Y17,15:Añadido si aparte. Si ellos no parten de…..
104I17,27:Hemos hablado de que la G ¿no?, aunque le hemos quitado el formalismo si que se encuentra, tanto en la G como en la H como en la B, si que se encuentra ese camino doble ¿no? de que la independiente marca la …
104Y17,37:La dependiente, si por ejemplo aquí en la G pues dice eso, dice para todo ε encontramos un δ, pero rápidamente dice en la fase que si la distancia de x a 9...ya está partiendo de que influye mayormente la x ..
105I17,45:Es que es como doble ¿no?, por un lado la variable dependiente marca..el ε de la dependiente marca el δ….y luego vuelve.
105Y17,46:Marca la x y luego es la x la que manda a la y.
106I17,50:Entonces claro a lo mejor también ahí…, habéis notado a parte de claro todo lo que hemos dicho del formalismo y de todo.
106Y18,00:Si vamos… yo eso… particularmente yo no lo he…notado en ellos muchas veces también tienes el problema añadido de que no te dicen lo que no….no te lo dicen o tu no entiendes lo que ellos no entienden.
107I18,01:Uhum
107Y18,03:Es decir que…, yo no entiendo esto, pero no entiendes que…
108I18,04:Uhum
108Y18,08:Que significa ε que significa δ, que quiere decir tiende que es…. que es límite, yo no lo entiendo
109I18,09:Claro
109Y18,12:Y también como muchas veces te dicen yo no lo entienden o o..
110I18,13:Si tiran la toalla ¿no?
110Y18,14:Si insistes un poco a lo mejor la respuesta es yo no entiendo nada.
111I14,38:Uhum

111Y18,24:Entonces claro muchas veces es verdad que a lo que recurrimos es a explicar otra vez lo mismo desde el principio y obviamente pues si no lo entendían antes difícilmente lo van a entender la segunda vez.
112I18,35:Si y además claro es esa complicación añadida del formalismo y de todo este tipo de…razonamiento…dices bueno si yo en la A la x se acerca a dos y ahora la y se acerca a cuatro porque…..ahora es al revés ¿no?
112Y18,36:Porque a hora es al revés
113I18,37:Y luego encima comprobarlo ¿no? otra vez….eh..
113Y18,40:Sí sí claro ves que.....
114I18,41:Es doble hay un camino de..
114Y18,42:Cuando coges la y va a la x y la x …
115I18,45:Confirmas que verdaderamente va a la y ¿no?
115Y18,50:Si hombre la verdad es que a mi particularmente ya…
116I18,54:Si porque incluso la gráfica que has dicho la H ¿no?..que la hemos comentado…creo que la has puesto en el otro…
116Y18,55:Si si..
117I19,00:Esa ¿no?. Por eso te he preguntado antes lo de los ε y los δ, si los ponías porque claro…
117Y19,11:Si pero aquí por lo que yo te digo, que ellos aquí si ven que a lo mejor si explico lo del ε, les digo bueno si cojo aquí un esto…ellos en lugar de mirarlo desde aquí hacia acá ellos lo que ven es que…..
118I19,13:Su camino natural es el otro.
118Y19,19:Es lo que tú has dicho, tu les dices bueno para este intervalo existe este..
119I19,21:Si para un intervalo en la y existe uno en la x..
119Y19,22:Un intervalo en la x...pero ellos se centran en en la fase que…empieza lo de aquí
120I19,23:En la fase que
120Y19,27:En la fase que si yo levanto perpendiculares voy a parar aquí.
121I19,28:Por aquí me voy al otro lado
121Y19,30:Para ellos lo importante es que si salgo de aquí llego aquí..
122I19,32:lLlego ahí,…, si salgo de la x llego a la y.
122Y19,34:Pero no ven que este intervalo viene dado por este.
123I19,38:Eso es que vendría dado por el otro no….., es otra diferencia..
123Y19,39:Importante
124I19,44:Uhum. Bueno pues si quieres comentar algo más sino.., te lo te lo agradezco enormemente…
124Y19,49:No tu si tienes alguna cosa o alguna pregunta que hacerme sobre alguna…algún tipo de utilización..
125I19,54:No si tienes.., si recuerdas alguna experiencia concreta con algún alumno concreto algún comentario que te haya hecho que…
125Y19,55:No yo lo que..
126I19,57:Que venga un poco al hilo..
126Y20,06:Por ejemplo con límite pues si he visto yo que como por ejemplo la tabla A que es la que yo he hecho muchas veces al introducir, pues si es verdad que cuando le pongo números pues algunas veces yo les hago como trampas ¿no?..
127I20,07:Uhum
127Y20,10:De acercarme por ejemplo pues en la fase que no se puedan acercar por la izquierda…, entonces ellos empiezan a darle a la calculadora…para ver límites laterales por ejemplo…y..
128I20,11:Uhum
128Y20,23:Y ven que que....que empiezan a ocurrir cosas raras. O que no siempre que..además cuando hacemos un par de ejemplos pues ellos piensan que eso siempre pasa…que si me acerco al tres el otro se va a al siete..
129I20,24:El otro se va al siete..
129Y20,29:Y hay veces que por ejemplo les pones uno partido por x, que empiezan a darle valores y ven que eso a lo mejor no se acerca a ningún lado..

130I20,30:Si que no se acerca a ningún lado..
130Y20,34:O lo que tienen muchas veces problemas es que cuando hacen varias iteraciones ya empiezan a repetirse los decimales…
131I20,35:Uhum
131Y20,41:Y miran al de al lado y dicen pero como…les ponga una que no tiene límite o que tenga un límite por un lado y otro por otro.
132I20,42:Uhum
132Y20,44:Ya tienen problemas en decirme...
133I20,45:Que pasa ¿no?
133Y20,49:Decirme que...ellos no no dicen no tiene límite,…, no tienen conciencia de que una cosa puede ser que no tenga límite.
134I20,50:No tenga límite claro
134Y20,55:Si estoy explicando lo que es límite de una función en un punto, pues todas las funciones tienen que tener un límite en un punto.
135I20,57:Ellos ven que el acercamiento en la x provoca acercamiento en la y, y que no hay..
135Y20,58:Y si no lo hay lo buscan
136I20,59:Lo buscan claro
136Y21,04:Entonces suele pasar eso que a veces …que si por un lado hace una cosa y por otro lado hace otra pues ellos ya empiezan a fundir para que ocurra algo..
137I21,05:Lo mismo claro.
137Y21,12:No...raras veces me ocurre que ellos digan bueno pues por aquí ocurre una cosa y por aquí otra o en esta no ocurre nada..
138I21,13:Claro
138Y21,20:Si si si es verdad que lo ven, pero como siempre tienden a tienden a …a evitar el error, pues ellos quieren corregir que les salga siete. Pues ellos lo..
139I21,22:Lo buscan.
139Y21,24:Lo buscan o...o piensan que han hecho mal los cálculos muchas veces.
140I21,25:Claro
140Y21,31:No se atreven a decir no. Eso si me ha pasado que ellos cuando empiezan a darle valores ven que hay cosas que no cuadran o..
141I21,33:Ellos si tu les estas explicando un límite quieren que salga lo que les has explicado..uhum
141Y21,36:Que salga un límite. Lo cual me me…
142I21,38:No caen en que puede ser que no lo haya vamos. Si uhum..
142Y21,46:O que se distinto o que por cada lado ocurran cosas distintas..También me ha pasado muchas veces que cuando doy la definición.. en la fase verbal…
143I21,47:Si. Como la E ¿no?.
143Y21,52:Si que tienden a copiarla pero no procuran entenderla.
144I21,53:Uhum
144Y22,58: Es una cosa como que copian dejan muy bonita recuadrada en fosforito y ellos no quieren ..
145I22,59:Ahí se queda
145Y22,01:Ellos no quieren entender lo que significa un límite sino que muchas veces les estas explicando lo que es el límite y te dicen pero esto como se hace.
146I22,07:Como se calcula ¿no?
146Y22,09:Si como se hace tu esto como lo vas a preguntar en el examen.
147I22,10:Claro
147Y22,32:Ellos no quieren entender lo que es el límite sino
148I22,19:Que el acercamiento provoca el acercamiento y a nivel formal la y te marca la x ..
148Y22,24:No ellos quieren pues.... ver que hay un algoritmo o… algunos recuerdan que el año pasado vieron algo parecido..y esto es lo de no se qué..
149I22,30:Si esto es lo de las indeterminaciones del cero partido cero y ..que hay que factorizar o….
149Y22,32:Se cierran a se cierran a entender la….la definición
150I22,35:Si lo que es realmente la definición de de límite ¿no?. Bueno pues si..

150Y22,43:Y ya está....poco…bueno poco vamos sobre límite no si nos metiéramos ya con discontinuidades y eso pues sí..también me han pasado cosillas….
151I22,44:UHum
151Y22,57:Sobre todo con las evitables y cosas de este tipo. Pero si sí es verdad que ellos muchas veces …si me ha pasado también es que a veces entienden lo que significa el límite pero cuando les metes ya …uhm…pues este que tiene ya como sería por ejemplo la C..
152I22,58:La C
152Y23,10:Una discontinuidad evitable, pues si tu les pones funciones que el gráfico no sea tanto una línea recta sino puntos o la parte entera de x….cosas así que hagan cosas raras.
153I23,13:Si que no sean funciones elementales un polinomio de primer o segundo grado.
153Y23,17:Efectivamente si les pones funciones que no son elementales o polinómicas o …
154I23,18:Racionales
154Y23,26: Racionales o seno o logaritmos…a lo que están acostumbrados ellos. Si les pones funciones raras es verdad que a lo mejor han entendido lo que significa el límite pero cuando se los pones ahí ya como que se pierden un poco…
155I23,31:Ya no está tan claro que el acercamiento en la x provoca el…
155Y23,49:No y tal vez el abuso de hacerles simulación de representaciones gráficas con funciones que son continuas y derivables.. y luego no saben mirar el límite en funciones que que no tienen o que ocurren cosas extrañas o que no se pueden acercar o que si me acerco…
156I23,50:Empiezan los problemas
156Y23,51:Si empiezan los problemas
157I24,08:Uhum. Si pero vamos respecto al límite finito de funciones en un punto la cosa sería Principalmente eso ¿no?..lo de la diferencia entre las intuitivas y las formales. El formalismo del ε el δ el valor absoluto y a parte eso el camino…que hay..
157Y24,21:Si, si muchas veces lo que yo lo que veo es eso que el problema es ese que tu les estás hablando en un lenguaje que ellos no entienden ….o sea básicamente no uso el ε δ, el uso que yo no hago de eso en primero en segundo si porque obviamente hay que explicarlo…lo entiendan o no lo entiendan tienen que tener una..
158I24,22:Uhum
158Y24,29:Unos conocimientos básicos...pero es que yo creo que no entienden el lenguaje que yo tengo…., no el que uso yo sino el que usa ..
159I24,30:Para expresarte matemáticamente claro
159Y24,31:El lenguaje matemático ellos no lo entienden muchas veces….entonces claro no puedes explicar una cosa que requiere un lenguaje matemático si ellos no entienden lo que tu les estás hablando. Yo no puedo hablar con una persona en francés si yo no hablo francés.

