DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

DOS CONFLICTOS AL REPRESENTAR NÚMEROS REALES EN LA RECTA

TESIS DOCTORAL

Sara Beatriz Scaglia

GRANADA 2000

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA

DOS CONFLICTOS AL REPRESENTAR NÚMEROS REALES EN LA RECTA

Tesis Doctoral que presenta la Profesora en Matemáticas Sara Beatriz Scaglia para optar al grado de Doctor.

Fdo.: Sara Beatriz Scaglia

Vº Bº, El Director

Fdo.: Dr. Moisés Coriat Benarroch

GRANADA 2000

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento a las siguientes personas:

A mi amado esposo, cuya inigualable generosidad y apoyo permanente han contribuido a forjar el clima familiar necesario para que pueda llevar a cabo mi trabajo.

A Moisés Coriat Benarroch, director de esta tesis, por su permanente dedicación, por todo lo que he aprendido a su lado, por confiar en mis ideas y alentarme para que las desarrolle.

A Luis Rico Romero, siempre dispuesto a oír mis inquietudes, con su habitual criterio abierto y aportando generosamente su apreciada sabiduría y experiencia.

A María José González López, que además de obsequiarme con su preciada amistad, me ha animado y prestado su valiosa ayuda en todo momento.

A Antonio Moreno, por su amistad y su inestimable colaboración.

A Isabel Romero, Carmen Azcárate y Luis Puig, que han atendido amablemente mis peticiones de sugerencias.

A los profesores Carmen García Arribas, Antonio Marín y Francisco Ocaña, que han permitido que acceda a sus alumnos, haciendo posible este trabajo. A Emilio Genaro, que además de acercarme a sus alumnos, ha resuelto siempre con eficacia los problemas de índole informático.

A los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática, por sus muestras de apoyo, sugerencias y por la cordialidad que me dispensaron durante estos años.

A la familia Oulman, porque hemos encontrado en su seno el calor familiar, apoyo y cariño que sólo los verdaderos amigos son capaces de dar.

A Liliana Tauber y a mis compañeros argentinos, que han demostrado en todo momento su aprecio y confianza.

A mis compañeros latinoamericanos, por las muestras de apoyo y amistad recibidas, y por permitirme generar un sentimiento de pertenencia a una cultura latinoamericana que nunca había tenido.

A los alumnos de Bachillerato y Licenciatura en Matemáticas que han permitido que este trabajo pueda llevarse a cabo, participando con verdadero interés y aportando ideas originales que han favorecido su desarrollo.

Un especial recuerdo para mi compañero Mauricio Castro, cuya joven y apreciada vida fue segada por la torpeza de los hombres.

A Marcelo.
A Juan y a Rafael.
A mis padres.

ÍNDICE

Capítulo 4: Entrevistas Exploratorias

Capítulo 5: Elaboración del cuestionario

Capítulo 6: Confirmación empírica de dos conflictos

Capítulo 7: Explicación de dos conflictos

Capítulo 8: Conclusiones

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES Y PROCEDIMIENTO

1.1. Área problemática

Este trabajo se enmarca en la línea de investigación Pensamiento Numérico[1], que "se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el Sistema Educativo y en el medio social. El Pensamiento Numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas" (Rico, 1996; p. 28).

Las bases de esta línea de investigación han estado presentes, constituyendo hitos que han guiado nuestro trabajo. La construcción del conocimiento matemático se considera un fenómeno social y cultural y la función de la educación matemática es transmitir los significados y valores compartidos en nuestra sociedad. Las investigaciones dentro de esta línea consideran el currículo como un plan operativo que ofrece distintos niveles de reflexión y de puesta en práctica; poseen una orientación psicológica interesada por estudiar los errores y dificultades de los estudiantes en el tópico de investigación (Rico, 1996).

El número constituye un elemento primordial de la información y formación matemática que se intenta desarrollar en los alumnos. El uso intensivo que se realiza de ellos en la sociedad en la que éstos se desenvuelven así lo requiere. Freudenthal (1983) considera que los números fueron creados para organizar el fenómeno del mundo real de la cantidad. Según su postura, los conceptos, estructuras e ideas matemáticas no sólo constituyen medios de organización de fenómenos físicos, sino también de fenómenos matemáticos.

[1] La autora, profesora de la Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina), se incorporó a esta línea de investigación como consecuencia de haber sido beneficiada con una beca enmarcada en el Programa de Reforma de la Educación Superior (Argentina).

El conocimiento que los matemáticos han desarrollado acerca del número demuestra que este concepto, lejos de agotarse en los avances importantes realizados a fines del siglo pasado y principios de éste, dirigidos a la formalización y construcción del continuo real, se despliega hasta límites entonces insospechados.

La utilización de los infinitésimos como ejemplos de números que permiten desenvolverse en sistemas no arquimedianos, llevada a cabo por Robinson y la organización de todos los números conocidos (incluidos los infinitésimos) bajo una definición y estructura genérica realizada por Conway son dos avances de este siglo.

Un interrogante que es posible formular a raíz de las afirmaciones anteriores es el siguiente: ¿qué relación existe entre el tratamiento de los números en educación y el uso que el hombre hace de los números?

El uso a que nos referimos no se agota en el manejo cotidiano de los números. El interrogante abarca también la utilización del número en otros ámbitos, como en matemática y en otras ciencias.

El tratamiento escolar del número

En el estudio del tratamiento del número en el ámbito educativo conviene considerar la distinción de Tall (1995) entre Pensamiento Matemático Elemental y Pensamiento Matemático Avanzado. Según esta distinción, en el primero los objetos son descritos, y sus propiedades se formulan mediante el lenguaje, desde la experiencia con el objeto. En el segundo, los objetos son definidos y sus propiedades, que también se formulan mediante el lenguaje, son construidas desde la definición. La diferencia entre *descripción* y *definición* de los números proporciona un criterio de análisis para el estudio del tratamiento de los números en el sistema escolar.

A continuación citamos algunos aspectos que consideramos conveniente analizar del tratamiento escolar de los números:

- Representaciones (diferentes sistemas de numeración, con especial relevancia del sistema posicional de base 10; notaciones operatorias habituales: fracciones o irracionales cuadráticos; notaciones mediante símbolos especiales: irracionales trascendentes como π y e; notación científica) que se trabajan en cada nivel.
- Procedimiento (matemático o intuitivo) mediante el que se introduce cada conjunto numérico.
- El tratamiento de la relación de orden.
- La representación en la recta y las propiedades de los números que se visualizan en esta representación.
- La forma en que se introducen las operaciones.
- Las propiedades que se estudian de los conjuntos numéricos.
- Las propiedades de las operaciones que se trabajan.

· Relaciones entre número y cantidad.

· La posibilidad de que los contenidos matemáticos reflejen ejemplos de la vida real en las que es necesario un conocimiento numérico para resolver una situación problemática.

· Análisis de la conexión de los números con la vida cotidiana.

· La edad y el nivel en que se introduce el método axiomático (definición axiomática de **R**, sistema axiomático de Peano para **N**), considerando que ello determina (si hemos de seguir a Tall) la adquisición del Pensamiento Matemático Avanzado.

El número en matemáticas

Con respecto a los conjuntos numéricos utilizados hoy en día en la producción de conocimiento matemático, a continuación mencionamos una lista no exhaustiva de diferentes teorías que han sido desarrolladas en matemática en los dos últimos siglos (Ehrlich, 1994):

- la teoría de los números reales de Cantor-Dedekind
- la teoría de los números surreales de Conway
- las teorías formuladas por las escuelas constructivistas, entre las que se incluyen el intuicionismo, la Matemática Constructiva de Bishop y la matemática constructiva recursiva de la escuela rusa de Markov (Bridges, 1994)
- teorías de sistemas numéricos no arquimedianos, como la desarrollada por Robinson

La teoría de los números reales de Cantor y Dedekind, junto a la filosofía del continuo que la sustenta, se convirtió en el SXX en el paradigma predominante. Como consecuencia, el tratamiento escolar de los números, y de los números reales en particular, se enmarca en ese paradigma. Sin embargo, en el ámbito de la investigación en educación matemática se están estudiando las ventajas y desventajas de la utilización de otras teorías (ver, por ejemplo, Sullivan, 1976).

La teoría de los números surreales de Conway (Conway, 1976) comparte la filosofía del continuo de Cantor y Dedekind, sin embargo, intenta superar las desventajas de las construcciones del sistema de números reales, como las relacionadas con la dificultad que supone trabajar con las sucesiones de Cauchy o las cortaduras de Dedekind.

Una distinción básica entre la matemática constructiva y la matemática tradicional reside en la interpretación de la existencia. “En matemáticas constructivas, ***existencia significa computabilidad***” (Bridges, 1994; p. 30). Una consecuencia de esta interpretación es el rechazo del principio del tercio excluso en las demostraciones. En cuanto a la teoría del continuo, las escuelas constructivistas “están reñidas con el análisis estándar del continuo y las correspondientes teorías de los números reales. De hecho, en gran medida, uno puede clasificar las variadas aproximaciones constructivistas a los fundamentos de la matemática de acuerdo a la clase de teorías no – estándar de números reales y del continuo que ellas aceptan" (Ehrlich, 1994).

El Análisis No - Estándar de Robinson (Robinson, 1974) constituye una extensión de los reales que proporciona una aproximación al análisis utilizando infinitésimos. El sistema de números hiperreales es el conjunto numérico utilizado en esta teoría y está constituido por el conjunto de números reales, al que se añaden los infinitésimos y los números infinitos. Una razón para el estudio de la posible incorporación del Análisis No - Estándar en la enseñanza del análisis radica en que algunas demostraciones básicas (como el teorema del valor medio) se simplifican considerablemente mediante el uso de infinitésimos (Farkas y Szabo, 1984).

El número en la vida cotidiana

Considerando la matemática como parte del conocimiento humano en general (por tanto, falible, corregible, tentativa y evolutiva), Hersh (1986) afirma que los objetos matemáticos son inventados o creados por los seres humanos, no de un modo arbitrario, sino que surgen de la actividad con objetos matemáticos ya existentes y de las necesidades de la ciencia y de la vida diaria.

Hersh opina que la capacidad de estos objetos para describir aspectos de la naturaleza se debe a que: "Los seres humanos viven en el mundo y todas sus ideas provienen finalmente del mundo en que viven –refractadas a través de su cultura y su historia, que están a su vez, por supuesto, arraigadas en la naturaleza biológica del hombre y en su entorno físico" (p. 23).

Una razón diferente que explica la capacidad de los objetos matemáticos para describir fenómenos del entorno y de la cultura puede hallarse en la visión de Hans Freudenthal (1983). Este autor sostiene que los conceptos, estructuras e ideas matemáticas fueron creados para organizar los fenómenos del mundo real y de las matemáticas. La fenomenología del concepto es la descripción de estos conceptos en sus relaciones con los fenómenos (para los que fue creado y a los que puede extenderse), del modo en que los conceptos organizan a los fenómenos y del poder que nos proporcionan sobre esos fenómenos.

Diferentes investigaciones revelan que el uso intenso del número para el desenvolvimiento en la vida diaria no supone necesariamente la aplicación de conocimientos adquiridos en la escuela. Por el contrario, en muchos estudios se ha puesto de manifiesto que las personas utilizan estrategias más variadas cuando abordan situaciones problemáticas que no consideran propias de la escuela (Lave, 1985), e incluso el porcentaje de éxito suele ser mayor en estas circunstancias. "Las lecciones escolares están llenas de dificultad y muchos estudiantes fracasan. Por otro lado, una actividad aritmética extraordinariamente exitosa se da en situaciones extra escolares" (p. 174).

El currículo y los libros de texto proporcionan información acerca de la ideología de la aritmética que se enseña en la escuela (Lave, 1985). ¿Hasta qué punto el tratamiento que se realiza en la escuela constituye una enseñanza de algoritmos y reglas para calcular, que no son apropiadas para el uso concreto de los números en la vida diaria?

Con objeto de acercarnos a las ideas y conocimientos numéricos de los alumnos, elaboramos y administramos un cuestionario piloto que describimos en el apartado 1.3. La idea clave ha sido proponer a los alumnos pares de números, para que los comparen y establezcan los parecidos y diferencias que se les ocurran. Nuestra investigación no ha seguido por la vía iniciada con este cuestionario piloto. No obstante, ese trabajo ha permitido poner a punto un marco teórico utilizado en nuestra investigación para estudiar el sistema de números reales. Este marco teórico, constituido por cinco ámbitos que denominamos ‘criterios para el estudio de los números reales’ será descrito en el capítulo 3 y ha sido utilizado en nuestro estudio empírico para interpretar respuestas de sujetos obtenidas mediante diferentes instrumentos de indagación.

El uso del número en otras ciencias

En general en otras ciencias se utilizan los conocimientos matemáticos para construir modelos de determinados fenómenos de estudio. Los modelos permiten una manipulación que en un experimento real muchas veces es imposible.

Una distinción básica en la modelización de un fenómeno es su carácter discreto o continuo. En líneas generales, la descripción de un fenómeno se realiza mediante una función definida en el conjunto de números naturales o bien en el conjunto de números reales. Por ejemplo, buena parte de las magnitudes definidas en física, desde un punto de vista teórico, toman valores sobre intervalos de números reales, aunque desde el punto de vista práctico las mediciones conduzcan, a lo sumo, a valores racionales.

Desde una visión crítica del conocimiento matemático, Rico (1995) analiza diferentes perspectivas del conocimiento de los números naturales: conocimiento matemático, conocimiento tecnológico y conocimiento reflexivo. El conocimiento tecnológico supone la aplicación de conceptos y procedimientos numéricos en la resolución práctica de problemas y en la consecución de metas tecnológicas. El análisis de este autor, enfocado hacia los números naturales, proporciona argumentos que admiten una extensión hacia los restantes conjuntos numéricos. En la modelización de la realidad mediante herramientas numéricas, el lenguaje numérico proporciona una cobertura de neutralidad que debe tomarse en cuenta. Por esta razón, “los escolares deben recibir formación para articular una crítica a cualquier aplicación tecnológica surgida de los conocimientos matemáticos y de las actuaciones correspondientes para esta aplicación” (Rico, 1995; p. 46).

Los significados que los hombres asignan y comparten mediante el uso de estructuras numéricas están relacionados con el sentido filosófico e histórico atribuido al número.

Spengler (1998) sostiene que el "alma intenta realizarse en la imagen del mundo que la circunda" y que "la cultura realizada es expresión y copia de una idea de la existencia humana" (p. 136). Para este historiador y filósofo, el sistema de números desarrollado en una cultura determinada está claramente en función de la idea de mundo de dicha cultura (p. 159). Distingue, así, entre la idea de número antiguo, surgida a partir de Pitágoras, de la idea de número occidental (moderna), iniciada por Descartes.

"El alma antigua llegó, por medio de Pitágoras, en 540 a.C., a la concepción de *su* número apolíneo, como magnitud mensurable; asimismo el alma occidental, en una fecha que corresponde a aquella, formuló por medio de Descartes y los de su generación –Pascal, Fermat, Desargues- la idea de un número, que nace de una tendencia apasionada, *fáustica*, hacia el infinito" (Spengler, 1998; p. 166).

En la evolución del conocimiento numérico es posible identificar bloqueos causados por concepciones de diferentes corrientes filosóficas o por la inexistencia de una teoría matemática que sustente esos conocimientos. A modo de ejemplo, mencionamos el bloqueo causado en la matemática griega por el descubrimiento de la inconmensurabilidad de ciertos pares de segmentos, o el rechazo de los infinitésimos (entendidos como cantidades evanescentes) desde Cauchy.

En el primer ejemplo, la crisis causada por el descubrimiento de pares de segmentos inconmensurables cuestionaba la concepción filosófica (pitagórica) de que los números son la medida del universo. Según esta concepción, el mundo que nos rodea es explicable en términos de números naturales y sus razones. Esta idea se derrumba con la constatación de pares de segmentos que no admiten una medida común. "El irracional, o, según nuestro modo de expresarnos, el uso de los decimales infinitos, viene a destruir el orden genético, el orden corpóreo – orgánico, instituido por los dioses" (Spengler, 1998; p.180).

En el segundo ejemplo, los infinitésimos, aunque muy útiles para interpretar ciertos fenómenos físicos, no satisfacían las propiedades aritméticas de los números habitualmente usados. El desarrollo de la lógica y el fundamento dado por Robinson al análisis no estándar proporciona una teoría capaz de fundamentar rigurosamente la manipulación de los infinitésimos. "El interés filosófico y epsitemológico principal del A. N. S. [Análisis No – Estándar] es que permite comprender por qué "las reglas de lo finito tienen éxito en lo infinito" y aclarar desde un nuevo aspecto las generalizaciones al caso "infinito" de teorías elementales en el caso "finito"" (Petitot, 1989; p.205).

1.1.1. Centros de interés

La preocupación inicial en nuestro trabajo ha sido el estudio de las concepciones respecto del número real de alumnos de Bachillerato y primeros cursos universitarios. La tesis *Introducción del Número Real en la Educación Secundaria* (Romero, 1995) ha constituido una fuente básica para nuestra reflexión.

En los currículos españoles vigentes, la introducción del número real está contemplada en el primer curso de Bachillerato (nivel escolar inmediatamente posterior a la educación obligatoria), correspondiente a la edad de 16 años.

La enseñanza escolar de los números utiliza, desde los primeros cursos de escolaridad obligatoria, la recta geométrica como soporte en el que se incorporan, primero los naturales, siguiendo con los enteros, racionales, hasta los números reales. Una de las ideas más extendidas en el sistema escolar es la de que la recta geométrica se 'llena' o se 'completa' con los números reales.

La conexión posible entre números y puntos de la recta ha estado subyaciendo, implícita o explícitamente, en gran parte de la reflexión filosófica y matemática en torno a la noción de número, en especial, a la noción de número real. El debate pareció quedar zanjado a finales del siglo XIX, con las construcciones de los números reales debidas a Weierstrass, Cantor y Dedekind (Mainzer, 1990). Estos dos últimos anunciaron, de modo independiente y casi simultáneo, que la biyección entre números reales y puntos de la recta era una asunción que no podía demostrarse. Esa identificación debía considerarse como un axioma gracias al cual podemos superar las antiguas dificultades causadas por la ausencia de una estructura numérica que permita la identificación de cualquier cantidad de longitud con números determinados (Crossley, 1987).

Sin embargo, la filosofía del continuo implícita en las construcciones de Weierstrass, Cantor y Dedekind no ha sido compartida por toda la comunidad matemática. Citamos, a modo de ejemplo, la posición de du Bois-Reymond al respecto:

> "La concepción del espacio como estático e inalterable nunca puede generar la noción de una línea uniforme claramente definida, desde una serie de puntos sin embargo denso, porque después de todo, los puntos están desprovistos de tamaño, y por lo tanto no importa cuán densa pueda ser una serie de puntos, nunca puede convertirse en un intervalo, que siempre debe ser reconocido como la suma de intervalos entre puntos" (du Bois-Reymond, citado en Ehrlich, 1994).

Como pondremos de manifiesto en el capítulo 3 (apartado 3.6), ha habido otras interpretaciones diferentes de la estructura de la recta.

La identificación de los números reales con los puntos de la recta proporciona un uso básico para estos números en el ámbito de la física, porque el sistema **R** constituye un requisito básico para asociar cantidades de longitud a números.

Las ideas contenidas en los párrafos anteriores han guiado nuestra reflexión y promovido nuestro interés por conocer la posibilidad de utilizar la recta geométrica como modelo que facilite el aprendizaje del sistema de números reales. Los centros de interés en nuestro estudio son los siguientes:

- Número real.
- Recta geométrica.
- Biyección números reales / puntos de la recta.
- Longitud
- Representación de números reales en la recta en el medio escolar.

Esta investigación ha sido un fruto de nuestro esfuerzo por desentrañar esa relación entre números y puntos, tanto desde los ámbitos matemático y escolar, como desde las interpretaciones de los sujetos de esa relación.

1.2. Revisión bibliográfica

La tesis doctoral 'Introducción del Número real en la Enseñanza Secundaria' (Romero, 1995) constituye un antecedente directo de nuestro trabajo. En ella se han explorado dificultades y potencialidades de una propuesta didáctica para introducir el número real en alumnos de 14-15 años, basada en la combinación de dos sistemas de representación del número real: notación decimal y representación en la recta. La propuesta didáctica se basa en que la complejidad del número real exige la utilización de diferentes sistemas de representación que permitan poner de manifiesto las distintas características del concepto. La representación en la recta es un sistema de representación utilizado, considerado ineludible para la comprensión del concepto.

Entre las conclusiones, figura el hecho de que la mitad de los alumnos piensa que a un punto dado de la recta puede corresponderle un número racional o un irracional constructible. La otra mitad piensa que le puede corresponder cualquier tipo de decimal, es decir, cualquier número real. La investigadora cree que esta última afirmación proviene del conocimiento establecido: "los números reales son los que llenan la recta", y que los alumnos no disponen de una razón que la justifique.

En la investigación llevada a cabo por C. Romero (1996) se espera estudiar el esquema conceptual que tienen del continuo los alumnos de 16-17 años. Para ello el autor administra un cuestionario constituido por tres preguntas: la primera orientada a "investigar las *percepciones de las propiedades* de cada tipo de número", la segunda dirigida a indagar acerca de la descripción que realizan los alumnos de la recta geométrica, y con la última el investigador intenta explicitar las ideas que los alumnos ponen en juego ante la posibilidad de un proceso infinito (la división de una 'cuerda matemática' en dos partes). El investigador llega a la conclusión de que el esquema conceptual que tienen los alumnos del continuo consiste de un "agregado inconexo de imágenes y de enunciados de propiedades que han causado un comportamiento errático ante las cuestiones propuestas en el cuestionario" (Romero, 1996; p. 12). La primera pregunta de su cuestionario dio origen a la pregunta de investigación utilizada en el cuestionario piloto ya mencionado, cuyo análisis condujo a la determinación de los criterios para el estudio de los números reales (desarrollados en el capítulo 3, apartado 3.5).

Hasta aquí hemos mencionado dos investigaciones que han proporcionado ideas claves para nuestras reflexiones. En general, el hecho de que el número real no constituya un descriptor específico en el thesaurus de la base ERIC es un indicio de la escasez de investigaciones preocupadas por este concepto. Una búsqueda en dicha base utilizando como términos claves '(number systems) and (real)' ha dado como resultado 37 registros entre 1966 y 1999. La mayor parte de estos registros corresponde a libros de texto (para el alumno o para el profesor) en los que se estudian los sistemas numéricos, comenzando por los números naturales hasta llegar a los números reales. *Ninguno de estos registros corresponde a una investigación preocupada por la enseñanza de los números reales*.

Debemos destacar por otra parte, que no hemos encontrado ninguna investigación en la que se estudie la asignación concreta de números reales a puntos de la recta, excepto la citada de Romero (1995), y otra investigación (Fischbein, Jehiam y Cohen, 1995) en la que se indaga acerca de las ideas de estudiantes respecto de la relación entre números racionales, números irracionales, números reales y eje numérico. En este último trabajo, sin embargo, no se plantean cuestiones referidas a la determinación del punto de la recta correspondiente a un número dado (o viceversa). Hemos hallado investigaciones en las que se estudian las concepciones de recta geométrica de sujetos de edades diferentes y otras donde se estudian dificultades o concepciones de los alumnos acerca de los números reales. Hemos incluso hallado investigaciones en que estas dos cuestiones se consideran en un mismo cuestionario (Robinet, 1986; Romero, 1996), pero en preguntas diferentes, sin incluir cuestiones en las que los sujetos deban asignar concretamente números reales a puntos de la recta.

1.2.1. Estudios consultados

A continuación mencionaremos algunos estudios relacionados con nuestro trabajo y que han sido consultados durante su desarrollo.

Estudios referidos al aprendizaje del número real

Incluimos en este grupo los estudios que han indagado en torno a concepciones, obstáculos, dificultades y potencialidades de la enseñanza del número real. Además de los dos mencionados (Romero, 1995 y Romero, 1996) citamos:

- Robinet (1986): Estudia las ideas de alumnos de 17-18 años respecto del número real. Entre sus conclusiones afirman que los sujetos consideran que R es, con frecuencia, **N**, **Z**, **Q** y **D** y algunos otros números, que muchos piensan que la recta tiene una estructura atómica y que las diferentes escrituras de los números son más importantes que sus propiedades específicas. Algunos resultados de este trabajo serán comentados en 3.6.
- Margolinas (1988): Estudia dificultades en la enseñanza de los números reales. Compara un modelo matemático del número real con un “modelo histórico” y señala que el primero es el que se utiliza en la enseñanza. Las dificultades detectadas están relacionadas con la escritura decimal de los números reales.
- Fischbein, Jehiam y Cohen (1995): Indagan en torno a dos obstáculos intuitivos atribuidos al concepto de número irracional: la dificultad en aceptar que dos magnitudes pueden ser inconmensurables y la dificultad en aceptar que el conjunto de números racionales no cubre todos los puntos de un intervalo. El informe de este trabajo ha sido utilizado en 3.5 para poner a prueba la utilidad de los criterios para el estudio de los números reales en la interpretación de afirmaciones referidas al sistema **R**.

Dificultades de los alumnos respecto de la noción de infinito

El estudio del número real supone el tratamiento de procesos infinitos. Los estudios considerados a este respecto son:
- Fischbein, Tirosh y Hess (1979): Estudian las intuiciones de los sujetos respecto del infinito, partiendo de dos hipótesis: (1) el concepto es intuitivamente contradictorio y (2) las categorías principales de respuestas permanecerán estables a través de la edad y de los cursos.
- Tall (1980): Afirma que algunas intuiciones de los sujetos inadecuadas en un determinado paradigma matemático tienen sentido en paradigmas diferentes. En particular, la intuición de que un segmento de recta cuya longitud es el doble que la de otro segmento posee el doble de puntos que éste.
- Sierpinska (1989): Estudia las condiciones en que las actitudes hacia el infinito y hacia las matemáticas se convierten en obstáculos durante la transición desde las operaciones concretas hacia las operaciones formales.
- Moreno y Waldegg (1991): Analizan diferentes estados en la evolución del concepto de infinito actual, desde el punto de vista del análisis de Piaget de la relación entre el desarrollo psicogenético del niño y el desarrollo sociogenético de las ideas en algunos dominios de la ciencia.

Dificultades en el tratamiento de la noción de límite

Los estudios referidos a la noción de límite nos han interesado porque algunas dificultades en el aprendizaje de este concepto se manifiestan en el aprendizaje del concepto de número real.

- Cornu (1981) y Cornu (1982): En el primer artículo este investigador describe la evolución histórica de la noción de límite, aportando elementos que permitan detectar obstáculos epistemológicos. En el segundo trabajo describe una secuencia didáctica para el aprendizaje de la noción basada en las conclusiones del primero.
- Sierpinska (1985) y Sierpinska (1987): En el primer artículo esta investigadora describe algunos obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite. En el segundo artículo explora las posibilidades de situaciones didácticas pensadas para que los alumnos superen los obstáculos identificados en el primero. Los resultados del segundo trabajo han sido comparados con algunos resultados de nuestro estudio empírico, en el capítulo 7.
- Tall (1992): Describe los resultados de diferentes investigaciones preocupadas por la conceptualización de diversos conceptos matemáticos (límite, función, infinito y prueba). Define dos rasgos del pensamiento matemático avanzado: definiciones matemáticas precisas y deducciones lógicas de teoremas. En el capítulo 7 de la presente memoria cotejamos algunos resultados comentados por este autor con los obtenidos en nuestro trabajo.

Conceptos y procedimientos

- Douady (1984): La dialéctica 'outil – objet' desarrollada por esta investigadora ha sido comentada en el capítulo 7, con el fin de evaluar la utilidad de este análisis en la interpretación de los resultados de nuestra investigación.
- Hiebert y Lefevre (1986): Las consideraciones de estos autores respecto de los conocimientos conceptual y procedimental han sido analizados en el capítulo 7.

Relación entre estructuras matemáticas y modelos físicos

La asignación de números reales a puntos de la recta supone una consideración de objetos matemáticos que se 'concretizan' en gráficos efectuados sobre el papel. Nos interesamos por buscar investigaciones en las que se ponga de manifiesto la distinción entre objetos matemáticos ideales y objetos físicos.

- Fischbein, Tirosh, Stavy y Oster (1990), Tirosh y Stavy (1992), Tirosh, Stavy y Cohen (1998) y Tirosh, Stavy y Aboulafia (1998): En estas investigaciones se estudia la capacidad de los sujetos para distinguir entre propiedades de un objeto mental (un segmento de recta) y las propiedades de un objeto material (un trozo de alambre de cobre). Algunos resultados de estas investigaciones serán cotejados en el capítulo 7 con resultados de nuestro estudio empírico.
- Coriat, Martínez y Baena (1996): A partir de un modelo de R^+ obtenido de la mezcla de dos pigmentos coloreados diseñan una actividad pensada para un curso introductorio sobre los números reales. Algunas conclusiones de este trabajo han sido utilizadas en el análisis de las respuestas de nuestros sujetos en el capítulo 7.

Concepciones respecto de la recta geométrica

Las intuiciones de los alumnos respecto de la naturaleza de la recta es una cuestión que puede intervenir en la asignación de números reales a puntos de la recta. Las conclusiones de los siguientes trabajos serán comentadas el apartado 3.6.

- Mansfield (1985): Se propone estudiar el marco conceptual que tienen los alumnos respecto de los objetos geométricos punto y recta, puesto que considera que ese marco interactúa con la información presentada por el profesor.
- Robinet (1986): En la investigación ya citada incluye una pregunta en el cuestionario para indagar acerca de las ideas que poseen los alumnos respecto de la recta.
- Romero (1996): En la investigación ya citada se incluye una pregunta destinada a indagar en la descripción que realizan los sujetos de la recta, así como en la noción de infinito.
- Solomon (1991): Analiza la doble naturaleza que tiene una recta para la mente humana. Describe algunas propiedades contradictorias que tiene la recta desde un punto de vista 'ideal'.

Antecedentes de tipo metodológico

Citamos además, dos trabajos que constituyen un referente metodológico en nuestra investigación.

- Artigue y Robinet (1982): Encontramos ciertas semejanzas entre el diseño de esta investigación y la nuestra. A partir de un análisis teórico se define un área problemática, mediante una indagación previa se define un área de posibilidades con los alumnos, se diseñan situaciones para presentar a los alumnos y se estudian las producciones de éstos.
- Scaglia S. (1998): Este trabajo de investigación presentado para obtener la suficiencia investigadora constituye un modesto antecedente de formación personal de carácter metodológico.

1.3. Estudios previos

El cuestionario piloto mencionado en 1.1 constituye un estudio previo, realizado con el propósito de indagar acerca de las ideas numéricas (sin más precisión) de alumnos de diferentes niveles educativos. Este cuestionario piloto es considerado en la presente investigación como un *estudio empírico previo*, cuya utilidad básica pondremos de manifiesto a continuación.

Una pregunta del cuestionario utilizado por Romero (1996) en su investigación, consiste en presentar números de diferentes conjuntos numéricos (**N**, **Z**, **Q**, **R** y **C**) expresados mediante diversas representaciones simbólicas, y solicitar a los alumnos que los clasifiquen, utilizando los criterios que a ellos se les ocurran, y si es posible evitando los que se estudian en la escuela.

La actividad de clasificar distintos números suele ser frecuente en el medio escolar, y por esta razón los alumnos ante este tipo de preguntas recurren principalmente a los criterios escolares (por ejemplo, clasificación de los números según el conjunto numérico al que pertenece).

Sin embargo, la petición del investigador acerca de que eviten utilizar criterios escolares, que los criterios empleados se especifiquen claramente y que inventen dos ejemplos más para cada criterio identificado, puede resultar beneficiosa para que los alumnos no se encasillen en la respuesta 'estándar' y se genere una reflexión que trascienda las respuestas usuales. El hecho de que se especifiquen criterios puede dar información acerca de las características de los números que son más 'llamativas' para los alumnos.

La lectura de este artículo, la reflexión acerca de las cuestiones planteadas a los alumnos y los resultados obtenidos motivaron la formulación de una nueva pregunta para presentar a los alumnos. En este caso, la idea clave fue proponer al alumno pares de números, para que los compare y establezca los parecidos y diferencias que se le ocurran.

Una primera versión del cuestionario se administró a un grupo de 1º año de Educación Infantil (54 alumnos). Esta encuesta (anexo 1.1) consta de 14 pares de números y se pide a los alumnos que indiquen parecidos y diferencias.

Una segunda versión del cuestionario (anexo 1.2) se administró a alumnos de un Instituto en las modalidades BUP y Formación Profesional. Se introdujeron algunas variantes, que se detallan a continuación:

- Se pide a cada alumno que compare cuatro pares de números.
- Se da la respuesta que ha dado un alumno hipotético, incluyendo un parecido y una diferencia en cada caso.
- Se pregunta si están de acuerdo o no con esa respuesta, y que justifiquen ese acuerdo o desacuerdo.
- Se solicita que agreguen otros parecidos o diferencias.

Al igual que en la investigación comentada, y como consecuencia de estudiar el significado de conocimiento intuitivo (Fischbein, 1987), se decidió sugerir a los alumnos, junto al enunciado de las cuestiones, la posibilidad de recurrir a sus propias ideas acerca de los números, añadiendo a las que se trabajan en la escuela las que surgen del uso diario que dan a los números.

Las respuestas obtenidas en el cuestionario piloto no serán estudiadas en este trabajo, aunque hemos incluido algunos ejemplos en la sección 3.5.3.

Cuando administramos los cuestionarios pilotos, vimos la necesidad de contar con una herramienta para estudiar las respuestas de los alumnos. Gracias al estudio empírico previo pudimos elaborarla. El proceso de elaboración se describe en 3.5.3.1 y esta herramienta de análisis la denominamos **criterios para el estudio de los números reales** (véase 3.5). De ahora en adelante con la palabra 'criterios' en esta memoria nos referimos a los mencionados criterios para el estudio de los números reales.

De modo resumido, se elaboró una lista inicial de criterios que podían ser usados por los alumnos para comparar los números. Posteriormente esa lista fue ampliada a la luz de las respuestas obtenidas en el primer ensayo piloto del cuestionario, para dar lugar a los cinco criterios para el estudio de los números reales: *Orden*, T*ipo de número*, *Fenomenología*, *Representaciones* y *Operaciones.*

En 3.5.3.2 describimos la utilización de los criterios en la interpretación de afirmaciones contenidas en dos informes de investigación referidos al número real (Fischbein, 1995 y Romero, 1995). Esta utilización de los criterios, previa al desarrollo de la presente investigación, nos ha alentado a aceptar su pertinencia en la organización de afirmaciones referidas a números reales.

En el presente trabajo la utilidad de los criterios es doble. Por un lado, desarrollar un estudio del sistema de números reales, descrito en el apartado 3.5, desde los puntos de vista matemático y escolar. Por otro lado, los criterios juegan un papel destacado en la interpretación de las respuestas dadas por alumnos a diferentes tareas propuestas en el *estudio empírico* (capítulos 4 a 6).

En la investigación llevada a cabo por González Mari (1995) se describe el campo conceptual de los números naturales relativos. La utilidad de estos números radica en que permiten cubrir ciertas carencias de los conjuntos numéricos naturales y enteros para el tratamiento aditivo y ordinal de la totalidad de situaciones y problemas que pueden plantearse en ese dominio (González Mari, 1995; p.52).

El estudio que desarrolla el autor en torno a los números relativos abarca diferentes ámbitos, algunos muy próximos a los criterios para el estudio de los números reales desarrollados en esta memoria. Considera en su estudio tres *tipos de números* diferentes (naturales, relativos y enteros). Las diferencias estructurales más importantes que destaca entre ellos son: el tipo de *orden* y de estructura algebraica (en nuestro estudio, incluimos la estructura algebraica de **R** en el criterio *Operaciones*). Establece, además, diferencias *fenomenológicas*, que justifican la utilidad de los números relativos en ciertas situaciones que no son apropiadas para los naturales y enteros, y diferencias relacionadas con los tipos de *representación* simbólica.

1.4. Procedimiento

En este apartado relatamos el desarrollo temporal de la investigación. En la tabla 1.1 resumimos las diferentes actividades realizadas.

En la segunda columna, correspondiente a las actividades realizadas, se indican las decisiones significativas que se tomaron en el transcurso de la investigación, y son las siguientes:

Decisión significativa 1 (DS 1): Una vez identificados los cinco criterios para el estudio de los números reales, la investigadora asume que la representación de números reales en la recta presenta características que la distinguen sustancialmente de otras representaciones, e inicia un estudio en profundidad de esta representación (apartado 3.6). Se toma la decisión de centrar la investigación en la representación de números reales en la recta.

Decisión significativa 2 (DS 2): Para las entrevistas exploratorias se han diseñado cuestiones dirigidas a abordar todas las preguntas de investigación y objetivos planteados en el proyecto de tesis. Cuando se estudian las posibles situaciones que podrían incluirse en el cuestionario (apartado 5.1, Racionalidad del Cuestionario), como consecuencia de los resultados de las entrevistas exploratorias, se elabora un banco de ítems demasiado extenso para incluir en un solo cuestionario. Se aplica un criterio de selección (descrito en 5.1) que supone una reducción de los aspectos inicialmente planteados en el proyecto de tesis. Como consecuencia, es necesario revisar el problema de investigación y reformular los objetivos e hipótesis. (El proyecto de tesis se incluye en el anexo 2.)

Decisión significativa 3 (DS 3): Se refiere a la organización y distribución de la información en los diferentes capítulos que constituyen la presente memoria.

En la tercera columna indicamos dónde se sitúan, en la presente memoria, los estudios o actividades señalados en la segunda columna. El número de apartado o capítulo correspondiente va precedido por uno de los términos: *idea* o *avance.* El término *idea* significa que en ese momento se han desarrollado las ideas contenidas en el apartado o capítulo indicados, aunque no se han depurado. El término *avance* indica que se ha realizado una redacción de las ideas o estudios correspondientes. En todos los casos, estas primeras redacciones han sido revisadas y completadas en la redacción final de la memoria.

Por último, en la cuarta columna señalamos las ocasiones en que se han sometido a discusión algunos resultados, con el objeto de asegurar un control externo sobre el desarrollo del trabajo. Por no alargar el tamaño de la tabla, se han excluido de esta columna las presentaciones sistemáticas en el grupo de Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y una serie de intercambios individuales con los siguientes investigadores (en orden cronológico): Luis Rico, María José González-López, Carmen Azcárate, Isabel Romero, Matías Camacho y Luis Puig.

FECHAS	ACTIVIDAD	CAPÍTULO	DIFUSIÓN
Abril 1998	Elaboración Cuestionario Piloto		
Mayo 1998	Administración Cuestionario Piloto.		
	Estudio Cuestionarios Pilotos ↓ Surgen Criterios.		
Febrero 1999	Estudio Representación en la Recta de los Números Reales **DS 1**	Avance Ap. 3.6, Cap. 3	Sometimiento artículo. Comunicación en P.N.A.[2]: "Criterios"
Marzo 1999	Proyecto de tesis: *Problema de Investigación* *Objetivos* *Hipótesis*	Ideas Ap. 3.2, Ap.3.3 y Ap.3.4, Cap. 3	
Marzo/Abril 1999	Elaboración Entrevistas Exploratorias. Ensayo entrevistas.		
Mayo 1999	Administración Entrevistas Exploratorias		
Abril/Mayo/Junio 1999	Desarrollo Criterios	Avance Ap. 3.5, Cap. 3	
Junio/Agosto 1999	Estudio Entrevistas Exploratorias ↓ Surgen conflictos (Ideas iniciales)	Avance Cap. 4	
Septiembre/Octu-bre 1999	Racionalidad Cuestionario *Revisión Problema Investigación* *Objetivos* *Hipótesis* **DS 2**	Avance Ap. 5.1, Cap. 5	
Octubre 1999	Confección cuestionario	Avance Ap. 5.2, Cap. 5	
Octubre 1999	Administración Cuestionario		
Noviembre/Diciem-bre 1999 Enero 2000	Estudio Cuestionario ↓ Depuración Conflictos.	Avance Ap. 5.3, Cap. 5 Ideas Ap. 3.7	Consulta a expertos (anexo 7) Comunicación en Thales[3], criterio Fenomenología.
Enero/Febrero 2000	Administración Entrevistas Confirmatorias		Comunicación P.N.A.: 'Racionalidad cuestionario'.
Febrero/Marzo 2000	Estudio Entrevistas Confirmatorias	Avance Cap. 6	
Marzo/Abril 2000	Conexión conflictos / obstáculos	Avance Cap. 7	
Abril/Mayo 2000	**DS 3** Redacción memoria	Caps. 4, 5, 6, 7, 3, 1, 2 y 8.	Presentación Seminario: 'Estudio Cuestionario'.

Tabla 1.1: Cronología de la investigación

[2] Las siglas P.N.A. remiten a los Seminarios del grupo de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, organizados cada año, desde 1998.

[3] Jornadas sobre "Investigación en el aula de Matemáticas. Matemáticas en la sociedad." Organizadores: S.A.E.M. THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Noviembre y Diciembre de 1999.

CAPÍTULO 2

DISEÑO

2.1. Delimitación del problema

Esta investigación está centrada en el estudio de la representación de números reales en la recta. **El propósito central del trabajo es caracterizar obstáculos epistemológicos relacionados con la representación de números reales en la recta.**

La recta, que se trabaja en la escuela desde edades muy tempranas, se utiliza como "soporte" de los conjuntos numéricos que se estudian gradualmente. El ámbito educativo ha acuñado la expresión "representación en la recta" para referirse a la imagen visual de la biyección punto-número apoyada tradicionalmente en la medida de longitudes. Esta biyección conduce a utilizar la expresión 'recta numérica' para designar al conjunto ordenado de los números reales (Bouvier et al., 1984; p. 580).

Para Gardiner (1982, p. 254) la recta numérica es una de las imágenes mentales (después de la notación decimal) que sostiene al concepto *global* de número en los alumnos. Este concepto *global* sigue a un concepto *local* de número, que depende de la experimentación y exploración con ejemplos particulares de números. "Ahora la cuestión excepcional acerca de estas imágenes mentales es que dan una idea esencialmente precisa de la estructura y de la conducta de los números reales abstractos, y así nos permiten llegar a controlar el concepto general de "*un número real*" de un modo más o menos explícito." (Gardiner, 1982; p. 254)

Siguiendo a Freudenthal, consideramos la recta geométrica y la longitud como dos fenómenos organizados por el número real.

Cuando se intenta organizar la longitud con ayuda del número real, no es posible llegar a los números irracionales como resultado de una medición directa, si se exige que dicha medición se apoye en un procedimiento finito. En el contexto de la medida, estos números surgen de una actividad intelectual, de una medición indirecta (aplicando fórmulas o relaciones matemáticas) o un razonamiento (apoyado en imágenes físicas, pero justificado de manera abstracta, o en procesos infinitos).

Los currículos de Bachillerato mencionan una breve introducción al número real que, sin desarrollar el concepto, permite trabajar diferentes “representaciones”: icónica, posicional y la recta. Uno de los mayores retos de cualquier introducción al número real está precisamente en que no disponemos de una “representación” unificadora y adecuada para cada uno ellos. Por ejemplo, el conjunto de números decimales de hasta n cifras, $\mathbf{D_n}$, es numerable, mientras que **R** no lo es; sabemos describir todos los algebraicos, pero no todos los números trascendentes. Por otra parte, como dice Romero (1995; p. 62-63), una “representación” no permite exhibir todas las características de un objeto matemático. Se comprende así que las “representaciones” de los números reales generen dificultades escolares.

En este trabajo, cuando hablamos de 'representación' nos referimos exclusivamente a representaciones externas. Más precisamente, admitimos que hay conceptos públicamente compartidos (recta geométrica, número real) y representaciones de los unos por los otros públicamente compartidas.

La interpretación de la recta geométrica mediante conjuntos numéricos es una cuestión controvertida desde el punto de vista matemático y también filosófico, puesto que suscita una reflexión respecto de la ‘naturaleza’ de la recta, que ha originado opiniones contradictorias (ver, por ejemplo, Pérez de Tudela, 1981). Las intuiciones respecto de la naturaleza de la recta llegan a ser realmente discordantes, como pondremos de manifiesto en el capítulo 3.

Las reflexiones anteriores inducen a conjeturar que pueden suscitarse dificultades durante la representación de números en la recta en el medio educativo. Se podrían dar *a priori* explicaciones genéricas para estas dificultades a partir de las cuestiones consideradas hasta aquí: la imposibilidad de acceder a todos los números reales a través del proceso de medida, la ausencia de una “representación” unificadora para los números reales o la controvertida naturaleza de la recta geométrica.

Con objeto de reafirmar nuestra conjetura citamos las afirmaciones de Romero (1995), incluidas en un análisis de las dificultades detectadas en los sujetos durante el desarrollo de la propuesta didáctica:

> “*Los argumentos expresados por los niños ponen de manifiesto que la cuestión* [¿qué números llenan la recta?]*, así formulada, hace aflorar sus intuiciones más primitivas sobre la estructura del continuo lineal, sobre la correspondencia entre esta estructura y sus nociones acerca de los números, sobre el cardinal de los conjuntos infinitos y la correspondencia entre ellos y, en especial, sobre la no existencia de un final para los procesos infinitos”* (Romero, 1995; p. 448)

Las reflexiones hasta aquí descritas inducen a creer que el propósito general de nuestra investigacion, es decir, la caracterización de obstáculos epistemológicos relacionados con la representación de números reales en la recta, constituye un objetivo alcanzable.

Un obstáculo epistemológico se puede reconocer en el progreso de un determinado conocimiento. En los sujetos, y con más razón en sujetos de secundaria o de primeros años de universidad, pueden reconocerse, en cambio, errores, dificultades y conflictos durante el desarrollo de determinadas tareas.

En nuestra investigación utilizaremos los conflictos detectados como posibles indicadores de dificultades en los conceptos implicados. El hallazgo del obstáculo epistemológico lo abordamos como un problema de interpretación a partir de los conflictos observados. Ello supone, en consecuencia, dos niveles de interpretación:

1º) Reconocer y enunciar conflictos en las respuestas de las personas

2º) Explicar esos conflictos en términos de obstáculos epistemológicos.

Durante el estudio propondremos a los sujetos situaciones de aspecto escolar, aunque con la suficiente complejidad como para suscitar conflictos. Una vez enunciados, los conflictos son tomados como piezas de análisis para proponer una explicación en términos de obstáculos epistemológicos.

A la luz de las reflexiones anteriores enunciamos los **supuestos** de la investigación:

- La biyección entre números reales y puntos de la recta atribuye una estructura a la recta que ha cosechado adeptos pero también adversarios en el ámbito matemático y filosófico.

- Los elementos conceptuales y procedimentales de la representación en la recta de números reales requieren una clarificación.

- Hay indicios de que la biyección números reales / puntos de la recta resulte conflictiva para algunos alumnos.

2.2. Objetivos de la investigación

Bajo los supuestos enunciados, los **Objetivos Generales** del trabajo son los siguientes:

- Analizar dos fenómenos organizados por el número real: la recta geométrica y la longitud.
- Con ayuda de esos fenómenos diseñar situaciones que permitan detectar conflictos cognitivos en sujetos de Bachillerato o que comienzan los estudios universitarios.
- Establecer una interpretación de esos conflictos cognitivos en términos de obstáculos epistemológicos.

Los objetivos generales se desglosan en los siguientes **objetivos parciales**:

1. Elaborar criterios para estudiar el sistema de números reales.

2. Describir fenómenos que, organizados por el número real, están a disposición de alumnos de Bachillerato: la recta y la longitud.

3. Describir las demandas conceptuales y procedimentales de la representación en la recta de los números reales.

4. Detectar conflictos que surgen en los sujetos en tareas de representación de números reales constructibles en la recta.

5. Caracterizar los conflictos detectados en los sujetos.

6. Explicar los conflictos detectados en términos de obstáculos epistemológicos.

2.3. Hipótesis de la investigación

Los objetivos de la investigación constituyen una guía para el planteamiento de las hipótesis de investigación. Atendiendo a los objetivos parciales enunciados en el apartado anterior, formulamos las hipótesis de nuestro trabajo.

Las dos primeras hipótesis se refieren a los cinco criterios surgidos inductivamente a raíz del estudio empírico previo (véase 1.3), y las enunciamos así:

Hipótesis 1:
Los criterios para el estudio de los números reales proporcionan un marco para la descripción del sistema **R** y de las dificultades conceptuales y procedimentales implicadas en él.

Hipótesis 2:
Los criterios para el estudio de los números reales permiten analizar las respuestas de sujetos en las situaciones propuestas en el estudio empírico.

El sistema de números reales constituye una estructura matemática que organiza dos fenómenos: la recta y la longitud. Desde este punto de vista estudiamos la representación de números reales en la recta, sobre la que versa la siguiente hipótesis:

Hipótesis 3:
La representación en la recta de los números reales es conceptual y procedimentalmente más compleja que otras representaciones de estos números.

Las hipótesis siguientes versan sobre la naturaleza de los conflictos detectados durante actividades de representar números en la recta y sobre la estrategia para ponerlos de manifiesto.

Hipótesis 4:
Algunos conflictos detectados en alumnos de Bachillerato y 1º de Licenciatura de Matemáticas al representar en la recta números constructibles surgen por la representación posicional infinita.

Hipótesis 5:
Algunos conflictos detectados en alumnos de Bachillerato y 1º de Licenciatura de Matemáticas al representar en la recta números constructibles surgen de la confusión entre dos nociones de representación gráfica (objeto físico / objeto geométrico).

Hipótesis 6:
La valoración de la exactitud de la representación en la recta constituye una estrategia adecuada para poner de manifiesto los conflictos mencionados en las dos hipótesis anteriores.

2.4. Comparación con el proyecto de tesis

Como se indicó en 1.4, tomamos una decisión significativa después de realizar las entrevistas exploratorias (capítulo 4). Al elaborar las posibles situaciones que podrían incluirse en el cuestionario (Racionalidad del cuestionario, capítulo 5), intentando abarcar las cuestiones contempladas en el proyecto de tesis, y los resultados de las entrevistas, se obtiene un banco de ítems demasiado extenso. Como consecuencia de adoptar un criterio de selección de ítems (descrito en 5.1) nos vimos en la necesidad de redefinir el problema, objetivos e hipótesis de la investigación. En el Anexo 2 incluimos el proyecto de tesis.

El problema de investigación enunciado en el proyecto coincide en líneas generales con los objetivos generales señalados en el apartado 2.2, aunque se observa en aquél que las proposiciones referidas a la caracterización de obstáculos, y a la detección de interpretaciones o intuiciones explicables mediante esos obstáculos se encuentran en un orden invertido con respecto a los objetivos generales de esta memoria.

La inversión del orden en esas proposiciones se explica por la solución que hemos dado a una dificultad señalada en el apartado 4.6 del proyecto de tesis (Dificultades y limitaciones de la investigación). En ese apartado, mencionamos que la tesis depende críticamente de la conexión entre obstáculos e interpretaciones de sujetos. La conexión la hemos resuelto durante el transcurso del trabajo del siguiente modo: en primer lugar, se detecta la presencia de conflictos cognitivos en los alumnos (el significado atribuido a la expresión *conflicto cognitivo* se describe en 3.7), y en segundo lugar, se estudian estos conflictos a la luz del análisis que Bachelard (1987) realiza respecto del conocimiento matemático (descrito en el apartado 3.2). La conexión entre conflictos y obstáculos se realiza en el capítulo 7.

En la tabla 2.1 señalamos la conexión entre objetivos del proyecto de tesis y los objetivos parciales planteados en el apartado 2.2. Los cambios están especialmente relacionados con la modificación realizada a fin de afrontar la conexión entre conflictos y obstáculos.

Un objetivo que no se ha retomado en la nueva formulación es el referido a la búsqueda de intuiciones en los alumnos que adquieran significado matemático en distintos conjuntos numéricos. En las entrevistas exploratorias (capítulo 4) se han planteado situaciones cuya finalidad es detectar intuiciones relacionadas con propiedades de los infinitésimos. Asimismo, en la Racionalidad del Cuestionario (5.1, capítulo 5) se ha contemplado este objetivo, intentando plantear situaciones que propicien la aparición de estas intuiciones. Sin embargo, cuando decidimos centrar el cuestionario en la búsqueda de los dos conflictos detectados, conjeturamos que las situaciones planteadas para detectar intuiciones referidas a los infinitésimos no proporcionarían información relacionada con los dos conflictos. En consecuencia, el objetivo correspondiente en el Proyecto de Tesis no es abordado en el presente trabajo, más allá de las situaciones planteadas en las entrevistas exploratorias a los alumnos (capítulo 4) y en la Racionalidad del cuestionario (capítulo 5). Este objetivo queda abierto para futuros estudios.

Objetivos Proyecto de Tesis	Objetivos Definitivos (ap. 2.2)
1. Analizar fenómenos que, organizados por el número real, están a disposición de alumnos de Bachillerato: la recta y la longitud.	1. Elaborar criterios para estudiar el sistema de números reales.
2. Recopilar intuiciones que, debidamente formuladas, adquieren significado matemático en conjuntos numéricos (reales e hiperreales).	2. Describir fenómenos que, organizados por el número real, están a disposición de alumnos de Bachillerato: la recta y la longitud.
3. Describir del modo más exhaustivo posible las demandas conceptuales y procedimentales de la representación en la recta de los números reales.	3. Describir las demandas conceptuales y procedimentales de la representación en la recta de los números reales.
4. Establecer obstáculos epistemológicos como consecuencia de los estudios anteriores.	4. Detectar conflictos que surgen en los alumnos en tareas de representación de números reales constructibles en la recta.
5. Elaborar criterios para estudiar las producciones de los alumnos que resulten de las situaciones diseñadas en la investigación.	5. Caracterizar los conflictos detectados en los sujetos.
6. Reconocer la ausencia o presencia de interpretaciones e intuiciones en las producciones de los alumnos que, en su caso, fueran explicables mediante los obstáculos descritos (o estuvieran relacionadas con ellos).	6. Explicar los conflictos detectados en términos de obstáculos epistemológicos.

Tabla 2.1: Modificaciones en los objetivos del Proyecto de Tesis

Las hipótesis planteadas en 2.3 son consecuencia de la reformulación de los objetivos.

El cambio de título se explica en el capítulo 8.

2.5. Metodología

Este trabajo está centrado en el estudio de un contenido específico (la representación de números reales en la recta) y tiene una orientación cognitiva.

El diseño escogido, a partir del propósito central de la investigación, incluye la utilización alternativa de métodos empíricos y no empíricos (Fernández Cano, 1995). Los resultados parciales que se obtienen en un estudio ofrecen información para el estudio siguiente, como se pone de manifiesto en la figura 2.1.

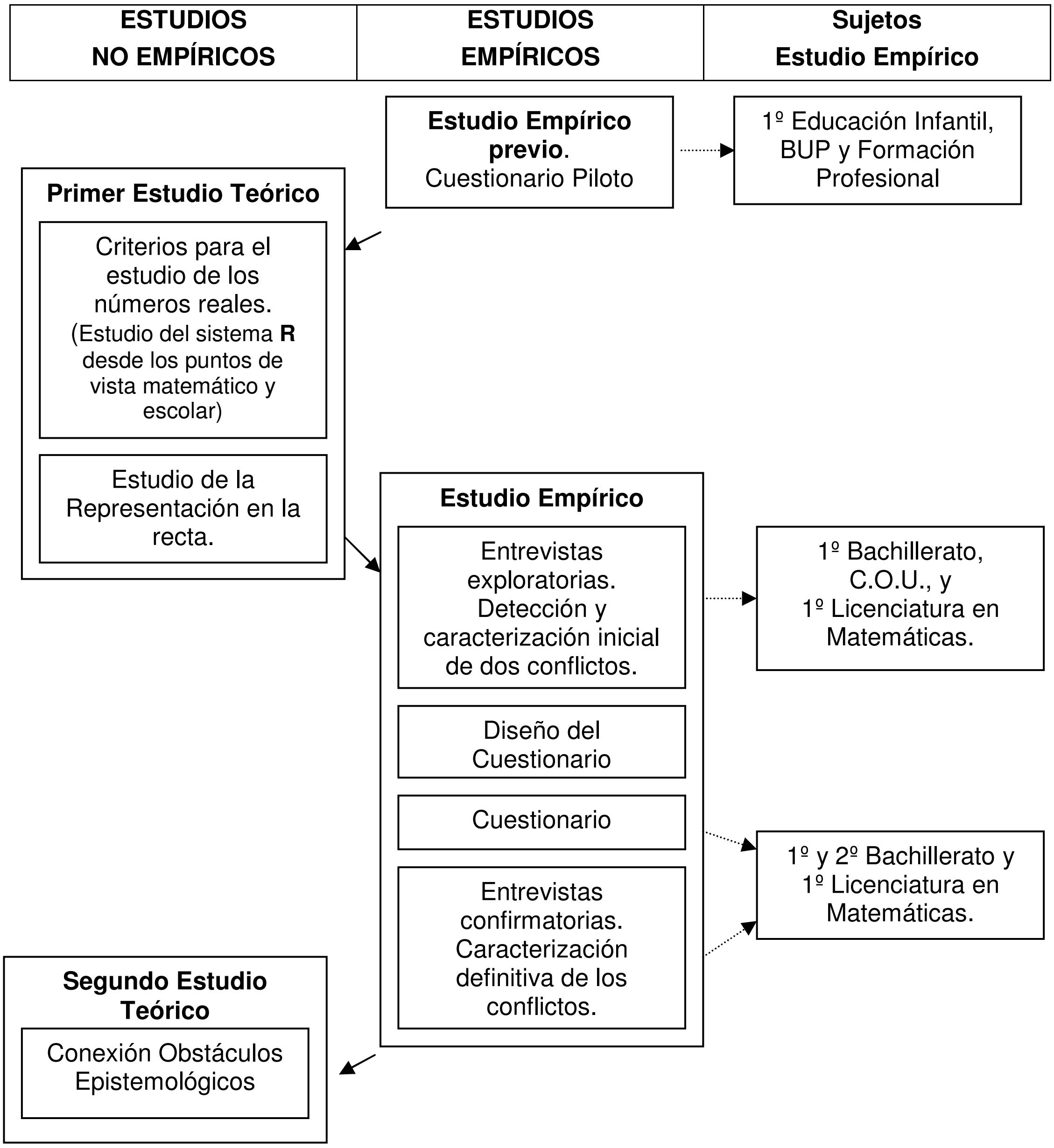


Figura 2.1: Estudios que componen la investigación

A partir de un estudio empírico previo (cuestionario piloto mencionado en 1.3) que no abordaremos en la presente memoria, se obtiene un marco constituido por cinco ámbitos. Este marco tendrá una utilidad doble: organizar un estudio teórico del sistema de números reales y organizar respuestas de alumnos en un nuevo estudio empírico.

En un estudio no empírico (que de aquí en adelante denominamos Primer Estudio Teórico) se aborda el sistema de números reales y la representación de números en la recta. La descripción desde un punto de vista matemático y escolar del sistema **R** y la descripción de la representación de números en la recta proporcionan elementos para diseñar situaciones adecuadas para incluir en los instrumentos de un nuevo estudio empírico.

En el Estudio Empírico se analizan respuestas de alumnos con el objeto de identificar conflictos cognitivos.

Finalmente, en el Segundo Estudio Teórico se estudia la conexión entre los conflictos detectados y los obstáculos epistemológicos.

Los estudios empíricos son de tipo descriptivo. En la investigación descriptiva, "el investigador cuenta lo ocurrido. [Los estudios descriptivos] observan a individuos, grupos, instituciones, métodos y materiales con el fin de describir, comparar, contrastar, clasificar, analizar e interpretar las entidades y los acontecimientos que constituyen sus diversos campos de investigación" (Cohen y Manion, 1990; p. 101).

En términos generales, en nuestro trabajo observamos a los individuos en tareas de representación de números en la recta, describimos, analizamos e interpretamos sus respuestas (orales o escritas).

Desde el punto de vista de la temporalización, el estudio empírico consiste en un estudio transversal (Bisquerra, 1989). Se estudian las respuestas de alumnos que terminan la escolaridad secundaria o que inician una carrera universitaria (1º de Licenciatura en Matemática). La metodología utilizada en el estudio empírico es cualitativa, se persigue el objetivo de realizar una descripción profunda y no de generalizar resultados.

Los instrumentos de recogida de datos son cuestionarios y entrevistas. Los instrumentos utilizados en la interpretación de las respuestas son especialmente los criterios para el estudio de los números reales y la noción de conflicto cognitivo.

El orden en que se administran los instrumentos (entrevista exploratoria $\rightarrow$ cuestionario $\rightarrow$ entrevista confirmatoria) justifica la racionalidad del estudio empírico. En la entrevista exploratoria (capítulo 4) se detectan dos conflictos. Estos conflictos deben confirmarse, y una indagación con los mismos sujetos no permite averiguar si se dan en otros individuos.

El cuestionario permite desarrollar modos sistemáticos de atribuir conflictos a sujetos y seleccionar aquellos que, deseablemente, no cometen errores fundamentales, para que éstos no perturben la conflictividad (apartado 6.2).

La selección de sujetos se ha realizado, y la atribución de conflictos no ha sido completamente acertada, porque se han dado varios casos de no confirmación. Sin embargo, estos casos han sido explicados 'sensatamente' (apartado 6.5), utilizando el constructo teórico escogido (la noción de conflicto cognitivo).

Por otro lado, como se conoce de antemano, el cuestionario difícilmente proporcione respuestas que satisfagan las exigencias teóricas de la noción de conflicto cognitivo (apartado 3.7).

El orden en que se administran los instrumentos, por otra parte, proporciona una medida de la validez del estudio empírico. Se trata del uso de tres métodos de recogida de datos que constituye una triangulación (Cohen y Manion, 1990).

Desde un punto de vista puramente metodológico, las entrevistas en la investigación constituyen un instrumento en los que la validez está amenazada por diversos factores: actitudes y opiniones del entrevistador, tendencia a buscar contestaciones que apoyen sus nociones preconcebidas, percepciones erróneas por parte del entrevistador de lo que dice el entrevistado y malentendidos por parte del entrevistado de lo que se le está preguntando (Cohen y Manion, 1990; p. 390). El cuestionario posterior a las entrevistas exploratorias proporciona un medio para evaluar si las ideas que los alumnos han manifestado en las entrevistas se manifiestan en respuestas escritas (correspondientes a alumnos diferentes), en las que el investigador no puede ejercer influencia más allá de las cuestiones propuestas.

Respecto de la validez de los resultados del cuestionario, León y Montero (1999, p. 91) indican la dificultad de “realizar estudios de validación en cada encuesta, razón por la que los investigadores que utilizan estos procedimientos optan, conscientes de la amenaza inherente a la validez, por aceptar que los resultados son válidos mientras no se tengan datos adicionales que permitan ponerlos en duda”. En este trabajo las entrevistas confirmatorias brindan la oportunidad de corroborar o descartar las respuestas de los alumnos en el cuestionario.

Los estudios teóricos incluyen la búsqueda y el análisis de bibliografía, el estudio de contenidos matemáticos específicos y la interpretación de los resultados del estudio empírico a la luz de enfoques epistemológicos determinados.

El estudio teórico sobre el sistema de números reales tiene un origen inductivo. A partir de los resultados obtenidos en un cuestionario piloto, se elabora un marco constituido por cinco ámbitos denominados *criterios* que, durante el estudio teórico, se utilizan para describir desde un punto de vista matemático y escolar el sistema de números reales.

El estudio de la representación en la recta se realiza mediante el análisis conceptual (Scriven, 1988). Se aborda esta representación desde diversos puntos de vista: epistemológico, fenomenológico y cognitivo.

En el último estudio teórico se describen las situaciones en que se ponen de manifiesto los conflictos. La descripción de los elementos que intervienen en las tareas permite ‘situar’ los conflictos, buscar posibles raíces filosóficas y estudiarlos desde diferentes enfoques. Finalmente, los conflictos se interpretan mediante el enfoque de Bachelard (1987).

La validez del análisis teórico está basada principalmente en la triangulación de investigadores (Cohen y Manion, 1990). Durante el desarrollo de los diversos estudios teóricos, la investigadora y el director intercambian sus puntos de vista, y posteriormente los resultados de estos intercambios se someten a discusión en diferentes seminarios de investigación o con otros investigadores, como se pone de manifiesto en 1.4.

A continuación describimos en mayor detalle los dos estudios teóricos y el estudio empírico.

2.5.1. Primer estudio teórico

El primer estudio teórico, descrito en el capítulo 3 de la presente memoria, está constituido por:

- *Fichas de lectura*

Las fichas de lectura se han realizado con la intención de clarificar los diferentes constructos teóricos utilizados en la investigación:

- La noción de obstáculo epistemológico de Bachelard y la concepción de este autor respecto del desarrollo del conocimiento matemático (apartado 3.2).
- La fenomenología didáctica de Freudenthal (apartado 3.3).
- La descripción de la medida de magnitudes según Carnap (apartado 3.4).
- La noción de conflicto cognitivo (apartado 3.7).

- *Un breve análisis en cada caso destinado a destacar la conexión con esta investigación de los constructos descritos.*

A continuación de cada ficha de lectura se explica la conexión entre la teoría y su implementación en la investigación. La única conexión que no se aborda (se remite al capítulo 7) es la del enfoque de Bachelard.

La noción de conflicto cognitivo se describe en 3.7, donde se adelantan algunas ideas respecto de su uso en el estudio de respuestas. Posteriormente en el estudio empírico (capítulos 4 y 6) se realiza una explicación de la utilización en cada caso de la noción. De modo resumido, señalamos dos usos diferentes para la noción de conflicto:

1- Entrevista: Hasta cierto punto se puede ajustar lo que dice el sujeto con la noción teórica.
2- Cuestionario: Se supone por interpretación que el individuo manifiesta un conflicto. Se 'apuesta' a que lo que dice el sujeto se parece a la noción teórica.

El paso entre ajustar y 'apostar' está justificado por el soporte en que viene la información. A la vista del cuestionario, no nos atrevemos a afirmar que el sujeto 'tiene conflicto'. Por ello, realizamos un estudio sistemático exhaustivo (capítulo 5) en el que interpretamos las respuestas de los alumnos como 'aparentemente conflictivas' o 'no conflictivas'. El hecho de manejar la información de muchos sujetos exige que cambiemos el soporte teórico, y en consecuencia debemos cambiar la noción de conflicto por la apariencia de conflicto. Las entrevistas confirmatorias dan la oportunidad de contrastar nuestras interpretaciones y ajustarlas (o no) a la noción teórica de conflicto cognitivo.

- *El desarrollo del estudio del sistema de números reales mediante cinco criterios.*

En el apartado 3.5 incluimos un estudio detallado del sistema **R**, organizado según cinco ámbitos de estudio o criterios. En cada criterio se espera desarrollar un estudio matemático de las nociones implicadas y un estudio del tratamiento escolar de dichas nociones.

- *Estudio de la representación de números reales en la recta*

En este estudio (apartado 3.6) se pondrán de manifiesto cuestiones epistemológicas, cognitivas y procedimentales de la representación de números reales en la recta.

2.5.2. Estudio empírico

El estudio empírico consiste en la elaboración y administración de diferentes instrumentos a alumnos de Bachillerato y primer curso universitario con la finalidad de estudiar la posible manifestación de conflictos durante el desarrollo de tareas de representación de números en la recta.

Los instrumentos utilizados han sido entrevistas (exploratorias y confirmatorias) y un cuestionario, que pasamos a describir.

- *Entrevistas exploratorias*

La finalidad de dichas entrevistas es la detección de conflictos y dificultades en la representación de números en la recta. Los guiones utilizados, la organización de la información y el estudio de los resultados se describen en el capítulo 4.

- *Cuestionario*

El cuestionario tiene la finalidad de proponer situaciones que permitan detectar la presencia de dos conflictos observados durante las entrevistas exploratorias.

El capítulo 5 está dedicado a la elaboración del cuestionario. En primer lugar (apartado 5.1) se incluye un estudio realizado con el objeto de recoger toda la información hasta ese momento obtenida, tanto la proveniente de las entrevistas exploratorias como la contenida en el proyecto de tesis. Se elabora un banco de ítems que resulta muy extenso para incluir en un único cuestionario. Se adopta el criterio de escoger sólo aquellos ítems que presumiblemente proporcionarán información respecto de los conflictos detectados en las entrevistas exploratorias. A partir de esta selección se diseña el cuestionario (apartado 5.2).

El estudio de las respuestas del cuestionario (apartado 6.2) incluye:

- Organización de la información.

- Interpretación en términos de conflicto.

- Selección de sujetos cuyas respuestas se consideran aparentemente conflictivas y estudio de estas respuestas en comparación con respuestas consideradas no conflictivas.

- *Entrevistas confirmatorias*

La finalidad de las entrevistas confirmatorias es constatar las interpretaciones de las respuestas del cuestionario.

Los resultados se incluyen en el apartado 6.5.

2.5.3. Segundo estudio teórico

Este estudio se realiza (capítulo 7) con la finalidad de proponer una explicación de los conflictos observados en el estudio empírico en términos de obstáculos epistemológicos.

Incluye un análisis de los aspectos implicados en las tareas en las que surgen los conflictos y un estudio de los conflictos que los 'sitúa' en el análisis realizado.

Se realiza además, la comparación de los resultados con los resultados de otras investigaciones relacionadas con los conflictos que surgen en la investigación.

Finalmente se presenta una explicación de los conflictos basada en el enfoque de Bachelard.

En la figura 2.2 se incluye el diseño general de la investigación.

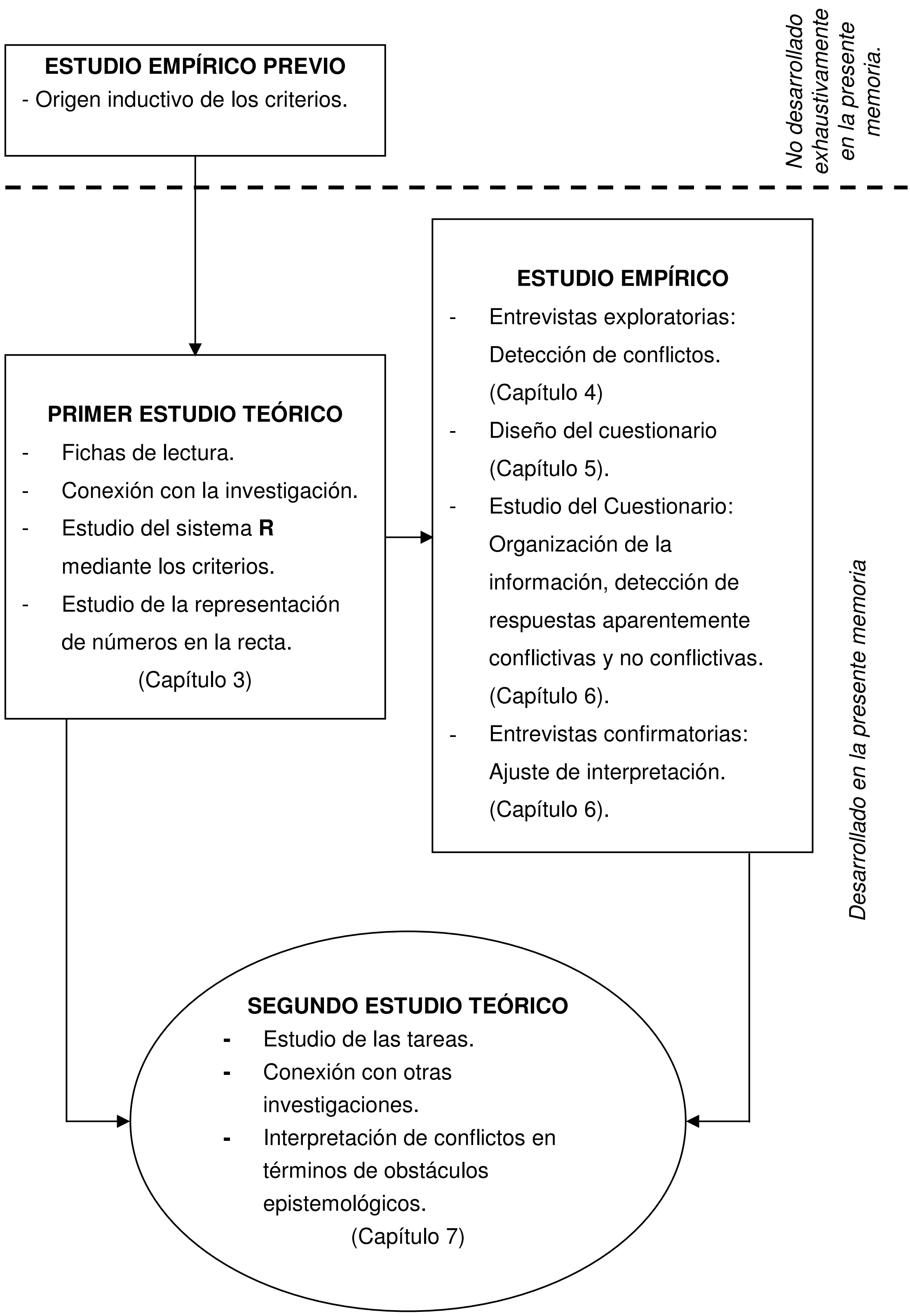


Figura 2.2: Diseño general de la investigación

2.6. Información sobre el estudio empírico

En esta sección describimos la información relacionada con los sujetos, así como el calendario de realización y otras características del estudio empírico

2.6.1. Entrevistas exploratorias

2.6.1.1. Sujetos de estudio y centros

Los sujetos de estudio son alumnos de 1º y 2º de Bachillerato y 1º de Licenciatura en Matemáticas. El muestreo ha sido accidental (León y Montero, 1999), se ha hecho en función de las posibilidades de acceso de la investigadora a los distintos centros.

Fueron entrevistados en total veinte sujetos. En la tabla 2.2 se indica el nivel, código del centro y número de sujetos entrevistados en cada centro.

Todas las entrevistas se realizaron durante tres semanas de Mayo de 1999. La distribución se realizó según la disponibilidad de los sujetos implicados (que en la práctica estuvo determinada por los profesores a los que acudimos).

Previamente (durante el mes de Abril) se realizaron dos entrevistas de entrenamiento (no han sido procesadas).

Nivel	Centro	Nº de Alumnos
1º Bachillerato	C1	10
C.O.U.	C2	5
1º Licenciatura en Matemáticas	C4	5

Tabla 2.2. Alumnos entrevistados de cada nivel

Todos los sujetos entrevistados se mostraron interesados y atentos durante las entrevistas.

Antes de comenzar con las tareas contenidas en los guiones, se solicita a los entrevistados información personal, aclarando que sus nombres permanecerían en el anonimato. A continuación, la entrevistadora explica el motivo de la entrevista, reseñando brevemente los objetivos y resalta el hecho de que el alumno no será evaluado y que sus respuestas son independientes de las asignaturas Matemática o Análisis Matemático que cursan en sus respectivos centros.

2.6.1.2. Calendario de entrevistas

En la tabla 2.3 se resume la distribución de las entrevistas, indicándose el centro, fecha, número de sujeto, número de entrevista y hora de inicio y finalización.

Se han elaborado tres guiones diferentes de entrevista (descritos en el anexo 4).

Centro	Fecha	Sujeto Nº	Guión Entrevista Nº	Hora inicio/Hora fin	Duración aproximada (en minutos)
C1	10/05/99	1	1	10:34-10:57	23
		2	2	(10/05)11:02-11:16 (12/05) 8:47-8:58	25
		3	3	11:58-12:12	14
		4	2	12:17-12:45	28
	11/05/99	5	1	10:37:-11:00	23
		6	2	11:07-11:23	16
	12/05/99	7	3	09:02-09:18	16
		8	2	10:30-10:50	20
		9	1	10:55-11:17	22
		10	3	12:05-12:18	13
C2	27/05/99	11	3	10:22-10:44	22
		12	2	10: 50-11:19	29
		13	1	11:26-11:56	30
		14	3	12:01-12:22	21
		15	2	12:29-12:51	22
C4	18/05/99	16	1	12:06-12:41	35
		17	2	12:46-13:10	24
	19/05/99	18	3	09:05-09:58	53
		19	1	18:18-19:10	52
		20	2	19:16-19:36	20

Tabla 2.3: Calendario de entrevistas exploratorias

En el anexo 3 se resume la información personal solicitada a los sujetos.

Los guiones de las entrevistas se describen en el capítulo 4 y en el anexo 4. La distribución de los tres guiones de entrevista (columna 4 de la tabla 2.3) se realizó según dos criterios: 1) no repetir en un mismo centro un guión con dos sujetos consecutivos, y 2) distribuir los guiones según el género de los sujetos, para tener, en lo posible, cada guión resuelto por personas de los dos géneros.

2.6.1.3. Equipos e instrumentos

Equipo de grabación

Se grabó en audio y vídeo mediante una cámara de vídeo V8, fijada sobre un trípode, y en audio mediante una grabadora de micro casete, ambos manejados por la entrevistadora.

Instrumentos de uso específico durante las entrevistas:

Los sujetos entrevistados tenían a su disposición los siguientes instrumentos: bolígrafo, compás, regla graduada (de 30 cm), escuadra graduada (de 17 cm), calculadora científica y tijeras.

Las cuerdas necesarias para el guión Nº 1, así como los folios con gráficos correspondientes a las distintas tareas, los suministraba la entrevistadora a medida que se presentaban las tareas.

Durante las entrevistas realizadas en el centro C1 (sujetos Nº 1 a Nº 10) los sujetos disponían de lápiz y goma, además de los instrumentos anteriores. Al observar que algunos sujetos borraban los cálculos o anotaciones realizados, se suprimieron estos dos elementos.

2.6.1.4. Espacio físico

Los recintos donde se realizaron las entrevistas están ubicados en cada caso en el centro correspondiente. A continuación se describen las características esenciales de cada recinto.

Centro C1

La primera entrevista y la mitad de la segunda se realizaron en un pequeño salón que se destina a reuniones entre profesores y padres. Ubicado en una zona aledaña al pasillo de entrada principal del Instituto, durante los momentos de cambio y/o finalización de hora de clase, el ruido exterior impedía una correcta audición. La segunda entrevista fue interrumpida por razones ajenas a las personas implicadas (alumno y entrevistadora) y se continuó dos días después en otro salón.

Las entrevistas restantes (incluida la mitad de la segunda) se realizaron en el Laboratorio de Ciencias, un pequeño salón muy bien iluminado y apartado de ruidos exteriores. Dadas estas condiciones, las entrevistas se desarrollaron en óptimas circunstancias y no se sufrió ninguna interrupción.

Centro C2

Las cinco entrevistas se realizaron en un aula. Dado su emplazamiento cercano a la calle y probablemente a la ubicación de la cámara de vídeo (junto a una ventana), la grabación en vídeo es apenas audible. No obstante, la grabación en audio es audible porque el aparato se situó en el mismo pupitre que ocupaba la persona entrevistada. No se sufrió ninguna interrupción durante las entrevistas.

