Educación

Sección a cargo de

María José González López

Análisis conceptual de términos específicos. Concepto de límite finito de una función en un punto

por

José A. Fernández-Plaza, Juan F. Ruiz-Hidalgo y Luis Rico

En este trabajo exponemos algunos de los resultados de un estudio exploratorio llevado a cabo con estudiantes de bachillerato, referido a los distintos usos que dichos estudiantes realizan de términos como «aproximar», «tender», «alcanzar», «rebasar» y «límite», con los que se describen propiedades del concepto de límite finito de una función en un punto. Para ello, hemos llevado a cabo un análisis conceptual de estos términos, el cual ha proporcionado un marco interpretativo para inferir qué significados asocian los estudiantes a los términos principales utilizados en sus respuestas. La información se recogió a partir de un cuestionario. Presentamos la discusión de los resultados solo para los términos «alcanzar» y «rebasar». Concluimos que los estudiantes hacen uso coloquial y poco elaborado de estos términos, y expresan conexiones relevantes entre la alcanzabilidad y la rebasabilidad del límite.

1. Problema de investigación

Este trabajo se enmarca en la problemática del aprendizaje del cálculo en Bachillerato. En esta etapa educativa, la enseñanza del cálculo, y en particular del concepto de límite de una función en un punto, se caracteriza por la transmisión de una serie de destrezas rutinarias, introducidas mediante una definición intuitiva y sin ningún contexto real de referencia, eludiendo los significados y concepciones personales que los estudiantes pueden asociar a tales definiciones y destrezas. Moreno ([17]) describe una situación similar para el ámbito universitario.

En este contexto, presentamos un trabajo exploratorio y descriptivo sobre los significados que los estudiantes de bachillerato (16–17 años) asocian al concepto de límite finito de una función en un punto. Concretamente, nuestro objetivo es describir cómo los estudiantes expresan verbalmente sus concepciones intuitivas sobre la noción de límite finito de una función en un punto para discutir la veracidad o falsedad de propiedades referidas a dicha noción, con especial énfasis en las propiedades de alcanzabilidad y rebasabilidad del límite. De esta forma, profundizamos y extendemos el trabajo de Fernández-Plaza ([11]), que debe considerarse como documento de referencia. En dicho estudio, se analizaron los significados desarrollados por estudiantes de Bachillerato ante una propuesta de innovación curricular sobre la noción de límite llevada a cabo durante el período de investigación tutelada del Máster de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato ([10]).

Como antecedentes hemos revisado investigaciones que han profundizado en la caracterización de los conflictos cognitivos ligados a las nociones de número real, límite, infinito y continuidad de una función ([7, 8, 16, 27, 28]), así como a su tratamiento dentro del campo de la innovación curricular ([3, 23]). En este ámbito, la definición que se tome de límite funcional cumple un importante papel, tal como reportan Blázquez, Gatica y Ortega ([4]). De entre esas investigaciones, destacamos las que subrayan que los significados que los estudiantes atribuyen a términos específicos del lenguaje del cálculo infinitesimal, como «límite», «aproximar», «tender», «converger», «alcanzar» y «rebasar», vienen condicionados por el uso coloquial de los mismos ([7, 16, 28]).

Nuestro referente teórico fundamental es el análisis conceptual de términos específicos, que delimita el significado y uso matemático en contraste con sus significados cotidianos ([21]) y es útil para interpretar la concepción de los sujetos. Pero, dado que no solo basta con conocer los significados de los términos, un segundo referente fundamental es el análisis específico del modo en que los escolares hacen uso efectivo de estos términos con sus significados personales.

1.1. Marco teórico y antecedentes

Este estudio se sitúa en la agenda de investigación conocida como *Pensamiento Matemático Avanzado* (*Advanced Mathematical Thinking*), tal como se presenta y considera en las publicaciones del grupo internacional Psychology of Mathematics Education ([12]). Se trata de un extenso ámbito de investigación que da lugar a diferentes interpretaciones o modos de abordar su estudio ([13, 25, 30]). Existe un amplio acuerdo en cuanto a la dificultad de delimitar la transición entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado ([2, 9, 27, 30]). Azcárate y Camacho ([1]) señalan cómo determinados procesos cognitivos caracterizan el pensamiento matemático avanzado, aun no siendo exclusivos de él. Entre ellos destacan, y adquieren mayor importancia en los cursos superiores, *representar* y *abstraer* como procesos cognitivos psicológicos, y *definir*, *demostrar* o *formalizar* como procesos matemáticos. Para establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas, estos autores subrayan la importancia de las definiciones que son propias de las matemáticas avanzadas, mientras que en las elementales los objetos se describen apoyándose en la experiencia. Por tanto, la etapa educativa de bachillerato supone un periodo de transición en el que los estudiantes abordan con técnicas elementales contenidos matemáticos cuyo desarrollo histórico, epistemológico y didáctico merecen el estatus de avanzados.