FASE 4: TÉRMINO

160I24,45: Es lo mismo. Bueno pues si quieres comentar algo más sino te lo…
160Y24,49: Pues nada a vuestra disposición para cualquier otro requerimiento.
161I24,51: Pues muchísimas gracias. Un placer.
161Y24,52: Igualmente

Anexo A5.22 Transcripción de la entrevista al profesor Z

FASE 1: PRESENTACIÓN

001I00,50: Bueno hoy es 6 de febrero de 2009, estamos en el I.E.S "E", y vamos a hacer una entrevista a la compañera del Departamento de Matemáticas. Hace unos días yo le entregué unos fragmentos extraídos del análisis de libros de texto y entonces le pedí que tras echarles un vistazo y reflexionar sobre el tema, que los introdujera en dos sobres de manera que en uno de ellos introdujera los que utiliza o ha utilizado en el aula alguna vez y en el otro sobre que introdujera los que no ¿no?. Entonces ahora lo que vamos a pasar es a ver esa agrupación que la compañera ha hecho y comentar bueno porque…cuales son los motivos que le han llevado a ella a hacer esa agrupación y comentar los fragmentos particularmente. Le cedo la palabra a la compañera y veremos cuál es la agrupación que ha hecho. Pues cuando quieras.

FASE 2: ESPONTÁNEA

001Z00,52: Bueno en los fragmentos no utilizados en el aula
002I00,53: Uhum
002Z00,57: No utilizo normalmente ni tabla de valores ni…
003I00,58: Que sería el A, el fragmento A.
003Z01,04: El A. El B definición formal con el ε δ…
004I01,05: Uhum..valor absoluto..
004Z01,12: Con valor absoluto tampoco. Lo hice una vez en un segundo de bachillerato pero no lo entendieron no funcionó.
005I01,13: Uhum
005Z01,15: Eh…con con el..
006I01,16: El I ¿no? que sería parecido a…
006Z01,27: A la tabla de valores tampoco suelo porque si he tenido problemas, que se paran en un momento dado y me dicen que el límite es 1 con 99 … o el 3 con 99…, el valor que ellos han sacado te dicen que es el límite.
007I01,29: el valor en el que
007Z01,32: Entonces no me funciona…y tampoco el J
008I01,33: Uhum
008Z01,34: Por las distancias o el valor absoluto.
009I01,35: Por el valor absoluto
009Z01,46: El valor absoluto también suele dar muchos problemas como tampoco he tenido alumnos excesivamente buenos cuando he explicado, pues tampoco les suelo meter..
010I01,47: Uhum…valor absoluto
010Z01,50: Me quedo con distancias, con el concepto de distancias pero no les pongo…valor absoluto.
011I01,51: Pero no utilizando la notación del valor absoluto
011Z01,52: Me quedo más con entornos…
012I01,53: Uhum
012Z01,56: Si que he utilizado en el aula…uhm..los modelos gráficos
013I01,58: Los gráficos ¿no?
013Z01,59: Con el dibujo sí que se suelen enterar bien
014I02,00: Uhum
014Z02,01: Entonces están el C
015I02,02: El C
015Z02,03: El D
016I02,05: El D. El F ¿no?
016Z02,07:El F….el H
017I02,08: Y el H ¿no?
017Z02,09: Que son gráficas

018I02,10: Que son las gráficas. Uhum. Estupendo.
018Z02,15: Y en cuanto a definiciones...si intuitivamente.
019I02,16: La E ¿verdad?
019Z02,23: Exactamente. El....
020I02,25: El G ¿no?
020Z02,27: El G con el ε δ, si lo suelo comentar pero no formalmente.
021I02,29: Como hemos dicho en la otra
021Z02,32: Si no así comentando lo que para cada puntito….con el entorno y el dibujo a través del dibujo
022I02,34: Eso es acompañando con el dibujo..
022Z02,37: Sin encontrarlo luego analíticamente con una función en concreto.
023I02,38: Ajá..
023Z02,41:A través del dibujo si, si suelo utilizar.
024I02,42: La G
024Z02,47:La G. Y esta es la definición formal ¿no?
025I02,48: Uhum
025Z02,48: De límite el K
026I02,49: El K ¿no?
026Z02,50:Que es con entorno
027I02,51: Con entorno
027Z02,54: Y también o sea a partir del dibujo también con entorno
028I02,58:También sería así dirías la gráfica que hemos... o sea la verbal que hemos dicho en la G ¿no?
028Z02,59: Exactamente
029I03,03:Y después un poquito más formal con entornos es lo que sería la K.
029Z03,05: La definición, en lugar de dar la definición con valor absoluto con entornos
030I03,06: Uhum. O sea que el problema que tú has visto en el formalismo que podríamos decir de estas definiciones es el valor absoluto.
030Z03,10: El valor absoluto
031I03,11:Que con entornos y eso si te ha ido te ha ido bien ¿no?. Uhum. ¿Y no has tenido prob lemas con el ε el δ y esta historia?
031Z03,31: Solamente lo he hecho con un segundo de bachillerato un año que sí eran más menos bueno porque al año siguiente ….. ni entré en la formal, sino simplemente intuitiva y ya está. Y luego te vas al cálculo.
032I03,34: A la gráfica y al cálculo
032Z03,35:Y al cálculo. El año que lo intenté si había alumnos en la clase buenos y si funcionó.
033I03,37: Uhum
033Z03,44: No había problemas con el ε y el δ. Ellos entendían que era algo muy pequeño muy pequeño y lo entendieron.
034I03,46: Lo entendieron
034Z03,47: Si no había
035I03,48: Que no tuviste problema en ese sentido.
035Z03,49: Si.
036I03,57:Y otra cosa que te iba a comentar… que la intuitiva esta que me has dicho, la que me has dicho que empezaba por intuitivamente que creo que es la E ¿no?
036Z03,58: Si

FASE 3:INDUCIDA

037I05,01: Esa la E, por ejemplo si miramos la E y la G las dos a la vez ….., aunque esto la del en la que habla de la distancia de x es menor, no sé si habrás notado también que podríamos decir que en la E el camino es como que solo de la variable independiente a la dependiente ¿no? o sea podemos decir…se puede pensar que el límite de una función en el punto a como el valor al que tienden las imágenes cuando los originales se acercan a a. O sea es como si pintáramos una gráfica el camino iría como de las independientes a las dependientes ¿no?. Sin embargo si

nos fijamos en la otra en al G, pues el camino es un poco como que al revés ¿no?, empezamos en la dependiente ¿no? el ε nos marca un δ en la en la independiente..y luego de manera que luego volvemos ¿no?. Entonces si tú has notado en ese…aunque hayas utilizado las dos si has notado que este tipo de razonamiento solo en un sentido y en el doble en la otra si eso ellos lo….les afecta a lo que es la comprensión de la definición de límite. A parte del valor absoluto de las distancias del ε pequeño y tal.
037Z05,05: La de ida y vuelta la mayoría no terminan…ya te digo con ε δ…
038I05,06:Uhum
038Z05,07: Solamente ese año con ese par de alumnos que si eran buenos..
039I05,08: Buenos..
039Z05,11:Si lo entendieron ellos si lo entendieron el resto de la clase no.
040I05,10: Y en ese orden ¿no?
040Z05,13:En ese orden
041I05,20:De que un trocito chiquito en la y nos marca un trocito chiquito..de manera que podemos volver bien ¿no?
041Z05,22: El resto se queda con..
042I05,24: Lo que sería la intuitiva ¿no?
042Z05,25:La intuitiva si si si
043I05,29: El camino de la independiente a la..
043Z05,31:La mayoría no llegan a ver eso ..que no lo han entendido que no han terminado de entenderlo
044I05,36: La idea esa. Uhum. EL proceso ese de ida y vuelta ¿no? que como tu misma lo has llamado ¿no?.
044Z05,37: Si
045I05,52:Que claro ya no es solo el formalismo del valor absoluto del entorno de la distancia. Si no que…como que empezamos con las definiciones intuitivas con un camino ¿no? y luego en la formal es como que le damos le damos la vuelta ¿no?. Entonces eso excepto con dos o tres alumnos buenos…los demás ves tu que no..
045Z05,54: No. A mí no me ha funcionado
046I06,11: No te ha funcionado ¿no?. Y en que crees tu que puede estar a parte de de..eso del valor absoluto y demás…en la complicación de ..de que eso un camino y luego doble…el cambio tan grande o el salto tan grande que puede haber de una a otra o…en que crees tu que puede estar el que solamente dos alumnos de todos los wue has tenido no lo hayan …no lo hayan visto.
046Z06,17: Uhm...es que no sé, es que no es un concepto sencillo.
047I06,18: Claro.
047Z06,25: Y el hecho simplemente de que ellos entiendan que ε es una variable que es algo muy pequeño que no el construir la nueva fduncion que no se stp….quieren…
048I06,26: Uhum
048Z06,29: Cuando se trabaja con letras y aún así…aún en segundo de bachillerato, yo me he encontrado el problema siempre en todos los cursos.
049I06,30: Uhum
049Z06,35:El hecho de que ellos entiendan que una letra simboliza un valor que no está fijado
050I06,36: Está fijo, uhum.
050Z06,42: Ya les cuesta…
051I06,44: Claro es que construyes una nueva función ¿no? de la ε construyes la función δ. Con la x la f de x y con la ε la δ ¿no?. Entonces..
051Z06,43:Claro. Eso ya les cuesta entonces yo creo que se pierden ahí en la notación. No….ya ven ahí la amalgama de letras y ahí se quedan no son capaces de llegar más allá e intentar escuchar.
052I06,58: Más allá. Sí comprender eso.
052Z06,59: Ahí está
053I06,52:Si que muchas veces se pierden a lo mejor en el formalismo y pierden la idea de…
053Z06,57: Si yo creo que sí
054I07,05:De que la definición de límite verdadera es esa ¿no?