Centro C4

Las entrevistas se realizaron en el despacho del Departamento de Didáctica de la Matemática del centro. Consiste en un salón pequeño, bien iluminado y aislado del ruido exterior. Durante una entrevista se sufrió una interrupción.

2.6.2. Cuestionario

2.6.2.1. Sujetos de estudio

La población hacia la que está dirigida la investigación la constituyen alumnos españoles que cursan 1º y 2º de Bachillerato y 1º de Licenciatura en Matemáticas y alumnos argentinos que cursan 4º y 5º año del nivel de Enseñanza Secundaria y 1º de Profesorado y Licenciatura en Matemáticas. Se trata, por lo tanto, de un diseño transversal, puesto que el cuestionario se aplicará una única vez a grupos de sujetos correspondientes a tres niveles de enseñanza diferentes.

Se han definido 30 cuestionarios posibles, que difieren entre sí en los valores de los datos contenidos en los enunciados. La idea original ha sido administrar el cuestionario a 30 alumnos de cada uno de los niveles descritos en el párrafo anterior.

Debido a la recepción tardía de los cuestionarios resueltos por alumnos argentinos (por causas ajenas a la investigación) no se incluye su estudio en la presente memoria.

Los alumnos españoles encuestados pertenecen a dos institutos de nivel secundario (Centros C1 y C3) y a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada (Centro C4).

El total de alumnos españoles a los que se administró el cuestionario figura en la tabla 2.4.

Nivel	Centro	Modelo de ítem 3	Fecha de administración	Nº de Sujetos
1º Bachillerato	C1	1	28/10/99	26
2º de Bachillerato	C1	1 y 2	29/10/99	30
1º de Licenciatura en Matemáticas	C4	1	26/10/99	25
1º de Bachillerato	C3	2	21/10/99	43
2º de Bachillerato	C3	2	21/10/99	24
	C1	2	28/10/99	11
Total alumnos españoles				159

Tabla 2.4: Número de sujetos españoles a los que se administró el cuestionario

El muestreo utilizado es accidental (León y Montero, 1999), debido a que se ha administrado el cuestionario en cursos a los que la investigadora tenía acceso.

Observamos en la tabla 2.4 que mientras que en algunos niveles se ha superado el número de 30 alumnos (por ejemplo, en 1º de Bachillerato correspondiente al modelo 1 para el ítem 3 del centro C3 el cuestionario fue administrado a 43 alumnos), en otros niveles no se alcanzó a cubrir el total de 30 alumnos (los alumnos de 1º de Licenciatura en Matemáticas fueron 24, así como los correspondientes a 2º de Bachillerato de centro C3).

Se ha decidido por esta razón seleccionar para nuestro estudio de cada curso los 25 primeros cuestionarios (es decir, los 25 primeros cuya última cifra del código es ‘1’), de manera que se han eliminado los 5 casos que corresponden a los números 0’24 y 1’4142136... para los ítems 1 y 2 respectivamente (es decir, se han eliminado los cuestionarios cuya tercera cifra del código correspondiente es un ‘6’). En la tabla 2.5 indicamos el número de alumnos seleccionados de cada curso.

Nivel	Centro	Modelo de ítem 3	Código de identificación del alumno (*)	Nº de Sujetos
1º Bachillerato	C1	1	7111 a 7551	25
2º de Bachillerato	C2	1	8111 a 8551	25
1º de Licenciatura en Matemáticas	C4	1	3111 a 3551	25
1º de Bachillerato	C3	2	1111 a 1551	25
2º de Bachillerato	C3	2	2111 a 2541	24
	C1	2	2551	1
Total de sujetos a estudiar				125

Tabla 2.5: Número de sujetos a estudiar

(*) La atribución de códigos a los sujetos se describe en el apartado 5.2. En cada casilla de esta columna, la segunda y tercera cifra del código varía entre 1 y 5.

Debido a que un sujeto de Licenciatura en Matemáticas no ha resuelto ninguna de las tareas planteadas, el número definitivo de cuestionarios estudiados correspondientes a alumnos españoles es de 124. El 32’3% de estos alumnos es de sexo femenino, frente al 67’7% de sexo masculino. Las edades oscilan entre 15 y 22 años, predominando los sujetos de 16 años (32’8%), 17 años (40’2%) y 18 años (19’7%).

2.6.2.2. Condiciones de la administración del cuestionario

Los cuestionarios fueron administrados por la investigadora en los cursos cedidos en cada centro. En Bachillerato se utilizó en cada curso una hora de clase (es decir, 55 minutos) y además de la investigadora se encontraba presente el profesor que cedió la clase. En 1º de Licenciatura en Matemáticas se destinaron 60 minutos para que los alumnos completasen el cuestionario.

En todos los cursos el profesor que cedió la clase había solicitado con anterioridad a los alumnos que llevasen instrumentos de dibujo (regla y compás). Además la investigadora llevó estos instrumentos para que los alumnos que no los tuviesen pudiesen utilizarlos si lo consideraban necesario.

Antes de resolver el cuestionario la investigadora informa a los alumnos acerca de las razones por las que se presenta el cuestionario (para una investigación sobre las ideas y razonamientos que emplean los alumnos cuando representan números reales en la recta), haciendo hincapié en que sus datos permanecen anónimos y en que los resultados no influirán en la calificación de la asignatura que en ese momento están cursando.

En cuanto al contenido mismo del cuestionario, la investigadora recalca a los alumnos la importancia de que se describan con detalle todos los razonamientos e ideas empleados. Además indica que tienen total libertad para utilizar los procedimientos de representación que consideren más conveniente en cada caso.

Durante el transcurso del tiempo dedicado a la resolución del cuestionario no se han observado dificultades especiales en los alumnos respecto de su contenido.

2.6.3. Entrevistas confirmatoria

2.6.3.1. Sujetos de estudio y centros

Los sujetos entrevistados corresponden a 1º y 2º de Bachillerato y a 1º de Licenciatura en Matemáticas. El muestreo es a propósito (León y Montero, 1999), y se ha realizado según los sujetos satisfagan las condiciones planteadas en el anexo 14.

Fueron entrevistados 11 sujetos, tres sin conflictos y 8 con conflicto. Los tres sujetos sin conflicto corresponden a cada uno de los niveles considerados (1º y 2º de Bachillerato y 1º de Licenciatura en Matemáticas). Entre los sujetos con conflicto, en 2 de ellos se observa el conflicto 2 y en los 6 restantes el conflicto 1. Entre estos 6 últimos, encontramos dos sujetos de cada nivel considerado.

Todos los sujetos entrevistados se mostraron interesados y atentos durante las entrevistas.

Al comenzar cada entrevista, la entrevistadora explica el objetivo perseguido (confirmar la interpretación de las respuestas del cuestionario, sin mencionar la palabra conflicto) e indica al sujeto que su identidad permanecerá anónima. Asimismo explica que sus respuestas son independientes de las asignaturas que en ese momento el sujeto está cursando. Posteriormente la entrevistadora solicita al sujeto que revise el cuestionario que ha respondido. Cuando el sujeto acaba de revisarlo la entrevistadora inicia sus preguntas.

2.6.3.2. Calendario de entrevistas

En la tabla 2.6 incluimos la distribución de entrevistas, indicando el código de centro, fecha de realización, número de sujeto, conflicto observado, número de entrevista , horario de inicio y finalización y duración de la entrevista.

Cen-tro	Fecha	Sujeto Nº	Conflicto	Hora incio – Hora finalización	Duración aproximada (en minutos)
C1	20/01/00	821	Sin conflicto	13:55 – 14:07	12
	21/01/00	744	Conflicto 1	14:46 – 15:01	15
	21/01/00	732	Conflicto 1	15:03 – 15:18	15
C3	21/01/00	222	Conflicto 1	12:25 – 12:36	11
	21/01/00	234	Conflicto 1	12:41 – 12:50	9
	02/02/00	144	Sin conflicto	12:24 – 12:38	14
C4[4]	22/02/00	343	Sin conflicto	16:55 – 17:01	6
	22/02/00	352	Conflicto 1	17:15 – 17:36	21
	22/02/00	355	Conflicto 1	17:38 – 17:50	12
	22/02/00	322	Conflicto 2	17:52 – 18:00	8
	22/02/00	341	Conflicto 2	18:35 – 18:57	22

Tabla 2.6: Calendario de entrevistas confirmatorias

2.6.3.3. Equipos e instrumentos

Equipo de grabación

Las entrevistas fueron grabadas en audio y vídeo mediante una cámara de vídeo V8 fijada sobre un trípode, y en audio mediante una grabadora de micro casete. La entrevistadora manejó los dos equipos.

Instrumento de uso específico durante las entrevistas

Los sujetos entrevistados tenían a su disposición (encima de la mesa) los siguientes instrumentos: bolígrafo, compás, regla graduada (de 30 cm), escuadra graduada (de 17 cm), y calculadora científica.

La conversación giraba en torno al cuestionario respondido por el sujeto, manejando en cada caso el original correspondiente.

2.6.3.4. Espacio físico

Las entrevistas se realizaron en recintos situados en los centros correspondientes.

En el centro C1 se utilizó el Laboratorio de Ciencias que se había utilizado durante las entrevistas exploratorias. No se sufrieron interrupciones.

En el centro C3 se utilizó el salón correspondiente al departamento de Matemáticas del Instituto. En una sola de las entrevistas se sufrió una interrupción.

En el centro C4 las entrevistas se realizaron en el recinto en que habían transcurrido las entrevistas exploratorias. No se sufrieron interrupciones.

[4] El lapso de un mes transcurrido entre las entrevistas realizadas en C1 y C4 se ha debe a que la primera quincena de febrero ha sido un período de exámenes no lectivo en C4, y por tanto los sujetos no podían ser localizados.

CAPÍTULO 3

PRIMER ESTUDIO TEÓRICO

3.1. Introducción

Este capítulo presenta las diferentes piezas teóricas en las que se basa nuestra investigación y que han guiado su desarrollo.

En el problema de investigación nos proponemos caracterizar obstáculos epistemológicos relacionados con la representación de números reales en la recta. Un obstáculo epistemólogico se erige como barrera a superar en el progreso de un determinado conocimiento.

En la caracterización de obstáculos epistemológicos relacionados con la representación en la recta seguiremos la posición que mantiene Bachelard (1987) ante al conocimiento matemático. Este autor considera, en términos generales, que las nociones matemáticas, que surgen de intuiciones iniciales, son tratadas de modo riguroso en la medida en que se separan del primer dominio intuitivo en el que se presentan y se estudian desde dominios heterogéneos. Además, es muy común adjudicarles un realismo ilusorio, que es consecuencia de las condiciones en que estas nociones evolucionan en el conocimiento matemático. Estas cuestiones serán desarrolladas en detalle en el apartado 3.2.

La identificación de posibles obstáculos epistemológicos relacionados con la representación en la recta resultará de la confluencia de dos estudios, uno de índole teórica y otro de índole empírica. El diseño y el análisis del segundo estarán condicionados por el primero.

El estudio de índole teórica se inicia en la fenomenología de Freudenthal y en el apartado 3.3 describimos los argumentos principales de esta teoría. Seguimos a este autor en la consideración de los conceptos, estructuras e ideas matemáticas como medios de organización de distintos tipos de fenómenos, del mundo físico o matemático, y en la necesidad de presentar a los alumnos el mayor número de fenómenos posibles organizados por un concepto, para favorecer la constitución de objetos mentales que abarquen ampliamente las propiedades de este concepto. El concepto de número real permite organizar fenómenos continuos, y en nuestra investigación juega un papel primordial la interpretación de la recta geométrica como fenómeno matemático explicado por el conjunto de números reales.

Este conjunto es también un medio de organización de las magnitudes físicas. Se trata de otro pilar de nuestra investigación, puesto que la conexión de números reales con puntos de la recta se apoya en la medida de longitudes. En el apartado 3.4 desarrollamos algunas cuestiones planteadas por Carnap referidas a la medida de longitudes.

En nuestra investigación comenzaremos a dilucidar en qué medida la identificación de números reales con puntos de la recta apoyada en la medida de longitudes podría favorecer la constitución del concepto número real en el alumno. Para ello desarrollamos en 3.5 un estudio de los números reales con ayuda de cinco criterios que permiten abordar diversas cuestiones relacionadas con este concepto, y en 3.6 incluimos un estudio en mayor profundidad de algunas cuestiones epistemológicas, fenomenológicas y cognitivas de la representación en la recta.

La interpretación de la recta y de la longitud como fenómenos relacionados entre sí y organizados por el concepto de número real constituye el nudo de los elementos conceptuales (desde el punto de vista del conocimiento matemático) de nuestra investigación. En el estudio del número real realizado en 3.5 realizamos una primera aproximación al análisis de la magnitud (y de la longitud como caso especial) desde el punto de vista de fenómeno organizado por el sistema de números reales. En el estudio de la biyección números reales / puntos de la recta realizado en 3.6 describimos cómo el objeto matemático 'recta geométrica' adquiere, gracias a un axioma adecuado, la estructura del sistema **R**.

Reconocemos que los obstáculos epistemológicos se manifiestan en el progreso del conocimiento científico. No obstante, es posible observar que determinadas actitudes o interpretaciones de los sujetos actúan como barreras que impiden manejar satisfactoriamente los conceptos matemáticos. Pensamos que estas actitudes o interpretaciones constituyen indicadores de la presencia de obstáculos epistemológicos.

Desde el punto de vista del aprendizaje de los números reales, conviene observar en qué medida los sujetos tropiezan con dificultades durante la representación de números en la recta, con el objeto de detectar posibles indicadores de obstáculos. Para ello indagaremos sobre posibles situaciones de conflicto en los sujetos durante el desarrollo de tareas relacionadas con la representación de números en la recta. En la sección 3.7 describimos la noción de conflicto cognitivo utilizada en nuestra indagación.

Los elementos considerados en el estudio teórico guiarán el desarrollo del estudio empírico en dos sentidos. Por un lado, proporcionarán ideas para elaborar situaciones que propondremos a los sujetos. Por otro lado, los criterios para el estudio de los números reales desarrollados en el apartado 3.5 jugarán un papel preponderante en la interpretación de las respuestas de los sujetos.

En la figura 3.1 resumimos las diferentes piezas del estudio teórico, indicando en cada caso el apartado en que se desarrollan las ideas correspondientes.

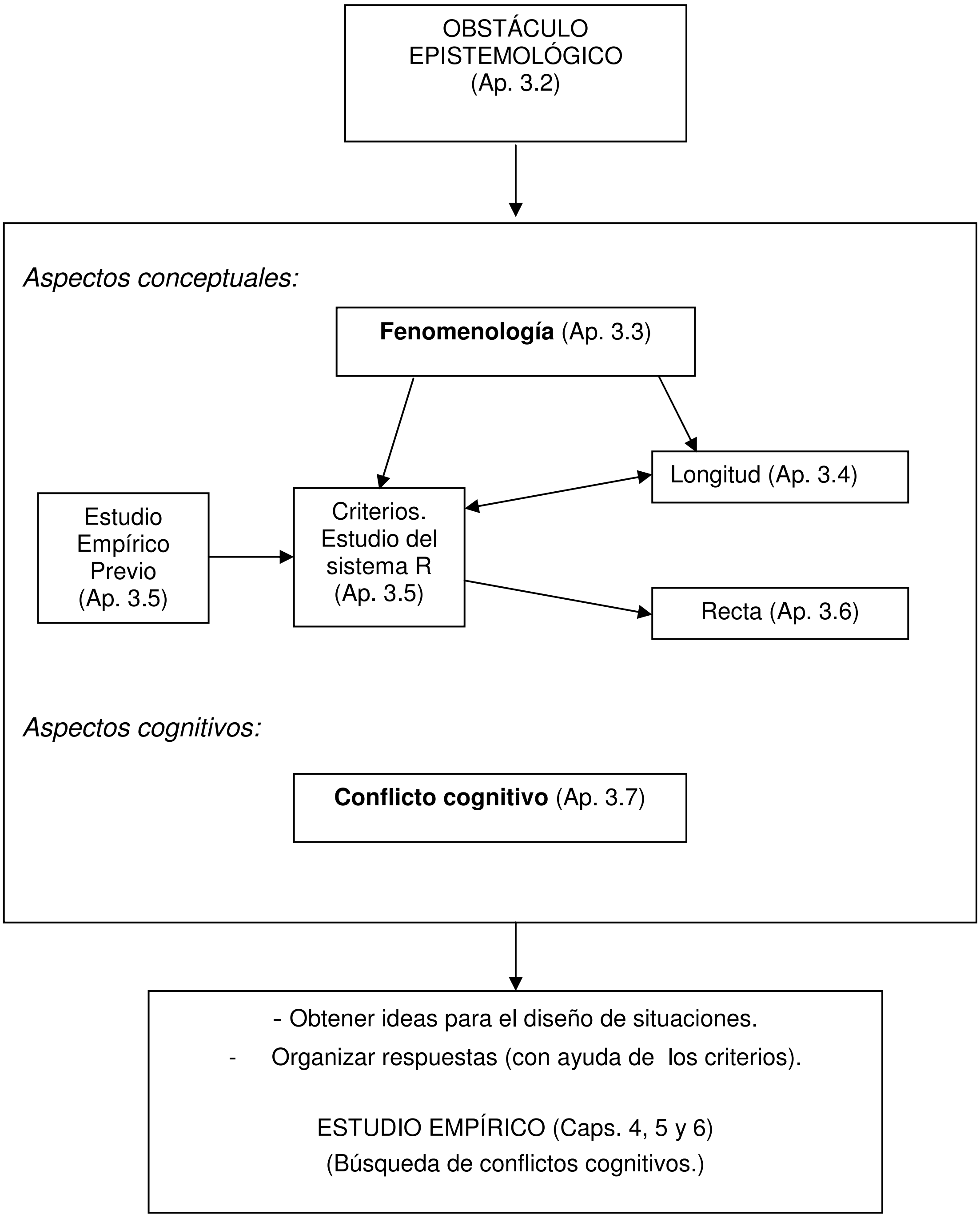


Figura 3.1: Diseño del estudio teórico

En la figura 3.2 situamos el estudio teórico desarrollado en el presente capítulo en el diseño general de la tesis esquematizado en la figura 2.2.

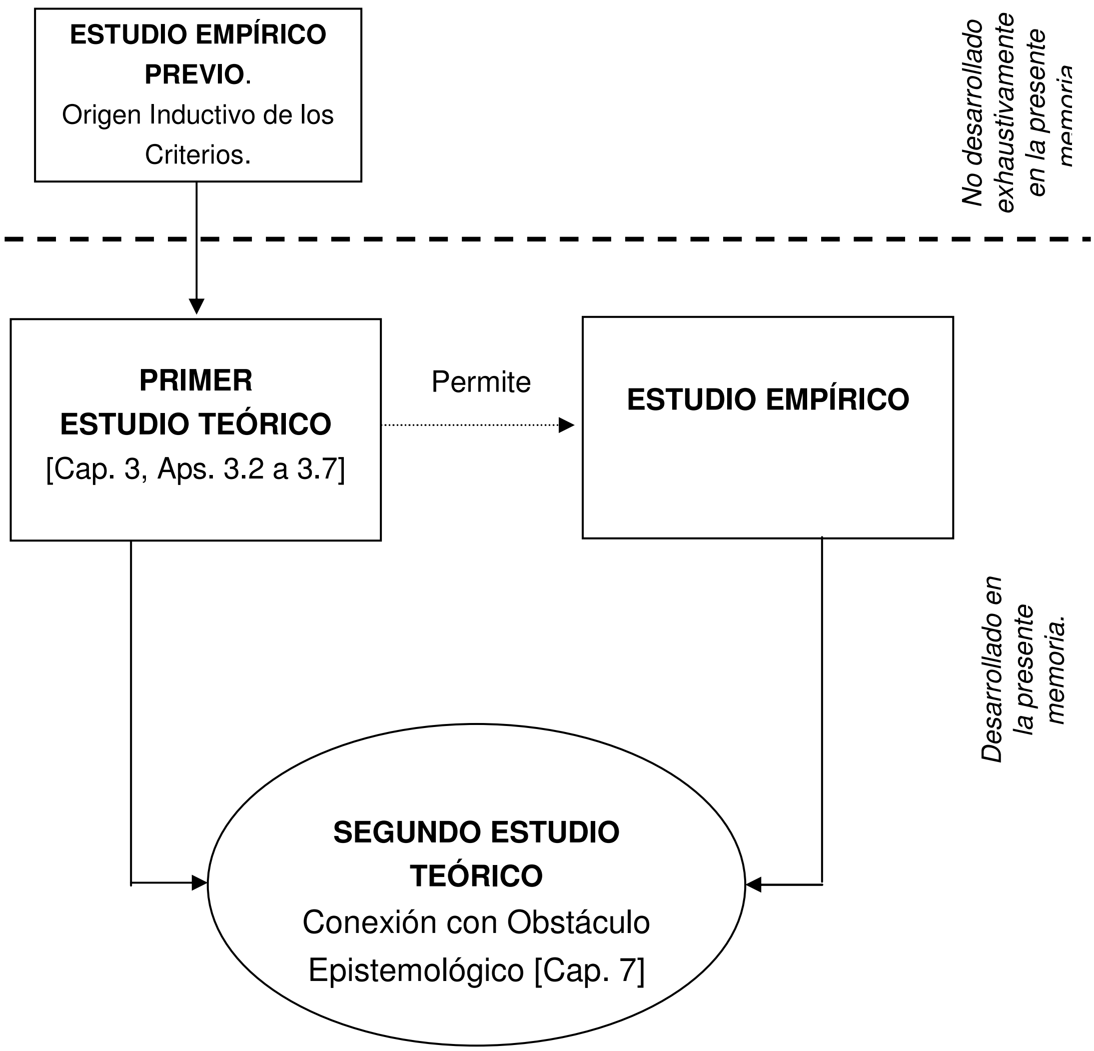


Figura 3.2: Inserción del capítulo 3 en el diseño general de la tesis.

Las flechas que parten desde los estudios teórico y empírico hasta llegar a la caracterización de obstáculos epistemológicos expresan una explicación que se realiza en el capítulo 7.

3.2. La noción de obstáculo epistemológico

G. Bachelard (1988) ha acuñado la expresión *obstáculo epistemológico* para describir ciertas barreras o dificultades que traban el desarrollo del conocimiento científico.

El conocimiento científico es diferente del conocimiento sensible. El conocimiento sensible está sujeto a la percepción, que nunca es exacta. El espíritu científico debe formarse, y en su formación pasa por tres estados. Desde el estado concreto, en el que se recrea con las primeras imágenes, pasando por el estado concreto – abstracto, en el que se introducen los esquemas geométricos, hasta llegar a un estado abstracto. Este estado abstracto es el que corresponde a un espíritu científico. Se caracteriza porque el espíritu se desliga de la experiencia inmediata, incluso hasta llegar a polemizar con la realidad básica.

Para llegar a ese estado abstracto, el espíritu suele tropezar con obstáculos. Entre estos obstáculos, el autor cita los siguientes:

- La experiencia básica: la observación básica se presenta con muchas imágenes, es pintoresca y fácil, y por ello colma la inquietud inicial del espíritu dispuesto a conocer. Sin embargo, no constituye una base segura.
- El conocimiento general: la búsqueda prematura de lo general conduce casi siempre a generalidades inadecuadas. Estas generalidades se establecen a partir de un registro de los datos sensibles que está lejos de la abstracción requerida para un espíritu científico.
- Obstáculo verbal: a veces una sola imagen o palabra familiar parecen explicar fenómenos complejos. Bachelard cita ejemplos en los que se utiliza la pólvora para explicar el fenómeno del trueno.

Estos obstáculos entorpecen el acto de conocer, traban el progreso del conocimiento, y por ello constituyen obstáculos epistemológicos.

"Se conoce *en contra* de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza la espiritualización" (Bachelard, 1988; p.13).

Considera que los obstáculos siempre surgen por pares, y que al intentar eludir uno se tropieza con otro. En el conocimiento cuantitativo describe dos obstáculos: *la atracción de un matematismo demasiado preciso* y *la atracción de un matematismo demasiado vago*.

El primero se caracteriza por el exceso de precisión en las determinaciones cuantitativas. Se observa cuando el resultado de una medición contiene más decimales que los que el instrumento de medición permite precisar. Señala que un científico "más que el *objeto de su medida*, [...] describe el *método de medida*" (Bachelard, 1988; p. 250).

El segundo obstáculo del conocimiento cuantitativo se refiere a las imágenes familiares que traban la matematización de la experiencia. Cuando es posible explicar un fenómeno mediante su comparación con imágenes materiales vagas y groseras, es posible que se abandone la búsqueda de una explicación matemática.

3.2.1. Posición de Bachelard respecto del conocimiento matemático

Los obstáculos que Bachelard describe en *La formación del Espíritu Científico* se refieren al conocimiento experimental. La medida de longitudes está sujeta a los obstáculos del conocimiento cuantitativo. Con respecto al matematismo demasiado preciso, Bachelard considera que una exigencia del espíritu científico es que "la precisión de una medida debe referirse constantemente a la sensibilidad del método de medida y [...] ha de tener en cuenta naturalmente las condiciones de permanencia del objeto medido" (Bachelard, 1988; p. 250). En la experiencia pedagógica cotidiana es posible observar un descuido absoluto del problema de los errores. El estudiante "no reflexiona que si una precisión en un *resultado* va más allá de los *datos experimentales*, es exactamente la determinación de la nada. Los decimales del cálculo no pertenecen al objeto" (p. 251).

Bachelard expresa claramente que los obstáculos referidos al conocimiento del mundo objetivo no deben trasladarse al conocimiento matemático. El estudio de posibles obstáculos epistemológicos en el conocimiento matemático exige que consideremos el desarrollo de las nociones matemáticas según el punto de vista del autor. A continuación exponemos las tesis principales de su argumentación.

- Origen intuitivo de las nociones matemáticas.

Las nociones matemáticas se presentan en su origen en un dominio determinado, y son propuestas por la intuición. En ese dominio, las nociones tienen ciertas particularidades que las limitan. Mediante la interferencia de distintos dominios, es posible abstraerlas de la intuición que las ha propuesto.

- El rigor proviene de la actividad del espíritu, que corrige las primeras intuiciones.

Las intuiciones primeras no conducen al conocimiento riguroso. Son difíciles de superar y se ven reforzadas por la acción. Constituyen un obstáculo del conocimiento preciso. "Por tanto, el rigor no puede provenir más que de una corrección radical de la intuición" (Bachelard, 1987; p.172).

- La aritmética constituye el dominio del conocimiento riguroso[5]*.*

Para conocer con un máximo de rigor, las nociones primeras, intuitivas, deben ser reconstruidas, pero esta vez a partir de un ejercicio del espíritu. La noción de número tiene su origen en una experiencia interna, en un ejercicio del espíritu (Bachelard, 1987; pp.174-175). Cualquier noción primera que provenga de la geometría, del álgebra o del análisis debe ponerse delante del conocimiento aritmético, y se dan entonces dos posibilidades: "un número puede recubrir

[5] Esta afirmación tomada fuera de contexto colisiona con los resultados referidos a la incompletitud de la aritmética. Bachelard parece referirse al modo de hacer en matemáticas, afirmando que siempre se intenta estudiar una noción desde el dominio aritmético.

exactamente [...] [esa] intuición geométrica, fijar [...] [ese] valor algebraico – alcanzando un conocimiento riguroso – o bien el número puro se revela incapaz de ello– y el ensayo aritmético, necesariamente mutilado, no podría recibir más que un valor pragmático" (p. 176).

- El realismo atribuido a las nociones que no pueden ser explicadas por la aritmética.

La aritmética no ha permitido analizar todas las intuiciones, ha fracasado frente a lo irracional. Según Bachelard, esto ha favorecido el realismo matemático: "en matemática [...] se está inducido a otorgar la realidad a lo irracional" (p. 177). Si una noción intuitiva se resiste a ser captada por el ejercicio del espíritu, es decir, a ser explicada por la aritmética, se tiende a considerar que tiene una existencia separada, que posee la irracionalidad innata de lo dado. Esto conduce a creer que en el desarrollo y conexión entre las nociones no hay lugar para lo arbitrario. Existiría un camino fijado de antemano, y el matemático sólo se limita a descubrirlo. Sin embargo, la explicación realista no da cuenta de la riqueza y diversidad que subsiste en una doctrina matemática. Esta diversidad se origina en la libertad que caracteriza a la creación matemática.

- Las nociones matemáticas tampoco se originan en el conocimiento sensible.

Otra explicación que intenta dar cuenta del origen de las nociones está fundada en la experiencia. Bachelard descarta también esta posibilidad, porque considera que aunque sea posible basar en la experiencia ciertas relaciones ya descubiertas entre las nociones, las relaciones implícitas que resultarán de un desarrollo científico futuro son imprevisibles.

- La geometría proviene del ejercicio del espíritu que fija las primeras definiciones y los postulados.

La libertad del desarrollo de las matemáticas puede observarse en el desarrollo del conocimiento geométrico. Aunque la geometría podría considerarse como una ciencia aplicada, por la correspondencia que parece existir entre los elementos geométricos y los objetos que resultan de la experiencia usual en el mundo físico, en su desarrollo formal es el espíritu el que fija las combinaciones. El desarrollo de las geometrías no euclídeas así lo confirma. "Si los resultados de una combinación múltiple y repetida de los postulados reúnen una experiencia usual, es sin duda porque al comienzo una primera intuición ha llenado las formas con la materia misma a la que se remite la experiencia última" (p. 183).

- El realismo atribuido a las nociones como consecuencia de una necesidad de dar existencia a los objetos estudiados.

El realismo matemático es, por lo tanto, ilusorio. Es consecuencia, según el autor, de una necesidad epistemológica del espíritu creador, que tiende a atribuir realidad a aquello que se dispone a conocer.

- La actividad del espíritu consiste en reconstruir las nociones propuestas por la intuición.

El conocimiento matemático surge de un proceso constructivo, una 'reificación progresiva'. Una noción se establece, al principio, con todo un cortejo de condiciones. Posteriormente, surge otra noción que rebasa esas condiciones. Estas nociones no tienen una naturaleza determinada. Dependen únicamente de las leyes que las gobiernan. "En el fondo, lo dado no tiene necesidad de ser dado en sus objetos, sino solamente en su ley. Esta ley supone así una verdadera reificación independiente de la realidad de los objetos que ella reúne." (p. 187) "La realidad no tiene que ser constatada; en matemáticas es impuesta y esta imposición es relativa a una ley".

- La reconstrucción comienza en el dominio de origen de la noción. Al delimitar este dominio, surgen nuevas nociones que lo rebasan. Las nociones se estudian desde diferentes dominios.

Cuando una noción se establece con un cortejo de condiciones, se origina un dominio de racionalidad, que constituye el dominio primitivo de la noción. Cuando surge otra noción que rebasa esas condiciones, esta nueva noción constituye, en el dominio primitivo, un 'irracional'. El estudio y caracterización de este irracional genera un nuevo dominio, en el que el irracional será explicado. A su vez, la noción primitiva recibe, por su parte, una nueva explicación en el nuevo dominio. Y así continúa el conocimiento desarrollándose mediante este proceso constructivo.

Una misma noción será, entonces, analizada desde dominios diferentes. Mientras que en el dominio primitivo la noción está claramente precisada, en los nuevos dominios su conocimiento se presenta rodeado de inexactitud.

- El realismo atribuido a las nociones como consecuencia de la heterogeneidad de los dominios.

Para Bachelard esta heterogeneidad de los dominios es una causa del realismo atribuido a los objetos matemáticos. "Una noción no aporta sombra a no ser que se intente analizar por procedimientos indirectos, extraños al dominio natural de la noción. Como este análisis es imperfecto, crea la apariencia objetiva." (Bachelard, 1987; pp.188-189).

Por ejemplo, los números $\sqrt{2}$ y π son perfectamente conocidos en el dominio geométrico (como la razón entre la diagonal del cuadrado unidad a su lado y como la razón entre la circunferencia y su diámetro respectivamente). Sin embargo, en el dominio aritmético estos números sólo pueden conocerse de modo inexacto, mediante procedimientos de aproximación. Al abordar estos números desde dominios diferentes se crea la apariencia objetiva, se atribuye una existencia a objetos (como estos números) que resultan de la actividad del espíritu.

- El mundo físico y el mundo matemático como dominios heterogéneos en los que se estudian las nociones.

Los dominios diferentes desde donde se aborda una noción determinada no siempre son matemáticos. Cuando los objetos pertenecientes a una teoría matemática se adaptan a una teoría física, los dominios son matemático y físico. En este caso, el realismo se torna más acusado. "¿Cómo negar la existencia a los entes de la razón, tan claramente solidarios a la realidad?" (p. 190)

"Así el realismo es de cualquier manera una función de la heterogeneidad de los dominios. Es tanto más claro, más objetivo cuando las interferencias son más numerosas, más diversas" (p. 191).

A partir de la descripción anterior, destacamos dos aspectos del desarrollo del conocimiento matemático.

En primer lugar, las nociones matemáticas se estudian desde dominios diferentes, y mientras que en un dominio una noción resulta clara y simple, en otro dominio se manifiesta de modo impreciso.

El término 'dominio' constituye una noción vaga que admite varios niveles de análisis. Mientras que en alguna ocasión Bachelard hace referencia a 'dominios de pensamiento' (p. 169), en otra ocasión alude explícitamente al 'dominio aritmético' e implícitamente al 'dominio geométrico' (p.188). Finalmente, asume como dominios diferentes el matemático y el físico (p. 189). Más adelante (3.6.7) se definirán los dominios considerados en esta investigación.

El estudio de las nociones desde diferentes dominios conduce a su conocimiento riguroso. "Es en la interferencia de los diferentes dominios del pensamiento que encontramos el medio de corregir las nociones, es decir de abstraerlas metódicamente de la intuición que las propone" (Bachelard, 1987; p. 169).

En segundo lugar, Bachelard reconoce que cuando una noción matemática se introduce en la teoría que explica un fenómeno del mundo físico se acentúa la apariencia objetiva de esta noción. "Resulta casi lo mismo decir que las cosas son números que [decir que] las leyes de los números tienen una realidad independiente de nuestras construcciones" (Bachelard, 1987; p.189). En cuanto a los elementos geométricos, aunque se suelen reconocer en la experiencia usual, son el resultado de una abstracción que trasciende dicha experiencia. "Por tanto, la experiencia usual no puede legitimar el formalismo sino contradecirlo" (Bachelard, 1987; p.183).

La conexión de las ideas descritas en esta sección con la investigación se realizará en el capítulo 7, donde se propone una explicación de los resultados del estudio empírico con ayuda de la noción de obstáculo epistemológico y de las consideraciones de Bachelard respecto del progreso en el conocimiento matemático.

3.3. La fenomenología de Freudenthal

H. Freudenthal (1983) proporciona en su 'Didactical Phenomenolgy of Mathematical Structures' una visión de las matemáticas y de su enseñanza que pasamos a describir.

"Nuestros conceptos, estructuras e ideas matemáticas han sido inventados como herramientas para organizar fenómenos del mundo físico, social y mental. *Fenomenología* de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlo en su relación con el fenómeno para el cual fue creado, y a los que ha sido extendido en el proceso de aprendizaje de la humanidad" (Freudenthal, 1983; ix).

Por ejemplo, el concepto de número racional, fundamentalmente a través de su representación fraccionaria, es útil para explicar numerosos fenómenos. Freudenthal dedica un capítulo de su libro a la descripción de los fenómenos que organizan las fracciones. Comienza su análisis en el plano concreto, donde la fracción aparece como operador (por ejemplo, 'partir por la mitad') o como relación (como 'la mitad de grande'). En ambos casos, se actúa sobre objetos, relacionando entre sí objetos o cantidades. Dependiendo de las características de los objetos, la fracción actúa como operador fracturante (la cuarta parte del pastel) o como relación de razón (Juan gana la mitad que Pedro). Sobre las cantidades actúa como operador razón (el sueldo de Juan es la mitad que el de Pedro). El análisis se va alejando del plano concreto, considerando la fracción como medidora (2 1/2 kg), como operador inverso del multiplicativo (si $a.x = b$, x es b/a cuando $a \neq 0$), para terminar en la fracción como número racional.

Freudenthal desarrolla un enfoque para la enseñanza de las nociones matemáticas, y propone comenzar mostrando a los sujetos los fenómenos que estas nociones organizan, tan ampliamente como sea posible (dependiendo, claro está, de que estos fenómenos sean adecuados para tratarlos en una edad determinada) (Freudenthal, 1983; p. 32).

El aprendizaje de las nociones se realizará entonces, de un modo 'natural', en el sentido de que se realizará del mismo modo en que los sujetos adquieren conocimiento de las nociones de su entorno cotidiano. "[...] En los asuntos de la vida diaria, los conceptos no son considerados como un tema de enseñanza. Aunque los niños aprenden qué es silla, qué es comida, qué es salud, no se les enseñan los *conceptos* de silla, comida, salud. La matemática no es diferente. Los niños aprenden qué es número, qué son círculos, qué es sumar, qué es dibujar una gráfica. Los adquieren como *objetos mentales* y llevan a cabo con ellos *actividades mentales*" (p. x). La presentación del concepto de número o círculo debe ser posterior a la manipulación de los objetos mentales. Discrepa del enfoque que postula presentar a los sujetos los conceptos (dado que en matemática es posible caracterizarlos con bastante precisión) antes que los objetos o actividades mentales.

En su análisis distingue entre *fenomenología* (a secas), *fenomenología didáctica, fenomenología genética* y *fenomenología histórica.* El primer término lo utiliza para describir la relación entre la noción matemática y los fenómenos que organiza. Por ejemplo, la descripción realizada de los distintos contextos en los que aparece la noción de fracción es una pieza de *fenomenología*. Las expresiones restantes las aplica al estudio de esta relación desde los puntos de vista del aprendizaje, del crecimiento cognitivo e histórico respectivamente.

La fenomenología didáctica del concepto de fracción (siguiendo con nuestro ejemplo) se preocupa por estudiar el modo en que los diversos fenómenos que explican las fracciones serán trabajados en el medio escolar. La fenomenología genética se ocuparía de estudiar de qué manera es captada por los sujetos la relación entre la fracción y los fenómenos que organiza. Finalmente la fenomenología histórica se ocuparía de analizar la relación a través del desarrollo histórico de la noción.

Freudenthal indica que la secuencia apropiada para abordar estas aproximaciones diferentes es: fenomenología, fenomenología didáctica y fenomenología genética. "Para escribir una fenomenología de las estructuras matemáticas, un conocimiento de las matemáticas y sus aplicaciones es suficiente; una fenomenología *didáctica* exige además un conocimiento de la instrucción; una fenomenología *genética* es una pieza de psicología" (Freudenthal, 1983; p.11)

L. Puig (1994 y 1997) señala dos ideas esenciales que resultan del análisis de Freudenthal. La primera, de índole filosófica, es la idea de que "los objetos matemáticos se construyen en la práctica matemática como *medios de organización* de objetos del mundo, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de estas acciones" (Puig, 1994; p. ii). La segunda idea "es una toma de partido didáctica: lo que él llama la constitución de objetos mentales frente a la adquisición de conceptos" (Puig, 1994; p. iv).

La primera idea supone admitir que Freudenthal mantiene una postura filosófica en las matemáticas enfrentada al denominado 'platonismo'. Los objetos matemáticos no se encuentran en un mundo ideal, esperando a que los humanos los descubramos, sino que son el resultado de la actividad del hombre. La segunda idea plantea una elección en educación matemática que hemos descrito en párrafos anteriores. En lugar de concebir la adquisición de conceptos como un objetivo básico de la enseñanza, postula en cambio que en la enseñanza es importante la constitución de objetos mentales.

La constitución de objetos mentales es una actividad individual, subjetiva. Debe ser lo suficientemente amplia como para que la noción matemática sea adecuadamente empleada en el campo de fenómenos que esta noción organiza. "Constituir un objeto mental conlleva poder dar cuenta con él de todos los usos en todos los contextos o poder organizar todos los fenómenos correspondientes, entonces el objeto mental está bien constituido" (Puig, 1997; p. 78).

Las implicaciones didácticas de este enfoque son diversas. En la enseñanza de una noción matemática es necesario, en primer lugar, describir el campo de fenómenos (del mundo físico, social o matemático) que la noción permite organizar. Esta descripción incluirá fenómenos diversos, adecuados o no para su tratamiento en determinados niveles educativos.

Cuanto más amplio es el campo de fenómenos trabajados, el objeto mental constituido (por el sujeto) se empleará con mayor adecuación en diferentes situaciones problemáticas (escolares o cotidianas) en las que resulte implicado. Freudenthal afirma, por ejemplo, que muchas deficiencias observadas en la utilización del concepto de fracción provienen de que el contexto frecuentemente favorecido en su enseñanza es el contexto de fracción como fracturador. A partir de este contexto, se pasa a la fracción como número racional. Todos los contextos que figuran entre ambos (descritos anteriormente) son a menudo sorteados.

Cuando el campo de fenómenos no resulta adecuado para un nivel escolar determinado, la noción no debe abordarse en ese nivel. La existencia de fenómenos que se adecuen a edades determinadas es una cuestión prioritaria cuando se analiza la pertinencia de incluir o no un concepto o estructura matemática en un nivel determinado.

3.3.1. Conexión con nuestra investigación

La idea de estudiar las estructuras matemáticas a partir de los fenómenos (del mundo físico, social o matemático) que estas estructuras organizan constituye uno de los pilares de nuestra investigación.

Al reflexionar sobre la enseñanza de los números reales debemos comenzar (siguiendo a Freudenthal) por determinar los fenómenos que estos números permiten organizar. El sistema de números reales, denominado también el continuo aritmético, constituye una estructura matemática "[...] completamente adecuada para la representación analítica de todos los fenómenos continuos" (Ehrlich, 1994; p.viii).

Si los fenómenos que permite organizar una estructura matemática (como en este caso, el sistema de números reales) no son adecuados para trabajarlos en una edad determinada, entonces esa estructura no puede abordarse a esa edad. Esta afirmación conduce a preguntar por los fenómenos organizados por el número real que serían adecuados para trabajar con sujetos de Bachillerato (que es el nivel escolar en el cual se introducen los números reales).

Un fenómeno matemático continuo que organiza **R** es la recta geométrica. En una primera adaptación al enfoque de Freudenthal, consideramos que la *recta geométrica* constituye un fenómeno matemático (del ámbito geométrico) explicado por el sistema de números reales. La *recta numérica* (expresión utilizada para designar la biyección entre números reales / puntos de la recta) resulta de la interpretación del fenómeno recta geométrica en términos de la estructura del sistema de los números reales.

La r*ecta geométrica* como fenómeno matemático admite otras organizaciones diferentes, si se utilizan otros sistemas numéricos como medios de organización (por ejemplo, el sistema de números hiperreales). Una organización de la recta geométrica por un sistema numérico diferente de **R** supondrá reconocer en la recta una estructura diferente. Las dificultades que pueden presentarse en el sujeto cuando manipula la recta numérica proporcionarán (presumiblemente) información referida a las dificultades del sistema de números reales. Naturalmente, es imprescindible que las tareas propuestas exijan efectivamente usar algunas propiedades distintivas de los números reales. Es posible mencionar ejemplos en los que dichas tareas no permiten asegurar que dichas propiedades distintivas se pongan en juego; por ejemplo, la divisibilidad infinita de un segmento es una tarea que, técnicamente, puede realizarse exclusivamente en **Q**; por tanto, dicha tarea podría no discriminar entre **Q** y **R**.

En la enseñanza de los números reales la biyección entre números reales y puntos de la recta se apoya en la medida de longitudes. Esto es posible porque la longitud es una magnitud física continua, es decir, es un fenómeno (esta vez del mundo físico) organizado por el número real.

La recta geométrica y la longitud son fenómenos, organizados por el número real, adecuados para trabajar en el nivel escolar en que se introducen los números reales. De hecho, la recta geométrica y la medida de longitudes son trabajados desde los primeros años de la escolaridad obligatoria.

Estudiarlos como fenómenos organizados por los números reales es una intención de nuestra investigación. Esta intención responde al enfoque de Freudenthal, que postula que en la enseñanza de los conceptos o estructuras matemáticas debe comenzarse por estudiar los fenómenos que estos conceptos organizan.

El enfoque de Freudenthal, como hemos visto, permite enlazar razonadamente componentes de nuestra investigación. Esperamos estudiar obstáculos epistemológicos en la representación de números en la recta. La biyección entre números reales y puntos de la recta permite explicar la recta geométrica a través de los números reales. La correspondencia entre recta y números reales se apoya en la medida de longitudes y la longitud constituye, a su vez, un fenómeno físico explicado por el número real.

Disponemos entonces de dos fenómenos explicados por los números reales. Hasta qué punto estos fenómenos nos familiarizan con el sistema de números reales y sus propiedades es una cuestión que nos gustaría comenzar a desentrañar en nuestra investigación.

En este mismo capítulo desarrollamos más adelante (3.5.2) un estudio del sistema de los números reales desde cinco ámbitos diferentes. Con ese estudio esperamos describir el tratamiento del número real desde dos puntos de vista diferentes: matemático y escolar. Uno de estos ámbitos lo hemos denominado Fenomenología, aunque no es nuestra intención desarrollar allí un análisis fenomenológico del número real en el sentido de Freudenthal. El nombre responde a una necesidad de considerar en el estudio de los números reales (un estudio preocupado por su enseñanza) un "espacio" destinado a valorar la utilidad de este sistema numérico en la vida cotidiana, en física y en matemática.

3.4. La medida de longitudes

En su análisis de los fundamentos filosóficos de la física, R. Carnap (1966) aborda la utilidad del lenguaje cuantitativo y de las mediciones en física.

Distingue tres tipos de conceptos que se utilizan en las ciencias (y no sólo en ellas): conceptos clasificatorios, comparativos y cuantitativos, admite que el desarrollo científico se ha visto especialmente beneficiado por la utilización de estos últimos conceptos.

Los conceptos clasificatorios son los que permiten situar un objeto dentro de una clase, por ejemplo, los conceptos de corto, largo, caliente o roca.

Los conceptos comparativos, como 'más largo que', 'más corto que' (en inglés estas expresiones se resumen en vocablos únicos como 'longer' o 'shorter') expresan cómo se relaciona un objeto, en términos de más que o menos que, con otros objetos. Estos conceptos son especialmente útiles en ciencias (como en psicología) en las que es más difícil utilizar conceptos cuantitativos, y sin embargo es posible establecer una especie de gradación en el estudio de un fenómeno. Conviene señalar que los conceptos comparativos se apoyan en los conceptos clasificatorios. Por ejemplo, no tendría sentido comparar algo rocoso con algo caliente. En este sentido, la comparación se realiza sobre cantidades de una magnitud determinada.

Los conceptos cuantitativos son los que permiten describir un fenómeno mediante la utilización de valores numéricos. En este sentido, Carnap aclara que la diferencia entre cualitativo y cuantitativo no está en la naturaleza, en el mundo físico, sino que radica en el lenguaje. No es adecuado entonces calificar un fenómeno como cualitativo o cuantitativo, sino más bien calificar el lenguaje que describe este fenómeno como cualitativo o cuantitativo. El lenguaje cuantitativo es aquel en el que se introducen símbolos para funciones que tienen valores numéricos.

Es posible enumerar diversas ventajas de la utilización de conceptos cuantitativos en la descripción de fenómenos físicos:

- Aumenta la eficiencia de nuestro vocabulario. Se produce una economía de términos cualitativos, porque los posibles estados de un objeto con respecto a una magnitud dada se expresan mediante números (si sólo contásemos con adjetivos para expresar cantidades de longitud, como corto, largo, cortísimo, kilométrico, etc., resultaría difícil memorizar los nombres, y peor aún, memorizar el orden que siguen).

- Los conceptos cuantitativos permiten formular leyes cuantitativas que son muy poderosas en la predicción de nuevos fenómenos. Una vez expresada la ley en forma numérica es posible utilizar la matemática para hacer predicciones.

Los procedimientos que permiten describir los fenómenos físicos mediante valores numéricos son dos: contar y medir. La medida permite expresar no sólo valores enteros y aplicar, en el estudio de fenómenos físicos, los métodos del cálculo.

Un concepto cuantitativo (una *magnitud*) se define mediante una serie de reglas que especifican cómo asignar un número a cierto cuerpo o proceso, de modo que dicho número exprese el valor de la magnitud para ese cuerpo o proceso.

Las magnitudes extensivas, entre las que se encuentra la longitud, se caracterizan porque se cumple para ellas la regla aditiva: si se unen dos objetos para constituir otro, el valor de la magnitud para este nuevo objeto resulta de sumar los valores de la magnitud correspondientes a cada uno de los objetos unidos. Si los dos objetos unidos se simbolizan mediante a y b y el valor de la magnitud M para estos objetos se expresa mediante M (a) y M (b), la regla anterior se expresa diciendo que $M(a \circ b) = M(a) + M(b)$, donde ° expresa la "suma" de los objetos y + expresa la suma usual de dos números.

Las reglas que rigen la medición de magnitudes extensivas son las siguientes:

1- Regla de la igualdad: Especifica el proceso por el cual definimos la igualdad de dos magnitudes. Si una relación E se satisface para dos objetos determinados, a estos objetos les corresponde el mismo valor de la magnitud M, es decir:

   Si E (a, b), entonces $M(a) = M(b)$

Para la longitud: Un segmento marcado sobre un borde recto tiene igual longitud que otro segmento, marcado sobre otro borde recto, si los extremos de los dos segmentos pueden colocarse en coincidencia simultánea uno con otro.

2- Regla de la aditividad: es la que indicamos anteriormente.

   $M(a \circ b) = M(a) + M(b)$

Para la longitud: Si unimos dos segmentos en una línea recta, su longitud total es la suma de las longitudes separadas. Más adelante analizaremos las condiciones que debe satisfacer la unión de dos segmentos para que dé como resultado el segmento suma.

3- La regla unidad: especifica la unidad de valor para la magnitud. Se escoge un objeto o proceso natural que pueda ser fácilmente reproducido, y se define la unidad de valor en términos de este objeto o proceso.

Para la longitud: Seleccionamos una vara con un borde recto, marcamos dos puntos sobre este borde, y seleccionamos el segmento determinado por los dos puntos como unidad de longitud. Esta definición de unidad de longitud es suficiente para nuestra investigación.

El proceso de medición directa siempre da como resultado un número racional. “Los números irracionales [...] son introducidos en un estado posterior al de la medida. La medida directa puede dar sólo valores expresados como números racionales. Cuando formulamos leyes, y realizamos cálculos con la ayuda de estas leyes, intervienen los números irracionales. Son introducidos en un contexto teórico, no en el contexto de medida directa.” (Carnap, 1966; p. 88).

Carnap se pregunta si no podríamos prescindir de los números irracionales, puesto que las mediciones directas nunca conducirán a ellos. Afirma que hasta ahora no se han encontrado razones suficientes para hacerlo y que la decisión depende de la respuesta a la siguiente pregunta: “¿Será una escala numérica discreta o continua la más útil para formular ciertas leyes físicas?” (Carnap, 1966; p. 90)

3.4.1. Conexión con nuestra investigación

Las reglas aplicadas a la medición de la longitud proporcionan una base constituida por principios lógicos sobre la que descansa la actividad usual de medición de longitudes.

La regla de la aditividad exige que definamos un procedimiento único para situar dos segmentos de recta de modo que el segmento suma resultante sea único.

Una condición inicial (contemplada en la definición de Carnap descrita anteriormente) para sumar dos segmentos es que ambos se sitúen en la misma dirección.

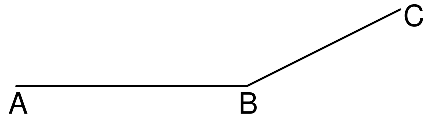


Figura 3.3: Posición inadecuada de los segmentos sumandos

Evidentemente en la figura 3.3 el segmento suma dependerá no sólo de la longitud de cada segmento, sino también del ángulo de vértice B formado por los segmentos. Si se define el segmento suma como el segmento de extremos A y C, entonces yo no se cumple la unicidad exigida en la ley de aditividad.

Una vez que reconocemos la necesidad de situar los segmentos en una misma dirección, el modo en que si sitúan los segmentos sobre la línea recta debe determinarse de modo preciso.

En la figura 3.4 los casos (a) y (b) no son los adecuados para situar los dos segmentos sobre una recta, puesto que el segmento suma resultante depende de la longitud del trozo de segmento compartido por los segmentos AB y CD (es decir, de la longitud del segmento CB) o de la longitud del segmento BC.

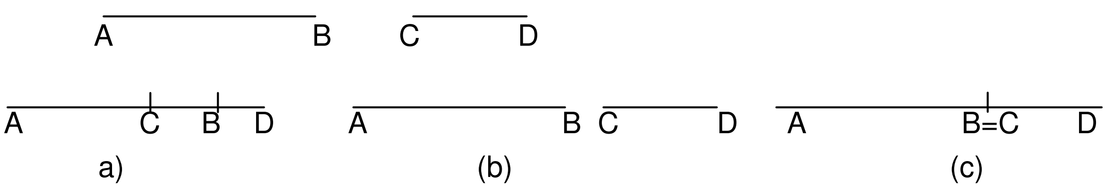


Figura 3.4: Distintas posiciones de los sumandos sobre una misma dirección

El caso (c) es el adecuado, puesto que los segmentos AB y CD se sitúan sobre la recta de modo que los extremos B y C respectivamente coincidan. En consecuencia, el segmento suma sólo depende de la longitud de cada segmento que se desea sumar.

La unión definida de ese modo descansa en la creencia de que los extremos (los puntos B y C respectivamente) se unen para constituir un único punto, común a los dos segmentos. La afirmación anterior implica que los puntos B y C se confunden en un solo punto, lo que constituye un modo de expresar la continuidad de la recta.

Hay una diferencia básica entre el segmento de recta y la varilla de madera. Al dividir un segmento en dos partes, creamos un punto nuevo cuando separamos los dos segmentos obtenidos (figura 3.5).

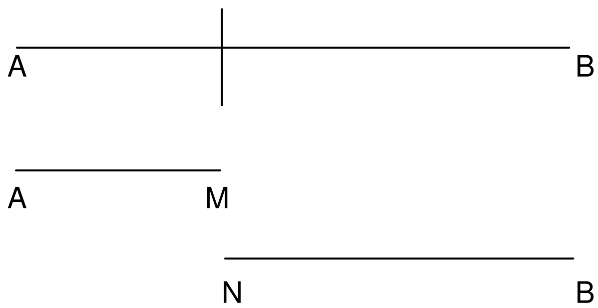


Figura 3.5: División de un segmento en dos partes

Por otro lado, cuando sumamos dos segmentos (por ejemplo, los segmentos AM y NB de la figura 3.5) los extremos M y N se confunden en un solo punto.

La continuidad supone la creación o la desaparición de un punto. Estos resultados de la manipulación de segmentos ideales no se manifiestan en la manipulación de objetos físicos.

3.5. Criterios para el estudio de los números reales

Este apartado se organiza en tres secciones. En la primera se realiza una presentación de los criterios, y se describen las dificultades conceptuales que se han planteado durante su desarrollo, relacionadas con la problemática de compaginar un tratamiento matemático y un tratamiento escolar del número real. Se realiza una breve descripción de los criterios incluyendo un ejemplo de su uso.

En la segunda se describen los criterios mediante el análisis del tratamiento matemático y escolar de las nociones implicadas en cada caso. La descripción desde el punto de vista matemático no es exhaustiva, sino que en cada caso se ofrece una descripción general y se propone bibliografía que permite profundizar el estudio. En cuanto a la descripción del tratamiento escolar de las nociones incluidas en cada epígrafe, se ha realizado teniendo en cuenta las orientaciones curriculares y libros de texto correspondientes a Bachillerato.

En la tercera sección del apartado se describe el origen de los criterios y su utilización en el estudio empírico previo de esta investigación. Esta descripción supone una ruptura cronológica en el informe de investigación que constituye esta memoria; la intención de tal ruptura es mostrar la conveniencia de la utilización de los criterios. Una breve descripción de la utilidad de los criterios con anterioridad a este trabajo puede considerarse como un argumento a favor de la pertinencia de éstos en el estudio de afirmaciones de alumnos relativas a números.

3.5.1. Acercamiento al estudio escolar y matemático de R

La decisión de describir el tratamiento del número real desde puntos de vista distintos, matemático y escolar respectivamente, requiere un análisis de las diferencias que se manifiestan en cada caso.

Ebbinghaus (1990) analiza el uso de los números reales por los matemáticos, especialmente por los analistas. Según su descripción, los objetos de los que se parte en Análisis son los números reales y con ellos se estudian nuevos objetos, como funciones reales, intervalos, o relaciones entre números reales. Sin embargo, al analista no le interesa la estructura interna de **R**, es decir, los propios números reales, sino las relaciones *entre* ellos, formuladas en los sistemas de axiomas usuales del análisis. Lo mismo ocurre con los números naturales en aritmética, o los puntos en la geometría euclídea.

En teoría de conjuntos, los objetos de estudio que constituyen la estructura interna de la teoría reciben el nombre de *urelementos.* Estos objetos constituyen el nivel inferior en la jerarquía determinada por los objetos de estudio de la teoría. A partir de ellos se construyen objetos más complicados que constituyen los niveles superiores. La naturaleza de los urelementos es bastante irrelevante, y ello ocurre debido a que la multitud de objetos que pueden presentarse en cualquier teoría matemática (números, puntos u otros) pueden ser total y sistemáticamente descrita usando conceptos de la teoría de conjuntos.

Todos los objetos matemáticos que se estudian en las distintas teorías se reducen a conjuntos[6], y en el comienzo hay un único individuo atómico: el conjunto vacío. “Un poco más concisamente, podemos decir que el universo entero de objetos matemáticos puede ser construido “a partir de nada” por el proceso de creación de conjuntos”. (Ebbinghaus, 1990; p.362).

A partir de las consideraciones anteriores es posible establecer una diferencia fundamental en el tratamiento desde los puntos de vista matemático y escolar. Los números reales son considerados como urelementos en las descripciones matemáticas. La axiomática “habitual” del conjunto de números reales constituye un ejemplo típico de ello. Según ésta, los números reales constituyen elementos de un conjunto que satisfacen ciertas condiciones (axiomas) relacionadas con las operaciones y sus propiedades (axioma de cuerpo), con la relación de orden y su compatibilidad con las operaciones (axiomas de orden) y con la idea de completitud (axioma de completitud o continuidad).[7]

La presentación axiomática de **R** no requiere considerar ningún número real en particular, con excepción del 0 y del 1, necesarios en la determinación de las propiedades de las operaciones en los axiomas de cuerpo. Cualquier libro de análisis que adopte esta aproximación a **R** no necesita presentar ningún ejemplo de número real.

Los Elementos de Euclides constituyen el primer ejemplo de utilización del método axiomático para presentar un cuerpo de conocimiento; se consideraba que los conceptos y axiomas primitivos son intuitivos (aunque el término intuición no esté definido con precisión) y, por lo tanto, verdaderos, lo que asegura la verdad de las conclusiones (teoremas y propiedades) que se obtienen a partir de ellos. Más tarde, el método axiomático se extendió a otros campos, en particular, el aritmético. Durante esta extensión, el papel otorgado al método por los matemáticos fue modificándose (de Lorenzo, 1998).

Dedekind y Cantor, por ejemplo, consideraban que no es posible utilizar el método axiomático en Aritmética, porque no existen conceptos y axiomas de partida que provengan de datos naturales, como la intuición del espacio para la geometría euclídea. Estos autores utilizaban una aproximación a los conjuntos numéricos denominada genética, basada en la construcción del conjunto de números reales a partir de la ampliación del conjunto de números racionales (mediante cortaduras o sucesiones respectivamente), y donde el origen del proceso se establece en los números naturales. En estas construcciones suele presentarse un ejemplo de

[6] Al menos, si se acepta la teoría de Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección. (Nelson, 1977.)

[7] Lo mismo puede decirse si se usan otras axiomáticas, como la de Artin-Schreier (ver Sinaceur, 1992, 104-107), de corte algebraico, o la de Stolzenberg (ver Alper y Bridges, 1997), basada en intervalos de racionales.

número real para hacer notar que el conjunto de números racionales no es completo, y que la construcción propuesta permite completarlo. Por ejemplo, en la construcción mediante cortaduras, es posible considerar la cortadura definida por $\sqrt{2}$ (como el conjunto de números racionales positivos cuyo cuadrado es mayor que 2) y demostrar que no es racional.

Hilbert introduce el método axiomático en aritmética con la intención de proporcionar un fundamento riguroso y satisfactorio del concepto de número: "*a pesar del alto valor pedagógico y heurístico del método genético, merece, sin embargo, la preferencia el método axiomático para la representación definitiva de nuestro conocimiento y su plena seguridad lógica*" (Hilbert, 1996; p.245). Para Hilbert, la aplicación del método axiomático no exige la existencia previa de datos o fenómenos naturales o intuitivos, de donde obtener las nociones primitivas y axiomas. La existencia de un conjunto de elementos (sin importar su naturaleza) se postula en los mismos conceptos y axiomas primitivos (de Lorenzo, 1998). Es el origen de la postura actual en la que se consideran los elementos de una teoría como urelementos.

Hilbert exige la consistencia al método axiomático: de la colección de axiomas establecidos no pueden deducirse teoremas mutuamente contradictorios, como tampoco debería serlo la propia colección de axiomas.

Es posible mencionar dos modos diferentes de establecer la consistencia de los axiomas. En primer lugar, la consistencia de un sistema axiomático se asegura hallando un modelo que satisfaga ese sistema, de manera que cada axioma sea una afirmación verdadera en ese modelo. Esta opción permitió establecer un enlace entre los métodos axiomático y genético. Las construcciones de **R** mediante cortaduras, sucesiones o intervalos encajados constituyen modelos (isomorfos entre sí) del sistema definido axiomáticamente. Esta primera salida no condujo a un resultado satisfactorio, dado que los modelos construidos no son finitos, y por lo tanto, sus descripciones pueden contener inconsistencias (Nagel y Newman, 1994).

La segunda opción la propuso el mismo Hilbert. Se deben encontrar pruebas absolutas de consistencia, lo que exige formalizar completamente el sistema deductivo. Nagel y Newman (1994) describen concisamente el camino seguido. Se extrae todo significado de las expresiones que constituyen el sistema, se las considera signos vacíos. A continuación, se enuncian reglas precisas para manipular y combinar esos signos, poniéndose de manifiesto las relaciones lógicas existentes entre las propiedades matemáticas. Gödel demostró que no es posible hallar una prueba de la consistencia de un sistema que contenga toda la aritmética, a menos que se utilicen reglas que difieren de las utilizadas en el sistema. Existen proposiciones aritméticas verdaderas que no pueden derivarse del conjunto de axiomas. Por lo tanto, el sistema es incompleto. En consecuencia, no es posible probar de modo absoluto (en el sentido de Hilbert) la consistencia de la axiomática de **R**.

En los textos de análisis se utiliza frecuentemente el método axiomático, y suele presentarse una construcción 'genética' que permite obtener un modelo del sistema propuesto. En algunos textos se prescinde de la construcción genética. Apostol (1996; p.1) explica la ausencia de una construcción genética en su aproximación a los números reales en los siguientes términos: "Es un hecho que, en la mayor parte del Análisis, nos interesarán solamente las *propiedades* de los números reales antes que los métodos utilizados para construirlos".

La descripción anterior pretende aclarar el modo en que son considerados los números reales en las matemáticas, para contrastarlo con el tratamiento escolar.

El tratamiento escolar del número real obedece a otra perspectiva. En el medio escolar, los conjuntos numéricos, y en particular el conjunto de números reales, se construyen, en la medida de lo posible, dando sentido a los elementos que los constituyen. Se identifican ejemplos concretos de esos elementos (los números 4, -1/2, $\sqrt{2}$ o π) mediante diferentes representaciones y se utilizan éstas para efectuar operaciones, expresar magnitudes que intervienen en problemas del mundo físico o cotidiano y para establecer relaciones (por ejemplo, comparación según el orden).

En los contenidos curriculares correspondientes a Bachillerato en las modalidades Ciencias de la Naturaleza y Tecnológico respectivamente, se propone para los números reales:

"- Introducción al número real. Existencia de medidas y de ecuaciones cuyas soluciones no pueden expresarse con números racionales: números irracionales.

- Representación geométrica de los números racionales e irracionales como puntos en la recta o segmentos. Idea intuitiva acerca de la densidad y completitud de la recta real." (Junta de Andalucía, 1994; p. 8828)

Antes de abordar el estudio de los números reales, los alumnos normalmente han trabajado con ejemplos la biyección existente entre el conjunto de números racionales y el conjunto de las expresiones decimales infinitas periódicas. En los libros de texto revisados (Álvarez, García, Garrido y Vila, 1989; Guzmán, Colera y Salvador, 1989; Vizmanos, Anzola y Primo, 1988) durante la introducción a los números reales se induce al alumno a observar la existencia de "objetos" que no pueden expresarse como cociente de dos enteros (el ejemplo típico utilizado es $\sqrt{2}$ y la demostración por reducción al absurdo), o conjeturan la existencia de expresiones decimales infinitas no periódicas, que no pueden corresponder a números racionales. La aceptación como número de tales expresiones, en algunos casos no se plantea, en otros se justifica de diversas formas, por ejemplo, (Álvarez et al., 1989) diciendo que tienen la misma estructura (parte entera, décima, centésima, ... con infinitas cifras decimales) que una expresión decimal infinita periódica. Un procedimiento muy frecuente, utilizado para confirmar la naturaleza numérica de estos números no racionales, es la construcción de segmentos cuya longitud no es racional.

Una vez que son introducidos los números irracionales mediante ejemplos numéricos concretos, se establece la existencia de un conjunto formado por estos elementos y se afirma que, junto al conjunto de números racionales, 'cubren' la recta, es decir, a cada punto de la recta es posible asignar un número real, y viceversa. A partir de esta presentación, los reales se utilizan en operaciones y en la resolución de situaciones problemáticas.

En nuestra investigación estudiaremos las interpretaciones e intuiciones relacionadas con la asignación de números reales a puntos de la recta que los alumnos ponen en juego cuando se involucran en tareas especialmente diseñadas,

El discurso de cada persona sobre cuestiones relacionadas con números reales se interpretará apelando a varios *ámbitos o centros de interés* denominados criterios. La descripción de estos criterios es el objetivo principal del presente apartado.

El análisis que se realiza desde el punto de vista matemático de las nociones incluidas en los criterios es conciso, dado que el interés no reside en el estudio de los números reales como urelementos, sino en las dificultades en el aprendizaje de estos números, y en especial en aquéllas relacionadas con la representación en la recta.

La colección de criterios tiene un carácter inductivo, se espera distribuir los discursos recogidos en los diferentes ámbitos correspondientes a cada uno de los criterios.

La utilización de los criterios en nuestra investigación es diversa. El estudio de los números reales mediante estos cinco ámbitos ha facilitado la elección de un foco (la representación de números en la recta) en el que centrar nuestra investigación. Además, los criterios juegan un papel preponderante en la interpretación de las respuestas de los alumnos a las situaciones propuestas en entrevistas y cuestionarios. Finalmente, las propiedades o características de los números reales estudiadas en cada criterio proporcionan elementos a considerar durante la elaboración de situaciones adecuadas para ser incluidas en entrevistas o cuestionarios referidas a la representación en la recta. A modo de ejemplo de este último uso, señalamos que todas las representaciones simbólicas de números reales desarrolladas en el criterio correspondiente fueron consideradas en la elección de los números incluidos en el enunciado de las tareas propuestas en un cuestionario.

Los criterios han sido utilizados en diversas circunstancias previas a esta investigación, concretamente en la organización de las respuestas de alumnos a una encuesta acerca de la Comparación de Números (descrita brevemente en 1.3) y en la lectura, desde la perspectiva de estos cinco criterios, de informes de otras investigaciones referidas al número real (descrita en 3.5.3.2). Estas aplicaciones previas han fortalecido la decisión de emplearlos en la interpretación de las respuestas de los alumnos, como se verá en los capítulos 4 y 6.

A continuación se presenta una breve descripción de los contenidos de cada criterio.

Criterio *Orden.* La descripción desde el punto de vista matemático consiste en una breve caracterización de la relación de orden ‘<’ en cada conjunto numérico, indicándose el tipo de orden que se establece entre cada conjunto numérico **N**, **Z**, **Q** o **R** y la relación ‘<’ y destacando el orden continuo de **R**. La descripción desde el punto de vista escolar incluye algunas actividades que se proponen en relación con la comparación de números, los términos utilizados por los alumnos, la utilización de la noción de orden en inecuaciones y la expresión de resultados mediante intervalos. Por último, se analiza la dificultad del tratamiento de la completitud de **R**.

Criterio *Tipo de Número.* Se describen clasificaciones de números que responden a diferentes criterios. Un criterio básico es el conjunto numérico al que pertenece un número determinado, aunque se incluyen otras clasificaciones que permiten expresar **R** como la unión de conjuntos disjuntos, además de la habitual **Q** ∪ **I** (constructibles y no constructibles, algebraicos y trascendentes, computables y no computables). Se revisan también las clasificaciones de números relacionadas con la divisibilidad y con la finitud o infinitud. Aunque estas clasificaciones no se utilicen expresamente en el medio escolar, la indagación teórica exige considerarlas para que la descripción sea completa y para tener en cuenta determinadas afirmaciones de origen escolar.

Criterio *Fenomenología*. Se describe la utilidad de **R** como modelo matemático de las magnitudes continuas en contextos no exclusivamente matemáticos. El número real permite organizar el fenómeno de la cantidad en las magnitudes continuas y en este criterio se desarrollan algunas cuestiones relacionadas con esta perspectiva. Se analizan los términos magnitud, cantidad y medida desde tres ámbitos diferentes: uso cotidiano, matemáticas y física para estudiar las implicaciones de los números reales en cada uno de ellos. Respecto del tratamiento escolar, se describen las dificultades mencionadas en diversas investigaciones en la medición de magnitudes.

Criterio *Representaciones*. Se describen las representaciones más comunes utilizadas para escribir y nombrar los números reales. Se organizan las representaciones escritas de números reales en tres grupos: simbólica (cuando una cifra o un símbolo se utiliza para representar un número), gráfica (los números se representan mediante gráficos o figuras) y representación en la recta (que combina características de los dos tipos anteriores). La última se desarrolla en profundidad en el apartado 3.6 de esta memoria, y con respecto a las dos primeras se describen en esta sección las diferentes escrituras utilizadas en el medio matemático y escolar.

Criterio *Operaciones*. Se describen las operaciones entre números reales desde dos puntos de vista: cómo se conciben en las matemáticas, y qué cuestiones de las operaciones se tratan en el medio escolar. En el análisis se ha tenido en cuenta el predominio del estudio de las operaciones y sus propiedades (especialmente el manejo de algoritmos) en la escuela. Se analizan cuestiones relacionadas con la enseñanza de las operaciones básicas y el uso de las operaciones en ecuaciones y funciones, el uso de calculadoras y el estudio de los errores que cometen los alumnos en las operaciones.

Aunque en la sección 3.5.3 de este apartado se describen dos "aplicaciones" de los criterios, preliminares a las entrevistas y cuestionarios desarrollados en el estudio empírico de nuestra investigación, a continuación se presentan algunos ejemplos con el fin de ilustrar, en primera aproximación, su utilidad.

Ejemplo Nº 1: Las respuestas de los alumnos que hagan alusión a la escritura de los números, se incluirán en el criterio Representaciones.

Ejemplo Nº 2: Una respuesta que se refiera a la relación de orden, o a operaciones o propiedades de las operaciones, se incluirán en los criterios Orden u Operaciones respectivamente.

Ejemplo Nº 3: Una afirmación respecto del uso de los números, se incluirá en el criterio Fenomenología.

Ejemplo Nº 4: Al no entenderse los criterios como compartimentos aislados, es posible que una respuesta pueda incluirse en varios criterios. Cuando un alumno afirma que el número 2'41 es decimal, por ejemplo, puede tratarse de la posibilidad de expresarlo como fracción cuyo denominador se factoriza únicamente mediante potencias de dos o de cinco (incluyéndose en Tipo de Número), o bien puede tratarse de que está expresado en el sistema decimal de notación, o quizá este alumno esté pensando en que posee una escritura con coma (respectivamente, en Representaciones). Si no es posible aclarar el punto de vista que utiliza el alumno (porque se trata de una respuesta de un cuestionario) la investigadora deberá justificar las decisiones tomadas. Este ejemplo es muy útil para ilustrar la dificultad de determinar el criterio bajo el cual se incluye una afirmación dada. El siguiente ejemplo es menos evidente, pero ilustra la inconveniencia de desconectar los criterios entre sí.

Ejemplo Nº 5: La alusión a que un número es constructible, remite al criterio Tipo de Número, aunque también parece sensato pensar en el criterio Representaciones, dado que la constructibilidad implica, generalmente, la posibilidad de representar en la recta numérica el número utilizando como herramientas la regla sin graduar y el compás.

Ejemplo Nº 6: El siguiente fragmento, tomado de un libro de texto de matemáticas (Guzmán et al., 1989; p.44) se organiza según los criterios (tabla 3.1).

Un nuevo tipo de números: los irracionales

T.DE NÚMERO *REPRESENTACIONES / OPERACIONES*

[El número √2 no es racional**]**, es decir, **[**no se puede expresar como cociente de dos números enteros ni, por tanto, como decimal exacto o periódico. Su expresión decimal es:

√2 = 1,414 213 5623...

Tiene infinitas cifras decimales sin ninguna periodicidad**]**.

T. DE NÚMERO

[A este tipo de números se les llama **irracionales**.

También es irracional el número (1+√5)/2 = 1,618 033 988 7...**]**

REPRESENTACIONES / T. DE NÚMERO

[A los números cuya expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas se les llama números irracionales.**]**

Radicales

OPERACIONES / T. DE NÚMERO

[La raíz cuadrada de un número natural, si no es entera, es irracional. Por tanto son irracionales:

√2, √3, √5, √6, √7, √8, √10, √11, ...

También son irracionales los resultados de operar (sumar, restar, multiplicar o dividir) un número irracional con números racionales. Por ejemplo:

1+√3, (1+√5)/2; (√5-1)/2; 3/(2+√3); etc.**]**

El número π

FENOMENOLOGÍA / T. DE NÚMERO

[Es el primer número irracional que tú has manejado, concretamente, para calcular la longitud de una circunferencia o el área de un círculo aunque, posiblemente, hasta ahora no supieras que es irracional.**]**

Tabla 3.1: Uso de los criterios en el análisis de la página de un libro de texto (*)

(*) Se señalan con corchetes las frases que se incluyen en cada criterio, y el criterio correspondiente se indica en cursiva y mayúscula, por encima del corchete de apertura.

3.5.2. Descripción

3.5.2.1. Criterio *Orden*

La definición axiomática de **R** supone considerar tres axiomas (o tres grupos de axiomas, según la elección de cada autor). Los dos primeros axiomas referidos a la propiedad de **R** de poseer la estructura de cuerpo conmutativo y de cuerpo ordenado, respectivamente, no son exclusivos de este conjunto numérico. Los racionales también poseen estas propiedades, y la diferencia entre **R** y este conjunto la establece el axioma de completitud. Este axioma permite calificar al conjunto **R** como 'continuo' en tanto que el conjunto de racionales es denso. Feferman (1989; p.227) afirma: "Aunque hemos sido conducidos a estas consideraciones desde ideas que involucran la medida, vemos ahora que el "defecto" en los números racionales puede ser expresado enteramente en términos de su relación de orden".

Bachelard (1987) sostiene que los conceptos de número y magnitud son derivados del concepto de orden, que para este autor es fundamental[8]. Demuestra que es posible realizar un conocimiento aproximado de la cualidad, sin recurrir a la cantidad, y ello es posible gracias a un carácter primordial de la cualidad, el orden cualitativo, al que considera el único principio del conocimiento. "El concepto de orden y el concepto "entre" derivan el uno del otro y están en tal reciprocidad que se puede decir que es la misma noción" (Bachelard,1987; p.33). Al examinar las condiciones de comparación de los diversos estados de la cualidad, se observa que dos determinaciones cualitativas implican una diferencia, y tres estados una intercalación. Una cuarta experiencia cualitativa, por su parte, proporciona otra idea diferente y nueva. Supongamos que C está entre A y B, y hallamos D que está entre C y B. Lo que nos dice este cuarto estado D, no es únicamente que D está entre C y B (un nuevo juicio de intercalación), sino que proporciona otra idea diferente y nueva: nos dice que de los hechos de que C está entre A y B, y D entre C y B, se deduce que D está más cerca de B que de C. "El hecho así expresado es independiente del lenguaje geométrico.[...] Nos creemos por tanto con derecho a denominar juicio de aproximación al juicio deductivo inducido por la cuarta experiencia cualitativa." (Bachelard, 1987; pp.37-38)

Sinaceur (1992; p.115) sostiene que "*a priori* o por *naturaleza*, la noción de orden en matemática no es intrínsecamente geométrica aunque se represente fácilmente por la relación 'estar situado entre...', ni algebraica aunque se traduce por la relación de desigualdad, ni analítica aunque esté implicada en las nociones de límite y convergencia. Se presta a diversas presentaciones (habillages), diversas expresiones y, en los casos afortunados, se consigue establecer las

[8] Cabe resaltar la oposición frontal entre este enfoque epistemológico y un enfoque esencialmente matemático como el de Artin y Schreier, cuyo primer axioma para **R** ("es imposible escribir –1 como suma de cuadrados de elementos de R") resulta equivalente a la existencia en **R** de una relación de orden total compatible con su estructura algebraica. Siguiendo a Sinaceur (1992, p. 105), es por tanto posible afirmar no que **R** es ordenado, sino *ordenable.*

correspondencias, hasta las equivalencias, de una expresión a la otra. Por ello aparece en la matemática contemporánea como una noción *transversal*, presente en los caminos que unen una disciplina a la otra".

En esta sección se describen diferentes cuestiones relacionadas con el tratamiento de esta noción, *transversal* según Sinaceur. La descripción responde a la consideración de los números reales como urelementos desde el punto de vista matemático frente al tratamiento escolar marcado por la utilización de ejemplos específicos de números en cada conjunto numérico.

3.5.2.1.1. Orden en los sistemas numéricos

El objetivo de este punto es describir las propiedades fundamentales de la relación de orden en los conjuntos numéricos.

La relación de orden '$\leq$' se define para los números naturales, enteros, racionales y reales. Una relación de orden cumple tres propiedades usuales: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

La propiedad reflexiva afirma que todo elemento es menor igual que él mismo.

La propiedad antisimétrica afirma que, dados dos elementos cualesquiera, si el primero es menor o igual que el segundo, y el segundo es menor o igual que el primero, entonces los elementos son iguales.

La propiedad transitiva afirma que, dados tres elementos cualesquiera de un conjunto, si se verifica que el primero es menor que el segundo, y que el segundo es menor que el tercero, entonces el primero es menor que el tercero.