Como en cualquier investigación sobre aprendizaje, es necesario un marco explicativo que describa e interprete cómo los estudiantes entienden, definen y utilizan determinados conceptos y procedimientos. Asumimos que la noción de significado de un concepto matemático, según viene desarrollada por los trabajos de Rico ([22]), proporciona un modelo interpretativo para dicha noción con un planteamiento más elaborado que el modelo cognitivo basado en la dualidad *imagen conceptual / definición conceptual* de Vinner ([29]).

El modelo de Vinner se basa fundamentalmente en la interacción existente entre las imágenes mentales que la enseñanza de un concepto, mediante su definición y ejemplos, evoca en los estudiantes (concepto imagen o imagen conceptual), y el modo en que los estudiantes expresan tales imágenes mentales cuando abordan tareas (concepto definición o definición conceptual). Así, por ejemplo, un alumno tiene un concepto de sistema de coordenadas porque lo ha visto en varias situaciones y para él son dos rectas perpendiculares. Posteriormente, cuando el profesor introduce sistemas de coordenadas no ortogonales, pueden ocurrir tres situaciones con la imagen conceptual del alumno: a) cambia su concepto imagen para incluir la no perpendicularidad; b) el concepto imagen continúa inalterado y terminará influyendo en las respuestas del alumno sobre la definición conceptual; o c) ambos conceptos se mantienen inalterados sin interacción.

Nosotros consideramos un modelo interpretativo que procede de la adaptación al ámbito de la matemática escolar de la relación semántica lógica y formal entre *signo o término*, *referencia o concepto* y *sentido*. Este modelo, que puede consultarse en Rico ([22, pp. 51–53]), considera las siguientes componentes:

- *Los sistemas de representación*, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto y lo relacionan con otros.
- *La estructura conceptual*, que comprende conceptos y propiedades, los argumentos y proposiciones que se derivan y sus criterios de veracidad.
- *La fenomenología*, que incluye aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que están en el origen del concepto y le dan sentido.

Por ejemplo, en el caso del número natural, la estructura conceptual asociada a este concepto incluye los objetos formales dados mediante los axiomas de Peano o cualquier otra construcción formal cardinal u ordinal «uno, dos, tres…; primero, segundo, tercero…», que vienen representados por diferentes sistemas de representación tales como el simbólico (1, 2, 3…; $2 + 5$; 2×5^2) o figurativo (Diagramas de Venn; Configuraciones puntuales (números triangulares, cuadrangulares…)). Afirmaciones como «7 es el número del jugador», «7 es el número de días de la semana», «Llegó en séptima posición» denotan fenómenos que dan sentido al número natural 7; enfatizan su uso como código, cardinal u ordinal respectivamente.

De este modo, nuestro análisis se desplaza desde la consideración del simple manejo eficiente de una definición formal mediante representaciones adecuadas, hacia el estudio del conocimiento y uso de un concepto a través de los fenómenos que le dan sentido, que no se restringen a un dominio puramente matemático, sino que profundizan en otros campos del mundo físico, cultural y social. De esta manera, el modelo contempla el estudio de las competencias de modelización y resolución de problemas. Claros ([6]) y Sánchez ([24]) avanzan en la caracterización de fenómenos matemáticos relacionados con el límite finito de una sucesión y de una función en un punto, respectivamente, que se extraen de las definiciones intuitiva y formal a partir del análisis de libros de texto, producciones escritas de estudiantes y comentarios de profesores en ejercicio.

En lo que se refiere a antecedentes, Tall ([26]) documenta que, cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y posteriormente la definición formal, la imagen conceptual se «contamina» con ciertas propiedades que no forman parte de la definición formal. Esto pone de manifiesto la complejidad de significados que una misma definición puede evocar en los estudiantes. Un ejemplo de esto lo encontramos en los estudiantes que conciben la noción de límite como proceso dinámico y no la identifican con un valor numérico. En contraste, Romero ([23]) incide en la fuerte resistencia de los estudiantes a entender y aceptar la notación decimal periódica para un número cuando el periodo es 9:

> «*Por un lado, en cuanto a su existencia ya que no procede de una división; por otro lado en cuanto a su conversión en un decimal exacto*» ([23, p. 177]).

Blázquez, Gatica y Ortega ([4]) realizan una revisión crítica de definiciones de límite funcional procedentes de libros de texto. Estos autores, al resaltar en algunas de estas definiciones rasgos de subjetividad e imprecisión, justifican así la pertinencia de proponer una definición alternativa que salve las debilidades encontradas. En particular, Blázquez ([3]) enfatiza la necesaria distinción entre los términos «tender» y «aproximarse» que es imperceptible para algunos estudiantes en un contexto matemático.