054Z07,15: Yo creo que sí, porque los niños que yo te digo son niños con muchos muchos problemas de cálculo. De que les resultaba pues no sé….cualquier cosita de..una igualdad notable ya no la veían.
055I07,22: Como por ejemplo hay ahí en alguna ficha alguna de las que has dicho que no utilizas en una de ellas hay una identidad notable me parece. En esta en la I.
055Z07,23:Exactamente
056I07,24:En…
056Z07,25: En eso ya se pierden
057I07,26: Uhum
057Z07,29: Esto ya ni…. no ellos lo ven y…
058I07,30: Claro
058Z07,36: Ya simplemente el aspecto es lo que los echa para atrás. Y no hacen ni siquiera el esfuerzo de aprenderlo..
059I07,42: El aspecto claro. Si se conforman a lo mejor con la E ¿no? bueno me acerco aquí si me acerco al dos en el x cuadrado pues su imagen se acerca a 4 y punto.
059Z07,44: Y ya está.
060I07,50: Ya te puedes dar con un canto ¿no?. O como has dicho que eliminas la A porque incluso en la tabla de valores no te siguen..
060Z07,52: Claro. No entienden.
061I07,59:No entienden el proceso infinito que hay ahí ¿no?. Hago tres valores el 1.99 pues el 3.99 es su límite y fuera ¿no?
061Z08,01: Si porque también el concepto de infinito, es un concepto que a algunos les cuesta ¿eh?.
062I08,02: Uhum
062Z08,11: Yo he tenido alumnos que no…no llegan a comprender..y luego cuando te pones a calcular límites no llegan a entender que un infinito pueda ser más grande que otro..
063I08,12: Uhum
063Z08,15: Cuando tienes una x cuadrado y una x..no llegan a ver que el infinito del x cuadrado es más grande que el de x..
064I08,16:Que el de x
064Z08,19 : Entonces..es verdad que la abstracción.
065I08,20: Uhum
065Z08,21: No …..
066I08,25: No es fácil no es fácil. Para alumnos de bachillerato uhum. Piensan muchas veces que es un número ¿no?.
066Z08,28: Exactamente
067I08,41: Que es como un número no eso el tamaño del infinito y tal. Bueno pues si tienes alguna experiencia concreta con algún alumno concreto que quieras comentar, y si no pues… Terminamos aquí. Recuerdas algo o algún comentario que te haya hecho algún alumno. Por ejemplo con las gráficas ¿no?, que hemos dicho que …que utilizas todas las gráficas ¿verdad?.
067Z08,45: Si las gráficas si me ….me dan…
068I08,47: Con su notación del ε y el δ. Si ¿no? eso sí.
068Z08,53:Sí eso sí. Si entienden bien que menos….x menos δ x más δ, eso sí lo entienden bien
069I08,54: Si lo entienden bien ¿verdad?
069Z08,56:Pero con valor absoluto no. Y con la gráfica sí ….sí
070I08,58:Lo tienen más clarito
070Z08,59: Lo tienen más claro.
071I09,10: ¿Y tú con las gráficas les haces hincapié en este camino de ida y vuelta o …o al no haberlo visto en lo que sería la verbal ya en la gráfica no le..
071Z09,16:Con él ...en el primero de bachillerato que es donde he explicado casi siempre…la verdad es que no hago mucho hincapié.
072I09,17: Uhum
072Z09,20: Tampoco me paro mucho porque lo que es la definición de límite le dedico a lo mejor una clase o dos.
073I09,21: O dos

073Z09,23: A lo más.
074I09,25: Sí después te vas al cálculo ..indeterminaciones…
074Z09,27: Exactamente...al cálculo...Entonces..la verdad es que no insisto mucho.
075I09,28: Uhum
075Z09,31: Como tampoco he tenido alumnos excesivamente buenos…
076I09,37: Sí lo que hemos hablado
076Z09,40: Que realmente el problema… tenían bastantes problemas en otras historias no les insisto mucho en..
077I09,48: Si no les...por ejemplo la H que se ve claro el a menos δ el a más δ. Pues tú a lo mejor dices que la..el moverse la x aquí de a menos δ el a más δ, provoca que la y se mueva…
077Z09,50: Que la y se mueva en el intervalo…exactamente dentro del intervalo y ya está.
078I09,54: No les haces hincapié de que este δ marca un ε y ese ε..
078Z09,55:Les hago hincapié en eso en que salvo en el punto.
079I09,56: El punto uhum.
079Z10,00: El punto del límite y ya está. Eso que les quede claro y …la verdad es que la ida y la vuelta no.
080I10,02: En la gráfica no se lo.
080Z10,05 Excepto ese segundo de bachillerato que…si
081I10,06: Con esos alumnos
081Z10,07: Con esos alumnos en concreto.
082I10,08: Uhum
082Z10,09: Porque eran bastante buenos y esto si lo entendieron bien.
083I10,10: No tuviste problema con ellos ¿no?
083Z10,19: Pero eran eso ....de la clase un par de alumnos tenía una clase con diez alumnos, eran muy poquitos eran…y pensé que sería buena idea trabajarlo haber como..como resultaba.
084I10,20: Uhum como reaccionaban. Claro.
084Z10,21: Y esos dos si lo entendieron y el resto…
085I10,22:Nada.
085Z10,24:Nada.

FASE 4: TÉRMINO

086I10,36: Es que es lo que tú dices claro es una amalgama tan grande de cosas que muchas veces les pone…les pone la barrera. Bueno pues entonces si quieres lo dejamos aquí,…., te lo agradezco muchísimo y…nada muchísimas gracias.
086Z10,37: No hay de qué.

CAPÍTULO 6º: Conclusiones y perspectivas

Si alguno dice: –Me he fatigado mucho, pero no he adquirido la ciencia–, no le prestéis fe.

Si dice: –La he encontrado sin fatiga–, no le deis fe.

Si dice: –Me he fatigado y la he encontrado–, creedle sinceramente.

Talmud

Introducción

A lo largo de los Capítulos 3º, 4º y 5º hemos:

- Analizado ocho definiciones de límite finito de una función en un punto.

- Descrito tres fenómenos (ADI, IVF e Iivs), estableciendo que siete definiciones organizan los dos primeros y la definición llamada "caracterización por sucesiones" (del límite finito de una función en un punto) organiza el primero y el tercero. Los dos primeros han sido estudiados en profundidad.

- Detectado los fenómenos ADI e IVF en procesos de enseñanza-aprendizaje, para lo cual estudiamos veintiocho libros de texto de secundaria y relatos de nueve profesores de matemáticas de bachillerato.

- Observado cómo los fenómenos ADI e IVF se emplean con al apoyo de algún sistema de representación (verbal, gráfico tabular o simbólico) y algún formato (ejemplo o definición).

- Enunciado un criterio para establecer si dos fenómenos son equivalentes y, por generalización, si dos definiciones, matemáticamente equivalentes, que, respectivamente, los organizan, son fenomenológicamente equivalentes.

- Aprendido a ubicar resolutores en el pensamiento matemático elemental o el pensamiento matemático avanzado en lo relativo al límite finito de una función en un punto, según que, después de usar el fenómeno ADI, den por terminado el trabajo o apelen al fenómeno IVF.

- Aportado evidencias para dar verosímilitud a las hipótesis, enunciadas en 2.3.3 y, con ello, dar lugar al logro de objetivos, enunciados en 2.3.2.

El apartado 6.1 retoma esta última cuestión. Sucesivamente, estudiamos la refutación de nuestras hipótesis (6.1.1) y valoramos el grado en que hemos alcanzado los objetivos (6.1.2), enumerando resultados obtenidos en la investigación y que están relacionados con los objetivos. Concluimos (6.1.3) mostrando la conexión que establecemos entre los capítulos de esta memoria y los objetivos e hipótesis que la han guiado.

En el apartado 6.2 mostramos perspectivas de aplicación de la investigación realizada y enunciamos cuestiones de investigación que quedan pendientes.

Concluimos (apartado 6.3) enfatizando la principal aportación de nuestra investigación: descripción y caracterización de dos fenómenos, ADI e IVF, organizados por definiciones de límite finito de una función en un punto y la observación de éstos en procesos de enseñanza-aprendizaje.

6.1 Objetivos e hipótesis

Pretendemos que las conclusiones de nuestra investigación sean aplicables en la enseñanza y aprendizaje del límite finito de una función en un punto y, para ello, tomamos la decisión de apoyar el trabajo en el pensamiento matemático elemental o avanzado, la fenomenología y las representaciones.

Durante la investigación, hemos establecido un criterio que permite asignar, a un modo de actuación matemática, en lo relativo al límite finito de una función en un punto, una de las dos etiquetas, PME o PMA (epígrafe 3.4.4). Hemos trabajado la fenomenología de Freudenthal (1983) con objeto de caracterizar fenómenos organizados por una variedad de definiciones (epígrafe 3.4.2 y apartado 3.5). Hemos puesto de manifiesto que cualquier definición formal, básicamente correcta, de límite finito de una función en un punto, organiza los mismos fenómenos (apartado 3.5); debemos exceptuar la llamada "caracterización por sucesiones" (epígrafe 3.6.2). No obstante, con el criterio que hemos enunciado, concluimos que existe equivalencia matemática y fenomenológica entre las definiciones estudiadas (epígrafe 3.6.3).

Al estudiar la definición hemos identificado un fenómeno de *"aproximación doble intuitiva"*, abreviado ADI. Ilustramos *modos de acercamiento* variados que corresponden al fenómeno ADI (epígrafe 3.2.2). Hemos comparado el fenómeno ADI y el fenómeno a.s.i, introducido por Claros (2010) (epígrafe 3.2.3); estos fenómenos son radicalmente diferentes, ya que en el fenómeno ADI se utiliza la intuición de la continuidad de la recta; se comprende así, que hallemos, para el fenómeno ADI, varios modos de acercamiento. Hemos visto que no es posible aceptar la idea de que el fenómeno ADI sea equivalente a dos fenómenos a.s.i coordinados por una dependencia funcional (un fenómeno a.s.i describiría el acercamiento de x a x_0 y otro describiría el acercamiento de f(x) a L); hay "algo más" en el fenómeno ADI; si este "algo más" procede exclusivamente de la intuición de la continuidad del intervalo, lo ignoramos; conjeturamos que dicha intuición genera un obstáculo para afrontar la definición, porque la intuición de la continuidad exige desprenderse del carácter discreto asociado (en las sucesiones) al acercamiento al límite y superar ese carácter discreto.

Hemos realizado un estudio detallado y minucioso de los contenidos matemáticos que se ponen en juego cuando se maneja una definición de límite finito de una función en un punto (epígrafe 3.3.3) y hemos llegado a describir y caracterizar el fenómeno de *retroalimentación o ida y vuelta en funciones*, abreviado IVF.

Siguiendo los trabajos de Blázquez y Ortega (2000) y de Claros (2010), hemos manejado los sistemas de representación verbal (V), gráfico (G), simbólico (S) y tabular (o numérico) (T) (apartado 3.8). Además de los sistemas de representación, Claros (2010) ha utilizado dos formatos de presentación, que ha denominado ejemplo (E) y definición (D) y hemos seguido este enfoque (apartado 3.8).

La revisión de antecedentes (Capítulo 1º) permitió definir, en el Capítulo 2º, el problema y las fases de la investigación. En los Capítulos 3º, 4º y 5º hemos desarrollado esas fases mediante un estudio teórico, un análisis de libros de texto y una interpretación homogénea de relatos de profesores de enseñanza secundaria o bachillerato.

Corresponde ahora retomar las hipótesis y objetivos, enunciados en el Capítulo 2º, y analizarlos teniendo en cuenta la información que hemos obtenido.

6.1.1 Refutación de hipótesis

La Tabla 6.1 resume la refutación de las hipótesis (enunciadas en el Capítulo 2º), y los capítulos en los que se han trabajado.

Tabla 6.1 Resumen de la refutación de hipótesis y los capítulos en los que se trabajan

Hipótesis	Refutación	Capítulos
HM1	No refutada	2º, 3º, 4º y 5º
HM2	Redacción refutada	2º, 3º, 4º y 5º
HT1	No refutada	3º
HT2	Refutada	3º
HT2B	No refutada	3º
HT3	No refutada	3º, 4º y 5º
HT4	No refutada	3º
HE1	No refutada	4º
HES1.1	No refutada	4º
HES1.2	Refutada	4º
HE2	No refutada	5º
HES2.1	Refutada	5º
HES2.2	Sin información para refutar	5º

A continuación desarrollamos el contenido de la Tabla 6.1.