La relación de orden en **N**, **Z**, **Q** y **R** verifica la ley de tricotomía: Esta ley garantiza la posibilidad de comparar dos números cualesquiera, pertenecientes a alguno de los conjuntos numéricos nombrados. (Cuando se cumple esta propiedad se dice que el orden es **total** en el conjunto considerado.)

Es posible también analizar la compatibilidad de la relación de orden con las operaciones definidas en los conjuntos numéricos.

A continuación se describen algunas propiedades de la relación de orden en los conjuntos numéricos **N**, **Z**, **Q** y **R**.

Orden en los naturales

La relación de orden $\leq$ se define de la siguiente manera:

Dados x, y naturales:

$$x \leq y \text{ si y sólo si existe un natural } n \text{ que verifica: } y = x + n$$

Una propiedad específica del conjunto de números naturales es que tiene primer elemento. Por ello se dice que este conjunto está 'bien ordenado'.

Entre dos números naturales cualesquiera, existe un número finito de naturales. Es decir, todo intervalo de extremos naturales en **N** es finito.

El orden en **N** es compatible con la suma, con la multiplicación y con la potenciación.

Orden en los enteros

Se define la aplicación valor absoluto de **Z** en $\mathbf{Z}^+$ de la siguiente manera:

Si $0 \leq x$, $|x| = x$

Si $x < 0$, $|x| = -x$

Todo intervalo de extremo **Z** enteros en **Z** es finito.

El orden en los enteros es compatible con la suma y con la multiplicación por un entero positivo.

Orden en los racionales

Dados dos racionales distintos, siempre existe un tercer racional comprendido entre ambos (por ejemplo, su media aritmética). Se dice que el orden del conjunto de números racionales es un orden *denso*.

Como consecuencia, entre dos números racionales existen infinitos números racionales. La densidad no es una propiedad de **N** ni de **Z**.

Esta propiedad permite capturar dos nociones esenciales en la construcción de los conjuntos numéricos: las de infinito potencial e infinito actual. El infinito potencial involucra un proceso que puede repetirse una y otra vez sin final con ayuda de un patrón. Son ejemplos la posibilidad de encontrar un sucesor para todo número natural, y la densidad de los racionales (posibilidad de encontrar un racional entre otros dos, dados). El infinito actual involucra la posibilidad de considerar todos los elementos de un conjunto. Por ejemplo, la consideración de un intervalo de racionales completo.

Es posible demostrar que la relación de orden en **Q** es *arquimediana*. Esta propiedad implica que, dados dos racionales positivos p y q, siempre existe un número natural n tal que $p < n.q$.

Orden en los reales

En el conjunto de números reales *la densidad* también se verifica: entre dos números reales cualesquiera, existen infinitos números reales. Sin embargo, en el conjunto de números reales se establece otra propiedad (que en la definición axiomática de este conjunto se enuncia como axioma) denominada *completitud* que admite diferentes formulaciones, todas equivalentes entre sí (ver, por ejemplo, Mainzer, 1990; Sinaceur, 1992):

Todo conjunto no vacío S de números reales que esté acotado superiormente admite un supremo; es decir, existe un número real b tal que b = sup S.

Algunos autores expresan esta propiedad diciendo que **R** es un conjunto ‘perfecto’: “el significado de esto es que todos los límites de sucesiones convergentes de números o puntos pertenecientes al agregado pertenecen también al agregado; e, inversamente, que cada número o punto del agregado puede ser exhibido como el límite de una tal sucesión" (Hobson, 1994).

El axioma de completitud del conjunto de números reales supone una dificultad conceptual que Truss (1997; p. 112) expresa en los siguientes términos: "La construcción de los números reales a partir de **Q** [plantea] algunos problemas conceptuales que no se dan en **Z** y en **Q**. La no numerabilidad (*uncountability*) de **R** se discutirá en la sección siguiente. Aquí queremos destacar otro punto, y es que el nuevo axioma que estamos exigiendo que cumpla **R** es 'de segundo orden', [...En el primer orden,] las variables deberían exclusivamente recorrer los *elementos* del dominio que se está considerando. Este no es el caso [con los números reales]. La afirmación de que **R** es completamente ordenado (*order-complete*) implica cuantificadores sobre *subconjuntos* de **R**: 'para todo subconjunto X de **R**, si X es no vacío y acotado superiormente entonces...'. Éste es un axioma de segundo orden. Más precisamente, una fórmula es de segundo orden si todas las variables recorren el dominio o sus subconjuntos; [...]".

La traducción del axioma al lenguaje de intervalos es la siguiente:

(Equivalente al axioma de completitud) El cuerpo **R** es arquimedianamente ordenado, y para cada sucesión de intervalos encajados $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$ en **R**, tales que la longitud de I_n converge a cero cuando n aumenta, existe un y sólo un número *s* que pertenece a todos los intervalos de la sucesión (Mainzer, 1990).

En este último enunciado se hace referencia a la propiedad de **R** de ser *arquimedianamente ordenado*. La propiedad arquimediana, que se ha enunciado para el conjunto de números racionales, se verifica también en **R**.

Desde el punto de vista geométrico, garantiza que cualquier segmento de recta, por largo que sea, pueda recubrirse mediante un número finito de segmentos lineales de longitud positiva dada.

La propiedad arquimediana de los reales constituye un teorema deducible de los axiomas de **R** (como demuestra Mainzer, equivalente a la propiedad de que **Q** es denso en **R**), aunque es posible enunciarla, junto a otras condiciones, como axioma de completitud. Es el caso de la formulación del axioma mediante intervalos encajados o mediante la siguiente (Mainzer, 1990; p. 48):

El cuerpo R es arquimedianamente ordenado y toda sucesión fundamental (sucesión de Cauchy) de elementos de R converge en R.

Un ejemplo de cuerpo que verifica las propiedades de poseer un orden total y de que toda sucesión fundamental converge es el cuerpo de los números hiperreales. Sin embargo, este cuerpo no es arquimediano en sentido estricto, es decir, en relación a **N** (Petitot, 1989; p. 196), dado que posee números infinitamente grandes e infinitamente pequeños o infinitésimos (si ε es infinitésimo y *r* es un real positivo cualquiera, se verifica que para todo *n* natural, $r > n.\varepsilon$).

El orden continuo de **R**, resultado de la validez del axioma de completitud, es posible reconocerlo en la recta geométrica mediante una formulación axiomática adecuada. Una descripción cómoda (aunque negativa) de este orden se obtiene diciendo que no hay ningún método que permita asignar un sucesor a todo número real (ni a todo punto). En cuanto al orden total, elegida la orientación habitual, decir que un punto A está a la izquierda de otro punto B equivale a decir de sus respectivas abscisas, r y r', que r<r'. Esto permite asociar ordenadamente cada número real con "su" correspondiente punto de la recta en la que previamente se han marcado el origen y la unidad: si r<r' el punto asociado a r+a está a la izquierda de r'+a, cualesquiera que sean los números r, r' y a. Si además, a>0, también ra está a la izquierda de r'a.

3.5.2.1.2. La relación de orden en el medio escolar

La comparación entre pares de números pertenecientes a un conjunto numérico según su orden de magnitud se realiza en la escuela desde los niveles elementales y forma parte de los contenidos *básicos* que se imparten en la escuela. Por esa razón se describen algunos procedimientos de comparación utilizados y se transcriben algunos términos que utilizan los alumnos cuando comparan números.

La relación de orden se utiliza también en la expresión de inecuaciones y sus soluciones suelen expresarse en términos de intervalos. El tratamiento escolar de estos temas se describe sucintamente.

En los últimos puntos de la sección se analizan algunos aspectos referidos a la relación de orden y al tratamiento escolar de la completitud del conjunto **R**.

Los libros de texto consultados son los mencionados en 3.5.1.

Comparación de dos números

Procedimientos de comparación

La comparación entre números según su orden de magnitud se efectúa desde el nivel primario.

La definición de cuándo un número es mayor que otro no siempre se enuncia, pero cuando se hace, suelen proponerse numerosos ejemplos de la definición planteada en la descripción del orden en **N**: dados x, y naturales, $x \leq y$ si y sólo si existe un natural n que verifica: $y = x + n$.

Una conexión que suele hacerse comúnmente cuando se comparan números es representarlos sobre la recta, dado que la disposición lineal de sus puntos expresa intuitivamente las propiedades de la relación de orden : ley de tricotomía y transitividad (independientemente de que se haya enunciado o no la biyección entre puntos de la recta y números reales).

Para comparar dos números se aplican diferentes procedimientos, según el conjunto numérico al que pertenezcan los números.

- Si se trata de naturales, en los niveles elementales se recurre a la noción cardinal de este número, mediante el uso de figuras ilustrativas.

- Cuando se comparan enteros, suelen establecerse 'reglas' que rigen la comparación (que establecen, por ejemplo, que todos los negativos son mayores que todos los positivos, o que 0 es menor que todos los positivos), muchas veces apoyándose en la representación en la recta.

- Cuando se comparan fracciones (cuyos denominadores son de igual signo) se utiliza la siguiente propiedad: a/b < c/d si y sólo si a.d< bc. Otra forma de compararlos (cuando no tienen igual denominador) es buscando fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador. Hay también reglas específicas para las partes (los inversos) de la unidad.

- Para comparar racionales de igual signo escritos en forma decimal se comparan las partes enteras (tratándolas como si fuesen naturales). Si las partes enteras son iguales, se comparan las decimales buscando la primera cifra decimal en la que difieran los números dados. Una vez hallada, el número mayor (o menor, si son ambos menores que cero) es el que tiene mayor (o menor, respectivamente) esta cifra.

- El procedimiento de comparación de números irracionales varía según la representación de los números a comparar. Si se trata de una representación decimal aproximada, se sigue el procedimiento anterior. Si están expresados mediante radicales del tipo $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[m]{b}$ (suponiendo que ambas expresiones están definidas en **R**) se presentan diversas situaciones.

Si n = m, la comparación de los números se reduce a la comparación de a y b.

Si n ≠ m, se reducen los radicales a un mismo índice o bien se busca una aproximación decimal de los números, comparando las expresiones decimales resultantes.

Términos del lenguaje cotidiano

Los términos que usan los alumnos cuando comparan dos números provienen del lenguaje cotidiano, a veces son imprecisos, o no tienen significado desde el punto de vista matemático. Por ejemplo:

'tienen distinto valor', 'se acerca a', 'están próximos a', 'son el mismo', 'es más pequeño que', 'expresan lo mismo', 'es inferior a', 'uno va a continuación del otro', 'están entre', 'no es el mismo', 'son equivalentes', 'tienen casi el mismo valor', 'es casi la misma cosa', 'son aproximadamente iguales', 'son muy próximos', 'intenta ser el mismo número', 'son prácticamente lo mismo', 'nunca podrá llegar a ser'[9].

[9] Estas expresiones han sido extraídas de las respuestas obtenidas en la encuesta acerca de la Comparación de Números.

Entre las expresiones anteriores, algunas llevan a interpretar los números como procesos y no como entidades definidas. Por ejemplo: 'intenta ser el mismo número', 'nunca podrá llegar a ser', 'van uno detrás de otro', 'van seguidos'.

Inecuaciones

Las inecuaciones son desigualdades de la forma f(x) < g(x) donde f y g son aplicaciones definidas sobre el conjunto de números reales. Resolver una inecuación implica determinar los números reales a tales que f(a) < g(a) es verdadera.

En los enunciados de problemas que pueden resolverse mediante el planteamiento de inecuaciones se utilizan expresiones que aluden a situaciones no exactas, por ejemplo: 'no llega a', menor que', 'mayor que, 'algo más de', 'poco menos que'.

En el medio escolar pueden trabajarse inecuaciones o sistemas de inecuaciones de primer grado con una o dos incógnitas e inecuaciones o sistemas de inecuaciones de segundo grado con una incógnita, y las soluciones se representan gráficamente en la recta numérica (punto o intervalo) o en el plano coordenado (regiones planas, rectas o puntos). Ejemplos:

$70 + 5x < 18$; $56 - 3x \geq 9$; $\begin{cases} 2x + 3 < x - 1 \\ 3x - 2 > 2x + 1 \end{cases}$

Intervalos

Las soluciones de sistemas inecuaciones de la forma $a<x<b$, $a\leq x<b$, $a<x\leq b$ y $a\leq x\leq b$ permiten introducir las nociones de intervalo abierto (a, b), cerrado por la izquierda y abierto por la derecha [a, b), abierto por la izquierda y cerrado por la derecha (a, b] y cerrado [a, b]. Estos intervalos representan segmentos de la recta real en los que los extremos se incluyen o no según se utilicen corchetes o paréntesis.

Para extender la notación de intervalos a las desigualdades $a<x$, $a\leq x$, $x<b$ y $x\leq b$, se utilizan las notaciones (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$ y $(-\infty, b]$ respectivamente. No siempre se enfatiza lo suficiente la idea de que ∞ es una marca de "no acotación" y no es el símbolo de un número.

La noción de intervalo suele utilizarse para obtener distintas aproximaciones de un número irracional mediante la determinación de una sucesión finita de intervalos encajados que lo contienen, indicando la magnitud del error en cada intervalo considerado.

Dada la imposibilidad de expresar un número irracional mediante el sistema de notación decimal, sólo es posible obtener aproximaciones racionales de estos números, y la relación de orden permite expresar el error cometido en cada caso.

La existencia del sucesor

En un conjunto ordenado, la discusión acerca de la posibilidad de hallar un sucesor para un elemento pone de manifiesto características particulares del conjunto que ayudan a interpretar su estructura topológica.

En los conjuntos de números naturales y enteros, todo número posee un sucesor. En los conjuntos numéricos racionales y reales, no es posible determinar el sucesor de un elemento de cada conjunto (dado que son conjuntos densos).

La existencia de una biyección entre el conjunto **N** y el conjunto **Q** permite establecer una ordenación en este último, que da sentido a la expresión 'sucesor de un número racional cualquiera'. Sin embargo, esta ordenación no es compatible con la estructura algebraica de **Q** (por ejemplo, según esta relación, 1 precede a 2/3 y 1 precede a 1/3, sin embargo, 1+1 no precede a 2/3 + 1/3).

El análisis de esta cuestión conduce a la utilización de nociones como máximo o elemento mayor, mínimo o elemento menor, supremo o extremo superior, ínfimo o extremo inferior, cotas superiores y cotas inferiores.

Cuando se utiliza la notación de intervalos, es posible plantear cuestiones cuyas respuestas aludan a estas características. Por ejemplo, el intervalo $[0, \sqrt{2}]$ no tiene sentido en **Q** (es abierto en su extremo derecho), en cambio sí lo tiene en **R**.

La interpretación de un intervalo [a, b] en **N** o en **R** permite establecer algunas diferencias. Por ejemplo:

Si $[a, b] \subset$ **N**, su cardinal es b-a+1, y no tiene sentido hablar de la medida de [a,b].

Si $[a, b] \subset$ **R**, su cardinal es igual al cardinal de **R**, es decir, $\aleph_1$, y la medida de [a, b] es igual a $|b - a|$.

Dificultad del tratamiento de la completitud de R

En Secundaria se suele estudiar la relación de orden en **R**: la definición de cuándo un real es menor que otro y la compatibilidad de esta relación con las diferentes operaciones. Respecto de la caracterización del orden de **R**, es común que se trabaje la densidad (suele extenderse la densidad de **Q** a **R** sin más comentario), pero es más difícil que se defina el orden continuo. En este nivel, las nociones sólo pueden abordarse "intuitivamente". Una formulación de esta propiedad hace referencia a la noción de ínfimo, por ello creemos que debe plantearse en la escuela algunas de las nociones que figuran en el punto anterior.

Es difícil abordar formalmente en ese nivel la propiedad que caracteriza exclusivamente al conjunto **R**, a saber, ser un conjunto **continuamente** ordenado (o completitud). Hemos mencionado la dificultad conceptual que entraña este axioma como consecuencia de ser de segundo orden.

Para tratar de subsanar esta carencia, suele apelarse a la recta geométrica, y se afirma que mientras que el conjunto de números racionales deja 'huecos' o 'agujeros' en la recta, el conjunto de reales 'llena' la recta. Este tipo de afirmaciones se complementa con la representación en la recta de algunos números irracionales, como la longitud de la diagonal del cuadrado de lado unidad.

3.5.2.2. Criterio *Tipo de número*

La expresión 'tipo de número' aplicada a un número determinado remite frecuentemente al conjunto numérico (**N**, **Z**, **Q**, **I** ó **R**) al que este número pertenece. Sin embargo, no sólo se utiliza para dar información del conjunto numérico (alguno de los mencionados) al que pertenece. También se utiliza para dar información acerca de otras características del número, por ejemplo, podemos decir que se trata de un número *par, perfecto, algebraico, primo* o *decimal*. En esta sección describimos algunos tipos de números, con respecto al conjunto numérico al que pertenecen o a otras propiedades (por ejemplo, clasificación según el número de divisores).

Se ha mencionado la posibilidad de introducir **R** mediante un proceso de extensión de conjuntos numéricos (procedimiento genético), a partir del conjunto de naturales, o bien mediante una definición axiomática. Cualquier aproximación que se adopte, permite reconocer una cadena de inclusión de conjuntos numéricos, respectivamente $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. En 3.5.2.2.1 se describen estos conjuntos numéricos.

El conjunto de números reales es la unión de dos conjuntos numéricos disjuntos: racionales e irracionales. Las características de uno y otro pueden describirse desde diferentes puntos de vista:

1. Los racionales pueden expresarse como cociente de dos números enteros. Los irracionales no tienen esta propiedad.
2. Los racionales se pueden expresar como expresiones decimales finitas o infinitas periódicas. Los irracionales se expresan mediante expresiones decimales infinitas no periódicas.
3. Los racionales se pueden expresar como fracciones continuas finitas. Los irracionales se expresan mediante fracciones continuas infinitas.

La clasificación anterior de los números reales en números racionales y números irracionales no es la única que admite **R**. Atendiendo a otros criterios de clasificación, es posible expresar al conjunto de números reales **R** como unión de conjuntos disjuntos que no coinciden con **Q** e **I**. Estas clasificaciones diferentes se desarrollan en 3.5.2.2.2.

En 3.5.2.2.3 se describen clasificaciones de los números relacionadas con la divisibilidad, como las clasificaciones de los enteros en primos y compuestos y en pares e impares.

Por último, en 3.5.2.2.4 se mencionan las clasificaciones de los números relacionadas con la finitud y la infinitud. Se describen en este punto los ordinales y cardinales finitos e infinitos.

3.5.2.2.1. Conjuntos numéricos

El objetivo de este punto es describir desde el punto de vista matemático los conjuntos numéricos incluidos en **R**, así como los números hiperreales. Un número se define como un elemento de un conjunto que posee ciertas propiedades. (Diccionario de Matemáticas, Bouvier y George, 1984): "Así es como se han definido los conjuntos **N**, **Z**, **Q**, **R** o **C**, cuya construcción se hace por etapas sucesivas a partir del conjunto **N** de enteros naturales" (p. 581).

Esta definición, surgida en un contexto estructuralista, enlaza difícilmente con cualquier noción intuitiva de número. Badiou (1990, p. 18) considera que en el pensamiento moderno la idea de número se ha intentado explicar mediante tres vías. La definición del párrafo anterior es específica de la "vía conjuntista o «platónica»" de Dedekind, Cantor o Zermelo, que "determina el número como caso particular de la jerarquía de conjuntos" (Badiou, 1990; p. 18). Otra vía filosófica considerada por este autor es la "logicista" de Frege y Russell, para la que el número "es un rasgo universal *del concepto*, deducible de principios absolutamente originarios". Finalmente, describe la "vía formalista" de Peano y Hilbert, que considera al número como un sistema de operaciones regladas, especificadas por los axiomas de Peano. Estas tres vías constituyen aproximaciones específicamente matemáticas; en 3.5.2.3 describimos una aproximación vía magnitudes a la idea de número.

En este punto, situados en la vía conjuntista, analizaremos algunas características del conjunto de números reales, que constituye la herramienta básica del actual Análisis clásico. Su carácter continuo marca una diferencia fundamental con los conjuntos estrictamente incluidos en él.

La estructura del conjunto de números reales y las propiedades que verifica se cotejan con la de los otros conjuntos numéricos en la tabla 3.2. La descripción consiste en los siguientes ítems:

- Estructura algebraica de la que se dota a estos conjuntos.
- Génesis de cada conjunto numérico (diferentes construcciones elaboradas para cada conjunto o definición axiomática).
- Limitación de cada conjunto numérico: ecuación que no tiene solución en el conjunto, y que tiene solución en el conjunto numérico que resulta de incorporar nuevos elementos al conjunto dado.
- Cardinal del conjunto.
- Relación de orden: sistema que cada conjunto numérico constituye con la relación de orden '<'.

Tabla 3.2: Algunas características de los conjuntos numéricos

Conjunto Numérico	Estructura Algebraica	Génesis	Limitación: ecuación que no tiene solución.	Cardinal	Orden
N	(**N**, +) Monoide conmutativo. (N, .) Monoide conmutativo.	♦ Sistema axiomático de … Newmann.	Si **a**, **b** son naturales, con **a** …	$\aleph_0$	♦ (**N**, <) … ma bien …enado.
Z	(**Z**, +, .) Anillo conmutativo unitario.	♦ Relación de equivalencia en el conjunto NxN. ♦ Incorporar nuevos elementos a N.	Si **a**, **b** son enteros, y **b** no es múltiplo de **a**: $\mathbf{a} . \mathbf{x} = \mathbf{b}$	$\aleph_0$ Numera-ble	♦ (**Z**, <) sistema simplemente ordenado.
Q	(**Q**, +, .) Cuerpo conmutativo.	♦ Relación de equivalencia en el conjunto **Z** x **Z**-{0}.	Para **n** > 1 y para **a** racional que no es potencia enésima perfecta: $\mathbf{x}^n - \mathbf{a} = 0$	$\aleph_0$ Numera-ble.	♦ (**Q**, <) sistema densamente ordenado
R	(**R**, +, .) Cuerpo conmutativo.	♦ Sucesiones fundamentales. ♦ Cortaduras de Dedekind. ♦ Intervalos encajados. ♦ Definición axiomática.	Para **n** par y **a**, **b** reales con $\mathbf{b} < \mathbf{a}$: $\mathbf{x}^n + \mathbf{a} = \mathbf{b}$	$\aleph_1$ No numerable.	♦ (**R**, <) sistema continuamen-te ordenado.
R*	Cuerpo ordenado.	♦ Definición axiomática. ♦ Ultrapotencia del sistema de números reales.	Para **n** par y **a**, **b** reales con $\mathbf{b} < \mathbf{a}$: $\mathbf{x}^n + \mathbf{a} = \mathbf{b}$	No numerable	♦ Sistema ordenado no arquimediano

3.5.2.2.2. Otras clasificaciones de números reales

Números constructibles y números no constructibles

Para definir número real constructible es necesario considerar la biyección entre números reales y puntos de la recta. Aceptando que, fijados un origen y una unidad, a cada número real le corresponde un punto sobre la recta y recíprocamente, es posible clasificar los puntos de la recta en puntos constructibles con regla y compás y puntos no constructibles.

Siendo P un plano euclidiano y β un subconjunto finito de P que tiene al menos dos elementos, se dice que el punto M de P es constructible con regla y compás a partir de β si existe una sucesión finita de puntos de P terminando en M: M_1, M_2, ..., M_n=M tal que para i = 1,2, ...n, M_i es un punto de intersección de dos rectas, de una recta y un círculo o de dos círculos (Carrega, 1981).

Las rectas y círculos se obtienen con la ayuda del conjunto

$E_i = \beta \cup \{ M_1, M_2, ..., M_{i-1} \}$de la siguiente forma:

- cada recta pasa por dos puntos distintos de E_i

- cada círculo está centrado en un punto de E_i y tiene por radio la distancia entre dos puntos de E_i.

Las consideraciones anteriores permiten definir **número real constructible**. A partir de β= {O, I} se obtiene el sistema de referencia ortonormal (O, I, J) habitual. Un número real es constructible si es una de las coordenadas en el sistema (O, I, J) de un punto constructible.

Es posible demostrar que el conjunto de números reales constructibles ***C*** constituye un subcuerpo de **R**.

Una condición necesaria y suficiente para que un número real sea constructible es que sea algebraico y su grado (el grado del polinomio sobre **Q** del que constituye una raíz) sea una potencia de 2. Así, los números $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$ son constructibles; en cambio $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt[5]{3}$ no lo son. Se cumple que **Q** $\subset$ ***C*** (obviamente, por ser **Q** el menor subcuerpo de **R**); ***C*** $\cap$ I $\neq \emptyset$; ~***C*** $\subset$ I (Se designa con ~***C*** al conjunto de números reales no construibles).

Números algebraicos y números trascendentes

Los números reales algebraicos son, por definición, las raíces de un polinomio de grado n con coeficientes racionales. Los números reales no algebraicos se denominan trascendentes. Ejemplos:

Números algebraicos: $\sqrt[3]{7}$ (raíz de $p(x) = x^3 - 7$), $\pm\sqrt{2}$ (raíces de $p(x) = x^2 - 2$)

Números trascendentes: π; e; ln3.

El conjunto de números algebraicos **A** constituye un subcuerpo de **R** y se verifica que: ***C*** $\subset$ **A**, **A** $\cap$ **I** $\neq \emptyset$ y ~ **A** $\subset$ **I.** Los conjuntos **A** y **R** tienen estructura de cuerpo real cerrado; es decir, se trata de cuerpos conmutativos que verifican los siguientes axiomas:

- el elemento –1 no puede ser escrito como suma de cuadrados de elementos del cuerpo,
- todo elemento positivo del cuerpo tiene una raíz cuadrada, y
- todo polinomio definido sobre el cuerpo, de grado impar, tiene al menos una raíz en él.

Artin y Schreir han demostrado que **A** y **R**, a pesar de no ser isomorfos entre sí (el cardinal de **A** es igual al de **N**, que es diferente del cardinal de **R**) son, no obstante, equivalentes desde el punto de vista algebraico (Sinaceur, 1992).

Números computables y números no computables

Un número real se denomina computable (o recursivo) si se conoce un algoritmo que permita obtener en un número finito de pasos cualquier cifra que se desee de su desarrollo decimal. Cuando no existe tal algoritmo, el número real se denomina no computable.

El conjunto de números computables **CM** con la suma y el producto usuales tiene estructura de cuerpo conmutativo. Se verifica que $\mathbf{A} \subset \mathbf{CM}$, $\mathbf{CM} \cap \mathbf{I} \neq \varnothing$ y $\sim \mathbf{CM} \subset \mathbf{I}$ (designando con $\sim$ **CM** el conjunto de números reales no computables).

Distintos criterios de clasificación de números

Las diferentes clasificaciones de números reales hasta aquí descritas se representan en la figura 3.6.

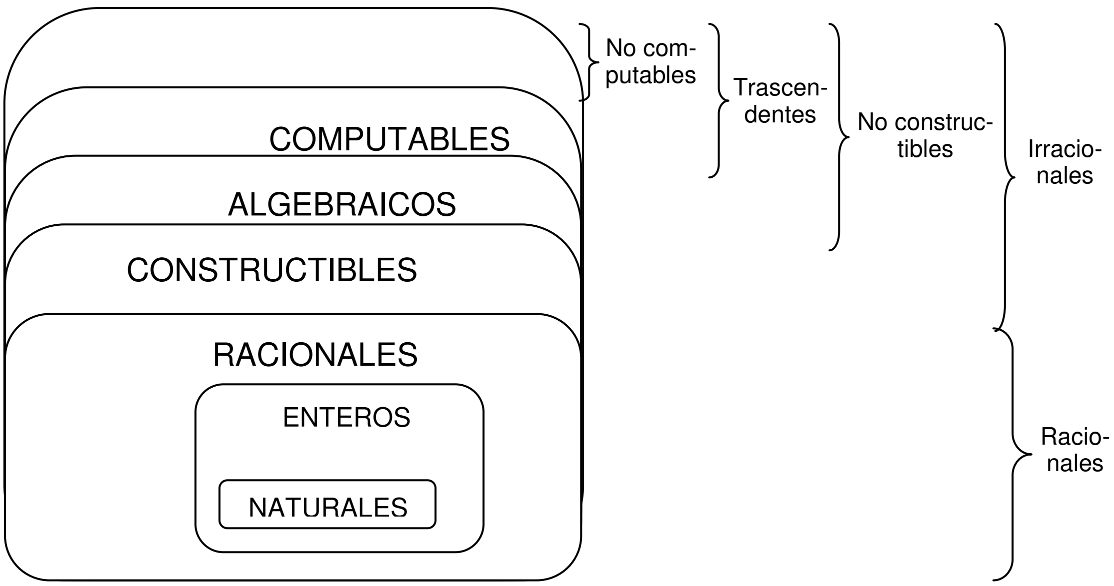


Figura 3.6: Organización de las clasificaciones de números reales analizadas en 3.5.2.2.2

En secundaria se manejan todos los racionales y algunos irracionales (constructibles, ver tabla 3.1), algebraicos ($\sqrt[3]{2}$) y algunos computables (0'1234567..., π, *e*).

3.5.2.2.3. La divisibilidad como criterio de clasificación

La relación de divisibilidad en el conjunto de números enteros se define para toda pareja x e y, por: $x|y$ si y solamente si x es un divisor de y. Existen diversas clasificaciones de los números enteros que proceden de la definición de divisor y de sus propiedades.

Un número primo es un natural que posee exactamente dos divisores: 1 y el mismo número. Ejemplos: 7, 83, 113. Un número natural es compuesto cuando no es primo. Ejemplos: 125, 1452.

Considerando un entero k cualquiera, distinto de –1, 0 y 1, es posible clasificar todos los enteros según sean o no múltiplos de k. En el caso de k = 2, se obtiene la clasificación de los enteros en pares e impares. Un entero es par cuando es divisible por dos, es decir, es un número de la forma 2n, donde n es entero. Un número es impar cuando no es par, es decir, es de la forma 2n+1, donde n es entero.

Es posible establecer en el conjunto de enteros una partición en clases según la definición de congruencia módulo n. Dos enteros a y b son congruentes módulo n (siendo n natural) cuando a-b es múltiplo de n y se expresa: $a \equiv b$ (mód n). Por ejemplo: $3 \equiv -8$ (mód 11). Para cada natural n, del conjunto de números enteros se obtienen n clases disjuntas (los posibles restos al dividir por n). Esta definición puede generalizarse a los números reales: dos reales a y b son congruentes módulo $\alpha \in \mathbf{R}$ si existe $k \in \mathbf{Z}$ tal que $a - b = k\alpha$. Aunque no se estudian explícitamente en Secundaria, se usan para describir las razones trigonométricas de "ángulos que difieren en 2π" y en la periodicidad de las funciones trigonométricas.

Dado un número natural n, se designa con Z[1/n] al conjunto cuyos elementos pueden expresarse mediante una fracción del tipo a/n^t, donde a es entero y t natural. Cuando n =2, 3 o 10, los elementos de Z[1/n] se denominan números diádicos, triádicos o decimales respectivamente.

3.5.2.2.4. Los números finitos y los números transfinitos

La Aritmética transfinita (esto es, el estudio de las propiedades del cálculo con ordinales y cardinales transfinitos) fue iniciada por Cantor. Aquí se recogen algunos conceptos fundamentales.

Se define *ordinal* como un conjunto que verifica las siguientes propiedades: a) es transitivo (es decir, todo elemento del conjunto a la vez está incluido en el mismo) y b) todos sus elementos son transitivos. Ejemplo de ordinal:

$D = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ pues:

a) $\varnothing \in D$ y $\varnothing \subset D$

$\{\varnothing\} \in D$ y $\{\varnothing\} \subset D$

$\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in D$ y $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \subset D$

b) $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ y $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ son transitivos.

El conjunto D del ejemplo se representa por 2. Así, todos los números naturales pueden identificarse con un ordinal: son los ordinales finitos. Estos ordinales finitos se caracterizan porque tienen sucesor: por ejemplo, el ordinal sucesor de D = 2 se obtiene como el conjunto que resulta de añadir a los elementos de D el mismo conjunto D como elemento, es decir, si se designa por T al sucesor de D resulta:

$T = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\} = 3$

Existen ordinales infinitos: son los ordinales que no poseen sucesor (la existencia de tales conjuntos es axiomática). Partiendo del ordinal de **N** provisto de su buen orden usual, se obtiene el conjunto designado habitualmente por $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$. Este es el primer ordinal infinito. A partir de aquí se obtienen otros ordinales infinitos (denominados transfinitos):

$\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., \omega\}$

$\omega + 2 = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., \omega, \omega + 1\}$

Se define *cardinal* de un conjunto A al ordinal más pequeño equipotente con A. Por ejemplo, el cardinal del conjunto **N** es ω (se designa habitualmente por $\aleph_0$); los ordinales $\omega + 1$ y $\omega + 2$ también son equipotentes con **N**, pero ω es el menor de todos (en el sentido de que inicia la sucesión de transfinitos).

Dos conjuntos tienen igual cardinal si y sólo si son equipotentes. Los cardinales finitos son los naturales y el cardinal de un conjunto finito es el número de sus elementos. Los cardinales infinitos (como $\aleph_0$) se denominan transfinitos.

Un conjunto es numerable bien si es finito o bien si es equipotente con el conjunto de números naturales. Son ejemplos de conjuntos numéricos numerables: enteros, pares, impares, racionales. La correspondencia entre **N** y cada conjunto numerable permite utilizar los números naturales como etiquetas de los elementos del conjunto numerable.

Es posible demostrar que el conjunto de números reales no es numerable (Apostol, 1996). El cardinal del conjunto de números reales se designa por $\aleph_1$ o c.

La hipótesis del continuo, enunciada por G. Cantor, afirma que no existe ningún conjunto cuyo cardinal esté comprendido entre $\aleph_0$ y $\aleph_1$. En 1963 Cohen demostró que esta proposición es indecidible: si la teoría de conjuntos es no contradictoria, la hipótesis del continuo o su negación pueden añadirse como axioma manteniéndose, en ambos casos, la consistencia de la teoría (Davis y Hersh, 1989).

En Secundaria estos conceptos no se trabajan. Desde el nivel primario se hace notar que el conjunto **N** tiene infinitos elementos, aunque no se habla del cardinal de dicho conjunto. La única infinitud que se maneja es la correspondiente al símbolo '∞', que suele introducirse con la notación de intervalos, y se emplea posteriormente en el concepto de límite.

3.5.2.3. Criterio *Fenomenología*

En esta sección describimos algunas cuestiones relacionadas con la utilización de los números reales. Aunque el título de la sección remite a la fenomenología de Freudenthal, no realizaremos aquí un estudio sistemático de los fenómenos que el número real organiza, al estilo de este autor.

Hemos mencionado en 3.3 que Freudenthal considera que en la enseñanza la constitución de objetos mentales es una meta más importante que la adquisición de conceptos. Un objeto mental está bien constituido cuando permite dar cuenta del mayor campo de fenómenos organizados por el concepto en cuestión. En esta sección abordamos algunos aspectos de la organización de los fenómenos por el número real.

Freudenthal afirma que el concepto de número permite organizar el fenómeno de la cantidad (Freudenthal, 1983; p. 28). Nosotros extendemos esta afirmación para afirmar que *el número real permite organizar el fenómeno de la cantidad continua.* El adverbio o adjetivo *cuanto* encabeza (incontables) oraciones interrogativas cuyas respuestas exigen la utilización de un número. Cuando esas preguntas remiten a fenómenos continuos (físicos o matemáticos), el número es real.

Desde el punto de vista matemático, la construcción del continuo aritmético a finales del siglo XIX fue inducida por la necesidad de fundamentación del análisis. Por esta razón, una utilidad básica del sistema de números reales se encuentra en el seno de las matemáticas. Truss (1997; p.95) analiza diferentes razones que justificarían la necesidad de extender y 'completar' el conjunto de números racionales, y afirma: "Tratemos de capturar la intuición, sin duda algo vaga, de que **R** debería ser en algún sentido 'continuo', o que no debería tener 'agujeros'. Aunque hay muchas formulaciones equivalentes de esto, en nuestra visión la hipótesis más inmediatamente plausible, que realmente fuerza a realizar la extensión de **Q** a **R** es el 'teorema del valor medio'".

Truss escoge la función $f(x) = x^2 - 2$. Como $f(0) = -2$ y $f(2) = 2$, el teorema asegura que debe existir un x del dominio de la función que verifique $f(x) = 0$, lo cual conduce a hallar x tal que $x^2 = 2$, ecuación que ningún número racional satisface. "Por lo tanto la intuición geométrica de que la curva corta al eje x fuerza a realizar una extensión adecuada de **Q** para incluir $\sqrt{2}$ (y muchos otros puntos)" (p. 96). Este ejemplo muestra la necesidad de construcción de la teoría de los números reales desde el punto de vista matemático, lo que se considera aquí su utilidad 'interna'.

También desde un punto de vista matemático consideramos la recta geométrica como un fenómeno matemático explicado por el número real. A partir de un axioma se postula la existencia de una biyección entre números reales y puntos de la recta. Las construcciones con regla sin graduar y compás son utilizadas para llevar a cabo la asignación de números a puntos de la recta.

Desde el punto de vista físico el conjunto de números reales constituye el recorrido de una función: la medida de magnitudes[10]. Según Carnap (1966; p.62), sólo es posible dotar de significado a una magnitud cuando se describe su proceso de medida. En el siguiente punto estudiaremos tres nociones íntimamente implicadas en la afirmación anterior: magnitud, cantidad y medida. La dificultad del estudio reside en que estos términos tienen significados específicos en tres ámbitos diferentes: lenguaje cotidiano, física y matemática. Lo abordaremos con el único objetivo de comenzar a estudiar de qué manera los números reales intervienen en la explicación de los fenómenos continuos. Se trata de recoger algunas ideas que atañen al desarrollo de una fenomenología del número real.

Haremos hincapié en la longitud, dado que la biyección entre números reales y puntos de la recta se apoya en esta magnitud (al menos en el medio escolar). En lo que respecta a la longitud desde el punto de vista matemático, Freudenthal dedica el primer capítulo de su “Didactical Phenomenology of Mathematical Structures” al desarrollo de una pura fenomenología y de una fenomenología didáctica de esta estructura matemática. Para ello, en primer lugar estudia los fenómenos que la longitud, como estructura matemática, permite explicar, y en segundo lugar describe algunas cuestiones relacionadas con la fenomenología didáctica de la estructura.

En un nivel superior, dentro de las matemáticas, la longitud es un fenómeno explicado a su vez por otra estructura matemática: el sistema de números reales. “Así en matemáticas se asciende a los niveles superiores: la abstracción continuada da un aspecto similar a los fenómenos bajo un concepto –grupo, cuerpo, espacio topológico, deducción, inducción, etc.” (Freudenthal, 1983; p.28). La descripción matemática de la magnitud (y en particular, de la longitud) nos interesa en 3.5.2.3.1 desde el punto de vista de fenómeno matemático explicado por el número real.

En la figura 3.7. resumimos los fenómenos explicados por el número real mencionados en esta introducción.

[10] Esta cuestión es discutida en física. Por ejemplo, en Kyburg (1997) se defiende la idea de que el recorrido de la función magnitud es el conjunto de cantidades. Seguimos a Carnap que mantiene que el recorrido es el conjunto de números reales.

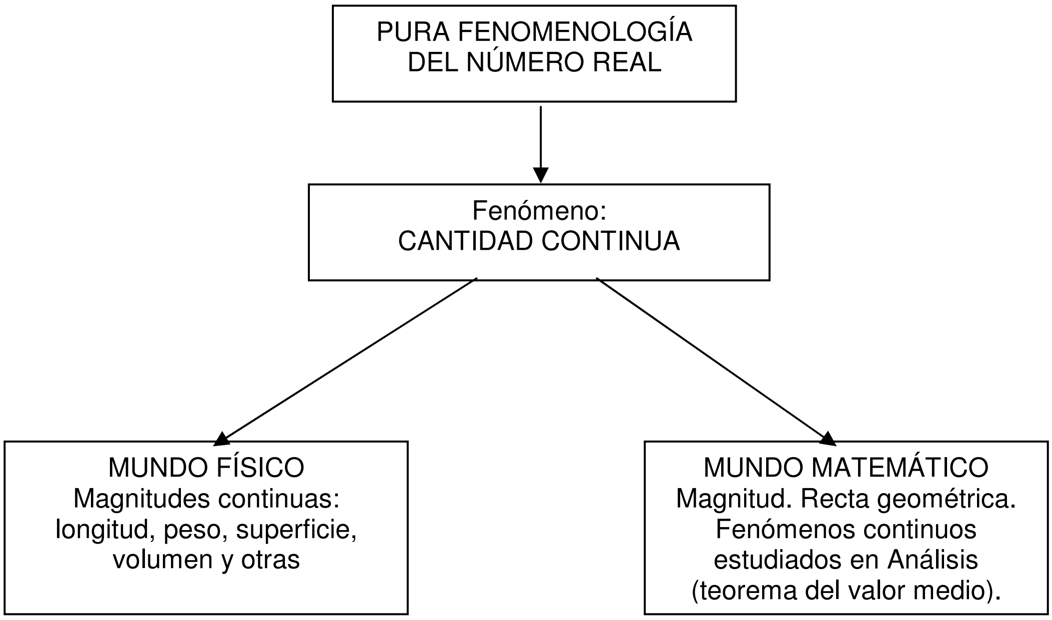


Figura 3.7: Algunos fenómenos explicados por el número real

En 3.5.2.3.2 comentaremos algunas cuestiones relacionadas con el descubrimiento de cantidades inconmensurables. Esta cuestión, como una primera aproximación a la fenomenología histórica del número real, permitirá constatar en cierto sentido las conclusiones del punto 3.5.2.3.1.

Finalmente, abordaremos brevemente algunos aspectos relacionados con el tratamiento escolar de la medición de magnitudes físicas, en particular algunas dificultades escolares detectadas por diversos investigadores relacionadas con la medición de magnitudes continuas. En este caso se trata de una primera aproximación a la fenomenología didáctica del número real.

3.5.2.3.1. Magnitud, cantidad y medida

Se estudian en esta sección los significados del término magnitud y de otros dos íntimamente ligados con él: cantidad y medida.

Los tres términos son ampliamente usados en distintos ámbitos. Magnitud, cantidad y medida tienen un significado específico en ciencias como Física y Matemática, y son habituales en la vida cotidiana. Después de observar ejemplos de uso de estos términos u otros relacionados en la vida cotidiana, se buscará su significado en Matemática y en Física.

Algunos términos del lenguaje cotidiano

En el lenguaje cotidiano se utiliza una extensa variedad de términos para referirse a las cantidades de magnitudes.

En el apartado 3.4. hemos descrito los tipos de lenguaje considerados por Carnap: *cualitativo* o *precuantitativo* y *cuantitativo*. “El lenguaje cualitativo está restringido a predicados (por ejemplo: ‘el pozo es profundo’), mientras que el lenguaje cuantitativo introduce los llamados ‘functor symbols’, esto es, símbolos para funciones que tienen valores numéricos” Carnap (1966; p.59).

En la tabla 3.3 figura una lista de términos correspondientes al catálogo[11] de *cantidad* del Diccionario de Uso del Español de M. Moliner. Los términos de esa lista son utilizados frecuentemente en el lenguaje cotidiano y la utilización de algunos de ellos en la descripción de fenómenos físicos puede considerarse como lenguaje ‘cualitativo o precuantitativo’ en el sentido de Carnap (por ejemplo, ‘hoy hará bastante menos calor que ayer’).

Cuantía, cuantidad, cuánto, suma, un tanto. Parte, porcentaje, porción, tanto por ciento. Pico. Unidad. Aproximada, negativa, positiva, redonda. Acuantiar, alcanzar, ascender, aumentar, disminuir, hacer, importar, llegar, montar, remontarse, subir, sumar. Tasar. Función, incógnita, resultado. Doblería, dosis, ración, toma, tomadura. Bocado, bocanada, brazada, brazado, capada, capillada, carga, carretada, cucharada, dedada, haldada, manada, miaja, paletada, pellizco, porción, pulgarada, puñado, puño, ración, sartenada, sombrerada, sorbo, trago, viaje». V. para cantidades de lo que cabe en ciertos recipientes, los nombres de los recipientes; y para cantidades o medidas particulares de ciertas cosas, el nombre de estas cosas. «Bastante, excesivo, grande, insignificante, insuficiente, mayor, mediano, menor, mucho, pequeño, poco, suficiente. Alrededor de, aproximadamente, casi, cuan, harto, más, a lo más, cuando más, cuanto más, mientras más, menos, a lo menos, cuando menos, por lo menos, mucho, cuando mucho, nada, en números redondos, poco, por poco [muy poco], tan, tanto, por término medio. En comparación, en proporción, relativamente. Cuenta. Dimensión. Magnitud. Medir. Miaja. Número

Tabla 3.3: Catálogo del término *cantidad* en el diccionario de M. Moliner.

Los términos y expresiones de esta lista no exhaustiva, permiten desenvolverse hasta cierto punto en la vida cotidiana. Un rasgo característico del lenguaje cotidiano es la utilización de expresiones en las que no se menciona la

[11] “Catálogos: forma afija de la raíz del lema y afijos o raíces cultas de significado relacionado; palabras o expresiones de significado parecido o relacionado con el de la palabra del lema; antónimos fundamentales; lista de otros catálogos relacionados.” (del Diccionario de M. Moliner)

unidad de magnitud, aunque está implícita en el contexto. Por ejemplo: 'medio de chuletas', o '2 de arroz'

La lista de la tabla 3.3 incluye términos que permiten evitar también cualquier referencia numérica. Por ejemplo:

'Había *mucha* gente en el cine'.

'Se recomienda un *puñado* de arroz por persona'.

'Hay muy *poca* distancia entre las salidas de la circunvalación correspondientes a Méndez Núñez y Recogidas."

El significado de las frases anteriores queda perfectamente definido en un contexto que el interlocutor implícitamente comprende, por lo cual no hay necesidad de mayores precisiones en cuanto a la cantidad de gente que había en el cine, o a la cantidad de arroz por persona. En el primer caso, porque la información de cuánta gente había en el cine probablemente no sea relevante frente al énfasis del hablante con respecto, por ejemplo, a la calidad de la película o a la incomodidad experimentada; en el último caso, porque 'un puñado' tiene un grado de precisión suficiente.

Sin embargo, hay casos que exigen una mayor precisión, dependen de la situación que se está abordando, y requieren la utilización de conceptos cuantitativos, es decir, de magnitudes. Las cantidades de magnitudes se expresan mediante números y unidades. Un buen uso de las magnitudes es un indicador del lenguaje cuantitativo, pero no debe olvidarse que también las magnitudes se integran en el lenguaje cualitativo. Frases como 'España produce muchas toneladas de aceitunas' o 'Lleve 3 y pague 2, ahorre un 33%' son ejemplos de esto.

Magnitud, cantidad y medida en el diccionario

En la tabla 3.4 se transcriben diferentes acepciones de estos términos en dos diccionarios de uso corriente.

Estas definiciones están implícitas en ámbitos de uso un poco más precisos que los descritos para el lenguaje cotidiano; concretamente, la columna izquierda de la tabla 3.4 remite a campos especializados de conocimientos, como la Matemática o la Física, dando a entender que las descripciones se han extraído de estas ciencias. Cabe preguntarse si un lector de un buen Diccionario tendría medios para comprender los usos más técnicos que aquéllas reciben en el seno de éstas. Es posible que no, y por ello se tratará de precisar aún más estos conceptos.

Diccionario de la Lengua Española	Diccionario de María Moliner
"**Magnitud**: Fís. Propiedad física que puede ser medida; p. ej., la temperatura, el peso, etc.	**Magnitud**: Cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente; como la longitud, el peso, la velocidad o la luminosidad. ¤ Son también magnitudes el espacio y el tiempo.
Cantidad: 1. F. Propiedad de lo que es capaz de número y medida y puede ser mayor o menor que algo con que se lo compara. 1. Cierto número de unidades. **Cantidad Discreta**: Mat. La que consta de unidades o partes separadas unas de otras, como los árboles de un monte, los soldados de un ejército, los granos de una espiga, etc. **Cantidad Continua**: Mat. La que consta de unidades o partes que no están separadas unas de otras, como la longitud de una cinta, el área de una superficie, el volumen de un sólido, la cabida de un vaso, etc.	**Cantidad:** 1. Aspecto por el que se diferencian entre sí las porciones de la misma cosa o los conjuntos de la misma clase de cosas, por el cual esas porciones o esos conjuntos se pueden medir o contar. 2.Porción de una cosa, de cierta magnitud, peso o número: 'Esta es la cantidad de tela que necesitas. La cantidad de albúmina [de glóbulos rojos] que hay en la sangre'.
Medida: f. Acción y efecto de medir. Expresión del resultado de una medición. Cualquiera de las unidades que se emplean para medir longitudes, áreas o volúmenes de líquidos o áridos. **Medida Común**. Cantidad que cabe exactamente cierto número de veces en cada una de otras dos o más de la misma especie que se comparan entre sí.	**Medida** 1. Acción y efecto de medir. 2 Expresión numérica del resultado de medir una magnitud: 'Apuntar las medidas de la habitación. El sastre tiene mis medidas'. (V. referencias en «*medir».) 2. Objeto con ciertas dimensiones o capacidad que se toman como unidad, que se emplea para medir: 'Pesas y medidas'. (V. referencias en «medir» y en los nombres de las distintas magnitudes, «capacidad, longitud», etc., así como de las cosas que se miden: «aceite, vino», etc.)

Tabla 3.4: Significados de *magnitud*, *cantidad* y *medida* en dos diccionarios de uso corriente.

Magnitud, cantidad y medida en Matemáticas

Tal como se acostumbra en Matemáticas, la definición de magnitud y cantidad constituyen afirmaciones que identifican perfectamente los 'objetos o estructuras' con los que trabaja el matemático. "Una *magnitud* es un grupo (o semigrupo) aditivo y abeliano. A los elementos del grupo se les llama *cantidades* de la magnitud" (Abellanas, 1963; p.62). Son ejemplos de magnitudes la longitud, el área, la masa, el tiempo, la temperatura. "Una *magnitud escalar*[12] es un grupo ordenado (o semigrupo ordenado), aditivo y arquimediano" (Abellanas, 1963; p. 63).

"Se llama *medir* una magnitud relativa, M, a establecer un isomorfismo de M en un cuerpo K. Se llama *medir* una magnitud absoluta M a establecer un isomorfismo de M en un semicuerpo K. Al elemento de K homólogo del elemento x de M se le llama medida de x y se escribe: $z = \mu (x)$, siendo μ el isomorfismo de M en K. Ahora bien, para que un isomorfismo de M en K pueda llamarse propiamente una medida en el sentido estricto, es necesario que se cumpla, además, la siguiente condición: *El isomorfismo μ queda unívocamente determinado por un par de elementos homólogos*. Entonces, como K es un cuerpo (o semicuerpo) posee elemento unidad y se puede caracterizar el isomorfismo μ por el elemento u de M que cumple la condición: $1 = \mu (u)$.

El isomorfismo así definido por la condición [anterior] se *llama medida de la magnitud M respecto de la unidad de medida u*." (Abellanas, 1963; pp.72-73). Es frecuente el abuso de lenguaje consistente en identificar tal isomorfismo con su imagen; de este modo, los números reales se interpretan directamente como medidas de cantidades, como en S = 4 m^2.

Una magnitud escalar tiene la estructura de un cuerpo ordenado. Por lo tanto, es isomorfo al cuerpo de números reales. Abellanas concluye: "Por ello, el cuerpo de los números reales sirve de cuerpo universal para medir todas las magnitudes escalares, y poder, por consiguiente, relacionarlas."

En este enfoque al estilo de Bourbaki, decir que "la longitud es un ejemplo de magnitud" equivale a predicar de la longitud que constituye un grupo o semigrupo abeliano, ordenado y arquimediano. El matemático, en su abstracción, no ha de precisar todos los objetos con los que va a trabajar (en ocasiones los sobreentiende). Aquí no hay necesidad de discutir exhaustivamente esta cuestión, porque los únicos objetos que se desea medir son los segmentos de recta. Conviene, no obstante, recordar algunos convenios esenciales:

- El elemento neutro del semigrupo no corresponde a ningún segmento, sino a un punto de la recta; suelen usarse paráfrasis para evitar hablar de longitudes de puntos: "el segmento cuyo origen y extremo coinciden", o bien "el segmento nulo".
- La suma de segmentos (de la misma recta) está sujeta a la condición de que el extremo de un sumando coincida con el origen del otro (figura 3.4).
- Las cantidades de longitud iguales o distintas se asocian respectivamente con segmentos superponibles o no.

[12] Suele utilizarse el término *magnitud* en lugar de la expresión *magnitud escalar* en algunos textos matemáticos.

- Por último, se considera que cualquier segmento (excepto, lógicamente, el representante del elemento neutro) se puede asociar a la unidad.

¿Posee la magnitud longitud la propiedad arquimediana? Para Bachelard (1987; p.49) la respuesta es evidente e indiscutiblemente afirmativa: dados dos segmentos distintos cualesquiera, siempre debe ocurrir que la multiplicación del más pequeño por un número natural supere al más grande. "En aquello que concierne a la realidad tal como la captamos, en nuestra escala, la duda no nos roza. Siempre encontramos el medio de superar una magnitud mediante la adjunción de la unidad de medida a sí misma, en tanto que seleccionamos también esta unidad para que esa superación sea *rápida*". El proceso físico de medición se apoya en la finitud implícita en la anterior afirmación. Cuando alguien declara que un segmento mide 3'4 u.l. no hace más que apoyarse en la anterior creencia; se ha puesto "a medir" con la convicción de que obtendría su resultado en un número finito de pasos, en nuestro ejemplo, 7: 3, para la repetición de la unidad y 4 para la repetición de las décimas de esa unidad. La propiedad arquimediana, sin embargo, es más general que el acto de medición, como lo prueba el hecho, reconocido ya por los antiguos griegos, de que la diagonal del cuadrado no es conmensurable con el lado de éste, a pesar de que repitiendo 3 veces dicho lado se supere la longitud de la mencionada diagonal. A pesar de todo, el análisis no estándar y el enfoque de Veronese, permiten concebir segmentos de longitud infinitesimal que no satisfacen la propiedad arquimediana, si bien es cierto que hasta la fecha (al menos, que sepamos) no se ha podido "visualizar" dichos segmentos. "Examinando el continuo tal como nos es dado por la observación directa, cruda, el axioma arquimediano es válido para dos objetos rectilíneos, porque sin que importe cómo son, incluso si no podemos construir en la práctica un múltiplo de uno más grande que el otro, podríamos considerar una *n*-ésima parte de estos dos objetos suficientemente pequeña tal que una verificación del axioma es posible para estas partes, y por lo tanto para los objetos mismos. *Sin embargo la extensión de este axioma al espacio completo ilimitado no es igualmente justificable*" (Veronese, 1994; p.179).

Magnitud, cantidad y medida en Física

Los fenómenos de la naturaleza se describen mediante conceptos cuantitativos (Carnap, 1966; p.62). Para que sea posible realizar tal descripción es preciso desarrollar procedimientos de medida que permitan obtener valores numéricos. "Por lo tanto, definimos un concepto físico describiendo cómo medirlo y podemos llamar a tal definición una *definición operacional*." (Carman, 1972).

Las definiciones de la tabla 3.5 han sido tomadas de Ercilla et al. (1993).

Magnitud es todo aquello susceptible de medida. Ejemplos: la longitud, la masa, el tiempo, son magnitudes, ya que pueden medirse.
Medir es comparar dos magnitudes de la misma especie, una de las cuales se toma como unidad.
Cantidad de una magnitud es el número de unidades a que es equivalente dicha magnitud. Ejemplo: el tiempo es una magnitud; siete años es una cantidad.
“La expresión de una medida es un número concreto, es decir, un número (veces que la cantidad contiene a la unidad) seguido del nombre o expresión de la unidad empleada en la medida (500 kilómetros; 26 metros; 2 milímetros”.

Tabla 3.5: Significados de magnitud, medida y cantidad en un manual de física

Bachelard propone un modo de relacionar la noción de magnitud con la medida. “Una clasificación puramente ordinal de los estados sucesivos de una misma magnitud dejaría escapar un carácter fundamental ya claro en la intuición y en la experiencia común: su aptitud para la combinación aritmética. En efecto, una vez que se ha escogido la unidad de medida y se han medido los objetos, se puede practicar sobre los símbolos que sustituyen a los objetos todas las operaciones aritméticas directas (adición, multiplicación, elevación a la potencia) en cualquier orden y en cualquier número que sea, y jamás las conclusiones encontrarán un defecto, la experiencia de verificación siempre legitimará el cálculo” (Bachelard, 1987; p.47). Este párrafo de Bachelard se corresponde con una de las ventajas que Carnap (apartado 3.4) menciona para el lenguaje cuantitativo: la posibilidad de predecir los fenómenos a partir de las herramientas que proporciona la matemática.

Si la longitud es una noción matemática, la distancia es una noción física (por supuesto, también incorporada en la matemática) que “amplía” las posibilidades fenomenológicas de la primera noción. Se habla de distancia en tres supuestos reducibles a longitudes de segmentos: la longitud de un segmento (propiamente dicha), la distancia entre dos puntos y el espacio (rectilíneo) recorrido por un punto desde una posición inicial a otra final.

Conviene observar que el físico y el matemático, al igual que muchos profesionales (ebanistas, fontaneros, albañiles, entre otros), dominan conceptual y procedimentalmente la propiedad de la longitud de ser una magnitud extensiva (Figura 3.4.c).

Los números reales y las medidas de magnitudes

El estudio de los términos magnitud, cantidad y medida en diferentes ámbitos (cotidiano, matemático y físico) se ha realizado a partir de la siguiente afirmación: el número real permite organizar el fenómeno de la cantidad en las magnitudes continuas. En este punto se trata de explicar esta afirmación a la luz de las cuestiones descritas en cada ámbito.

En el lenguaje cotidiano se utilizan términos imprecisos para referirse a cantidades de magnitud; sin embargo ello no supone la imposibilidad de expresarse o de entenderse. Se han consultado dos diccionarios, observándose en un caso (Diccionario de la Lengua Española) que se toman definiciones provenientes de la Física, y en el otro (Diccionario de María Moliner) que las definiciones son muy vagas (especialmente las correspondientes a magnitud y cantidad).

Los casos (como los fenómenos estudiados por la Física) que exigen una mayor precisión, requieren la utilización de magnitudes cuyas cantidades se expresan mediante números y unidades. "La trascendencia de cualquier ley física es que funcione, y es el aspecto cuantitativo o numérico de la ley lo que nos permite determinar si ella ciertamente funciona. [...] Cualquier magnitud que no puede ser medida de alguna manera, incluso indirectamente por cálculos de [magnitudes] medibles, ciertamente no puede tener algún significado físico" (Carman, 1972).

La longitud se considera desde el punto de vista matemático y físico una magnitud. El isomorfismo definido entre esta magnitud y el conjunto de números reales permite afirmar que, a partir de una cantidad de longitud considerada como unidad, es posible asignar a cualquier otra un número real positivo.

En la práctica, la exigencia de la Física de 'medir' una magnitud y en concreto, medir una longitud determinada, se satisface con el conjunto de números racionales. Sin embargo, desde que los griegos tropezaron con pares de segmentos inconmensurables (es decir, que no poseen unidad común de medida) se conoce la insuficiencia del sistema de números racionales para comparar pares de segmentos según su longitud (como el lado y la diagonal del cuadrado). Además, aunque una medición directa conduce siempre a un resultado racional, es muy fácil topar con cálculos que involucren alguna relación geométrica que, aunque sea muy sencilla, suponga utilizar números irracionales (por ejemplo, calcular la longitud de tejido necesario para cercar un cantero de 4m de diámetro). A los efectos de resolver situaciones de medición de longitudes, aunque en la práctica se utilicen números racionales, las fórmulas planteadas probablemente exijan la utilización de números irracionales. Estos números en los cálculos concretos serán reemplazados por aproximaciones racionales.

Los números reales permiten comparar dos segmentos de recta cualesquiera según su longitud. Ello se debe a la ausencia de 'agujeros' o 'huecos' de este conjunto numérico que, como afirmamos en la introducción, permite justificar los teoremas básicos del análisis. Sin embargo, dado que las mediciones reales son siempre aproximadas, sólo es posible hablar de una medición exacta desde un punto de vista ideal, cuando se realizan mediciones indirectas, conociendo una relación geométrica, o mediante construcciones con instrumentos geométricos (regla y compás ideales). Desde el punto de vista físico, la determinación de la longitud de un segmento es siempre aproximada.

Límite físico de la medida

La medida de una cantidad de una magnitud, respecto de otra tomada como unidad, supone la búsqueda de una parte alícuota entre ambas, de manera que sea posible expresar la primera como la segunda multiplicada por un número real. Cuando se trata de cantidades de magnitud conmensurables, es posible expresar una cantidad mediante la otra multiplicada por un número racional. Cuando se trata de dos cantidades inconmensurables (en las que no existe una cantidad que pueda cubrir, por iteración, las dos cantidades dadas) es necesario recurrir a los números irracionales.

La aceptación de los números irracionales como números permite extender *a priori* los procesos de medición a cantidades de magnitudes continuas. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que, en la práctica de la física, aunque se utilicen instrumentos de medición muy precisos, los resultados son siempre números decimales. Los números irracionales surgen como resultado de la aplicación de fórmulas matemáticas (por ejemplo, la longitud de la circunferencia, el volumen de un cilindro). El número irracional surge del estudio abstracto de relaciones entre cantidades mientras que, en la práctica concreta, se trabaja con números decimales.

3.5.2.3.2. El descubrimiento de cantidades inconmensurables

En la introducción (3.5.2.3.1) mencionamos que el teorema del valor medio es para Truss (1997) una de las razones más contundentes que fuerza a extender el conjunto **Q** al conjunto **R**. Esta razón, aunque moderna, no debe hacer sombra a otra razón que ha sido vislumbrada, al menos, desde la matemática griega: la existencia de pares de segmentos de recta inconmensurables entre sí. El descubrimiento de que los números naturales y sus razones no bastan para comparar dos segmentos cualesquiera significó una crisis intelectual y filosófica. Desde allí hasta la aceptación de los irracionales como números fue necesario un largo proceso en el cual el debate matemático se entrelazó con el filosófico y epistemológico.

La propia matemática genera métodos de demostración (en nuestro caso, la demostración por reducción al absurdo de la imposibilidad de expresar $\sqrt{2}$ como cociente de números enteros indica que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con el lado de éste; análogas consideraciones caben para “medir” la diagonal del pentágono regular con el lado de éste)[13]. La ‘irracionalidad’ se pone de manifiesto mediante una reflexión sobre relaciones métricas entre objetos geométricos analizadas con un razonamiento lógico y no en la manipulación de

[13] Como se puede constatar en Caveing (1996), la situación temporal del descubrimiento de algún caso de irracionalidad es una cuestión controvertida. Este autor comenta y matiza un debate referido a ese tema durante el período comprendido entre 1909 y 1915. Según Voghr, Euclides construyó realmente la teoría que supone una prueba general de inconmensurabilidad. Su interlocutor, Zeuthen, sostiene que partes enteras del tratado de Euclides son debidas a sus precursores.

objetos concretos (con la intención de medirlos o compararlos), como por ejemplo una vara de madera o un segmento de recta trazado sobre un trozo de papel.

De los griegos hemos heredado ese rasgo de la matemática de basarse en los resultados de un razonamiento frente a la manipulación de objetos concretos, en el desarrollo de una teoría. La inconmensurabilidad, que no puede comprobarse a partir de la manipulación concreta, es un ejemplo de la necesidad de trascender la manipulación física. El cambio radical es que ya no es posible fundamentar los resultados sobre hechos empíricos, se deben buscar explicaciones más allá de lo que se ve. Se convence por un proceso de razonamiento, sometido a determinadas reglas. La causa de la limitación de la manipulación concreta es la presencia de un proceso infinito.

Euclides define magnitudes conmensurables e inconmensurables en los siguientes términos: “Se llaman magnitudes conmensurables aquellas que se miden con la misma medida, e inconmensurables aquellas de las que no es posible que haya una medida común” (Euclides, L.X, Def.1). Ello supone enfocar la inconmensurabilidad desde el problema de la medida. Posteriormente, en la proposición X2 demuestra un método que conduce a determinar cuándo dos magnitudes son inconmensurables: “Si al restar continua y sucesivamente la menor de la mayor de dos magnitudes desiguales, la restante nunca mide a la anterior, las magnitudes serán inconmensurables” (Euclides, L.X, Prop. 2). “El carácter ilimitado del proceso [de medida], revela la existencia, en el seno mismo de la finitud del segmento, de una infinitud que, aún concebida como potencial, no puede pertenecer más que a un objeto ideal, que resulta definido como tal por ese mismo proceso. (Para un objeto empírico, el umbral de percepción se alcanza en un número finito de etapas).” (Caveing, 1984; p.31).

Es el proceso infinito explícito en la comparación de algunos segmentos según su longitud el que impone las limitaciones a la manipulación física.

3.5.2.3.3. Dificultades con la medida en el medio escolar

En la investigación llevada a cabo por Romero (1996) se pone de manifiesto la dificultad que tienen los alumnos en aceptar que una longitud finita (como la diagonal del cuadrado de lado unidad) tenga una representación mediante una expresión decimal infinita no periódica (1’4142136...) (dualidad magnitud finita/representación infinita). Esta autora también menciona la dificultad que tienen los niños en aceptar que en el plano físico concreto es imposible representar cantidades de magnitud irracionales.

La necesidad de especificar la unidad en los procesos de medición no siempre es reconocida por los escolares. Esta investigadora observó que este problema se agudiza cuando se está trabajando con números irracionales: “los alumnos, en principio, no tienen claro que el cuadrado de área correspondiente al número cuya raíz hay que representar en la recta ha de construirse con la misma unidad de medida de la recta" (p.446).

Carpenter et al.(1980) han observado que alumnos que terminan el nivel primario tienen una comprensión superficial de conceptos básicos de medida. Por ejemplo, se producían confusiones con respecto a la ubicación del 0 y el 1 de la regla al medir una longitud. Bessot y Eberhard (1983) también observaron dificultades en la medición de longitudes cuando el punto inicial de la longitud medida no se alineaba con 0.

Otras investigaciones realizadas con alumnos del nivel secundario (Hart, citado en Héraud, 1986) han observado dificultades relacionadas con la conservación de longitudes.

En el punto 3.5.2.2.1 mencionamos distintas vías del pensamiento matemático moderno utilizadas (con o sin éxito) para abordar la idea de número. Una aproximación diferente es la proveniente de las magnitudes. Esta última no permite obtener todos los números reales, aunque permite trascender **Q**. En efecto, algunos números irracionales pueden construirse geométricamente, o bien definirse como razones entre cantidades de longitud constructibles. La aproximación axiomática permite construir **R**, sin embargo, no puede trabajarse en Bachillerato. En este nivel pueden obtenerse, por ejemplo, $\sqrt{2}$ ó ϕ geométricamente, como cantidades de longitud, o como razones entre dos cantidades de longitud; π no puede construirse geométricamente como cantidad de longitud, aunque se define como razón entre dos cantidades de longitud (la longitud de la circunferencia respecto de su diámetro). Finalmente, muchos irracionales no se obtienen mediante esta aproximación (por ejemplo, el número *e*).

3.5.2.4. Criterio *Representación*

El criterio Representación pretende describir las representaciones más comunes utilizadas para escribir y nombrar los números reales. El término 'representación' alude, en todos los casos, a las representaciones externas de los números, es decir, a escrituras que permiten identificar en una actividad concreta (operación, descripción o situación problemática) números específicos. Ninguna representación permite, de hecho, identificar todos y cada uno de los números reales. Por ejemplo: (1) las fracciones de números enteros sólo permiten expresar los racionales; (2) la representación posicional finita en base diez sólo permite representar los números decimales.

Las diferentes representaciones hacen explícita alguna característica distintiva de los números.

Una numeración es un sistema de representación de números. Guedj (1998) afirma que las numeraciones (a las que clasifica en figuradas, habladas y escritas), además de representar números, tienen la función de calcular. En las numeraciones escritas, las cifras se combinan mediante procedimientos y reglas precisas para componer números. Los sistemas de numeración utilizados por las distintas civilizaciones han sido variados y se ha dado un paulatino progreso en cuanto a la economía de símbolos y a la posibilidad de representar números muy pequeños o muy grandes. El sistema de numeración de posición perfeccionado con la incorporación del cero constituye un progreso notable. La evolución de los sistemas de enumeración hasta llegar a los sistemas actuales está descrita en diversos lugares (Ifrah, 1987; Guedj, 1998; Asimov, 1998).

En los siguientes puntos destacaremos dos representaciones escritas de números reales: simbólica (cuando una cifra o un símbolo se utiliza para representar un número) y gráfica (los números se representan mediante gráficos o figuras).

La representación en la recta (que combina características de los dos tipos anteriores) se remite al apartado 3.6. La atención especial dedicada a esta representación radica en que constituye el contenido matemático sobre el que versa nuestra investigación.

3.5.2.4.1. Nombres de números

Las palabras utilizadas para expresar números reciben el nombre de numerales. Los numerales en nuestro idioma son designados de manera que sea posible expresar números a partir de otros numerales básicos. Por ejemplo, el número 'diez mil cuatrocientos cuatro' utiliza cuatro numerales (diez, mil, ciento y cuatro) combinados según reglas que permiten comprender y escribir con cifras el número considerado.

Los numerales básicos utilizados en nuestro idioma son, entre otros: cero, uno, dos, tres, ..., nueve, diez, veinte, treinta,..., cien, millar, millón, millardo, billón, trillón, etc. Éstos (y algunos más), combinados adecuadamente, permiten nombrar números en prácticamente cualquier situación. "Así pues, con menos de 30 nombres podemos denominar números de...¡55 cifras! Un buen rendimiento, a pesar de todo, [constituyen tan sólo] una gota de agua en el océano de los números, que no significa mucho más que una *giganea* (un millardo de años) ante la eternidad." (Guedj, 1998; p.32)

Para expresar los números menores que la unidad se utiliza el término décima y el sufijo –ésimo/a se aplica a otros numerales como mil o diez mil; el numeral ciento sufre una contracción pasando a cent, e incluso el término centésimo experimenta un apócope, pasando a céntimo.

3.5.2.4.2. Numeraciones simbólicas

En este punto se describen las representaciones de números reales mediante el uso de cifras o símbolos. Una característica distintiva del conjunto de números reales es la ausencia de un sistema único de representación mediante el cual podamos expresar cada número real. Esto supone una dificultad a la hora de abordar este conjunto numérico en la escuela.

Las tres primeras representaciones (numeración de posición, escritura fraccionaria y escritura icónica) son las que se utilizan frecuentemente en el medio escolar. Las últimas tres representaciones (fracción continua, polinomios y signos de sus derivadas y sucesiones) no se utilizan comúnmente en la escuela, sin embargo son utilizadas en la disciplina matemática pues permiten representar números reales que no pueden representarse mediante las tres primeras.

Numeración de posición

Principios de su organización

El sistema de numeración de posición se estructura en torno a un número natural mayor que 1 tomado como base. Una base es el número de unidades de determinado orden reunidas para formar una unidad del orden inmediatamente superior (Guedj, 1998). Las cifras indican los restos que resultan de agrupar en unidades de distintos órdenes.

Los sistemas de numeración utilizados más corrientemente son: binario (base 2), decimal (base 10), hexadecimal (base 16) y sexagesimal (base 60). Queda aún por explicar el sistema de base 20 utilizado por los mayas.

Si la base de un sistema de numeración es un natural b>1, el sistema consta de b cifras diferentes que, combinadas de forma adecuada, permiten componer una gran cantidad de números. Por ejemplo, las cifras del sistema binario son 0 y 1, y las del sistema decimal son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. El valor de cada cifra depende de la posición que la cifra ocupa en la escritura del número. Cada posición representa una determinada potencia de la base.

Por ejemplo, en el número $52'343434..._{(\text{diez})}$, la cifra 5 ocupa la posición de la decena(10^1), por lo tanto representa al número 50; la cifra 2 ocupa la posición de la unidad (10^0), por lo que representa el número 2, la cifra 3 ocupa la posición de la décima de la unidad (10^{-1}), por lo que representa al número 3/10 y la cifra 4 ocupa la posición de la centésima (10^{-2}) y así sucesivamente ($52,343434... = 5.10^1+2.10^0+3.10^{-1}+4.10^{-2}+3.10^{-3}+4.10^{-4}+...$).

Dada una base, cada número admite una representación única. Para representar un número real cualquiera en una base b, es necesario 'encajar' al real entre dos valores aproximados b-narios, de tal manera que se construyen dos sucesiones adyacentes de valores cada vez más aproximados al real, una por defecto y otra por exceso (Donnedu, 1976).

Los números irracionales admiten todos una representación infinita no periódica en cualquier base. En cuanto a los números racionales, admiten una escritura decimal finita o bien infinita periódica. La finitud o infinitud de la representación posicional de un número racional no es una propiedad intrínseca del número, sino que depende de la base utilizada. Observemos los siguientes ejemplos:

$1/2 = 0'5_{(10)} = 0'1111..._{(3)}$

$1/3_{(10)} = 1/10_{(3)} = 0'3333..._{(10)} = 0'1_{(3)}$

En general, un número racional α admite una escritura finita en una base *b* (siendo *b* natural) determinada si es posible expresar α como una fracción cuyo denominador es una potencia del número *b*, es decir, si existe p entero, tal que $\alpha = p/b^n$, siendo n natural.

El sistema de numeración decimal se ha difundido en casi todas las culturas, aunque otros sistemas suelen utilizarse con fines más específicos (los ordenadores utilizan el sistema binario). Existen otras escrituras de números, las cuales emplean o no números expresados en el sistema decimal.

El término 'decimal' en el medio escolar

Merecen especial atención los términos utilizados para nombrar las escrituras decimales de los números racionales e irracionales. Todos los números reales admiten una escritura decimal, que representa el número, o una aproximación del número (en el caso de los números irracionales). Esta escritura decimal se clasifica en cuatro tipos:

Números racionales:

- Escritura decimal exacta (corresponde a los números cuya parte decimal se constituye por un número finito de cifras).
- Escritura decimal periódica pura (corresponde a los números cuya parte decimal está constituida por un período).
-Escritura decimal periódica mixta (corresponde a los números cuya parte decimal está constituida por un número finito de cifras no periódicas, seguido de un período).

Números irracionales:

- Escritura decimal no periódica (corresponde a los números cuya parte decimal está constituida por infinitas cifras y no existe un periodo).

En el sistema escolar se hace hincapié en la distinción anterior, que se utiliza para establecer una diferencia entre los números racionales y los números irracionales, de modo que los alumnos puedan reconocer el tipo de número por su representación.

El adjetivo 'decimal' se emplea de modo impreciso. Centeno (1987) menciona la ambigüedad que caracteriza la expresión 'número decimal'. Por un lado, la palabra *número* suele acompañarse de un adjetivo que se refiere al conjunto numérico al que pertenece (natural, racional, real, etc.). En este sentido, 'decimal' significa que es un número racional que admite al menos una escritura en forma de fracción decimal.

Por otro lado, la palabra 'decimal', que procede de la palabra 'diez', hace referencia a la base de numeración decimal. Un número escrito en el sistema de numeración posicional decimal puede llamarse 'número decimal'.

A esta ambigüedad se debe agregar un abuso de lenguaje muy frecuente y extendido, que consiste en confundir la expresión 'número decimal' con la expresión 'escritura con coma'. Este abuso conduce a identificar un número con su escritura, lo que se ve favorecido por el hecho de que cada número admite una única representación decimal.

Escritura fraccionaria

En esta escritura, los números se representan bajo la forma $\frac{n}{d}$ o n/d.

Cuando n y d son enteros, el número n/d se denomina usualmente fracción (especialmente en la enseñanza), y dichos números n y d reciben el nombre de numerador y denominador respectivamente. Cada número racional admite infinitas notaciones fraccionarias, equivalentes entre sí (ejemplo: 1/2 = 2/4 = 5/10 = 25/50 =...). Para ese racional queda determinada una clase de fracciones equivalentes, y cualquier elemento de la clase es un representante de ese racional. Cuando el máximo común divisor del numerador y denominador es 1, se considera la expresión n/d como representación canónica de la clase a la que pertenece, identificándose en este caso n/d con el número racional (en el ejemplo anterior, el representante canónico es 1/2).

La escritura fraccionaria se utiliza también para expresar números que no son fracciones (racionales), dado que el numerador o el denominador no son enteros. Se trata de números irracionales, como $\sqrt{2}/2$ y $(\sqrt{5} + 1)/2$. En el siguiente punto se hará referencia a este tipo de notaciones.

Escritura icónica

Utilizamos el término 'icónico' para designar escrituras especiales de números. Dado que la escritura en el sistema de notación decimal de los números irracionales tiene infinitas cifras no periódicas, sólo es posible representar en dicho sistema una aproximación racional de estos números. Por convenio se suele colocar puntos suspensivos a continuación de la última cifra decimal anotada, para indicar que la parte decimal continúa de manera infinita. Sin embargo, resulta útil para el cálculo contar con algún otro tipo de representación. A continuación se describen algunos ejemplos.

- Números trascendentes que se identifican con un símbolo que no es una cifra, como los números π, e y ϕ.
- *Radicales:* Cuando la operación radicación se aplica a un número, en algunos casos se toma la expresión completa como un número. La práctica de considerar esta operación aplicada a un número como el número resultante se da cuando el

resultado de la operación es un número irracional (por ejemplo, $\sqrt{15}$, $-\sqrt{7}$). El radicando es un número entero expresado en notación decimal. La radicación es una operación, y los ejemplos anteriores pueden considerarse como dicha operación aplicada a los números 15 y 7 respectivamente. Dado que los resultados son números irracionales, la expresión completa ($\sqrt{15}$ o $-\sqrt{7}$) se toma como un número. Este tipo de notación es muy común, y las expresiones que representan números pueden ser más complejas, puesto que se combinan varias operaciones, como por ejemplo: $\sqrt{\sqrt{2}}$; $\sqrt{5}+3$; $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$; $7\sqrt{7}$; $\sqrt{(1+\sqrt{2})}$. Pensamos que los alumnos tardan algún tiempo en reconocer que $\sqrt{2} = 1'4142...$, expresa además del resultado de una operación, la "equivalencia" de dos representaciones externas.

• Valores irracionales de funciones numéricas de una variable real elementales.

Dado que la expresión decimal de los números irracionales tiene infinitas cifras no periódicas, cuando la imagen de un real cualquiera por una función es un número irracional, se deja expresada la función y para el cálculo se toma esa expresión como un número. Ello ocurre en particular con las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Ejemplos:

π^3 ; e^{-1}; log 3; ln10, log 2; cos $\pi/3$; tg $\pi/5$

Expresiones como las anteriores suelen combinarse con otras operaciones dando lugar a expresiones más complejas que se toman también como números: $(\ln 3)^2$, π^3; $2\pi/5$; $\pi^2/2$; e^{-1}, e^2-5, $\text{sen}^2\, 5\pi/2$.