Monaghan ([16]) explora las intuiciones personales de los estudiantes sobre los términos «tender a», «aproximarse a», «converger a» y «límite». Estas intuiciones se describen e interpretan en dos contextos: espontáneas (expresión libre del sujeto) y mediante apoyo gráfico (discusión de gráficas facilitadas). Los resultados muestran diferencias relevantes de significado y uso entre tales términos. En nuestro trabajo no pedimos a los estudiantes definir los términos; estimulamos su uso libre, haciendo las inferencias de significado oportunas a partir de sus producciones, lo cual permite explorar la amplitud y precisión del vocabulario utilizado por los estudiantes cuando hablan de límite funcional y de los matices que le asocian.

1.2. Análisis conceptual de términos específicos relacionados con el concepto de límite

Siguiendo las ideas de Chantal ([5]) sobre la delimitación conceptual entre los vocablos «términos» y «palabras», entenderemos por *términos* aquellas palabras dotadas de significado válido para su uso en la disciplina o contexto particular, si bien, estos términos pueden ser *específicos* de una única disciplina, *comunes* a varias disciplinas, aunque con diferente significado, o *importados* del vocabulario general y coloquial del castellano. En este trabajo nos referiremos genéricamente con *términos específicos* a los que tienen uso técnico en cálculo, sean o no sean propios de dicha rama matemática, y emplearemos el vocablo *términos efectivos* para referirnos a los vocablos utilizados por los escolares pudiendo coincidir en algún momento con los específicos.

Para el logro del objetivo de este estudio realizamos un análisis conceptual de ciertos términos específicos asociados a los procesos de paso al límite. Estos términos son «aproximarse», «tender», «alcanzar», «rebasar» y «límite».

El análisis conceptual es un procedimiento para ubicar el significado y el uso de un término matemático. Distinguimos entre los vocablos significado y uso: para un término dado, llamamos uso del término al sentido con el cual se utiliza en un determinado contexto (matemático, cotidiano, etc.), mientras que significado del término consiste en su interpretación mediante un sistema de signos, una referencia a componentes estructurales, y un sentido. Éste último identificado por los contextos o fenómenos asociados a tal término. De hecho, son tales contextos y fenómenos los que marcan la pertinencia o no del uso del término. Ubicamos el significado y el uso formal de estos términos en contraste con sus significados y usos cotidianos ([21]) no sólo a nivel formal, sino también el que se instituye en la escuela. Esto es necesario para interpretar la concepción de los sujetos, si bien, en ocasiones, es necesaria información adicional.

Hemos seleccionado los términos anteriores por las siguientes razones:

- Los términos tienen un significado técnico y formal en matemáticas y en el ámbito escolar, pero también usos convencionales y coloquiales no vinculados con las matemáticas.
- Aparecen de manera frecuente en la literatura revisada, tanto en la definición del concepto de límite como en la caracterización de las dificultades y errores asociados, poniendo de manifiesto conflictos que surgen entre los usos formales y coloquiales.
- Ayuda al diseño, selección y caracterización de las tareas que incluyen estos términos destinadas a la recogida de información de los estudiantes.
- Los sujetos del estudio los emplean, junto con sinónimos, para expresar distintas interpretaciones del concepto de límite, ya sea de manera técnica (terminología adquirida por la instrucción mediada por el profesor, el libro de texto o el propio instrumento de recogida de datos) o informal (sus propias interpretaciones personales).
- De acuerdo a nuestra noción de significado de un concepto matemático descrita anteriormente, cada uno de los términos se refiere parcialmente a propiedades y modos de uso asociados al concepto de límite y, junto con otras nociones, contribuyen a delimitar su significado.
- Es necesario fijar un marco interpretativo para analizar los usos y significados de dichos términos puestos de manifiesto por los sujetos de nuestro estudio.

Una revisión de los diccionarios de la Real Academia Española (RAE) ([20]), el María Moliner ([15]), el *Vocabulario Científico y Técnico* de la Real Academia de las

Ciencias ([19]) y el Oxford Dictionary ([18]), proporcionan las acepciones comunes y, en ocasiones, matemáticas que tienen cada uno de los términos: «aproximar», «tender», «rebasar», «alcanzar» y «límite»; la revisión de algunas investigaciones permiten refinar las acepciones de manera apropiada para esta investigación. Mostramos únicamente el análisis conceptual relativo a los términos «alcanzar» y «rebasar». El análisis conceptual completo puede consultarse en Fernández-Plaza ([11]).