Hipótesis metodológicas

-Hipótesis HM1: *El área problemática permite acercarse a la meta general de la investigación.*

Tras la revisión de antecedentes, llevada a cabo en el Capítulo 1º, hallamos un dilema en la literatura. Por una parte, se afirma que el formalismo no parece ser la vía más adecuada para transmitir la noción de límite en la educación preuniversitaria y, por otra, que sin una definición formal no podemos establecer de manera definitiva si una función tiene límite finito en un punto.

Para afrontar este dilema hemos descrito, en el Capítulo 2º, un Área Problemática que constituye un marco para resolver el dilema encontrado (o contribuir a resolverlo). Todo cuanto hemos obtenido en los Capítulos 3º, 4º y 5º se apoya en esa Área Problemática compuesta por el pensamiento matemático avanzado (y sus conexiones con el pensamiento matemático elemental), la fenomenología y los sistemas de representación. Las dos últimas componentes han permitido avanzar en la caracterización de fenómenos organizados por varias definiciones de límite finito de una función en un punto; la primera componente permite clasificar como PMA o PME a usuarios de una definición mediante un criterio que hemos enunciado y que se apoya en los fenómenos descritos. La fenomenología, de alguna manera, hace de "pivote" entre las otras dos.

Por todo ello, parece razonable considerar como no refutada nuestra primera hipótesis metodológica.

-Hipótesis HM2: *El problema de investigación seleccionado se afronta utilizando las herramientas presentadas.*

Si consideramos como "herramientas" las tres componentes del Área Problemática, la meta principal de la investigación se alcanza principalmente con dos de ellas: fenomenología y sistemas de representación. En los Capítulos 3º, 4º y 5º hemos desarrollado las dos etapas de la investigación apelando básicamente a dichas componentes. La tercera componente (pensamiento matemático, elemental o avanzado) ha servido principalmente para situar el contenido de la definición de límite finito de una función y para aportar un criterio con cuya ayuda, observando el comportamiento de usuarios de dicha definición, decidimos si los ubicamos en el PME o como el PMA.

Por ello consideramos *a posteriori* que nuestra segunda hipótesis metodológica debe incorporar tres ideas y proponemos una nueva redacción:

***-Hipótesis HM2NUEVA**: (A) Las definiciones de límite finito de una función en un punto se sitúan en el pensamiento matemático avanzado. (B) La fenomenología y los sistemas de representación permiten afrontar el problema de investigación seleccionado. (C) Las tres herramientas presentadas permiten enunciar un criterio para determinar si un usuario de una definición de límite finito de una función en un punto se "clasifica" en el pensamiento matemático elemental o en el avanzado.*

Esta nueva redacción es resultado de nuestra investigación; ésta la apoya y, por tanto, no puede refutar ninguna de las tres ideas indicadas.

Hipótesis teóricas

***-Hipótesis HT1:** La definición de límite finito de una función en un punto, conocida coloquialmente como "definición $\varepsilon-\delta$", organiza dos fenómenos: uno, de aproximación doble intuitiva (abreviado como ADI) y otro de ida-vuelta en funciones o retroalimentación (abreviado como IVF).*

En el análisis de la definición, conocida coloquialmente como "definición $\varepsilon-\delta$" de límite finito de una función en un punto, caracterizamos los fenómenos ADI e IVF. Hemos revisado diferentes maneras de presentar estos fenómenos apelando a cuatro sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico y tabular) y dos formatos (definición y ejemplo).

Para establecer el segundo fenómeno hemos reconocido los requisitos matemáticos asociados a una definición de límite finito de una función en un punto.

Pensamos, por tanto, que nuestra hipótesis teórica 1 se ha visto "confirmada" por el estudio del Capítulo 3º.

***-Hipótesis HT2:** Otras definiciones de límite finito de una función en un punto organizan los mismos fenómenos ADI e IVF.*

-Hipótesis HT2B: *Si se refuta HT2, se podrá establecer la equivalencia fenomenológica entre las definiciones de límite finito de una función en un punto que organicen fenómenos diferentes, con base en su equivalencia matemática*.

Hemos ampliado nuestro estudio teórico hasta abarcar ocho definiciones diferentes de dicho límite y hemos observado que, siete de ellas organizan los mismos fenómenos ADI e IVF. Sin embargo la última definición conocida como “caracterización por sucesiones”, pese a ser matemáticamente equivalente a las anteriores y organizar el mismo fenómeno ADI, no organiza el IVF, y en su lugar organiza el fenómeno que hemos denominado Iivs.

Este contraejemplo refuta la hipótesis teórica 2; como explicación avanzamos el “desplazamiento” de la intuición de la continuidad de la recta que ocurre en la “caracterización por sucesiones”.

Hemos establecido un criterio de equivalencia fenomenológica que permite considerar “equivalentes” los fenómenos respectivamente caracterizados en cada una de las definiciones estudiadas. Hemos concluido que todas las definiciones son matemática y fenomenológicamente equivalentes.

Por tanto,HT2B también se ha visto “confirmada” por el estudio del Capítulo 3º. En lo relativo a la equivalencia de fenómenos, al iniciar la investigación, habíamos supuesto una respuesta única y afirmativa; basándonos en la conocida equivalencia matemática entre ambas, lo que también se ha visto confirmado.

-Hipótesis HT3: *Los sistemas de representación influyen en la manera en que se presentan los fenómenos ADI e IVF*.

En el estudio teórico llevado a cabo en el Capítulo 3º, consideramos las formas posibles de presentar los fenómenos descritos. Al analizar libros de texto de enseñanza secundaria (Capítulo 4º), hemos observado que solamente 12 formas posibles (de 16) se encuentran en los libros de texto de la muestra. Desconocemos si una ampliación de la muestra de libros de texto traerá consigo una ampliación en el número de representaciones observadas. Los nueve profesores entrevistados apelan a casi todas las posibilidades halladas, aunque este resultado puede ser un efecto inducido por la elección de ejemplos que dimos, ya que se presentaron once fragmentos extraídos de los libros de texto estudiados en el Capítulo 4º. Las opciones de presentación de fenómenos no presentadas en las entrevistas a profesores son, para el fenómeno ADI, el sistema de representación simbólico y, para el fenómeno IVF, el sistema de representación tabular. En la memoria enfatizamos como curiosidad (dado que no tenemos muestras representativas) el hecho de que en el estudio llevado a cabo con profesores, todos los comentarios relativos al empleo del sistema de representación gráfico se realizan sobre el fenómeno ADI.

Se deduce que la hipótesis HT3, no queda refutada por lo afirmado en los Capítulos 3º, 4º y 5º. Queda pendiente de estudio la discrepancia entre representaciones posibles y representaciones efectivamente usadas, lo cual, acaso, se resolverá ampliando la muestra de libros de texto.

-Hipótesis HT4: *Los fenómenos ADI e IVF aportan un criterio que, por observación de un resolutor, permite decidir si, en lo relativo al límite finito de una función en un punto, éste maneja ideas del pensamiento matemático elemental (PME) o al pensamiento matemático avanzado (PMA).*

Al trabajar la noción de límite finito de una función en un punto a través de una definición formal se apela a los dos fenómenos. El fenómeno ADI está implícito; sin la componente intuitiva no tenemos candidato a límite y esto impide desarrollar la componente formal. Se trata de una cuestión compleja, porque el candidato a límite se busca usando algún modo de acercamiento y esta manera de actuar pronto se sustituye por el uso (generalmente, correcto) de teoremas que predicen el límite o la indeterminación mediante un simple análisis del aspecto de la expresión simbólica de la función. Cuando se está aprendiendo la definición, aún no se conocen esos teoremas y solamente cabe apoyarse en el fenómeno ADI que además de ayudar a obtener un candidato a límite, genera la necesidad de ser más convincente, necesidad que se satisfará con el fenómeno IVF. Por su parte este fenómeno, en su abstracción, supone conocido el límite y confirma dicho conocimiento con los medios matemáticos disponibles. De hecho, si la definición formal se aplicara a un valor cualquiera, obtenido aleatoriamente, para el límite, el fenómeno IVF no sería productivo, por la inadecuada elección del valor del supuesto límite.

Hemos establecido el siguiente criterio: cuando, al manejar la "definición $\varepsilon-\delta$" de límite finito de una función en un punto, alguien apela sucesivamente a los fenómenos ADI e IVF, lo incluimos en el PMA; en cambio, si apela al fenómeno ADI pero no al fenómeno IVF, lo incluimos en el PME. Este criterio es observable por conversación o por estudio de la producción de una persona.

Por todo lo anterior parece sensato considerar como “confirmada” (no refutada) nuestra HT4.

Hipótesis experimentales

***-Hipótesis HE1:** Es posible observar los fenómenos estudiando una muestra amplia de libros de texto de secundaria o bachillerato*.

El Capítulo 4º se ha dedicado a la no refutación de esta hipótesis, aunque hemos de reconocer que la voz “amplia” es discutible, porque no la hemos definido ni acotado. Hemos empleado códigos de fenómeno (es decir, abreviaturas mnemotécnicas que recuerdan el fenómeno, el sistema de representación y el formato) para indicar los fenómenos ADI e IVF detectados en una muestra de veintiocho libros de texto. La frecuencia de uno u otro fenómeno varía según los periodos educativos considerados. Destacamos cómo, en nuestra muestra, se pasa de un mayor uso del fenómeno IVF en los primeros períodos analizados (1933-1966), a una inversión en dicho uso, pasando a ser mayor la frecuencia del fenómeno ADI durante el período “LOGSE” (1995-2005).

El método desarrollado permite detectar los fenómenos indicados en cualquier libro de texto de secundaria.

Hipótesis secundarias relacionadas con HE1

***-Hipótesis HES1.1:** Con ayuda de los períodos educativos descritos en Sierra (1999), un muestreo de libros de texto permite describir la evolución en el tiempo de los fenómenos observados*.

La no refutación de esta hipótesis se desprende también del contenido del Capítulo 4º. Hemos realizado un agrupamiento de los libros de texto siguiendo el criterio establecido por Sierra (1999) y ampliando sus periodos debido a la fecha de publicación de alguno de los libros contenidos en nuestra muestra. Una vez observados los fenómenos ADI e IVF en los libros considerados, analizamos la evolución en cada uno de los períodos que se habían establecido. Debe resaltarse que la máxima variedad de códigos de fenómenos se da en el período llamado de la “Reforma Educativa”, previo a la promulgación de la LOGSE.

-Hipótesis HES1.2: *El fenómeno ADI se observa con mucha más frecuencia en los libros de texto que el fenómeno IVF*.

Los resultados obtenidos en el Capítulo 4º refutan esta hipótesis. En el recuento total de los fenómenos, observamos una frecuencia de 88 para el fenómeno ADI y de 85 para el fenómeno IVF. Sin embargo, al considerar el período 1995-2005, el recuento de frecuencias da 45 para el fenómeno ADI y 9 para el fenómeno IVF. Por ello, en dicho período hay argumentos para pensar que la hipótesis no se refuta.