• Operaciones cuyos resultados son números grandes (en el sentido de Rucker, 1987) o muy pequeños (cercanos a cero). En este caso, las operaciones pueden ser cerradas en **Q**, e incluso en **N** o **Z**, y debido al excesivo número de cifras que debe utilizarse para expresar el número en notación decimal, se deja expresada la operación. Las potencias de 10 son ejemplos muy comunes utilizados en física e ingeniería para expresar números y la escritura resultante recibe el nombre de 'notación científica'. Ejemplos: $1'3.10^{15}$, 251.10^{22}, $1'3.10^{-12}$).

Fracción continua

Un número irracional positivo puede representarse mediante una fracción continua.

Siendo α un número irracional positivo, puede expresarse de la siguiente forma:

$$\alpha_0 = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \cdots + \cfrac{1}{u_n + \cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}}$$

donde u_n es un entero positivo igual a la parte entera de α_n y donde α_n es el real estrictamente superior a 1 definido por recurrencia por $\alpha_{n-1} = u_{n-1} + 1/\alpha_n$ para $n \geq 1$.

El número α_0 se expresa: $\alpha_0 = (u_0, u_1, u_2, ...)$. Si α_0 es racional, la fracción continua es finita; si es irracional es infinita.

Por ejemplo el número $(1 + \sqrt{5})/2$ puede ser representado mediante la siguiente fracción continua:

$$(1 + \sqrt{5}) / 2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + ...}}}$$

Cuando se toma un número finito n de denominadores de la fracción continua, se obtiene un número racional que se denomina reducido de orden n del irracional considerado. Dependiendo del valor de n, se obtienen excelentes aproximaciones de un número irracional.

En el medio escolar las fracciones continuas ya no se trabajan; sólo a nivel universitario es posible hallar alguna aplicación de esta escritura de números reales (una divulgación de las propiedades fundamentales puede hallarse en Beskin; 1987).

Representación de números algebraicos

Se denomina número real algebraico a un número real que es raíz de un polinomio no nulo con coeficientes racionales. Son ejemplos $\sqrt{2}$ (raíz de $x^2 - 2 = 0$) y $\sqrt[5]{3}$ (raíz de $x^5 - 3 = 0$).

Un número real algebraico puede expresarse de forma unívoca mediante el polinomio de coeficientes racionales de orden n de quien dicho número constituye una raíz, acompañado por un conjunto de n signos (+ y -) que representan el signo del valor numérico para el real dado, de las n derivadas del polinomio.

Por ejemplo, las expresiones de $\sqrt{2}$ y de $\sqrt[5]{3}$ mediante esta notación son, respectivamente :

$p(x) = x^2 - 2$, {+,+} y $p(x) = x^5 - 3$, {+,+,+,+,+}

Es posible demostrar que cada real algebraico tiene una representación mediante esta escritura. Recio y González-López (1997) han desarrollado un tratamiento algebraico informatizado que permite resolver operaciones con números expresados de esta manera, generando una aritmética con propiedades específicas. Estos autores señalan la ventaja de disponer de una representación finita aunque mencionan como desventaja del método la imposibilidad de trabajar con todos los reales (dado que sólo es posible aplicarlo en los números algebraicos, puesto que para abarcar al conjunto de números reales totalmente es necesario recurrir al uso del infinito actual).

Representación mediante sucesiones

"Cada número real es el límite de una sucesión de números racionales, en la cual las diferencias entre los términos sucesivos pasa a ser arbitrariamente pequeña" (Mainzer, 1990; p. 39).

Según esto, cada número real puede expresarse mediante una sucesión fundamental, o sucesión de Cauchy.

Otra posibilidad de expresar número reales surge cuando consideramos la suma de los elementos de una sucesión, en caso de que dicha suma converja. Se trata de las series convergentes, y en la medida en que se aumenta el número de sumandos considerados, el valor de la suma se aproxima al número real que esta serie define. Algunos ejemplos son los siguientes:

$\pi^2/6 = 1/1^2 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + ...$

$1 = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + ...$

Algunas series pueden sumarse desde la Secundaria Obligatoria, pero no hay práctica extendida al respecto. McDonald (1992) desarrolla ejemplos que pueden tratarse en este nivel, que ilustran la necesidad de estudiar las dificultades surgidas del tratamiento intuitivo de procesos infinitos.

3.5.2.4.3. Representaciones gráficas

Describiremos tres representaciones gráficas: los gráficos que expresan la relación parte / todo, los números figurados y las tablas de números.

Gráficos que expresan la relación parte / todo

Los gráficos que expresan la relación parte / todo se utilizan especialmente para representar fracciones, aunque es posible utilizarlos para representar cualquier número real.

En el medio escolar se utilizan especialmente para representar fracciones. Freudenthal (1983; 134) sostiene que esa presentación limitada de las fracciones es la causa de que "las fracciones [funcionen] mucho peor que los números naturales". En su análisis del concepto de fracción considera la fracción como fracturador (que supone la relación parte / todo tan difundida: romper un todo en partes) y la fracción como comparador (cuando se utiliza la fracción para comparar objetos, por ejemplo: la edad de Juan es la mitad de la edad de María) .

Se ha puesto de manifiesto en diversos estudios que el uso exclusivo de gráficos que expresan la relación parte / todo limita las posibilidades de aplicación del concepto de fracción y los alumnos en consecuencia tienen una idea limitada de las fracciones (Linchevsky et al., 1989; Llinares y Sánchez, 1991). En estas investigaciones se hace hincapié en la necesidad de representar fracciones mediante diferentes gráficas, como por ejemplo la utilización de grupos de objetos discretos (como fichas) o figuras geométricas (como círculos o rectángulos) en las que el todo esté representado por figuras geométricas divididas en su interior por partes de igual área pero de formas diferentes, o por un número no entero de círculos.

Números figurados

Los números figurados constituyen una representación de los números que fue trabajada por los pitágoricos. Un número figurado es el cardinal de un conjunto de puntos situado sobre una figura geométrica. Según la figura que conforman los puntos, el número se denomina triangular, cuadrado, piramidal, etc.

Algunos investigadores han estudiado el beneficio que puede proporcionar la utilización de los números figurados en el aprendizaje de los números (Castro, 1994). La visualización de los números mediante un patrón geométrico permite deducir propiedades aritméticas que familiarizan a los estudiantes con los números y con algunas de sus propiedades generales.

Tablas de números

Una tabla numérica constituye una forma de organizar números mediante un espacio finito y discreto de dos dimensiones.

Las tablas numéricas pueden clasificarse en limitadas, como la tabla de los cien primeros números naturales, las tablas de la suma, resta o multiplicación de los diez primeros números naturales o ilimitadas, como el triángulo de Pascal (Ruiz López, 1996).

La utilización de tablas numéricas proporciona un medio de visualizar ciertas propiedades que serían más difíciles de captar usando únicamente la herramienta aritmético - algebraica.

Hasta la llegada de ordenadores y calculadoras, las tablas se usaban para representar números, como por ejemplo la tabla de logaritmos. Esta última ha desaparecido del sistema escolar como consecuencia del uso de las calculadoras.

3.5.2.5. Criterio *Operaciones*

Las destrezas con las cuatro operaciones básicas se consideran un requisito indispensable para desenvolverse en nuestra sociedad (Castro, Rico y Castro, 1987). Como consecuencia, el dominio de esta destreza se impone como un objetivo primordial desde el nivel primario.

La eficacia de la enseñanza de las operaciones básicas constituye uno de los avances educativos más impresionantes de los últimos cuatro o cinco siglos, como se infiere de Ifrah (1987; p.287-8):

"Se cuenta que un rico mercader de la Edad Media, lo suficientemente enriquecido como para poder dar a su hijo una instrucción comercial, fue a consultar un día a un eminente especialista para saber a qué institución tenía que enviar al joven. La respuesta del profesional seguramente asombrará al hombre medio del siglo XX: 'Si se conforma usted con que su hijo aprenda a sumar y a restar, cualquier universidad alemana o francesa le servirá. Pero en cambio, si quiere usted que llegue a multiplicar y dividir (si es que es capaz), entonces tendrá que enviarle a las escuelas italianas'."

En nuestros días, la inmensa mayoría de los niños de 10 años dominan lo esencial de las destrezas con las cuatro operaciones, generalmente o exclusivamente en el soporte "papel y lápiz". Todos los estados occidentales tienen una red de educación primaria que permite su adquisición a una gran mayoría de niños de 10 años (con independencia de su estatus social y económico)

Una gran parte del tiempo dedicado a las matemáticas en la escuela se destina a la realización de operaciones. Una vez que los alumnos dominan los procedimientos o algoritmos que permiten resolver operaciones, se proponen situaciones problemáticas que se resuelven recurriendo a operaciones entre los números que aparecen en los enunciados.

El predominio de actividades dirigidas a la ejercitación de los algoritmos se presenta como un problema que ha suscitado con frecuencia la atención de los educadores matemáticos. "Nuestro aprendizaje de cada una de las operaciones está tan ligado a su algoritmo que se suele confundir cada operación con el algoritmo usual que la resuelve" (Gómez, 1988; p.105).

Este autor interviene en el debate que se mantiene desde hace tiempo respecto del excesivo tiempo que se dedica a las actividades algorítmicas en la escuela, señalando sus desventajas. "Cuando el algoritmo se introduce a edades muy tempranas, el énfasis se sitúa en la obtención correcta y rápida del resultado, se da prioridad al automatismo en detrimento de la comprensión" (p.110)."Con la tradición se pueden rechazar innovaciones valiosas y puede significar no admitir la respuesta personal, especialmente si ésta no viene dada por el profesor" (p.111).

El significado otorgado a la ejercitación del cálculo en los distintos niveles se manifiesta en la existencia de las operaciones típicas de supervivencia escolar, a saber:

- Tabla de sumar y multiplicar en el primer ciclo de Primaria
- División en el segundo ciclo de Primaria
- Racionalización de denominadores en la Educación Secundaria Obligatoria

El abuso del cálculo algorítmico en la escuela favorece la exactitud en detrimento de la aproximación. Un algoritmo escolar conduce a un resultado preciso, aunque en ocasiones su complejidad sea la causa de errores. Sin embargo, las situaciones problemáticas que suelen plantearse fuera de la escuela no exigen siempre una respuesta exacta; muchas veces basta con una aproximación.

La investigación en educación matemática es sensible, desde hace años, al problema que plantea el aprendizaje de las operaciones en contextos meramente algorítmicos y carentes de significado. Las reformas curriculares, realizadas entre 1985 y 1995, en prácticamente todos los estados europeos, Estados Unidos y otros estados centro y sudamericanos preconizan el desarrollo del *sentido numérico* (Number Sense), de cuyas diferentes caracterizaciones hemos seleccionado en la tabla 3.6 la que proponen McIntosh y Ching Yang (1999).

Componentes del sentido numérico	Ejemplo
Comprender el significado y el valor de los números.	Comparar 2/5 y ½. Explica cómo lo haces.
Comprender y usar representaciones equivalentes de números.	Indica diferentes representaciones de 2/5.
Comprender el significado y los efectos de las operaciones.	¿Es 750/0’98 mayor o menor que 750? Explica cómo lo sabes.
Comprender y usar expresiones equivalentes.	¿Son equivalentes 70/0’5 y 70 x 2? Explica cómo lo sabes.
Cálculos flexibles y estrategias de recuento en cálculos mentales, escritos y con calculadoras.	Multiplicar 6 x 98 usando lo que sabes de números y operaciones.
Referencias [personales] para las medidas	¿Cómo estimas la altura de un objeto alto? ¿Puedes usar una referencia como ayuda?

Tabla 3.6: Componentes del sentido numérico según McIntosh y Ching Yang (1999)

Conviene observar que al menos cuatro de estas seis componentes apelan explícitamente a las operaciones numéricas.

En resumen, la importancia curricular y escolar de las operaciones numéricas parece difícilmente discutible. En la actualidad, la Educación Matemática tiende a suscitar una enseñanza y aprendizaje significativos en este campo que, sin renunciar a la eficacia operativa antes mencionada, amplíen las posibilidades de uso individual de esas operaciones.

3.5.2.5.1. Operaciones desde el punto de vista de las matemáticas

Operaciones y estructuras algebraicas

Desde el punto de vista axiomático, las operaciones de sumar y multiplicar son nombres de dos leyes de composición interna no definidas *a priori*. Sólo se supone su existencia con objeto de dotar a un conjunto de alguna estructura algebraica.

Por ejemplo, la estructura de anillo exige una suma y un producto, y poco más se puede decir sobre estas operaciones mientras no se identifique el anillo en cuestión; sumar (respectivamente, multiplicar) números enteros “no es lo mismo” que sumar (respectivamente, multiplicar) polinomios sobre **Z** en una indeterminada.

Las propiedades y "combinaciones de propiedades" entre estas operaciones abstractas dan origen a estructuras algebraicas.

Al estudiar los axiomas que satisface un conjunto de números (como **N**, **Z**, **Q** o **R**) con las operaciones suma y multiplicación, es posible caracterizar diferentes estructuras algebraicas sobre estos conjuntos. Así, por ejemplo, (**Z**, +, •) es un anillo conmutativo unitario, (**Q**, +, •) y (**R**, +, •) son cuerpos conmutativos. La estructura de cuerpo conmutativo de **R** con la suma y la multiplicación exige las siguientes propiedades:

(**R**, +, •) es anillo unitario, lo que supone:

+ es ley de composición interna en **R**

+ es asociativa y conmutativa

+ posee elemento neutro: el 0

Todo elemento de **R** admite un opuesto para +

• es ley de composición interna sobre **R**

• es asociativa

• es distributiva respecto de +

• posee elemento neutro: el número 1

(**R** - {0}, •) es grupo multiplicativo, lo que añade a las propiedades anteriores la siguiente:

Todo elemento de **R** - {0}admite un inverso para •.

Desde el punto de vista de las operaciones suma y producto, los cuerpos **Q** y **R** son axiomáticamente indistinguibles.

La operación sustracción (respectivamente división) se define como la operación opuesta (respectivamente inversa) de la suma (respectivamente de la multiplicación).

Se definen también las operaciones potenciación, radicación y logaritmación. Estas últimas se utilizan en la definición de funciones (descritas en el siguiente punto) que tienen usos diversos en matemática.

El uso de las operaciones en ecuaciones y funciones:

En este punto se describe la intervención de las operaciones en contenidos incluidos en los currículos matemáticos escolares: ecuaciones y funciones.

En sus inicios, el álgebra fue concebida como una ciencia de procedimientos computacionales. Sfard y Linchevski (1994) señalan diferentes estados en el desarrollo histórico del álgebra, que caracterizan en los siguientes términos:

- Álgebra como Aritmética Generalizada: la Fase Operacional. Las ideas centrales más avanzadas investigadas en esta etapa se conciben operacionalmente antes que estructuralmente. El álgebra es una continuación de la aritmética, aunque trata las manipulaciones algorítmicas de un modo más general. La práctica del álgebra verbal prolonga el pensamiento operacional, dado que las palabras no pueden manipularse como los símbolos.

- Álgebra como Aritmética Generalizada: la Fase Estructural. El concepto de notación simbólica no es tan obvio como parece. La idea de usar letras en lugar de números supone atribuir dos significados a la fórmula simbólica: el de procedimiento computacional y el de objeto producido. En esta fase se señalan dos etapas:

  - -Álgebra del valor fijo (de una incógnita)
  - Álgebra funcional (de una variable).

En la primera, fue Diofanto quien dio un paso significativo hacia el pensamiento estructural, alternando el uso de letras (que denotaban un valor desconocido pero fijo) con palabras, y considerando las expresiones resultantes como números.

En la segunda, las expresiones algebraicas pasan a considerarse como funciones antes que como valores fijos, y es posible citar a Vieta como un precursor. Se impone la dualidad proceso - producto de la expresión algebraica y se especifican formas de manipular las ecuaciones. El uso de expresiones algebraicas se transfiere a la geometría y más tarde a la Física.

- Álgebra Abstracta: Álgebra de Operaciones Formales y Álgebra de Estructuras Abstractas. El álgebra pasa a trabajar las combinaciones de operaciones definidas no por su naturaleza, sino por las leyes de combinaciones a las que están sujetas. Se estudian las estructuras algebraicas.

El álgebra, considerado desde un punto de vista matemático como el estudio de las estructuras algebraicas (correspondiendo a la última etapa citada), desde un punto de vista escolar se concibe como un campo de operaciones entre números y letras que representan números desconocidos (correspondiendo a las etapas en las que el álgebra es una aritmética generalizada) o variables. Para los investigadores, un sello distintivo de la competencia en Álgebra por parte de los alumnos es la flexibilidad entre la dualidad proceso-producto (Sfard et al., 1994). “El modo operacional del pensamiento dicta las acciones concretas que han de realizarse en la resolución de un problema, mientras que la aproximación estructural condensa la información y amplía la visión” (p. 99).

La resolución de ecuaciones constituye una parte importante de los currículos matemáticos escolares. Muchos libros de texto de secundaria proponen distinguir algebraicamente **Q** y **R** exhibiendo ecuaciones que se resuelven en el segundo conjunto, pero no en el primero. Seguimos a Truss (1997; p.95) al rechazar el argumento de que **R** se introduce para resolver ecuaciones tales como

$x^2 = 2$. "Esto es erróneo en dos sentidos. En primer lugar, si esa fuera la razón, nuestro trabajo no nos habría hecho avanzar mucho, porque hay ecuaciones que ciertamente *se parecen* más o menos, superficialmente, a $x^2 = 2$, pero que siguen sin tener solución en **R**, como $x^2 + 2 = 0$. En segundo lugar, habríamos puesto en **R** muchos más números de los necesarios dado que [...] π y e, por citar dos importantes números reales, no satisfacen en absoluto ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales."

Los conceptos fundamentales estudiados por el análisis, y por toda la matemática moderna, son *funciones* antes que *números* (Gardiner, 1982; p.251). Los problemas de determinación de tangentes y áreas de curvas constituyen el origen del análisis. Las primeras soluciones halladas para estos problemas (Arquímedes; matemáticos del siglo XVI y principios del XVII) descansaron en interpretaciones geométricas naturales. Sin embargo, los métodos sistemáticos o generales de resolución surgieron cuando los *problemas geométricos acerca de curvas* fueron transformados en *relaciones algebraicas entre "coordenadas variables x e y*. [...] Una vez que los problemas *geométricos* subyacentes fueron trasladados al lenguaje de símbolos *algebraicos* había al menos una posibilidad de desarrollar métodos sistemáticos que podrían revelar *similaridades formales* entre los que eran superficialmente problemas distintos" (Gardiner, 1982; p.255). Durante el siglo XVIII los objetos fundamentales del análisis eran pensados como *variables* antes que como *funciones.* La noción de función fue incorporándose gradualmente, y se dieron muchas transformaciones hasta llegar a un concepto adecuado. Dos representaciones externas predominaban, alternativamente: la curva geométrica o gráfico y la relación algebraica, fórmula o expresión relacionando dos o más variables. Ambas ocultan ciertas características fundamentales del concepto de función, pero exhiben otras.

La idea de gráfico remite a una curva dibujada a mano, cuyas esquinas y saltos están razonablemente espaciados (idea que no coincide con muchas funciones). La idea algebraica de las funciones predominó en el siglo XVIII sobre la geométrica y el concepto de función se reducía al de una fórmula algebraica. Implícitamente se asumía que las funciones compartían las propiedades geométricas de las funciones elementales más familiares. Sin embargo, con el tiempo empezaron a surgir deficiencias técnicas (ver detalles en Gardiner, 1982) que fueron resueltas acudiendo nuevamente a las ideas geométricas.

En la evolución del concepto de función, Gardiner comenta la influencia del hábito especulativo de la manipulación formal de símbolos que, separándose del significado original, puede conducir a desarrollos serios y trascendentales en matemáticas.

En el medio escolar el tratamiento de las funciones se aborda recurriendo a las dos visiones mencionadas: algebraica y geométrica. En este punto nos interesa especialmente la primera, dado que las funciones numéricas se expresan comúnmente mediante una o varias operaciones combinadas que afectan a la variable. Por ejemplo: $f(x) = 3x +2$; $f(x) = x^2-x$. El dominio y el alcance de las funciones depende de las operaciones que afectan a su variable.

A continuación se describen algunas funciones importantes utilizadas en Análisis y que están definidas por las operaciones potenciación y logaritmación.

La función potencial de exponente real α, de variable real positiva, se define por $f(x) = x^{\alpha}$.

La función exponencial de base *a* (siendo *a* un real positivo diferente de 1) de variable real y valores reales positivos $f(x) = a^x$ es la función recíproca de la función logarítmica de base *a*, $f(x) = \log_a x$.

A partir de la noción de función se desarrollan las nociones fundamentales del análisis: límite, continuidad, derivación e integración. "Un propósito de la función es representar *cómo cambian las cosas*. Con este significado, es natural pasar a considerar los conceptos del análisis de la *razón de cambio* (diferenciación) y del *crecimiento acumulativo* (integración) junto con el destacado teorema fundamental del cálculo que nos dice que la diferenciación y la integración son esencialmente procesos inversos" (Tall, 1996; p. 289). En la enseñanza (Bachillerato y primeros años de Universidad) se desarrollan estas nociones esencialmente sobre funciones reales de variable real.

3.5.2.5.2. Las operaciones en el medio escolar

La enseñanza de las operaciones básicas

Las operaciones básicas se trabajan en la escuela durante todo el nivel primario. La enseñanza de cada operación se vincula estrechamente con acciones que suponen implícitamente esa operación, y que actúan como detonantes en las situaciones problemáticas que se presentan. Para la suma se utilizan verbos como 'añadir', 'agregar', o las expresiones 'en total', 'junto' que los alumnos reconocen como indicadores de que se debe efectuar una suma. Para el producto, se manejan dos acciones cuyos "grados de abstracción" respectivos son muy diferentes: las sumas reiteradas (la multiplicación es una abreviatura de sumas con el mismo sumando) y el producto cartesiano (la multiplicación aporta el cardinal del producto cartesiano de dos conjuntos finitos).

Sin embargo, estas nociones se trabajan para "introducir el concepto" (al principio) y para reconocer situaciones de suma o multiplicación en problemas verbales (al final). Hay un enorme intermedio algorítmico (esencialmente basado en los algoritmos de papel y lápiz, uno para cada operación) donde los alumnos memorizan las tablas y un sinfín de reglas y trucos (verdaderos, como las reglas para multiplicar por la unidad seguida de ceros, o falsos, como la afirmación de que el producto de dos números (sin precisar) es mayor que cada uno de los factores).

Las investigaciones centradas en la enseñanza y aprendizaje de las operaciones hacen hincapié en los diferentes tipos de problema que se pueden formular con una misma operación, y que suponen distintos grados de dificultad para los alumnos. Maza (1991a) cita los diferentes tipos de problemas de suma y resta: combinación, cambio (aumentando y disminuyendo) y comparación; lo mismo ocurre con la multiplicación y la división (1991b). Este autor sugiere que durante el trabajo escolar deben proponerse situaciones que aborden los distintos tipos de problemas para que la operación se conciba de forma más completa y en un tiempo menor (1991a; p.25).

La ejercitación de los algoritmos marca profundamente la enseñanza durante el nivel primario. A las dificultades señaladas en el punto anterior, debe añadirse la irrupción de calculadoras y ordenadores en la vida cotidiana, lo que exigiría reconsiderar seriamente el objetivo de la enseñanza de los algoritmos.

Intermediarios de cálculo

El uso de calculadoras está cada vez más difundido, puesto que permite evitar los cálculos que consumen demasiado tiempo. Exige un tratamiento cuidadoso de diferentes aspectos.

Con respecto a la organización de una clase en la que los alumnos utilizan sus calculadoras, la variedad de marcas y modelos con diferentes funciones y características supone prestar una atención individual a cada alumno, lo que resulta difícil en cursos numerosos.

Por otro lado, es necesario considerar las limitaciones de una calculadora u ordenador en cuanto a la precisión de los resultados. Algunas de estas limitaciones son citadas por Martínez (1984), entre las que se destacan:

- La existencia de un número máximo o tope aceptado por la máquina, que si se sobrepasa originará errores en los resultados o la detención del programa.
- La existencia de un número limitado de cifras significativas. Cuando se sobrepasa, la máquina puede continuar dando el mismo resultado ante operaciones que lo modificarían.
- Los errores de redondeo suelen ser pequeños (incluso despreciables). Sin embargo, en los cálculos largos pueden acumularse y amplificarse, perturbando considerablemente los resultados.
- Se pueden encontrar infracciones a las reglas más elementales de la aritmética, como por ejemplo contra la propiedad asociativa de la suma (por ejemplo, $1+(10^{14}+(-10^{14}))=1$ y $(1+10^{14})+(-10^{14})=0$).

La utilización de las calculadoras en la escuela no cuenta con una aceptación generalizada (Udina i Abello, 1989). Las causas pueden ser de índole diferente, como por ejemplo el desconocimiento por parte de los docentes de resultados de investigaciones que podrían orientar acerca de las ventajas o desventajas de su uso, o el temor de que se produzcan situaciones que el docente no puede controlar. O, como sostiene este autor: “si ya no tenemos que enseñarles a calcular, ¿qué haremos en clase de matemáticas?” (Udina i Abello, 1989; p.52). A este respecto, recopilamos algunas opiniones de estudiantes de Magisterio:

(1) Sujeto A: “Yo opino lo mismo que la compañera 1ª, que la calculadora no debe utilizarse hasta 6º EGB, porque si no es así el alumno no aprende a realizar operaciones ni a papel ni a memoria, y sólo se acostumbra a la calculadora.”
(2) Sujeto B: “En este debate hubo toda clase de opiniones en las cuales se dijo que:
* La calculadora se debe utilizar porque es una maquina que ayuda hacer operaciones y hacer los ejercicios más rápidos.
* otros dijeron que la calculadora no se debía utilizar porque decían que los niños perdían facultades al resolver cuestiones matemáticas.
Bueno al final no se quedo en claro porque como ya he puesto antes, estas dos alternativas son validas ninguna es incorrecta.”
(3) Sujeto C: “En la discusión creada en clase sobre el uso de calculadoras en la enseñanza, no se llegó a ningún acuerdo ni consenso con toda la clase, pero creo que la opinión más general fue la de que es conveniente que en los primeros cursos no se utilice para poder aprender las operaciones más básicas de las matemáticas como la suma, resta o multiplicación, aunque no se llegó a ningún acuerdo sobre la edad en que se deben comenzar a utilizar.
Mi opinión es que las calculadoras deben utilizarse a partir de los 12 años, creo que su utilización pueder ser un medio más para aprender matemáticas, y me parece una tontería que en clase no se utilice algo que en la sociedad está al orden del día y es utilizado en todas partes [...].”

Aunque las anteriores opiniones individuales no prueben la existencia de fenómenos de grupo, el hecho de que haya reticencias al uso de las calculadoras, después de transcurridos unos 25 años de su sensible abaratamiento, prueba indirectamente que la mayoría de los enseñantes sigue apegada a la enseñanza de algoritmos.

El argumento de que la calculadora debe utilizarse una vez que los niños han aprendido a realizar correctamente las operaciones básicas se utiliza con mucha frecuencia entre los docentes. ¿En qué condiciones se acepta en el sistema escolar que un niño es capaz de resolver las operaciones básicas? Un niño que aplica correctamente los algoritmos correspondientes es capaz de resolver estas operaciones. ¿Es, entonces, el aprendizaje (casi siempre memorístico) de los algoritmos sinónimo del aprendizaje de las operaciones básicas?

Esta nueva pregunta obliga a una reflexión cuidadosa. El algoritmo que permite hacer una operación se enseña casi siempre mediante una serie de reglas o pasos a seguir, que difícilmente se justifican. Las reglas correspondientes son seguidas por el niño sin tener idea alguna de lo que significan, lo que origina errores (en el punto 6.2.2.3.4 se presenta un ejemplo), dejando con ello abierta la posibilidad de que un olvido casual impida realizar la operación. La conveniencia o no de utilizar la calculadora en el aula después de que los niños han aprendido las operaciones básicas se mira, después de esta discusión, desde otra perspectiva.

Ecuaciones y funciones

Las operaciones y sus propiedades durante la etapa secundaria se practican especialmente en la resolución de ecuaciones y en el manejo de funciones. Para estos usos, la jerarquía de las operaciones constituye una cuestión central.

En la enseñanza secundaria se plantea la resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones algebraicas de primer y segundo grado y ecuaciones con radicales. Las ecuaciones algebraicas son de la forma P(x)= 0, donde P designa un polinomio o una fracción algebraica sencilla reductible a un polinomio. Las ecuaciones con radicales son aquellas en las que la incógnita aparece dentro del signo radical.

Las ecuaciones suelen utilizarse para justificar las extensiones de los conjuntos numéricos. Ejemplos:

- La ecuación $a + x = b$, con a y b naturales, no tiene solución en **N** cuando $a<b$.
- La ecuación $x^n - a = 0$ con $n<1$ y a racional positivo que no es potencia enésima perfecta no posee solución en **Q**.

En el primer ejemplo, la ecuación posee solución en el conjunto **Z**, y en el segundo, la ecuación posee solución en **R**. Ya hemos mencionado la limitación conceptual de este enfoque según Truss.

Con respecto a las operaciones en el manejo de funciones, en este trabajo nos interesa más el aspecto numérico que el analítico de las funciones. La definición del dominio e imagen de las funciones elementales está claramente determinado por las operaciones que la constituyen.

La potenciación, que admite dos operaciones 'inversas' según que la variable sea la base o el exponente de la potencia (la radicación y la logaritmación, respectivamente) se presenta en el nivel secundario como juego de números (cuando se define como una multiplicación reiterada) o como función. En el primer caso se estudian sus operaciones y en el segundo se analiza su representación gráfica). Da origen a las funciones potencial y exponencial.

La logaritmación también se presenta como operación numérica y como función.

La imposibilidad de presentar el concepto de número real en Secundaria limita enormemente el estudio de las funciones; todos los enfoques tienen que pasar por "lo numérico" en detrimento de otros acercamientos analíticamente más poderosos.

Errores en las operaciones

El estudio de los errores tiene una larga historia. Descartando, lógicamente, los errores ocasionados por descuidos, de los que nadie está exento, las investigaciones en Educación Matemática intentan poner de manifiesto patrones de errores, como en el caso

$$\begin{array}{r} 45 \\ \underline{+19} \\ 54, \end{array}$$

donde el alumno (se supone) no arrastra la decena que "se lleva" al sumar las unidades.

Se han hecho muchos intentos por tipificar los errores con el fin de "diagnosticar" posibles "tratamientos", aunque no conocemos especificaciones exhaustivas de tipos. Por ejemplo, Porter y Masingila (1995) han propuesto en las clases de Análisis del nivel "College", tres tipos de errores: conceptuales, procedimentales e indeterminados. Los errores procedimentales incluyen errores algorítmicos y sintácticos (como la eliminación de paréntesis: $2(x+3)=2x + 3$). Los errores conceptuales son mucho más variados:

-uso de procedimientos inadecuados;
-aceptación de respuestas irrazonables;
-errores de traducción entre símbolos y palabras;
-uso inadecuado de símbolos (como nombrar dos variables con el mismo símbolo);
-interpretación incorrecta de símbolos,
-inferencias no válidas;
-afirmaciones no justificadas; o
-contradicciones de principios no procedimentales, definiciones o teoremas.

Socas (1997) enumera una serie de errores que comúnmente se manifiestan en las operaciones (suma de fracciones, cuadrado de un binomio, cancelación) y realiza una clasificación de los errores según sus orígenes. Señala la existencia de errores que tienen su origen en:

-un obstáculo, por ejemplo, dificultades de los niños con la naturaleza abstracta de los elementos utilizados en álgebra;

-ausencia de sentido;

-actitudes afectivas y emocionales.

Los errores pertenecientes al segundo tipo están especialmente relacionados con las operaciones y sus propiedades, y considera tres fases que dependen del estadio de desarrollo en que se encuentran los alumnos. En la primer fase considera los errores del álgebra que tienen su origen en la aritmética, por ejemplo el error de la suma de fracciones $½ + 1/3 = 1/(2+3)$ que se transfiere al caso $1/x + 1/y = 1/(x+y)$, o dificultades con el signo '-' delante de un paréntesis o de una fracción.

En la segunda fase considera los errores de procedimiento, referidos al uso inapropiado de reglas de procedimiento. Un ejemplo típico es el uso de la hipótesis de linealidad en los casos en que no es válida, y los errores muy frecuentes de este tipo son los relacionados con el mal uso de la propiedad distributiva (por ejemplo $(a.b)^2 = a^2.b^2$ se extiende a $(a+b)^2 = a^2+b^2$) y los errores de cancelación (por ejemplo, (x.y)/(x.z)= y/z se extiende a (x+y)/ (x+z) = y+z).

En la tercera fase considera los errores de álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico. Por ejemplo, el sentido del signo '=' en su paso de la aritmética al álgebra. El sentido de la igualdad en aritmética (2+5=1+6) se conserva en álgebra cuando se trata de una identidad, pero no en una ecuación.

Carman (1971) analiza una lista de 'mathematical misteak', que define como operaciones incorrectas que conducen a resultados correctos, como por ejemplo, 4~~9~~/~~9~~8 = 4/8.

El aprendizaje de los algoritmos de las operaciones sin las justificaciones adecuadas origina errores como el siguiente, observado en un niño de 7 años que ha aprendido el algoritmo de la multiplicación:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \\ \underline{\times\ 7} \\ 352 \end{array}$$

El niño indica que obtiene 35 al multiplicar 7x5, y el 5 resulta de 4+1. Aplica lo que ha aprendido: el 4 debe sumarse, sólo que el momento en que debe efectuarse la suma no es el adecuado. Las confusiones de este tipo son comunes cuando el aprendizaje del algoritmo se realiza sin ningún tipo de justificación.

Una visión diferente de las dificultades que pueden presentarse en los alumnos durante el aprendizaje de las matemáticas es presentada por Fourastié (1996). Esta autora reconoce la existencia de errores 'corrientes', como 3.0 = 3, $(3ab)^3 = 3ab^3$, (2x+3)/(2x+5) =3/5; sin embargo, postula la hipótesis de que no hay alumnos 'nulos en matemática' sino que hay 'malos comienzos'. Se refiere a los alumnos que aprenden de memoria los procedimientos, pero son incapaces de hallar una relación entre un resultado y el problema propuesto. En estos casos propone rehacer el itinerario que estos alumnos deberían haber hecho.

3.5.2.6. Conexiones entre los criterios

Hemos mencionado que los criterios no son considerados ámbitos o compartimentos aislados unos de otros. Cualquier descripción incluida en uno de ellos, aunque posiblemente esté enfocada desde ese criterio, se completa con referencias a otros criterios diferentes.

Realizamos a continuación un breve repaso de algunas relaciones que es posible establecer entre los criterios.

En las siguientes tablas se proponen ejemplos de conexiones entre el criterio que figura en la primera columna con los criterios restantes.

	Tipo de número	**Fenomenología**	**Representación**	**Operación**
Orden	Descripción de la relación de orden en **N**, **Z**, **Q**, **R**.	Comparación cualitativa o cuantitativa de segmentos	Comparación de números por la relación de orden según la representación.	Inecuaciones

Tabla 3.7: Algunas conexiones con el criterio Orden

	Orden	**Fenomenología**	**Representación**	**Operaciones**
Tipo de Número	Orden de cada sistema numérico	Usos sociales y específicos de profesiones	Números constructibles o no constructibles: representación en la recta. Números algebraicos.	Estructura algebraica de cada sistema numérico.

Tabla 3.8: Algunas conexiones con el criterio Tipo de Número

	Orden	**Tipo de número**	**Representación**	**Operaciones**
Fenomenología	Magnitud continua.	Isomorfismo entre $\mathbf{R}^+$ y las magnitudes.	La recta como soporte de cualquier longitud	Magnitud como estructura algebraica.

Tabla 3.9: Algunas conexiones con el criterio Fenomenología

	Orden	**Tipo de número**	**Fenomenología**	**Operaciones**
Representación	Recta como modelo de la ordenación en **N**, **Z**, **Q** y **R**.	Representaciones de algunos tipos de números (racional como fracción; real como fracción continua; número algebraico mediante polinomio)	Organización de la información. Medidas de longitudes.	Números expresados mediante operaciones.

Tabla 3.10: Algunas conexiones con el criterio Representación

	Orden	Tipo de número	Fenomenología	Representación
Operaciones	Compatibilidad. Variaciones de una función.	Descripción de la estructura de cuerpo conmutativo de (**Q**, +, •) y de (**R**, +, •).	Magnitud extensiva. Propiedad arquimediana.	Algoritmos de las operaciones ligados a las representaciones.

Tabla 3.11: Algunas conexiones con el criterio Operaciones

Estos cinco ámbitos han permitido realizar un examen exhaustivo de las características y propiedades del número real, y del tratamiento escolar correspondiente. Algunas investigaciones (Fischbein et al., 1995; Romero, 1995; Romero, 1996) realizadas para estudiar diferentes aspectos (intuiciones, dificultades y potencialidades y esquemas conceptuales, respectivamente) del aprendizaje del número real han mostrado las dificultades que deben sortear los alumnos durante su tratamiento.

El análisis desarrollado en esta sección del capítulo ha permitido desglosar el estudio del número real en ámbitos no aislados entre sí, que proporcionan un marco general donde situar las dificultades que pueden presentarse.

3.5.3. Origen inductivo de los criterios y ejemplo de aplicación

En esta sección describimos el procedimiento que dio origen a los cinco criterios para el estudio de los números reales. Por tratarse de un trabajo preliminar a esta investigación, la reseña que se presenta a continuación interrumpe (en su cronología) el informe de investigación que constituye esta memoria. Sin embargo, se considera que la descripción del origen inductivo, motivado por necesidades concretas, aporta una muestra de su adecuación para el análisis de enunciados referidos a números reales.

El origen de los criterios, como hemos señalado en el apartado 1.3, se sitúa en el estudio de las respuestas de alumnos de 1º de Magisterio, 2º y 3º de BUP y Formación Profesional a la encuesta acerca de la comparación de números (incluida en el anexo 1).

En 3.5.3.1 describimos cómo, a partir de tres criterios establecidos antes de administrar la encuesta, se obtienen los cinco criterios estudiados en la sección 3.5.2, como consecuencia de incorporar los resultados obtenidos con los alumnos.

En 3.5.3.2 describimos la utilización de los criterios en el análisis de los informes de dos investigaciones, (Fischbein, Jehiam y Cohen, 1995), (Romero, 1995) acerca del número real.

Se ha mencionado que las aplicaciones preliminares de los criterios han permitido reconocer su pertinencia en el estudio de respuestas de alumnos referidas al número real. Esto no significa que los criterios se consideran idóneos para abordar exhaustivamente el estudio de cualquier problema relacionado con los números reales; sin embargo en nuestra investigación han mostrado su utilidad en la interpretación de las respuestas de alumnos recogidas durante el estudio empírico.

La asignación de los enunciados a los distintos criterios se ha realizado en forma individual (investigadora y director) y posteriormente se han cotejado las respuestas de cada uno.

3.5.3.1. Elaboración de criterios de comparación de números

La lista de criterios desarrollados en la sección 3.5.3 resulta de la confluencia de diferentes fuentes:

1º) Una lista inicial elaborada por los investigadores para el futuro análisis de la encuesta acerca de la comparación de números.

2º) Los resultados obtenidos en el primer ensayo de la encuesta con alumnos de Magisterio (1º de Educación Infantil).

3º) Confrontación de los criterios con las respuestas obtenidas en el segundo ensayo de la encuesta con alumnos de nivel Secundario.

1º) Una lista inicial elaborada por los investigadores

La primera lista elaborada por los investigadores estaba constituida por tres criterios: Relación de Orden, Clase de número y Representación, que incluyen los elementos indicados en las tablas 3.12 a 3.14:

RELACIÓN DE ORDEN
Siendo a = número de la primera columna y b= número de la segunda columna: • $a < b$ • $a > b$ • $a = b$ • $a, b \in]c, d[$ • $a,b < d$ • $a,b > c$ • $a \neq b$

Tabla 3.12: Criterio 'Relación de orden' contenido en la lista inicial

CLASE DE NÚMERO
Natural
Entero
Racional - Decimal - No Decimal
Real

Tabla 3.13: Criterio 'Clase de Número' contenido en la lista inicial

REPRESENTACIÓN
Notación decimal * Sin cifras decimales Con cifras decimales Exacta * Pocas cifras decimales * Muchas cifras decimales Periódica aproximada * Período de pocas cifras * Período de muchas cifras No periódica * La ley de formación puede reconocerse. * La ley de formación no puede reconocerse.
Fraccionaria * Fracción irreducible * Fracción reducible
Operación * Única (una sola operación: 6 posibilidades) * Dos operac. distintas (15 posibilidades)
* Verbal
* Icónica
* Límite
Códigos de calculadora * Se utiliza el símbolo "=" * No se utiliza el símbolo "="
* Orden de magnitud (potencias de 10)

Tabla 3.14: Criterio 'Representación' contenido en la lista inicial

2º) Los resultados obtenidos en el primer ensayo de la encuesta Comparación de números.

En las respuestas de alumnos de Magisterio al primer ensayo de la encuesta, se observaron enunciados que no podían incluirse en ninguno de los tres criterios anteriores.

Por ejemplo, las siguientes afirmaciones:

- (Sujeto Nº 10, parecido entre dos al cubo y 32) "Porque son potencias las dos".
- (Sujeto Nº 24, diferencia entre $-\sqrt{3} - 2$ y $\sqrt{3} + 2$) "En el 1º la operación es una resta y la raíz es negativa y en el 2º es una suma y la raíz es positiva".
- (Sujeto Nº 12, parecido entre 3'14 y π) "En que ambos sirven para determinar la longitud de la circunferencia".

En la elaboración de los enunciados del alumno hipotético para el segundo ensayo de la encuesta, se decidió añadir afirmaciones referidas a operaciones o propiedades de operaciones y al uso de los números. Como consecuencia de la incorporación de estos nuevos ámbitos (operaciones y usos de los números) a los criterios originales es posible organizar todas las repuestas obtenidas en el segundo ensayo.

La lista final de criterios, utilizada en la organización de las respuestas de los alumnos en la segunda versión de la encuesta Comparación de números es la siguiente: *Orden, Tipo de Número, Fenomenología, Representaciones* y *Operaciones*.

3º) Confrontación de los criterios con las respuestas obtenidas en el segundo ensayo de la encuesta

La lista de cinco criterios se utilizó para organizar las respuestas de los alumnos obtenidas en el segundo ensayo de la respuesta referida a la comparación de números.

En la tabla 3.15 presentamos ejemplos de frases que atribuimos a cada uno de los criterios resultantes. Para cada criterio se incluye una respuesta obtenida en el primer ensayo de la encuesta y otra obtenida en el segundo ensayo.

CRITERIOS	EJEMPLOS DE ENUNCIADOS
Orden	(1º ensayo encuesta, sujeto Nº 29, diferencia entre 0'123456... y 0'1): "No indican la misma cantidad, 0'123456 > 0'1." (2º ensayo encuesta, sujeto Nº 18, parecido entre 0'12345... y 0'1): "Los dos están comprendidos entre 0'1 y 0'2."
Tipo de número	(1º ensayo encuesta, sujeto Nº 12, parecido entre 9 √ y 18/6): "Ambos son irracionales." (2º ensayo encuesta, sujeto nº 30, diferencia entre 2 y 5): "Uno es par y el otro impar."
Fenomenología	(1º ensayo encuesta, sujeto Nº 12, parecido entre 3'14 y π): "En que ambos sirven para determinar la longitud de la circunferencia". (2º ensayo encuesta, sujeto Nº 48, diferencia entre –15'2 y 15'2): "-15'2 puede ser la distancia que nos queda para llegar a un punto y 15'2 la distancia que hemos pasado de ese punto."
Representación	(1º ensayo encuesta, sujeto Nº 2, diferencia entre dos centésimas y 2.10^{-2}): "En que uno está escrito con el nombre (letras) y el otro está escrito en nº." (2º ensayo encuesta, sujeto Nº 24, diferencia entre 0'12345... y 0'1): "1º es periódico y el otro exacto."
Operación	(1º ensayo encuesta, sujeto Nº 2, diferencia entre 5/8 y 0'625): " En que el primero es la operación y el segundo es el número que da de resultado". (2º ensayo encuesta, sujeto Nº 84, diferencia entre dos al cubo y √64): "Son potencias de diferente grado."

Tabla 3.15: Ejemplos de respuestas de la encuesta 'Comparación de números' incluidas en cada criterio

3.5.3.2. Utilización de criterios en informes de investigación

En esta sección se describe la utilización de los criterios en la organización de enunciados correspondientes a fragmentos específicos de informes de dos investigaciones referidas al número real. Este análisis se realizó con objeto de poner a prueba la utilidad de los criterios para la organización de afirmaciones concernientes al número real.

La primera investigación consiste en la experiencia realizada por Romero (1995) con el fin de explorar dificultades y potencialidades de la introducción del número real en jóvenes de 14-15 años. El fragmento seleccionado (comprendido entre las páginas 440-450 de la memoria de tesis doctoral) para realizar su organización según los criterios corresponde a las conclusiones señaladas por la autora con respecto a las dificultades más importantes detectadas en los alumnos al finalizar la puesta en práctica de su propuesta didáctica.

En la siguiente tabla se indican los enunciados literales de las dificultades (columna izquierda) y el criterio asignado (columna derecha).

Se observa que los criterios Orden y Operación no han sido asignados a ninguna de las dificultades mencionadas por la autora.

Dificultades detectadas por la autora	Criterios
1. Correspondencia entre la notación habitual operatoria y decimal de los Números Reales.	Representa-ciones
2. Construcción del concepto de Número real, a través de sus distintas representaciones numéricas y la interrelación entre las mismas.	Representa-ciones
3. Comprensión de los alumnos sobre el significado de la medida. El problema de la unidad.	Fenómeno-logía
4. Conmensurabilidad de segmentos y expresión de su relación mediante un número.	Fenómeno-logía.
5. Capacidad de los alumnos para conectar la conmensurabilidad de una longitud con respecto a otra tomada como unidad con la expresión racional (fracción, decimal periódico) de dicha longitud en esa unidad. Capacidad para establecer la consiguiente inconmensurabilidad de longitudes cuya expresión no es racional (lados de cuadrados de área dada, longitud de la circunferencia con respecto a su diámetro, lados de figuras con las proporciones áureas...).	Fenomeno-logía.
6. Capacidad para comprender la no existencia en el plano físico de longitudes inconmensurables y de cuestionarse la existencia en otro plano.	Fenómeno-logía

Tabla 3.16: Asignación de criterios a las dificultades detectadas en una investigación (Romero, 1995)

Dificultades detectadas por la autora	Criterios
7. Carácter de aplicación de la correspondencia Números Reales-puntos de la recta. Asignación de un punto de la recta a las distintas notaciones de los números racionales e irracionales. Procedimientos para realizar esta asignación.	Representa-ciones. Fenomeno-logía.
8. Sobreyectividad de la correspondencia Números Reales-puntos de la recta. Evolución de la comprensión a lo largo del proceso didáctico.	Representa-ciones
9. Comprensión de los alumnos del concepto de número real sobre la base de la tipología establecida para las expresiones decimales, de las características que otorgan estatus de número a dichas expresiones decimales, y de su comparación y clasificación tanto en el ámbito numérico como geométrico.	Representa-ciones
10. Conflicto entre la finitud actual de la longitud irracional y la infinitud potencial de su expresión decimal.	Fenomeno-logía. Representa-ciones.
El concepto de Número Real, en relación con los distintos conjuntos numéricos manejados por los alumnos.	Tipo de Número.

Continuación tabla 3.16: Asignación de criterios a las dificultades detectadas en una investigación (Romero, 1995)

El segundo texto analizado desde la perspectiva de los criterios corresponde a un informe de investigación en la que los autores intentan evaluar la presencia o ausencia de obstáculos intuitivos en los alumnos relacionados con la dificultad en aceptar que dos magnitudes (dos segmentos de recta) pueden ser inconmensurables y la dificultad en aceptar que el conjunto de números racionales, aunque sea denso, no cubre todos los puntos de un intervalo (Fischbein et al., 1995). En la tabla 3.17 se describen enunciados del texto (columna izquierda) y los criterios en los que se incluyen cada una (columna derecha).

Enunciados literales del texto	Criterios
"La primera cuestión presentaba 15 números de varios tipos y los estudiantes tenían que determinar su pertenencia a diversas clases de números".	Tipo de número
(Definición de número racional) "Un número que puede ser escrito como el cociente de dos enteros o un decimal periódico con una infinidad de dígitos".	Representa-ciones; Operaciones
(Definición de números irracionales) " 'Un número irracional es aquel que no puede ser expresado como el cociente de dos enteros' o 'Un irracional es representado por un decimal no periódico con una infinidad de dígitos' "	Representa-ciones.

Tabla 3.17: Asignación de criterios a enunciados de un informe de investigación (Fischbein et al, 1995)

Enunciados literales del texto	Criterios
(Definición de número real) "Un número que es racional o irracional".	Tipo de Número.
"Dados dos puntos A y B sobre una línea recta, ¿cuántos puntos correspondientes a números racionales hay en el intervalo?"	Representaciones, Orden.
"A cada número irracional corresponde un punto sobre el eje numérico".	Representaciones.
"A cada punto sobre el eje numérico, corresponde un número real".	Representaciones.
"(a) Hay más elementos en Q. (b) Hay más elementos en J [conjunto de números irracionales]. (c) Hay la misma cantidad de elementos en ambos".	Tipos de números.
"La primer cuestión preguntaba si es siempre posible encontrar para dos segmentos de recta AB y CD de longitudes diferentes una unidad común (esto es, un segmento que pueda cubrir por iteración exactamente los dos segmentos dados)".	Fenómenología.
"Consideremos el segmento AB y tomemos un punto M aleatoriamente sobre este segmento. Dividamos el segmento AB en [partes] iguales y sea C el punto de división. Dividamos otra vez CB en dos partes iguales (con C_1 como el punto de división). Continuemos dividiendo, de la misma forma, los segmentos en los que está el punto M. - ¿Es el proceso de división finito o infinito? - ¿Podría uno de los puntos de división, si uno continúa dividiendo, coincidir con el punto M?"	Orden.

Continuación tabla 3.17: Asignación de criterios a enunciados de un informe de investigación (Fischbein et al, 1995)

Con esta utilización de los criterios en la organización de afirmaciones concernientes al número real finaliza el apartado dedicado al desarrollo de los cinco criterios para el estudio de los números reales.

Durante el mismo se ha realizado un estudio exhaustivo de cinco ámbitos que consideramos adecuados para captar todas las afirmaciones de alumnos referidas a números reales.

En los capítulos 4 y 6 se utilizarán los criterios para interpretar las respuestas de alumnos a las situaciones planteadas en entrevistas y en un cuestionario.

3.6. Representación de los números reales en la recta[14]

En el apartado 3.5 de este capítulo hemos organizado el estudio de los números reales en cinco criterios. En el criterio 'Representación' describimos posibles representaciones de números reales. Sin embargo, no hemos abordado allí la representación en la recta, porque esperamos profundizar en el presente apartado sobre diversas cuestiones relacionadas con esta representación.

En nuestra investigación consideramos la recta geométrica como un fenómeno geométrico explicado por los números reales. Mientras que algunas representaciones de números (posicional, fraccionaria, radicales, etc., descritas en 3.5) son creaciones de los matemáticos para designar e identificar algunos números, el caso de la representación en la recta es diferente.

La recta geométrica es un objeto matemático estudiado desde la antigüedad. La identificación de la recta con el conjunto de números reales es relativamente nueva y requiere de un axioma que más adelante enunciaremos. "Este axioma nos permite identificar la línea geométrica y la línea numérica; una identificación que los griegos nunca hicieron" (Crossley, 1987; p.109).

La 'representación de un número en la recta' es la expresión habitualmente utilizada para aludir a la asignación de un número a un punto de la recta, a partir de la asignación previa de los números 0 y 1 a dos puntos cualesquiera. Desde el punto de vista escolar, la "recta" viene a ser como un soporte de números que progresivamente se va "completando"; en Primaria se comienza "poniendo" naturales y en Bachillerato se acaba situando reales, que ya no dejarían "huecos" en ella: fijados dos puntos distintos, que representan respectivamente el cero y la unidad, se establece una aplicación biyectiva entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos de la recta.

Muchos libros sancionan esta práctica habitual en el medio educativo; por ejemplo, un conocido Diccionario de Matemáticas (Bouvier y George, 1984) define 'recta numérica' como "conjunto ordenado de los números reales R". Esta definición, y otras análogas, se apoyan en la amplia difusión, coherencia y aplicación de la hoy clásica interpretación debida a Cantor y Dedekind.

En este apartado abordaremos diferentes cuestiones relacionadas con la representación de números en la recta.

En la sección 3.6.1 establecemos las diferentes piezas de nuestro análisis, que conducen a la formulación de una conjetura a la que esperamos dar crédito y sentido en el presente apartado.

En la sección 3.6.2 abordamos selectivamente la controversia en torno a la 'naturaleza' de la recta geométrica y recogemos algunas interpretaciones diferentes de la recta de origen matemático.

---

[14] El contenido de este apartado está extraído esencialmente de Coriat y Scaglia (2000).

En 3.6.3 incluimos los resultados de algunas investigaciones preocupadas por describir intuiciones de los sujetos respecto de la recta geométrica.

En la sección 3.6.4 analizamos la asignación concreta de números reales a puntos de la recta.

En la sección 3.6.5 comparamos diferentes representaciones de números reales con la representación en la recta

3.6.1. La identificación del continuo aritmético con la recta geométrica

Como hemos mencionado en la introducción, la identificación números reales / puntos de la recta es un resultado matemático de los últimos siglos. “Los griegos han reservado claramente el concepto de número a los números enteros, lo que resulta homogéneo a su idea de la composición del número a partir del Uno, porque sólo el número entero natural es representable como adición de unidades. Para tratar el continuo, han utilizado las denominaciones geométricas, como la relación de magnitudes, o la medida. Esta poderosa concepción ha sido atravesada enteramente por la división de las matemáticas según que se relacionen a uno o a otro de lo que los Griegos consideraban como dos tipos de objetos posibles: el número (de donde procede la aritmética) y las figuras (de donde procede la geometría)” (Badiou; 1990; pp. 20-21).

A partir del siglo XX comenzó a emerger una idea de número más acorde a nuestra concepción actual: “[...] Simon Stevin (1585) argumentó que no sólo uno es un número, sino que hay una completa correspondencia entre número (positivo) y magnitud continua, como también un cierto paralelismo entre ciertas construcciones geométricas y las ahora familiares operaciones aritméticas sobre números” (Ehrlich, 1994; p. vii)

Sin embargo, se mantenía una distinción entre magnitudes aritméticas y magnitudes geométricas: “Antes de la aritmetización del análisis, había una distinción implícita mantenida por muchos analistas entre *magnitud continua euclídea (geométrica)* y la *magnitud continua del análisis*, se asumía que la última era más rica que la primera” (Ehrlich, 1994; pp. vii-viii).

Los argumentos anteriores pretenden apoyar, por un lado, nuestra idea de que la representación en la recta supone una identificación entre dos conceptos matemáticos: recta y conjunto de números reales, que va más allá de una simple representación de uno por el otro, como se asumiría superficialmente. Se trata de asignar a un concepto matemático la estructura de otro concepto. Se trata, en suma, de un fenómeno matemático (la recta) que es explicado, en un nivel superior, por otro (el conjunto de números reales).

Por otro lado, esos argumentos dan constancia de un proceso costoso, que llevó más de 20 siglos completar. No podríamos dilucidar aquí todas las razones que obstaculizaron la identificación de la recta con los números reales (proceso en el que la dificultad para establecer una formulación clara para el sistema de los números reales juega un papel fundamental). Sin embargo, destacaremos algunas cuestiones relacionadas con esta identificación que pueden aclarar el panorama. Estas cuestiones son de tipo epistemológico, cognitivo, fenomenológico y de pura representación. A continuación presentamos las piezas de nuestro análisis.

En primer lugar, la biyección números reales / puntos de la recta constituye una toma de partido respecto de la naturaleza de la recta. Esta toma de partido, representada por la esencial aportación de Cantor y Dedekind, ha permitido que la discusión sobre la 'naturaleza de la recta', prosiga, dentro de la matemática, a lo largo del presente siglo, a través de diferentes axiomáticas. Junto a una interpretación hoy estándar, iniciada por Cantor y Dedekind, existen otras interpretaciones debidas a Robinson y a Veronese. Las concepciones de estos últimos autores, si bien no coinciden, tienen en común la adición de objetos infinitesimales (números o segmentos, respectivamente) a la recta.

En segundo lugar, aunque la discusión en torno a la naturaleza de la recta se realice a través de argumentos formales, pone en juego intuiciones esencialmente diferentes; ahora bien, las intuiciones son duraderas y se expresan ya desde la edad escolar. Fischbein (1987; p.211) sostiene que “el problema educativo no es eliminar las representaciones e interpretaciones intuitivas, sino desarrollar la capacidad del estudiante para analizar y poner bajo control sus concepciones intuitivas y construir nuevas intuiciones consistentes con los requerimientos científicos normales”. De hecho, tampoco hay coincidencia acerca de las intuiciones que se puedan tener de la recta como objeto mental (Solomon, 1991). Las intuiciones de la recta son variadas y discrepantes, incluso contradictorias, como algunas investigaciones ponen de manifiesto (Mansfield (1985); Romero (1996)).

En tercer lugar, la biyección puntos / números asegura una correspondencia entre *todos* los números reales con *todos* los puntos de la recta. La teoría de los números constructibles proporciona una serie de resultados que permiten determinar con precisión si es posible asignar a un número dado un punto de una recta (a partir de un origen y unidad) mediante una construcción (finita) con regla y compás. Esta teoría también nos dice que muchos números reales quedan fuera de esta posibilidad. Una creencia básica en Bachillerato es el hecho de que la biyección número / punto se podría realizar efectivamente para todo número real. Cuando se considera que sólo disponemos de procedimientos precisos para una cantidad (infinita numerable) de números reales, se ve la necesidad de extender la noción de número constructible si se quiere dar más seguridad a esa creencia.

En cuarto lugar, aunque la biyección punto - número, aparentemente describa un simple emparejamiento de todos y cada uno de los puntos de la recta con todos y cada uno de los números reales, aún tenemos que resolver la cuestión de la atribución de etiquetas numéricas a los puntos, y esto constituye un problema que no es exclusivamente procedimental, sino también conceptual, como se pondrá de manifiesto. En Bachillerato se podrían evitar discusiones epistemológicas "decretando" que la recta geométrica “se llena” con los números reales, pero la complejidad del concepto de número real no es evitable. Al referirse a la complejidad de **R**, Romero (1995) propone que se combinen los sistemas de representación “notación decimal” y “modelo de la recta”. Si adoptamos la terminología de Romero, parecería que el sentido del propio “modelo de la recta” obliga a incorporar otros sistemas de representación. Dicho como conjetura: *la representación de números reales en la recta es más compleja que otras representaciones de estos números*, al menos en la Educación Secundaria.

En las próximas secciones desarrollaremos en mayor detalle las cuatro cuestiones descritas, desarrollo que reafirmará la conjetura anterior.

3.6.2. Cuestiones epistemológicas; la naturaleza de la recta

La controversia en torno a la 'naturaleza' de la recta geométrica es casi tan antigua como la filosofía. No es nuestro propósito contar su historia, sino recoger una selección de aportaciones originadas en el seno de las propias matemáticas y que han tenido lugar a lo largo del siglo XX. Esta selección elude dos destacadas aportaciones:

(1) Como aceptamos el infinito actual, no hemos incluido las matemáticas llamadas constructivas (ver, por ejemplo, Bishop y Bridges, 1985) ni las poderosas intuiciones elaboradas sobre el “continuo constructivista”. Por ejemplo, Van Dalen (1997) describe el continuo intuicionista como ‘indescomponible’, y demuestra que “si se quita un punto del continuo intuicionista, quedan puntos de los que no podemos saber si pertenecen o no a la parte restante”. La noción de continuidad expresada en 3.4.1 como la unión de los extremos de dos segmentos para constituir un solo punto, propia de la interpretación clásica (mantenida por Cantor y Dedekind), no tiene sentido en este enfoque.

(2) Hemos descartado también la mención de los números surreales de Conway. Aunque se han publicado presentaciones de estos números en forma de cuentos (Knuth, 1979) y el acercamiento puede hacerse a través de la teoría de juegos (Mainzer,1990), las demandas algebraicas de su construcción parecen excesivamente complejas como para usarlas fuera de la universidad y, sobre todo, antes de conocer los números reales.

La biyección números reales / puntos de la recta supone aceptar, como una cuestión básica, que la recta está constituida por puntos. Esta afirmación, que podría parecer trivial, ha generado mucha controversia y debate a lo largo de los siglos. Pérez de Tudela (1981) realiza una descripción bastante pormenorizada de la posición de distintos filósofos respecto de este debate.

Para Aristóteles la recta no está constituida por puntos. Afirma que dos cosas son 'continuas' cuando sus extremos son uno, y 'están en contacto' cuando sus extremos están juntos. La recta es continua, y según su definición, los extremos de la recta (es decir, los extremos de un segmento) que son puntos, deben ser uno. Sin embargo "ni los extremos de los puntos pueden ser uno, ya que en un indivisible no puede haber un extremo que sea distinto de otra parte, ni tampoco pueden estar juntos, pues lo que no tiene partes no puede tener extremos, ya que un extremo es distinto de aquello de lo cual es extremo" (Aristóteles, 1995; p. 336). Este razonamiento lleva a Aristóteles a dudar de que la recta esté constituida por puntos. Mientras que en la formalización de la geometría debida a Hilbert los puntos son primitivos (no definidos).

También Veronese acepta una respuesta negativa: "Cuando extraemos una parte de un continuo, introducimos signos o 'puntos' para marcar los extremos de las partes en las que descomponemos el continuo. Consideramos que los puntos no tienen partes. No necesitamos considerar que los puntos son por sí mismos *partes* del continuo, sino sólo entidades mentales auxiliares que indican dónde se unen las partes del continuo. El propio continuo no se compone de puntos" (Citado en Fisher, 1994; p.115).

Entre los partidarios de la afirmación opuesta encontramos a Dedekind y Cantor. Este último interpreta al continuo como mera suma de puntos inextensos actualmente presentes en él. (Pérez de Tudela, 1989).

Cantor y Dedekind (aparentemente de modo independiente) basaron la biyección entre números reales y puntos de la recta en un axioma. Según Crossley (1987; p.152), "fue Cantor quien primero señaló explícitamente que la identificación del sistema de números con puntos sobre la recta era una asunción que no podría ser demostrada, aunque ella parecía plausible y psicológicamente convincente –y aún lo parece a muchos matemáticos de hoy". Cantor afirma que una vez que ha sido determinado un origen sobre la recta, todo punto de la misma queda enteramente determinado por su abscisa. Posteriormente introduce un axioma: "Mas para completar el vínculo expuesto [...] entre los dominios de las magnitudes numéricas [...] y la geometría de la recta, es necesario añadir un *axioma* cuyo enunciado es simplemente el siguiente: a cada magnitud numérica corresponde también, recíprocamente un punto determinado de la recta, cuya ordenada es igual a esta magnitud numérica [...] Yo llamo a este enunciado un *axioma* porque está en su naturaleza el no poder ser demostrado de modo general" (Cantor, citado en Belna; 1996; p. 134).

También Dedekind (1998; p.84-85) reconoce que la continuidad de la recta es necesario expresarla mediante algún axioma: "Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes".

Dedekind, después de expresar su deseo de que todos encuentren su axioma evidente y coincidente con su representación de recta, indica la imposibilidad de manifestarse acerca de la verdadera naturaleza de la recta: "La suposición de esta propiedad de la línea no es más que un axioma mediante el cual atribuimos a la línea por vez primera su continuidad, mediante el cual introducimos la continuidad en nuestra idea de línea. Si el espacio tiene una existencia real, sin duda no es necesario que sea continuo; innumerables propiedades suyas seguirían siendo las mismas aunque fuera discontinuo. Y si supiéramos con certeza que el espacio es discontinuo, sin duda nada nos podría impedir, si así lo quisiéramos, que lo hiciéramos continuo en el pensamiento rellenando sus lagunas; pero esta compleción consistiría en una creación de individuos - punto, y habría de realizarse de acuerdo con el principio anterior" (p. 85).

En el prólogo del trabajo, Dedekind expresa que encuentra en el ya citado axioma de Cantor una afirmación idéntica a la suya (aunque formulada en otros términos) respecto de lo que constituye la esencia de la continuidad.

Crossley (1987; p.150) afirma que "[...] no hay manera de verificar cuál es la estructura 'real' (en el sentido de genuina) de la recta geométrica". Diferentes matemáticos han desarrollado estructuras numéricas que, basándose en una elección axiomática adecuada permiten utilizarla como modelo de esas estructuras. Solomon (1991) reconoce esta posibilidad de adecuación de la recta a diferentes estructuras cuando afirma: "En un sentido, la 'verdad' acerca de la naturaleza de la recta es una cuestión referida a cómo formalizamos las propiedades de la recta tal que sean consistentes con las propiedades de la matemática".

En el análisis no estándar de Robinson (1974) se trabaja con una estructura numérica (el sistema de números hiperreales) constituida por los números reales a los que se le incorporan los (números) infinitésimos e infinitos. Los números infinitésimos tienen sentido en el marco de una axiomática, elaborada por Robinson, "más amplia" que la axiomática de **R** (clásico) pero compatible con ella, como ilustra la figura 3.8. En el capítulo histórico de su libro, Robinson relaciona sus infinitésimos con las cantidades infinitesimales y evanescentes que estuvieron tan al uso a lo largo de los siglos XVII y XVIII, pero hoy por hoy no estamos en condiciones de "ver" los infinitésimos. (Cf. Kossak (1996).)

. En dicha estructura el axioma de Arquímedes no se satisface, puesto que el producto de un infinitésimo por cualquier real estándar o por otro infinitésimo es siempre menor que cualquier fracción ordinaria positiva. La recta hiperreal contiene, además de los números reales, los infinitésimos y los infinitos. Keisler (1976) representa estos números en la recta geométrica con ayuda de dos metáforas: "un microscopio infinitesimal" y "un telescopio infinito" para sugerir, respectivamente, los infinitésimos y los infinitos.

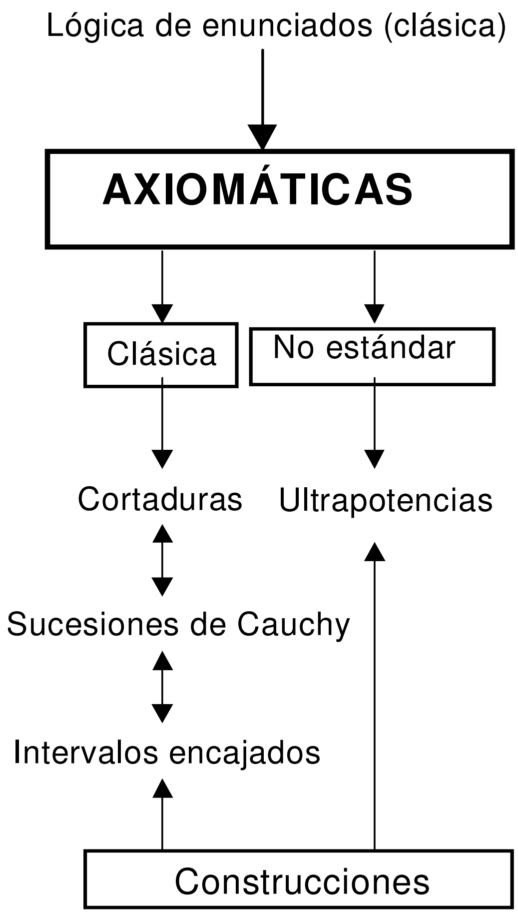


Figura 3.8: Números reales y números hiperreales

La controversia acerca de la interpretación de la recta es tratada por este autor cuando afirma: "El sistema de números reales es una creación puramente matemática que puede o no dar una imagen precisa de una línea recta en el espacio físico. El hecho es que, mientras que nuestros sentidos nos dan una muy buena idea de cómo son los segmentos de recta de tamaño medio, sabemos muy poco acerca de cómo son en el espacio físico segmentos de recta muy grandes o muy pequeños. Por otro lado, hasta donde podemos contar, la recta real es bastante como una recta en el espacio físico para todos los propósitos prácticos, y es fácil trabajar con ella. La recta real es por lo tanto un 'modelo matemático' útil de una recta en el espacio" (p. 1).

Casi medio siglo antes de que se concretara la formalización de los hiperreales, Veronese (1994) analizaba desde el punto de vista geométrico (no aritmético) la estructura de la línea recta, afirmando que el 'axioma' de Arquímedes puede ser deducido del postulado del continuo dado por Weierstrass y Cantor. Veronese formula otro axioma del continuo (lo llama postulado) en los siguientes términos: "Si en un segmento AB existe un segmento variable XX' tal que AX es siempre creciente y más pequeño que AX', que es siempre decreciente, y XX' pasa a ser infinitamente pequeño (es decir, más pequeño que cualquier segmento dado), entonces XX’ contiene un punto Y distinto de X y X’.” (p. 171)

A partir de este axioma, Veronese construye segmentos actualmente infinitos e infinitesimales. Estos últimos satisfacen las propiedades fundamentales de la línea recta, exceptuando el axioma de Arquímedes. Respecto de la interpretación de la recta, Veronese afirma: “El postulado según el cual un punto corresponde a cada número racional no está verificado en la práctica y si se idealiza el punto y el segmento de tal manera que este último siempre contenga puntos distintos de sus extremos, la correspondencia uno a uno entre los puntos de la línea recta y los números reales ordinarios no está ya justificada.” (p. 171)

El análisis no estándar de Robinson y el continuo geométrico de Veronese son ejemplos de modelos matemáticos no arquimedianos que suponen interpretaciones diferentes de la interpretación estándar de la recta.

Desde el punto de vista matemático, las interpretaciones de la recta se justifican mediante distintas formulaciones axiomáticas. Como se pone de manifiesto en las afirmaciones anteriores, sus respectivos defensores son conscientes de que no están descubriendo una 'naturaleza verdadera de la recta'; sólo realizan una elección axiomática que permite justificar (siguiendo una serie de inferencias válidas) los resultados posteriores.

Pensamos que las intuiciones son el soporte de estas elecciones axiomáticas. Esto no equivale a decir que "cada axioma" enuncie formalmente una intuición ni que cada conjunto de axiomas corresponda a un "conjunto" dado de intuiciones. El lenguaje matemático de hoy no tolera enunciados que pudieran calificarse de "psicológicamente vagos"; el matemático que quiere discutir o ampliar una axiomática no tiene más remedio que enunciar otra axiomática y extraer consecuencias lógicas de ella.

Los textos que hemos recogido ponen de manifiesto que hay axiomáticas bien compatibles o bien incompatibles con determinadas intuiciones y que una discusión inicial de carácter intuitivo sirve de soporte a posteriores elaboraciones axiomáticas. (En la mayoría de los casos, dichas intuiciones quedan ocultas por el deslizamiento semántico producido al usar los mismos términos.). Aunque los enunciados intuitivos no sirven para hacer matemáticas, guían a los autores en su búsqueda de afirmaciones axiomáticas.

En esta sección hemos intentado poner de manifiesto que la interpretación de la naturaleza de la recta está basada en decisiones axiomáticas, aunque probablemente respondan a intuiciones iniciales que constituyen el punto de partida para desarrollos posteriores. Sin embargo, los autores de las diferentes interpretaciones son conscientes de que las estructuras por ellos desarrolladas no constituyen las ‘auténticas’ interpretaciones de la recta. Relacionamos estas consideraciones con la postura de Bachelard desarrollada en el apartado 3.2 de este capítulo. Este filósofo reconoce el origen intuitivo de las nociones matemáticas, y reconoce asimismo que el desarrollo posterior de la teoría se rige únicamente por las leyes del pensamiento, que actúan con total libertad, quedando únicamente limitada a las reglas (los axiomas) impuestos (también con total libertad).

3.6.3. Intuiciones de los sujetos respecto de la recta

Al usar el término intuición entramos en un campo psicológico inevitablemente complejo, en el que no somos expertos. Hasta donde somos capaces de controlar el sentido de este término, seguimos a Fischbein (1987)[15].

En esta sección describimos los resultados de algunas investigaciones en las que se han puesto de manifiesto ideas e intuiciones de los alumnos referidas a la recta geométrica. El objetivo es describir qué dicen los sujetos en relación con la estructura de la recta, según algunos investigadores.

Solomon (1991) analiza desde el punto de vista psicológico la doble naturaleza que tiene una recta para la mente humana. Hace una distinción entre la recta como 'idea', que tiene propiedades contradictorias (por ejemplo, un segmento de recta puede pensarse como un conjunto de puntos, o también como un conjunto de infinitésimos) y la recta como 'objeto físico' (un segmento de recta en el espacio físico es un conjunto finito de puntos discretos). "Discreto y continuo son propiedades que precipitan cuando adoptamos un punto de vista, al examinar la recta". Este autor concluye que la naturaleza dual de la recta puede tomarse como un símbolo de la naturaleza dual de la mente. "Hay niveles de significado y de experiencia más profundos que están disponibles si podemos aprender a pensar más profundamente, y también a poner el pensamiento a un lado – ir más allá de la lógica".

Mansfield (1985) ha estudiado las interpretaciones de sujetos de diferentes edades de las nociones de punto y recta. Considera que las ideas o concepciones previas que los sujetos tienen de estas nociones intervienen en la consideración de las ideas trabajadas durante las clases de matemática. Las concepciones previas son el resultado del uso de estos términos en la vida cotidiana y del tratamiento informal de estas nociones durante la vida escolar, y en ocasiones contribuyen a construir marcos conceptuales de punto y recta que difieren de los usados por los matemáticos. "Las diferencias principales eran la identificación de tres formas diferentes de rectas, la idea de que la recta tiene anchura, la noción de que los puntos son entidades añadidas a las rectas, y la idea de que los puntos tienen una forma y un tamaño definido" (Mansfield, 1985).

En su estudio se pone de manifiesto el hecho de que muchos sujetos rechazan la distinción entre punto y recta como objetos abstractos utilizados por los

[15] Para este autor una intuición "es una concepción cristalizada (muy a menudo prematuramente cerrada) donde la incompletitud o vaguedad de información se enmascara mediante mecanismos especiales para producir los sentimientos de inmediatez, coherencia y confianza" (Fischbein, 1987; p.x).

matemáticos y marcas y trazos efectuados para representarlos. “Si los estudiantes no distinguen entre conceptos geométricos abstractos y sus representaciones físicas, entonces sus conceptos incluirán propiedades y relaciones basadas sobre características de aquellas representaciones que no forman parte de los conceptos tal como son usados por los matemáticos” (Mansfield, 1985). La falta de distinción entre puntos y rectas y sus representaciones fue observada incluso en algunos sujetos de universidad.

Robinet ha estudiado las ideas que estudiantes de primer año de universidad tienen respecto de los números reales. Considerando que algunos sujetos podrían utilizar la recta geométrica como modelo de los números reales, este investigador incluyó la siguiente pregunta en el cuestionario: “Si se amplificara con el microscopio electrónico (o con un ordenador) la recta, ¿qué se obtendría como dibujo «último»” (Robinet, 1986). Para aquellos sujetos que utilizaran la recta como modelo de **R**, la respuesta a esta pregunta proporcionaría al investigador información referida al modelo de **R** de estos sujetos.

El investigador reconoce que no ha sido posible obtener la idea de recta que tienen algunos estudiantes mediante esta pregunta. “En efecto algunos no tienen quizá imagen mental y otros tienen quizá una tendencia a hacer una mezcla entre imagen mental e imagen perceptiva; finalmente algunos están inclinados a responder físicamente, es decir que responden como si se les hubiera dicho que se amplifica el trazo del lápiz” (Robinet, 1986). Esta última respuesta señala la falta de distinción entre la recta y su representación señalada por Mansfield.

Las respuestas fueron clasificadas en clases no disjuntas. El investigador considera que las nociones que han surgido en las respuestas son: orden (puntos alineados), discretitud (el dibujo último es un punto), infinito (hay infinitos puntos en la recta), densidad (infinidad de puntos entre dos puntos) y continuidad (el dibujo último es una recta). El investigador concluye que la recta no da ‘intuitivamente’ una buena representación de **R** para todos los sujetos.

En una investigación respecto de los esquemas conceptuales del continuo de sujetos de 16-17 años, Romero (1996) propone a los alumnos una reformulación de la cuestión planteada por Robinet. “La recta se percibe, o bien como una especie de cinta, o como un conjunto de puntos que, con frecuencia, son discos o pequeñas esferas” (Romero, 1996). Con respecto a la estructura de la recta, este autor establece perfiles de individuos ‘continuistas’ y ‘atomistas’ respectivamente. Los primeros ven la línea recta como un todo, y no reconocen *elementos* en ella; los segundos ven *elementos* en la línea recta, que están más o menos estructurados. Entre estos individuos ‘atomistas’, algunos no consideran la estructura de orden no discreto de la recta, mientras que otros sí lo hacen.

En el apartado 3.6.2 indicamos que no es posible hablar de ‘una naturaleza de la recta’, y que en matemática la recta se utiliza como modelo de diferentes estructuras aritméticas. En las investigaciones que comentamos en esta sección se pone de manifiesto que las interpretaciones de los sujetos de la recta son muy variadas. Los investigadores que intentaron comprobar si las propiedades o características atribuidas a la recta por los sujetos se corresponden con las características de **R** han obtenido, en general, respuestas negativas.

Por otro lado, ha habido evidencias en las investigaciones revisadas de que la distinción que establece Solomon entre la recta como 'objeto ideal' y la recta como 'objeto físico' pasa desapercibida para algunos sujetos.

3.6.4. Cuestiones fenomenológicas; un análisis conceptual

En esta sección analizaremos en detalle la actividad de asignar puntos de la recta a números reales, y recíprocamente, números reales a puntos de la recta.

Para establecer una biyección entre puntos de la recta y números reales hemos de aceptar dos supuestos: (1) La recta se compone de puntos. (2) La linealidad geométrica se describe mediante la estructura de espacio vectorial de dimensión 1 sobre el cuerpo **R**.

Tradicionalmente, la ley que rige la correspondencia *números reales - puntos de la recta* se apoya en la medida de longitudes: Fijados dos puntos cualesquiera, O e I, designados con los números 0 y 1, respectivamente, a todo número real r le corresponde un único punto M de la recta tal que OM = r OI. El vector OM es igual al producto del real r por el vector OI; r se llama abscisa del punto M y $|r|$ corresponde a la medida del segmento OM según la unidad OI.