1.2.1. Análisis conceptual del término «alcanzar»

«Alcanzar» es intuitivamente «llegar a» o «llegar a tocar» ([15, 18, 20]). Se define «alcanzar», en cuanto a su uso matemático se refiere, en tres sentidos, no necesariamente excluyentes:

1. Una función *alcanza el límite* si el valor límite es la imagen del punto en el que se estudia el límite (continuidad).
2. Una función *alcanza el límite* si el límite coincide con la imagen de cualquier otro punto del dominio distinto del propio punto donde se lleva a cabo el estudio (no necesariamente la función ha de ser continua: considérese, por ejemplo, la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, y $f(0) = 1$. Dicha función no es continua en $x = 0$, pero tiene límite 0 en ese punto, y este es alcanzable en todos los puntos de la forma $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$).
3. Una función *alcanza el límite* en cualquier caso, con independencia de que la función esté definida o no en el punto donde se realiza el estudio, porque la definición formal de límite se puede reformular de la siguiente manera[1]:

    > *Dadas cualesquiera dos sucesiones de Cauchy de racionales $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ representantes propios del número real $x = a$, si las sucesiones de números reales $\{f(x_n)\}$ y $\{f(y_n)\}$ son de Cauchy y equivalentes, mediante la extensión natural de la relación definida para el caso racional, entonces el número real l correspondiente a esta clase de equivalencia será el límite de $f(x)$ en $x = a$.*

    En definitiva, dentro de este aparato formal asumimos que la función alcanza el límite, pues el límite es la imagen del punto $x = a$, salvo la relación de equivalencia definida.

Es pertinente enfatizar que los sentidos 1 y 2 se relacionan con un uso coloquial del término «alcanzar» mientras que el sentido 3 representa un uso técnico y formal, diferente al coloquial.

[1] Considerando la construcción de los números reales por clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales, los números reales no son «directamente operativos», sino que necesitan de la representación por sucesiones de Cauchy de racionales equivalentes con las que se opera, siempre que tales operaciones conserven la relación de equivalencia definida por: *Dos sucesiones de Cauchy de racionales son equivalentes si la sucesión diferencia tiende a 0 en el sentido usual.*

1.2.2. Análisis conceptual del término «rebasar»

El término «rebasar» tiene un sentido coloquial de «quedar por encima de una cota superior» ([20]). En lo que se refiere al uso matemático proponemos dos sentidos no excluyentes para este término.

1. *Con carácter local.* El límite *no es rebasable* si es un extremo relativo de la función en el punto donde se lleva a cabo el estudio, ya sea máximo o mínimo.
2. *Con carácter global.* El límite *no es rebasable* si es un extremo absoluto de la función en el punto donde se lleva a cabo el estudio, ya sea máximo o mínimo. Este sentido es afín al cotidiano: la función no rebasa el valor del límite si queda siempre por encima o por debajo de dicho valor.

Como en la etapa de bachillerato, los estudiantes, en general, aún no han desarrollado el concepto abstracto de función, el campo de ejemplificaciones para este concepto puede estar restringido, ya sea por la enseñanza recibida o por su desarrollo cognitivo natural, lo cual puede llevarles a expresar afirmaciones de carácter general como «El límite nunca es rebasable / siempre es rebasable», «El límite nunca es alcanzable / siempre es alcanzable», o afirmaciones de carácter particular tales como «Existen ejemplos donde el límite es rebasable / alcanzable y otros donde no», dependiendo de la menor o mayor amplitud de su campo de ejemplificaciones.

2. Diseño del estudio

Este estudio es de tipo exploratorio y descriptivo. Es exploratorio ya que se ha planificado con la intención de recoger información sobre la comprensión de los estudiantes y dicha información se va a utilizar para planificar una propuesta de innovación curricular basada en datos y evidencias empíricas sobre este campo de la matemática escolar. El estudio es descriptivo puesto que pretendemos describir el modo en que los estudiantes entienden, utilizan e interpretan determinadas nociones y conceptos. La muestra es intencional y por disponibilidad; no pretende generalizar resultados en contextos más amplios, sino particularizarlos para profundizar sobre ellos en un contexto determinado.

2.1. Instrumento

El instrumento que utilizamos para inferir los significados que los estudiantes asocian a los términos específicos es un cuestionario con seis actividades de respuesta abierta adaptadas y traducidas de [14, p. 229]. Agrupamos las actividades en dos bloques, de modo que cada bloque se centra en aspectos diferentes del concepto de límite finito de una función en un punto. Así, tres de ellas conforman el cuestionario A y las otras tres el cuestionario B. Puede consultarse el cuestionario completo en [11]; a modo de ejemplo, mostramos a continuación algunas de las actividades utilizadas. Cada actividad plantea la opción de calificar como verdadero (V) o falso (F) el enunciado de una propiedad relativa al límite de una función en un punto y, a continuación, se pide una justificación de la opción elegida.