Uno de los supuestos usados en el análisis de libros de texto realizado en el Capítulo 4º (los períodos considerados por Sierra más los dos que hemos incluido) puede modificarse en lo relativo al lìmite finito de una función en un punto. Hemos establecido tres periodos: el primero de ellos abarca hasta los años 70, y se caracteriza por una frecuencia relativa mayor para el fenómeno IVF, que fue el más usual en los libros de texto; muchos de éstos, ni siquiera creen apoyarse en la necesaria componente intuitiva exigida por la definición estudiada. El segundo período corresponde a la década de los 80, en estos años, los autores afrontan un problema de decisión que se pone de manifiesto en la variedad de ensayos y un correspondiente equilibrio en las frecuencias de ambos fenómenos. El último período corresponde a libros publicados a partir de 1990; en ellos, el uso del fenómeno ADI pasa a ser preponderante; en los cuatro últimos libros analizados (LF00001, LF00002, LF00003 y LF00004) únicamente observamos el fenómeno ADI. En este período se observa una reducción de los sistemas de representación, con aumento en la tendencia de uso del sistema de representación verbal.

-Hipótesis HE2: *Es posible detectar los fenómenos en los relatos de profesores de secundaria sobre sus clases*.

Esta hipótesis no la hemos refutado, como se deduce del estudio realizado en el Capitulo 5º, en el que hemos puesto de manifiesto el uso de los fenómeno ADI e IVF en los relatos de nueve profesores de matemáticas de secundaria y bachillerato. Cuando los profesores afirmaron que empleaban el fenómeno IVF en su aula, advirtieron que lo hacían para trabajar con un alumnado concreto y no como explicación sistemática para toda la clase.

Hipótesis secundarias relacionadas con HE2

-Hipótesis HES2.1: *Los profesores emplean exclusivamente el fenómeno ADI en el aula*.

Esta hipótesis queda refutada, ya que varios profesores de la muestra afirman emplear el fenómeno IVF en sus aulas, aunque matizan que lo hacen siempre y cuando trabajen con alumnos concretos.

Los resultados obtenidos conducen a enunciar una hipótesis algo diferente:

-Hipótesis HES2.1NUEVA: *El fenómeno ADI es utilizado en el aula por la mayoría de los profesores; los que emplean el fenómeno IVF, lo hacen cuando trabajan con un alumnado específico*.

-Hipótesis HES2.2: *El profesorado separa una definición formal de límite finito de una función en un punto de un acercamiento intuitivo a ese límite cuando ambos fenómenos están incluidos en dicha definición formal*.

Los resultados obtenidos en el Capítulo 5º no aportan información sobre esta hipótesis. Al trabajar la noción de límite finito de una función en un punto, hay profesores que exponen notables dificultades si se pasa de forma "natural" de usar el fenómeno ADI al IVF; estos profesores detectan bien las dificultades técnicas que surgen del formalismo, mas los propios fenómenos pasan desapercibidos en el proceso de enseñanza.

6.1.2 Consecución de objetivos

Retomamos los objetivos propuestos y enunciados en el Capítulo 2º. Analizamos el "logro" de los objetivos usando la refutación de hipótesis como criterio. Exponemos resultados y conclusiones relevantes de cada una de las etapas por las que ha transcurrido la investigación y las relacionamos con la consecución de cada uno de los objetivos descritos.

La Tabla 6.2 resume la información sobre la consecución de los objetivos.

Tabla 6.2 Resumen de las conexiones entre la consecución de los objetivos, la refutación de las hipótesis y los capítulos en los que se trabajan

Objetivos	Hipótesis	Capítulos
Objetivo 1	(No)	1º y 2º
Objetivo 2	HM1 y HM2	2º, 3º, 4º y 5º
Objetivo 3	HT1, HT2, HT2B, HT3 y HT4	1º, 3º y 4º
Objetivo 4	HT1, HT2, HT2B, HT3 y HT4	3º
Objetivo 5	HE1, HES1.1, HES1.2	4º
Objetivo 6	HE2, HES2.1, HES2.2	5º

A continuación desarrollamos el contenido de la Tabla 6.2.

Objetivos Específicos:

-Objetivo 1: *Revisar y estudiar el campo de conocimientos actual en torno a la noción de límite finito de una función en un punto, sacando a la luz intereses, problemas y limitaciones enunciados*.

En el Capítulo 1º hemos presentado un resumen estructurado de la información obtenida en la revisión de antecedentes sobre la noción de límite en general y límite finito de una función en un punto en particular. Asimismo, en el Capítulo 2º hemos estudiado las relaciones más destacadas entre los distintos campos revisados.

Entendemos que el contenido de los Capítulos 1º y 2º permite considerar logrado el primer objetivo. Entre los resultados y conclusiones obtenidos de la revisión de antecedentes, y por tanto relacionadas directamente con el objetivo 1, destacamos los siguientes:

1. El llegar a una definición de límite no ha sido tarea fácil; tres definiciones (las de D'Alembert, Cauchy, y Weierstrass-Heine) perfilaron el conocimiento sobre esta noción; las definiciones actuales tienen un aspecto muy próximo a la tercera.
2. En los últimos años, se han producido avances en las preguntas de investigación que se plantean desde el Pensamiento Matemático Avanzado. Entre ellas, cabe mencionar las preguntas sobre dificultades asociadas a la noción de límite finito de una función en un punto. Hemos puesto de manifiesto que la definición es compleja, no es evitable y arranca con una parte intuitiva que está implícita en la declaración del valor del candidato a límite.

3. En la mayoría de los estudios que hemos citado, los investigadores se han ocupado del límite en general, sin tratar de manera diferenciada los objetos (sucesiones, funciones) ni los tipos de límites (límites finitos o infinitos).
4. Los procesos infinitos, el infinito actual y el infinito potencial son necesarios para el estudio del límite.
5. Las investigaciones centradas en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza del límite se suelen orientar bien en el trabajo con alumnos, analizando las dificultades que encuentran cuando se les presenta dicha noción, o bien en el trabajo de los profesores, analizando su práctica docente en lo que se refiere a la enseñanza del límite.
6. Hay investigadores que parecen coincidir en que el trabajo con ordenador es beneficioso, incluso imprescindible, en el desarrollo de una secuencia didáctica para la enseñanza del límite. Sin embargo, en el momento actual, parece que aún no se ha conseguido simular la intuición de la continuidad de la recta en un ordenador.
7. El conocer las ideas previas, imágenes e intuiciones que los alumnos tienen sobre la noción de límite parece acertado a la hora de diseñar una secuencia didáctica adecuada.
8. El uso del lenguaje es un problema añadido a la hora de trabajar la noción de límite, la cual está asociada a términos tales como “tender a”, “aproximarse”, o “muy próximo a”, que reciben (a) significados coloquiales diferentes del significado matemático y (b) dos “lecturas”, una discreta y otra continua.
9. El lenguaje formal, en la definición de límite, en la cual se usan cuantificadores, supone un serio problema de conocimiento para los alumnos.
10. Con respecto a los obstáculos, destacamos los que han surgido históricamente, como la noción metafísica de límite; la noción de infinitamente pequeño y de infinitamente grande; el límite puede ser alcanzado; y la transposición numérica. Es necesario añadir lo que algunos investigadores consideran como obstáculos epistemológicos: conocimiento científico, infinito, función y número real.
11. Muchos autores de los autores mencionados han señalado dificultades de alumnos cuando se enfrentan a la noción de límite, mostrando, en ciertos casos, que las

concepciones de los alumnos son diferentes de la definición de límite y tienen relación con las concepciones que han aparecido a lo largo de la historia de las matemáticas sobre el límite.

12. El trabajar con una definición alternativa que ponga en juego conceptos tales como aproximación y tendencia, y que considera al límite como la aproximación óptima, es una alternativa planteada para enfrentarse a la dificultad que supone manejar la definición de límite.

13. En España el marco curricular de educación secundaria (sucesivamente: LOGSE, LOCE y LOE), establece una serie de representaciones para el concepto de función y explicita criterios para la introducción del límite. Uno de ellos es la introducción intuitiva del concepto de límite finito de una función en 1º de bachillerato con apoyo gráfico y calculadora (LOE, decreto 67/2008, 19 de junio, BOCM) o también la introducción previa del límite de una sucesión para a continuación introducir el límite de una función (LOCE, decreto 832/2003, 27 junio, BOE).

***-Objetivo 2:** Describir un Área Problemática que permita un estudio minucioso del límite finito de una función en un punto*.

La consecución de este objetivo específico viene dada por la refutación de las hipótesis metodológicas HM1 y HM2.

De las tres componentes del Área Problemática que hemos descrito en el Capítulo 2º dos de ellas (fenomenología y sistemas de representación) han permitido un acercamiento seguro a la meta general. Las etapas teórica y experimental de esta investigación (Capítulos 3º, 4º y 5º) apelan básicamente a esas componentes. El pensamiento matemático, elemental o avanzado, ha servido para situar el contenido de la definición de límite finito de una función en un punto y para profundizar en la observación de usuarios de dichas definiciones.

***-Objetivo 3:** Reconocer requisitos necesarios para manejar una definición de límite finito de una función en un punto y distinguirlo de otros límites (funciones con límite infinito en un punto, límites de funciones en el infinito, y límites finitos e infinitos de sucesiones)*.

Creemos que este objetivo se ha logrado a lo largo de los Capítulos 1º, 3º y 4º, y su consecución viene determinada por la confirmación o refutación de las hipótesis teóricas (HT1 a HT3). Las siguientes consideraciones constituyen una selección del contenido de estos capítulos que lleva a considerar cubierto el objetivo.

En el Capítulo 1º se indican dificultades asociadas a la presentación de la noción de límite.

En el Capítulo 3º hemos descrito los elementos necesarios para manejar la noción de límite finito de una función en un punto y lo hemos distinguido de otros límites, como el límite finito de una sucesión. Los requisitos matemáticos necesarios para el manejo de la noción de límite finito de una función en un punto (como cota, valor absoluto, procesos infinitos o tipos de infinito), lo distinguen significativamente de otras nociones de límite. En trabajos anteriores (Claros, Sánchez y Coriat, 2006; 2007) se analizaron diferencias y analogías entre la definición de límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto. Las diferencias corroboran la necesidad de estudiar cada una de las definiciones de manera independiente, como se ha hecho en el Capítulo 3º.

En el Capítulo 4º hemos estudiado el único libro de la muestra cuyo autor intentó unificar las nociones de límite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto; ningún autor, que sepamos, le siguió en este enfoque (Rey Pastor, 1933).

-Objetivo 4: *Estudiar definiciones de límite finito de una función en un punto desde una perspectiva fenomenológica y detectar, describir y caracterizar fenómenos para los que dichas definiciones son medio de organización.*

Tras el estudio realizado en 6.1.1 sobre las hipótesis teóricas, entendemos que este objetivo se ha alcanzado con el estudio teórico realizado en el Capítulo 3º.

En este capítulo hemos analizado detalladamente la definición, conocida como "definición $\varepsilon-\delta$" de límite finito de una función en un punto, lo que ha llevado a describir y caracterizar los fenómenos ADI e IVF. Hemos puesto de manifiesto las diferentes maneras de presentar estos fenómenos apelando a cuatro sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico y tabular) y dos formatos (definición y ejemplo). Hemos ampliado nuestro estudio hasta abarcar ocho definiciones diferentes y hemos estudiado los fenómenos que organizan, observando cómo siete de ellas organizan los mismos fenómenos, y cómo esto no ocurre con la definición conocida como "caracterización por sucesiones", que organiza los fenómeno ADI e Iivs. Además, hemos establecido un criterio de equivalencia de fenómenos que nos lleva a concluir que todas las definiciones estudiadas de límite finito de una función en un punto son matemáticamete y fenomenológicamente equivalentes.