Fowler (1992) establece la biyección números reales - puntos de la recta mediante un sistema de etiquetado. A partir de dos puntos cualesquiera, etiquetados con 0 y 1 respectivamente, y mediante el algoritmo de Euclides, "el conjunto de números reales será el conjunto de todas las posibles etiquetas, tal que las etiquetas determinarán lo que concebimos como los puntos de la recta, y las propiedades de estas etiquetas determinarán las propiedades geométricas de la recta."

En general, se acepta que la recta geométrica exhibe el orden continuo y total de **R**. El orden continuo de **R** (y de la recta de puntos) lo describimos diciendo que no hay ningún método que permita asignar un sucesor a todo número real (ni a todo punto). Por lo que respecta al orden total, elegida la orientación habitual, decir que un punto A está a la izquierda de otro punto B equivale a decir de sus respectivas abscisas, r y r',que r < r'.

El estudio que sigue se refiere a la primera biyección mencionada, porque usualmente es la que se utiliza en el Sistema Escolar; el término "etiqueta", por tanto, no remite al enfoque de Fowler, sino al emparejamiento de puntos y números a través de alguna medición.

Una estrategia sencilla consiste en analizar cómo dado un punto de la recta se llega a "su" abscisa y cómo dado un número real se llega a “su” marca puntual. Sin embargo, previamente conviene analizar las expresiones “punto dado” y “número dado”.

El sentido de “dar un punto” (para determinar el número real asociado) exige dos “operaciones” complementarias: la de distinguir en la recta ese punto con alguna marca y suponer dadas otras dos marcas correspondientes al origen y unidad; en este caso, el problema de medida consiste en determinar r conocidos O, I y M.

Si el dato es el número, el problema de medida consiste en determinar M conocidos O, I y r. Ahora bien, para “dar un número” necesitamos una descripción inequívoca de r (como en “r = dos” o "r = 0’333..."); esa descripción se apoya al menos en una representación (por ejemplo: verbal, base diez, fracción continua, icónica). Ninguna representación permite describir inequívocamente *todos* los números reales; por ejemplo, el conjunto de números decimales de hasta n cifras, $\mathbf{D_n}$, es numerable, mientras que **R** no lo es. Sabemos describir acaso todos los algebraicos así como *muchos* números trascendentes. (Algunos computables son trascendentes, como 0’123456789101112... Algunos trascendentes no son computables.)

Por consiguiente, la tarea que vamos a abordar no puede realizarse exhaustivamente (ni *para todo* número real, porque hay muchos números reales que no sabemos describir inequívocamente, ni *para todo* punto, porque no sabríamos la descripción de su abscisa).

También conviene observar que, supuesta una descripción inequívoca de un número real, no tenemos garantía de expresarla en términos de medidas. Así la fracción continua infinita [1; 1, 1, 1, ...] carece de significado métrico; sólo lo adquiere cuando establecemos que se trata de una representación del número áureo.

3.6.4.1. Determinación del punto correspondiente a un número dado

Fijados los puntos correspondientes a 0 y 1, el siguiente paso en la representación de un número real cualquiera es determinar el correspondiente punto de la recta. Tratándose de un procedimiento de medición, la manipulación con instrumentos físicos (como la regla graduada, el micrómetro, la regla de un solo borde y el compás o el intégrafo) para determinar la posición de un número real sobre una recta produce siempre un resultado aproximado. Pasamos, por tanto, revista a dos instrumentos ideales: la regla y el compás y el intégrafo.

- Es posible representar exactamente números reales mediante procedimientos geométricos que involucran el uso de la regla y el compás ideales. Estos números están bien estudiados; se denominan constructibles y constituyen un subcuerpo de **R** estable por la raíz cuadrada (Carrega, 1981).

- Para determinar puntos asociados a números reales con un intégrafo (Puig Adam, 1962; pp.109-110), se necesita un buen conocimiento de la integral de Riemann y de algunos movimientos en el plano (giros y traslaciones) que posibilitan la obtención progresiva de una primitiva a medida que se recorre la gráfica de una función. Cabe imaginar simulaciones (no ideales) de este artefacto basadas en medios informáticos. Si suponemos que la gráfica de la función continua dada constituye una representación exacta de dicha función, entonces un intégrafo ideal permitiría construir segmentos de longitud arbitraria. (Pueden consultarse indicaciones para construir un segmento de longitud π en Coriat y otros (1989; pp.135-136).)

En resumen: hay métodos para determinar el punto de la recta correspondiente a un real dado y dependen de la representación de éste. Todos los números constructibles con regla y compás admiten una representación idealmente exacta; los restantes números (sean algebraicos o trascendentes) no admiten hoy día una representación idealmente exacta. El uso del intégrafo para "cualquier" número o la definición de números algebraicos mediante procedimientos finitos (ver Recio, 1998; pp.101-150) no tienen sentido sin un buen conocimiento previo del número real.

3.6.4.2. Determinación del número real correspondiente a un punto dado

La identificación del número real que corresponde a un punto dado M fijados el origen y la unidad de medida, desde el punto de vista físico es siempre aproximada.

- Cuando *se conoce alguna relación* entre los puntos que corresponden al origen, unidad y el punto M, podemos hablar de una medida indirecta, pues está basada en una relación que comúnmente es geométrica. En este caso, desde el punto de vista 'ideal' la determinación del número real es exacta, aunque en la práctica es posible que se produzca algún error, y la medición resulte, en el plano físico, aproximada. Veamos un ejemplo de medición indirecta. En la figura 3.9 se ha construido una recta y se han marcado tres puntos sobre ella, O, I y M, de modo que la distancia entre I y M es el doble de la distancia entre O e I. Si las abscisas de los puntos O e I son 0 y 1 respectivamente, la información proporcionada es suficiente para determinar la abscisa de M, 3, pero la relación dada entre las longitudes de los segmentos OI e IM juega un papel crítico.

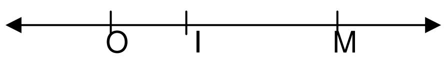


Figura 3.9: Relación especificada entre los tres puntos; IM = 2. OI

• Cuando *no se conoce relación alguna* entre los puntos correspondientes al origen, unidad y el punto M, la medición es aproximada, y se debe recurrir a instrumentos de medida. En este caso la medición es directa, por aplicación sucesiva del segmento unidad. Se trata de identificar en principio el intervalo de extremos enteros al que pertenece el punto M. Si este punto coincide con algún extremo del intervalo, el trabajo ha terminado. Si no es así, es posible realizar subdivisiones sucesivas en el intervalo, para mejorar cuanto sea posible la estimación del real correspondiente a M. La figura 3.10 presenta un ejemplo de este tipo de medición; conocemos los puntos correspondientes a 0 y 1 (O e I respectivamente).

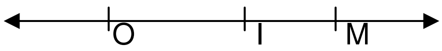


Figura 3.10: Sin relación especificada entre los tres puntos

A simple vista podemos afirmar que la abscisa de M está comprendida entre 1 y 2. Si afinamos la observación y recurrimos a algún instrumento de medición (como una regla graduada o un compás), podemos mejorar nuestra estimación numérica, pero siempre estamos limitados por la potencia del instrumento utilizado y por las características físicas del gráfico (constituido por un trazo de tinta de espesor variable sobre una hoja de papel).

Teniendo en cuenta las distancias que indica el procesador de texto empleado, entre los puntos O e I (1,80 cm) e I y M (1,20 cm) de la figura 3.10, hemos conseguido etiquetar M con la abscisa 5/3. Sin embargo, esas distancias están calculadas con una aproximación de dos cifras decimales. Si dispusiésemos de un programa más preciso, la identificación numérica del punto M (figura 3.10) sería algo diferente (la diferencia en valor absoluto dependerá de la aproximación decimal que ese nuevo programa permita).

Las medidas directas se agotan habitualmente en $\mathbf{D_2}$ o $\mathbf{D_3}$. Es posible proseguir el proceso de subdividir la unidad, pero no es seguro que se admita la posibilidad de un proceso infinito. Romero (1995), en su descripción de las actividades de medición y representación en la recta de números irracionales, llevada a cabo con alumnos de 14-15 años, expresa: “Cuando yo intento diferenciar entre el plano físico, en el que están llevando a cabo la conmensuración, y el plano ideal, en el que dicha conmensuración se prolongaría infinitamente, ya que no existiría una parte alícuota que permitiera dar un resultado en forma de fracción, de forma que se puedan integrar ambos modos de medida, los alumnos quedan fuera de este tipo de discurso” (p. 231).

En educación es preciso suscitar la posibilidad de un proceso infinito, que justifique el abandono del marco de la medida directa, y considerar relaciones geométricas entre cantidades, es decir, recurrir a la medición indirecta. A título de ejemplo, consideremos la representación en la recta del número 1/11. La división de 1 entre 11 conduce a un proceso infinito, caracterizado por la repetición del patrón "resto parcial igual a 1", y conduce al cociente exacto 0'09090909... La aceptación de este proceso infinito es clave en el paso de la representación fraccionaria a la decimal. Las diferentes cifras del cociente se pueden traducir a operaciones de medida: desde la marca cero, marcar 9 centésimas; desde esta marca, marcar nueve diezmilésimas, y así, sucesivamente; sin embargo, este proceso infinito de medida no permite obtener una representación exacta en la recta (en la práctica, las marcas acabarían por "superponerse"; en la teoría, ignoramos cómo este proceso de medición directa podría conducirnos hasta el límite). Para conseguir esa representación exacta tenemos que recurrir a relaciones geométricas elementales (en este caso, el teorema de Tales) que permiten dividir un segmento unidad en once partes iguales. (No se debe olvidar que hay infinitos números reales para cuya representación en la recta no disponemos de relaciones geométricas.)

Como resultado de este estudio, concluimos que el establecimiento de una relación métrica entre dos de los segmentos determinados por tres puntos es una condición necesaria y suficiente para determinar de modo exacto el número real correspondiente a uno de esos tres puntos. No hemos encontrado ninguna otra posibilidad. En esto se apoya, por ejemplo, el físico, para escribir fórmulas con cantidades que en la práctica no se pueden medir con total precisión.

La representación en la recta de los números reales está ligada a la aceptación intuitiva de que las marcas sobre la recta corresponden a los números indicados, pero la coincidencia entre las marcas geométricas y las etiquetas numéricas difícilmente será “exacta”.

Como las mediciones reales son siempre aproximadas, sólo es posible hablar de una medición exacta desde un punto de vista ideal, cuando se realizan mediciones indirectas, conociendo una relación geométrica, o mediante construcciones con instrumentos geométricos (regla y compás ideales). Para controlar la precisión de una medida se utilizan las nociones de error absoluto y error relativo. Dado un número real x, que representa la “medida exacta”, y siendo w el valor obtenido en una medición, el error absoluto se define como $|x - w|$. El error relativo es igual al cociente entre el error absoluto y el casi siempre inaccesible valor exacto, es decir, $|x - w| / x$.

3.6.4.3. Conclusiones

Resumiendo las ideas anteriores:

(1) La identificación punto - número “para cualquier número real”, es esencialmente aproximada o exige un buen conocimiento de **R**.

(2) "Físicamente", la identificación punto - número nunca es exacta.

(3) Para que la representación sea "idealmente" exacta es necesario que se dé una condición suplementaria: o bien el número dado es constructible con regla y compás; o bien el tercer punto dado se relaciona con los correspondientes a 0 y 1 mediante una relación explícita que es equivalente a la constructibilidad con regla y compás.

Como consecuencia, pensamos que, en Educación Secundaria, hay razones para afirmar que:

(A) La asignación concreta punto - número se apoya en dos supuestos: (1º) La recta está formada por puntos; (2º) a cada número real le corresponde un único punto y recíprocamente. En Educación Secundaria, el segundo supuesto se genera "intuyendo" o "decretando" que la constructibilidad se generaliza a todo número real.

(B) No hay inconveniente en admitir que puedan inventarse procedimientos finitos para asociar exactamente puntos de la recta y números reales no constructibles con regla y compás. En este caso, es necesario ampliar la noción de punto / número constructible, pero de manera que esta ampliación no implique un buen conocimiento previo de **R** (el cual, precisamente, se está estudiando).

3.6.5. La representación en la recta y otras representaciones de números reales

En este apartado repasamos brevemente algunas diferencias entre las representaciones simbólicas y gráficas de los números reales y la representación de éstos en la recta, con objeto de justificar la conjetura enunciada en la introducción; en el caso de las representaciones gráficas, hemos limitado el estudio comparativo a la relación parte / todo porque ésta es la única que admite enfoques continuos (cosa que no ocurre con otras representaciones gráficas, como los números figurados). Hemos incluido una colección de características que consideramos distintivas de la representación en la recta.

3.6.5.1. Representación en la recta y representaciones simbólicas

1- La notación decimal constituye una herramienta esencial para representar números a pesar de que no existe biyección entre $\mathbf{D_n}$ y **R**.

El procedimiento de representación 'directamente' asociado a un número expresado en notación decimal es el método de intervalos encajados: se subdivide progresivamente en diez partes, y se toman las subdivisiones indicadas por las décimas, centésimas, etc., de la representación decimal. Cuando la representación decimal es finita, el método conduce a un resultado exacto, desde un punto de vista ideal. Cuando la representación decimal es infinita, el método de los intervalos encajados conduce a un resultado, desde el punto de vista ideal, aproximado.

2- Si el número es racional, el procedimiento sistemático de representación en la recta es el teorema de Tales; si el número es constructible (no racional) el procedimiento sistemático es el teorema de Pitágoras. En el primer caso, la representación simbólica directamente asociada es la fraccionaria; en el segundo caso, la representación icónica mediante radicales.

3- Las representaciones simbólicas no siempre permiten visualizar la noción de orden. La representación simbólica de los números reales mediante la notación decimal, por ejemplo, permite ordenar dos números dados, aunque en algunos casos no se logre "de un vistazo" el reconocimiento de qué número es mayor, como ocurre con la pareja 0’4899899 y 0’4898999.

La comparación de dos fracciones se realiza recurriendo a un algoritmo. La comparación de dos radicales de igual índice se realiza directamente comparando los respectivos radicandos. Cuando se comparan números reales expresados con diferentes notaciones simbólicas, el trabajo es más complejo, y es necesario muchas veces usar una representación común, como ocurre en los siguientes casos: $\sqrt{2}$ y 17/12; π y 22/7.

4- *Para indicar el número real que corresponde a un punto de la recta es necesario recurrir a una representación simbólica*, como por ejemplo la notación fraccionaria, la notación en el sistema decimal, o la notación operatoria habitual de radicales. Sin estas representaciones simbólicas, la marca en la recta sería imposible de interpretar.

La notación fraccionaria (2/3) y la de radical ($\sqrt{2}$) se apoyan, a su vez, en la notación decimal. Numerador, denominador, índice y radicando están formados por números expresados en el sistema decimal (2, 3, 2, 2, respectivamente). En estos casos, un algoritmo u operación permite pasar a una representación decimal aproximada de dichos números. Sin embargo, la diferencia que se establece con la representación en la recta, es que cualquiera de estas combinaciones de símbolos (2/3, $\sqrt{2}$) representa un único número que queda identificado completamente con esa representación. Un punto sobre la recta debe asociarse a alguna etiqueta simbólica para que se produzca la representación del número real así simbolizado en aquélla.

Como ya se indicó, precisamente 2/3 y $\sqrt{2}$ admiten una marca idealmente exacta. No ocurre lo mismo con las expresiones decimales correspondientes 0'666666666... y 1'41421356... si no se conoce el proceso que permite identificar estas representaciones decimales con sus respectivas representaciones simbólicas equivalentes.

5- Un número admite representaciones equivalentes (2/3 = 4/6; $2^{1/2} = 2^{2/4}$...), mientras que los puntos son idénticos e indiferenciados. Aunque cualquier representación simbólica inequívoca identifique un único número real, en la recta se necesita una pareja ("punto resaltado" – "representación simbólica") para identificar la asociación única punto-número.

3.6.5.2. Representación en la recta y relación parte / todo

Los gráficos utilizados para expresar la relación parte / todo sólo comparten con la representación en la recta la idea de asociar un número a un signo o gráfico (un punto sobre la recta o una figura geométrica dividida en su interior). Las diferencias entre ambos modos de representación gráfica son diversas. He aquí las más destacables:

1- Cada gráfico de la relación parte / todo representa unos pocos números reales (constructibles o no). La recta, en cambio, es un modelo del conjunto de números reales.

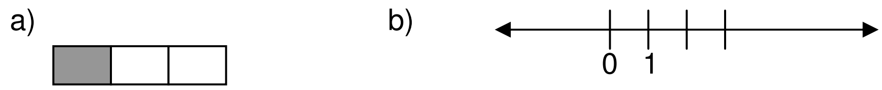


Figura 3.11: Gráfico parte todo y representación en la recta

El gráfico de 3.11a) representa la relación constructible entre tres números reales: x/3, 2x/3 y x. En 3.11b) sólo hay etiquetados dos puntos, y resaltados otros dos, que identificamos fácilmente con los números 2 y 3. No obstante, al observar ese segmento imaginamos que contiene a todos los números reales.

2- En los gráficos que expresan la relación parte / todo, no siempre es necesario acudir a un sistema de representación simbólico para reconocer al número que se está representando. El gráfico de 3.11a) posee la información necesaria para identificar tres números (normalmente, 1, 1/3 y 2/3). En la representación en la recta numérica, la identificación de los puntos necesita de algún tipo de representación simbólica (con excepción, acaso, de algunos enteros).

3- Una representación como la de 3.11a) permite comparar un todo con algunas de sus partes ($\pi > \pi/3$, $\pi > 2\pi/3$) o algunas partes de un todo ($2\pi/3 > \pi/3$). Sin embargo, no exhibe necesariamente el orden de las partes.

3.6.6. Algunas características de la representación en la recta

Resumimos las características de la representación en la recta que, según se desprende de lo dicho, consideramos esenciales en apoyo de la conjetura enunciada en 3.6.1.

1- Aceptando el axioma de Cantor, la recta se identifica con el conjunto ordenado de los números reales (Crossley, 1987). Permite, en principio, representarlos todos, uno por uno, mediante puntos.

2- La representación en la recta ayuda a intuir el orden continuo y total de **R**.

3- La representación de un número en la recta se apoya en un procedimiento de medida de longitudes mediante el cual es posible resaltar un punto y atribuirle una representación simbólica correspondiente a algún sistema de representación de números. Hemos presentado ejemplos en que la atribución numérica de los puntos resaltados fue posible gracias al uso de uno de los sistemas de representación (decimal, fraccionaria o icónica).

4- La ausencia de exactitud en las representaciones de reales en la recta, realizadas con diferentes instrumentos, supone reconocer la diferencia entre abscisa y etiqueta asignada. Difícilmente la etiqueta correspondiente a un punto ‘marcado’ sobre la recta coincidirá con la abscisa correspondiente a dicho punto, con excepción de las etiquetas correspondientes a 0 y 1, que son fijadas de antemano. Bachelard (1988) denomina “obstáculos del conocimiento cuantitativo” la posibilidad de obtener resultados erróneos como consecuencia de un conocimiento inmediato que es subjetivo. Un conocimiento adecuado de la representación en la recta exige la adquisición de criterios de ‘tolerancia’ para efectuar la mencionada distinción.

5- Cada uno de los segmentos de recta sobre los que se representan unos pocos números (el origen, la unidad y algunos otros) está simbolizando el conjunto de números reales en su totalidad. La representación en la recta permite ‘actualizar’ en un segmento (como en la figura 3.11b) la totalidad del conjunto de números reales.

Es posible establecer diferentes biyecciones de **R** sobre]-1,1[, por ejemplo usando la función arco tangente. Aquí lo único que pretendemos enfatizar es la “idea de totalidad” suscitada por un segmento.

6- La continuidad intuitiva de la recta permite expresar la continuidad de **R** (la cual se manifiesta por el axioma de completitud o proposición equivalente) pero también permite expresar la continuidad de otros conjuntos “más amplios” (como el de los hiperreales).

Aceptando, como hipótesis de trabajo, la conjetura de que la representación en la recta es más compleja (conceptual y procedimentalmente) que otras representaciones de los números reales, y explicitado el sentido de la diferencia entre dichas representaciones, se deducen algunas de las precauciones con que la representación en la recta debe trabajarse en Educación Secundaria. Estas precauciones atañen a la 'naturaleza' de la recta y a las intuiciones que soportan una concepción de la recta geométrica, a las dificultades conceptuales y procedimentales de la asignación punto - número y a la imposibilidad de realizar esta asignación en su totalidad (salvo como creencia soportada por una generalización).

3.6.7. Representación en la recta y dominios (en el sentido de Bachelard)

La representación en la recta es de complejidad suficiente como para permitir que, al realizar tareas, los sujetos hagan uso de varios dominios (en el sentido de Bachelard) y se susciten conflictos.

Las tareas de representación en la recta, como hemos visto, se pueden abordar desde diferentes perspectivas y con diferente información. En particular, la representación en la recta de números constructibles (dados) permite varios enfoques:

(1º) Representación esencialmente aproximada, partiendo de la representación posicional.

(2º) Representación esencialmente exacta, partiendo de la representación icónica.

Por otra parte, cada representación de un número constructible dado puede entenderse como una actuación sobre el mundo físico o como una actuación esencialmente matemática: el trazado de líneas y marcas sobre el papel, en efecto, aparece como una guía para conducir razonamientos matemáticos o como un objetivo en sí mismo.

Por estas razones, en esta memoria definimos los siguientes dominios (tomando este término en el sentido de Bachelard):

(1) Las representaciones posicional e icónica, necesariamente acompañadas de representaciones gráficas o explicaciones para justificar la posición de una marca numérica en una línea.

(2) El mundo físico y el mundo matemático.

Conviene precisar que los dos últimos se encuentran en los propios textos de Bachelard, mientras que los dos primeros, no.

Conjeturamos que, al afrontar tareas de representación de puntos en la recta, habrá estudiantes que experimentarán algún tipo de conflicto con una de estas parejas de dominios (o ambas) y que una interpretación de sus producciones permitirá poner de manifiesto dichos conflictos.

Conjeturamos también que un estudio sistemático de los conflictos registrados permitirá interpretarlos en términos de obstáculos epistemológicos.

3.7. La noción de conflicto

En el diccionario de M. Moliner (1996) encontramos dos acepciones para el término conflicto:

1. («Causar, Mover, Ocasionar, Promover, Suscitar un c. de» o «entre»). Choque, o situación permanente de oposición, desacuerdo o lucha entre personas o cosas: 'Un incidente de fronteras provocó un conflicto entre los dos países. Conflicto de jurisdicciones [de pasiones, de intereses]'.
2. («Estar», etc., «en, Tener un»). Situación en que no se puede hacer lo que es necesario hacer o en que no se sabe qué hacer: 'Se encontró en un conflicto porque no podía pagar la letra. Tiene un conflicto porque la han invitado a la vez a dos fiestas'.

Mientras que en la primera acepción se destaca la existencia de una confrontación entre dos o más opciones, en la segunda se destaca la existencia de preocupación en una persona porque debe tomar una decisión o porque debe resolver una situación de un modo que no le satisface.

La utilización del término en educación es ambigua. Por un lado es común referirse al diseño de situaciones que planteen conflictos en los sujetos. En este caso, *el profesor intenta suscitar un conflicto* en el sujeto, especialmente cuando se trata de superar un error, para que el sujeto se sienta impelido a resolver el conflicto y como consecuencia, superar el error. La primera acepción se utiliza porque el sujeto enfrenta dos o más afirmaciones, respuestas o posibilidades contradictorias en una tarea matemática determinada.

Por otro lado, el conflicto suscitado en el sujeto lo sitúa en una situación de preocupación, incertidumbre, en el que no está seguro de la decisión o salida que debe tomar. Si las posibilidades diferentes no causan incertidumbre en el sujeto, entonces no las ve como contradictorias. Es decir, si no se da la situación involucrada en la segunda acepción, el conflicto (como desacuerdo entre varias alternativas, primera acepción) no será superado.

Esta ambigüedad se manifiesta también en la literatura de investigación. En nuestra indagación bibliográfica hemos encontrado el término con acepciones diferentes.

En Bell (1984) y Bell (1993) se utiliza la expresión 'conflicto cognitivo' para aludir a una estrategia utilizada en algunas clases experimentales. Este autor considera que las concepciones erróneas forman parte del curso normal de desarrollo y sólo pueden ser cambiadas si se hacen conscientes y son enfrentadas con nociones correctas. Por ello, una vez detectados los puntos conceptuales claves y las concepciones erróneas comunes dentro de un tópico, se diseñan situaciones que planteen a los estudiantes desafíos sustanciales, provocando conflicto cognitivo al exponer las concepciones erróneas, y resolviéndolo mediante discusión. En este caso, la utilización de la expresión *conflicto cognitivo* incluye las dos acepciones, dado que el sujeto se enfrenta con dos concepciones, una errónea y otra correcta (primera acepción) y se espera de él que resuelva el conflicto tomando partido por la segunda. La afirmación referida a la provocación de conflicto en el estudiante implica la segunda acepción. En el estudiante debe producirse una inquietud (por mínima que sea) para que reconozca las dos opciones enfrentadas y tome una decisión.

En *Focus on Learning Problems in Mathematics* se ha publicado una serie de artículos en los que se aborda como cuestión especial las ideas inconsistentes de los estudiantes. En algunos de ellos la expresión *conflicto cognitivo* se utiliza como si fuera sinónima del término *inconsistencia*.(Wilson, 1990; Behr y Harel, 1990). De hecho, Tirosh (1990) considera que una de las cuestiones aún pendientes de resolver en la investigación preocupada por estudiar las ideas inconsistentes de los estudiantes es determinar si estas expresiones tienen el mismo significado.

Esta investigadora afirma que en diferentes edades y niveles de aprendizaje matemático los estudiantes mantienen ideas que son incompatibles unas con otras. Estas ideas limitan la habilidad del estudiante para responder correctamente a tareas matemáticas y es poco probable que las resuelvan sin una intervención didáctica específica.

Clasifica las inconsistencias según diferentes criterios:

1. Según se expresen o no directamente las proposiciones inconsistentes en el discurso del sujeto.

El estudiante mantiene como válidas una proposición y su negación. Puede ser de dos tipos:

Una inconsistencia *directa* se presenta cuando el estudiante afirma en un contexto que una proposición es verdadera, y en otro que su negación es verdadera.

En una inconsistencia *indirecta* la contradicción se obtiene a partir de dos proposiciones (A y B) mantenidas por el estudiante y aparentemente diferentes, sólo que una conduce a una proposición ($A \Rightarrow C$) y la otra a su negación ($B \Rightarrow \sim C$).

Aunque un observador reconozca una inconsistencia directa como la afirmación simultánea de una proposición y su inversa, el estudiante no tiene necesariamente que reconocerlo así.

2. Según la validez matemática de las proposiciones que expresan la inconsistencia.

Esta clasificación distingue entre inconsistencias en las que una de las proposiciones involucradas es matemáticamente inválida y aquellas en las que más de una de las proposiciones son inválidas.

Es posible que si dos proposiciones contradictorias coexisten en el constructo matemático del estudiante, una de ellas sea compatible con las definiciones y teoremas matemáticos convencionales. Pero también es posible que ninguna de las dos sea compatible con conocimientos matemáticos convencionales.

3. Según la inconsistencia se origine o no por información nueva.

Las inconsistencias se clasifican según este criterio en externas o internas.

La inconsistencia externa ocurre cuando un concepto matemático existente en el estudiante es incompatible con información recién presentada (ejemplo: muchos estudiantes creen que la altura de un triángulo siempre cae dentro del triángulo).

La inconsistencia interna es una situación en la cual una persona coge simultáneamente visiones contradictorias en sus esquemas matemáticos.

Se afirma que en el primer caso, cuando los estudiantes se enfrentan con los nuevos datos, inmediatamente reconocerán la inconsistencia y sentirán la necesidad de reconciliar las dos posturas. Sin embargo, lo que el observador considera como inconsistente puede no ser observado por el estudiante. Por lo tanto, no siempre los nuevos datos actúan como estímulos para facilitar los cambios requeridos en los esquemas cognitivos del estudiante para acomodar la nueva información.

4. Según la consciencia del estudiante de las inconsistencias.

La inconsistencia que nota el observador no siempre es percibida por el estudiante. Se dan varias situaciones:

- El estudiante no examina las ideas conflictivas al mismo tiempo y por lo tanto no reconoce su incompatibilidad mutua.
- El estudiante examina las ideas conflictivas simultáneamente pero no las ve como inconsistentes.
- El estudiante reconoce e identifica dos afirmaciones conflictivas como incompatibles una con otra, pero percibe tal situación como legítima en matemática.
- El estudiante identifica los elementos conflictivos en una situación como inconsistentes y por lo tanto problemáticos. En este caso el estudiante se siente insatisfecho con sus conceptos existentes e intenta resolver la inconsistencia. Esto a menudo es denominado un estado de desequilibrio o conflicto cognitivo.

Los tres primeros criterios de clasificación aluden a circunstancias que atañen directamente a las afirmaciones contradictorias: si constituyen o no una afirmación y su negación, si todas son contradictorias con la teoría matemática correspondiente o hay alguna verdadera, o finalmente si se trata de una información nueva o de inconsistencias entre concepciones que el sujeto ya posee. Es independiente de estas circunstancias el hecho de que el sujeto sea o no consciente de la contradicción.

La última clasificación, sin embargo, atañe exclusivamente al sujeto enfrentado a las afirmaciones. ¿Es consciente o no de la contradicción que resulta de mantener las dos afirmaciones?

La distinción entre *criterios referidos a las afirmaciones / criterio referido a la consciencia del sujeto de la inconsistencia* remite a las dos acepciones consideradas por M. Moliner. En efecto, las inconsistencias como ideas contradictorias aluden a la primera acepción del término conflicto. Sin embargo, la discusión y clasificación en torno a la conciencia que tiene o no el sujeto de la inconsistencia alude a la segunda acepción.

La definición que Tirosh (1990) incluye de conflicto cognitivo en la última clasificación incorpora los elementos de las dos acepciones: un conflicto cognitivo se origina en un sujeto cuando se enfrenta con elementos inconsistentes, no se siente satisfecho con sus concepciones e intenta superar esa insatisfacción.

Hasta donde sea posible seguiremos la definición anterior. En el siguiente apartado estudiaremos la utilización del término en las diferentes etapas del estudio empírico.

3.7.1. La noción de conflicto cognitivo en el estudio empírico

Durante el estudio empírico los sujetos llevarán a cabo tareas relacionadas con la representación de números en la recta.

Las respuestas de los sujetos durante las entrevistas y cuestionarios serán estudiadas con el objeto de identificar y caracterizar conflictos cognitivos.

Consideramos que en un sujeto se manifiesta un conflicto cognitivo cuando mantiene dos o más afirmaciones contradictorias (o que conducen a respuestas contradictorias) siendo además el sujeto consciente de esa contradicción. En consecuencia, la situación de duda e incertidumbre provoca en el sujeto una insatisfacción, que puede o no superar. En el discurso del sujeto la insatisfacción puede hacerse explícita mediante respuestas dudosas y cambios de argumentación.

Consideramos que es más factible detectar conflictos cognitivos durante el desarrollo de entrevistas, especialmente si se trata de entrevistas no estructuradas, o semi-estructuradas, porque se tiene la posibilidad de profundizar en las cuestiones planteadas.

Según la clasificación de las inconsistencias según la consciencia por parte del individuo de las contradicciones, observamos que Tirosh (1990) reconoce distintas opciones: que el sujeto no examine las afirmaciones simultáneamente, que las examine simultáneamente pero no reconozca la inconsistencia, que la reconozca y la acepte como posible en matemáticas y finalmente que la reconozca como conflictiva e intente superar el conflicto.

Estas cuatro opciones posibles serán consideradas en las entrevistas. Si el sujeto no examina simultáneamente las afirmaciones contradictorias, la entrevistadora puede plantear preguntas para que el sujeto las examine simultáneamente. En ese caso, es posible que no reconozca la inconsistencia, que las reconozca y las acepte como posibles en matemáticas o bien que las reconozca como contradictorias e intente superarlas. En este último caso estaremos en presencia de un conflicto cognitivo.

En un cuestionario es más difícil constatar estas dos características del conflicto y ello depende, entre otras cosas, de las situaciones incluidas. Por ejemplo, las afirmaciones contradictorias pueden proponerse en los enunciados, y solicitar a los sujetos que indiquen si están o no de acuerdo con ellas. Si las afirmaciones contradictorias no están propuestas en el enunciado, es más difícil que en la respuesta escrita del sujeto se observen expresamente las afirmaciones contradictorias. Lo más probable es que ante una pregunta determinada, el sujeto responda correcta o incorrectamente, y en esa circunstancia no sea consciente de la inconsistencia o contradicción. En este caso, la inconsistencia se produciría entre el conocimiento del sujeto y el conocimiento matemático en el tópico tratado, y por esa razón sería observada por la investigadora y no por el sujeto. Estas limitaciones del cuestionario escrito esperamos subsanarlas con la realización de entrevistas confirmatorias.

CAPÍTULO 4

ENTREVISTAS EXPLORATORIAS

4.1. Introducción

En este capítulo se inicia el informe del estudio empírico, que incluye también los capítulos 5 y 6. A lo largo del capítulo describimos diversas cuestiones relacionadas con las entrevistas exploratorias.

El objetivo de las entrevistas exploratorias es recoger información relacionada con posibles dificultades de la representación de números reales en la recta.

Mediante las entrevistas se realiza una primera aproximación a las ideas y conocimientos de sujetos de 1º y 2º de Bachillerato y 1º de Licenciatura en Matemáticas respecto de la representación en la recta de números reales. Esta primera aproximación se realiza considerando las preguntas de investigación planteadas en el proyecto de tesis, como así también el análisis teórico previo (capítulo 3) respecto de cuestiones epistemológicas y fenomenológicas de la representación de números reales en la recta. La información obtenida será utilizada en la posterior preparación de un cuestionario.

En el apartado 4.2 caracterizamos la entrevista según una tipología descrita en manuales de investigación e incluimos una breve descripción del guión implementado (el guión completo se incluye en el anexo 4).

En el apartado 4.3 describimos la codificación de la información (transcripciones) y de la interpretación de las entrevistas.

En el apartado 4.4 realizamos un estudio de las respuestas proporcionadas por los sujetos mediante tres aproximaciones diferentes. En la sección 4.4.1 analizamos el desempeño individual de cada sujeto. En la sección 4.4.2. analizamos la interacción entre conflictos detectados y criterios para el estudio de los números reales. En la sección 4.4.3 describimos los objetivos y las respuestas obtenidas en cada una de las tareas propuestas.

Las conclusiones del estudio se incluyen en el apartado 4.5.

El muestreo ha sido accidental (León y Montero, 1999). En la sección 2.6.1 se incluye la información referida a los sujetos de estudio, calendario de entrevistas, equipos e instrumentos utilizados y el espacio físico en que se desarrollaron las entrevistas.

4.2. Guión de la entrevista

Las entrevistas realizadas pueden tipificarse como semi-estructuradas (las preguntas y secuencia está determinada mediante un programa, aunque el entrevistador dispone de cierta libertad de acción para modificarlo en función de las respuestas de los entrevistados). Por esta razón, se trata de situaciones abiertas (el entrevistador puede formular preguntas no contempladas en el programa).

Al tratarse de una primera aproximación al estudio de dificultades de la representación en la recta de números reales disponemos de una serie de cuestiones que deseamos plantear a los sujetos y que atañen a distintos aspectos de la biyección números reales / puntos de la recta: representación en la recta de números racionales e irracionales expresados mediante diferentes escrituras, unidades empleadas en la representación, procedimientos de representación utilizados, manipulación de elementos geométricos como regla y compás, intuiciones relacionadas con la biyección punto/número, entre otros. Se elabora una primera lista de tareas posibles:

- representar números constructibles y no constructibles en la recta
- medir segmentos de recta (determinados por la abertura del compás)
- hallar el punto medio de un segmento utilizando regla y compás
- cortar cuerdas en tres o cuatro trozos iguales
- comparar trozos de cuerdas según su medida
- analizar la exactitud de los resultados obtenidos

Considerando que la duración de cada entrevista no puede extenderse demasiado (para no fatigar al alumno y porque se dispone de tiempo limitado), es necesario elaborar diferentes guiones para abarcar todos los aspectos que se desean estudiar.

A partir de la lista de tareas anterior se preparan diferentes guiones, que se discuten (entre director e investigadora) hasta obtener los guiones definitivos (incluidos en el anexo 4).

Se elaboraron tres guiones de entrevistas diferentes, y cada uno contiene dos o tres partes constituidas por diferentes tareas. Los objetivos de cada tarea se describen el la sección 4.4.3. A continuación se describe un resumen de cada guión.

Guión Entrevista 1

Parte 1: Corte de una cuerda en trozos iguales.

Tarea 1.1: Cortar una cuerda en cuatro trozos iguales.

Tarea 1.2: Cortar una cuerda en tres trozos iguales.

Parte 2: Medición de segmentos de recta.

Tarea 2.1: Medición de la abertura del compás utilizando unidades diferentes.

Tarea 2.2: Trazar el punto medio de un segmento con regla sin graduar y compás.

Parte 3: Representación de números en la recta.

Guión Entrevista 2

Parte 1: Generalidades acerca de la representación en la recta.

Tarea 1.1: Describir rasgos de la representación en la recta.

Tarea 1.2: Determinar si es posible representar todos los números de la tabla.

Parte 2: Representación de números.

Tarea 2.1: Representación de números racionales.

Tarea 2.2: Representación de números irracionales.

Parte 3: Representación en la recta de números expresados mediante diferentes notaciones.

Tarea 3.1: Representación de 0’333333...

Tarea 3.2: Representación de 1’4142136...

Guión Entrevista 3

Parte 1: Representación de números: idea de unidad.

Tarea 1.1: Determinar el número que le corresponde al punto A dado.

Tarea 1.2: Representación de $\sqrt{2}$ y de $2\sqrt{2}$.

Parte 2: Propiedad arquimediana.

Los guiones especifican a grandes rasgos las actividades a desarrollar. Se parte de unas preguntas básicas (cada guión contiene preguntas que se formulan a todos los sujetos, descritas en el Anexo 1), y a partir de las respuestas de los entrevistados la entrevistadora elabora nuevas preguntas que pueden o no coincidir con las preguntas realizadas a otros sujetos.

4.3. Codificación de la información

4.3.1. Codificación de las transcripciones

Para cada entrevista:

- Se especifica el número de sujeto, edad, nivel, número de entrevista, fecha, hora de inicio y de finalización.

- Los interlocutores se identifican mediante las letras A (alumno) y E (entrevistadora).

- La transcripción se realiza en una tabla de cinco columnas, interrumpida con subtítulos que indican la tarea propuesta. Las tres primeras columnas constituyen la transcripción propiamente dicha y las dos últimas la interpretación de las respuestas.

Primera columna: se enumeran a partir de cero (expresado como 00) y mediante números de dos cifras, los minutos transcurridos desde el inicio de la entrevista. Por ejemplo, si una entrevista comienza a las 10:38, el diálogo del tercer minuto se reconoce mediante el código 02 en la primera columna.

Segunda columna: se enumeran mediante números de dos cifras y comenzando desde 1 (expresado como 01), las frases de los interlocutores incluidas en cada minuto.

Tercera columna: contiene la transcripción de las frases literales de los interlocutores.

Se ha elegido la frase como unidad básica de transcripción. Todas las oraciones han sido separadas para facilitar la codificación, aún cuando desde el punto de vista gramatical no corresponda punto y aparte, sino seguido.

Los puntos suspensivos (...) indican una pausa del interlocutor correspondiente. Los puntos suspensivos cerrados entre corchetes ([...]) indican que una parte del diálogo del interlocutor correspondiente no ha sido transcrita por resultar inaudible.

Los comentarios que figuran entre corchetes expresan acciones, gestos o expresiones de alguno de los interlocutores que han sido observadas en la grabación en vídeo.

Para recuperar fácilmente una unidad de transcripción se utiliza un código de cuatro cifras obtenidas de las columnas primera y segunda. Por ejemplo, 1206 remite a la frase 06 del minuto 13º.

Después de realizar la transcripción se efectuó el análisis cuya codificación se muestra en las columnas cuarta y quinta.

4.3.2. Códigos para interpretar las transcripciones

Las unidades de información y análisis son las siguientes:

- palabras
- frases (completas o no)
- acciones

Para la interpretación de las entrevistas se han añadido dos columnas (cuarta y quinta) a la tabla que contiene las transcripciones.

Cuarta columna: se utilizan los “Criterios para el estudio de los números reales” asociándolos con algunas de las frases de la tercera columna. Los códigos utilizados para los criterios son los siguientes:

Criterio	Código E	Código I
Orden	OR	or
Tipo de Número	TI	ti
Fenomenología	FE	fe
Representaciones	RE	re
Operaciones	OP	op

Tabla 4.1: Códigos para Criterios utilizados en el análisis

Código E (segunda columna de la tabla 4.1, letras en mayúscula): se utiliza cuando se interpreta en las frases una mención explícita al criterio correspondiente.

Código I (tercera columna tabla 4.1, letras en minúscula): se utiliza cuando no hay mención explícita por parte del alumno, y la investigadora interpreta (por las respuestas anteriores del entrevistado) que las frases se están refiriendo al criterio correspondiente.

Quinta columna: para las frases transcritas en la tercera columna:

1º. Se ha intentado reconocer (tabla 4.2):

- un proceso cognitivo, ó
- la manifestación explícita de conflicto cognitivo.

2º. Se ha intentado describir (tabla 4.3) una negociación entre alumno y entrevistadora surgida durante la entrevista.

Proceso cognitivo	Código
Conflicto	CF
Describir	DE
Dudar	DU
Elegir	EL
Explicar	EX
Modelizar	MD
Organizar	OR
Planificar	PL
Razonar	RA
Realizar	RZ
Reconocer	RC
Valorar	VA

Tabla 4.2: Códigos para procesos cognitivos utilizados en el análisis

Interlocutores	Negociación	Código
Entrevistadora	Asigna tarea	GT
	Plantea preguntas	PP
Alumno	Acepta tarea	AT
	Pide aclaraciones	PA

Tabla 4.3: Códigos para la negociación entre interlocutores

La asignación de criterios y procesos cognitivos no se ha realizado de modo sencillo. Si bien en algunas frases no se plantearon dudas en la atribución de criterios y procesos cognitivos, en otras ha sido necesario revisar las cintas para observar los gestos o la actitud del entrevistado.

La interpretación completa de las entrevistas es extensa. En el anexo 5 se incluyen fragmentos de transcripción de tres entrevistas (una para cada guión) con las interpretaciones correspondientes.

4.4. Estudio de las respuestas

Hemos mencionado en la introducción del capítulo que el estudio de las respuestas lo realizaremos mediante tres aproximaciones diferentes. Esperamos recoger información relacionada con dificultades de la representación de números reales en la recta.

En primer lugar (sección 4.4.1) describimos brevemente el desempeño individual de los sujetos mediante una serie de descriptores comunes (duración relativa de las tareas, impresión que genera el entrevistado en aspectos como la seguridad en sí mismo, manejo de herramientas, algunos comentarios referidos a su expresión en voz alta, frases relevantes para la investigación y errores observados). Además de proporcionar información general de la intervención de cada sujeto, este estudio recoge interpretaciones particulares que podrían indicar la presencia de conflictos en algunos sujetos.

En segundo lugar (sección 4.4.2) estudiamos la interacción entre criterios para el estudio de los números reales y conflictos cognitivos. Se trata de buscar todas las frases de los sujetos en las que se interpreta la manifestación de un conflicto cognitivo, o del proceso cognitivo 'Dudar'. Estas frases se analizan a la luz de los criterios implicados, con el objetivo de aclarar y estudiar las dificultades detectadas.

En tercer lugar (sección 4.4.3) organizamos las respuestas de sujetos correspondientes a niveles diferentes (1º de Bachillerato, C.O.U. y 1º de Licenciatura) a cada una de las tareas propuestas. Además de salir a la luz distintos tipos de respuesta para una misma tarea, en este estudio es posible identificar las preguntas o cuestiones que suscitan mayores dificultades en los sujetos.

4.4.1. Informes individuales

En este apartado se realiza un informe individual de la intervención de cada entrevistado. Las cuestiones incluidas se refieren a la duración relativa de las tareas y a la impresión que genera el entrevistado en aspectos como la seguridad en sí mismo, el manejo de herramientas y algunos comentarios referidos a su expresión en voz alta. Además, se comentan algunas frases relevantes para la investigación y se incluyen los errores observados.

Informe sujeto Nº1; 17; 1º Bachillerato (C.N. y S.); E-1; 10/05/99; 10:34-10:57
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera la entrevistada en cuanto a: *Seguridad en sí misma:* La entrevistada se muestra segura de sí misma. En cuanto comprueba la primera vez que los cortes no han salido exactos, cuando debe responder respecto de la exactitud en las siguientes tareas se muestra muy cautelosa. *Manejo de las herramientas:* Utiliza compás y regla para determinar correctamente el punto medio del segmento. Representa números utilizando la regla graduada. *Expresión en voz alta:* Su voz es audible. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* No se manifiesta ningún tipo de conflicto en sus afirmaciones.

Informe sujeto Nº2; 17; 1º Bachillerato (C.N. y S.); E-2; 10/05/99; 11:02-11:16 12/05/99; 8:47-8:58.
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera la entrevistada en cuanto a: *Seguridad en sí misma:* La entrevistada se muestra muy insegura de sus respuestas. Modifica sus afirmaciones cuando la entrevistadora profundiza en sus preguntas. *Manejo de las herramientas:* Representa números utilizando la regla graduada. *Expresión en voz alta:* Su voz es audible. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* Se manifiesta un conflicto (reconocido explícitamente por la alumna) cuando analiza la representación en la recta de números que poseen infinitas cifras decimales (periódicas o no). La alumna se contradice (ver, por ejemplo, frases 2503 a 2507), y en numerosas ocasiones manifiesta su desconcierto. *Errores observados:* Afirma que $\sqrt{2}$ puede expresarse como fracción. *Interrupciones:* Se produce una interrupción, por causas ajenas a los implicados en la entrevista, a los 15 minutos de iniciada la entrevista, que debe continuarse otro día.

Informe sujeto Nº3; 19; 1º Bachillerato; E-3; 10/05/99; 11:58-12:12
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* El entrevistado se muestra seguro. *Manejo de las herramientas:* Representa $\sqrt{2}$ sin utilizar una construcción geométrica. Todas las representaciones son aproximadas, realizadas mediante la graduación de la regla. *Expresión en voz alta:* Su voz es audible, aunque es muy parco en sus respuestas. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* El alumno reconoce los puntos de la recta cuando están señalados mediante una marca. Cuando la entrevistadora le pregunta cuántos puntos hay en un segmento de recta, responde que tres, que son los que están marcados en esa recta (frase 0603). Sostiene que para distinguirlos, es necesario marcarlos. Aunque él no reconozca explícitamente un conflicto, interpretamos que tiene una concepción “material” de la recta. Ésta está formada por puntos indistinguibles tal que: 1) si no se marcan, no se pueden distinguir; y 2) todas las marcas son aproximadas. *Errores observados:* No acepta que al punto A le pueda corresponder un punto que no sea 1. Si no existen otras marcas sobre la recta que correspondan a otros números, la marca realizada a la derecha de 0 debe tener necesariamente abscisa igual a 1.

Informe sujeto Nº4; 1º Bachillerato (C.N. y S.); E-2; 10/05/99; 12:17-12:45
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* El entrevistado se muestra muy seguro de sí mismo. *Manejo de las herramientas:* La representación de números irracionales constructibles (como √2) no se propone como tarea para el entrevistado. Para todos los números que representa (5/4, 0'12345..., entre otros) utiliza el procedimiento de dividir la unidad en partes iguales, y no utiliza ningún elemento geométrico, sino que lo hace aproximadamente. *Expresión en voz alta:* Su voz es audible y expresa sin dificultad sus puntos de vista. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* El alumno interpreta los números que representa únicamente como módulos de vectores (utiliza el término 'vector'). Cuando la entrevistadora le pregunta acerca del punto que corresponde a un número (su abscisa) él aclara que el número pedido no es la marca sobre la recta, sino que es el espacio comprendido entre dos marcas (frases 1202-1203). *Errores observados:* No está clara la interpretación que hace el entrevistado del término 'fracción'.

Informe sujeto Nº5; 17; 1º Bachillerato; E-1; 11/05/99, 10:38-11:00
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera la entrevistada en cuanto a: *Seguridad en sí misma:* La entrevistada se muestra insegura cuando la entrevistadora pide que justifique sus afirmaciones. *Manejo de las herramientas:* Determina con compás y regla el punto medio de un segmento. Representa √2 sin utilizar una construcción geométrica. Todas las representaciones son aproximadas, realizadas mediante la graduación de la regla. *Expresión en voz alta:* Se expresa sin dificultad y su voz es perfectamente audible. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* Se observa un conflicto (que la alumna manifiesta mediante frases que expresan duda o desconcierto; frases 0307 a 0504) cuando la entrevistada, después de comprobar que la cuerda mide 41cm, divide con calculadora entre 3 ese número, obteniendo como resultado 13'666667. Se presenta entonces la dificultad de determinar sobre la cuerda un segmento de esa longitud (en cm). Justifica su decisión de realizarlo aproximadamente diciendo que de todas formas no saldría exacto.

Informe sujeto Nº6; 16; 1º Bachillerato (C.N. y S.); E-2; 11/05/99, 11:07-11:23
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* El entrevistado no está seguro de muchas de sus respuestas, lo que se manifiesta mediante frases incompletas, y expresiones en las que reconoce que no sabe o no está seguro. Incluso afirma, ante una pregunta, que no está seguro porque "es muy abstracto". *Manejo de las herramientas:* Utiliza adecuadamente los elementos geométricos en la representación de 5/4, aunque utiliza un gráfico que no corresponde a esa construcción (sin marca para cero y uno). *Expresión en voz alta*: adecuada. Su voz es audible aunque no sin cierta dificultad en la grabación en vídeo. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* El reconocimiento de que en la recta existen infinitos puntos lo induce a dudar de que sea posible encontrar (materialmente) el punto que corresponde a números irracionales en notación decimal. Tanto la infinitud de los puntos de la recta como la infinitud de las cifras decimales parecen confundirlo (frases 0202 a 0303). *Algunos errores observados:* Afirma que $\sqrt{2}$ no se puede representar en la recta, al igual que π. No parece conocer que existe una diferencia entre estos números en cuanto a su 'constructibilidad'. Para este alumno los números que pueden representarse son únicamente aquellos que pueden expresarse como fracción, aunque no queda claro en sus respuestas qué significado le asigna a 'poder representarse'.

Informe sujeto Nº 7; 16; 1º Bachillerato (C.N. y S.); E-3; 12/05/99; 09:02-09:18.
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera la entrevistada en cuanto a: *Seguridad en sí misma:* la entrevistada no manifiesta inseguridad. *Manejo de las herramientas:* representa $\sqrt{2}$ de forma aproximada. Utiliza el compás adecuadamente para representar $2\sqrt{2}$. *Expresión en voz alta:* adecuada. Aunque la grabación en audio se comprende sin dificultad, en la grabación en vídeo no es posible entender algunas frases completamente debido al timbre de su voz. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* En las respuestas de la entrevistada no se manifiesta ningún tipo de conflicto.

Informe sujeto Nº 8; Bachillerato (C.N. y S.); E-2; 12/05/99; 10:30-10:50.
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera la entrevistada en cuanto a: *Seguridad en sí misma:* a pesar de que algunas respuestas son vagas o imprecisas, la entrevistada no manifiesta inseguridad. *Manejo de las herramientas:* No utiliza elementos geométricos de ninguna clase. Sólo representa los números en la recta de forma aproximada. *Expresión en voz alta:* Adecuada. Su voz se oye sin dificultad en la grabación en audio y en vídeo. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* En las respuestas de la entrevistada no se manifiesta ningún tipo de conflicto. No obstante, llama la atención el hecho de que considera que si el número posee infinitas cifras decimales (periódicas o no) la representación en la recta será siempre aproximada porque "siempre vamos a poder incluir más" (frase 0903). Consideraciones de este tipo se repiten a lo largo de la entrevista. *Algunos errores observados:* A pesar de que la entrevistadora aclara que por el término fracción alude a un entero partido por otro, el alumno considera que una fracción es un número partido por otro, sin importar el tipo de número (por ejemplo, considera un decimal en el numerador). Expresa que $\sqrt{2}$ es igual a "uno partido dos elevado a menos..." (no concluye la frase) y que por lo tanto puede expresarse como fracción. Diversas frases conducen a pensar que por el término "período" interpreta "parte decimal" (frases 0108 y 0903).

Informe sujeto Nº9; 1º Bachillerato (C.N. y S.); E-1; 12/05/99, 10:55-11:17
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* Se muestra muy inseguro cuando debe cortar la cuerda en tres trozos iguales. Intenta de diversas maneras, y parece que ninguna le satisface. En las tareas restantes se muestra seguro. *Manejo de las herramientas:* Utiliza correctamente los elementos geométricos para determinar el punto medio de un segmento. *Expresión en voz alta*: Adecuada. Su voz es apenas audible en la grabación en vídeo, entre otras razones, porque habla muy bajo, y no vocaliza lo suficiente. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* En las respuestas del entrevistado no se manifiesta ningún tipo de conflicto. Sorprende la dificultad que muestra el entrevistado cuando debe cortar la cuerda en tres trozos iguales.

Informe sujeto Nº10; 17; 1º Bachillerato (C.N. y S.); E-3; 12/05/99, 12:05-12:18
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* el sujeto se muestra seguro de sí mismo. *Manejo de las herramientas:* sólo utiliza la regla para realizar mediciones. No representa √2 mediante una construcción geométrica. *Expresión en voz alta*: adecuada. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* Un rasgo llamativo en la representación de números es que no se preocupa por determinar las relaciones existentes entre la posición del uno y la del número que debe representar. Llama "vector unitario" a un segmento cualquiera, al que le asigna la longitud que debe representar. Sólo tiene en cuenta uno de los requisitos básicos de la biyección puntos de la recta/números reales, la marca del cero, descartando cualquier referencia al uno. *Algunos errores observados:* La expresión "vector unitario" no resulta adecuada, porque el término unitario se utiliza normalmente para designar la longitud uno, en cambio, para este alumno la longitud de este vector varía según el número que debe representar.

Informe sujeto Nº11; 17; C.O.U.; E-3; 27/05/99, 10:22-10:44
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera la entrevistada en cuanto a: *Seguridad en sí misma:* La alumna manifiesta no estar seguro de alguna de sus respuestas, especialmente como consecuencia de la insistencia de la entrevistadora ante ciertas cuestiones. *Manejo de las herramientas:* Adecuado. La construcción del cuadrado para la representación de $\sqrt{2}$ difiere de las construcciones del resto de los sujetos entrevistados, dado que ubica la diagonal sobre la recta real. *Expresión en voz alta:* adecuada. No obstante, como se explica bajo el título 'Espacio físico' de 2.6.1, la grabación en vídeo es apenas audible. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* La alumna manifiesta un conflicto cuando se le interroga acerca de la posibilidad de determinar el punto exacto que le corresponde a cualquier número, dado que los puntos "no tienen dimensión" (frase 0812). Sin embargo, lo resuelve haciendo una elección: de los infinitos puntos que constituyen cada marca, se selecciona el del medio. Esta idea la utiliza dos veces (frases 0812 y 1501 respectivamente). Interpretamos el conflicto descrito como una dificultad para discernir entre la marca 'material' que identifica a un punto, y el punto propiamente dicho como 'idea' geométrica.

Informe sujeto Nº12; 18; C.O.U.; E-2; 27/05/99, 10: 50-11:19

Duración relativa de las tareas:

Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.

Impresión que genera la entrevistada en cuanto a:

Seguridad en sí misma: no demuestra estar segura de sus afirmaciones, porque modifica sus respuestas ante las preguntas de la entrevistadora. Se observa seguridad cuando manifiesta que un número puede estar en cualquier sitio en la recta, estableciendo adecuadamente el origen y la unidad.

Manejo de las herramientas: No realiza construcciones utilizando elementos de geometría, sino que representa a ojo (debía representar 5/4 y $\sqrt[3]{2}$).

Expresión en voz alta: adecuada. No obstante, como se explica bajo el título 'Espacio físico' de 2.6.1, la grabación en vídeo es apenas audible.

Frases o acciones relevantes para la investigación: Se muestra dubitativa cuando tiene que responder si las marcas corresponden exactamente a puntos determinados (como 0 y 5/4). Después se decanta por afirmar que son aproximados. Cuando se le pregunta si la marca de $\sqrt{2}$ obtenida mediante construcción geométrica es exacta, se plantea el conflicto de si es posible 'captar' mediante una marca en la recta las infinitas cifras de la expresión decimal: " [...] si eso... fuera justamente raíz de dos, ahí dentro tienen que estar todos estos números (señala la notación decimal)" (frase 2701). Sin embargo, no es posible confirmar la existencia del conflicto en las respuestas posteriores.

Algunos errores observados:

Afirma que todos los números de la tabla pueden expresarse como fracción. Expresa que para ello, sólo es necesario utilizar exponentes negativos o positivos (frase 0604).

Informe sujeto Nº13; 18; C.O.U; E-1; 27/05/99, 11:26-11:56.
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* El alumno se muestra muy seguro de sus respuestas, e intenta justificar todas sus afirmaciones. *Manejo de las herramientas:* Adecuado. Utiliza compás y regla sin graduar para determinar el punto medio de un segmento y para representar $\sqrt{2}$. Traza una recta perpendicular al eje real utilizando el borde recto de un folio. *Expresión en voz alta:* adecuada. No obstante, como se explica bajo el título 'Espacio físico' de 2.6.1, la grabación en vídeo es apenas audible. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* El entrevistado resuelve sin dificultad todas las cuestiones que se plantean. Se observa un exceso de precisión en mediciones y representaciones, que Bachelard (1988) señala como un rasgo del obstáculo del conocimiento cuantitativo: una 'matematización demasiado precisa'. Ejemplos: 1) fragmento transcripción desde 1103 a 1205; 2) "Esto sería..., esto no sería raíz cúbica de dos. Esto sería uno con veinticinco, noventa y nueve, veintiuno" (refiriéndose a una marca sobre la recta efectuada mediante una regla graduada en cm y mm, donde una unidad era equivalente a un cm; frases 2202 y 2203). *Algunos errores observados:* Aunque no es posible identificarlo con un error, el alumno piensa que existe una construcción geométrica de π.

Informe sujeto Nº14; 17; C.O.U.; E-3; 27/05/99, 12:01-12:22
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* El alumno se muestra convencido de sus afirmaciones. En ningún momento modifica sus puntos de vista, aunque le cuesta expresar sus ideas. Es el único entrevistado que reconoce que sería posible situar los números negativos a la derecha de cero. *Manejo de las herramientas:* Representa √2 explicando el procedimiento geométrico pero no utiliza ninguna herramienta, lo hace a ojo.. *Expresión en voz alta:* Su voz no es audible en la grabación en vídeo y se interpreta con dificultad en la grabación en audio. La dificultad de audición se ve acentuada por lo explicado bajo el título 'Espacio físico' de 2.6.1. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* En las respuestas del entrevistado no se manifiesta ningún tipo de conflicto. El alumno duda de la posibilidad de que la marca realizada corresponda exactamente a √2, sin embargo, a continuación despeja esa duda apelando a la consistencia de la construcción geométrica.

Informe sujeto Nº15; 17; C.O.U.; E-2; 27/05/99; 12:29-12:51.
Duración relativa de las tareas: Las diferentes tareas se han distribuido uniformemente en la duración total de la entrevista. No ha habido detenciones especiales en ninguna tarea.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* En general, se muestra convencido de sus afirmaciones. *Manejo de las herramientas:* No utiliza ningún elemento para representar los números, lo hace a ojo. *Expresión en voz alta:* Su voz es poco audible en la grabación en vídeo. La dificultad de audición se ve acentuada por lo explicado bajo el título 'Espacio físico' de 2.6.1. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* El alumno representa el número (a ojo), y afirma que la marca realizada corresponde a 3'1416 (frases 1203 a 1311). Puede interpretarse como un exceso de precisión, rasgo característico del obstáculo epistemológico señalado por Bachelard (1969): la matematización demasiado precisa. Parece confundirlo la notación decimal infinita no periódica de dos números que figuran en la tabla (0'123456... y 0'10100100010000...). No está seguro de que se puedan expresar como fracción porque, por un lado, son no periódicos, y por otro lado, se reconoce fácilmente la ley de formación que siguen sus cifras decimales (frases 0315 a 1402).

Sujeto Nº16; 20; L. Matemáticas; E-1; 18/05/99, 12:06-12:41
Duración relativa de las tareas: Todas las tareas se desarrollan en un período normal de tiempo, excepto la representación en la recta de π (E-1, parte 3). El alumno se confunde en la determinación de la regla de tres y desde el minuto 26 hasta el minuto 32 se muestra concentrado en resolver esa dificultad.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo*: El alumno se muestra convencido de sus afirmaciones. Incluso no es capaz de reconocer el error que produjo una detención de la entrevista. *Manejo de las herramientas*: Determina el punto medio del segmento con regla y compás y representa todos los números sin utilizar procedimientos geométricos, valiéndose de la escala de la regla. Cuando la entrevistadora pregunta, recuerda que existe un procedimiento para la representación de $\sqrt{2}$ y lo describe. *Expresión en voz alta*: Su voz es perfectamente audible. *Frases o acciones relevantes para la investigación*: No se manifiestan conflictos en las afirmaciones del alumno. *Algunos errores observados:* La confusión mencionada en la determinación de la regla de tres. Debe representar π utilizando una escala de 1u = 2 cm, y el alumno considera 1cm = 2 cm, por lo que confunde los términos de la proporción. Piensa que existe un método geométrico para la representación de π, utilizando compás y regla sin graduar.

Informe sujeto Nº17; 18; L. Matemática; E-2; 18/05/99; 12:46-13:10
Duración relativa de las tareas: Todas las tareas se distribuyen uniformemente durante el tiempo de duración de la entrevista.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* El alumno no se muestra convencido de sus afirmaciones. En un momento de la entrevista aclara que no le agrada afirmar o expresarse con rotundidad (2315 a 2401). *Manejo de las herramientas:* No representa mediante procedimientos geométricos. En cuanto a $\sqrt{2}$, menciona la existencia de un procedimiento que afirma no recordar. Para las representaciones de números, utiliza las graduaciones de la regla y no le preocupa la precisión. *Expresión en voz alta:* Su voz es perfectamente audible. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* No se manifiestan conflictos en las afirmaciones del alumno. *Algunos errores observados:* Llama la atención el desconocimiento del número de cifras decimales de $\sqrt{2}$ (frases 1104 a 1115). Incluso muestra no estar seguro del número de cifras decimales que puede tener un irracional (frase 1212).

Informe sujeto Nº18; 18; L. Matemática; E-3; 19/05/99; 09:05-09:58
Duración relativa de las tareas: Todas las tareas se desarrollan en un período normal de tiempo, excepto la determinación del número que le corresponde al punto A de la recta (E-3, tarea1.1). Desde el minuto 0 hasta el 32, al alumno se encuentra concentrado en la realización de esa tarea.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* El alumno se muestra convencido de sus afirmaciones. Intenta justificar todas sus afirmaciones recurriendo a diferentes propiedades geométricas. *Manejo de las herramientas:* Realiza todas las construcciones recurriendo a los elementos geométricos compás y regla. Se cuida mucho de representar con precisión. *Expresión en voz alta:* Su voz es perfectamente audible. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* El conflicto suscitado consume 32' de entrevista y surge cuando el alumno debe determinar la abscisa del punto A. El alumno plantea una construcción geométrica para determinar la abscisa mediante el teorema de Pitágoras (considera un cateto del triángulo igual a 8 cm) y plantea una ecuación que posee dos incógnitas; la hipotenusa del triángulo y el otro cateto. Como no puede resolverla, intenta expresar de forma analítica las ecuaciones de la recta que contiene a la hipotenusa, para determinar la intersección de esta recta con la perpendicular al eje real en el punto de abscisa igual a 8. Ayudado por la entrevistadora consigue escribir las ecuaciones, que sin embargo lo conducen a la situación del principio: resulta una ecuación con dos incógnitas. Se observa una reiteración de la aplicación de un razonamiento: para determinar la abscisa de cualquier punto, recurre a la construcción de un triángulo rectángulo, de manera que la hipotenusa coincida con la distancia del punto al origen. La situación comentada planteó una dificultad para la entrevistadora, desde el punto de vista de la gestión de la entrevista. Por un lado, la entrevistadora observaba que las soluciones propuestas por el alumno conducirían a una ecuación con infinitas soluciones, pero por otro lado, su deseo de no interferir en las respuestas del entrevistado impedía una formulación clara de la situación (la presencia de un problema con datos insuficientes). *Algunos errores observados:* No reconoce la falta de datos en la resolución del problema que él mismo plantea.

Informe sujeto Nº19; 19; L. Matemática; E-1; 19/05/99, 18:18-19:10
Duración relativa de las tareas: La realización de las tareas se distribuye uniformemente en los 52' de duración de la entrevista. La larga duración de esta entrevista se debe al análisis cuidadoso que realiza el alumno de las cuestiones planteadas, y a los conflictos que intenta sortear durante dicho análisis.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* El alumno se muestra inseguro en algunas cuestiones específicas, que intenta sortear recurriendo a propiedades del Análisis o de la Geometría. *Manejo de las herramientas:* Realiza todas las construcciones recurriendo a los elementos geométricos compás y regla. *Expresión en voz alta:* Su voz es perfectamente audible. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* Este alumno razona sobre la representación decimal de los números reales a lo largo de toda la entrevista, no considera en absoluto las representaciones simbólicas diferentes de la notación decimal. Se manifiesta un conflicto cuando el alumno analiza la posibilidad de cortar una cuerda de longitud $\sqrt{2}$ unidades en 4 trozos iguales, o la existencia y posterior determinación de un punto en la recta para $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ o para cualquier número irracional. Desde el punto de vista matemático, encuentra razones para afirmar que esas cuestiones se resuelven positivamente apelando a la continuidad (menciona hechos fundamentados sobre esta propiedad de **R,** como el teorema del valor medio en análisis, o las construcciones geométricas). Sin embargo, la representación decimal infinita de estos números, así como la definición de $\sqrt{2}$ como el supremo de un conjunto, se erigen como obstáculos insuperables respecto de la posibilidad real de realizar esas tareas. En el fragmento 5002 a 5101 de la entrevista el alumno expresa claramente el conflicto suscitado: la imposibilidad física de representar números irracionales debido a su representación decimal infinita. *Interrupciones:* Se producen dos interrupciones, la primera, prevista por la entrevistadora por razones técnicas, realizada entre la primera y segunda parte de la entrevista (minuto 25). La segunda, ajena a los implicados, se produce a los 33 minutos de transcurrida la entrevista.

Informe sujeto Nº20; 18; L. Matemática; E-2; 19/05/99; 19:16-19:36.
Duración relativa de las tareas: La realización de las tareas se distribuye uniformemente durante la entrevista.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: *Seguridad en sí mismo:* El alumno se muestra muy seguro de sus respuestas y las justifica precisamente. *Manejo de las herramientas:* Realiza la representación de $\sqrt{2}$ mediante una construcción geométrica, y explica claramente las representaciones de números mediante la división de un segmento en partes iguales. *Expresión en voz alta:* Su voz es perfectamente audible. *Frases o acciones relevantes para la investigación:* No se manifiesta ningún conflicto en las respuestas del entrevistado. *Algunos errores observados:* Utiliza el término 'intrascendente' para referirse a los números que no pueden representarse en la recta de forma aproximada y propone como ejemplos los números π y e. Cabe la posibilidad de que se esté refiriendo a números trascendentes o a números no constructibles. Sostiene que $\sqrt[3]{2}$ es igual a la diagonal de un cubo de arista unidad, y que ese número se puede representar mediante una construcción geométrica. Transforma el número 1'18 (periódico puro) en la fracción 118/99.

4.4.2. Dificultades observadas

Como se ha manifestado al inicio del capítulo, el objetivo de las entrevistas exploratorias es detectar dificultades de la representación de los números reales en la recta.

Las cuestiones que sean interpretadas como conflictivas por los investigadores son las que interesan en esta sección. En 3.7 hemos adoptado una definición de conflicto que incluye dos características: la presencia de dos o más proposiciones contradictorias o que conducen a respuestas contradictorias y la toma de conciencia por parte del sujeto de esa contradicción.

En 4.4.2.1 describimos los criterios asignados a las respuestas de tres sujetos entrevistados (escogidos aleatoriamente). En 4.4.2.2 estudiamos en mayor detalle las frases de entrevistados a las que se ha asignado en la quinta columna un conflicto cognitivo (identificado con el código 'CF') y en 4.4.2.3 analizamos las frases a las que se ha asignado en la quinta columna el proceso cognitivo 'Dudar' (identificado con el código 'DU').

4.4.2.1. Ejemplos de utilización de criterios

Se han escogido al azar tres entrevistas, correspondientes a cada nivel educativo (1º Bachillerato, C.O.U. y 1º Licenciatura en Matemáticas, respectivamente), de manera tal que cada una corresponda a uno de los tres modelos de entrevistas. En primer lugar, se ha realizado un estudio de las frecuencias de los criterios empleados en cada entrevista. En la tabla 4.4 se indica en porcentaje la frecuencia de los criterios empleados por los sujetos de Bachillerato, C.O.U. y L. en Matemáticas. No se incluyen las frecuencias, sino únicamente los porcentajes, porque se trata de sujetos de niveles diferentes y de distintos guiones de entrevistas, lo cual supone diferencias en cuanto a la diversidad (en cantidad y en el nivel de profundización) de argumentos empleados en las respuestas.

En las entrevistas seleccionadas aleatoriamente, se observa que el criterio que predomina en los niveles Bachillerato y C.O.U. es Representaciones, mientras que en la entrevista correspondiente al alumno de Licenciatura predomina el criterio Fenomenología. Es necesario tener en cuenta que los guiones son diferentes, y es posible que en alguno se haga más hincapié en un aspecto determinado: a modo de ejemplo, en el guión de entrevista 1, se incluye la actividad de manipular, cortar y medir trozos de cuerda. Esa tarea supone privilegiar el aspecto fenomenológico que es justamente el criterio más utilizado en la entrevista (ver columna 4, tabla 4.4).

Aunque no generalizamos conclusiones a partir de tres casos, hay algunas observaciones que pueden extenderse a las entrevistas restantes. En primer lugar, nos referimos al hecho de que en la entrevista del alumno de 1º de Bachillerato los criterios utilizados no son tan variados como en el caso de los sujetos de C.O.U. y

1º de Licenciatura. Teniendo en cuenta que se trata de un alumno de un nivel inferior, es posible que disponga de un bagaje de ideas más limitado a la hora de explicar o utilizar argumentos en las respuestas.

Criterios	**Porcentaje**		
	1º Bachillerato (Guión Nº 3)	**C.O.U. (Guión Nº 2)**	**1º Licenciatura (Guión Nº 1)**
Fenomenología (interp.)			0’7
Fenomenología	39’3	20’4	55’9
Fenomenología-Operaciones			1’4
Fenomenol.-Represent. (interp.)			0’7
Fenomenología-Representaciones	10’7	3’7	4’9
Fenomenol.-Tipo-Representaciones			2’8
Operaciones	3’6	1’9	2’8
Orden		11’1	3’5
Orden-Fenomenología		5’6	
Orden-Representaciones		1’9	1’4
Representaciones (interp.)			1’4
Representaciones	46’4	46’3	17’5
Representaciones-Fenomen. (interp.)		1’9	
Tipo de Número		3’7	3’5
Tipo-Representaciones		3’7	2’8
Tipo-Represent.-Operaciones			0’7
Total	100’0	100’0	100’0

Tabla 4.4: Ejemplos de criterios utilizados durante la entrevista

En segundo lugar, tal como se había indicado en el capítulo correspondiente a los criterios, es muy común la utilización de varios criterios conjuntamente en una respuesta. Tal como allí se explica, los criterios no son compartimentos aislados, y eso se pone en evidencia en las respuestas de los sujetos.

4.4.2.2. Conflictos cognitivos y criterios

A continuación estudiaremos los conflictos cognitivos observados en las entrevistas exploratorias.

El estudio consiste en analizar las respuestas en las que interpretamos la presencia de conflicto cognitivo y asignar a estas respuestas los criterios para el estudio del número real. Se analizarán todas las entrevistas, clasificadas según el nivel del alumno y el guión de entrevista.

En las tablas 4.5, 4.6 y 4.7 (correspondientes a 1º de Bachillerato, C.O.U. y

1º de Licenciatura, respectivamente) se incluye la cuestión o pregunta formulada por la investigadora en el transcurso de la entrevista, las respuestas de los sujetos a dicha cuestión (en las que se interpreta una situación conflictiva) y los criterios asignados a esas respuestas. Se han incluido únicamente los sujetos cuyas respuestas evidencian algún conflicto cognitivo, a los efectos de simplificar la lectura de las tablas.

Algunos criterios asignados se encierran entre paréntesis, para indicar que en la frase correspondiente no hay una referencia explícita al criterio, sino que éste se asigna siguiendo una interpretación (por parte de la investigadora) del contexto en que se incluye la frase.

Las dos características indicadas en la definición de conflicto cognitivo se manifiestan en estas respuestas. Los sujetos deben responder una cuestión planteada por la entrevistadora pero no están seguros de la respuesta (los elementos considerados los conducen a respuestas contradictorias). En consecuencia se muestran confundidos e inseguros (son conscientes de la posible contradicción).

Sujetos de 1º de Bachillerato

En la cuarta columna de la tabla 4.5 incluimos una serie de respuestas de sujetos en las que observamos conflicto cognitivo.

En los puntos siguientes discutimos brevemente cada una de esas respuestas, considerando los criterios para el estudio de los números reales implicados en cada caso.

(Sujeto Nº 2) La primera situación conflictiva se refiere a la determinación de la marca que corresponde a un número, cuando este número tiene infinitas cifras decimales no periódicas. El problema es conciliar la infinidad de las cifras con una marca única y determinada.

(Sujeto Nº 5) La segunda situación se presenta cuando se debe dividir una cuerda (cuya longitud no es un múltiplo de 3), en tres partes iguales. Los criterios que intervienen son: fenomenología (se dispone de un objeto, la cuerda, que se debe cortar en partes iguales, y la igualdad entre los trozos se determina mediante la magnitud longitud), operaciones (un número de unidades determinado debe dividirse por 3 o por 4) y representaciones (en la pantalla de la calculadora se observa que el resultado de la división tiene muchas o infinitas cifras decimales). Las operaciones y la representación (decimal infinita) son incompatibles con la acción concreta de cortar la cuerda con esa longitud determinada.

Suj., guión	Nº frase	Cuestión	Frases	Crite-rios
2, 2	2501 a 2507	Hallar el punto que corresponde a 1’4142...	E- Y así, ¿obtendrías entonces el número, la marquita para √2 [procedimiento por intervalos encajados]? A- Pero es que como tiene infinitas cifras pues..., y la recta es una pues, ya en cuanto hagas otros trazos ya... E- Pero, ¿quieres decir que para este número no hay marquita? A- No, porque es un número..., no es periódico. E- ¡Ah!, no hay marquita. Pero este número [1’4142...], ¿no es igual que éste [√2]? A- Sí pero, es muy difícil porque si el número que no tiene unas cifras definidas... Es que no lo sé.	Repre-senta-ciones
5, 1	0307 a 0508	Cortar una cuerda en tres trozos iguales.	A- [Mide el trozo de cuerda. Usa la calculadora. Mide otra vez el trozo de cuerda] Espérate, espérate, que me parece que me he liado yo solica... [sonriendo, mide otra vez la cuerda]. E- ¿Cuánto mide? A- Cuarenta y un cm. E- Cuarenta y un cm. A- Sí. [Usa la calculadora.] E- ¿Y ahora qué haces? A- Pues, dividir entre tres... Sale inexacto. E- ¿Y entonces? ¿Cómo vas a hacer, que te dio trece con sesenta y seis... y más decimales, ¿no? ¿Y entonces? ¿Qué vamos a medir? A- [Sonríe] Bueno. Tampoco no me van a salir los tres trozos iguales, o sea que... [Mide un primer trozo y corta, dobla por la mitad el trozo restante] ¿Todas las pruebas son así?	Feno-meno-logía. Opera-ciones. Repre-senta-ciones.
6, 2	0302 /03	¿Existe en la recta un punto para 0’101001...?	A- No. No estoy seguro porque es que... por muy instrumentos que sea, son infinitos puntos” “No sé, no sé. Es que es muy abstracto.”	Feno-meno-logía (Repre-sent.)

Tabla 4.5: Conflictos y criterios atribuidos en sujetos de 1º de Bachillerato

(3) (Sujeto Nº 6) La respuesta de este alumno puede interpretarse desde dos puntos de vista diferentes. Por un lado, la expresión “son infinitos puntos” utilizada por el alumno, interpretada literalmente se refiere a la infinidad de puntos de la recta. El conflicto se relaciona en este caso con la dificultad de hallar entre infinitas puntos, el único que le corresponde al número 0’101001... Por otro lado, puede ocurrir que esté hablando de las infinitas cifras de la notación decimal de ese número, en cuyo caso el conflicto sería el mencionado en el punto 1. Como no es posible identificar una de estas interpretaciones como la acertada, esta respuesta no se considerará en el análisis de los conflictos.

Sujetos de C.O.U.

En la cuarta columna de la tabla 4.6 incluimos una serie de respuestas de sujetos en las que observamos conflicto cognitivo.

En los puntos siguientes discutimos brevemente cada una de esas respuestas, considerando los criterios para el estudio de los números reales implicados en cada caso.

(Sujeto Nº 11) La consideración de que la marca realizada sobre el papel no constituye un punto geométrico ‘ideal’. Esta idea sale a la superficie cuando se interroga a los sujetos respecto de la exactitud de la representación. Se interpreta aquí la interacción de los criterios Fenomenología y Representaciones: la representación de un número real en la recta supone una biyección entre números reales y puntos de la recta, sin embargo, el conflicto surge debido a que la marca como ‘objeto físico’ no coincide con el punto como ’objeto mental’.

(Sujetos Nº 12 y 14) Reaparece el conflicto causado por la presencia de infinitos decimales. Los criterios implicados son Fenomenología y Representaciones. El conflicto surge cuando los sujetos deben admitir que las infinitas cifras decimales determinan un número ($\sqrt{2}$) al que se lo puede identificar con una marca sobre la recta.

(Sujeto Nº 15) En este caso se plantea la dificultad provocada por el hecho de que al número 0’1234... le corresponde un punto de la recta (a todos los reales les corresponde un punto en la recta), pero posee infinitas cifras y tiene la dificultad añadida de no ser constructible (el alumno sólo indica que no se puede hacer exacto. En C.O.U. no se trabaja la teoría de los números constructibles.). Se plantea un conflicto que en cierto modo anunciamos en 3.6: es necesario extender la noción de número constructible si se quiere dar más seguridad a la creencia de que la biyección número / punto puede realizarse para todo número real.