EJEMPLO DE ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO A

(A.a) Un límite describe cómo se mueve una función $f(x)$ cuando x se mueve hacia cierto punto.

(A.b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.

(A.c) Un límite se determina probando[2] con valores de x cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza.

EJEMPLO DE ACTIVIDADES DEL CUESTIONARIO B

(B.a) Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza.

(B.b) Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como se quiera.

(B.c) Un límite es un número al cual los valores de una función $f(x)$ pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de x.

El cuadro 1 resume las ideas clave de estas actividades.

Cuestionario/actividad	Ideas clave de la actividad
A.a	Movimiento de la función
A.b	No rebasar
A.c	Probar valores y alcanzar
B.a	Acercarse pero no alcanzar
B.b	Aproximación tan precisa como se quiera
B.c	Acercarse arbitrariamente

Cuadro 1: Ideas clave de las actividades de los cuestionarios A y B.

2.2. SUJETOS

Seleccionamos de manera intencional y por disponibilidad a 36 estudiantes de primer curso de Bachillerato (16–17 años) matriculados en la asignatura Matemáticas I. Según la información suministrada por el profesor responsable de la asignatura, quien autorizó la implementación del cuestionario al grupo, los estudiantes han recibido instrucción previa sobre los conceptos de límite de una función en un punto y de límite de una sucesión durante el curso 2009/2010, antes de la aplicación del cuestionario. Consideramos esta circunstancia favorable para nuestra investigación ya que los sujetos puede que hagan un uso técnico más o menos elaborado de la terminología, definiciones y ejemplificaciones del concepto de límite introducidas en el aula, al menos de manera temporal, o bien describan con una terminología informal y personal sus interpretaciones del conocimiento recibido en la instrucción, pudiendo en algún caso hacer prevalecer sus concepciones originales.

[2] Habría sido más adecuado sustituir «probando» por «calculando $f(x)$» para evitar que solo se refirieran a la variable x.

Durante el trabajo de campo, 18 sujetos respondieron al cuestionario A y otros 18 sujetos al cuestionario B. La aplicación se llevó a cabo en una sesión ordinaria de clase de matemáticas con duración no superior a 60 minutos.

3. Resultados

Ejemplificamos el análisis de los datos para la actividad (A.b) *Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.* Dicho análisis se llevó a cabo en tres fases.

3.1. Primera fase: uso y recuento de términos específicos en los registros escritos

En la primera fase identificamos y contabilizamos los usos de los términos específicos «aproximar», «tender», «alcanzar» y «rebasar»[3] en los registros escritos proporcionados por los estudiantes, sin hacer inferencias de significado.

Dado que los términos efectivos de un registro escrito no tienen por qué ser los específicos, realizamos agrupaciones de los mismos según el análisis conceptual realizado, considerando como «representante específico del grupo» a cada uno de los términos destacados[4]. Agrupamos tanto antónimos como sinónimos de los términos específicos de referencia tal como se recoge en el cuadro 2.

Los estudiantes deben dar un juicio sobre una propiedad del límite de una función, de ahí que nos centremos, en primer lugar, en su presencia y en el uso que les dan en tales juicios; aunque con la información disponible no es posible inferir, por ejemplo, si los estudiantes distinguen entre «aproximarse» y «tender».

Términos específicos	Términos efectivos relacionados de los registros escritos
Aproximar	*Aproximarse, dirigirse, acercarse, moverse, desplazarse*
Tender	*Tender*
Rebasar	*Rebasar, sobrepasar, limitar, exceder, tope numérico, máximo*
Alcanzar	*Alcanzar, llegar, tocar, exacto*

Cuadro 2: Términos específicos y agrupación de los términos efectivos asociados.

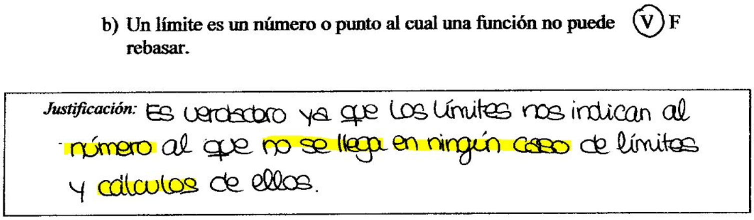
El cuadro 3 muestra el recuento de los usos que se realizaron de términos que estaban relacionados con los términos específicos «rebasar» y «alcanzar» para responder a la cuestión seleccionada para este trabajo y que dieron lugar a tres grupos

[3]El término «límite» es usado por los escolares para denominar el concepto sobre el que discuten, es decir, no describe ninguna propiedad del concepto. Otra cosa es que se utilicen términos derivados como el verbo «limitar», por ejemplo, «El límite es un número que limita la función», expresando una propiedad de límite como no rebasable.