-Objetivo 5: *Detectar de esos fenómenos en libros de texto de secundaria y organizar la información obtenida.*

-Objetivo 5.1*: Construir tablas de frecuencias observadas de los fenómenos.*

-Objetivo 5.2*: Comparar las frecuencias observadas de los fenómenos y establecer relaciones entre ellas.*

-Objetivo 5.3*: Establecer períodos temporales al analizar los libros con el fin de observar la evolución de los fenómenos a través del tiempo.*

-Objetivo 5.4*: Analizar las frecuencias de los fenómenos en función de los periodos temporales considerados.*

-Objetivo 5.5*: Estudiar correlaciones entre las frecuencias observadas de los fenómenos teniendo en cuenta los sistemas de representación o los periodos de tiempo considerados.*

Este objetivo se alcanza como consecuencia del estudio realizado sobre las hipótesis experimentales HE1, HES1.1 y HES1.2. Los resultados y conclusiones, expuestos en el Capítulo 4º, de los cuales presentamos a continuación una selección, aportan información suficiente para considerar cubierto el objetivo específico 5 y los objetivos complementarios 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 y 5.5.

1. Se han analizado 28 libros que abarcan el intervalo de años comprendido entre 1933 y 2005.

2. Con respecto al fenómeno ADI, el código de fenómeno ADI V-E, con 31 ocurrencias, es el de mayor frecuencia absoluta, seguido, en frecuencia, por el código de fenómeno ADI T-E, con 22 ocurrencias. Los códigos de fenómeno ADI T-D y ADI S-E no se observan en ninguno de los libros estudiados. El código de fenómeno ADI S-E se observa solamente en una ocasión.

3. El sistema de representación verbal es el más empleado para el fenómeno ADI, seguido por los sistemas de representación tabular y gráfico. Por lo que respecta a los formatos, la relación formato ejemplo a formato definición es de aproximadamente 3 a 1.
4. Con respecto al fenómeno IVF, el código de fenómeno IVF V-D, con 21 ocurrencias, es el de mayor frecuencia absoluta, seguido del IVF S-D, con 17 ocurrencias. Los códigos de fenómeno IVF T-E e IVF T-D no se observan en ninguno de los libros estudiados.
5. El sistema de representación verbal es el más empleado para el fenómeno IVF en los libros de texto, seguido por los sistemas de representación simbólico y gráfico; la representación tabular no se emplea en la muestra.
6. La frecuencia acumulada del fenómeno ADI (88 ocurrencias) supera a la frecuencia acumulada del fenómeno IVF (85 ocurrencias).
7. La frecuencia del fenómeno ADI va creciendo hasta alcanzar su máximo en el período LOGSE (1995-2005).
8. La representación verbal, en el fenómeno ADI, está más asociada a ejemplos; la razón de uso es aproximadamente de 2 a 1, de ejemplo a definición, en dicha representación.
9. La representación tabular, en el fenómeno ADI no se observa con una frecuencia considerable hasta el período 1975-1994. Su frecuencia aumenta en el período 1995-2005.
10. Los códigos de fenómeno ADI G-E y ADI G-D no se observan hasta el último periodo considerado.
11. El fenómeno IVF se ha observado en todos los periodos considerados, siendo el de mayor frecuencia absoluta el período 1975-1994.
12. Los códigos de fenómeno IVF S-E e IVF S-D disminuyen notablemente su frecuencia a partir del año 1995.
13. El fenómeno ADI casi no se observa hasta el período 1975-1994, donde recibe un extenso uso.

14. En el periodo 1995-2005, el fenómeno ADI se halla asociado, principalmente, a los códigos de fenómeno ADI V-E y ADI T-E con 14 ocurrencias para ambos.
15. El fenómeno IVF tiene su mayor frecuencia absoluta (48 ocurrencias) en el período 1975-1994.
16. En el período 1995-2005 la razón de uso del fenómeno ADI al fenómeno IVF es de 5 a 1 (45:9).

-Objetivo 6: *Detectar esos fenómenos en los relatos de profesores.*

-Objetivo 6.1*: Enunciar dimensiones y categorías para la interpretación homogénea de la información obtenida, incluyendo la posible influencia de la investigadora.*

-Objetivo 6.2*: Conocer fenómenos utilizados por los profesores en las aulas y, en su caso, establecer la prevalencia de alguno de ellos.*

-Objetivo 6.3*: Precisar los sistemas de representación empleados para presentar los fenómenos.*

-***Objetivo 6.4:*** *Comparar los resultados con los obtenidos del análisis de libros de texto.*

-Objetivo 6.5*: Establecer perfiles de profesores. Caracterizar diferentes perfiles.*

El logro de este objetivo es consecuencia del estado de refutación de las hipótesis HE2, HES2.1 y HES2.2. Del mismo modo, las conclusiones obtenidas y expuestas en el Capítulo 5º, respaldan de forma satisfactoria la consecución de los objetivos complementarios.

Recogemos a continuación algunos resultados obtenidos del estudio de los relatos de profesores de enseñanza secundaria y bachillerato.

1. Los comentarios de los profesores de nuestra muestra referentes al uso del fenómeno ADI prevalecen sobre los de uso del fenómeno IVF, dando con ello idea de lo que sucede en el aula.
2. El sistema de representación simbólico aparece únicamente en algunos fragmentos que contienen el fenómeno IVF, los profesores que lo utilizan lo hacen al trabajar con alumnos concretos y en la mayoría de los casos con el formato definición.

3. Algunos de los profesores que lo utilizan en el aula hacen comentarios positivos sobre el sistema de representación tabular asociado con el uso de la calculadora; también hay profesores que afirman no utilizarlo en sus aulas por una dificultad detectada en su empleo.

4. Los profesores utilizan el sistema de representación verbal para trabajar ambos fenómenos, aunque emplean en más ocasiones para el fenómeno ADI que para el IVF.

5. Los profesores consideran el sistema de representación gráfico mucho más apropiado para trabajar en el aula el fenómeno ADI que el IVF.

6. La inmensa mayoría de comentarios referentes a dificultades concretas observadas en los fragmentos, se ha referido a los que contienen el fenómeno IVF; se han expuesto en contextos relacionados con el formalismo, como: los valores absolutos, el empleo del ε y el δ, las desigualdades, los entornos, etc.

Hemos conseguido un acercamiento a la meta general de la investigación, que enunciamos (en 2.3.2) así: *obtener información sobre los fenómenos organizados por una variedad de definiciones de límite finito de una función en un punto, caracterizarlos, establecer relaciones y buscar evidencias que validen externamente su presencia en los procesos de enseñanza- aprendizaje*.

El logro de los objetivos 1, 2, 3 y 4 aporta información sobre fenómenos organizados por las ocho definiciones de límite finito de una función en un punto que se han trabajado en la investigación; los hemos caracterizado, y hemos establecido relaciones entre ellos y con la propia definición. Además, el logro de los objetivos 5 y 6 ha permitido un acercamiento significativo a la validación externa del uso de estos fenómenos en procesos de enseñanza- aprendizaje.

6.1.3 Capítulos, objetivos e hipótesis

La Tabla 6.3 (página siguiente) resume el contenido de cada capítulo, las hipótesis y los objetivos.

Tabla 6.3 Resumen de las conexiones entre los Capítulos, los objetivos y las hipótesis.

Capítulo	Objetivos	Hipótesis
1º	1 y, en parte, 3	(No)
2º	1 y 2	HM1 y HM2
3º	2, 3 y 4	HM1, HM2, HT1, HT2, HT2B, HT3 y HT4.
4º	2, 3 y 5	HM1, HM2, HT3, HE1, HES1.1 y HES1.2
5º	6	HM1, HM2, HT3, HE2, HES2.1 y HES2.2

El Objetivo 1 y una parte del Objetivo 3 se estudian en el Capítulo1º.

Abordamos las Hipótesis Metodológicas y los Objetivos 1 y 2 teniendo en cuenta el Área Problemática descrita en el Capítulo 2º.

Parte del contenido de las hipótesis metodológicas (HM) y teóricas (HT), se trabaja en el Capítulo 3º.

Obtenemos conclusiones relativas a los Objetivos 2, 3 y 4 a través del estudio teórico presentado en el Capítulo 3º.

Algunas de las afirmaciones realizadas sobre los Objetivos 2, 3 y 5, se apoyan en el estudio de libros de texto de enseñanza secundaria desarrollado en el Capítulo 4º. En este capítulo hemos obtenido resultados que permiten tomar decisiones sobre la confirmación o refutación de las Hipótesis Metodológicas, la Hipótesis Teórica HT3 y las Hipótesis Experimentales HE1, HES1.1 y HES1.2.

El Objetivo 6, se trabaja en el Capítulo5º, que se dedica al estudio de relatos de profesores; esto permite estudiar los contenidos de las Hipótesis Metodológicas, la Hipótesis Teórica HT3 y las Hipótesis Experimentales HE2, HES2.1 y HES2.2.

6.2 Perspectivas y expectativas

A lo largo de la investigación han surgido dificultades que hemos tratado de afrontar. Algunas de ellas han sido resueltas con éxito, mientras que otras han dado lugar a preguntas o a futuras investigaciones.

Entre las dificultades resueltas con éxito destacamos:

- Elegir una definición con la que iniciar el estudio teórico de la noción, y poner de manifiesto la no arbitrariedad de dicha elección.

- Contar con una muestra de libros de texto que tuviese, al menos, tres libros por cada uno de los periodos descritos y utilizados.

- Conseguir que la muestra de libros fuese variada respecto a editoriales y autores.

- Establecer un criterio de análisis sistemático para el análisis de libros de texto, que permitiese buscar eficientemente los fenómenos.

- Disponer de un patrón común para generar respuestas de profesores que permitiera realizar a posteriori un estudio individual sistemático y estudios más globales.

- Realizar las entrevistas a profesores de diferentes centros, sexo y experiencia docente.

De las que se han dejado abiertas, resumimos las más significativas:

- La revisión de antecedentes debe mantenerse actualizada. Aunque la lectura de documentos sea continuada, su incorporación en la revisión pensamos que debe hacerse cada cinco años.

- Hemos descrito y caracterizado dos fenómenos organizados por una variedad de definiciones de la noción de límite finito de una función en un punto. Además de éstos, ¿organizan las definiciones algún fenómeno más que no hemos reconocido ni detectado? En caso afirmativo, ¿cuál es su relación con los fenómenos ya descritos?

- Es necesario estudiar los mismos fenómenos, o fenómenos análogos, en otras definiciones de límite: límite infinito en un punto, límite finito en el infinito o límite infinito en el infinito. En el caso del límite finito en el infinito, será necesario comparar los resultados que se obtengan con las conclusiones de Claros (2010).

- Conviene analizar la presencia de fenómenos ADI e IVF en otras nociones del análisis en las que aparece implícito el límite finito de una función en un punto, como pueden ser las derivadas o las integrales.

- Nuestro trabajo experimental se "cerraría" mejor si incluyéramos un estudio para detectar estos fenómenos en las respuestas de los alumnos. (Véase figura 2.1). Este estudio aportaría una visión de los fenómenos que tienen las personas a las que va dirigido el proceso de enseñanza-aprendizaje. Pensamos que es posible observar los códigos de fenómeno en las justificaciones que den los alumnos sobre cuestiones que se le planteen, ya sea mediante cuestionarios o entrevistas.