Suj., guión	Nº frase	Cuestión	Frases	Criterios
11, 3	0701 a 0706	Determinar si la marca hecha coincide con el punto exacto.	A- Hombre, siempre hay un error, haciendo con el compás y tanto. Y claro, los puntos... no existen. O sea, yo... E- ¿Cómo, cómo? A- Yo he marcado aquí el punto uno, pero en realidad, no sé, los puntos no tienen dimensión, o sea que... estaría allí el punto pero... E- Ah... ¿Cómo es eso que no tienen dimensión los puntos? Cuéntame. A- Porque... aquí haciendo esa marca, pues, yo englobo muchísimos puntos.”	Feno-meno-logía. (Repre-senta-ción
12, 2	2701 a 2703	La marca realizada con compás, ¿correspon-de a √2?	A- Es que... dentro de esa marca. Si eso... fuera justamente raíz de dos, ahí dentro tienen que estar todos estos números [señala la notación decimal]. E- ¿Y entonces? A- Por eso, por eso te digo que... que esto... Que para que esto [señala notación decimal]... tendríamos que escoger una unidad muy grande y empezar a dividir, pero estaremos en el mismo problema de los intervalos.	Feno-meno-logía. Repre-senta-ción.
14, 3	0810 a 0908	¿La marca coincide exactamen-te con el punto que le corresponde a √2?	A- En este caso, despreciando errores de [...] podría ser. E- ¿Errores de qué? A- Raíz de dos... errores de... el grosor de la mina y todo esto, pues, debería de representar raíz de dos. Pero bueno, exacto exacto... Es una serie infinita de números, siempre... Se supone que es raíz de dos. E- Se supone que es raíz de dos. ¿Y qué pasa con que es una serie infinita de números? ¿Con eso qué pasa? A- Pues que... nunca podemos determinar exactamente. Pero claro, tomando así esto, tomando la hipotenusa y proyectándola, se supone que es exacto. Pero claro, nunca podremos...	Repre-senta-ción. Feno-meno-logía.

Tabla 4.6: Conflictos y criterios atribuidos en sujetos de C.O.U.

Suj., guión	Nº frase	Cuestión	Frases	Criterios
15, 2	0902 a 0907	¿Es exacta la marca correspon-diente a 0'1234...?	A- No. E- ¿No? ¿Por qué? A- Porque lo he hecho... aproximado. No se puede hacer exacto. E- ¿Por qué..., por qué no se puede hacer exacto? A- Pues porque... no sé. Por lo que yo sé sería infinito y... Debe tener una marca en la recta real, pero... no sé.	Repre-senta-ción. (Feno-menolo-gía)

Continuación tabla 4.6: Conflictos y criterios atribuidos en sujetos de C.O.U.

Sujetos de 1º de Licenciatura en Matemáticas

En la cuarta columna de la tabla 4.7 incluimos una serie de respuestas de sujetos en las que observamos conflicto cognitivo.

En los puntos siguientes discutimos brevemente cada una de esas respuestas, considerando los criterios para el estudio de los números reales implicados en cada caso.

Suj., guión	Nº frase	Cuestión	Frases	Crite-rios
19, 1	0403 a 0501 y 0701	Al cortar la cuerda en 4 trozos, ¿pueden obtenerse cuatro trozos exacta-mente iguales?	A- Pues yo creo que no. B- No. ¿Por qué? A- Porque depende de la longitud del... de la cuerda, creo. Porque no sé, me imagino un intervalo de **R** y si lo quiero dividir a la mitad, entonces tengo el problema de que, por ejemplo si el intervalo mide dos. Pues lo puedo dividir a la mitad, y uno y uno, pero si mide..., si midiera por ejemplo raíz de dos, pues para dividirlo a la mitad siempre tendría..., no podría dividir..., siempre.... depende de los decimales que considerara, pues no podría llegar a dividirlo exactamente a la mitad, pienso.[...] A- Cojo esa longitud, ¿no? Entonces, la divido en la mitad y depende del número de decimales que..., no sé siempre..., es que no sé cómo explicarlo.	Fenome-nología. Tipo de Número. Repre-senta-ción. Opera-ciones.

Tabla 4.7: Criterios y conflictos atribuidos en sujetos de 1º de Licenciatura en Matemáticas

Suj., guión	Nº frase	Cuestión	Frases	Crite- rios
19, 1	3004 a 3101 y 3201	Valora- ción de la represen- tación de números en la recta.	A- No sé porque... ahí están todos los puntos, pero, por ejemplo, raíz de dos, pues raíz de dos es..., no sé, no es un punto en concre... o sea... Es el supremo de un conjunto, entonces, representarlo en la recta como un punto únicamente en esa recta... no sé. [...] A- Pero cuando llego a los irracionales..., o sea, esos sí los... pienso que se podrían representar puntualmente así, y..., pero por ejemplo cuando llego a la raíz de dos, pues pienso en un montón de puntitos juntos pero, raíz de dos nunca llegaría a ser un punto en la recta.	Repre- senta- ción. Tipo de Número. Orden.
	5002 a 5006	Valora ción de la rep. en la recta.	A- Es que lo que yo pienso es que un número real tiene una expresión decimal, ¿no? E- Sí. A- Que... Bien. Y entonces si yo pongo unidad de medida, entonces hay algunos números que es imposible que los llegue a aproximar porque necesitaría coger infinitas fracciones de esa unidad de medida, y entonces representar ese número resultaría imposible. E- Bien. A- De una forma, o sea..., lo podría representar [...] con Tales podría representarlo, pero representarlo exactamente creo que no.	Repre- senta- ción. Feno- meno- logía

Continuación tabla 4.7: Criterios y conflictos atribuidos en sujetos de 1º de Licenciatura en Matemáticas

(Sujeto Nº 19, **A,** frases 0405/06, 0501, 0701) El conflicto que surge se relaciona con la posibilidad de dividir por dos (Operaciones) un número irracional (Tipo de Número) cuya expresión decimal es infinita (Representaciones). Este número expresa la longitud de una cuerda (Fenomenología). El alumno razona a partir de la representación decimal de los números, y cuando ésta incluye infinitas cifras, se produce un desequilibrio que intenta superar, y lo logra apelando a un teorema de existencia (frases 0707/11 y 0801/02): “Si me imagino, no sé, el dedo ir pasándolo por la cuerda...” (señala, deslizando el dedo por un trozo de cuerda). “Y considero la longitud que voy dejando a la izquierda.” “Pues, eso lo podría expresar como una función continua.” “Y... una función continua entonces tendrá la propiedad, la imagen, o sea, tendrá la propiedad del valor medio, entonces, existirá un punto tal que la imagen sea justo la mitad de la longitud de la cuerda."

(Sujeto Nº 19, **B,** frases 3004, 3101, 3201) La idea que interfiere es la interpretación de un número irracional (criterio Tipo de Número) como 'el supremo de un conjunto' (frase 3101; criterio Orden), como el límite de una sucesión convergente. El alumno piensa en 'un montón de puntitos juntos' (criterio Representación), pero no 'actualiza' el proceso de convergencia.

(Sujeto Nº 19, **C,** frases 5002/04) Estas frases pueden interpretarse desde ángulos diferentes. Por un lado, puede pensarse en la dificultad de cerrar el proceso infinito que supone la representación decimal infinita. Por otro lado, es posible que interfiera la idea de inconmensurabilidad de una longitud irracional con la unidad de medida. No obstante, esta última posibilidad no puede confirmarse, dado que durante la entrevista no ha habido referencia a los números racionales (para los cuales el problema de la inconmensurabilidad no existe), sino únicamente a números irracionales.

Un resumen de los conflictos observados

Las dificultades enumeradas se organizan en torno a diferentes cuestiones:

Conflictos observados en los sujetos 2, 12, 14 y 19 (B): La dificultad en cerrar un proceso infinito (encarnado por las infinitas cifras decimales de un número, o la consideración del número como el supremo de un conjunto). En Bachillerato no se ha trabajado el tema y en 1º de Licenciatura es posible que se defina número real como el límite de una sucesión convergente; sin embargo, se observa la dificultad en aceptar ese límite. La infinidad de las cifras decimales obstaculiza el pasaje al límite.

Conflictos observados en los sujetos 5 y 11: Se trata de la dificultad en vincular objetos o resultados matemáticos (ideales) y objetos del mundo físico. En el sujeto 5 el conflicto se manifiesta por la falta de distinción entre un resultado obtenido mediante un procedimiento abstracto (por ejemplo, una división) y la manipulación de un objeto concreto (como por ejemplo un trozo de cuerda). En el sujeto 11 el conflicto surge por la diferencia entre una marca física y un punto de la recta.

En la dificultad descrita en el sujeto **19 (A)** se observa una confluencia de los dos conflictos mencionados.

Las dificultades descritas en los sujetos **6** y **19 (C)** han dado lugar a interpretaciones diferentes, y por esa razón no se consideran en este análisis.

Estas conclusiones, aunque no son generalizables, son útiles para orientarnos en la selección de las dificultades que se estudiarán con mayor profundidad en el cuestionario.

4.4.2.3. Dudas y criterios

Las frases en las que el propio alumno reconoce que no sabe la respuesta ante una determinada pregunta de la investigadora pueden proporcionar información relacionada con posibles dificultades o conflictos cognitivos. En varias entrevistas los sujetos manifestaron que nunca habían reflexionado en torno a algunas de las cuestiones planteadas.

En las tablas 4.8, 4.9 y 4.10 se indican las frases en las que los sujetos manifiestan dudas, con los criterios asignados en cada caso.

Sujetos de 1º de Bachillerato

(Sujeto 2) En las frases 0110/12 se observa la duda que se plantea cuando el sujeto debe decidir si es o no posible representar en la recta un número con infinitas cifras decimales. Se plantean también dudas respecto de la valoración de la representación realizada. El criterio asignado es Representaciones, porque observamos en el alumno dificultad para establecer conexiones entre diferentes representaciones de un mismo número, y dificultad para valorar la representación de un número en la recta.

(Sujeto 4) La frase 0505 del alumno 4 deja entrever la dificultad en aceptar que a un número con infinitas cifras decimales se le pueda asignar un punto de la recta. Se produce un desajuste entre cuestiones relacionadas con los criterios Representaciones (la representación decimal infinita y la representación en la recta) y Fenomenología (dividir un segmento dado en infinitos trozos).

(Sujeto Nº 5) Las cuestiones que intenta responder el sujeto Nº 5 atañen a la posibilidad de ‘manipular’ (por ejemplo, enumerarlos, o representarlos mediante una marca efectuada con lápiz) concretamente los puntos de una recta. Surge en este ejemplo la conexión entre un objeto ideal (punto geométrico) y un objeto concreto (un trazo o una marca efectuados con lápiz).

Suj., guión	Nº frase	Cuestión	Frases	Criterios
2, 2	0110 /12	Decidir si 0'101001... se puede rep. en la recta.	"Yo qué sé, pero éste es ya muy... (señala el número 0'101001...)" "Es que para buscarlo ahí, yo qué sé."	(Representación)
	1309 /13-1405	Decidir si la marca hecha coincide con el número 1'25.	"No lo sé" "Yo creo que sí, no sé." "No lo sé."	(Representación)
	1908	Decidir si la marca hecha coincide con el número 1/3.	"Yo qué sé."	(Representación)
4, 2	0407 /09, 0505	Decidir si todos los números de la tabla pueden representarse.	"Mmmm..." "No sé, no sé." "El problema es dividir en tantas partes como para encontrar ese número" (refiriéndose a un número que posee infinitas cifras decimales)	(Representación) Fenomenología
5, 1	1807 /08	Determinar si es posible contar los puntos de la recta.	""Yo no los he contado. No, no sé. Son muy pequeños."	
	1810	Una marca determinada, ¿coincide con un punto?	"No, serán muchos."	

Tabla 4.8: Dudas y conflictos atribuidos a sujetos de 1º de Bachillerato

Sujetos de C.O.U.

(Sujeto nº 11) En la tabla 4.9 (fila 2), se observa la respuesta que el sujeto Nº 11 propone para el conflicto surgido por la diferencia entre una marca física y un punto de la recta. En las frases 2102/03 correspondientes al mismo sujeto, se comprueba que la pregunta de la entrevistadora ha sembrado una duda respecto de la existencia de números que no cumplen con la propiedad arquimediana, aunque durante el transcurso de la entrevista la duda se disipa.

(Sujeto Nº 15) Las frases correspondiente al sujeto Nº 15 se relacionan con la perplejidad que le produce el número 0'12345..., debido a que se trata de un número cuyas cifras pueden reconocerse con relativa facilidad (después de la coma decimal, la sucesión de números naturales), y sin embargo no es periódico, como ocurre con los números que el alumno está acostumbrado a manejar.

Suj., guión	Nº frase	Cuestión	Frases	Criterios
11, 3	0812 /14, 0905	¿Es posible determinar la marca que corresponda a un único punto?	“Pero..., o sea, tomamos más o menos el punto medio de todos esos... como el cero.” “Creo, vamos, no estoy muy segura.” “Yo no sé si se puede o no... matemáticamente, pero..., nosotros lo hacemos para representar porque si no, es que no tendríamos forma de representarlo.”	Repre- senta- ción. (Fenomen ología)
	2102 /08	¿Existe un número tal que no se pueda alcanzar la marca correspondiente al $2\sqrt{2}$?	“Yo creo que, vamos, yo creo que no existe ese número, pero..., quizá me equivoco.” “Me has puesto en duda, pero...”	(Orden)
15, 2	0402 /03	¿Puede representarse como fracción el número 0’12345...?	“Porque no es..., no es un número irracional..., no, digo irracional, no es periódico puro de éstos, ni tampoco...” “Sigue un orden lógico, ¿no?, pero... no sé, no estoy seguro.”	Tipo de Número. Repre- senta- ción.
	0107	¿Cómo interpreta al número 0’12345...?	“Ese número, pues, estaríamos muy próximos al cero, no sé...”	Orden.

Tabla 4.9: Dudas y criterios atribuidos a sujetos de C.O.U.

Sujetos de 1º de Licenciatura en Matemáticas

En cuanto a los sujetos de 1º de Licenciatura (tabla 4.10), sorprenden las respuestas del sujeto Nº 17, que desconoce el hecho de que un número irracional tiene infinitas cifras decimales. Las frases del alumno 19 se relacionan con los conflictos mencionados en la sección anterior.

Suj., guión	**Nº frase**	**Cuestión**	**Frases**	**Criterios**
16, 1	2509	¿Se podría mejorar la aproximación a 0’41?	“No sé. Pues... yo qué sé, [...] un plano que... de cero a uno hay una diferencia pequeña, pues nos podemos..., hay más error que de éste cero a uno, que es una diferencia mayor, que podemos buscar un valor más próximo.”	Fenome-nología
17, 2	1106 a 1113	¿Cuántas cifras decimales tiene √2?	“Con la calculadora todas las que pueda tener. Tiene siete (mirando la pantalla). Tendrá alguna más.“ “Siete. No sé si el algoritmo acaba en siete decimales o tiene más.”	Repre-senta-ción.
	1211 y 1212	¿Cuántas cifras decimales tiene un número irracional?	“Pues, pues no lo sé seguro (sonríe).” “Creo que los irracionales no tienen un..., que yo sepa, por ejemplo pi, todavía no de ha hallado la última cifra... decimal, se sigue investigando.”	Repre-senta-ción
	1914	¿Cómo representar 0’333... sin utilizar Tales?	“Es que... es muy difícil, no lo sé. Yo lo veo..., es que no sé otra manera de representarlo así, sin el un tercio.”	Repre-senta-ción
	1403	Dividir 43 entre 3.	“Pues..., pues... he dicho que eran cuarenta y tres entre tres, pues no sé si redondear, pues no sé. Dan catorce.”	Opera-ciones
	0601 y 0903	Determinar la mitad de √2. (Cortar por la mitad una cuerda de √2 unidades de longitud.)	“Mmm... porque... no podría..., es que no sé cómo explicarlo, no podría nunca llegar a encontrar la mitad exacta.” “Pero ese argumento me..., o sea, pienso que no y pienso que sí, no sé con cuál quedarme.”	Opera-ciones

Tabla 4.10: Interacción dudas/criterios en sujetos de 1º de Licenciatura en Matemáticas

Un resumen de las dudas observadas

Algunas de las dudas planteadas se relacionan con la dificultad para cerrar un proceso infinito. Son los casos en que se presenta un número con infinitas cifras decimales, y los sujetos dudan de que les corresponda un punto en la recta.

El análisis de los números dados según su constructibilidad escapa a las posibilidades de los sujetos entrevistados (al menos, de los de Bachillerato y C.O.U.). Las dificultades que se plantean, por ejemplo, con el número 0’12345... se superan en el momento en que se reconoce que este número no es constructible, y que por lo tanto, sólo admite una representación aproximada en la recta.

Sin embargo, las dificultades que surgen con √2, incluso después de obtener una representación en la recta apoyada en propiedades geométricas, indican la presencia de un conflicto.

Otras dudas planteadas se relacionan con el segundo conflicto descrito en la sección anterior: la dificultad para establecer relaciones adecuadas entre un objeto o resultado matemático y el objeto del mundo físico que lo representa. Nos referimos a las dudas planteadas cuando el sujeto debe indicar si la marca efectuada coincide con el punto, o cuando debe dividir un trozo de cuerda en partes iguales.

4.4.3. Informe de los resultados de las tareas

Un objetivo general de los tres guiones de entrevista administrados es identificar dificultades de la representación de números reales en la recta. Por esa razón, se proponen fundamentalmente tareas que exigen la representación de números en la recta y se intenta analizar algunas dificultades específicas que han sido detectadas en otras investigaciones (Romero, 1995). Además, se espera obtener información respecto de las preguntas de investigación (de índole empírico) planteadas en el Proyecto de Tesis (Anexo 2).

Entre las dificultades detectadas por otros investigadores, podemos mencionar el 'problema de la unidad' (Romero, 1995; p. 443) "[los sujetos] no se planteaban la necesidad de explicitar la unidad de medida" o el "conflicto entre la finitud actual de la longitud irracional y la infinitud potencial de su expresión decimal" (Romero, 1995; p. 449).

En esta sección analizamos el desempeño de los sujetos entrevistados en cada una de las tareas propuestas. En cada caso describimos, en primer lugar, los objetivos perseguidos en cada guión, y en segundo lugar, las respuestas obtenidas por parte de los sujetos entrevistados a cada una de las tareas propuestas.

4.4.3.1. Entrevista 1

Guión:

Parte 1: Corte de una cuerda en trozos iguales.
Parte 2: Medición de segmentos de recta.
Parte 3: Representación de números en la recta.

En la primera y segunda parte de esta entrevista se proponen situaciones en las que los sujetos deben determinar las longitudes de distintos objetos: trozos de cuerda (objetos materiales) y segmentos de recta (objetos ideales). Respecto de los segmentos de recta, los sujetos deben manipular una representación sobre el papel (determinar su longitud usando unidades diferentes) y determinar mediante un procedimiento geométrico el punto medio de un segmento. Esta combinación de actividades con objetos materiales e ideales (estos últimos representados mediante trazos rectilíneos sobre el papel) se propone con el fin de que los sujetos se vean en la necesidad de variar sus puntos de vista al responder preguntas aparentemente similares, pero que atañen a objetos de diferente naturaleza. Un propósito inicial consistía en observar los términos utilizados por los sujetos para referirse a cantidades de longitud.

En la última parte de la entrevista se espera simplemente observar cómo realizan los sujetos la representación de números reales en la recta.

La entrevista Nº 1 se administró a seis sujetos, tres de 1º de Bachillerato, uno de C.O.U. y dos de 1º de Licenciatura en Matemática.

4.4.3.1.1. Parte 1, Tarea 1.1: Cortar una cuerda en cuatro trozos iguales

De los seis sujetos, uno midió la cuerda antes de cortar y determinó la longitud que debería tener cada trozo, para después cortarlos según esa longitud. Los sujetos restantes doblaron la cuerda por la mitad, cortaron, doblaron por la mitad los trozos resultantes y cortaron nuevamente. Las razones argumentadas para explicar las diferencias de longitud entre los trozos obtenidos fueron de dos tipos: 1) por las características de los elementos utilizados (la inexactitud de las tijeras, la regla graduada, el grosor de la cuerda) y 2) por la longitud de la cuerda.

Esta última razón (expresada por los sujetos Nº 5 y Nº 19) revela la presencia de conflicto. En un caso, (sujeto Nº 5) la alumna afirma (frase 0206): "Porque si son cuatro trozos y serían treinta y nueve cm y medio, siempre..., que no podrían medir lo mismo". Interpretamos que 39'5 es considerado por la alumna como un número decimal no múltiplo de cuatro, lo que supondría obtener en la división otro número decimal (la alumna no realiza la división, sólo la menciona). Deja entrever (frase 0214) que recortar un trozo de cuerda con esa longitud sería muy difícil. La alumna reconoce la dificultad de obtener materialmente una cuerda cuya longitud es un número con varias cifras decimales, contando con una regla graduada en cm y mm.

En el segundo caso (sujeto Nº 19) el alumno se pregunta qué ocurriría si la longitud de la cuerda fuese un número irracional (por ejemplo $\sqrt{2}$), y la búsqueda de una respuesta lo lleva a un análisis interesante. Por un lado, dado que la expresión decimal de $\sqrt{2}$ posee infinitos decimales, no podría dividir un segmento de esa longitud exactamente por la mitad. Por otro lado, afirma que si se desliza un dedo por la cuerda, la longitud que va dejando a su izquierda puede expresarse como una función continua, y por lo tanto, por el teorema del valor medio, debe existir un punto de la cuerda al que le corresponda por esa función el valor $\sqrt{2}/2$ (frases 0707 a 0802). La posibilidad de obtener la mitad de $\sqrt{2}$ a partir del análisis justificado matemáticamente se enfrenta con la posibilidad material de cortar una cuerda cuya longitud se expresa mediante infinitos decimales.

Aunque los conflictos suscitados se manifiestan con diferente nivel de análisis (justificados por la edad y el nivel de cada alumno), es posible hallar un punto en común: la imposibilidad material de determinar una longitud expresada mediante una notación decimal (finita, con más de un decimal, o infinita).

4.4.3.1.2. Parte 1, Tarea 1.2: Cortar una cuerda en tres trozos iguales

Los procedimientos utilizados por los sujetos para cortar la cuerda en tres trozos iguales son dos: 1) Ajustar dobleces de la cuerda en tres partes y cortar (tres sujetos) y 2) Medir la cuerda, dividir entre tres (con calculadora), medir nuevamente y cortar.

Dos de los tres sujetos que utilizaron el primer procedimiento, previamente midieron la cuerda, y al observar que obtenían números que no son múltiplos de tres (41 cm y 43 cm respectivamente) renunciaron al segundo.

Es posible considerar este hecho como una dificultad surgida en esta tarea. Algunos sujetos (sujetos Nº 9 y Nº 13) dividían entre tres y cortaban sin manifestar la presencia de ningún conflicto. En cambio otros (sujetos Nº 5, frases 0307 a 0505; sujeto Nº 16, frase 0807 y sujeto Nº 19, frase 1407), al comprobar que la longitud de la cuerda resultaba un número no divisible por tres interrumpían la tarea, y expresaban de una u otra forma el conflicto.

Interpretamos el conflicto como la imposibilidad material de obtener un trozo de cuerda cuya longitud se expresa mediante un número decimal infinito (periódico). Cabe reconocer la posibilidad (considerada por uno de los sujetos, sujeto nº 19) de cortar un segmento en tres partes iguales recurriendo al teorema de Tales, pero ante esta situación concreta, el procedimiento geométrico no resultaba práctico.

4.4.3.1.3. Parte 2, Tarea 2.1: Medición de la abertura del compás utilizando unidades diferentes

Los sujetos miden con la regla la abertura del compás (después de marcarla sobre un segmento de recta dibujado en el papel) y todos anotan el resultado de la medición indicando la unidad de medida (cm), aunque al expresarlo verbalmente, dos de ellos no indican la unidad de medida.

Cuando la entrevistadora propone que midan nuevamente la abertura del compás, y ofrece gráficos en los que se ha marcado el origen y la unidad (el segmento unidad en todos los casos es mayor que 1cm), todos los sujetos responden, después de medir con la regla, o directamente sin efectuar ninguna medición, que la longitud es la misma porque no se ha movido el compás. Tienen en cuenta la marca sobre la gráfica correspondiente a 0 (porque allí colocan el cero de la regla) pero no la marca correspondiente a 1.

En todos los casos, la entrevistadora hace notar la presencia de esa unidad, y solicita a los sujetos que determinen la longitud de la abertura del compás considerando el segmento unidad indicado en el gráfico. Dos sujetos (sujetos Nº 1 y 5) determinan la nueva medida aproximadamente y tres sujetos (sujetos Nº 9, 13 y 16 respectivamente) aplican un razonamiento proporcional (efectúan una regla de tres). El sujeto Nº 19 aplica el teorema de Tales para dividir el nuevo segmento unidad en 10 partes iguales, y expresa la longitud de la abertura del compás, en esa nueva unidad, como comprendida en un intervalo (“1’4 < x < 1’5”)

Posteriormente, todos reconocen que las diferentes medidas obtenidas se explican por el uso de unidades diferentes.

4.4.3.1.4. Parte 2, tarea 2.2: Trazar el punto medio de un segmento con regla sin graduar y compás

Todos los sujetos aplican correctamente el procedimiento para la determinación del punto medio del segmento utilizando regla y compás.

La entrevistadora pregunta si los puntos obtenidos coinciden exactamente con el punto medio del segmento (si los segmentos obtenidos son iguales). Las respuestas de los sujetos se esquematizan en la tabla 4.11.

<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Nº Suj.</th><th>Decisión posterior</th><th>Resultado medición</th><th>Justificación</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Afirma que los segmentos son iguales.</td><td>1</td><td rowspan="5">Mide.</td><td>Miden igual.</td><td>Puede haber diferencias debido a la infinidad de puntos del segmento.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Miden distinto.</td><td>Error de instrumentos.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Decide medir.</td><td>9</td><td>Miden igual.</td><td>Afirma que si se observa con mayor detalle, se notarán diferencias.</td></tr>
<tr><td>13</td><td>Miden igual.</td><td>Siempre se dividirá exactamente el segmento en dos partes iguales.</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Miden distinto.</td><td>Error de instrumentos.</td></tr>
<tr><td>No son iguales por errores en los instrumen-tos.</td><td>19</td><td>Rechaza medir usando los mismos instrumentos que utilizó para determinar el punto medio.</td><td colspan="2">Conflicto.</td></tr>
</table>

Tabla 4.11: Resumen de respuestas a la cuestión: ¿Coincide exactamente el punto obtenido con el punto medio?

Merece especial atención el conflicto suscitado durante el análisis que realiza el sujeto Nº 19. El alumno afirma que el mejor instrumento (entre los que tiene a su disposición en el momento de la entrevista) para comprobar si los dos segmentos son iguales es el compás (frase 2706): “Porque con el compás va pasando todo..., se va abriendo de forma continua y la regla discretiza al..., es decir, me da las unidades en mm como mucho, entonces pues, [el compás] no... me discretiza la longitud y me da de forma continua”.

El alumno se muestra confuso, y explica que no está seguro de que se pueda determinar el punto medio de cualquier segmento (surge nuevamente el ejemplo de un segmento de longitud igual a $\sqrt{2}$ unidades). En esta ocasión, la definición de $\sqrt{2}$ como el supremo de un conjunto es la que interfiere, y el alumno manifiesta (frases 3001 a 3201): "[$\sqrt{2}$] Es el supremo de un conjunto, entonces, representarlo en la recta como un punto únicamente en esa recta..., no sé. Los puntos cómodos de representar supongo que... serían, no sé, los racionales, o sea, desde los naturales hasta los racionales. Pero cuando llego a los irracionales..., o sea, esos sí los... pienso que se podrían representar puntualmente así, y..., pero por ejemplo cuando llego a la raíz de dos, pues pienso en un montón de puntitos juntos pero, raíz de dos nunca llegaría a ser un punto en la recta".

La noción de supremo constituye un escollo para que el alumno acepte que existe en la recta un punto para $\sqrt{2}$. Una interpretación posible de esa dificultad es que el alumno admite una existencia 'actual' ("pienso en un montón de puntitos juntos") pero no 'potencial' ("raíz de dos nunca llegaría a ser un punto en la recta") del número $\sqrt{2}$ o del punto que le corresponde a dicho número. El alumno parece dudar de que el número $\sqrt{2}$ llegue a alcanzarse concretamente por un procedimiento constructivo finito.

4.4.3.1.5. Parte 3: Representación de números en la recta

En la tabla 4.12 se presenta un resumen de las realizaciones de los sujetos en esta tarea. Se indica el número de sujeto, el tiempo aproximado de duración de la tarea, los números representados, el procedimiento de representación utilizado, la respuesta del alumno (en algunos casos) a la pregunta de si existe un método geométrico de representación, la respuesta del alumno acerca de si la representación es exacta, y la justificación (cuando existe) de ésta última respuesta.

Se observa que los argumentos utilizados para explicar la inexactitud de las representaciones son fundamentalmente de dos tipos: uno 'externo' o independiente del número representado, y tiene que ver con los posibles errores causados por los instrumentos utilizados, y otro 'interno', que depende del número representado, en concreto del número de cifras decimales.

El sujeto Nº 19 manifiesta claramente un conflicto respecto de éste último argumento (frases 5002 y 5004): "Es que lo que yo pienso es que un número real tiene una expresión decimal, ¿no?" "[...] Y entonces si yo pongo unidad de medida, entonces hay algunos números que es imposible que los llegue a aproximar porque necesitaría coger infinitas fracciones de esa unidad de medida, y entonces representar ese número resultaría imposible". Aquí la escritura decimal del número se presenta como una dificultad a superar para representar el número en la recta.

Nº Suj	Tiempo	Número	Procedim. Repres.	Mét. Geom.	¿Es exacto?	Justificación
1	8’	$\sqrt{2}$	Regla grad.	No sabe.	No.	Tiene infinitos decimales.
		3	Regla grad.		Sí.	
		0’41	Regla grad.		No.	
5	7’	$\sqrt{2}$	Regla grad.	No recuerda	No.	Tiene muchos decimales y la regla va de mm en mm.
		3	Regla grad.		Sí.	
		π	Regla grad.	Piensa que sí.	No.	Tiene infinitos decimales después de la coma.
9	5’	$\sqrt[3]{2}$	Regla grad.		No.	Siempre se acumulan errores por los elementos usados.
		2	Regla grad.		No.	
		$\sqrt{2}$	Mét. geom.	Usa.	No.	
13	13’	$\sqrt{2}$	Mét. geom.	Usa.	Sí.	Si no se utiliza un método geométrico no es exacto, depende del número de cifras decimales.
		$\sqrt[3]{2}$	Regla grad.		No.	
		π	Regla grad.	Piensa que sí.	No.	
		0’41	Regla grad.			
16	18’	$\sqrt{2}$	A ojo.	Lo describe	No.	En el punto (la marca) hay infinitos valores reales.
		0’41	Regla grad.		No.	Cuanto mayor es la unidad, menor será el error.
		π	A ojo.	Piensa que sí.	No.	Errores en los instrumentos (grosor de la cuerda).
19	9’	$\sqrt{2}$	Mét. geom.	Usa.	No.	Si posee infinitas cifras decimales es imposible.
		$\sqrt[3]{2}$	Regla grad.	Intenta.	No.	

Tabla 4.12: Resumen de las actuaciones de los sujetos (entrev. 1, parte 3)

También se observan otras justificaciones de la inexactitud: la ausencia de un método geométrico, el tamaño de la unidad escogida y la existencia de infinitos valores reales en la marca realizada sobre la recta para representar al número. En ésta última explicación el alumno (sujeto Nº 16) afirma que los hombres no pueden distinguir un punto con la vista (frase 2208), propone la utilización de un microscopio y finalmente reconoce que aún así, el punto geométrico no podría ser percibido. Más adelante se hará un comentario respecto de este tipo de respuestas. En el anexo 4 estudiamos todas las justificaciones de la exactitud/inexactitud de las representaciones utilizadas por los sujetos.

4.4.3.2. Entrevista 2

Guión:

Parte 1: Generalidades acerca de la representación en la recta.

Parte 2: Representación de números.

Parte 3: Representación en la recta de números expresados mediante diferentes notaciones.

Un objetivo particular de este guión de entrevista, además del objetivo general de identificar dificultades de la representación de números reales en la recta, es observar la incidencia de distintas representaciones de números racionales e irracionales (decimal, fraccionaria e icónica) en la representación en la recta de estos números.

Las tareas de la parte 1 se presentan para obtener información general respecto de lo que los sujetos consideran necesario para la representación en la recta y de los números que pueden representarse. En las partes 2 y 3 se hace hincapié en las distintas escrituras de los números.

La entrevista se administró a ocho sujetos, cuatro de 1º de Bachillerato, dos de C.O.U. y dos de 1º de Licenciatura en Matemáticas.

4.4.3.2.1. Parte 1, tarea 1.1: Describir rasgos de la representación en la recta

Excepto dos sujetos (sujetos Nº 4 y Nº 8 respectivamente) todos hacen referencia a considerar una división de la recta en partes iguales. Los sujetos de Licenciatura hablan de escoger una escala, los de C.O.U de sistema de referencia (sujeto Nº 12) y de unidad y proporción (sujeto Nº 15), y los dos de Bachillerato se refieren a tomar partes o distancias iguales en la recta.

Cuatro sujetos mencionan la determinación de un origen o cero. Seis sujetos hablan de la elección de un sentido para los números positivos y otro para los números negativos.

En las descripciones de los sujetos se mencionan, en general, las condiciones básicas para el establecimiento de la biyección entre los números reales y los puntos de la recta: la determinación de las marcas correspondientes al origen y a la unidad.

Cuando la entrevistadora pregunta si todos los números pueden representarse en la recta, el sujeto Nº 6 expresa que no sabe si un número con infinitos decimales puede representarse en la recta, los sujetos Nº 8 y Nº 15 afirman que cualquier número real puede representarse, y los restantes sujetos que se puede representar cualquier número.

4.4.3.2.2. Parte 1, tarea 1.2: Determinar si es posible representar todos los números de la tabla

Los sujetos Nº 2 y Nº 6 expresan que no están seguros de que se puedan representar en la recta los números 0’123456... y 0’101001000..., y el sujeto Nº 6 afirma además que $\sqrt{2}$ y π no pueden representarse (porque son números que poseen infinitas cifras decimales).

Los sujetos restantes, excepto el sujeto Nº 20, afirman que todos los números de la tabla pueden representarse.

El sujeto Nº 20 afirma que los números 0’123456..., π y 0’1010010001... no pueden representarse, sino que “se puede... aproximar la representación” (frase 0208). Indica que para dichos números, no existe un método geométrico (mediante regla y compás) que permita determinar el punto que le corresponde en la recta. Para los números restantes piensa que existe un método geométrico que permite representarlos. No obstante, afirma con contundencia que para cada número de la tabla existe en la recta un punto que le corresponde, y justifica su afirmación (frases 1101 a 1106) citando la continuidad de la recta y de los números reales.

Interpretamos que las dificultades que pueden detectarse en las respuestas de los sujetos (como los sujetos Nº 2 y Nº 6) provienen de la escritura decimal infinita no periódica de los números. La infinitud de las cifras los lleva a pensar que la búsqueda del punto correspondiente a esos números no acabaría nunca. Esta dificultad ha sido detectada por Romero (1995).

4.4.3.2.3. Parte 2. Tarea 2.1: Representación de números racionales Tarea 2.2: Representación de números irracionales.

El análisis de las producciones de los sujetos en las dos tareas de esta parte de la entrevista se realizará en forma conjunta, para observar si es posible señalar diferencias entre las consideraciones que los sujetos realizan respecto de los números racionales e irracionales.

Los sujetos deben indicar qué números de la tabla pueden expresarse como fracción. Se observa que dos sujetos (de 1º de Bachillerato y de C.O.U. respectivamente) consideran que una fracción es un número cualquiera con un exponente (positivo, negativo o fraccionario) y un sujeto de 1º de Bachillerato considera que es un número partido por otro (no necesariamente enteros). Una alumna de 1º de Bachillerato confunde fracción con escritura decimal. Los sujetos restantes responden correctamente.

Nº Suj.	Número	Procedim. Repres.	¿Existe mét. geom.?	¿Es exacto?	Justificación
2	1’25	Regla grad.		Sí.	Siempre que 0 y 1 sean los indicados.
	5/4	Regla grad.		Sí.	
	0’12...	Regla grad.		No.	
4	5/4	A ojo.		No.	Porque se ha hecho a ojo. Si estuviese bien hecho, sí.
	1’25	A ojo.			
	0’12...	A ojo		No.	Porque tiene infinitas cifras decimales.
6	5/4	Mét. geom. (Tales)			
	$\sqrt{2}$	A ojo.	Tales.	No.	Necesitaría infinitas subdivisiones y no acabaría.
8	1’25	A ojo.		No.	En la ‘rayita’ realizada hay un ‘montón’ de números.
	$\sqrt{2}$	Regla grad.		No.	Está hecho sin exactitud y tiene infinitos decimales.
12	5/4	A ojo.		No.	(La marca) tiene muchos puntos, aunque no infinitos.
	$\sqrt[3]{2}$	A ojo.		No.	
15	5/4	A ojo.	Mediatriz.	No	Con la mediatriz daría exacto.
	0’12...	A ojo.		No.	Debe haber alguna forma.
	π	A ojo.		No.	Porque ha representado 3’1416, que es una aproximación de π.
17	5/4	Regla grad.		Sí.	
	3	Regla grad.		Sí.	
	$\sqrt{2}$	Regla grad.	No recuerda	No.	Depende de los instrumentos utilizados.
	0’12...	Regla grad.		No.	La ‘cola’ decimal no se corresponde con el desplazamiento realizado.
20	0’12...	A ojo.		No.	No se pueden hacer infinitos subintervalos.
	$\sqrt{2}$	Mét. geom.		Sí.	Salvo la precisión de regla y compás.
	5/4	Describe.	Tales		
	1’18	Describe.	Tales		
	0’10...	A ojo.		No.	Porque no existe un procedimiento geométrico.

Tabla 4.13: Resumen de las actuaciones de los sujetos (entrev. 2, partes 1 y 2)

Nota: En la tabla 4.13 no se ha incluido el tiempo aproximado porque además de las actividades de representación, los sujetos debían responder a otras cuestiones, como por ejemplo indicar qué números pueden expresarse como fracción.

Por otro lado, un alumno de 1º de Licenciatura (sujeto Nº 17) desconoce cuántas cifras decimales tiene la expresión decimal de un número irracional. Estos resultados permiten comprobar que los sujetos entrevistados, en general, no disponen de un manejo adecuado de las diferentes escrituras de los elementos de los conjuntos numéricos.

Respecto de la representación en la recta de los números, en la tabla 4.13 se describen sucintamente las producciones de los sujetos.

En esta entrevista, a diferencia de la primera, no se hizo hincapié en la existencia de métodos geométricos que permiten representar números, por lo que la columna correspondiente no se ha podido completar por falta de información.

Las justificaciones respecto de la exactitud o inexactitud de la representación son más variadas en comparación con las respuestas de la entrevista Nº 1 (en el anexo 6 se estudian las justificaciones usadas por todos los sujetos entrevistados respecto de esta cuestión). Los argumentos respecto del número de cifras decimales y de la precisión de los instrumentos utilizados también se utilizan. Sin embargo, el argumento más usado es que la representación ha sido aproximada (cuatro sujetos). Se observa que aunque no se ha hecho hincapié en los métodos de representación, los sujetos sí lo tienen en cuenta para justificar la exactitud, más que en la entrevista Nº 1, en la que la entrevistadora formulaba preguntas concretas sobre el tema.

Dos sujetos mencionan el hecho de que las marcas realizadas contienen muchos (o infinitos) puntos. En este tipo de respuestas, se observa que los sujetos establecen una clara distinción entre 'punto geométrico' y la marca realizada sobre papel con lápiz o bolígrafo.

4.4.3.2.4. Parte 3, Tarea 3.1: Representación de 0'333333... Tarea 3.2: Representación de 1'4142136...

En estas tareas se plantea la posibilidad de representar dos números (1/3 y √2) utilizando para cada uno dos expresiones simbólicas diferentes (fraccionaria y decimal e icónica y decimal respectivamente). Se desean analizar las posibles dificultades que pueden presentarse en cada caso.

En las dos tareas propuestas se presentan situaciones análogas: se muestran las representaciones geométricas mediante regla y compás de dos números (1/3 y √2) y se interroga a los sujetos respecto de qué ocurre cuando se deben representar esos números utilizando su notación decimal infinita y sin recurrir a los métodos de construcción mencionados. El informe se realizará para 1/3 y √2 en forma conjunta, dado que los sujetos no han establecido diferencias en cuanto a la periodicidad o no de las cifras decimales.

Algunos sujetos (sujetos Nº 4, 6, 8, 12, 15, 17 y 20) expresan, sin evidenciar conflicto, que mediante las representaciones decimales sólo se puede obtener una marca aproximada para cada número.

Respecto de la exactitud de la marca obtenida mediante un procedimiento geométrico, las respuestas son más variadas. Tres sujetos (Nº 15, 17 y 20) afirman que los teoremas de Tales y de Pitágoras respectivamente, garantizan la exactitud de las marcas correspondientes a 1/3 y a √2. En cambio el alumno Nº 6 sostiene que esas marcas en realidad abarcan un intervalo, y que la representación del punto es 'simbólica' (frase 1503).

Una respuesta del sujeto Nº 12 parece evidenciar un conflicto, ya señalado en el informe individual correspondiente: si es posible 'captar' mediante una marca en la recta las infinitas cifras de la expresión decimal. La explicación del alumno en la frase 2701 nos conduce a pensar en la existencia de un desajuste entre los componentes físicos de la marca (un trazo de lápiz de cierta anchura) y la escritura decimal infinita.

Las respuestas del sujeto Nº 2 evidencian la presencia de conflicto en cuanto a la existencia o no de un punto en la recta para los números expresados en notación decimal (frases 2005 a 2101; 2503 a 2607). Se contradice y reconoce que no está segura de sus respuestas. En este caso, el conflicto se manifiesta claramente debido a la infinitud de las cifras decimales: "Yo creo que no, porque si tiene cifras infinitas pues, puedes estar ahí buscando el punto ese... cifras y cifras y cifras" (frase 1903).

4.4.3.3. Entrevista 3

Guión:

Parte 1: Representación de números: idea de unidad.
Parte 2: Propiedad arquimediana.

La primera parte de esta entrevista tiene por objeto determinar si los sujetos reconocen la necesidad de especificar la unidad para determinar la abscisa de un punto dado de una recta.

La segunda parte tiene específicamente la intención de indagar acerca de la presencia o ausencia de intuiciones respecto de las cantidades infinitesimales en los sujetos.

La entrevista se administró a seis sujetos: tres de 1º de Bachillerato, dos de C.O.U. y uno de 1º de Licenciatura en Matemáticas.

4.4.3.3.1. Parte 1, Tarea 1.1: Determinar el número que le corresponde al punto A dado

Las respuestas dadas por los sujetos dado se resumen en la tabla 4.14, en la que se indica el número de alumno, los valores escogidos para la abscisa de A, su respuesta ante la pregunta de si A puede ser √2 o algún otro número determinado y la explicación de por qué A puede tomar diferentes valores.

Se observa conflicto en las respuestas de dos sujetos. En primer lugar, el sujeto Nº 3 que expresa que para que A tome un valor diferente de 1, deben realizarse nuevas marcas sobre la recta que indiquen la presencia de otros números. Se ha analizado esta respuesta en el informe individual del alumno.

Nº Sujeto	Abscisa de A	¿Puede tomar otro valor?	¿Por qué A puede tomar diferentes valores?
3	1 "Porque A es el siguiente punto [a la derecha de 0]"	No.	Depende de las partes en que dividamos la recta.
7	"Puede haber muchos"	Sí.	Según la unidad escogida.
10	Un número real positivo.	Sí.	Depende del vector unitario.
11	Según la unidad.	Sí.	Porque se toman distintos sistemas de referencia.
14	Un número real.	Sí.	Depende de la visión de cada uno.
18	Un número positivo.	Sí.	Cualquier número que pueda expresarse como [la raíz cuadrada de la] suma de dos cuadrados.

Tabla 4.14: Resumen de respuestas (entrev. 3, parte 1, tarea 1.1)

En segundo lugar, se observa que el sujeto Nº 18 acepta cualquier número que pueda expresarse como la raíz cuadrada de la suma de dos cuadrados. Se ha descrito en el informe individual correspondiente la dificultad del alumno en la resolución de la cuestión. Una interpretación posible de su actitud (la búsqueda sistemática de la expresión del número como raíz cuadrada de suma de cuadrados) consiste en admitir la presencia de un rasgo característico del obstáculo de la 'matematización demasiado precisa', citado por Bachelard (1988).

Excepto los casos mencionados, los sujetos reconocen sin dificultad que la abscisa de A depende de la unidad escogida. Sorprende la amplitud de criterio del sujeto Nº 14, que admite la posibilidad de que la abscisa de A sea un número negativo "si se toma el criterio de que los positivos van hacia acá [señala hacia la izquierda]" (frase 0601).

4.4.3.3.2. Parte 1, Tarea 1.2: Representación de $\sqrt{2}$ y de $2\sqrt{2}$

La representación de los números $\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$ tiene como propósito preparar una situación adecuada para el planteamiento de la última tarea (parte 2 de esta entrevista, propiedad arquimediana). No obstante, se analiza la representación de $\sqrt{2}$ realizada por los sujetos con el objeto de recabar más información en pos del objetivo general de las entrevistas (detección de dificultades en la representación de números reales en la recta).

Nº Sujeto	Procedim. Repres.	¿Existe mét. geom.?	¿Es exacto?	Justificación
3	Regla graduada.		No.	Error por el grosor de la punta del bolígrafo.
7	A ojo.	Cree que sí.		
10	Regla graduada.		No.	
11	Método geométrico.		No.	Depende del grosor del compás.
14	Método geométrico.		Físicamente no.	Por el grosor de la mina.
			Matemáticamente sí.	Por el método de construcción.
18	Método geométrico.		Sí.	Por el método utilizado.

Tabla 4.15: Resumen de respuestas (entrev. 3, parte 1, tarea 1.2)

Las justificaciones de la exactitud o inexactitud se basan en dos argumentos: el grosor de la punta del bolígrafo y el método de representación utilizado. El sujeto Nº 14, a pesar de que expresa que raíz de dos es una serie infinita de números, no tiene en cuenta este argumento cuando justifica las dos opciones (física y matemática) escogidas.

Un análisis interesante lo realiza el sujeto Nº 11 (frases 0702 a 0906). Afirma que debido al grosor de la mina, cada marca es realmente un segmento constituido por infinitos puntos, dado que los puntos “no tienen dimensión”. Así, para reconocer el punto de la recta que le corresponde a un número dado se debe considerar el punto medio de esos infinitos puntos.

En el anexo 6 se estudian las justificaciones formuladas por todos los sujetos respeto de la exactitud/inexactitud de la representación obtenida.

4.4.3.3.3. Parte 2: Propiedad arquimediana

El sistema de números reales verifica la propiedad arquimediana, que se interpreta geométricamente diciendo que dados dos segmentos a y b cualesquiera existe un número natural n tal que el segmento a.n es mayor que el segmento b.

En esta última tarea proponemos al alumno una situación orientada a poner en cuestión su intuición de la propiedad arquimediana. Preguntamos si es posible hallar un número (muy pequeño) tal que, si se toman pasos de longitud igual a dicho número, no sea posible cubrir un segmento de longitud igual a $2\sqrt{2}$ unidades. La existencia de un número tal (un infinitésimo) exige trascender el sistema de números reales y considerar un sistema más amplio, como por ejemplo el sistema de números hiperreales (Robinson, 1974).

Nº Suj.	¿Es posi-ble?	Justificación
3	No.	"Más o menos tiempo, más o menos pasos pero sí se llega a alcanzar, por muy pequeño que sea, si no se alcanza antes se alcanza después".(frase 1301)
7	No.	"Te puedes pasar... mucho tiempo haciendo eso, pero llegas." (frase 1404)
10	No.	"Siempre que demos un número de pasos, las divisiones que hagamos, por más pequeña que sea la división, vamos a llegar." (frase 1101)
11	No.	"Yo pienso que... que cualquier número multiplicado por... si es un número muy pequeño, multiplicado por un número que sea extremadamente grande va a llegar a... a raíz de dos." (frase 2104)
14	Sí.	"Incluso entre 0 y 0'1 habrá infinitos números. Y entre cada división de 0 y 0'1 otros infinitos." (frases 2006 y 2007) "Pues que entre cada dos números cualquiera, que no sea el mismo, existe infinitos." (frase 2103)
18	Sí.	"Quizá si cogemos el número diez elevado a la menos *n*, con *n* tendiendo a infinito, sí, si no, no." (frase 5401) "Es decir, hay que saltar al límite de este número en infinito." (frase 5402) "Si no..., porque por muy pequeño que sea éste número, o por... muchos pasos que hay que dar, si ese número no tiende a infinito, o sea, no lo hacemos tender a infinito, el número de pasos es finito, entonces se puede alcanzar." (frase 5403)

Tabla 4.16: Resumen de respuestas (entrev. 3, parte 2)

Las respuestas de los sujetos se resumen en la tabla 4.16, en la que figuran el número de alumno, la respuesta de si es posible o no hallar ese número y el argumento utilizado para justificar esa respuesta.

Entre las respuestas de los que no admiten la existencia del "infinitésimo", se observa que el sujeto Nº 11 trasciende el marco geométrico, y justifica su respuesta en términos que pueden considerarse puramente aritméticos.

A los sujetos que admiten la existencia del "infinitésimo", se les ha preguntado cómo podría expresarse ese número, y las respuestas fueron las siguientes:

(Sujeto Nº 14, frases 2201 y 2202) "Como una especie de sucesión o alg... Pero no sé. Eso ya sería cuestión de criterio que asignemos, vaya, de plasmar en un papel lo que se piensa."

(Sujeto Nº 18, frases 5502 y 5506) "Lo que pasa es que a lo mejor no es un valor definido, como por ejemplo puede ser éste, diez elevado a menos cincuenta, sino diez elevado a menos n haciendo tender n a infinito, que eso ya... ya digo... O mejor dic..., no. Sería el límite cuando n tiende a infinito. Ese número:

$$\text{lím}_{n\to\infty} 10^{-n}\text{”}$$

Dentro del Análisis, el límite que este alumno ha considerado es igual a cero, y el tratamiento que Robinson aplica a los infinitésimos no sigue por esa línea. No obstante, en el siglo XVIII los infinitésimos eran considerados cantidades variables que desaparecen y Cauchy (citado por Goldblatt, 1998; p.15) expresaba: “Uno dice que una cantidad variable pasa a ser infinitamente pequeña cuando su valor disminuye numéricamente para converger al límite cero”.

La intuición de este alumno del infinitésimo puede interpretarse cercana a la idea de Cauchy. Goldblatt (1998; p.14) afirma que es posible hallar libros de texto en los que se define como infinitésimo una sucesión que satisface:

$$\text{lím}_{n\to\infty} r_n = 0.$$

En este caso, el infinitésimo es la sucesión que cumple esa condición, y para nuestro alumno, el infinitésimo es el límite mismo. A pesar de esas diferencias, es notable la analogía entre estas ideas.

4.5. Informe global

En este apartado resumimos los resultados de las entrevistas. El propósito de las entrevistas es detectar dificultades de la representación de números reales en la recta. El estudio empírico prosigue con el diseño y posterior administración de un cuestionario, y la información obtenida en las entrevistas se considerará en la elaboración de posibles ítems (en el capítulo 5).

A continuación examinamos, por un lado, el estilo de las intervenciones de los entrevistados y la actuación de la entrevistadora. Por otro lado, resumimos los conflictos y dificultades destacados en los apartados 4.4.2 y 4.4.3.

4.5.1. Intervención de los implicados en la entrevista

En primer lugar, es necesario reconocer y agradecer la predisposición positiva de los sujetos entrevistados. Aunque en principio se mostraban cohibidos por la cámara de vídeo, en cuanto aumentaba la concentración en las tareas se despreocupaban por su presencia. Esto es posible observarlo en todos los sujetos sin excepción.

Otro rasgo a destacar es la riqueza de los comentarios de los sujetos. Se observa que en la elaboración de las repuestas apelan no sólo a los conocimientos obtenidos en el sistema educativo, sino que también se intuye una implicación profunda que supone acudir a intuiciones y creencias personales. Esto último se evidencia en los fragmentos de entrevista en los que los sujetos desarrollan razonamientos en los que incluso detectan e intentan superar sus propias contradicciones.

En segundo lugar, cabe una reflexión respecto de la actuación de la entrevistadora. Algunas de las dificultades detectadas en la gestión de la entrevista son cuestiones destacadas en la bibliografía consultada con fines metodológicos (Measor, 1985; Goetz y LeCompte, 1988; Babbie, 1990; Azcárate, 1998). Las dificultades percibidas en las primeras entrevistas requirieron un esfuerzo en superarlas gradualmente: la dificultad inicial en reemplazar el papel de docente por el de entrevistador, el exceso inicial de comentarios en la explicación de las preguntas y la poca insistencia inicial hacia el entrevistado para que describa en voz alta los procedimientos o ideas empleados en las respuestas.

4.5.2. Cuestiones relevantes para la investigación

En la sección 4.4.2 de este capítulo se han señalado dos conflictos cognitivos que se tendrán en cuenta en la elaboración del cuestionario: la dificultad en cerrar un proceso infinito (manifestado preferentemente en las infinitas cifras decimales de un número racional periódico o irracional) y la creencia de que los resultados obtenidos mediante un procedimiento u operación matemática se reproducen automáticamente en la realidad.

En la sección 4.4.3 de este capítulo se describen diferentes cuestiones que surgen cuando los sujetos representan números en la recta, resumidas a continuación:

- Se han puesto de manifiesto en reiteradas ocasiones conflictos relacionados con la escritura decimal de los números reales, en particular con la escritura decimal infinita (periódica o no). Mencionaremos, a modo de ejemplo:

- Dada una cuerda cuya longitud se expresa mediante un número decimal por elección aleatoria de la investigadora, surgen dificultades al cortarla en más de dos partes iguales. Estas dificultades están relacionadas tanto con la manipulación de la cuerda como con su longitud (expresada mediante un número decimal).
- Dado un número cuya escritura decimal es infinita, se observan dificultades en su representación en la recta, en el sentido de que es imposible determinar el punto exacto porque nunca se acaban las cifras. En algunos casos esta dificultad los induce a “cobijarse” en la representación aproximada, y las respuestas obtenidas proporcionan información valiosa para responder una pregunta de investigación referida a esta cuestión (véase el Proyecto de Tesis, anexo 2).
- Dado un número cuya escritura decimal es infinita, su representación en la recta plantea la dificultad en admitir que una marca finita (trazo de lápiz de cierta anchura) puede corresponder a un número que posee infinitas cifras decimales.

- La inexactitud de las representaciones de números en la recta se justifica, en algunos casos, mediante argumentos que hacen alusión a la naturaleza del punto geométrico y su relación con las marcas realizadas sobre papel para representarlos. Los sujetos que aluden a esta cuestión han mencionado que las marcas de lápiz en realidad constituyen segmentos y no puntos y han propuesto diferentes alternativas, como por ejemplo, considerar que el punto buscado es el punto medio de los infinitos puntos contenidos en ese pequeño segmento. En estas aportaciones resulta interesante la capacidad de los sujetos en considerar el hecho físico como una representación 'grosera' de un concepto o idea mental.

- Cuando los sujetos deben efectuar mediciones, se observa que poseen interiorizado completamente el sistema métrico decimal y lo aplican automáticamente, sin evaluar la posibilidad de considerar unidades no estándares.

- Se han detectado intuiciones respecto de cantidades infinitesimales. Estos resultados inducen a seguir confiando en una hipótesis de investigación y sugieren la conveniencia de discutir las ventajas e inconvenientes de la inclusión de los infinitésimos en el sistema educativo.

- Se han identificado varios ejemplos atribuibles al obstáculo epistemológico descrito por Bachelard (1988) como obstáculo del conocimiento cuantitativo. El exceso de precisión en las respuestas de algunos sujetos, así como la búsqueda de una fórmula matemática que respalde la respuesta a una cuestión sencilla los interpretamos como rasgos del 'matematismo demasiado preciso' caracterizado por este autor.

Las cuestiones hasta aquí descritas no saturan la riqueza de las producciones de los sujetos, sin embargo, son suficientes para ofrecer material valioso para los propósitos de la entrevista en particular (la obtención de información para la elaboración de un cuestionario), y de la investigación en general.

CAPÍTULO 5

ELABORACIÓN DEL CUESTIONARIO

En este capítulo describimos el estudio que condujo a la elaboración del cuestionario, incluyendo las decisiones relacionadas con la investigación (mencionadas en 1.4).

Está organizado en dos apartados. En 5.1 describimos el diseño de posibles situaciones para incluir en el cuestionario. En este diseño se ha considerado una serie de cuestiones provenientes del proyecto de tesis, del estudio teórico (desarrollado en el capítulo 3) y de los resultados obtenidos en las entrevistas exploratorias (capítulo 4). Obtenemos como consecuencia un banco de ítems del que serán escogidos los que responden a un criterio de selección (la conexión con los dos conflictos detectados durante las entrevistas exploratorias).

En 5.2 estudiamos en profundidad los ítems escogidos, centrándonos en la selección de los datos incluidos en los enunciados de las tareas. En función de los datos de los enunciados se diseñan diferentes modelos de cuestionarios. Al final del apartado incluimos un ejemplo de cuestionario.

5.1. Racionalidad del cuestionario

5.1.1. Introducción

En esta etapa de nuestra investigación nos encontramos, por un lado, con una serie de cuestiones derivadas de una reflexión teórica (plasmada en parte en el proyecto de tesis doctoral y fundamentalmente en el estudio teórico desarrollado en el capítulo3) y por otro, con la información obtenida mediante el trabajo de campo constituido por las entrevistas exploratorias.

Nuestro próximo objetivo es la elaboración de un cuestionario con el que deseamos profundizar nuestro estudio de posibles dificultades de la representación de números reales en la recta. Creemos necesario realizar en este momento una recapitulación de la información teórica y de la obtenida de los sujetos, con el fin de delinear los próximos pasos de nuestra investigación.

La decisión de administrar un cuestionario a un grupo de alumnos más amplio que el trabajado en las entrevistas exploratorias requiere previamente que centremos nuestro análisis en su contenido, considerando la información disponible en este momento. En esta introducción nos proponemos enumerar todas las cuestiones planteadas, puesto que, en todo o en parte, deberán considerarse en la elaboración del cuestionario.

El propósito general de la investigación es caracterizar obstáculos epistemológicos relacionados con la representación de números reales en la recta. El análisis que sustenta nuestro estudio se basa en la consideración de que el número real organiza dos fenómenos: la recta geométrica y la longitud. La recta numérica resulta de la interpretación de estos fenómenos a partir del número real.

Esperamos detectar conflictos en los alumnos que sean explicables mediante esos obstáculos epistemológicos. El objetivo de las entrevistas exploratorias y del cuestionario es aportar información referida a las interpretaciones e intuiciones de los sujetos respecto de la representación de números reales en la recta.

A partir de nuestro problema de investigación, hemos planteado una serie de preguntas (véase proyecto de tesis, anexo 2). Algunas se analizan en un estudio teórico, y otras requieren una indagación en las interpretaciones y respuestas de alumnos. Entre estas últimas figuran dos cuestiones:

i- Describir el campo semántico de la expresión “medida de longitudes” entre los alumnos. Nos proponemos estudiar la utilización de diferentes términos del lenguaje cotidiano en la asignación o comparación de longitudes.

ii- Estudiar si la representación en la recta de un número irracional induce al alumno a “cobijarse” en la representación aproximada.

Los resultados de la entrevista inducen a pensar que los alumnos recurren a la representación aproximada cuando deben representar números racionales o irracionales expresados mediante una escritura decimal finita o infinita (periódica o no). Se trataría de ampliar esta información.

El estudio de las respuestas de los sujetos durante las entrevistas exploratorias ha proporcionado información útil acerca de interpretaciones o intuiciones de algunos alumnos respecto de la representación de números en la recta.

En la sección 4.4.2 se han descrito dos conflictos que se integran a la lista de cuestiones a considerar:

- Dificultad en admitir el control [individual] de un proceso infinito.

- Creencia de que los resultados obtenidos mediante un procedimiento matemático "se transmiten" directamente a la realidad.

En la sección 4.4.3 se han detectado cuestiones relevantes para la investigación, algunas íntimamente ligadas a los conflictos descritos. Estas cuestiones, que deben sumarse a las ya descritas, son las siguientes:

- 1) Dificultades con la representación decimal infinita, o con muchas cifras decimales, de algunos números. Estas dificultades se han manifestado en actividades de representación en la recta y de manipulación de objetos físicos (trozos de cuerda). Las dificultades observadas están relacionadas con la imposibilidad ‘material’ de completar una tarea que supone infinitos pasos.
- 2) Punto geométrico (ideal) frente a la representación física (material) del mismo. Algunos alumnos entrevistados establecen una distinción entre la marca sobre la recta que representa a un punto, y el punto propiamente dicho (objeto geométrico ideal).
- 3) Preferencia en la utilización de unidades del sistema métrico decimal. Se ha observado que los alumnos en tareas de medición de longitudes o representación de números en la recta utilizan preferentemente las unidades del sistema métrico decimal (especialmente el cm).
- 4) Obstáculo epistemológico ‘matematización demasiado precisa’. Se ha observado en algunas respuestas de los entrevistados un exceso de precisión en las respuestas. Aunque disponían de instrumentos (regla o escuadra graduadas) con los que podían precisar hasta el mm una medida o la abscisa de un punto, algunos alumnos utilizaban más cifras decimales.

También se han detectado en la entrevista intuiciones que conducen a la obtención de modelos de recta que difieren del modelo clásico derivado de la axiomática del sistema de números reales. Esto conduce a otra cuestión a considerar en la elaboración del cuestionario:

- 5) Intuiciones respecto de los infinitésimos. Se han observado intuiciones respecto de la existencia de números que no satisfacen la propiedad arquimediana, rasgo característico de los sistemas numéricos que contienen infinitésimos.

Hemos enumerado hasta aquí una serie de cuestiones que debemos considerar en el análisis previo a la elaboración del cuestionario. Con el único objetivo de organizarlas para la posterior redacción de los posibles ítems del cuestionario, identificamos tres grandes focos de contenidos:

- Foco 1: Representación en la recta.
- Foco 2: Infinitésimos.
- Foco 3: Medida de longitudes.

En las secciones siguientes se analizará cada foco de contenido. En primer lugar, se establecen las diferentes tareas que, dentro de cada foco, podrían plantearse en el cuestionario, lo que originará un amplio abanico de situaciones. En la última sección (5.1.5) se justifica razonadamente la selección de preguntas y cuestiones que se incluirán finalmente en el cuestionario.

Los tipos de ítems que pueden utilizarse son tres: fijos-alternativos, abiertos y de escala (Cohen y Manion, 1990). En cada caso se indicará el tipo escogido, de acuerdo con la finalidad o características de la pregunta.

5.1.2. Foco 1: Representación en la recta

En el cuestionario se incluirán tareas relacionadas con la representación de números en la recta. A los efectos de sistematizar las posibles situaciones que pueden presentarse, planteamos las siguientes opciones:

1- Dada la representación simbólica de un número, obtener la representación gráfica.
2- Dado el punto de la recta que corresponde a un número dado, obtener su representación simbólica.
3- Expresar opiniones sobre representaciones ajenas.

En la primera, el alumno debe determinar sobre una recta, la marca que corresponde a un número determinado. Se presentan dos posibilidades según el segmento de recta presentado como dato: que no contenga ninguna marca o que contenga indicado los puntos correspondientes a 0 y 1. Al incorporar las opciones: que tenga etiquetado el cero únicamente o el uno únicamente resultan cuatro posibilidades. El objetivo de la ausencia o la presencia de estas marcas es observar el tipo de escala utilizada, y la sola presencia de cero o de uno son, en ese sentido, equivalentes a la opción 'no contiene ninguna marca'.

Según la escritura del número, se plantearán dos alternativas: números expresados mediante una notación 'exacta' (la representación está constituida por un número finito de símbolos) y números expresados mediante una notación 'aproximada' (cuando la representación contiene puntos suspensivos).

En la segunda opción, a partir de un gráfico que contiene como datos básicos las marcas correspondientes al origen y a la unidad, el alumno debe determinar la abscisa de un tercer punto señalado sobre la recta. Es posible plantear nuevamente dos alternativas: que exista una relación geométrica entre los tres puntos o que no exista ninguna relación geométrica.

En la tercera opción el alumno debe valorar diferentes representaciones de números en la recta (expresados en diferentes escrituras simbólicas). El criterio de valoración propuesto será el grado de exactitud de la representación. Las alternativas que se presentan aquí en cuanto al procedimiento de representación son dos: representaciones en las que se explicitan relaciones geométricas o representaciones en las que no se explicitan relaciones geométricas.

En la tabla 5.1 se resumen las tres opciones. En la última columna se han indicado las clases de ítems que se utilizarán en cada caso. Los ítems abiertos se caracterizan porque suponen un mínimo de restricción sobre las contestaciones, y por esa razón se proponen para las opciones 1 y 2, en las cuales el alumno debe representar un número en la recta, o bien, a partir de una representación, indicar la abscisa de un punto dado.

<table>
<tr><th>Actividad</th><th colspan="2">Dato</th><th>Tarea</th><th>Ítem</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Hacer</td><td rowspan="2">1) Número expresado mediante una rep. simbólica</td><td>Rep. simbólica exacta</td><td rowspan="2">Obtener la representación gráfica</td><td rowspan="2">Abierto</td></tr>
<tr><td>Rep. simbólica aproximada</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2) Punto sobre la recta numérica.</td><td>Con relación geométrica.</td><td rowspan="2">Obtener la representación simbólica.</td><td rowspan="2">Abierto</td></tr>
<tr><td>Sin relación geométrica.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Opinar</td><td rowspan="2">3) Rep. gráfica</td><td>Con relación geométrica.</td><td rowspan="2">Valorar la exactitud de la representación</td><td rowspan="2">De escala</td></tr>
<tr><td>Sin relación geométrica.</td></tr>
</table>

Tabla 5.1: Resumen de opciones posibles para el primer foco.

Para la tercera opción, el tipo de ítem puede ser abierto (el alumno debe manifestar su opinión respecto de la exactitud de la representación en la recta de un número real determinado), fijo-alternativo (se presentan dos opciones: por ejemplo, 'la representación es exacta' y 'la representación es inexacta', y el alumno debe escoger una), o de escala (se presenta un conjunto de afirmaciones, y el alumno debe establecer el grado de acuerdo o desacuerdo con cada una). Este último es el escogido en este caso, porque se cuenta con las afirmaciones de los alumnos durante las entrevistas exploratorias. Se propondrán los argumentos que estos alumnos usaron para valorar la exactitud de sus representaciones, de modo que queden expuestas las dificultades allí surgidas.

A continuación se realizará un análisis de los datos que se presentarán en cada opción.

5.1.2.1. Opción 1: Número expresado mediante una representación simbólica

En la tabla 5.2 se resumen las posibles representaciones simbólicas que pueden utilizarse para expresar los números que los alumnos deben representar en la recta.

Son 17 posibles representaciones para los números que se presentan en este ítem. Estas representaciones diferentes no se corresponden, obviamente, con diecisiete conjuntos numéricos diferentes, dado que un mismo número admite más de una representación simbólica (1/3 = 0’3333....=1/4+1/8+1/16+...; $\sqrt{3}$ = 1’7320508...; 1/4 = 0’25).

<table>
<tr><th colspan="3">Representación simbólica</th><th>Números</th><th>Ejemplos</th></tr>
<tr><td rowspan="10">Exacta</td><td colspan="2">Fraccionaria</td><td>Constructible</td><td>5/6, ¼</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Icónica</td><td rowspan="2">Radical</td><td>Constructible</td><td>$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$</td></tr>
<tr><td>No constructible</td><td>$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sin cifra</td><td>Constructible</td><td>ϕ</td></tr>
<tr><td>No constructible</td><td>π, e</td></tr>
<tr><td colspan="2">Decimal finita</td><td>Constructible</td><td>0’345</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valores de funciones</td><td>No constructible</td><td>ln3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fracción continua finita</td><td>Constructible</td><td>2 + 1/3</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Polinomio de coef. Racionales</td><td>Constructible</td><td>$X^2 - 2$, {+, +}</td></tr>
<tr><td>No constructible</td><td>$X^5 – 3$, {+, +, +, +, +}</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Aproximada(*)</td><td colspan="2">Decimal infinita periódica</td><td>Constructible</td><td>0’6666...</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Decimal infinita no periódica</td><td>Constructible</td><td>1’4142136...</td></tr>
<tr><td>No constructible</td><td>0’123456...</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Serie numérica</td><td>Constructible</td><td>¼+1/8+1/16+...</td></tr>
<tr><td>No constructible</td><td>1-1/3+1/5-1/7+...</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Fracción continua infinita</td><td>Periódica</td><td>Constructible</td><td>[1,3,2,3,2,3,2,...] = $\sqrt{(15)}/3$</td></tr>
<tr><td>No periódica</td><td>No constructible</td><td>[3, 7, 15, 1, 288, 1, ...]= π</td></tr>
</table>

Tabla 5.2: Representaciones simbólicas posibles para la opción 1.

(*) El término ‘infinita’ utilizado para designar algunas de estas representaciones hace referencia a que las cifras no se acaban, lo que se indica en la escritura con puntos suspensivos.

Atendiendo al hecho de que se cuenta con dos opciones relacionadas con el gráfico presentado (con o sin marcas para la unidad), se tienen en total 34 posibilidades (17 representaciones posibles para segmentos sin marcas, y 17 para segmentos con origen y unidad).

5.1.2.2. Opción 2: Punto sobre la recta numérica

En esta opción el alumno debe determinar la abscisa de un punto A situado sobre la recta numérica. Se presenta en el enunciado del ítem una recta numérica en la que se señalan, en todos los casos, los puntos correspondientes a 0, 1 y A. En el gráfico contenido en el enunciado puede mostrarse o no una construcción geométrica que conduce a la determinación de la marca que corresponde al punto

A. Cuando la construcción no se muestra, el punto viene determinado por una marca sobre la recta al azar, o bien mediante una marca realizada sobre una recta en la que se han subdividido las unidades. Veremos ahora en detalle las posibilidades consideradas.

5.1.2.2.1. Proceso geométrico explícito

En caso de que el punto A se obtenga mediante una construcción geométrica, la determinación de su abscisa está garantizada por el procedimiento de construcción. Consideramos tres procedimientos posibles: Trazado de mediatrices, Subdivisión de la unidad en partes iguales mediante el teorema de Tales y teorema de Pitágoras.

El primer procedimiento se utiliza para representar números que corresponden a divisiones de una unidad en potencias de dos, como 0’25 o 3/16. Se observan sucesivas divisiones por la mitad de un segmento de extremos enteros, mediante el trazado de la mediatriz. (ver figura 5.1). Para obtener el número correspondiente al punto A se cuentan las sucesivas mediatrices trazadas. En la figura 5.1 observamos tres mediatrices, entonces el número correspondiente a A se expresa como fracción de denominador igual a 2^3. El numerador es igual al número de veces que el segmento más pequeño determinado por dos mediatrices consecutivas (el segmento VA), queda contenido en el segmento 0A (en la figura 1, tres veces).

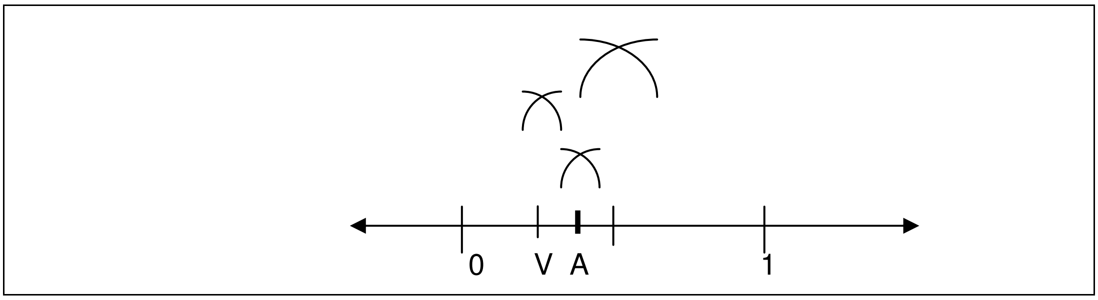


Figura 5.1: Subdivisión de la unidad mediante el trazado de mediatrices.

El segundo procedimiento supone la utilización del teorema de Tales (figura 5.2). El número que corresponde al número A se expresa mediante una fracción cuyo denominador viene dado por el número de segmentos consecutivos iguales trazados sobre la semirrecta de origen 0. El numerador viene dado por el número de estos segmentos que se han contados desde 0, para trazar la recta paralela a la recta que une el último segmento con el punto correspondiente a la unidad.

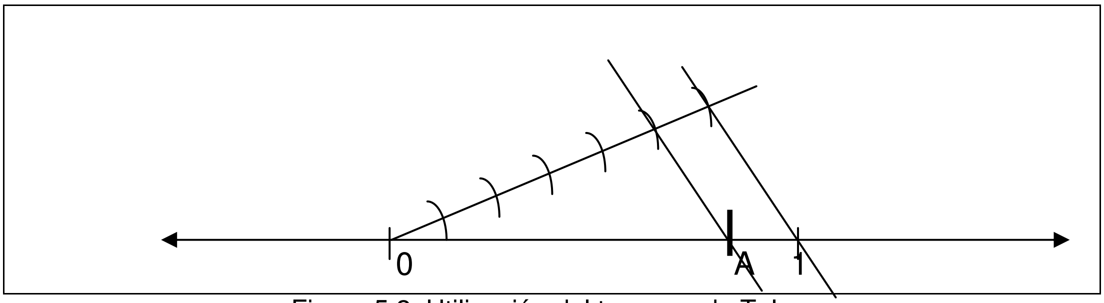


Figura 5.2: Utilización del teorema de Tales.

El tercer procedimiento exige aplicar el teorema de Pitágoras para determinar la longitud de la hipotenusa (figura 5.3). En nuestro ejemplo, la hipotenusa es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos de longitudes 2 unidades y 1 unidad respectivamente.

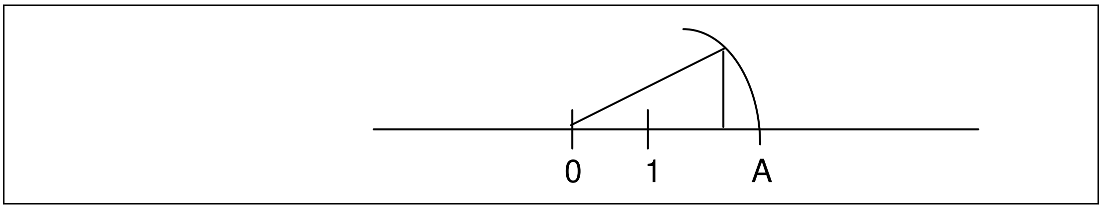


Figura 5.3: Procedimiento geométrico mediante teorema de Pitágoras

5.1.2.2.2. Sin proceso geométrico explícito

Hemos mencionado dos posibilidades que no permiten visualizar explícitamente un procedimiento geométrico. La primera, que denominamos *cualitativa*, consiste en una marca efectuada sobre un segmento en el que sólo se han indicado los puntos correspondientes a 0 y 1 (figura 5.4).

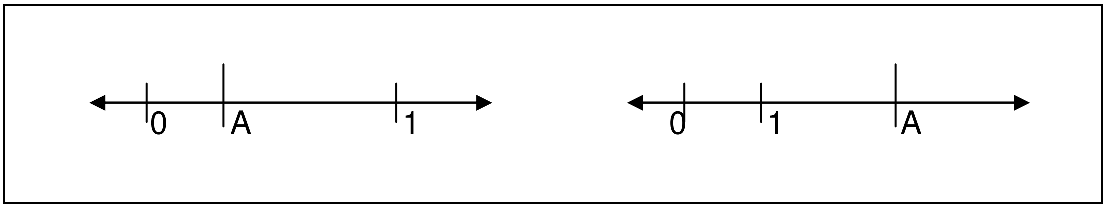


Figura 5.4: Representación cualitativa

La segunda consiste en la división de la unidad en partes iguales. En el gráfico correspondiente (figura 5.5) se observa un segmento en el que se han identificado los puntos 0 y 1, y además se ha subdividido un intervalo de extremos enteros en partes de igual longitud. La división en partes iguales puede realizarse por diversos procedimientos, que clasificamos en dos grupos:

a) División efectuada mediante mediatriz o mediante regla graduada, y
b) División efectuada mediante el teorema de Tales o mediante regla graduada.

En la figura 5.5 se muestran ejemplos correspondientes a los dos casos.

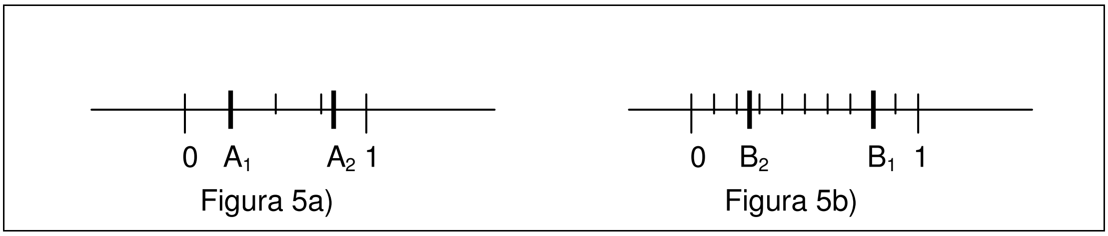


Figura 5.5: Divisiones de la unidad

El punto A puede coincidir con una de las marcas correspondientes a las subdivisiones de la unidad (como es el caso de los puntos señalados con A_1 y B_1 de la figura 5.5), o bien puede estar señalado en el interior de uno de los segmentos iguales en que ha quedado dividida la unidad (como en el caso de los puntos identificados con A_2 y B_2).

5.1.2.2.3. Resumen de procedimientos de representación considerados

Los casos posibles en esta opción son 8, correspondientes a los procedimientos mencionados en la tabla 5.3. Estos procedimientos son los que han utilizado los alumnos entrevistados.

<table>
<tr><th colspan="4">Determinación de la marca que representa al punto</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Propiedad geométrica explícita</td><td colspan="3">Mediatrices.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Teorema de Tales.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Teorema de Pitágoras.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Sin propiedad geométrica explícita</td><td colspan="3">Cualitativo</td></tr>
<tr><td rowspan="4">División de la unidad.</td><td rowspan="2">Mediatriz/Regla</td><td>Marca coincide con una división.</td></tr>
<tr><td>Marca no coincide con división.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tales/Regla.</td><td>Marca coincide con una división.</td></tr>
<tr><td>Marca no coincide con una división.</td></tr>
</table>

Tabla 5.3: Distintos procedimientos de determinación del punto A (opción 2).