[4]El término «tender» es más preciso que «aproximar». El único término que podemos asociarle es «converger», pero ningún escolar de nuestro estudio ha hecho uso alguno de este, puesto que no se ha introducido en la enseñanza; los escolares hacen un uso exclusivo del término tender.

de respuestas, según se refirieran únicamente a rebasar, a alcanzar o a ambos caracteres (grupo mixto).

La figura 1 ejemplifica el uso de los términos efectivos asociados a los específicos «rebasar» y «alcanzar» hecho por un estudiante al responder a la cuestión seleccionada.


b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

Justificación: Es verdadero ya que los límites nos indican al número al que no se llega en ningún caso de límites y calculos de ellos.

Figura 1: Respuesta a la actividad A.b con término efectivo «no llegar» incluida en el grupo «Alcanzar».

Conviene puntualizar que registramos tanto el uso afirmativo o negativo de un término, pero el grupo al que pertenece es el mismo en cualquier caso. Junto a los términos efectivos correspondientes a «alcanzar» y «rebasar» aparecen referencias al proceso infinito con términos como *aproximarse*, por ejemplo, «La función se aproxima pero no llega al límite».

Grupos	Términos efectivos asociados	Número de respuestas
Alcanzar	Llegar	1 (Afirmativo) / 2 (Negativo)
	Aproximarse/no llegar	2
Rebasar	Rebasar	1
	Sobrepasar	1
Mixto	Aproximarse/no tocar/no rebasar	1
Otras/No respuesta		10
Total		18

Cuadro 3: Grupos de respuestas y frecuencias alcanzadas en el uso de los términos efectivos vinculados a los específicos «Alcanzar» y «Rebasar» para la actividad A.b.

3.2. Segunda fase: discusión del uso de los términos específicos

En una segunda fase, iniciamos inferencias de significado puesto que las cuestiones pueden provocan el uso de términos que a priori no se esperan, como en el caso de la actividad A.b. Se ha detectado una frecuencia alta de referencias a la alcanzabilidad (6 de 8 válidas, es decir, que proporcionan información útil). Las 10 restantes no proporcionan información útil cuando se requería a los sujetos que solamente argumentaran sobre rebasabilidad (2 de 8 válidas). Esto permite conjeturar que para estos alumnos la no rebasabilidad del límite se debe, principalmente, a su no alcanzabilidad.

3.3. Tercera fase: Perfiles de respuesta

El análisis de términos efectivos permite clasificar las diferentes respuestas en varios perfiles. Comenzamos diferenciando dos partes en el enunciado de la actividad A.b:

> Primera parte: *Objeto*; se identifica qué tipo de objeto es un límite: **Un límite es un número o punto** al cual una función no puede rebasar.
>
> Segunda parte: *Propiedad*; se destaca una característica asociada a uno de los significados de la noción de límite, pues las ideas de fin, de frontera y de irrebasable son propiedades establecidas en el uso común y coloquial del término límite, recogidas en nuestro análisis conceptual: **Un límite** es un número o punto al cual una función **no** [se] **puede rebasar**.

La cuestión se plantea en términos de justificar la aceptación o rechazo de esta propiedad para el objeto límite de una función. No existe restricción en el dominio[5], por lo cual la variedad de argumentos puede ser más amplia de lo esperado. El valor infinito del límite no es objeto de nuestro estudio; excluimos aquellos argumentos de esta índole. En general, los argumentos propuestos por los estudiantes se ajustan a dos opciones:

- *Perfil I: Límite no rebasable.* Se caracteriza por el valor lógico verdadero. Los argumentos afirman que el valor del límite no es rebasable. Por ejemplo, «Verdadero, si el límite de una función es 4, un resultado de esa función no puede ser 5». Dentro de este perfil, destacamos tres subperfiles:
  - *Subperfil I.1: Límite no alcanzable / Proceso numérico infinito.* Los argumentos supeditan la no rebasabilidad a la no alcanzabilidad del valor del límite. Las afirmaciones sobre el carácter no rebasable e inalcanzable es general (para todas las funciones). Podemos reconocer que el motivo por el que estos sujetos sostienen la inalcanzabilidad del límite es el proceso numérico infinito correspondiente, por ejemplo, explícitamente «Verdadero porque un límite es un punto al que una función se aproxima infinitamente sin llegar a él» e implícitamente «Porque el límite nunca llega al punto», el cual puede deberse a la exclusión del punto donde se estudia el límite, por ejemplo, «Verdadero, ya que con el límite no se puede realizar la operación de la función». Es probable que estos argumentos estén provocados por un uso excesivo de ejemplos de funciones estrictamente monótonas durante la enseñanza previa recibida.
  - *Subperfil I.2: Límite alcanzable.* Los argumentos admiten la alcanzabilidad del valor del límite, por ejemplo, «Verdadero, ya que el límite nos dice hasta qué punto llega o pasa».