- Las conclusiones obtenidas con el análisis de libros de texto, ¿se mejorarían con una muestra más amplia?

- Queda pendiente de estudio la discrepancia entre representaciones posibles (16) y representaciones efectivamente observadas (12) y las utilizadas en las entrevistas (11).

- La muestra que hemos usado en las entrevistas a profesores desarrollada en el Capítulo 5º no permite generalizar. No recomendamos que se hagan y analicen entrevistas a más profesores, porque el trabajo de estudio e interpretación es excesivamente largo y costoso en tiempo. En lugar de repetir entrevistas, usaremos la información aquí obtenida, debidamente mejorada mediante consultas a profesores, para elaborar un cuestionario que, con respecto al uso o no uso de los fenómenos en clase, permita obtener claves de los relatos. Tales cuestionarios constituirán un avance con respecto al trabajo contenido en esta tesis. En su elaboración, refinaremos las categorías, las dimensiones y los tipos de perfiles, incorporando en éstos información obtenida a partir de la componente visual de los perfiles. En esa ampliación de la muestra tendría cabida también un estudio de la relevancia de los formatos en sus relatos.

- Convendrá utilizar los resultados de la investigación en el diseño experimental de secuencias didácticas para la enseñanza y aprendizaje de la noción de límite finito de una función en un punto. En ellas se han de trabajar los fenómenos ADI e IVF. En un trabajo del equipo de investigación (Claros, Sánchez y Coriat, sometido para publicación), se ha diseñado una secuencia didáctica basada en los fenómenos a.s.i e i.v.s para la noción de límite finito de una sucesión, lo que da confianza para pensar que nuestra investigación permita el diseño de tal secuencia.

- Realizar estudios experimentales de integración de los fenómenos en el currículo de matemáticas de enseñanza secundaria y bachillerato.

- En caso de diseñar secuencias didácticas en las que se trabajen los fenómenos, será necesario estudiar las dificultades que generará su empleo escolar.

6.3 Conclusión de la memoria

La presente investigación partió de una idea no explícita de “doble aproximación”, contenida en la noción de límite finito de una función en un punto, que movió a la investigadora a iniciar una búsqueda bibliográfica sobre la literatura relativa al asunto.

Cuando comenzamos nuestra investigación, observamos que eran muy numerosos los trabajos que trataban los problemas relativos a la noción de límite en general. Los estudios que hasta entonces se habían realizado trataban la noción desde puntos de vista diferentes. Algunas aportaciones se ocupaban de los problemas de la enseñanza de la noción; otras, de las dificultades de la definición del límite debidas al simbolismo. También se habían considerado los inconvenientes que surgen como consecuencia del lenguaje empleado en la indagación, al igual que hallamos reflexiones centradas en el desarrollo histórico de la idea de límite. Llamó bastante la atención del equipo de investigación el hecho de que la mayoría de los estudios examinados no distinguían los objetos (sucesiones, funciones) ni los tipos de límites (límites finitos o infinitos, por ejemplo). Esto llevó a estudiar, en un intento de afinar las respectivas caracterizaciones y de abundar en la riqueza de los matices, analogías y diferencias entre la noción de límite finito de una sucesión y la de límite finito de una función en un punto.

En los últimos años, se han producido mejoras, que hemos recopilado, en las preguntas de investigación que se plantean desde el Pensamiento Matemático Avanzado; nuestro trabajo contribuye a responder a una de esas preguntas, basándonos en la fenomenología de Freudenthal (1983) y las representaciones. Hemos puesto de manifiesto la potencia del Área Problemática descrita para afrontar el estudio de la noción de límite finito de una función en un punto.

El principal aporte de nuestra investigación (los fenómenos ADI, IVF e Iivs) ha sobrevenido como consecuencia del análisis fenomenológico de la definición de límite finito de una función en un punto, conocida coloquialmente como “definición $\varepsilon-\delta$”. Este estudio, realizado paralelamente con la investigación de Claros (2010), que trata las sucesiones con límite finito, dio lugar a la observación de al menos tres fenómenos concurrentes en la noción de límite finito de una función en un punto, fenómenos que a posteriori fueron analizados en una variedad de definiciones de la noción, y que sirven como elemento diferenciador entre las diferentes definiciones de límite. A lo largo de la investigación también hemos observado cómo, y en qué contextos, para hacer patentes estos fenómenos, se emplea algún sistema de representación (verbal, gráfico tabular o simbólico), y algún formato específico (ejemplo o definición).

Esperamos con nuestro estudio haber hecho una modesta aportación a la Didáctica de la Matemática.

Anexo A6.1 Marco personal y profesional

El periodo docente previo a esta investigación se llevó a cabo durante el bienio 1998-2000, en el Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga, bajo la tutela de los doctores Alfonso Ortiz Comas (qepd) y José Luis González Marí. Dicha etapa dio lugar a la Memoria de Tercer ciclo titulada "La doble aproximación en el límite funcional" (Sánchez, 2000).

A partir del año 2000 se inicia un equipo de investigación formado por la investigadora, Francisco Javier Claros Mellado y Moisés Coriat Benarroch. Desde los comienzos, el doctor Coriat asumió la dirección de las dos investigaciones surgidas del trabajo en equipo: Claros (2010) y la presente memoria. Desde el 29 de Junio de 2010, se han incorporado a las tareas de dirección los doctores Francisco Javier Claros Mellado y María Consuelo Cañadas Santiago.

El trabajo se ha desarrollado en el seno del grupo de investigación "FQM-0193: Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" del III Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía, cuyo director es el Dr. Luis Rico Romero.

Durante todo el periodo en el que se ha llevado a cabo la investigación, la investigadora ha ejercido su labor docente impartiendo clases de Matemáticas a alumnos de educación secundaria y bachillerato; en institutos públicos y concertados dependientes de la Junta de Andalucía, y ha realizado una intensa labor educativa en un centro privado de enseñanzas no regladas.

Para el desarrollo de los estudios de campo hemos contado con la inestimable colaboración de 13 profesores de matemáticas (que llevan a cado su labor docente en diferentes centros públicos y concertados de la Junta de Andalucía) y de las bibliotecas del I.E.S Pedro Espinosa de Antequera, I.E.S Mayorazgo de Málaga y del I.E.S Cristóbal de Monroy de Alcalá de Guadaira. Igualmente hemos recurrido a la Biblioteca Nacional y a las bibliotecas personales del profesor Miguel Herrero y de los miembros del equipo de investigación.

El estado y la evolución de la investigación han sido debatidos con investigadores en Educación Matemática.

Hemos presentado comunicaciones sobre nuestro trabajo en los siguientes Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM):

- X Simposio de la SEIEM (Huesca, 2006).
- XIII Simposio de la SEIEM (Santander, 2009).

También hemos presentado la evolución de nuestros trabajos en seminarios del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM. En ellos, hemos tenido la oportunidad de debatir cuestiones específicas sobre temas de investigación relacionados con los intereses del equipo de investigación. Hemos presentado comunicaciones en los siguientes seminarios:

- III Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico
(Granada, 2000).
- V Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico
(Palencia, 2001).
- VII Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico
(Madrid, 2006).
- VIII Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico
(Madrid, 2007).
- IX Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico
(Madrid, 2008).
- Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico. Historia de la Matemática y Educación Matemática
(Granada, 2011).

Los avances de la investigación también han sido presentados en dos seminarios impartidos en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Didáctica de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga y en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. El primero, titulado “La ‘Doble Aproximación’ en el límite funcional”, se celebró el día 3 de abril de 2001, en la Sala de Grados de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga. El primero, titulado “Límite finito de una función en un punto y relatos de profesores de matemáticas: Perfiles Fenomenológicos”, tuvo lugar en la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada el día 4 de Marzo de 2011.

El equipo de investigación se ha reunido con los doctores/as Carmen Azcárate, Modesto Sierra, Tomás Ortega y Mª Victoria Velasco para presentar los avances de la investigación y recibir sus relevantes comentarios.

A lo largo de la investigación son varias nuestras aportaciones en diversos foros relacionados con la Didáctica de la Matemática. La mayoría de ellas han sido debatidas dentro de los foros en los que fueron presentadas, los cuales han sido mencionados en el epígrafe anterior.

La Tabla 6.4, recoge resumidamente la información que se utilizará a lo largo del desarrollo de la investigación.

Tabla 6.4 *Resumen de aportaciones a lo largo de la investigación*

Año	Foro	Título
2000	III Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico	Concepto de límite desde el análisis no estándar
2001	V Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico	La "Doble Aproximación" en el límite funcional
2001	Universidad de Málaga	La "Doble Aproximación" en el límite funcional
2006	Revista Indivisa, IV	Fenómenos relacionados con el límite finito
2006	Actas de la X SEIEM	Fenómenos que organizan el límite
2007	Revista Indivisa, V	Fenómenos que organizan el límite: diseño de un instrumento
2007	Revista, PNA	Fenómenos que organizan el límite
2009	Revista Indivisa, VII	Límite de una sucesión: respuestas de los alumnos de 1º y 2º de bachillerato
2009	Revista Indivisa, VII	El límite finito de una función en un punto: relatos de su tratamiento en el aula
2009	Actas de la XIII SEIEM	Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy
2011	Investigaciones en Pensamiento Numérico y algebraico. Historia de la Matemática y Educación Matemática	Límite finito de una función en un punto y relatos de profesores de matemáticas: perfiles fenomenológicos
2011	Investigaciones en Pensamiento Numérico y algebraico. Historia de la Matemática y Educación Matemática	Limite de una sucesión y fenómenos que organiza cada definición
2011	Universidad de Granada	Límite finito de una función en un punto y relatos de profesores de matemáticas: Perfiles Fenomenológicos

Referencias bibliográficas

Abellanas Cebollero, P., García Rúa, J., Rodriguez Labajo, A., Casulleras Regás, J., & Marcos de Lanuza, F. (1967). *Bachillerato Superior. Matemática Moderna 5º Curso*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Abellanas Cebollero, P., García Rúa , J., Rodríguez Labajo, A., Casulleras Regás, J., & Marcos de Lanuza, F. (1969). *Bachillerato Superior. Matemática Moderna. 6º Curso*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Alonso Misol, F. (1934). *Elementos de Análisis Matemático y sus aplicaciones. Libro Primero: Teoría general de funciones y derivadas*. Madrid: Sucesores de Rivadeneyra.

Álvarez Herrero, F., García Jimenez, L., Garrido Fernández, A., & Vila Mitjà. (1987). *Matemáticas. Factor-2*. Barcelona: Vicens-vives.

Apostol (2005). *Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté .

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Azcárate, C., & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 135-149.

Barbé, J. (2005). Didactic restrictions on the teacher´s practice: the case of limits of functions in spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics., 59*, 235-268.

Belmonte, J., Montero, G., Negro, A., Pérez, S., & Sierra, T. (1989). *Matemáticas 2º Bachillerato*. Madrid: Alhambra.

Benedicto , C., & Negro, A. (1987). *Matemáticas 2º BUP*. Madrid: Alhambra.

Bescos, E., & Pena, Z. (2002). *Matemática 1. CCNN*. Madrid: Oxford Educación.