No agotan todos los procedimientos de construcción posibles, dado que las combinaciones de regla sin graduar y compás para la obtención de puntos proporciona un conjunto infinito numerable de puntos (correspondientes a los números constructibles). Sin embargo, no se incluirán otras construcciones para evitar dificultades adicionales de interpretación de gráficos.

5.1.2.3. Opción 3: Números representados en la recta

Se ha indicado que en esta opción el alumno debe manifestar el grado de acuerdo con distintas afirmaciones referidas a la exactitud o inexactitud de una representación en la recta.

<table>
<tr><th colspan="2">Construcción</th><th>Número</th><th>Representación simbólica utilizada en la etiqueta</th></tr>
<tr><td colspan="2">Mediatriz</td><td>Racional de la forma k/(2^n), con k y n enteros.</td><td>Fraccionaria
Decimal finita
Fracción continua finita</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teorema de Tales</td><td>Racional</td><td>Fraccionaria
Decimal finita
Decimal infinita periódica
Fracción continua finita</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teorema de Pitágoras</td><td>Enteros.
Irracional cuadrático</td><td>Decimal finita.
Radical constructible
Decimal infinita no periódica.
Fracción continua infinita periódica</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cualitativo</td><td>Real</td><td>Todas las representaciones de la tabla 5.2.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">División de la unidad.</td><td rowspan="2">Media-triz/ Regla</td><td>Racional de la forma k/(2^n), con k y n enteros</td><td>Fraccionaria
Decimal finita
Fracción continua finita</td></tr>
<tr><td>Real</td><td>Todas las representaciones de la tabla 5.2.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tales/ Regla</td><td>Racional</td><td>Fraccionaria
Decimal finita
Decimal infinita periódica
Fracción continua finita</td></tr>
<tr><td>Real</td><td>Todas las representaciones de la tabla 5.2.</td></tr>
</table>

Tabla 5.4: Posibilidades para la opción 3.

En el enunciado del ítem se presenta un número representado en la recta y varios juicios de alumnos respecto de la exactitud de la representación. En esta opción los datos incluidos en el enunciado son, por tanto, los procedimientos utilizados en la representación, las representaciones simbólicas usadas para expresar el número y los argumentos de los alumnos.

La tabla 5.3 esquematiza las posibilidades que se plantearán en cuanto a los procedimientos empleados en las representaciones de números en la recta.

En cuanto a la representación simbólica utilizada para etiquetar los puntos de la recta en cada gráfico, en la tabla 5.4 se analiza por separado cada procedimiento de construcción con las posibles representaciones simbólicas (que son las indicadas en la tabla 5.2) del número correspondiente.

Los argumentos de los alumnos serán extraídos de respuestas de alumnos en las entrevistas exploratorias. En el anexo 6 se incluyen estas respuestas clasificadas según los criterios de valoración de la exactitud que figuran en la tabla 5.5.

Criterio de valoración de la exactitud	Nº de respuestas
- Infinitas cifras decimales	12
- Precisión de los instrumentos de representación	10
- Procedimiento de representación	13
- 'Naturaleza' del punto geométrico	8
- Sistema de referencia	3
- Referencia a una aproximación	5
- Otras justificaciones	5

Tabla 5.5: Clasificación de los argumentos referidos a la exactitud de la representación.

En función de los objetivos específicos del cuestionario se escogerán las frases que acompañarán las representaciones de los números.

Deben tenerse en cuenta las limitaciones propias de cada criterio de valoración de la exactitud. Por ejemplo, una referencia a la infinitud de las cifras decimales no puede utilizarse para un número expresado mediante una notación decimal finita, la referencia a un procedimiento de representación determinado sólo puede utilizarse en caso de que se haga uso del procedimiento.

5.1.3. Foco 2: Infinitésimos

El planteo de una situación en la que sea posible observar la existencia o la ausencia de intuiciones respecto del infinitésimo se ve obstaculizado por el hecho de que no hay un modelo visual adecuado a nuestros sentidos o a nuestra intuición (Kossak, 1996) para esta noción, a pesar de su utilidad en la descripción algebraica de fenómenos físicos.

Actualmente existen diferentes teorías matemáticas que conciben la existencia del infinitésimo (Robinson, 1974; Nelson, 1977), y lo definen de diversas maneras. Dos características comunes de estas teorías son la posibilidad que ofrecen de trabajar con órdenes de magnitud diferentes y la no verificación de la propiedad arquimediana.

Sin embargo, en esta investigación no estamos interesados en detectar intuiciones de infinitésimos tal como se los trabaja y define en las formulaciones no arquimedianas actuales. Estas teorías han sido posibles gracias a un avance de la lógica acontecido durante este siglo, consistente en el desarrollo de un lenguaje formal que regula la transferencia de afirmaciones desde el sistema de los números reales a sistemas numéricos que contienen infinitésimos, y que elimina las contradicciones que surgieron en el tratamiento 'ingenuo' desarrollado por Leibniz u otros. Estamos interesados en observar interpretaciones más próximas a las intuiciones de aquellos matemáticos del siglo XVIII, quienes no lograron una formalización adecuada del concepto, aunque reconocieron y aprovecharon las ventajas del cálculo mediante infinitésimos.

En esa época se utilizaron diferentes términos o expresiones para referirse a los infinitésimos: fluxion, cantidad infinitamente pequeña, diferencial, cantidad naciente o cantidad evanescente (Robinson, 1974; Grabiner, 1981; Cornu, 1982). Algunos de esos términos aún suelen utilizarse en el análisis estándar fundado sobre el sistema de los números reales, pero con significados precisos y alejados de los conceptos intuitivos manejados en el siglo XVIII. Así, algunos libros de texto, incluso universitarios, denominan infinitésimo a toda sucesión que converge a cero[16] .

De los tipos de ítems enumerados en la introducción de este apartado, para este foco de contenido se escogen los ítems abiertos. La razón de esta elección radica en que se intenta estudiar intuiciones de los alumnos que hagan referencia a cantidades infinitamente pequeñas. Se han propuesto dos tipos de situaciones (de aproximación y referidas a la propiedad arquimediana) que podrían suscitar intuiciones de ese tipo. Para ello, es necesario que los alumnos no estén sujetos a ningún tipo de restricción en sus respuestas.

Las intuiciones relacionadas con los infinitésimos pueden surgir del análisis de situaciones de aproximación (aproximarse tanto como se quiera a un número determinado) y de situaciones relacionadas con la propiedad arquimediana. Los ítems se plantearán en torno a estas dos cuestiones.

5.1.3.1. Situaciones de aproximación

Las situaciones de aproximación pueden plantearse en términos de magnitudes (por ejemplo, una longitud que tiende a otra) o bien en términos de números sin hacer referencia a ninguna magnitud. Se han planteado cuestiones que responden a las dos posibilidades. En las figuras 5.6 y 5.7 se incluyen ejemplos de situaciones de aproximación, referidas a magnitudes y a números respectivamente.

En las figuras A y B, **a** es el arco de circunferencia correspondiente al ángulo θ, y **t** el lado del triángulo OPM que se opone al ángulo θ.

Figura A   Figura B

Compara las medidas **t** y **a** cuando el ángulo θ se aproxima a cero.

Figura 5.6: Situación de aproximación utilizando magnitudes.

[16] Si una función f tiende a cero cuando x tiende a a se dice que la función f es un infinitésimo para x →a. Igualmente, se tiene una definición análoga para los infinitésimos f cuando x → 0. (B. Demidovitch, 1977, p. 37)

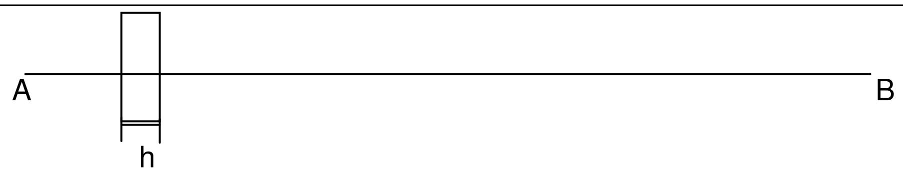
Cuando se trabaja con límites se utiliza la expresión ‘$x \to 2$’, ‘$x \to 1$’, ‘$x \to 0$’, que se leen respectivamente ‘x tiende a 2’, ‘x tiende a 1’ ó ‘x tiende a 0’.
¿Cómo interpretas la idea de que ‘x tiende a 0’? Explica detalladamente el significado que tiene ese enunciado para ti.

Figura 5.7: Situación de aproximación utilizando números.

5.1.3.2. Propiedad arquimediana

La propiedad arquimediana puede plantearse como la posibilidad de superar una cantidad de magnitud mediante otra más pequeña multiplicada por un número real, o bien como la posibilidad de superar un número mediante otro multiplicado por un real. En el cuestionario se presentan situaciones correspondientes a las dos opciones y en las figuras 5.8 y 5.9 se incluyen ejemplos de cada una.

Dado un segmento AB como el de la figura, es posible cubrirlo con un número determinado de rectángulos de base h.



a) ¿Cuántos rectángulos se necesitan para cubrir el segmento AB? Justifica tu respuesta.

b) Si h = 0, el segmento AB no podría cubrirse con rectángulos de base h.
Si h>0, ¿Siempre es posible cubrir al segmento AB con rectángulos de base h? Justifica detalladamente tu respuesta.

c) Supón ahora que la base h del rectángulo es tal que incluye a un sólo punto de la recta. ¿Es posible cubrir al segmento AB con rectángulos de base h? Justifica detalladamente tu respuesta.

Figura 5.8: Principio arquimediano en términos de magnitudes.

Observa la siguiente tabla:

	x
$10^0 . x = 1$	1
$10^1 . x = 1$	0’1
$10^2 . x = 1$	0’01
$10^3 . x = 1$	0’001
$10^4 . x = 1$	0’0001
.	.
.	.
.	.
$10^n . x < 1$, n natural	¿x?

¿Existe un número x mayor que cero, tal que 10^n (n natural) multiplicado por x sea menor que 1? Justifica detalladamente tu respuesta.

Figura 5.9: Principio arquimediano en términos exclusivamente numéricos.

5.1.4. Foco 3: Medida de longitudes

En 5.1. se han mencionado dos cuestiones concretas referidas a las medidas de longitudes:

- Descripción del campo semántico de la expresión “medida de longitudes” entre los alumnos.
- Indagar respecto de la preferencia de utilización de las unidades del sistema métrico decimal.

Además, las actividades diseñadas para estudiar este foco, pueden proporcionar información respecto del obstáculo identificado como la creencia de que los resultados obtenidos mediante una procedimiento matemático "se transmiten" directamente a la realidad.

A continuación se estudia por separado cada una de las tres cuestiones.

5.1.4.1. Estudio del campo semántico de la expresión ‘medida de longitudes’

Como se ha señalado, pretendemos observar los términos del lenguaje cualitativo (en el sentido de Carnap, 1966) que los sujetos utilizan para comparar (o asignar a) longitudes. Pensamos que si se pide la descripción de la longitud de segmentos dibujados, o la comparación de distintos segmentos dibujados en cuanto a su longitud, los alumnos se limitarán a medir y expresar los resultados en términos numéricos. Por ello se descarta la presentación de dibujos de segmentos y se diseñan cuestiones que aseguren la utilización de términos del lenguaje cualitativo.

En relación con los datos ofrecidos en los enunciados de las cuestiones, es posible presentar cantidades de longitud (8m, 4cm) o términos y expresiones (corto, largo, kilométrico). Los alumnos deben: a) asignar términos (adjetivos calificativos) a cantidades de longitud o b) comparar estos términos. En la tabla 5.6 se resumen las opciones consideradas.

Se tienen en total 8 posibles opciones. Se utilizan dos tipos de ítems: fijos-alternativos (en los casos en que se deben seleccionar los términos o las cantidades propuestas en lose enunciados) y abiertos (en los casos en que los sujetos deben proponer términos o cantidades).

Datos del enunciados		Tarea	Ejemplo de ítem
Términos del lenguaje cualitativo	Con cantidades de longitud.	Asignar	a) Relacionar términos con cantidades de longitud: Corto 3m Largo 5km Kilométrico 1cm
		Compa-rar	b) Relacionar pares de longitudes con etiquetas: 3 cm y 2'999... cm Aproxim, iguales 8 km y 0'2 mm Distintos 6 cm y 10000 km Parecidos
	Sin cantidades de longitud.	Asignar	c) Asignar a cada término una cantidad de longitud: Corto .... Largo .... Kilométrico ....
		Compa-rar	d) Ordenar los términos de menor a mayor: Corto. Kilométrico. Largo.
Sin términos del lenguaje cualitativo	Con cantidades de longitud.	Asignar	e) Asignar a cada cantidad de longitud un adjetivo: 100km .... 1mm .... 0'4m ....
		Compa-rar	f) Utiliza un adjetivo para comparar las siguientes longitudes: 3m y 5 km .... 0'5 cm y 0'05 cm .... 1m y 1'0001 m ....
	Sin cantidades de longitud.	Asignar	g) Utiliza adjetivos para calificar las siguientes longitudes: Longitud de una recta .... Longitud de un bolígrafo .... Distancia de la tierra a júpiter ....
		Compa-rar	f) Utiliza un adjetivo para comparar las siguientes longitudes: Long. recta y long. bolígrafo .... Dist, Granada-Madrid y dist.tierra-júpiter .... Dist. tierra-júpiter y long. recta ....

Tabla 5.6: Opciones para el estudio de términos del lenguaje cualitativo.

5.1.4.2. Estudio de las unidades que utilizan los sujetos para medir

Con respecto a esta cuestión, las actividades posibles son de dos tipos: medición de segmentos de recta y representación en la recta de números sobre segmentos que no tienen señalados el origen y la unidad, para observar las unidades empleadas.

La situación que se diseña para la medición de segmentos de recta tiene como dato (en el enunciado) un segmento, y se pide a los sujetos que determinen su longitud. Hay dos posibilidades respecto del segmento: que tenga indicada la unidad (siempre que sea diferente a 1 cm), o que no la tenga. Es un ítem de tipo abierto, porque se deja al sujeto la selección del procedimiento que le permita determinar la longitud del segmento.

En cuanto a la representación de números sobre segmentos de recta sin marcas para el origen y la unidad, es una actividad que se propone en la opción 1 del foco ‘Representación en la recta’. Se consideran en este caso también dos posibilidades: que estén señalados los puntos de abscisa 0 y 1 (siempre que la distancia entre ambos sea diferente a 1 cm), o que no lo estén.

Las opciones se resumen en la tabla 5.7.

Actividad	Datos
Determinar la longitud de un segmento.	No se indica la unidad de medida.
	Se indica la unidad de medida.
Representar en la recta un número dado.	Segmento en el que no se señalan 0 y 1.
	Segmento con marcas correspondientes a 0 y 1.

Tabla 5.7: Opciones para el estudio de las unidades que utilizan los sujetos para medir.

El tipo de ítem utilizado es abierto, porque el sujeto goza de libertad para emplear el procedimiento que desee en la obtención de las respuestas.

5.1.4.3. La relación entre el ‘resultado matemático’ y el ‘objeto físico’

Durante las entrevistas exploratorias ha surgido un conflicto relacionado con la dificultad en utilizar resultados matemáticos (como el resultado de una división) en la manipulación de objetos físicos (por ejemplo, la actividad de manipular trozos de cuerda con el objeto de partirlos en trozos de igual longitud).

En ocasiones, este conflicto se manifiesta a través de la afirmación de que los resultados obtenidos como consecuencia de una operación matemática se pueden obtener directamente en la manipulación física de un objeto. Esto se ha comprobado en casos concretos, cuando los alumnos obtienen como longitud de cada trozo de cuerda un número racional periódico (resultado de una división), o en el caso de un alumno que reflexiona acerca de la posibilidad de dividir por la mitad una cuerda de longitud igual a $\sqrt{2}$ unidades. En los casos citados, se obtienen números cuya representación decimal es infinita. Sin embargo, el problema de contemplar un resultado abstracto en un objeto físico no exige necesariamente considerar un número con infinitas cifras decimales. Es indudable que al obtener como resultado un número con infinitas cifras decimales, se acentúa el conflicto, aunque éste también puede surgir sin necesidad de tropezar con números cuyas representaciones decimales son infinitas. Se ha observado que algunos alumnos afirman convencidos que los trozos de cuerda obtenidos son iguales, confiando en el procedimiento de corte (que consiste en doblar la cuerda por la mitad y cortar), y ante la insistencia de la entrevistadora comparan los trozos, y se muestran sorprendidos al comprobar que no son iguales (por ejemplo, sujeto Nº 16, frases 0103, 0201). Al intentar cortar una cuerda de 30 cm en tres trozos iguales, es posible que muchos sujetos se muestren sorprendidos al comprobar que los trozos obtenidos no coinciden exactamente ni miden, por tanto, 10 cm cada uno.

En la raíz de este convencimiento puede estar la creencia en una equivalencia perfecta entre el mundo físico y el mundo matemático. Adaptando a estas ideas una cita de Bachelard (1988; p.249), apelamos a la necesidad de "tornar claramente discursivo aquello que se ofrece en la intuición más inmediata".

La situación diseñada para indagar en torno a esta creencia, consiste en preguntar si es posible cortar por la mitad un segmento determinado. A continuación examinamos las posibles opciones que pueden considerarse en el enunciado de la situación.

En primer lugar, se puede abordar el problema mediante dos formatos diferentes:

1) enunciar una frase en la que se afirma que siempre es posible cortar un segmento en dos partes iguales, y preguntar a los alumnos si están o no de acuerdo con dicha afirmación, y
2) preguntar directamente si es posible cortar un segmento determinado en dos partes iguales.

Para cada una de las dos posibilidades, se presentan los siguientes casos:

A- Que se incluya o no un dibujo que represente al segmento. Aunque esta cuestión parezca trivial, el hecho de preguntar por un segmento, y no dar un gráfico representativo, puede inducir al sujeto a pensar en el segmento como en un objeto mental (aunque se apoye en un dibujo para explicar su respuesta), y afirme convencido que es posible, apoyándose en el procedimiento geométrico mediante regla sin graduar y compás. En cambio, si se incluye un dibujo, el sujeto puede razonar exclusivamente sobre la figura, y según tenga o no como dato la longitud, puede manifestar diferentes respuestas, o bien puede pensar en el segmento como objeto mental, y responda según esta postura.

B- Que se indique o no la longitud del segmento. En este caso, la longitud es un número que puede expresarse en cualquiera de las representaciones que figuran en la tabla 5.2 y que correspondan a números constructibles. En este caso concreto, es posible estudiar aquí otro conflicto mencionado en la introducción: la incapacidad para admitir como cerrado un proceso infinito (las infinitas cifras decimales de algunos números reales).

En la tabla 5.8 resumimos estas opciones.

Formato de los ítems		
Tarea	**A) Gráfico**	**B) Longitud del segmento**
1) Valorar una afirmación	Sin dibujo de segmento.	No se indica la longitud.
		Se indica la longitud.
	Con dibujo de segmento.	No se indica la longitud.
		Se indica la longitud.
2) Responder una pregunta.	Sin dibujo de segmento.	No se indica la longitud.
		Se indica la longitud.
	Con dibujo de segmento.	No se indica la longitud.
		Se indica la longitud.

Tabla 5.8: Opciones para estudiar la relación entre el 'resultado matemático' y el 'objeto físico'

Los ítems diseñados para estudiar el conflicto son abiertos, porque queremos que los alumnos manifiesten libremente su opinión respecto de la posibilidad de cortar por la mitad un segmento, independientemente de que se indique o no la longitud del mismo.

En la tabla 5.9 se indican las representaciones simbólicas que pueden utilizarse para expresar los números, que serán, en todos los casos, constructibles. Ello se debe a que se desean proponer situaciones que tengan una solución geométrica 'idealmente' exacta, para observar si los alumnos tienen o no en cuenta la posibilidad 'ideal' de hacerlo exactamente.

Representación simbólica			Ejemplos
Exacta	Fraccionaria		4/5 cm
	Icónica	Radical constructible.	$\sqrt{13}$ cm
		Sin cifra constructible.	ϕ cm
	Decimal finita		6'85 cm
Aproximada	Decimal infinita	Periódica.	7'33333... cm
		No periódica constructible.	2'236068... cm

Tabla 5.9: Representaciones simbólicas para el estudio de la relación entre el 'resultado matemático' y el 'objeto físico'

5.1.5. Selección de situaciones

Del análisis de cada foco de contenido, ha surgido un conjunto de posibilidades, relacionadas fundamentalmente con los datos que se presentan en los enunciados. En la tabla 5.10 se resumen las posibilidades correspondientes a cada foco de contenido.

Focos de contenido	
Representación en la recta	Opción 1: Representar un número dado en la recta.
	Opción 2: Determinar la abscisa de un punto, conocidos el origen y la unidad.
	Opción 3: Valorar la representación de un número en la recta.
Infinitésimos	Situaciones de aproximación
	Propiedad arquimediana
Medida de longitudes	Estudio del campo semántico para 'medida de longitudes'.
	Unidades empleadas en la medición de longitudes.
	Relación entre 'resultado matemático' y 'objeto físico'.

Tabla 5.10: Focos de contenido.

En primer lugar, se descarta la elaboración de cuestionarios que contemplen todas las posibilidades (teniendo en cuenta todas las combinaciones posibles). Se trata de cuestiones muy variadas en cuanto a su contenido, y la decisión tomada en primer lugar es seleccionar algunas para profundizar en su estudio.

El criterio de selección utilizado es considerar las situaciones que estén fuertemente conectadas con los dos conflictos que se han identificado durante el análisis de las entrevistas exploratorias: 1) la dificultad en admitir el control de un proceso infinito y 2) la relación entre objeto matemático 'ideal' y objeto físico. Este criterio es el único que, a nuestro juicio, garantiza una "continuidad" de principio al estudio empírico.

A continuación, se realiza un análisis de la existencia o no de una conexión entre cada foco con los dos conflictos mencionados. A partir del análisis, se enuncian algunas conjeturas.

5.1.5.1. Conexiones entre los conflictos y el foco 1

Opción 1: Representar en la recta un número dado

El conflicto 1 puede surgir en la entrevista cuando se pide representar un número con infinitas cifras decimales, o bien cuando se pregunta acerca de la exactitud de una representación. La tarea propuesta en la opción 1 (Representar números en la recta), está dirigida a indagar si surgen dificultades similares en los sujetos, mediante una actividad similar a la propuesta en la entrevista. Se presentan números para representar en una recta, que pueden expresarse mediante diferentes representaciones simbólicas. Del análisis de posibles representaciones para números reales (Capítulo 3), se han recogido 17 representaciones simbólicas diferentes para estos números.

Opción 2: Hallar la abscisa de un punto sobre la recta, conocidos el origen y la unidad.

En el enunciado de esta situación se presenta una recta en la que están señalados tres puntos: los de abscisa 0 y 1, y un tercer punto A cuya abscisa debe determinarse. Hay diferentes opciones en cuanto al procedimiento adoptado para trazar el punto A (ver tabla 5.3).

En estas opciones, en ningún caso se hace referencia explícita a un proceso infinito. Sí es posible que las abscisas que los alumnos tienen que asignar, en algunos casos admitan una representación decimal infinita (por ejemplo, 1’4142... = √2). También es posible que algún alumno haga referencia a la subdivisión sucesiva de la unidad, y mencione la posibilidad de un proceso infinito. No obstante, las anteriores conjeturas no parecen tener peso suficiente como para sustentar una conexión fuerte con el conflicto relacionado con la dificultad en admitir el cierre de un proceso infinito.

El conflicto de la relación entre objeto matemático y objeto físico subyace en el fondo de la situación presentada en este ítem. En 3.6.4 analizamos la asignación de un número real a un punto de la recta, afirmando que “Físicamente, la identificación punto – número nunca es exacta” y desde un punto de vista ideal, la condición necesaria y suficiente para determinar exactamente el número real que corresponde a un punto, conociendo el origen y la unidad, es la existencia de una relación geométrica entre dos de los segmentos determinados por los tres puntos. Es posible que a la hora de justificar detalladamente la abscisa escogida, surja una reflexión por parte del alumno que ayude a interpretar su opinión sobre este asunto. Sin embargo, dado que depende totalmente del análisis personal del alumno una reflexión de este tipo, y no de una respuesta a una situación especialmente preparada para ese fin, esta opción no se incluye en el cuestionario.

Opción 3: Valoración de la representación de un número en la recta

En esta situación, se solicita a los sujetos que manifiesten el grado de acuerdo con distintos argumentos referidos a la exactitud de la representación de un número en la recta. Los argumentos correspondientes al criterio de valoración de la exactitud ‘Infinitas cifras decimales’ se extraerán de las respuestas de sujetos en las que se observa el conflicto 1. Asimismo, los argumentos correspondientes al criterio de valoración ‘Naturaleza del punto geométrico’ se extraerán de respuestas de sujetos en los que se observa el conflicto 2. Se espera estudiar el grado de acuerdo de los sujetos con estas afirmaciones.

5.1.5.2. Conexiones entre los conflictos y el foco 2

Aunque es imposible negar una conexión entre las intuiciones respecto de los infinitésimos, y los dos conflictos enunciados, las situaciones diseñadas para este foco tienen un objetivo específico (detectar intuiciones respecto de los infinitésimos), y no cabe aquí plantear otras metas (como estudiar los conflictos) para las cuales no han sido elaboradas.

5.1.5.3. Conexiones entre los conflictos y el foco 3

Estudio del campo semántico de la expresión 'medida de longitudes'

El objetivo de estas situaciones (analizar los términos utilizados por los sujetos para referirse a cantidades de longitud) no permite establecer una conexión con ninguno de los conflictos que se desea estudiar.

Unidades empleadas en la medición de longitudes

En este examen *a priori* de la conexión entre los conflictos y el ítem correspondiente a esta cuestión del foco Medida de longitudes, no nos atrevemos a conjeturar ninguna relación específica. La tesis de I. Romero (1995) permite avanzar algunas conjeturas, pero el marco es distinto, ya que no impartimos docencia.

Relación entre 'resultado matemático' y 'objeto físico'

Los ítems correspondientes han sido diseñados con la finalidad específica de estudiar el conflicto de la relación entre objetos matemáticos y objetos físicos.

En cuanto al conflicto de la dificultad para admitir el cierre de un proceso infinito, es posible que surja en el caso de que la longitud del segmento que se pide cortar por la mitad sea un número cuya expresión decimal es infinita (periódica o no).

5.1.5.4. Situaciones escogidas

En la tabla 5.11 resumimos las cuestiones seleccionadas para incluir en el cuestionario.

Foco 1: Representación en la recta Opción 1: Representar en la recta un número dado. Opción 3: Valoración de la representación de un número en la recta .
Foco 3: Medida de longitudes Relación entre 'resultado matemático' y 'objeto físico'.

Tabla 5.11: Opciones escogidas para incluir en el cuestionario

En el apartado 5.2 elaboraremos los ítems del cuestionario, justificando las decisiones tomadas.

La decisión de escoger las situaciones que presumiblemente proporcionarán información respecto de los dos conflictos detectados en las entrevistas exploratorias supone renunciar a un objetivo de la tesis y reformular las hipótesis de la investigación (véase tabla 2.1). Se trata de la segunda decisión significativa anunciada en 1.4.

En el próximo apartado describimos el diseño de los ítems del cuestionario.

5.2. Construcción del cuestionario

5.2.1. Introducción

En la primera parte de este capítulo hemos seleccionado finalmente las siguientes opciones para incluir en el cuestionario: 1) Dado un número, representarlo en la recta, 2) Valorar una representación en la recta y 3) Estudio de la relación entre un 'resultado matemático' y un 'objeto físico'. Las dos primeras corresponden al foco 1 y la última al foco 3. Además, presentamos algunas razones que justifican dicha elección, que significa una reducción importante de las cuestiones planteadas en su introducción.

El objetivo del cuestionario resulta ahora formulado con mayor precisión: proporcionar situaciones que permitan detectar en los sujetos interpretaciones relacionadas con los conflictos observados en las entrevistas exploratorias.

Con las tres opciones descritas se abordan dos focos diferentes: la representación de números reales en la recta y la relación entre la realidad física y su modelización en matemáticas, muy amplios para ser abordados en un solo cuestionario sin que ello signifique un importante esfuerzo de reflexión por parte del alumno. Por esa razón, realizaremos una nueva simplificación sobre las opciones escogidas, en detrimento de la opción 3. Excluiremos del cuestionario un ítem destinado a profundizar exclusivamente en la relación entre 'resultado matemático' y 'objeto físico', e incorporaremos en la opción 1 (Representar un número dado en la recta) una pregunta respecto de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento de recta determinado por el origen y el punto obtenido en la representación. De esta manera, si bien no descartamos completamente la situación 3, la reducimos a un inciso de la situación1.

En este apartado se construyen las situaciones que formarán parte del cuestionario. Se trata de seleccionar los datos que se incluirán en el enunciado de cada una de las situaciones escogidas: Representación de un número dado en la recta y Valoración de la representación de un número en la recta. Las dos secciones siguientes abordan esa tarea. En la sección 5.2.4 del apartado construimos los modelos de cuestionarios posibles de acuerdo con los datos incluidos en el enunciado, describimos el código de identificación de cada sujeto e incluimos un ejemplo de cuestionario.

5.2.2. Contenido de la situación 1

En la primera situación el dato del enunciado consiste en un número expresado en una escritura simbólica determinada. Se solicitará al alumno que:

1) Represente en la recta este número.
2) Explique el procedimiento utilizado.
3) Valore la exactitud de la representación obtenida
4) Determine si es no posible dividir exactamente por la mitad el segmento cuyos extremos son las marcas correspondientes al origen y al número dado.

En esta sección justificaremos la representación simbólica escogida para expresar el número, y analizaremos diversas cuestiones implicadas en las tareas 3 y 4.

5.2.2.1. Elección de representaciones simbólicas

Una decisión adoptada en primer lugar, consiste en descartar los números no constructibles, dado que sólo admiten una representación en la recta aproximada. A continuación, realizamos una selección de las representaciones que se incluirán en el cuestionario.

Se descartan las representaciones que los alumnos no están acostumbrados a utilizar, para evitar la dificultad añadida de manejar una representación desconocida. Se suprimen, por tanto, las representaciones: fracción continua finita e infinita y polinomio de coeficientes racionales.

Las representaciones mediante valores de funciones y series numéricas son más frecuentes en el medio escolar, aunque normalmente surgen en un contexto específico como puede ser el estudio de una función, o el estudio de la convergencia de una serie (esto último en la Universidad). Reconocemos que estos casos posiblemente den lugar a respuestas interesantes. Por ejemplo, el conflicto 1 podría surgir en el tratamiento de una serie numérica. Sin embargo, a los efectos de suprimir dificultades de interpretación de la representación simbólica, hemos decidido suprimir también estas representaciones.

Finalmente, se suprime la representación mediante símbolo no numérico constructible, puesto que el único caso que conocemos es el número de oro ϕ, y es posible que los alumnos no tengan conocimiento de este número o del símbolo asociado.

Las representaciones simbólicas que no se han suprimido son: fraccionaria, radical cuadrático, decimal finita, decimal infinita periódica y decimal infinita no periódica. Estas representaciones fueron utilizadas en las entrevistas exploratorias y son las que se utilizan con más frecuencia en el medio escolar. Por estas razones nos inclinamos a escogerlas para incluirlas en el cuestionario. En la tabla 5.12 se incluyen las representaciones simbólicas utilizadas en el cuestionario.

Se tienen cinco posibles representaciones simbólicas para los números, clasificadas en exactas y aproximadas. Por un lado (representaciones exactas), se trata de notaciones acotadas o delimitadas, en las que el número queda identificado completamente con un número finito de símbolos. Por otro lado (representaciones aproximadas), aunque en muchos casos es posible adivinar cómo continúan las cifras después de los puntos suspensivos (se trata, además, de números computables, pues son constructibles), aparece explícitamente indicado un proceso infinito. Con el objeto de observar cómo son abordadas esas diferentes representaciones, cada alumno deberá representar dos números, uno expresado mediante una representación exacta, y otro mediante una aproximada.

Representaciones simbólicas			**Ejemplo**	**Código**
Exacta	Fraccionaria		5/8	1
	Radical cuadrático		√5	2
	Decimal finita		0’24	3
Aproximada	Decimal infinita	Periódica.	0’33333...	a
		No periódica y constructible.	1’41421...	b

Tabla 5.12: Representaciones utilizadas en el cuestionario

En ese caso, se presentan las posibilidades indicadas en la tabla 5.13.

Combinaciones de códigos	**Número para la representación exacta**	**Número para la representación aproximada**	**Modelo de cuestionario Nº**
(1,a)	5/8 (*)	0’33333...	1
(1,b)	5/8	1’4142136... (*)	2
(2,a)	√5 (*)	0’33333...	3
(2,b)	√5	1’4142136... (*)	4
(3, a)	0’24	0’33333... (*)	5
(3,b)	0’24 (*)	1’4142136...	6

Tabla 5.13: Combinaciones de escrituras simbólicas

En esta situación se consideran dos opciones (por alumno) para el dibujo de la recta: que tenga el origen y la unidad indicados, o que no tenga ninguna marca. En la tabla 5.13 están señalados con asterisco (*) los casos en los que el origen y la unidad están indicados en el dibujo.

5.2.2.2. Análisis de la tarea ‘Valoración de la exactitud de la representación’

El enunciado de la tarea es el siguiente:

“¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.”

Cuando se describe la precisión de una representación en la recta, es necesario aclarar el punto de vista (matemático o físico) que se está adoptando. Desde un punto de vista físico, nunca se establece una asignación perfecta entre número y punto, puesto que la biyección se efectúa con objetos ideales en un mundo matemático ideal.

En un mundo matemático ideal, se puede hablar de asignación perfecta entre punto y número cuando el número es constructible con regla y compás ideales.

Desde un punto de vista físico, nunca se puede afirmar que la señal dibujada sobre una recta (una línea dibujada sobre un papel) coincide con el punto de la recta correspondiente al número (según el origen y unidad establecidos). Sin embargo, es posible describir la precisión de esta señal en función del procedimiento de representación utilizado. En este punto caracterizaremos la precisión de cada uno de los procedimientos (manipulaciones físicas) que hemos mencionado en la sección 5.1.2.2 .

1) Procedimientos en los que se explicitan propiedades geométricas:

Desde un punto de vista matemático ideal, los procedimientos basados en propiedades geométricas garantizan la precisión de las representaciones.

Desde un punto de vista físico, las representaciones no son precisas, debido a los errores provocados por la manipulación de objetos físicos.

2) Procedimientos en los que no se explicitan propiedades geométricas

- *Procedimiento cualitativo: Las únicas marcas que tiene el segmento son las correspondientes a 0 y 1.*

Desde un punto de vista matemático, no podemos evaluar a simple vista la precisión de la representación.

Desde un punto de vista físico, la utilización de regla graduada, compás o regla sin graduar (elementos concretos del mundo físico) permite describir la precisión en términos de intervalos (cuando se trata de regla graduada) o de procedimientos resultantes de utilizar los elementos geométricos (por ejemplo, después de realizar las construcciones necesarias, afirmar que la marca coincide con la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo determinado). Esto último incluye la imprecisión que mencionamos en el caso 1, referida a los errores surgidos en la manipulación de objetos físicos.

- *División de la unidad mediante Mediatriz/ Regla o Tales / Regla*

a) La señal que identifica al número coincide con las marcas de subdivisión

En este caso, es posible hablar de exactitud ideal en la representación. Desde el punto de vista físico deben considerarse las imperfecciones del dibujo. Es posible afirmar que si no se consideran posibles errores de construcción, la señal realizada sobre la recta representa al número considerado.

b) La señal que identifica al número no coincide con las marcas de subdivisión

En este caso, es posible apreciar a simple vista, sin que medie ninguna acción del sujeto sobre el dibujo, un intervalo al que pertenece el número. La subdivisión de las unidades en partes iguales no puede ser físicamente perfecta, y la determinación del intervalo está sujeta a esta limitación.

Si el dibujo lo permite (por el tamaño de la unidad) es posible describir la precisión de la señal que identifica al número recurriendo a un instrumento de medición o a elementos geométricos. En ese caso, valen las consideraciones realizadas para el procedimiento cualitativo.

5.2.2.3. Análisis de la tarea 'División del segmento obtenido por la mitad'

El enunciado de la tarea es el siguiente:

"En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a k[17] *unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?*
Si tu repuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo."

En el medio educativo se trabaja el trazado de la mediatriz de un segmento cualquiera con regla sin graduar y compás, pero es difícil que al mismo tiempo se tenga en cuenta la longitud del segmento.

La división de un segmento mediante el trazado de su mediatriz es válida para un segmento dado de cualquier longitud. La limitación que se impone a la afirmación anterior es que no siempre es posible construir un segmento cuya longitud, respecto de una unidad determinada, sea la deseada. Esto es posible sólo para aquellas longitudes expresadas mediante números constructibles. Salvando esta limitación, el procedimiento de trazado de una mediatriz es independiente de la longitud del segmento.

Dado el segmento AB de la figura 10:

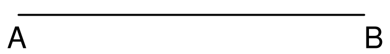


Figura 5.10

es posible 'decretar' que su longitud (según una cierta unidad *u*) es igual a π, y a continuación trazar la mediatriz de AB. Es decir, suponiendo *ya dado* un segmento cualquiera, siempre es posible trazar su mediatriz.

En este caso, debido a que π no es un número constructible, el proceso inverso no es posible. Es decir, dada una unidad *u*, construir el segmento de longitud π *u* no es posible. En este caso, no podríamos trazar la mediatriz de un segmento que no podemos construir.

[17] Siendo *k* el número que el sujeto debe representar.

Con esta salvedad, si la pregunta realizada en el cuestionario no incluyese en su enunciado el valor numérico que expresa la longitud del segmento, la respuesta que probablemente surgiría en la mayoría de los casos (teniendo en cuenta que los números presentados en el cuestionario son todos constructibles) expresaría en términos generales la siguiente idea:

> *"Es posible dividir por la mitad el segmento obtenido (y cualquier segmento dado), mediante el trazado de la mediatriz."*

Este tipo de respuesta se enmarca completamente en un plano geométrico. Conduce a la obtención de un resultado exacto desde un punto de vista ideal y aproximado desde un punto de vista físico.

Hay otras posibles respuestas para la pregunta, que resumimos esquemáticamente en la tabla 5.14.

La consideración o no del número que expresa la longitud del segmento es una cuestión esencial (primera columna de la tabla 5.14).

En caso de que el número que expresa la longitud del segmento no sea considerado, hemos mencionado que una respuesta posible es el trazado de la mediatriz. Pero no es la única. Otra opción sería medir mediante una unidad convencional (por ejemplo, el cm) el segmento obtenido, dividir entre 2 el resultado de la medición, y luego marcar la mitad del segmento utilizando nuevamente el instrumento de medición. Esta opción conduce a un resultado aproximado y consideramos que se enmarca en un plano aritmético, puesto que la atención está centrada el número que expresa la longitud del segmento en la nueva unidad de medida.

¿Qué ocurre con las respuestas que prestan atención al número que expresa la longitud del segmento?

Por un lado, consideramos el caso en que se analice la constructibilidad del número o de su mitad.

El análisis de la constructibilidad del número k, lo incluimos en un plano geométrico/aritmético, pues se está considerando si es o no posible obtener un segmento cuya longitud, a partir de una unidad determinada, es un número real dado. La respuesta a esta pregunta es positiva para los números presentados en el cuestionario (son números constructibles). Con la certeza de contar con el segmento de longitud dada, se considera posteriormente la determinación de su mitad. Ello se consigue mediante alguna de las dos opciones ya descritas: el trazado de la mediatriz del segmento obtenido o bien la medición del segmento obtenido y determinación de su mitad mediante una regla graduada.

<table>
<tr><th>¿Considera el número k que expresa la longitud del segmento?</th><th colspan="3">Resolución</th><th>Plano</th></tr>
<tr><td rowspan="2">No</td><td colspan="3">Mediatriz</td><td>Geométrico</td></tr>
<tr><td colspan="3">Medición del segmento con regla. División entre 2 de la longitud obtenida.</td><td>Aritmético</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Sí</td><td rowspan="3">Consideraciones acerca de la constructibilidad</td><td rowspan="2">k constructible Construye k</td><td>Mediatriz</td><td rowspan="3">Aritmético y geométrico</td></tr>
<tr><td>Medición segmento.</td></tr>
<tr><td colspan="2">k/2 es constructible. Construye k/2.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sin consideraciones acerca de la constructibilidad</td><td rowspan="2">División de k entre 2</td><td>Sin cálculo de k/2. $\exists$ k/2 $\forall$ $k \in$ R.</td><td rowspan="2">Aritmético</td></tr>
<tr><td>Calcula k/2 y representa.</td></tr>
</table>

Tabla 5.14: Posibles respuestas para la división del segmento por la mitad

Es posible que el hecho de que *k* sea constructible pase desapercibido, o no se tenga en cuenta, y se considere en cambio el hecho de que *k*/2 lo es (los números constructibles constituyen un subcuerpo de R; Carrega, 1981). Luego, en lugar de determinar la mitad del segmento de longitud *k*, es posible construir un nuevo segmento de longitud *k*/2, manteniendo la misma unidad. También esta respuesta la enmarcamos en un plano aritmético / geométrico.

Por otro lado, consideramos el caso en que no se tiene en cuenta la constructibilidad del número o de su mitad. Si la respuesta está centrada únicamente en el número que expresa la longitud del segmento, consideramos que está enmarcada en un plano exclusivamente aritmético.

¿Cuáles son las respuestas que quedan exclusivamente en el plano aritmético? Nos encontramos con segmentos de longitudes iguales a 0’3333... unidades, 1’4142136... unidades, 5/8 unidades, √5 unidades y 0’24 unidades, que deben dividirse “exactamente” por la mitad. Las respuestas que permanecen exclusivamente en un plano aritmético fijan su atención en los números 0’33333..., 1’4142136..., 5/8, √5 y 0’24.

Si se enfoca la longitud del segmento para responder la pregunta, la división por la mitad supone obtener otro segmento cuya longitud es igual a la mitad de la del segmento original. Luego, se plantea necesariamente la división entre 2 del número que expresa la longitud del segmento.

Manteniéndonos estrictamente en el plano aritmético, se trata de la división de un número real entre 2. Esta operación es cerrada en el conjunto de números reales, es decir, la división de cualquier número real *r* entre 2, es otro número real, *r*/2. Luego, siempre es posible obtener la longitud del segmento que constituye la mitad del segmento dado en el plano aritmético.

Aclaración: La posibilidad de obtener una respuesta para esa división no es equivalente a obtener un segmento cuya longitud sea el resultado de esa división. Son planos diferentes: aritmético y geométrico. Si el número que expresa la longitud del segmento original es constructible, también lo es el número que expresa la longitud del segmento cuya longitud es su mitad . Como hemos dicho, es el caso de los números presentados en el cuestionario. Si el número no es constructible su mitad tampoco lo es. El contexto de nuestro trabajo no permite, por tanto, validar la afirmación de existencia: "*para todo* número real, su mitad es constructible" que resulta de traducir a números el teorema geométrico "todo segmento tiene un punto medio".

Después de esta aclaración, continuemos nuestro análisis estudiando los casos en que las respuestas están centradas en el número que expresa la longitud del segmento y no se realizan consideraciones relacionadas con la constructibilidad del número dado y de su mitad.

Hemos dicho que la división entre dos de cualquier real k da como resultado otro real, $k/2$. La existencia de $k/2$ está garantizada por el hecho de que R es un cuerpo. Una posible respuesta en este caso sería enunciar que todo número puede dividirse entre 2, y sin efectuar el cálculo, indicar que posteriormente se representa en la recta el resultado. Este tipo de justificación es muy difícil que la encontremos en un alumno de Bachillerato, porque no ha estudiado las estructuras algebraicas definidas por los conjuntos numéricos y sus operaciones. En alumnos de Bachillerato o de Licenciatura podría encontrarse la referencia a la posibilidad de dividir cualquier real entre dos, y es posible que entre estos últimos alumnos, se encuentre alguna referencia a la propiedad de la estructura algebraica de **R**.

Otra posible respuesta consiste en efectuar la división y posteriormente, representar el resultado obtenido. En este caso, la resolución de la tarea pasa por la aplicación del algoritmo conveniente (que en algunos casos puede suponer una modificación de la escritura simbólica en que se presenta el número) y posteriormente por la representación en la recta del cociente obtenido.

5.2.3. Contenido de la situación 2

En este ítem se presentan diferentes representaciones de números en la recta acompañadas con frases (extraídas de las respuestas de alumnos entrevistados) respecto de la exactitud de cada representación. Se espera que los alumnos que respondan al cuestionario valoren estas frases, según una escala cuyos extremos son las opciones ‘muy en desacuerdo’ y ‘muy de acuerdo’.

Los datos que se incluyen en el enunciado son de dos tipos: un gráfico, que corresponde a la representación de un número dado en la recta, y una serie de frases extraídas de las respuestas de alumnos entrevistados en las que se valora la exactitud de la representación.

Los datos que a su vez figuran en el gráfico son dos: un número expresado mediante una representación simbólica determinada (tomado de la tabla 5.12), y un procedimiento de representación. Por esta razón, cada variable presente en un gráfico es un par constituido por una representación simbólica y un procedimiento de representación.

En los puntos siguientes justificaremos la selección de escrituras simbólicas para los números, procedimientos de representación en la recta y frases contenidos en el enunciado.

5.2.3.1. Selección de los procedimientos de representación

Procedimientos considerados

Al efectuar la tarea concreta de representar un número real en la recta, se está expresando 'groseramente' mediante un dibujo la biyección (desde un punto de vista matemático) que se ha establecido entre números reales y puntos de la recta.

Hemos mencionado que desde un punto de vista 'ideal' esa tarea (3.6.4) no puede realizarse exhaustivamente: ni para todo número, porque existen infinitos números reales que no sabemos describir de ningún modo, ni para todo punto de la recta, porque sólo podemos determinar la abscisa de los puntos constructibles.

Nos limitamos a trabajar con los números reales constructibles, lo que significa excluir todos los números trascendentes y muchos números algebraicos (para los cuales el grado del polinomio minimal irreducible con coeficientes racionales correspondiente al número tiene grado que no es potencia de dos, como $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{3}$). Esto supone que para cada número considerado, se dispone de un procedimiento de construcción mediante regla y compás.

Los procedimientos de representación los hemos descrito en el primer apartado de este capítulo (5.1.2.2) y los clasificamos en dos tipos: 1) Procedimientos en los que se explicitan propiedades geométricas (suponen la utilización de regla y compás) y, 2) Procedimientos en los que no se explicitan propiedades geométricas (véase tabla 5.3).

Justificación de nuestra selección

La selección de los datos incluidos en el gráfico se realiza en función del objetivo del ítem, que es el estudio de los dos conflictos descritos en la sección 4.4.2 respecto de la infinitud de las cifras decimales y de la relación entre resultado matemático y realidad física. Los argumentos que los alumnos deben valorar hacen referencia a estas cuestiones, y son respuestas conflictivas de los alumnos entrevistados durante las entrevistas exploratorias. Se espera obtener un perfil de los alumnos respecto de las dos situaciones conflictivas.

En 5.2.2.2 hemos analizado distintos puntos de vista que pueden tomarse para estudiar la exactitud de una representación, y hemos caracterizado la precisión de cada uno de los procedimientos de la tabla 5.15. En algunos casos, el propio procedimiento garantiza la posición del número, como ocurre con todos los procedimientos en los que se explicita una propiedad geométrica (mediatriz, Tales y Pitágoras), y en los procedimientos de división de la unidad, en el caso de que la señal que identifica al número coincide con una marca de subdivisión. En los casos restantes (cualitativo y división de la unidad cuando la señal no coincide con una subdivisión) el procedimiento sólo permite, a lo sumo, identificar un intervalo al que pertenece el número. Como nuestro objetivo es estudiar la posible manifestación de dos conflictos específicos, decidimos que es necesario evitar los procedimientos para los cuales los alumnos no disponen de información suficiente en el propio gráfico para evaluar la exactitud.

La razón de esta preferencia radica en que pensamos que el alumno debe librarse de la necesidad de comprobar (con regla graduada o útiles geométricos) la exactitud de la representación, y debe, en cambio, concentrarse en los argumentos expuestos (que corresponden a los dos conflictos enunciados).

<table>
<tr><th colspan="4">Procedimientos utilizados</th><th>Código</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Propiedad geométrica explícita</td><td colspan="3">Mediatriz.</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Teorema de Tales.</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="3">Teorema de Pitágoras.</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Propiedad geométrica sin explicitar</td><td rowspan="2">División de la unidad.</td><td>Med./Regla</td><td>Marca coincide con una división.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Tales/Regla.</td><td>Marca coincide con una división.</td><td>5</td></tr>
</table>

Tabla 5.15: Procedimientos incluidos en el cuestionario

Se reducen así los procedimientos de representación a los descritos en la tabla anterior.

5.2.3.2. Selección de representaciones simbólicas

La tabla 5.12 incluye 5 representaciones simbólicas posibles para los números, y en este punto estudiaremos cuáles se incluirán en este ítem del cuestionario. Recordemos que se trata de números constructibles, puesto que los números no constructibles se han descartado (ver 5.2.2.1).

Cuando se representa en la recta un número cuya representación decimal es infinita (periódica o no periódica), una de las decisiones que deben tomarse es la de conservar o modificar la escritura del número. Esta decisión determina el procedimiento utilizado, porque si tenemos, por ejemplo, el número 0’121212..., y no contamos con su escritura fraccionaria (4/33), sólo es posible realizar una representación en la recta aproximada, es decir, indicar un intervalo al que pertenece el número. En cambio, si contamos con la notación fraccionaria, el teorema de Tales garantiza la exactitud.

Por esta razón, la decisión que tome el resolutor de utilizar (o no) otra escritura diferente de la escritura decimal infinita del número, es clave a la hora de representar el número con exactitud.

En 5.2.3.1 se han escogido los procedimientos de representación en la recta que ofrecen información al alumno acerca de la precisión de la representación, y se han descartado aquellos procedimientos que exigen alguna actividad del alumno sobre el gráfico (efectuar mediciones, o trazar figuras suplementarias) para valorar la precisión. Por lo tanto, un número cuya escritura simbólica es decimal infinita sólo podría representarse recurriendo a otra escritura del número (fraccionaria o radical cuadrático), lo que supondría pasar a escrituras simbólicas icónicas o fraccionarias.

Es decir que un número expresado mediante una escritura decimal infinita, debe expresarse (explícita o implícitamente) mediante una escritura icónica o fraccionaria para poder representarse en la recta según algunos de los procedimientos de la tabla 5.15. Esa modificación de la escritura simbólica la descartamos, lo que supone descartar para el ítem las escrituras simbólicas aproximadas.

Resulta entonces que en este ítem del cuestionario se considerarán solamente las siguientes escrituras simbólicas: fraccionaria, radical cuadrático y decimal finita.

5.2.3.3. Combinación de procedimientos de representación y escrituras simbólicas

La combinación de representaciones simbólicas y procedimientos de representación, conduce a 3x5 = 15 posibles pares. Sin embargo, algunos procedimientos de representación no resultan adecuados para algunas representaciones simbólicas: por ejemplo, un número como √2 no puede representarse mediante el método 'Partición de la unidad en mitades sucesivas', puesto que no es posible expresar este número como razón entre dos números enteros, cuyo denominador sea una potencia de 2.

Es posible dar otros ejemplos, como la imposibilidad de utilizar el procedimiento 'Teorema de Tales', para representar números expresados mediante la escritura simbólica 'radical cuadrático'. En la tabla 5.16 se indican los procedimientos que pueden ser utilizados con cada representación simbólica.

Escritura	Mediatriz	Tales	Pitágoras	Med./Regla	Tales/Re-gla
Fraccionaria	Sí	Sí		Sí	Sí
Radical cuadrático			Sí		
Decimal Exacta	Sí	Sí		Sí	Sí

Tabla 5.16: Procedimientos 'sensatos' para cada representación simbólica

En la tabla 5.16 observamos que la escritura ‘Racional cuadrático’ se relaciona binunívocamente con el procedimiento ‘Teorema de Pitágoras’. En cambio, las escrituras restantes admiten hasta cuatro procedimientos de representación cada una.

La selección de los procedimientos de representación en estos últimos casos se basa en los siguientes criterios:

1º) Cada procedimiento de representación se utiliza una vez.

2º) La asignación escritura / procedimiento coincide con el uso que habitualmente se realiza en el medio escolar.

3º) El procedimiento debe permitir la utilización de la escritura simbólica en la que se presenta el número, sin que haya necesidad de modificar la escritura.

Según el 2º criterio, la escritura fraccionaria se asocia directamente con el procedimiento ‘Teorema de Tales’. Por otro lado, esta asignación se refuerza por el 3º criterio, puesto que la escritura fraccionaria constituye una de las razones necesarias en la proporción que permite establecer este teorema.

El 3º criterio permite asociar la escritura fraccionaria con el procedimiento ‘Mediatriz’, cuando el denominador de la fracción es una potencia de dos.

En cuanto a la escritura decimal finita, el 2º criterio conduce a escoger para esta escritura un procedimiento basado en la división de la unidad en partes iguales. Veamos un par de ejemplos que permitan decidir qué procedimientos escoger de los dos posibles. Para representar el número 0’37, el 2º criterio conduce a dividir el segmento unidad en 10 partes, tomar el intervalo comprendido entre 0’3 y 0’4, y dividirlo nuevamente en 10 partes, para escoger finalmente la división que corresponde a 0’37. Se ha utilizado el procedimiento Tales/Regla. El 3º criterio confirma esta elección, puesto que un principio básico de la escritura decimal es la agrupación de unidades en grupos de diez.

Supongamos ahora que deseamos representar en la recta el número 0’25. Por el criterio 3º, no debemos modificar la escritura del número. El criterio 2º nos conduce a la división de la unidad. De los dos procedimientos posibles, escogemos el denominado ‘Mediatriz/Regla’ por el 1º criterio (puesto que aún no ha sido utilizado este procedimiento) y además porque el número 0’25 coincide con una división de la unidad en cuatro partes, que constituye una potencia de dos.

Nuestros criterios de selección conducen a la elección que figura en la tabla 5.17.

	Mediatriz	Tales	Pitágoras	Med./Regla	Tales/ Regla
Fraccionaria	Sí	Sí			
Radical cuadrático			Sí		
Decimal Exacta				Sí	Sí

Tabla 5.17: Asignación escritura simbólica / procedimiento de representación

5.2.3.4. Selección de frases

En la tabla 5.5 (incluida en 5.1.2.3) se clasifican las frases de alumnos utilizadas durante las entrevistas exploratorias para valorar la exactitud de una representación según diferentes criterios de valoración.

El objetivo del cuestionario es detectar interpretaciones relacionadas con dos conflictos manifestados durante la entrevista: la dificultad para admitir el 'cierre' de un proceso infinito (las infinitas cifras decimales de un número) y la relación entre 'resultado matemático' y objeto del mundo físico.

Este objetivo nos guía en la selección de criterios de valoración que se utilizarán en las frases o argumentos presentados, en los que se hace referencia a la exactitud de la representación de los números en la recta. En la tabla 5.18 incluimos los criterios de valoración (ver 5.1.2.3 y anexo 6) junto a un código identificatorio.

Los criterios de valoración que se relacionan directamente con los conflictos que se desean estudiar son dos: Infinitas cifras decimales y Naturaleza del punto geométrico.

Las frases incluidas en el cuestionario corresponden a estos dos criterios, y se recurre a algún otro criterio en caso de que el número en cuestión admita una representación simbólica decimal finita, como por ejemplo los números 1/4 o 0'142. Los criterios que se utilizan, además de los relacionados con los conflictos que se desean estudiar, son los que han sido utilizados con más frecuencia por los alumnos entrevistados: Precisión de los instrumentos de representación y Procedimientos de representación.

Argumento utilizado para valorar la exactitud	Nº de respuestas	Código
- Infinitas cifras decimales	12	IC
- Precisión de los instrumentos de representación	10	PI
- Procedimiento de representación	13	PR
- 'Naturaleza' del punto geométrico	8	NP
- Sistema de referencia	3	-
- Referencia a una aproximación	5	-
- Otras justificaciones	5	-

Tabla 5.18: Clasificación de los argumentos referidos a la exactitud de la representación.

Los cuatro criterios de valoración se combinarán adecuadamente, de manera que cada gráfico correspondiente a un número representado en la recta resulte acompañado por varias frases referidas a la exactitud de la representación, de modo que al menos una frase pertenezca a los criterios de valoración relacionado con alguno de los conflictos.

5.2.3.5. Asignación de frases a cada gráfico

Hemos mencionado cuatro criterios de valoración (tabla 5.18) utilizados con mayor frecuencia por los alumnos entrevistados, dos de los cuales se refieren a los conflictos que desean estudiarse. En cada uno de los cinco casos considerados para el gráfico (tabla 5.15) incluiremos al menos una frase correspondiente a los criterios de valoración relacionados con los conflictos. A continuación describimos la selección de las frases que se incluirán en cada caso, rigiéndonos por las posibilidades de utilización de los criterios determinadas por el procedimiento de representación y la representación simbólica del número en cuestión.

Se descarta la posibilidad de acompañar cada gráfico con una frase correspondiente a cada criterio de valoración, porque el criterio 'Infinitas cifras decimales' no puede utilizarse con números que admiten una escritura decimal finita. Decidimos construir dos modelos diferentes de cuestionarios, según se incluyan dos o tres frases con cada gráfico.

En el primer caso (modelo 1), las dos frases deben escogerse aleatoriamente entre los criterios de valoración IC, PI, PR y NP de la tabla 5.18, agrupados de dos en dos (IC y PI, IC y PR, IC y NP, PI y PR, PI y NP, PR y NP). En la tabla 5.19 indicamos la distribución resultante. El caso en que se combinan los criterios PI y PR (Precisión de los instrumentos de representación y Procedimientos de representación respectivamente) no se incluye en el cuestionario, puesto que no responden a los conflictos que desean estudiarse.

En el segundo caso (modelo 2), las tres frases que los alumnos deben valorar se escogen de los 4 criterios de valoración IC, PI, PR, NP, pero de un modo no aleatorio. En este caso, en cada uno de los cinco gráficos se hace hincapié en uno de los dos conflictos, según se indica en la tabla 5.20. Así, de las tres frases que los alumnos deben valorar, dos pertenecen a un criterio relacionado con un conflicto que se desea estudiar. Por esa razón, los criterios de valoración que se han utilizado dos veces en cada frase son 'Infinitas cifras decimales' y 'Naturaleza del punto geométrico'. En la segunda columna de la tabla 5.20, se indica el criterio que se ha utilizado dos veces en cada gráfico.

Las frases incluidas en la columna 3 de cada una de las tablas 5.19 y 5.20 han sido incluidas por los investigadores en los criterios de valoración indicados en la columna 2 de cada tabla. Con el objeto de corroborar tal asignación, hemos realizado la consulta a expertos que se describe en el anexo 7.

Variables gráfico	Crit. val.	Nº frase	Frases Modelo 1
ropuesto diferentes métodos de	NP	4	“Porque esto (señala la marca) sigue siendo un segmento pequeñito y cada cosa que pintas va a ser un segmento más pequeñito, pero va a seguir siendo un segmento. Entonces no puedo marcar exactamente el punto.”
	PI	2	“Yo creo que no. Porque siempre los materiales que utilizamos tienen un margen de error.”
Tales, Escritura fraccionaria	PR	7	Sí, “porque aquí, por el teorema de... de Tales que te da triángulos que son... que son proporcionales, ¿no?”
	IC	8	“Nos aproximamos, pero nunca vamos a obtener el punto exacto. Nunca se va a poder representar si tiene infinitos números decimales.”
Pitágoras Radical cuadrá-tico.	IC	7	“Si es un número que tiene infinitas cifras decimales, jamás podríamos alcanzar el punto exacto, ya que tiene infinitas. Por mucho que estemos aquí.”
	NP	2	No es exacto, “porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, coger un número exactamente, porque dentro de..., si haces una rayita más gorda, dentro de... de ésta misma rayita hay un montón de números”.
	PI y PR		
División unidad Mediatriz /Regla	PI	2	“Yo creo que no. Porque siempre los materiales que utilizamos tienen un margen de error.”
	NP	4	“Porque esto (señala la marca) sigue siendo un segmento pequeñito y cada cosa que pintas va a ser un segmento más pequeñito, pero va a seguir siendo un segmento. Entonces no puedo marcar exactamente el punto.”
División unidad Tales/Regla	PR	11	Sería muy inexacto. “Si hubiese algún método, lo mismo hay, geométrico o lo que sea para... para poder conseguirlo, pues, seguro que sí sería exactamente.”
	NP	2	No es exacto, “porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, coger un número exactamente, porque dentro de..., si haces una rayita más gorda, dentro de... de ésta misma rayita hay un montón de números”.

Tabla 5.19: Configuración del ítem 3 para el modelo de cuestionario que contiene dos frases de alumnos.

Variables gráfico	Crit. val.	Nº frase	Frases Modelo 2
Mediatriz Escritura fraccio-naria	NP	2	No es exacto, "porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, coger un número exactamente, porque dentro de..., si haces una rayita más gorda, dentro de... de ésta misma rayita hay un montón de números".
	PR	13	Sí, "Tendría la mitad, y ahora, utilizo otra vez la mediatriz, te daría otra vez la mitad."
	NP	4	"Porque esto (señala la marca) sigue siendo un segmento pequeñito y cada cosa que pintas va a ser un segmento más pequeñito, pero va a seguir siendo un segmento. Entonces no puedo marcar exactamente el punto."
Tales, Escritura fraccio-naria	IC	3	"Si tienes infinitas cifras no puedes hallar la marca" 2105: "No, no es exacto".
	IC	8	"Nos aproximamos, pero nunca vamos a obtener el punto exacto. Nunca se va a poder representar si tiene infinitos números decimales."
	NP	2	No es exacto, "porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, coger un número exactamente, porque dentro de..., si haces una rayita más gorda, dentro de... de ésta misma rayita hay un montón de números".
Pitágoras Radical cuadráti-co	IC	7	"Si es un número que tiene infinitas cifras decimales, jamás podríamos alcanzar el punto exacto, ya que tiene infinitas. Por mucho que estemos aquí."
	NP	4	"Porque esto (señala la marca) sigue siendo un segmento pequeñito y cada cosa que pintas va a ser un segmento más pequeñito, pero va a seguir siendo un segmento. Entonces no puedo marcar exactamente el punto."
	IC	8	"Nos aproximamos, pero nunca vamos a obtener el punto exacto. Nunca se va a poder representar si tiene infinitos números decimales."
División unidad Mediatriz /Regla	NP	8	Los hombres no podemos perfeccionar el... punto exacto, que no lo podemos distinguir así con la vista."
	PI	2	"Yo creo que no. Porque siempre los materiales que utilizamos tienen un margen de error."
	NP	4	"Porque esto (señala la marca) sigue siendo un segmento pequeñito y cada cosa que pintas va a ser un segmento más pequeñito, pero va a seguir siendo un segmento. Entonces no puedo marcar exactamente el punto."
División unidad Tales/ Regla	PI	2	"Yo creo que no. Porque siempre los materiales que utilizamos tienen un margen de error."
	NP	2	No es exacto, "porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, coger un número exactamente, porque dentro de..., si haces una rayita más gorda, dentro de... de ésta misma rayita hay un montón de números".
	NP	8	Los hombres no podemos perfeccionar el... punto exacto, que no lo podemos distinguir así con la vista."

Tabla 5.20: Configuración del ítem 3 para el modelo de cuestionario que contiene tres frases de alumnos.

5.2.4. Confección del cuestionario

En esta sección, en primer lugar, completamos la construcción del cuestionario mediante la articulación de las opciones posibles para las situaciones 1 y 2 estudiadas en las secciones precedentes.

En segundo lugar (5.2.4.2) describimos el código utilizado para identificar a los alumnos y finalmente (5.2.4.3) incluimos un ejemplo de cuestionario.

5.2.4.1. Articulación de las situaciones 1 y 2 en el cuestionario

En la sección 5.2.2 hemos analizado la situación 1 en la que se presenta como dato (en el enunciado del cuestionario) un número constructible. Los sujetos deben llevar a cabo diferentes tareas con este número. Teniendo en cuenta la representación simbólica para el número en cuestión, hemos seleccionado 6 posibilidades, de manera que cada alumno deba trabajar con dos números diferentes (uno expresado mediante una representación exacta, y otro expresado mediante una representación aproximada). En la tabla 5.13 indicamos los números utilizados en cada caso.

En la sección 5.2.3 analizamos diversas cuestiones relacionadas con la situación 2 (Valoración de la representación de un número en la recta). Teniendo en cuenta los datos que figuran en el enunciado, hemos definido 5 posibilidades (tabla 5.17).

Combinando las posibilidades de las dos situaciones, resultan 6 x 5 = 30 cuestionarios diferentes, que están descritos en la tabla 5.21.

Situación 1: Números a representar	
Ítem 1	**Ítem 2**
5/8	0’33333...
5/8	1’4142136...
√5	0’333333...
√5	1’4142136...
0’24	0’33333...
0’24	1’4142136...

Situación 2: Gráficos a valorar
Ítem 3
Mediatriz
Tales
Pitágoras
Med../ Regla
Tales / Regla

Tabla 5.21: Opciones consideradas en las situaciones 1 y 2.

5.2.4.2. Código de identificación del alumno

Cada alumno está identificado con un código de cuatro cifras.

La primera cifra indica el nivel del alumno (1º Bachillerato, 2º Bachillerato ó 1º Licenciatura) y el modelo de cuestionario.

En la tabla 5.22 se indican los valores correspondientes a la primera cifra del código.

Nivel y modelo	1º cifra del código
1º Bachillerato (Modelo 2 ítem 3)	1
2º Bachillerato (Modelo 2 ítem 3)	2
1º Licenciatura (Modelo 1 ítem 3)	3
4º Secundaria (Modelo 1 ítem 3, Argentina)	4
5º Secundaria (Modelo 1 ítem 3, Argentina)	5
1º Licenciatura (Modelo 1 ítem 3, Argentina)	6
1º Bachillerato (Modelo 1 ítem 3)	7
2º Bachillerato (Modelo 1 ítem 3)	8

Tabla 5.22: Valores correspondientes a la primera cifra del código

La segunda cifra del código varía entre 1 y 6, y corresponde a cada uno de los seis casos correspondientes a los ítems Nº 1 y Nº 2. En la tabla 5.23 se indican los valores correspondientes a la segunda cifra del código.

Números a representar (Ítems Nº 1 y Nº 2)		2º cifra del código
5/8 (*)	0’33333...	1
1’4142136... (*)	5/8	2
$\sqrt{5}$ (*)	0’33333...	3
1’4142136... (*)	$\sqrt{5}$	4
0’33333... (*)	0’24	5
0’24 (*)	1’4142136...	6

Tabla 5.23: Valores correspondientes a la segunda cifra del código

(*) Casos en que el origen y la unidad están indicados en el dibujo.

La tercera cifra del código varía entre 1 y 5, y corresponde a cada uno de los cinco casos correspondientes al ítem Nº 3. En la tabla 5.24 se indican los valores correspondientes a la tercera cifra del código.

Gráfico (ítem Nº 3)	3º cifra del código
Mediatriz	1
Tales	2
Pitágoras	3
Mediatriz/Regla	4
Tales/Regla	5

Tabla 5.24: Valores correspondientes a la tercera cifra del código

La cuarta cifra del código es ‘1’ o ‘2’. Corresponde ‘1’ en caso de que el cuestionario correspondiente se encuentra entre los primeros treinta construidos para ese nivel y modelo, y ‘2’ en los casos en que el cuestionario corresponde a un número mayor de 30. Por lo tanto, dos cuestionarios cuyos códigos son iguales excepto por la última cifra (en un caso es 1, y en el otro 2) contienen exactamente los mismos datos en todos sus ítems.

La cuarta cifra se ha añadido para el caso de cursos con más de 30 alumnos, con el objeto de que corresponda a cada alumno un código único.

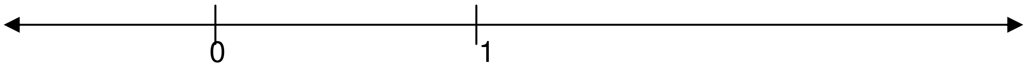
Situación 1: Números a representar		**Situación 2: Gráficos a valorar**	**Código de identificación del alumno**
Ítem 1	**Ítem 2**	**Ítem 3**	
5/8	0’33333...	Mediatriz	-111 ó -112
		Tales	-121 ó -122
		Pitágoras	-131 ó -132
		Mediatriz/Regla	-141 ó -142
		Tales/Regla	-151 ó -152
1’4142136...	5/8	Mediatriz	-211 ó -212
		Tales	-221 ó -222
		Pitágoras	-231 ó -232
		Mediatriz/Regla	-241 ó -242
		Tales/Regla	-251 ó -252
√5	0’33333...	Mediatriz	-311 ó -312
		Tales	-321 ó -322
		Pitágoras	-331 ó -332
		Mediatriz/Regla	-341 ó -342
		Tales/Regla	-351 ó -352
1’4142136...	√5	Mediatriz	-411 ó -412
		Tales	-421 ó -422
		Pitágoras	-431 ó -432
		Mediatriz/Regla	-441 ó -442
		Tales/Regla	-451 ó -452
0’33333...	0’24	Mediatriz	-511 ó -512
		Tales	-521 ó -522
		Pitágoras	-531 ó -532
		Mediatriz/Regla	-541 ó -542
		Tales/Regla	-551 ó -552
0’24	1’4142136...	Mediatriz	-611 ó -612
		Tales	-621 ó -622
		Pitágoras	-631 ó -632
		Mediatriz/Regla	-641 ó -642
		Tales/Regla	-651 ó -652

Tabla 5.25: Cuestionarios posibles según la combinación de datos posibles para las situaciones 1 y 2

5.2.4.3. Ejemplo de cuestionario

Código: -231 (ó -232)

Ítem 1. a) Representa en la recta el número 1’4142136...



b) Explica el procedimiento utilizado.

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

d) En la cuestión 1a) has obtenido un segmento de longitud igual a 1’4142136... unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 1a).
Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) ☐ Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☐ Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐ Compás: ☐ Calculadora: ☐ Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 2. a) Representa en la recta el número 5/8.

b) Explica el procedimiento utilizado.

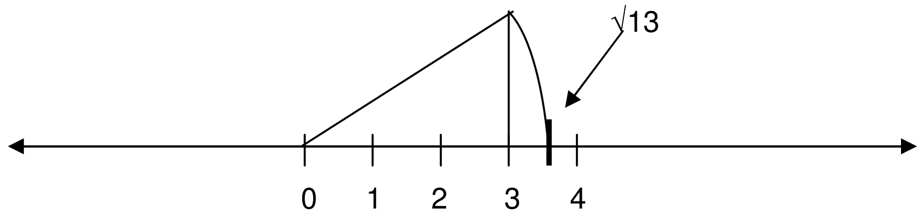
c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

d) En la cuestión 2a) has obtenido un segmento de longitud igual a 5/8 unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 2a).
Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta): ☐ Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☐ Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐ Compás: ☐ Calculadora: ☐ Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 3:
La pregunta indicada en el recuadro se planteó a algunos alumnos de Bachillerato y de Universidad (Licenciatura en Matemáticas):

En la siguiente figura se ha representado el número $\sqrt{13}$ utilizando el teorema de Pitágoras ¿Es exacta esa representación?



Se han extraído al azar las respuestas de dos alumnos. Lee atentamente cada una, y piensa si estás o no de acuerdo con ella.
Debes indicar tu opinión en la tabla que figura más abajo, con una cruz en la casilla correspondiente.

Claudia: *"Si es un número que tiene infinitas cifras decimales, jamás podríamos alcanzar el punto exacto, ya que tiene infinitas. Por mucho que estemos aquí."*

Federico: *"No es exacto, porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, coger un número exactamente, porque si haces una rayita más gorda, dentro de esa misma rayita hay un montón de números."*

Para expresar el grado de acuerdo con las respuestas anteriores completa la siguiente tabla, señalando con una cruz (x) en la opción elegida en cada caso.

	¿Estás de acuerdo?				
Alumno	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo	Muy de acuerdo
Claudia	☐	☐	☐	☐	☐
Federico	☐	☐	☐	☐	☐

CAPÍTULO 6

CONFIRMACIÓN EMPÍRICA DE DOS CONFLICTOS

6.1. Introducción

En este capítulo describimos el estudio de las respuestas de los sujetos a los ítems del cuestionario y los resultados de las entrevistas confirmatorias.

El muestreo utilizado en el cuestionario ha sido accidental y en las entrevistas confirmatorias ha sido a propósito (León y Montero, 1999). La información referida a los sujetos de estudio, fechas y condiciones de administración de los instrumentos (cuestionario y entrevistas) se incluye en las secciones 2.6.2 y 2.6.3 respectivamente.

El estudio de las respuestas a los ítems 1 y 2 del cuestionario consume la mayor parte del capítulo. La razón que justifica este predominio radica en que los ítems 1 y 2 son ítems abiertos, a diferencia del ítem 3 que es de escala. Los ítems abiertos generan un abanico de respuestas muy amplio, dado que “no hay otras limitaciones sobre el contenido o el modo de respuesta del entrevistado más que la de la materia de la pregunta o cuestión, que viene determinada por la naturaleza del problema de investigación” (Cohen y Manion, 1990; p.384).

El estudio de las respuestas está guiado por el objetivo del cuestionario: proporcionar situaciones que permitan detectar afirmaciones de los sujetos relacionadas con los dos conflictos surgidos durante las entrevistas exploratorias.

Por esta razón, en la sección 6.2, donde se desarrolla el estudio de las respuestas a los ítems 1 y 2, el análisis consiste en la detección de afirmaciones incorrectas (inconsistentes desde el punto de vista matemático), en la selección de aquellas específicamente relacionadas con alguno de los dos conflictos y finalmente en el estudio más detallado de las afirmaciones seleccionadas.

En cuanto al ítem 3, ha sido diseñado con el objeto de cotejar con este ítem de escala las respuestas obtenidas mediante los ítems 1 y 2, que como hemos dicho, son ítems abiertos (Cohen y Manion, 1990; 385). En ese sentido, la respuesta al ítem 3 se utilizará en algunos casos, para tomar decisiones respecto de la presencia o ausencia de conflicto en respuestas dadas en los ítems 1 y 2. No obstante, en el apartado 6.3 incluiremos un breve resumen de las respuestas obtenidas en este ítem.

En el apartado 6.4 resumimos algunas conclusiones del estudio de las respuestas a los ítems del cuestionario.

En el apartado 6.5. se describen los resultados de las entrevistas confirmatorias administradas a los sujetos seleccionados en el apartado 6.2. El estudio de las entrevistas está enfocado en la confirmación o el rechazo de conflictos.

6.2. Estudio de respuestas a los ítems 1 y 2

6.2.1. Introducción

En esta sección describimos el estudio de las respuestas de los sujetos a los ítems 1 y 2. En la figura 6.1 resumimos el estudio desarrollado en esta sección.

ORGANIZACIÓN RESPUESTAS A ÍTEMS 1 Y 2 MEDIANTE TABLAS.

- Tablas de Desempeño Global.
- Tablas de Valoración del Desempeño.

(6.2.2)

↓

ESTUDIO AFIRMACIONES INCONSISTENTES EN ÍTEMS 1c, 1d, 2c y 2d.

SELECCIÓN RESPUESTAS PERTINENTES PARA LA INVESTIGACIÓN.
(Criterios de selección)
(6.2.3)

↓

ESTUDIO RESPUESTAS PERTINENTES PARA LA INVESTIGACIÓN.
(Grupo 1)
COMPARACIÓN CON RESPUESTAS CORRECTAS.
(Grupo 2)

Aproximaciones:

- Estudio descriptivo de ambos grupos.
- Relaciones de respuestas de ambos grupos con criterios para el estudio de los números reales.
- Comparación con la evaluación de un profesor experto.

(6.2.4)

Figura 6.1: Estudio respuestas a ítems 1 y 2 del cuestionario

En primer lugar (6.2.2), organizamos la información mediante tablas que recogen todas las respuestas de los sujetos e incluimos tres ejemplos de interpretación de los datos de las tablas. Estas tablas contienen, además de las respuestas de los sujetos, la valoración de la investigadora de esas respuestas.

En segundo lugar (6.2.3), estudiamos las afirmaciones consideradas por la investigadora inconsistentes desde el punto de vista matemático, que han sido señaladas en las tablas de valoración del desempeño de los sujetos, con el objeto de seleccionar aquellas respuestas que resultan pertinentes para esta investigación. La elección de las respuestas se realizará mediante criterios sucesivos que confluirán hacia la identificación de respuestas que estén directamente relacionadas con los dos conflictos que desean estudiarse con el cuestionario.

En tercer lugar (sección 6.2.4), estudiamos las respuestas escogidas mediante la comparación de estas respuestas con las de sujetos que no evidencian conflictos pertinentes para la investigación. Esta comparación la realizamos mediante diferentes aproximaciones: estudio descriptivo de cada grupo, estudio de las relaciones entre conflictos y criterios para los números reales en cada grupo y cotejo de nuestra valoración con la realizada por un profesor de enseñanza secundaria.

6.2.2. Organización de las respuestas

Se ha justificado en la sección 5.2.2 la utilización de dos números diferentes en los ítems 1 y 2 del cuestionario, sobre los que versarán las distintas tareas que debe realizar cada sujeto. Uno de estos números se presenta expresado mediante una escritura simbólica exacta, y otro mediante una escritura simbólica aproximada. Interesa observar si la respuesta del sujeto se modifica ante la presencia de un proceso infinito (indicado por los puntos suspensivos) en la notación decimal. Se espera estudiar la producción de cada sujeto y observar si existen variaciones en sus respuestas relacionadas con las diferentes escrituras de estos números.

Para estudiar la actuación de un sujeto consideramos necesario, en primer lugar, comparar su actuación ante dos representaciones simbólicas, una exacta y otra aproximada. En segundo lugar, deseamos tener una idea clara de cómo se ha desempeñado ese sujeto en las tareas de representación de los dos números en la recta, valoración de la exactitud de la representación realizada y valoración de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento obtenido. En los puntos siguientes describimos la construcción de tablas que resumen la información relacionada con estas cuestiones.

6.2.2.1. Tablas de Desempeño Global

Para facilitar la comparación de las respuestas se ha elaborado una Tabla de Desempeño Global que incluye información acerca de las respuestas proporcionadas por cada sujeto a los ítems 1 y 2 del cuestionario. Esta información versa sobre los siguientes puntos:

- Código que identifica al sujeto.
- Procedimientos utilizados para representar los números.