[5] No requerimos a los estudiantes que razonaran sobre límite finito de una función en un punto, factor que no controlamos, pero a cambio obtenemos una visión más general de cómo interpretan la no rebasabilidad del límite en cualquier caso, tanto en $x = a$, como en $+\infty$ y $-\infty$, aunque el caso infinito no sea foco central de nuestro estudio.

- *Perfil II: Límite rebasable.* El valor lógico en este caso es falso. Incluye argumentos que justifican que el valor del límite es rebasable en casos particulares, de hecho, se proponen ejemplos donde el límite es rebasable, por ejemplo, «Falso, ya que poniendo el ejemplo de una función a la cual se le aplican valores a la x, podemos obtener por ejemplo 1,0002 y 0,991; el límite es 1, pero podemos ver cómo ha sido rebasado». Dentro de este perfil encontramos un único subperfil:
    - *Subperfil II.1: Límite alcanzable.* Argumentos que consideran el límite alcanzable en determinadas ocasiones, por ejemplo, «Falso, puede ser menor, igual o mayor. El límite simplemente es un punto de referencia».

El cuadro 4 recoge las frecuencias de las respuestas a la actividad A.b incluidas en cada uno de los subperfiles.

Perfiles	Subperfiles	Frecuencia
Perfil I	Subperfil I.1	6
	Subperfil I.2	1
	Otras	3
Perfil II	Subperfil II.1	1
	Otras	4
Otras/No respuesta		3
Total		18

Cuadro 4: Frecuencia de respuestas en cada uno de los perfiles de respuesta para la actividad A.b.

A partir del cuadro 4 se observa que la mayoría de los estudiantes (6 de 18) justifica la no rebasabilidad por su no alcanzabilidad, por lo que conjeturamos una predominancia de ejemplos específicos donde la función es estrictamente monótona creciente en un entorno del punto, o en el caso infinito, es equiparable a la creencia de que la función nunca corta a la asíntota, quedando dicha función por encima o por debajo de tal recta.

Este resultado es relevante porque las propiedades de alcanzabilidad y rebasabilidad son independientes, es decir, el límite de una función en un punto las puede tener o no tener.

Conjeturamos, con vistas a una futura planificación de una experiencia de aula, que las respuestas del primer perfil pueden venir inducidas por un uso inadecuado de ejemplos donde la convergencia es estrictamente monótona y el valor del límite es, de hecho, una cota superior y, por tanto, inalcanzable, con lo cual es de esperar que excluyan de su razonamiento la imagen del punto donde se está haciendo el estudio, incluso si esta coincide con el límite.

4. Conclusiones

Consideramos que el objetivo propuesto para este estudio, *describir cómo los estudiantes expresan verbalmente sus concepciones intuitivas sobre la noción de límite* *finito de una función en un punto para discutir la veracidad o falsedad de propiedades referidas a dicha noción, con especial énfasis en las propiedades de alcanzabilidad y rebasabilidad del límite*, se ha logrado conforme a las siguientes conclusiones:

- El análisis conceptual ha permitido, por un lado, reconocer posibles concepciones debidas al uso coloquial y cotidiano de los términos específicos que inducen errores en la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. Por otro lado, ha servido para describir los perfiles empleados para interpretar las respuestas de los estudiantes.
- De los resultados obtenidos del análisis del uso de términos específicos concluimos que los estudiantes han utilizado un lenguaje poco elaborado y preciso, caracterizado por un uso amplio de la terminología proporcionada por los ítems del cuestionario, aunque mezclado con algunos términos sinónimos originales. El análisis detallado de las categorías de respuesta para el ítem A.b, con el que hemos ejemplificado el estudio, pone de manifiesto la persistencia del carácter no rebasable y no alcanzable del límite, confirmando la fuerte influencia que tiene el uso coloquial e informal del término límite en las concepciones de los estudiantes.
- El instrumento diseñado ha permitido recoger información y realizar un análisis satisfactorio, aunque con algunas limitaciones que una adecuada revisión y secuenciación de las tareas puede subsanar.