Bezuidenhout. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 487-500.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales*. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En *En el futuro del cálculo infinitesimal*. México: Grupoa Editorial Iberoamérica.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME, 4*(3), 219-236.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2001). Rupturas en la comprensión del concepto de límite en alumnos de bachillerato. *Aula, 10*, 117-133.

Blázquez, S., & Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas, 30*, 67-82.

Blázquez, S., Gatica, S., & Ortega, T. (2008). Concepto de límite funcional: aprendizaje y memoria. *Contextos educativos, 11*, 7-21.

Blázquez, S., Gatica, S., Benegas, J., & Ortega, T. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *RELIME*, 189-210.

Blázquez, S., Ortega, T., & Gatica. (2009). Concepto de límite funcional: Aprendizaje y memoria. *Contextos educativos. Revista de Educación, 11*, 7-21.

Blumovicz de Siperstein , S., & Alonso, S. (1974). *Matemáticas I*. México: U.T.E.H.A.

Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Bryman, A. (2006). The researcher interview:a reflexive perspective. *Qualitative research in Organizations and Management: An International Journal*, 41-63.

Cañón, C. (1993). *La matemática: creación y descubrimiento.. Madrid*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Caruncho Castro, J., Gutiérrez de Sande , M., & Gil Martos, J. (1986). *Matemáticas 2º BUP*. Madrid: Santillana.

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (págs. 95-124). Barcelona: Horsori-ICE Universitat de Barcelona.

Chevallard, Y. (1998). Familiére et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 17*(3), 17-54.

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Granada: UGR.

Claros, F. J., Sánchez, M. T., & Coriat, M. (2006). Fenómenos que organizan el límite . (P. Bolea, M. González, & M. Moreno, Edits.) *Investigación en Educación Matemática X*, 157-171.

Claros, F. J., Sánchez, M. T., & Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA, 1*(3), 125-137.

Claros, F. J., Sánchez, M. T., & Coriat, M. (2009). Límite de una sucesión: Respuestas de los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación2009. Monografía XI*, 35-54.

Claros, F. J., Sánchez, M. T., & Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. (M. J. González, M. T. González, & J. Murillo, Edits.) *Investigación en Educación Matemática XIII*, 197-209.

Cohen, L., & Manion, L. (1990). *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.

Corica, A., & Otero, M. (2009). Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación. *Revista Latinoamericama de Investigación en Educación Matemática, 12*(3), 305-331.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de limite: modéles spontanés et modéles propres. *Proceedings PME-V, 1*, 322-326.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de límite: conceptions et obstacles* . Grenoble: Université I de Grenobl.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorg, Thomas, C., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: begining with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192.

Cummins, K. (1960). A student Experience-Discovery Approach to the teaching of Calculus Mathematics Teacher. *Readings from the Mathematics Teacher*, 31-39.

D´Amore, B. (1996). L`infinito:storia di conflitti, di sorpreses, di dubbi. *La Matematica a e la sua Didattica*, 322-335.

Dedekind, R. (1997). *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza.

Delgado, C. (1995). *Estudio de la evolución de los esquemas conceptuasles de alumnos universitarios en su proceso de aprendizaje de los conceptos de límite y continuidad. Tesina del Dpto de Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales*. Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. En P. Nesher, & J. Kilpatrick, *Mathematics and cognition* (págs. 113-133). Cambridge: Cambridge University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 25-41). Dordrecht: Kluwre.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematocal thinking. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Earles, J. (1995). *University calculus students' conceptual understanding of the limit of a function*. Madison: University of Wisconsin.

Edwards, Barbara, S., Dubinsky, & McDonald, M. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15-25.

Engler, S., Vrancken, M., Hecklein, D., Müller , & Gregorini, M. I. (2007). Análisis de una propuestas didáctica para la enseñanza del límite finito de una variable finita. *Union. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* , 113-132.

Espinoza, L. (1998). *Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto límite de función. Del pensamiento del profesor a la gestión de los momentos del estudio. Tesis doctoral*. Barcelona: UAB.

Espinoza, L., & Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto "límite de función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(3), 355-368.

Fernández Novoa. (1991). *Análisis Matemático I*. UNED.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Prof. . *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 9-19.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Gaughan. (1972). *Introducción al Análisis*. Alhambra.

González, F., & Villanova, J. (1987). *Curso práctico de matemáticas 2º B.U.P*. Madrid: Edunsa.

Guillén Barona, J., Navarro, R., Peña, J., & Ferrer Martínez, S. (1976). *Matemáticas 2º Bachillerato*. Madrid: Magisterio Español.

Hardy, N. (2009). Students' perceptions of institutional practices: the caseof limits of functions in college level Calculus course. *sEducational Studies in Mathematics*, 341–358.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical Thinking at any ages: its nature an its developmente. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 27-50.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. . *En Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual*. .

Ibañez, M., & Ortega, T. (2004). Textos argumentativos. *UNO, 35*, 39-52.

Janvier, C. (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, C. (1993). Mathematicasl Symbols and Repreentations. En P. Wilson, *Research Ideas for the Classrom*. Reston V A: N.C.T.M.

Jiménez López, P., Lozano, F., & Miñano, A. (1997). *Matemáticas 2. CCSS* . Madrid: Santillana.

Kaput, J. (1983). Representations Systems and Mathematics. En C. Bergeron, & N. Herscovics (Ed.), *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of PME-NA*, *2*, págs. 57-66. Montreal.

Larson, & Hostetler. (2002). *Cálculo*. McGraw-Hil.

López, V., & Sánchez Martín, J. (1977). *Matemáticas 2º Bachillerato*. Madrid: S.M.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical aproach for the understanding of the limit of a sequense. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 259-288.

Marín Toyos, D. (1939). *Tratado elemental de Matemáticas*. Valladolid: Librería Santarén.

Martín Martín , M. A., & Morán , M. (2001). *Matemáticas 1º Bachillerato Ciencias de la Salud, Naturaleza y Tecnología*. Madrid: Bruño.

Martínez Losada, Á., Hernández Aina, F., & Lorenzo Miranda, F. (1976). *Matemáticas 2º BUP*. Madrid: Tecniban S.A.

Monaghan, M. (1991). Problems with the language of Limits. *For the Learning of Mathematics, 11*(3), 20-24.

Navarro. (2002). *Navarro, A. (2002). Un estudio de la convergencia encuadrado en el modelo educativo de Van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica*.

Navarro Borras, F., & Sixto Rios. (1944). *Curso Preliminar de Análisis Matemático*. Madrid: Stylos.

Negro Fernández, A., Nevot Luna , A., Rodríguez del Río, R., Soler Areta, J., & Delibes, A. (2002). *Matemáticas Aplicadas a las CCSS 1*. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U.

Negro, A., Benedicto , C., Martínez , M., & Poncela, J. M. (1997). *Mátemáticas 2. CCNN*. Madrid: Santillana.

Negro, A., Benedicto, C., Martínez , M., & Poncela, J. M. (1996). *Matemáticas 1. CCNN*. Madrid: Santillana.

Ortega, J. (1993). *Introducción al Análisis Matemático*. Barcelona: Labor. Universidad Autónoma de Barcelona.

Ortíz, J. (1994). El concepto de infinito. *Asociación Matemática Venezolana, 1*(2), 59-81.

Orton, A. (1983). Students´ understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 235-250.

Palmiter, J. (1991). Effect of Computer Álgebra Systems on Concept and Skill Adcquisition in Calculus. ,. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(2), 151-156.

Primo Martínez, Á. (1987). *Matemáticas C.O.U*. Madrid: S.M.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the courseof mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 103-132.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secundary school. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 71-93.

Raman, M. (2002). Coordinating informal and formal aspects of mathematics: student behavior and textbook messages. *The Journal of Mathematical Behavior*, 135-150.

Raman, M. (2004). Epistemological messages conveyed by three high school and college mathematics textbooks. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 389-404.

Rey Pastor, J. (1933). *Curso Cíclico de Matemáticas*. *Cálculo Infinitesimal*. *Tomo II*. Cuenca: Madrid-Buenos Aires.

Rey Pastor, J., & De Castro Brzezicki, A. (1963). *Elementos de Matemáticas*. Madrid: Saeta.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática*. Huelva (paper): IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. (S.E.I.E.M).

Robert, A., & Boschet, F. (1984). L' acquisition de débuts de lánaluse sur R dans un section ordinaire de DEUG premiére année,. *Cahier de didactique des mathématiques*, 18-1.

Robert, A., & Schwarzenberger, T. (1991). Research in the teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 25-41). Dordrecht: Kluwer.

Robinet, J. (1983). Un experience d´ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(3), 223-292.

Robinson, A. (1996). *Non-estándar análisis*. London: North-Holland.

Sánchez, C. (1997). *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función*. Universidad de Granada.

Sánchez, M. T. (2000). *La doble aproximación en el límite funcional*. *Memoria de Tercer Ciclo*. Málaga: Universidad de Málaga.

Sánchez, M. T., Claros , F. J., & Coriat, M. (2006). Fenómenos relacionados con el límite finito. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación2006, Monografía IV*, 105-114.

Sánchez, M. T., Claros, F. J., & Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite: diseño de un instrumento. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación 2007, Monografía IX*, 49-68.

Sánchez, M. T., Claros, F. J., & Coriat, M. (2011). Límite finito de una función en un punto y relatos de profesores de matemáticas: perfiles fenomenológicos. En J. L. Lupiañez, M. C. Cañadas, & M. Molina (Ed.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico.Historia de la Matemática y Educación Matemática*, (págs. 203-216). Granada.

Schwarzenberger, R., & Tall, D. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching, 82*, 44-49.

Segura Domenech, S. (1973). *Matemáticas*. Valencia: ECIR.

Sierpinska. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de límite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Math*., 371-397.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics,*, 24-36.

Sierra, M., González, M. T., & López, C. (1999). Evolución histórica de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C.O.U). *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463-476.

Sierra, M., González, M. T., & López, M. C. (1998). *Límite funcional y continuidad: desarrollo histórico y concepciones de los alumnos*. *Actas del V Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática*. Toro: SCLPM.

Sixto Rios, & Rodríguez Sanjuan, A. (1966). *Matemáticas sexto curso de bachillerato*. *Nociones de cálculo infinitesimal y geometría analítica*. Madrid: Ministerio de Edicación y Ciencia.

Spivak, M. (1991). *Calculus*. *Cálculo Infinitesimal*. Barcelona: Reverté.

Sullivan, K. (1976). The teaching of elementary calculus:an approach using infinitesimals. *American Mathematic Monthly*, 370-375.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, 49– 53.

Tall, D. (1986). *Graphic Calculus, I, II, III (BBC compatible software)*. London: Glentop Press.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematicaal Thinking. . En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. *ICME*, 1-8.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. Bishop, *International Handbook of Mathematics Education*. (págs. 289-325). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Terrisse Jardi, M., & Dávila García-Miranda, M. (1976). *Matemáticas Curso 2º BUP*. Zaragoza: Librería General.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Theaching and Learning of Mathematics. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vizmanos, Anzola, & Primo. (1981). *Funciones-2 Matematicas 2º B.U.P. Teoría y Problemas*. Madrid: S.M.

Vizmanos, J., & Anzola, M. (2004). *Algoritmo. Matemáticas Aplicadas a las CCSS 1*. Madrid: S.M.

Williams, S. (1991). Models of Limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 219-236.