En el futuro, nos proponemos analizar las reflexiones de los estudiantes acerca de cada uno de los términos de los cuáles hemos realizado el análisis conceptual, con el fin de contrastar empíricamente dicho análisis conceptual. También esperamos construir un modelo que explique con más profundidad las concepciones de los estudiantes acerca del concepto de límite de una función.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906, MEC-FEDER), del proyecto «Modelización y representaciones en educación matemática» (EDU2009-11337) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del grupo FQM-193 (Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico) del 3.er Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

Referencias

[1] C. Azcárate y M. Camacho, Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* **10** (2003), n.º 2, 135–149.

[2] C. Azcárate, M. Camacho y M. Sierra, Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: Investigación en didáctica del análisis. En T. Ortega del Rincón (Coord.), *Actas del III Simposio de la SEIEM*, Valladolid, 1999.

[3] S. Blázquez, *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales*, tesis doctoral, Valladolid, 2000.

[4] S. Blázquez, N. Gatica y T. Ortega, Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional, *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)* **12** (2009), n.º 1, 145–168.

[5] M. Chantal, Explotación de los córpora textuales informatizados para la creación de bases de datos terminológicas basadas en el conocimiento, *Estudios de Lingüística del Español*, Vol. 18, 2002. Disponible en `http://elies.rediris.es/elies18/`.

[6] F.J. Claros, *Límite finito de sucesiones: Fenómenos que organiza*, tesis doctoral, Granada, 2010.

[7] B. Cornu, Limits. En D.O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, 1991, 153–166.

[8] R.B. Davis y S. Vinner, The notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconceptiones Stages, *Journal of Mathematical Behavior* **5** (1986), 281–303.

[9] B.S. Edwards, E. Dubinsky y M.A. McDonald, Advanced Mathematical Thinking *Mathematical Thinking and Learning* **7** (2005), n.º 1, 15–25.

[10] J.A. Fernández-Plaza, *Unidad Didáctica: Límite y Continuidad de Funciones*. Memoria final del Máster universitario de profesorado de educación secundaria obligatoria, bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas (especialidad de matemáticas), Granada, 2010. Disponible en `http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Ant_Fernandez.pdf`

[11] J.A. Fernández-Plaza, *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio*, trabajo de tercer ciclo, Granada, 2011. Disponible en `http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Fernandez%20Plaza_TrabInvTut.pdf`

[12] A. Gutiérrez y P. Boero, *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, Sense Publishers, Rotterdam, Holanda, 2006.

[13] G. Harel y L. Sowder, Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development, *Mathematical thinking and learning* **7** (2005), n.º 1, 27–50.

[14] A.D. Lauten, K. Graham y J. Ferrini-Mundy, Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator, *The Journal of Mathematical Behavior* **13** (1994), n.º 2, 225–237.

[15] M. Moliner, Diccionario del uso del español, 2.ª ed., Vol. 2, Madrid, Gredos, 1998.

[16] J. Monaghan, Problems with the Language of Limits, *For the Learning of Mathematics* **11** (1991), n.º 3, 20–24.

[17] M.M. Moreno, El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (Córdoba, 2005), 81–96.

[18] *Oxford Dictionaries*, Oxford University Press, 2011. Disponible en `http://oxforddictionaries.com`

[19] Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, *Vocabulario Científico y Técnico*, Espasa-Calpe, Madrid, 1996.

[20] Real Academia de la Lengua, Diccionario de la Lengua Española, 22.ª ed., Madrid, 2001. Disponible en `http://www.rae.es/rae.html`

[21] L. Rico, Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, Granada, 2001, 179–193.

[22] L. Rico, Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática, *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)* **1** (2012), 39–63.

[23] I. Romero, *La introducción del número real en educación secundaria: Una experiencia de investigación-acción*, Comares, Granada, 1997.

[24] M.T. Sánchez, *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*, tesis doctoral, Granada, 2012.

[25] A. Selden y J. Selden, Perspectives on Advanced Mathematical Thinking, *Mathematical Thinking and Learning* **7** (2005), n.º 1, 1–13.

[26] D.O. Tall, Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 1980, 170–176.

[27] D.O. Tall, The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, New York, 1992, 495–511.

[28] D.O. Tall y S. Vinner, Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* **12** (1981), 151–169.

[29] S. Vinner, Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **14** (1983), n.º 3, 293–305.

[30] R. Zaskis y M. Applebaum, Advancing mathematical thinking: Looking back at one problem, *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME)* (2007), Working group 14, 2389–2397.

J.A. Fernández-Plaza, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
Correo electrónico: `joseanfplaza@ugr.es`

J.F. Ruiz-Hidalgo, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
Correo electrónico: `jfruiz@ugr.es`
Página web: `http://www.ugr.es/local/jfruiz`

L. Rico, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada
Correo electrónico: `lrico@ugr.es`
Página web: `http://www.ugr.es/local/lrico`