- Respuesta del sujeto respecto de la exactitud de la representación obtenida (afirmación, negación, u otras).
- Términos o frases utilizadas por el sujeto consideradas 'claves' en la valoración de la exactitud de la representación obtenida (inciso c) de los ítems 1 y 2.
- Existencia o ausencia de un conflicto explícitamente reconocido por el sujeto en alguna de las tareas correspondientes a los incisos a, b y c de los ítems 1 y 2[18].
- Respuesta del sujeto respecto de la posibilidad de dividir exactamente por la mitad el segmento obtenido (afirmación, negación u otras)
- Términos o frases considerados claves en la justificación proporcionada por el sujeto en el inciso d) de los ítems 1 y 2.
- Existencia o ausencia de un conflicto explícitamente reconocido por el sujeto en la tarea correspondiente al inciso d) de los ítems 1 y 2.

La Tabla de Desempeño Global está incluida en el anexo 8 y las columnas que la constituyen siguen el orden de la descripción anterior para cada número que el sujeto debe representar.

6.2.2.2. Tablas de Valoración del Desempeño

A partir de la tabla de Desempeño Global, hemos construido una segunda tabla, que incluye la valoración de la investigadora del desempeño del sujeto en las distintas tareas. Esta tabla la denominamos tabla de Valoración del Desempeño. Además de valorar la corrección de las respuestas del sujeto según las pautas que se detallan en el anexo 9, el análisis de las respuestas de los sujetos está orientado a enfocar la existencia de afirmaciones inconsistentes, especialmente aquellas relacionadas con los conflictos estudiados.

Aunque el objetivo del cuestionario es proporcionar situaciones que susciten la aparición de respuestas relacionadas con alguno de los dos conflictos detectados durante las entrevistas exploratorias (el control de los procesos infinitos y la relación entre resultado matemático y objeto físico), la búsqueda empírica de respuestas inconsistentes que realizamos en este momento no se limita a estos dos conflictos. En la tabla de Valoración del Desempeño, se incluye cualquier situación que la investigadora considere inconsistente, y el análisis de las inconsistencias detectadas se deja para un estudio posterior. Las columnas que se añaden a la tabla de Desempeño Global para construir la tabla de Valoración del Desempeño, están referidas a los siguientes puntos:

- Valoración de la explicación del procedimiento de representación del número (ítems 2a y 2b).
- Asignación de criterios (para el estudio de los números reales) a los términos o frases claves recogidos de los ítems 1c y 2c, que permite encuadrar la

[18] Consideramos la presencia de un conflicto explícitamente reconocido por el sujeto cuando éste reconoce que no sabe o no puede responder una pregunta determinada.

valoración de la exactitud de la representación en distintos ámbitos de estudio del números real.

- Valoración de la existencia o ausencia de inconsistencia desde el punto de vista matemático (no necesariamente reconocida por el sujeto) en las justificaciones de la valoración de la exactitud de la representación (obtenidas en los ítems 1c y 2c).
- Asignación de criterios (para el estudio de los números reales) a las justificaciones dadas por el sujeto acerca de la posibilidad de dividir o no un segmento de longitud dada por la mitad en 1d y 2d.
- Valoración de la existencia o ausencia de inconsistencia desde el punto de vista matemático (no necesariamente reconocida por el sujeto) en las justificaciones de la valoración de la posibilidad de dividir por la mitad un segmento de longitud dada.

Hemos indicado en 3.7 que es muy difícil observar en el cuestionario conflictos cognitivos tal como los hemos definido allí, es decir, que se presenten afirmaciones que conducen a respuestas contradictorias, y que la contradicción sea evidenciada por el sujeto. Por esa razón, en la valoración por parte de la investigadora de las respuestas a los ítems 1c y 2c (valoración de la exactitud de la representación) y a los ítems 1d y 2d (valoración de la posibilidad de dividir exactamente por la mitad el segmento obtenido) no utilizamos la expresión 'conflicto cognitivo'. En cambio, utilizamos la expresión 'inconsistencia desde el punto de vista matemático' para referirnos a respuestas incorrectas o inadecuadas.

La Tabla de Valoración del Desempeño es demasiado extensa como para incluirla en un único folio. Por ello hemos organizado esa información en dos partes. Aunque existen diferentes formas de hacerlo, hemos optado por la siguiente: en una primera tabla (Tabla de Valoración I), incorporamos la información relacionada con la tarea de representar en la recta los dos números que le corresponden a cada sujeto (ítems 1a, 1b, y 1c; 2a, 2b y 2c). En una segunda tabla (Tabla de Valoración II), incorporamos toda la información relacionada con la tarea de dividir por la mitad los dos números que corresponden a cada sujeto (ítems 1d y 2d). La razón de nuestra elección radica en que nos interesa comparar la respuesta de un mismo sujeto ante tareas idénticas realizadas con números expresados mediante escrituras distintas (exacta o aproximada).

En el anexo 9 incluimos las tablas de Valoración I y II, acompañadas de los códigos utilizados para resumir los datos. El código de cada sujeto permite reunir ambas tablas en una sola.

Con esta organización, la información total admite diferentes lecturas. Por ejemplo, puede observarse en la tabla de Valoración I el desempeño de un mismo sujeto en la tarea de representar dos números distintos, y comparar sus respuestas ante cada número. Del mismo modo, fijando la atención en la tabla de Valoración II, puede compararse el desempeño de este sujeto en la tarea de dividir por la mitad segmentos cuyas longitudes son dos números distintos, y observar si se producen variaciones ante cada número.

Otra lectura diferente consiste en analizar el desempeño completo (tareas de representación y de división por la mitad) y la valoración de la exactitud para un mismo sujeto ante un número determinado. Esto supone leer una mitad de la tabla de Valoración I y a continuación la mitad correspondiente de la tabla de Valoración II. Con esta lectura se sigue el orden según el cual el sujeto ha respondido a los ítems del cuestionario.

También es posible comparar el desempeño y la ausencia / existencia de afirmaciones inconsistentes en distintos sujetos (pertenecientes a diferentes niveles de enseñanza) ante las mismas tareas.

En el siguiente punto analizaremos con tres sujetos (escogidos aleatoriamente) la información que proporcionan las Tablas de Valoración.

6.2.2.3. Ejemplos de interpretación de datos de la tabla

A continuación se describe la información que es posible obtener observando las tablas de Valoración I y II, que resumen el desempeño global de cada sujeto y su valoración por parte de la investigadora. Para ello escogemos aleatoriamente tres sujetos del total de sujetos a los que se les administró el cuestionario (124 sujetos). La información contenida en las tablas de valoración para cada uno de estos sujetos puede observarse en el anexo 9. En los siguientes puntos describimos la información que la investigadora obtiene de los datos incluidos en cada tabla. En el anexo 10 se incluye la respuesta de cada sujeto. Con estos ejemplos se puede observar de qué manera se interpreta la información recogida en las tablas de Valoración del Desempeño para cada sujeto.

La interpretación de la información contenida en los fragmentos de tablas de Valoración del Desempeño I y II incluidos más abajo la realizaremos según el orden seguido por el sujeto al responder el cuestionario. Para cada código de sujeto escogido, por lo tanto, debe leerse la información recogida en la fila que le corresponda, en el siguiente orden:

- En primer lugar las columnas 2 a 9 de la tabla de Valoración I.
- En segundo lugar las columnas 2 a 6 de la tabla de Valoración II.
- En tercer lugar las columnas 10 a 17 de la tabla de Valoración I.
- En cuarto lugar, las columnas 7 a 11 de la tabla de Valoración II.

De esta manera es posible comparar la descripción realizada en cada ejemplo con las respuestas textuales de los sujetos, recogidas en el anexo 10.

6.2.2.3.1. Primer ejemplo

(Columna 1, tabla I) Sujeto 114.

Ítem 1a)

(Columna 2, tabla I) El sujeto representa el número 5/8 realizando un división del intervalo [0’5,1] en 5 partes iguales. Codificación: **D.[0’5,1]2 (5)**.

(Columna 3, tabla I) La división del segmento en partes iguales es irregular, se observa a simple vista, sin necesidad de comprobar con instrumentos de dibujo, que las partes no tienen la misma longitud. Codificación: **21**.

Ítem 1b)

(Columna 4, tabla I) No se observa ningún tipo de error en la descripción del procedimiento de representación. Codificación: **00**.

Ítem 1c)

(Columna 5, tabla I) El sujeto responde negativamente a la pregunta de si es exacta la representación obtenida en 1a). Codificación: **1**.

(Columna 6, tabla I) En la justificación de su valoración, incluye los términos ‘regla’ y ‘medir’, lo que se interpreta como que hace referencia al uso de la regla y a la actividad de medir. Codificación: **Regla, medir**.

(Columna 7, tabla I) La investigadora interpreta que la justificación de la valoración de la exactitud corresponde al criterio Fenomenología, por la referencia mencionada al proceso de medición. Codificación: **f**.

(Columna 8, tabla I) El sujeto no declara la existencia de una dificultad o un conflicto en lo realizado hasta ese momento. Es decir que no enuncia frases en las que admita que no sabe o no puede responder alguna pregunta. Codificación: **No**.

(Columna 9, tabla I) La investigadora considera que la valoración de la exactitud de la representación es correcta. Se trata de una afirmación referida a la imposibilidad de realizar mediciones exactas. Codificación: **0**.

Ítem 1d)

(Columna 2, tabla II) El sujeto responde afirmativamente a la pregunta de si es posible dividir exactamente por la mitad un segmento de longitud igual a 5/8 unidades, obtenido en 1a). Codificación: **0**.

(Columna 3, tabla II) Para justificar cómo realizaría la división del segmento por la mitad, expresa que ‘5:8 = 0’625:2’. Se interpreta como una referencia a dividir entre 2 el número que expresa la longitud del segmento. Codificación: **5:8 = 0’625: 2**.

(Columna 4, tabla II) Debido a que el sujeto hace referencia a una división, la investigadora incluye la respuesta del sujeto en el criterio Operaciones. Codificación: **p.**

(Columna 5, tabla II) El sujeto no declara la existencia de dificultad o conflicto en la realización de la tarea propuesta en 1d). Codificación: **No**.

(Columna 6, tabla II) La investigadora considera que la justificación del sujeto es correcta, a pesar de que la igualdad que plantea no es verdadera. La división de la longitud del segmento por la mitad, para posteriormente representar con una nueva marca sobre el segmento original el segmento cuya longitud es la mitad del segmento de partida, es una alternativa válida de resolución de la tarea. Codificación: **0**.

Ítem 2a)

(Columna 10, tabla I) El sujeto representa el número 0'33333... realizando una división del intervalo [0, 1] en 5 partes iguales. Codificación: **D.U.2 (5)**.

(Columna 11, tabla I) A simple vista la marca realizada es correcta. Codificación: **00**.

Ítem 2b)

(Columna 12, tabla I) En la descripción del procedimiento de representación se observa una imprecisión del lenguaje. Utiliza el término 'recta' en lugar de 'unidad', 'segmento' ó 'segmento unidad'. Codificación: **11**.

Ítem 2c)

(Columna 13, tabla I) El sujeto responde negativamente a la pregunta de si es exacta la representación obtenida en 2a). Codificación: **1**.

(Columna 14, tabla I) En la justificación de su valoración, incluye el término 'periódico' lo que se interpreta como que hace referencia a la escritura simbólica del número (periódica pura) para justificar la no exactitud de la representación obtenida. Codificación: **Nº periód.**.

(Columna 15, tabla I) La investigadora interpreta que la justificación de la valoración de la exactitud corresponde al criterio Representaciones, debido a la referencia a la periodicidad del número 0'33333... Codificación: **r**.

(Columna 16, tabla I) El sujeto no declara la existencia de dificultad o conflicto en lo realizado hasta ese momento. Codificación: **No**.

(Columna 17, tabla I) La investigadora observa una respuesta inadecuada en la respuesta al ítem 1c). Ello se debe a que el sujeto centra su atención en la representación simbólica del número (su periodicidad) para justificar la no exactitud de la representación del número en la recta. Codificación: **1**.

Ítem 2d)

(Columna 7, tabla II) El sujeto responde negativamente a la pregunta de si es posible dividir exactamente por la mitad el segmento de longitud igual a 0'33333... unidades, obtenido en 2a). Codificación: **1.**

(Columna 8, tabla II) Para justificar la imposibilidad de realizar la división, utiliza el término 'periódico'. Codificación: **periódico**.

(Columna 9, tabla II) La investigadora interpreta que la justificación del sujeto corresponde al criterio Representaciones, puesto que el sujeto hace referencia a la escritura simbólica del número. Codificación: **r**.

(Columna 10, tabla II) El sujeto no declara la existencia de dificultad o conflicto en la realización de la tarea propuesta en 1d). Codificación: **No**.

(Columna 11, tabla II) La investigadora observa un afirmación inconsistente (desde el punto de vista matemático) en la respuesta del sujeto al ítem 1d), puesto que la escritura simbólica del número que expresa la longitud del segmento no modifica la posibilidad de dividirlo por su mitad. Codificación: **1**.

6.2.2.3.2. Segundo ejemplo

(Columna 1, tabla I) Sujeto 343.

Ítem 1a)

(Columna 2, tabla I) El sujeto representa el número 1'4142136... mediante la aplicación del teorema de Pitágoras. Codificación: **Pitágoras**.

(Columna 3, tabla I) La representación realizada es correcta. Codificación: **00**.

Ítem 1b)

(Columna 4, tabla I) No se observa ningún tipo de error en la descripción del procedimiento de representación. Codificación: **00**.

Ítem 1c)

(Columna 5, tabla I) El sujeto responde de forma ambigua a la pregunta de si es exacta la representación obtenida en 1ª. Codificación: **2**.

(Columna 6, tabla I) Por un lado, hace referencia a que los instrumentos utilizados pueden originar algún error, y por otro, hace referencia a la exactitud del procedimiento de representación utilizado. Codificación: **Inst err, proced exac**.

(Columna 7, tabla I) La investigadora interpreta que la justificación de la valoración de la exactitud corresponde a los criterios Fenomenología (por la referencia a errores provocados por los instrumentos) y Representaciones (por la referencia al procedimiento de representación de un número en la recta). Codificación: **i**.

(Columna 8, tabla I) El sujeto no declara la existencia de dificultad o conflicto en lo realizado hasta ese momento. Codificación: **No**.

(Columna 9, tabla I) La justificación de la valoración de la exactitud es considerada correcta por la investigadora. En el análisis de la tarea de valoración de la exactitud de la representación de un número en la recta (5.2.2.2), se ha mencionado la posibilidad de valorarla desde dos puntos de vista diferentes (plano físico y plano ideal). En el primer caso, no es posible hablar de representación exacta, mientras que en el segundo, es posible hablar de representación exacta cuando se trata de una representación basada en relaciones geométricas. En consecuencia, no se observa ninguna inconsistencia en la respuesta al ítem c). Codificación: **0**.

Ítem 1d)

(Columna 2, tabla II) El sujeto responde de forma ambigua a la pregunta de si es posible dividir exactamente por la mitad un segmento de longitud igual a 1’4142136... unidades, obtenido en 1a). Codificación: **2**

(Columna 3, tabla II) Por un lado, considera que pueden producirse errores relacionados con la medición. Por otro lado, menciona la posibilidad de determinar el punto medio mediante la construcción de la mediatriz del segmento correspondiente. Codificación: **Err med, mediatriz**.

(Columna 4, tabla II) La investigadora asigna el criterio Fenomenología a la justificación del sujeto, debido a la referencia a los errores en la medición y a la utilización de un procedimiento geométrico como ‘fenómeno’ que permite resolver la cuestión planteada. Codificación: **f**.

(Columna 5, tabla II) El sujeto no declara la existencia de dificultad o conflicto en la realización de la tarea propuesta en 1d). Codificación: **No**.

(Columna 6, tabla II) La investigadora no observa ninguna inconsistencia en la respuesta del sujeto al ítem 1d). Codificación: **0**.

Ítem 2a)

(Columna 10, tabla I) El sujeto representa el número $\sqrt{5}$ mediante la aplicación del teorema de Pitágoras. Codificación: **Pitágoras**.

(Columna 11, tabla I) La representación realizada es correcta. Codificación: **00**.

Ítem 2b)

(Columna 12, tabla I) No se observa ningún tipo de error en la descripción del procedimiento de representación. Codificación: **00.**

Ítem 2c)

(Columna 13, tabla I) El sujeto responde de forma ambigua a la pregunta de si es exacta la representación obtenida en 1ª. Codificación: **2**.

(Columna 14, tabla I) El sujeto afirma que la justificación de su respuesta al ítem 2c es similar a la dada en el ítem 1c. Codificación: **Ídem 1c.**

(Columna 15, tabla I) Los criterios asignados coinciden por lo tanto con los asignados a la justificación dada en el ítem 1c. Codificación: **i**.

(Columna 16, tabla I) El sujeto no declara la existencia de dificultad o conflicto en lo realizado hasta ese momento. Codificación: **No**.

(Columna 17, tabla I) La investigadora no observa inconsistencias en la respuesta al ítem 2c). Codificación: **0**.

Ítem 2d)

(Columna 7, tabla II) El sujeto responde afirmativamente a la pregunta de si es posible dividir exactamente por la mitad un segmento de longitud igual a $\sqrt{5}$ unidades, obtenido en 2a). Codificación: **0**.

(Columna 8, tabla II) Para justificar su respuesta, el sujeto hace referencia al trazado de la mediatriz. Codificación: **mediatriz**.

(Columna 9, tabla II) La investigadora interpreta que la justificación del sujeto corresponde al criterio Fenomenología, puesto que el procedimiento geométrico se considera como un fenómeno que permite resolver la tarea planteada. Codificación: **f**.

(Columna 10, tabla II) El sujeto no declara la existencia de dificultad o conflicto en la realización de la tarea propuesta en 2d). Codificación: **No**.

(Columna 11, tabla II) La investigadora no observa ninguna inconsistencia en la respuesta del sujeto al ítem 2d). Codificación: **0**.

6.2.2.3.3. Tercer ejemplo

(Columna 1, tabla I) Sujeto 355.

Ítem 1a)

(Columna 2, tabla I) El sujeto representa el número 0’33333... mediante la aplicación del teorema de Tales (divide la unidad en tres partes). Codificación: **Tales1 (3)**.

(Columna 3, tabla I) La representación realizada es correcta. Codificación: **00**.

Ítem 1b)

(Columna 4, tabla I) No se observa ningún tipo de error en la descripción del procedimiento de representación. Codificación: **00**.

Ítem 1c)

(Columna 5, tabla I) El sujeto responde de forma ambigua a la pregunta de si es exacta la representación obtenida en 1a. Codificación: **2**.

(Columna 6, tabla I) En la justificación de su valoración, afirma por un lado que el número 0’33333... es irracional y tiene infinitas cifras decimales. Por otro lado, sostiene que desde un punto de vista teórico la representación es exacta. Codificación: **Irrac., inf decim; teóricam exac**.

(Columna 7, tabla I) La investigadora interpreta que la justificación de la valoración de la exactitud corresponde a los criterios Tipo de número (pues afirma erróneamente que se trata de un número irracional), Representaciones (por la referencia a las infinitas cifras decimales de la escritura decimal) y Fenomenología (debido a que considera que la representación es exacta desde un punto de vista teórico). Codificación: **n**.

(Columna 8, tabla I) El sujeto no declara la existencia de dificultad o conflicto en lo realizado hasta ese momento. Codificación: **No**.
(Columna 9, tabla I) La justificación de la valoración de la exactitud es considerada incorrecta por la investigadora, debido a las afirmaciones relacionadas con el tipo de número y con las infinitas cifras decimales del número. Aunque sea correcto valorar la exactitud de la representación desde puntos de vista diferentes, la consideración de que la representación no es exacta por tratarse de un número perteneciente a un conjunto numérico dado, o por la infinitud de sus cifras decimales no es adecuada. Este sujeto utiliza un procedimiento de representación apoyado en una propiedad geométrica, y la exactitud del resultado obtenido no difiere mucho de la que podría tener la representación de cualquier número que admita una escritura decimal finita, mediante el mismo método. En suma, la infinitud de las cifras decimales, en este caso, es irrelevante. Codificación: **1**.

Ítem 1d)

(Columna 2, tabla II) El sujeto responde de forma ambigua a la pregunta de si es posible dividir exactamente por la mitad un segmento de longitud igual a 0’33333... unidades, obtenido en 1a). Codificación: **2.**
(Columna 3, tabla II) Por un lado, considera que mediante el trazado de la mediatriz es posible dividir por la mitad el segmento obtenido; por otro lado, afirma que es difícil realizar exactamente esa tarea. Codificación: **Mediatriz, difícil exac.**
(Columna 4, tabla II) La investigadora asigna el criterio Fenomenología a la justificación dada por el sujeto en el ítem 1d, porque considera el trazado de la mediatriz como un ‘fenómeno’ geométrico que le permite dividir el segmento por la mitad. Además, realiza consideraciones relacionadas con las dificultades de realizar concretamente esa tarea. Codificación: **f.**
(Columna 5, tabla II) El sujeto no declara la existencia de dificultad o conflicto en la realización de la tarea propuesta en 1d). Codificación: **No**.
(Columna 6, tabla II) La investigadora no observa ninguna inconsistencia en la respuesta del sujeto al ítem 1d). Codificación: **0**.

Ítem 2a)

(Columna 10, tabla I) El sujeto representa el número 0’24 mediante la división del segmento [0,6] en 25 partes iguales. Codificación: **Tales1[0,6] (25)**.
(Columna 11, tabla I) La representación realizada es correcta. Codificación: **00**.

Ítem 2b)

(Columna 12, tabla I) No se observa ningún tipo de error en la descripción del procedimiento de representación. Codificación: **00**.

Ítem 2c)

(Columna 13, tabla I) La respuesta del sujeto es igual a la dada en el ítem 1c. **2**.

(Columna 14, tabla I) Afirma que la respuesta es análoga a la dada en el ítem 1. En este caso, afirma que el número 0’24 es racional y no irracional. Codificación: **Análogo 1, excepto irrac; racional**.

(Columna 15, tabla I) La investigadora interpreta que la justificación de la valoración de la exactitud corresponde a los criterios Tipo de número (pues afirma que se trata de un número racional), y Fenomenología (debido a que considera que la representación es exacta desde un punto de vista teórico). Aunque el sujeto afirme que la respuesta es análoga a la de 1c, no se considera la afirmación realizada en 1c respecto de la infinitud de las cifras decimales, puesto que el número 0’24 tiene un número finito de cifras decimales. Codificación: **e**.

(Columna 16, tabla I) El sujeto no declara la existencia de dificultad o conflicto en lo realizado hasta ese momento. Codificación: **No**.

(Columna 17, tabla I) La investigadora no observa ninguna inconsistencia en la respuesta al ítem 2c). Codificación: **0**.

Ítem 2d)

(Columnas 7 y 8, tabla II) El sujeto afirma que la respuesta al ítem 2d) es análoga a la del ítem 1d. Codificación: **2** y **Análogo al ítem 1**.

(Columna 9, tabla II) La investigadora asigna el criterio asignado en 1d. Codificación: **f.**

(Columna 10, ítem II) El sujeto no declara la existencia de dificultad o conflicto en la realización de la tarea propuesta en 2d). Codificación: **No**.

(Columna 11, ítem II) La investigadora no observa inconsistencia en la respuesta del sujeto al ítem 2d). Codificación: **0**.

6.2.3. Estudio de las afirmaciones inconsistentes observadas

6.2.3.1. Introducción

En el apartado anterior se ha descrito la organización de las respuestas de los sujetos a los ítems 1 y 2 mediante una serie de tablas que resumen el desempeño global y la valoración por parte de la investigadora de ese desempeño.

Este apartado lo dedicaremos al estudio de las tablas construidas, que estará centrado en el análisis de las afirmaciones inconsistentes o inadecuadas detectadas por la investigadora en las columnas 9 y 17 de la tabla de Valoración I y 6 y 11 de la tabla de Valoración II.

Razones para centrar el análisis de las respuestas en las afirmaciones inconsistentes:

El problema de investigación es la detección y caracterización de obstáculos epistemológicos de la representación de los números reales en la recta. El obstáculo epistemológico se detecta, según nuestra interpretación de Bachelard (1988; p.15), en el estudio de [...] “las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia [...]”.

No nos parece posible observar "directamente" la presencia o ausencia de obstáculos epistemológicos en un sujeto determinado, pero sí es posible observar en el sujeto dificultades ante determinadas situaciones, que obstaculizan el tratamiento adecuado de los conceptos implicados. Para llegar, en su caso, a los obstáculos epistemológicos, hemos optado por una estrategia en dos tiempos. En un primer momento, nos ocupamos de detectar conflictos que puedan suscitarse en actividades concretas de representación de un número en la recta. Debidamente confirmados, esos conflictos, en un segundo momento procuraremos interpretarlos en términos de obstáculos epistemológicos.

Durante las entrevistas exploratorias se han detectado dos conflictos en los sujetos. El cuestionario ha sido construido con la intención de detectar afirmaciones relacionadas con esos conflictos, sin cerrar la posibilidad de observar otras dificultades que no hayan sido percibidas durante las entrevistas.

A partir del estudio de las respuestas de los sujetos al cuestionario, se espera seleccionar algunos para realizar entrevistas en profundidad. Esta selección estará en función del estudio de las dificultades detectadas, que se realizará a partir de tres aproximaciones diferentes. En 6.2.3.2 a 6.2.3.4 describimos dichas aproximaciones.

6.2.3.2. Primera aproximación: la constatación de afirmaciones inconsistentes

En primer lugar, realizamos una selección de sujetos en función de la presencia de inconsistencias desde el punto de vista matemático. En las tablas de Valoración del Desempeño I y II, observamos algunas columnas en las que se incluyen conflictos reconocidos por los sujetos, y otras en las que se incluyen las inconsistencias observadas por la investigadora.

Construimos la tabla 6.1, que incluye a todos los sujetos que presentan algún conflicto reconocido por él mismo u una inconsistencia observada por la investigadora (en las actividades de representación en la recta y de división por la mitad de un segmento).

Las columnas de la tabla 6.1 incluyen el código que identifica a cada sujeto y las columnas de las tablas de Valoración del Desempeño correspondientes a conflictos reconocidos por el sujeto y a inconsistencias observadas por la investigadora.

En la tabla 6.1 observamos que algunos conflictos declarados por el sujeto, están cubiertos por las inconsistencias observadas por la investigadora (columnas 10 y 11 correspondientes al sujeto 814; columnas 10 y 11 correspondientes al sujeto 142; columnas 5 y 6, 10 y 11 correspondientes al sujeto 242).

En cambio, en otros casos (columnas 3 y 4 correspondientes al sujeto 721; columnas 8 y 9 correspondiente al sujeto 134; columnas 8 y 9 correspondientes al sujeto 731) observamos que existen conflictos declarados por parte del sujeto que no son observados por la investigadora. Estudiando en detalle estos tres casos, comprobamos que se trata de sujetos que afirman no estar seguros de la respuesta o de que lo realizado sea correcto. El sujeto 134 afirma que no es capaz de marcar exactamente el punto pedido. En los tres casos, los sujetos muestran inseguridad respecto de lo realizado (y por eso se considera que existe un conflicto declarado en cada caso), pero no proporcionan información que permita elaborar conjeturas o enunciar el posible conflicto. Debido a que nos interesan conflictos más definidos, el sujeto 134 se elimina de la tabla, y los dos restantes permanecen, porque presentan en otras respuestas inconsistencias que han sido observadas por la investigadora.

Sujeto	Primer número					Segundo número				
	Número	Representación		División Mitad		Número	Representación		División Mitad	
		C.R.A	I.O.I.	C.R.A	I.O.I.		C.R.A	I.O.I.	C.R.A	I.O.I.
111	5/8	No	0	No	0	0'33333...	No	1	No	1
114		No	0	No	0		No	1	No	1
115		No	0	No	0		No	1	No	0
711		No	0	No	0		No	1	No	1
713		No	0	No	0		No	0	No	1
714		No	0	No	0		No	0	No	1
715		No	0	No	0		No	1	No	1
211		No	0	No	0		No	1	No	0
215		No	0	No	0		No	1	No	1
814		No	0	No	0		No	1	Sí	1
315		No	0	No	0		No	0	No	1
121	1'414213...	No	1	No	1	5/8	No	0	No	0
122		No	0	No	1		No	0	No	0
123		No	1	No	1		No	0	No	0
124		No	0	No	0		No	0	No	1
125		No	0	No	1		No	0	No	1
721		Sí	0	No	1		No	0	No	1
722		No	0	No	1		No	0	No	1
723		No	1	No	1		No	0	No	0
221		No	0	No	1		No	0	No	0
222		No	0	No	1		No	0	No	0
224		No	0	No	1		No	0	No	0
823		No	1	No	1		No	0	No	0
824		No	0	No	1		No	0	No	1
825		No	0	No	0		No	1	No	0
322		No	0	No	0		No	1	No	0
324		No	1	No	1		No	0	No	0
325		No	1	No	1		No	0	No	0
131	√5	No	0	No	0	0'33333...	No	0	No	1
132		No	1	No	0		No	1	No	0
133		Sí	1	No	1		Sí	1	No	1
134		No	0	No	0		Sí	0	No	0
135		No	0	No	1		No	0	No	1
731		No	0	No	1		Sí	0	No	1
732		No	0	No	1		No	0	No	0
733		No	0	No	1		No	0	No	1
734		No	0	No	1		No	0	No	1
735		No	0	No	1		No	1	No	1
231		No	0	No	1		No	1	No	1
232		No	1	No	0		No	0	No	0
234		No	0	No	1		No	1	No	1
235		No	1	No	0		No	0	No	0
834		No	0	No	0		No	1	No	0
835		No	0	No	1		No	0	No	0
331		No	0	No	0		No	0	No	1
334		No	1	No	0		No	1	No	0

Tabla 6.1: Sujeto con conflictos reconocidos o con inconsistencias

Sujeto	Primer número					Segundo número				
	Número	Representación		División Mitad		Número	Representación		División Mitad	
		C.R.A	I.O.I.	C.R.A	I.O.I.		C.R.A	I.O.I.	C.R.A	I.O.I.
141	1'41421...	No	0	No	1	√5	No	0	No	1
142		No	0	No	1		No	0	Sí	1
143		No	0	No	1		No	0	No	1
145		No	1	No	0		No	0	No	0
741		No	0	No	1		No	0	No	1
742		No	1	No	1		No	0	No	1
743		No	1	No	1		No	1	No	1
744		No	1	No	1		No	1	No	1
745		No	0	No	1		No	0	No	1
241		No	0	No	1		No	0	No	1
242		No	0	Sí	1		No	1	Sí	1
243		No	0	No	1		No	0	No	1
245		No	0	No	1		No	0	No	1
842		No	1	No	0		No	0	No	0
843		No	1	No	1		No	1	No	1
844		No	1	No	1		No	1	No	0
845		No	0	No	1		No	0	No	1
341		No	1	No	1		No	0	No	0
342		No	1	No	1		No	1	No	1
151	0'33333...	No	1	No	0	0'24	No	0	No	0
152		No	1	No	1		No	0	No	0
153		No	1	No	1		No	0	No	0
154		No	1	No	0		No	0	No	0
155		No	0	No	1		No	0	No	0
751		No	1	No	1		No	0	No	1
752		No	1	No	1		No	0	No	0
753		No	0	No	1		No	0	No	0
755		No	1	No	1		No	0	No	0
253		No	1	No	1		No	0	No	0
255		No	1	No	1		No	0	No	0
852		No	0	No	0		No	1	No	0
853		No	0	No	0		No	1	No	0
351		No	0	No	0		No	1	No	0
352		No	1	No	0		No	0	No	0
353		No	1	No	0		No	0	No	0
354		No	0	No	0		No	1	No	0
355		No	1	No	0		No	0	No	0

Continuación tabla 6.1: Sujetos con conflictos reconocidos o con inconsistencias

6.2.3.3. Segunda aproximación: adecuada representación en la recta de los números pedidos

En esta investigación estamos interesados en detectar conflictos que se manifiestan al reflexionar acerca de la asignación concreta de un número dado a un punto de una recta, dados un origen y una unidad. No negamos el interés de estudiar una dificultad surgida durante la determinación de la marca que corresponde a un número dado, como por ejemplo la aplicación errónea de un determinado procedimiento de representación, o el olvido (casual o no), de la identificación de un adecuado sistema de referencia que garantice la biyección entre números reales y puntos de la recta. Sin embargo, en esta investigación consideramos que ese tipo de errores perturba la identificación de conflictos que podrían surgir en una reflexión posterior respecto de la asignación número / punto efectuada.

Por esta razón deseamos considerar aquellos sujetos que exhiben un desempeño correcto, salvo ligeras imprecisiones, en las tareas relacionadas con la actividad concreta de realizar la marca correspondiente a un número determinado (ítems 1a, 1b, 2a y 2b del cuestionario) y en los que se observan afirmaciones inconsistentes en las actividades de valoración de la exactitud de una representación (ítems 1c y 2c del cuestionario) y de valoración de la posibilidad de dividir por la mitad un segmento de longitud dada. Las imprecisiones se admiten porque es posible que un discurso o procedimiento correcto se apoye sobre un dibujo o una representación imprecisa. Ello incluso podría observarse en el desempeño de un matemático.

En el anexo 9 se ha realizado una clasificación de los errores observados en las tareas de representación de números en la recta (tabla A.9.1) y de la explicación del procedimiento empleado para esa representación (tabla A.9.2). Una representación es calificada, según nuestra clasificación, como Correcta, Imprecisa, Incompleta, Errónea, Ausente ó Combinación de las anteriores.

Asimismo, una explicación es calificada, según nuestra clasificación, como Correcta, Imprecisa, Errónea, Desajustada con la construcción, Otra sin calificar, Ausente ó Combinación de las anteriores.

A partir de esta clasificación, construimos una nueva tabla (tabla 6.2) que contiene a los sujetos en los que se observan afirmaciones inconsistentes, y que exhiben un desempeño correcto, o con ligeras imprecisiones, en la actividad de representación de un número en la recta. Ello supone seleccionar los sujetos que presentan en las columnas 3 y 11 de la tabla de Valoración del Desempeño I algunos de los siguientes valores: “00”, “21”, “22”, “23” ó “24”; y en las columnas 4 y 12 algunos de estos otros: “00”, “10” hasta “19”.

Sujeto	Número	Representación		División Mitad		Número	Representación		División Mitad	
		C.R.A	I.O.I.	C.R.A	I.O.I.		C.R.A	I.O.I.	C.R.A	I.O.I.
114	5/8	No	0	No	0	0’3333...	No	1	No	1
711		No	0	No	0		No	1	No	1
713		No	0	No	0		No	0	No	1
714		No	0	No	0		No	0	No	1
215		No	0	No	0		No	1	No	1
814		No	0	No	0		No	1	Sí	1
315		No	0	No	0		No	0	No	1
121	1’41421...	No	1	No	1	5/8	No	0	No	0
122		No	0	No	1		No	0	No	0
123		No	1	No	1		No	0	No	0
125		No	0	No	1		No	0	No	1
721		Sí	0	No	1		No	0	No	1
722		No	0	No	1		No	0	No	1
723		No	1	No	1		No	0	No	0
222		No	0	No	1		No	0	No	0
823		No	1	No	1		No	0	No	0
322		No	0	No	0		No	1	No	0
324		No	1	No	1		No	0	No	0
325		No	1	No	1		No	0	No	0
131	√5	No	0	No	0	0’333	No	0	No	1
135		No	0	No	1		No	0	No	1
731		No	0	No	1		Sí	0	No	1
732		No	0	No	1		No	0	No	0
733		No	0	No	1		No	0	No	1
734		No	0	No	1		No	0	No	1
232		No	1	No	0		No	0	No	0
234		No	0	No	1		No	1	No	1
235		No	1	No	0		No	0	No	0
835		No	0	No	1		No	0	No	0
331		No	0	No	0		No	0	No	1
334		No	1	No	0		No	1	No	0
141	1’41421...	No	0	No	1	√5	No	0	No	1
142		No	0	No	1		No	0	Sí	1
741		No	0	No	1		No	0	No	1
742		No	1	No	1		No	0	No	1
744		No	1	No	1		No	1	No	1
745		No	0	No	1		No	0	No	1
241		No	0	No	1		No	0	No	1
243		No	0	No	1		No	0	No	1
245		No	0	No	1		No	0	No	1
341		No	1	No	1		No	0	No	0
155	0’33333...	No	0	No	1	0’24	No	0	No	0
753		No	0	No	1		No	0	No	0
755		No	1	No	1		No	0	No	0
253		No	1	No	1		No	0	No	0
255		No	1	No	1		No	0	No	0
352		No	1	No	0		No	0	No	0
355		No	1	No	0		No	0	No	0

Tabla 6.2: Sujetos con afirmaciones inconsistentes y con representaciones correctas (salvo ligeras imprecisiones)

6.2.3.4. Tercera aproximación: Conflictos pertinentes para esta investigación

Durante las entrevistas exploratorias realizadas, se detectaron algunos conflictos en el desempeño de los sujetos, que fueron clasificados en:

1. conflictos relacionados con el control de los procesos infinitos, y
2. conflictos surgidos de la relación entre los resultados matemático y los objetos del mundo físico sobre los que se aplican estos resultados.

Estos conflictos han guiado la selección de cuestiones a incluir en los ítems del cuestionario. Este instrumento ha sido especialmente diseñado para estudiar la posible manifestación de afirmaciones relacionadas con estos conflictos detectados durante las entrevistas exploratorias.

A partir de la tabla 6.2, resultante de escoger los sujetos con inconsistencias en los que se observa un desempeño correcto salvo ligeras imprecisiones, se realiza un nueva selección, esta vez analizando en particular cada afirmación inconsistente observada. El objetivo es escoger aquellos sujetos que manifiesten afirmaciones relacionadas con alguno de los dos conflictos detectados durante las entrevistas exploratorias, que son considerados conflictos pertinentes para esta investigación.

Las afirmaciones inconsistentes que no están relacionadas con los dos señalados son considerados no pertinentes para esta investigación. Se trata de dificultades que provienen de errores observados en alguna respuesta del sujeto a los incisos c) y d) de los ítems 1 y 2, pero que no se estudiarán en profundidad en nuestra investigación

6.2.3.4.1. Criterios de decisión (CD1 y CD2). Su aplicación.

A continuación analizamos las afirmaciones inconsistentes de los sujetos considerados en la tabla 6.2, para determinar si resultan o no pertinentes para esta investigación. Un primer nivel de decisión se refiere a los logros de los sujetos. A este respecto enunciamos dos criterios de decisión que son válidos para las afirmaciones inconsistentes mencionadas:

CD1- La frase del sujeto permite explícitamente o por interpretación, reconocer una relación con, al menos, uno de los dos conflictos mencionados.

CD2- Se observa coherencia entre la respuesta y la explicación.

En los incisos c) y d) el sujeto debía dar una respuesta afirmativa o negativa respecto de dos cuestiones: exactitud de la representación obtenida y posibilidad de dividir por la mitad un segmento de longitud dada. Posteriormente, y en cada caso, el sujeto debería justificar esa afirmación o negación. Nos imponemos reconocer que hay coherencia entre ambas partes de la respuesta.

A partir de los dos criterios de decisión mencionados construimos la tabla 6.3, donde analizamos las afirmaciones inconsistentes de los sujetos de la tabla

6.2. Para cada respuesta, determinamos si se cumplen o no los criterios de decisión CD1 ó CD2. Si se satisfacen ambos, el sujeto permanece en la lista de sujetos con afirmaciones pertinentes para la investigación, y si al menos uno de los dos criterios no se satisface, el sujeto se excluye de la lista. El criterio de selección que satisfacen los sujetos que se excluyen es: no CD1 ó no CD2.

Sujeto	Número	Tarea	Método represen.	CD1	CD2	Decisión
114	0'333...	Val. exac. repr.	D.U.2 (5)	Sí	Sí	Aceptado
114		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
711	0'333...	Val. exac. repr.	D.U.1(9)	Sí	Sí	Aceptado
711		Div. mitad		No	-	Rechazado
713	0'333...	Div. mitad	Tales (9)	Sí	No	Rechazado
714	0'333...	Div. mitad	D.U.1 (3)	Sí	No	Rechazado
215	0'333...	Val. exac. repr.	D.U. 2 (10) 2v	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
814	0'333...	Val. exac. repr.	Regla graduada	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
315	0'333...	Div. mitad	Regla graduada	No	-	Rechazado
121	1'414...	Val. exac. repr.	Regla graduada	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
122	1'414...	Div. mitad	Regla gra	No	-	Rechazado
123	1'414...	Val. exac. repr.	D.U.2 (10)	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
125	1'414...	Div. mitad	Pitágoras	Sí	Sí	Aceptado
	5/8	Div. mitad	D.U.1 (8)	No	-	Rechazado
721	1'414...	Div. mitad	Tales (10)	No	-	Rechazado
	5/8	Div. mitad	Tales (8)	No	-	Rechazado
722	1'414...	Div. mitad	Tales (10)	No	-	Rechazado
	5/8	Div. mitad	Tales (8)	No	-	Rechazado
723	1'414...	Val. exac. repr.	Pitágoras	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
222	1'414...	Div. mitad	Pitágoras	Sí	Sí	Aceptado
823	1'414...	Val. exac. repr.	Med/ D.U.2(5)	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		No	-	Rechazado
322	5/8	Val. exac. repr.	Regla gra	Sí	Sí	Aceptado
324	1'414...	Val. exac. repr.	Regla graduada	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
325	1'414...	Val. exac. repr.	Regla graduada	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
131	0'333...	Div. mitad	D.U.(2)2v	Sí	Sí	Aceptado
135	$\sqrt{5}$	Div. mitad	D.U.2 (10)	Sí	Sí	Aceptado
	0'333...	Div. mitad	D.U2(10)	Sí	Sí	Aceptado
731	$\sqrt{5}$	Div. mitad	Pitágoras	Sí	Sí	Aceptado
	0'333...	Div. mitad	Tales(3)	Sí	Sí	Aceptado
732	$\sqrt{5}$	Div. mitad	Pitágoras	Sí	Sí	Aceptado

Tabla 6.3: Análisis de las respuestas según los criterios de decisión CD1 y CD2

Sujeto	Número	Tarea	Método represen.	CD1	CD2	Decisión
733	√5	Div. mitad	Pitágoras	Sí	Sí	Aceptado
	0’333...	Div. mitad	Tales (3)	Sí	Sí	Aceptado
734	√5	Div. mitad	Pitágoras	No	-	Rechazado
	0’333...	Div. mitad	D.U.1(3)	No	-	Rechazado
232	√5	Val. exac. rep.	D.U.2(10)	Sí	Sí	Aceptado
234	√5	Div. mitad	Pitágoras	Sí	Sí	Aceptado
	0’333...	Val. exac. repr.	Tales (3)	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
235	√5	Val. exac. repr.	Tales2 (4)	Sí	Sí	Aceptado
835	√5	Div. mitad	Regla gra	No	-	Rechazado
331	0’333...	Div. mitad	D.U.2(10)	No	-	Rechazado
334	√5	Val. exac. repr.	Regla gra	Sí	Sí	Aceptado
	0’333...	Val. exac. repr.	Tanteo	Sí	Sí	Aceptado
141	1’414...	Div. mitad	D.U.	No	-	Rechazado
	√5	Div. mitad	Regla gra	No	-	Rechazado
142	1’414...	Div. mitad	Regla gra	No	-	Rechazado
	√5	Div. mitad	Regla gra	No	-	Rechazado
741	1’414...	Div. mitad	Tales2	No	-	Rechazado
	√5	Div. mitad	Tales2	No	-	Rechazado
742	1’414...	Val. exac. repr.	Med/ Tales2	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
	√5	Div. mitad	Tales2	Sí	Sí	Aceptado
744	1’414...	Val. exac. repr.	D.U. (10)	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
	√5	Val. exac. repr.	D.U. (10)	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
745	1’414...	Div. mitad	Pitágoras	No	-	Rechazado
	√5	Div. mitad	Pitágoras	No	-	Rechazado
241	1’414...	Div. mitad	D.U.2(10)	No	-	Rechazado
	√5	Div. mitad	D.U.2(10)	No	-	Rechazado
243	1’414...	Div. mitad	Tales	No	-	Rechazado
	√5	Div. mitad	Pitágoras	No	-	Rechazado
245	1’414...	Div. mitad	Med/Tales	No	-	Rechazado
	√5	Div. mitad	Tales	No	-	Rechazado
341	1’414...	Val. exac. repr.	Mediatriz	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
155	0’333...	Div. mitad	D.U. (3)	Sí	Sí	Aceptado
753	0’333...	Div. mitad	Tales	Sí	Sí	Aceptado
755	0’333...	Val. exac. repr.	Tales	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
253	0’333...	Val. exac. repr.	Tales	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
255	0’333...	Val. exac. repr.	D.U.(3)	Sí	Sí	Aceptado
		Div. mitad		Sí	Sí	Aceptado
352	0’333...	Val. exac. repr.	Tales	Sí	Sí	Aceptado
355	0’333...	Val. exac. repr.	Tales	Sí	Sí	Aceptado

Continuación tabla 6.3: Análisis de las respuestas según los criterios de decisión CD1 y CD2

En las tablas 6.4 y 6.5 incluimos las respuestas textuales que, según nuestra opinión, no satisfacen los criterios CD1 y CD2 respectivamente . En cada tabla se incluye el código del sujeto, la tarea en que se observa la respuesta conflictiva (R: Representación en la recta; D. División del segmento), el número representado y la respuesta del alumno. Posteriormente, realizamos una discusión de cada respuesta rechazada, justificando en cada caso por qué la respuesta no satisface el criterio de decisión correspondiente.

Suj	T	Nº	Respuesta sin afirmación inconsistente pertinente (no satisface CD1)
711	D	0’3...	“Se podría hacer por medio de procedimientos de dibujo aunque sería muy inexacto ya que la fracción generatriz dividida por 2 saldría con decimales (exactos) tanto el numerador como el denominador”.
315	D	0’3...	“Creo que no ya que nunca daría exactamente con tal punto sino con uno muy cercano a él”.
122	D	1’4...	“Es muy difícil ya que estamos tratando con muchos decimales. Para representarlo también es muy difícil y necesitamos unidades muy pequeñas. Así por así la mitad de 1’4142136.. = 0’7071068”
125	D	5/8	“No porque no hay números entre 5/8.”
721	D	1’4...	“Sí es posible ya que hemos dividido el segmento en 10 partes. Cogemos 5 y ya tenemos el segmento dividido por la mitad.”
721	D	5/8	“Sí es posible dividirlo por la mitad ya que lo he dividido en 8 partes. Cojo 4 y ya tengo la mitad.”
722	D	1’4...	“Sí ya que lo he dividido en 10 partes, pues la mitad serían 5 partes.”
722	D	5/8	“Sí, cogiendo y dividiendo igual que antes, cogiendo el punto 4/8.”
823	D	1’4...	“No es posible, ya que es imposible hallar el segmento igual a 1’41421... de forma exacta tampoco es posible sacar la mitad.”
734	D	√5	“Creo que no, porque la mitad es un número decimal que no se puede representar exactamente con la regla en centímetros (milímetros).”
734	D	0’3...	“No, porque no es un número exacto para poder representarlo bien en la recta.”
835	D	√5	“Medimos el segmento y la mitad de la √5 es la √(2’5), por tanto dividiremos el segmento justo por donde estuviera la √(2’5)”
331	D	0’3...	“No. Porque nunca sabré lo que mide exactamente 0’33~~33~~. Si yo dividiera ese segmento en dos partes, siempre una sería mayor que la otra.”
141	D	1’4...	“Sí. Yo creo que como es divisible por dos al terminar en cifra par, lo divides y te sale: 0’7071068 que es la mitad de 1’4142136.”
141	D	√5	“Sí. Todo número se puede dividir exactamente por la mitad.”
142	D	1’4...	“Sí, tendríamos que usar una hoja de papel milimetrado para ser exactos en las divisiones. Yo haría una línea de lado a lado del folio y pondría la marca 1 y 2 y mediría con los cuadros para ponerlo justo por la mitad. Ejemplo: (dibuja lo indicado)”
142	D	√5	“Sí, pero no sé exactamente cómo hacerlo con una raíz.”
741	D	1’4...	“No, porque el número que hallas no es totalmente el número 1’4142136, (√2), sino una apreciación. Y la mitad del número apreciado no sería la mitad del número verdadero.”
741	D	√5	“No, porque si no puedes apreciar el número exacto (el 2,236067977, las centésimas, las milésimas, ...) no puedes hallar la mitad.”
745	D	1’4...	“$\sqrt{2}/2 \rightarrow (\sqrt{2}/2)^2 = 2/2^2 = 2/4 = 0'5 \rightarrow$ No tiene lógica. No es válido. Al ser un nº Q’, el dividirlo por la mitad tendríamos que hacerlo con límite decimal. El infinito es inaccesible. Puede expresarse, no realizarse.”

Tabla 6.4: Respuestas que no satisfacen CD1

Suj	T	Nº	Respuesta sin afirmación inconsistente pertinente (no satisface CD1)
745	D	√5	$\sqrt{5}/2 \rightarrow (\sqrt{5}/2)^2 = 5/4 = 1'25$ $\sqrt{5}/2 = 2'2360679... /2 = 1'1180339...$ Puede expresarse correctamente, pero no realizarse √5/2
241	D	1'4...	"Haciendo una mediatriz desde el 1 a 1'41." (acompaña gráfico)
241	D	√5	"Haciendo una mediatriz desde el 2 al 2'23." (acompaña gráfico)
243	D	1'4...	"El segmento hallado se podría dividir por la mitad pero no el segmento de longitud igual a 1'4142136... y puesto que no es posible hallarlo, pero aún en el caso de que lo fuera, sería una tarea casi imposible, puesto que no siquiera conocemos los decimales (todos). De todas maneras es una locura tratar de hacerle la mediatriz a algo tan pequeño."
243	D	√5	"Por las mismas razones que en el segmento de medida 1'41... (El no poder representarlo) tampoco podríamos buscar la mediatriz exacta."
245	D	1'4...	"Una vez hallado el punto exacto del punto 1'4142136 sí es posible calcular el punto medio mediante una mediatriz, sin embargo al no ser un número exacto es muy complicado, ya que podemos observar que todavía hay más decimales que no se han puesto en el número."
245	D	√5	"Ocurre lo mismo que en el caso anterior, si obtuviéramos el punto exacto donde se encuentra √5, sí se podría hallar el punto medio gracias a la mediatriz de un segmento, sin embargo, al no ser √5 un número exacto es muy complicado hallar su posición, y por tanto su punto medio exacto."

Continuación tabla 6.4: Respuestas que no satisfacen CD1

Discusión tabla 6.4: Sujetos con inconsistencias / dificultades no pertinentes para esta investigación:

Sujetos 315, 823, 331, 741, 243 y 245: En estos sujetos se puede observar una idea común. En sus respuestas al ítem 1c ó 2c manifiestan que no es posible representar exactamente el número pedido (porque desconocen o quizá no recuerdan el procedimiento de construcción). Como consecuencia, cuando deben decidir si es posible dividir exactamente por la mitad el segmento obtenido en la representación, afirman que no pueden hacerlo, porque no han conseguido el segmento exactamente. Se considera esta apreciación no pertinente para la investigación, porque la dificultad radica en que estos sujetos no reconocen la constructibilidad del número en cada caso.

El sujeto 823 no es excluido de la lista porque presenta en otra respuesta una afirmación pertinente para la investigación.

Sujeto 711: Interpretamos que este sujeto considera que para dividir la "fracción generatriz" entre 2 es necesario dividir numerador y denominador de la fracción 3/9 (obtenida por el sujeto en el ítem 2a) entre 2, lo que constituye un error. El sujeto no se descarta porque observamos una afirmación pertinente para la investigación en la respuesta 2c. Sin embargo, el conflicto correspondiente a la tarea de división por la mitad del segmento de longitud igual a 0'333... unidades se señala con un código diferente, para distinguirlo de las afirmaciones pertinentes para la investigación.

Sujeto 122: Se considera incorrecta (I) la justificación dada en 1. La mención a la necesidad de 'unidades muy pequeñas' se considera no pertinente para esta investigación. Una interpretación posible es que el sujeto considera que para representar el número 1'4142136... es necesario realizar subdivisiones de la unidad, y dado que "se está tratando con muchos decimales", se precisan muchas divisiones de la unidad. Esto último supondría la necesidad de unidades 'muy grandes', y el sujeto manifiesta lo contrario. Las partes en las que se subdividiría esta unidad, serían 'muy pequeñas'.

La falta de pertinencia de la frase del sujeto posiblemente esté relacionada con una imprecisión del lenguaje, y no con una dificultad más seria. No obstante, esta imprecisión se considera no pertinente para la investigación, y por ello el sujeto se excluye de la lista de sujetos con respuestas conflictivas.

Sujeto 125: Debido a que presenta una afirmación pertinente para esta investigación en la justificación dada en el ítem 1d), este sujeto no se descarta de la lista de sujetos con inconsistencias pertinentes para la investigación. Sin embargo, la justificación formulada por el sujeto en el ítem 2d) (que figura en la tabla 6.4) se considera incoherente y se señalará por esa razón con un código diferente en la tabla final de sujetos seleccionados, para distinguirlo de los conflictos pertinentes para la investigación.

Sujeto 721: Este sujeto no presenta dificultades pertinentes para esta investigación, aunque se observa en los ítems 1d) y 2d) una falta de comprensión de la tarea propuesta. Para representar los números 1'41... y 5/8, aplica el teorema de Tales para dividir la unidad en 10 y 8 partes respectivamente, y señala los puntos, en un caso aproximadamente, y en el otro haciéndolo coincidir con una división de la unidad. El problema se plantea con las respuestas a los ítems 1d) y 2d). El sujeto afirma que como ha dividido la unidad en 10 (y 8 respectivamente) partes, toma en el primer caso 5 de esas diez (4 de esas 8, respectivamente) y así divide por la mitad. Con ese procedimiento obtiene la mitad de la unidad, pero no lo que se pide en la tarea, que es la mitad del segmento de 1'4142... (5/8 respectivamente) unidades. Este sujeto no se incluirá en la lista final de sujetos con inconsistencias pertinentes.

Sujeto 722: Como el sujeto anterior, se observa una respuesta inadecuada en los incisos 1d) y 2d). Este sujeto también sugiere tomar 5 de las 10 partes en que se ha dividido la unidad en 1d), y 4 de 8 partes en 2d). En consecuencia, este sujeto también se excluye de la lista de sujetos con afirmaciones pertinentes.

Sujeto 734: El sujeto afirma en el ítem 1d) que la mitad de $\sqrt{5}$ es un número decimal que no se puede representar exactamente con una regla. Esta afirmación es verdadera, pero no es una respuesta pertinente a la pregunta de si es posible o no dividir exactamente por la mitad el segmento.

En la respuesta al ítem 2d), afirma que no es posible dividir por la mitad el segmento de 0'3333... unidades "porque no es un número exacto para poder representarlo bien en la recta". Esta respuesta resulta poco clara, porque no es posible determinar si el número que no es exacto es 0'3333..., o su mitad. Por otra parte, no es posible obtener información de la respuesta al ítem 2c) (donde se pide valorar la exactitud de la representación obtenida) porque el sujeto no ha contestado ese ítem. Como consecuencia, el sujeto se descarta de la lista.

Sujeto 835: El sujeto afirma que la mitad de √5 es igual a √(2’5), lo que constituye un error. Este sujeto se excluye de la lista de sujetos con inconsistencias pertinentes, pues la dificultad no se relaciona con los dos conflictos que desean estudiarse.

Sujeto 141: El sujeto afirma erróneamente en la justificación dada en el ítem 1d) que el número 1’4142136... es divisible por dos. También es errónea la frase literal utilizada en 2d) (“Todo número se puede dividir exactamente por la mitad”), aunque es probable que el sujeto haya querido manifestar que todo segmento puede dividirse por la mitad. No obstante, descartamos este sujeto de la lista de sujetos con afirmaciones pertinentes para esta investigación.

Sujeto 142: La explicación dada en 1d) se considera no pertinente. El sujeto no responde a la pregunta planteada, dado que en lugar de tomar un segmento de longitud igual a 1’4142136... unidades, como se explica en el enunciado de la pregunta, toma un segmento de longitud igual a 1 unidad.

En el inciso 2d) afirma: “Sí, pero no sé exactamente cómo hacerlo con una raíz.” Esta respuesta se considera también no pertinente. Se descarta el sujeto porque sus respuestas no están directamente ligadas con los conflictos que desean estudiarse.

Sujeto 745: La respuesta 1d) contiene explícitamente la referencia al infinito. Sin embargo, en la primera parte de su respuesta a dicho ítem, se observa un error que se repite posteriormente en la respuesta al ítem 2d). Para hallar la mitad de los números √2 (ítem 1d) y √5 (ítem 2d), divide entre 2 estas raíces, y a continuación eleva al cuadrado el cociente obtenido, lo que lo conduce, después de simplificar, a obtener resultados erróneos. Se observa una dificultad no pertinente para la investigación, relacionada con las propiedades de las operaciones entre números reales. Por esta razón, se excluye el sujeto de la lista.

Sujeto 241: Este sujeto se equivoca en 1d) y 2d) al indicar que dividiría mediante la mediatriz los intervalos [1, 1’41] y [2, 2’23]. Interpreta erróneamente la pregunta realizada, que consiste en determinar si es posible o no dividir por la mitad los intervalos obtenidos, es decir, [0, 1,41...] y [0, √5]. Se excluye de la lista por esa razón.

Discusión tabla 6.5: Falta de coherencia entre la afirmación / negación y su justificación

Sujeto 713: Se observa una inconsistencia considerada no pertinente para esta investigación. La respuesta del sujeto al ítem 2d) es la siguiente: “Se puede ya que un número que tiene infinitas cifras decimales nunca podrá alcanzar el punto exacto”. Consideramos que esta respuesta es ambigua. Por un lado, el sujeto afirma que se puede dividir un segmento de longitud 0’3333... unidades exactamente por la mitad, y sin embargo, cuando justifica esta afirmación, utiliza una explicación que la contradice.

Dado que no es posible discernir de su respuesta la causa de esta incoherencia, consideramos al conflicto que se manifiesta como no pertinente para esta investigación.

Suj	**T**	**Nº**	**Falta de coherencia entre la afirmación ó negación y su justificación (no satisface CD2)**
713	D	0’3...	“Se puede ya que un número que tiene infinitas cifras decimales nunca podrá alcanzar el punto exacto.”
714	D	0’3...	“Se puede ya que un número que tiene infinitas cifras decimales nunca podrá alcanzar el punto exacto.”

Tabla 6.5: Respuestas que no satisfacen CD2

Sujeto 714: Se observa una respuesta idéntica a la del sujeto 713, transcrita anteriormente. Por lo tanto, este sujeto también se excluye.

6.2.3.4.2. Criterios de decisión referidos al conflicto 1 (CD3 y CD4). Su aplicación.

Las respuestas de los sujetos que permanecen después de la selección anterior, están relacionadas con uno de los dos conflictos. El estudio que realizaremos ahora está centrado en la determinación de cuál de los dos conflictos puede reconocerse en cada respuesta.

Cuando la respuesta se relaciona con el conflicto 1 (dificultad para admitir el cierre de un proceso infinito), debemos realizar un estudio más profundo. El conflicto 1 exige tener cuidado con el manejo de las infinitas cifras (cuando el número se presenta en el enunciado mediante su notación decimal infinita, sugerida por los puntos suspensivos). Por eso necesitamos nuevos criterios de decisión para reconocerlo:

CD3- Utilización de más de una escritura simbólica del número

Postulamos que los sujetos que manejan más de una escritura simbólica de un número poseen un mayor dominio conceptual del número en cuestión. Cada uno de los números presentados en el cuestionario es constructible, y la constructibilidad está más relacionada con alguna escritura simbólica que con otra. Por ejemplo, el número $\sqrt{2}$ es constructible. Existe un procedimiento que involucra una propiedad geométrica (el teorema de Pitágoras) que permite representarlo exactamente en la recta (al menos desde un punto de vista ideal). Este procedimiento está estrechamente ligado a la escritura radical cuadrática del número. Si en la escritura decimal infinita no periódica “1’4142136...” un sujeto no reconoce al número $\sqrt{2}$, es muy difícil que recurra al procedimiento geométrico para representarlo en la recta, y es probable que sólo sea capaz de representar una aproximación del número (por ejemplo, el número 1’41).

¿Cómo debemos tratar las respuestas de los sujetos que manejan exclusivamente una representación simbólica infinita (es decir, sin ver la constructibilidad del número dado)? Por una parte, cabe postular que la dificultad observada es pertinente para la investigación si, al valorar la exactitud de la representación, el sujeto justifica la no exactitud apelando expresamente (correctamente e incompletamente) a la infinidad de cifras decimales; pero por otra, al ser esta representación simbólica la única de la que supo / pudo disponer durante la administración del cuestionario, sólo nos sentimos inclinados a conjeturar que se da una limitación "coyuntural", no un conflicto propiamente dicho.

CD4. Referencia explícita a la existencia de infinitas cifras decimales.

El conflicto 1 surge por la dificultad de manejar un número cuya escritura decimal posee infinitas cifras. Consideramos indispensable la referencia a las infinitas cifras decimales. Podremos aceptar que hay otras expresiones que también remiten la existencia de infinitas cifras decimales, como 'número no exacto' y 'número periódico'. Estas últimas expresiones se aceptan porque interpretamos que los sujetos que las utilizan se refieren a que la escritura decimal del número no es exacta o completa (en el sentido de que no se escribe con un número finito de cifras decimales).

A continuación realizamos una nueva selección de sujetos mediante la aplicación de los criterios de decisión CD3 y CD4 enunciados. Para ellos analizamos las respuestas de los sujetos que figuran cono 'aceptados' en la tabla 6.3 y determinamos:

- En primer lugar, si la respuesta del sujeto se vincula con el conflicto del control de las infinitas cifras (conflicto 1) o con la relación entre resultado matemático y objeto del mundo concreto (conflicto 2).
- En segundo lugar, analizamos cada desempeño de los sujetos cuyas respuestas están relacionadas con el conflicto 1, para determinar si se satisfacen o no los criterios de decisión CD3 y CD4.

La designación de los códigos a las respuestas de los sujetos que poseen conflictos (1 ó 2) se realiza según las consideraciones que figuran en la tabla 6.6.

Cuando CD3 y CD4 se cumplen ambos, el sujeto continúa en la lista. Si uno de los dos no se cumple, recurrimos a una nueva condición: si es posible confirmar el conflicto con la respuesta del sujeto al ítem 3, el sujeto permanece en la lista, de lo contrario, se excluye. Si ninguno de los dos criterios de decisión CD3 y CD4 se cumple, el sujeto se excluirá de la lista. El código utilizado en la última columna de las tablas 6.6 y 6.7 es el siguiente: '0': sujeto rechazado; '1': sujeto aceptado.

Conflicto	Consideraciones que rigen la toma de decisiones			Código en tabla 6.7
	¿Satisface CD3? (utilización de más de una escritura simbólica)	¿Satisface CD4? (Referencia explícita a la existencia de infinitas cifras decimales)	¿Es posible confirmar el conflicto con la respuesta al ítem 3?	
1	Sí	Sí	-	1
		No	Sí	1
			No	0
	No	Sí	Sí	1
			No	0
		No	-	0
2	La frase del sujeto se relaciona con el conflicto 2.			1

Tabla 6.6: Código para estudiar las respuestas de los sujetos escogidos

En la tabla 6.7 describimos la selección de respuestas según las condiciones que figuran en la tabla 6.6.

Suj	Número	Tarea	Método represen.	Conflicto	CD3	CD4	¿Se confirma con ítem 3?	Decisión
114	0’333...	Val. exac. repr.	D.U.2 (5)	1	No	Sí	No	0
114		Div. mitad		1	No	Sí	No	0
711	0’333...	Val. exac. repr.	D.U.1(9)	1	Sí	Sí	-	1
215	0’333...	Val. exac. repr.	D.U. 2 (10) 2v	1	No	Sí	No	0
		Div. mitad		1	No	Sí	No	0
814	0’333...	Val. exac. repr.	Regla graduada	1	No	Sí	No	0
		Div. mitad		1	No	Sí	No	0
121	1’414...	Val- exac. repr.	Regla graduada	1	No	No	-	0
		Div. mitad		1	No	No	-	0
123	1’414...	Val. exac. repr.	D.U.2 (10)	1	No	Sí	Sí	1
		Div. mitad		1	No	Sí	Sí	1
125	1’414...	Div. mitad	Pitágoras	1	Sí	No	No	0
723	1’414...	Val. exac. repr.	Pitágoras	1	Sí	Sí	-	1
		Div. mitad		1	Sí	Sí	-	1
222	1’414...	Div. mitad	Pitágoras	1	Sí	Sí	-	1
823	1’414...	Val. exac. repr.	Med/DU(5)	1	Sí	Sí	-	1
322	5/8	Val. exac. repr.	Regla gra	2	-	-	-	1
324	1’414...	Val. exac. repr.	Regla graduada	1	No	Sí	No	0
		Div. mitad		1	No	Sí	No	0

Tabla 6.7: Análisis de respuestas según los conflictos 1 ó 2. Aplicación (cuando procede) de los criterios de decisión CD3 y CD4

Suj	Núme-ro	Tarea	Método represen.	Con-flicto	CD3	CD4	¿Se confirma con ítem 3?	Deci-sión
325	1’414...	Val. exac. repr.	Regla graduada	1	No	Sí	No	0
		Div. mitad		1	No	Sí	No	0
131	0’333...	Div. mitad	D.U.(2)2v	1	No	Sí	No	0
135	√5	Div. mitad	D.U.2 (10)	1	Sí	Sí	-	1
	0’333...	Div. mitad	D.U2(10)	1	No	Sí	No	0
731	√5	Div. mitad	Pitágoras	1	No	Sí	No	0
	0’333...	Div. mitad	Tales(3)	1	Sí	Sí	-	1
732	√5	Div. mitad	Pitágoras	1	No	Sí	Sí	1
733	√5	Div. mitad	Pitágoras	1	No	Sí	Sí	1
	0’333...	Div. mitad	Tales (3)	1	Sí	Sí	-	1
232	√5	Val. exac. rerpr.	D.U.2(10)	1	No	Sí	No	0
234	√5	Div. mitad	Pitágoras	1	No	Sí	No	0
	0’333...	Val. exac. repr.	Tales (3)	1	Sí	Sí	-	1
		Div. mitad		1	Sí	Sí	-	1
235	√5	Val. exac. repr.	Tales2 (4)	1	No	Sí	No	0
334	√5	Val. exac. repr.	Regla gra	1	No	No	-	0
	0’333...	Val. exac. repr.	Tanteo	1	No	No	-	0
742	1’414...	Val. exac. repr.	Med/ Tales2	1	No	Sí	No	0
		Div. mitad		1	No	Sí	No	0
	√5	Div. mitad	Tales2	1	Sí	Sí	-	1
744	1’414...	Val. exac. repr.	D.U. (10)	1	Sí	Sí	-	1
		Div. mitad		1	Sí	Sí	-	1
	√5	Val. exac. repr.	D.U. (10)	1	Sí	Sí	-	1
		Div. mitad		1	Sí	Sí	-	1
341	1’414...	Val. exac. repr.	Mediatriz	2	-	-	-	1
		Div. mitad		1	No	Sí	No	0
155	0’333...	Div. mitad	D.U. (3)	1	Sí	Sí	-	1
753	0’333...	Div. mitad	Tales	1	Sí	Sí	-	1
755	0’333...	Val. exac. repr.	Tales	1	No	Sí	No	0
		Div. mitad		1	No	Sí	No	0
253	0’333...	Val. exac. repr.	Tales	1	Sí	Sí	-	1
		Div. mitad		1	Sí	Sí	-	1
255	0’333...	Val. exac. repr.	D.U.(3)	1	Sí	Sí	-	1
		Div. mitad		1	Sí	Sí	-	1
352	0’333...	Val. exac. repr.	Tales	1	Sí	Sí	-	1
355	0’333...	Val. exac. repr.	Tales	1	Sí	Sí	-	1

Continuación tabla 6.7: Análisis de respuestas según los conflictos 1 ó 2. Aplicación (cuando procede) de los criterios de decisión CD3 y CD4

Hasta aquí hemos estudiado y clasificado las respuestas de los sujetos en las que se observa un conflicto pertinente para la investigación. Esas respuestas están transcritas en las tablas siguientes.

En la tabla 6.8 incluimos las respuestas relacionadas con el conflicto 1, y que poseen en la tabla 6.7 el código “1” en la última columna.

En la tabla 6.9 incluimos las respuestas que están relacionadas con el conflicto 1, y a las que se les ha asignado el código “0” en la tabla 6.7.

Finalmente, en la tabla 6.10 incluimos las respuestas en las que se observa el conflicto 2.

Suj	T	Nº	Respuestas correspondientes al conflicto 1, con código "1" en la tabla 6.7
711	R	0'3...	(escritura fraccionaria; divide la unidad en 9 partes): "Sí, aunque se cometería el error humano y el sistemático (indispensable) además del error de ser un número periódico puro."
123	R	1'4...	(D. U. 10 partes) "No ya que tiene ∞ decimales y nunca podrá ser exacta esta representación."
123	D	1'4...	"No ya que al ser infinito el número en decimales es muy difícil dividir exactamente por la mitad."
723	R	1'4...	(radical cuadrático, Pitágoras): "No. Porque es un número irracional y nunca habrá un punto exacto."
723	D	1'4...	"No exactamente debido a que es un número irracional y tiene unas cifras indefinidas de decimales, y al tener que delimitar sus cifras decimales ya no es exacto."
222	D	1'4...	"No es posible porque es un nº de infinitas cifras con lo cual no lo tengo entero y no puedo localizarlo."
823	R	1'4...	(mediatriz; Tales/Regla; división de la mitad de la unidad en 5 partes): "No, es imposible que lo sea, ya que la regla no tiene la suficiente graduación como para que lo sea así como que es un número irracional, √2, por lo cual su representación no es exacta al tener infinitos decimales."
135	D	√5	"No, ya que es un número con infinitos decimales, al no poder dividirse justo por la mitad."
731	D	0'3...	"No, porque es periódico puro y significa que tiene infinitos decimales."
732	D	√5	"No, porque ya no te saldría exacto tiene cifras infinitas de decimales."
733	D	√5	"No, pq no es exacto ya que √5 es irracional y tiene cifras infinitas."
733	D	0'3...	"No porque tampoco es exacto, tiene cifras infinitas."
234	R	0'3...	"No, es un número inexistente porque nunca lo podemos conocer en su totalidad, además la representación gráfica siempre da error."
234	D	0'3...	No, el número 0'3 tiene infinitos decimales la representación gráfica nunca sería exacta, por no conocer el número, por grosor del lápiz... y aunque he aplicado 1/3 que incluye a todos los decimales la representación gráfica exacta es imposible."
742	D	√ 5	"No, porque la raíz de 5 no es un nº exacto."
744	R	1'4...	(radical cuadrático; intervalos encajados): "No porque la √2 es un número con infinitos números decimales y aunque el postulado de Cantor diga que la sucesión de los intervalos encajados de un número exacto yo no he podido concretamente porque entre dos puntos siempre hay otro en medio. También tenemos que tener en cuenta los errores del material, y el error de medir."
744	D	1'4...	"No pq nunca acabarías de dividir. Es un número irracional."
744	R	√5	(intervalos encajados): "No es exacto porque es un número irracional y jamás se puede dar un punto exacto además del error humano y material."
744	D	√5	"No, igual que con la √2 es un número irracional y nunca se acabaría de dividir porque nunca terminan sus cifras decimales."
155	D	0'3...	"Exactamente no, ya que 0'33333... es un número en período. 0'33333... se puede decir que es 1/3. Suponiendo esto, podemos hallar la mitad, 1/3 . ½ = 1/6."
753	D	0'33...	"No, porque es un número periódico, es decir, que nunca se acaba, entonces no se podría porque es un número infinito."
253	R	0'33...	(fracción; Tales; divide la unidad en 3 partes): "No, al ser un número infinito, nunca nos acercamos lo suficiente como para llegar a la exactitud."

Tabla 6.8: Respuestas correspondientes al conflicto 1 (código "1" en la tabla 6.7)

Suj	T	Nº	Respuestas correspondientes al conflicto 1, con código "1" en la tabla 6.7
253	D	O'33...	"No, no saldrían mitades exactamente iguales porque al ser infinito, su mitad sería otro número infinito sin una completa exactitud. Aunque se podría hacer ya que la representación de dicho número tampoco es exacta." (Acompaña gráfico de un segmento unidad dividido en tres partes, etiquetando la primera parte con 0'3...y la mitad de [0, 0'3...] con 1/6.)
255	R	0'33...	(Tales/Regla; divide la unidad en 3 partes): "No. Ya que tiene un número infinito de cifras decimales y por tanto siempre vas a cometer un margen de error. Además, ninguna medida es exacta."
255	D	0'33...	"No ya que daría otro número de cifras infinitas decimales: 0'1~~6~~. Por tanto por muchas cifras que cogieras, nunca estarías dividiéndolo exactamente por la mitad."
352	R	0'33...	(Fracción; Tales; divide la unidad en 3 partes): "Es exacta, porque no he tomado como medida la regla, sino que he dividido la unidad en tres partes exactamente iguales. Pero el trazo del lápiz le quita exactitud, ya que es un número irracional y los decimales son infinitos por lo que se calcula de una manera aproximada."
355	R	0'33...	(fracción, Tales; divide la unidad en 3 partes): "No, porque al ser un número irracional, es decir, que tiene infinitos decimales la representación no puede ser nunca exacta. Teóricamente el punto obtenido tiene que ser exacto pero en el trazo es muy difícil obtener la precisión para lograrlo con total exactitud."

Continuación tabla 6.8: Respuestas correspondientes al conflicto 1. Código "1" en la tabla 6.7

Suj	T	Nº	Respuestas correspondientes al conflicto 1, con código "0" en la tabla 6.7
114	R	0'333..	(Tales/Regla; divide en 5 partes la unidad): "No, ya que los números periódicos no se pueden representar exactamente en la recta."
114	D	0'333..	"No porque es periódico. Al ser periódico al dividirlo no te puede salir la mitad justa sino que te saldría otro número periódico."
215	R	0'33...	(Tales/Regla; divide dos veces en 10 partes): "No es exacta ya que 0'333 es un número que no acaba nunca y sin embargo nunca llega a 1. No se puede representar gráficamente con exactitud. Es un decimal periódico."
215	D	0'33...	"No es posible ya que no es un nº que acabe y por lo tanto no tiene una mitad exacta."
814	R	0'33...	(SUJETO ENTREVISTADO): "No es exacta esta representación. Es que para mi nada es exacto ¿sabe usted? El 0'333... es un número infinito, imposible de representar. Además los números se representan de distintas maneras dependiendo de la escala que cojamos."
814	D	0'33..	"Es un número infinito y por lo menos yo no soy capaz de representar ese número."
121	R	1'41...	(Tales/Regla; divide la unidad en 10 partes): "No, porque al ser un número con muchos decimales no se puede precisar con exactitud."
121	D	1'4...	"No, porque no es un número que esté totalmente definido."
125	D	1'4...	"-No es posible dividirlo exactamente por la mitad pero sí aproximadamente. -No es posible hacerlo exacto porque son demasiados decimales."
324	R	1'4...	(Regla graduada) "No. Porque además del margen de error que puedan tener los instrumentos usados, el número 1'4142136... parece ser un número irracional, es decir, tiene infinitos decimales, luego nunca se podrá medir con exactitud."

Tabla 6.9: Respuestas correspondientes al conflicto 1 (código "0" en la tabla 6.7)

Suj	T	Nº	Respuestas correspondientes al conflicto 1, con código “0” en la tabla 6.7
324	D	1’4...	(Explica cómo puede realizarse la división por la mitad del segmento, mediante el uso de regla y compás, y añade: “Pero en realidad, el segmento 1’4142136... no sería posible dividirlo por la mitad puesto que parece tener infinitos decimales y nunca podríamos saber cuál es exactamente la mitad.”
325	R	1’4...	Sujeto 325: “No, porque tampoco el nº es exacto. Además sería casi imposible porque habría que representar las milésimas, etc... y con una regla no hay tanta precisión.”
325	D	1’4...	“No, porque no sé exactamente cuál es el número, por lo que no puedo saber cuál es la mitad. Además al tener tantos decimales no se podría dibujar y que saliera exacto.”
131	D	0’3...	“No, porque es un número decimal periódico infinito y la mitad es difícil de encontrar.”
135	D	0’3...	“No, ya que es un nº con decimal periódico, y su mitad, es otro.”
731	D	$\sqrt{5}$	“No, porque la $\sqrt{5}$ no es exacta ya que tiene decimales.”
232	R	$\sqrt{5}$	(Tales/Regla; divide la unidad en 10 partes): “La representación que he obtenido no es exacta ya que $\sqrt{5}$ no es exacta y, debido a una dificultad de espacio es imposible representarlo con mayor exactitud, además de ser totalmente imposible representar gráficamente $\sqrt{5}$, al no ser esta exacta y tender sus decimales al infinito.”
234	D	$\sqrt{5}$	“Nunca ya que haciéndolo con las cifras $\sqrt{5}$ tiene infinitos decimales por lo que nunca será exacto por muchos que tomaras y medir la mitad exacta de un número que no conoces es imposible. Además gráficamente el error podría ser mayor por el grosor del lápiz o por muchas otras cosas.”
235	R	$\sqrt{5}$	“Exacto no es, pero es bastante aproximada, la exactitud en este caso en la que el número dispone de infinidad de números decimales es difícil, pero como tampoco lo exige este caso concreto pues puede ser una medida muy buena.”
334	R	$\sqrt{5}$	(Regla graduada)“Es imposible obtener una representación exacta del número $\sqrt{5}$, ya que expresado como un número decimal nos mostraría que contiene un gran número de decimales, y al despreciarse tantos de estos decimales su representación es sensible de errores.”
334	R	0’3...	“No exacto, por lo ya explicado en la representación de $\sqrt{5}$.”
742	R	1’4...	“Mediatriz, Tales/regla) “No es exacta porque al ser un número irracional tiene infinitos decimales, por lo que podríamos seguir sacando intervalos más aproximados pero nunca llegaríamos a ese nº, siempre habría un intervalo con más decimales. (1’41, 1’42) $\rightarrow$ (1’414, 1’415) $\rightarrow$ etc.”
742	D	1’4...	“No porque 1’4142136... no es un nº exacto.”
341	D	1’4...	“Puedo dividir cualquier intervalo por la mitad, aunque sea muy pequeño utilizando herramientas muy precisas. Como el punto que he obtenido no es exactamente el pedido aunque divida el segmento por la mitad no podré obtener exactamente la longitud pedida. Además, 1’4142136 tiene infinitos números decimales que no puedo representar.”
755	R	0’3...	(Tales; divide la unidad 10 partes y toma la primera parte del segmento [0’3, 0’4): “No, porque un número periódico nunca es totalmente exacto al representarlo en una recta.”
755	D	0’3...	“No, porque la mitad es 0’1666... y ese número exactamente no se puede representar, aproximado sí.”

Continuación tabla 6.9: Respuestas correspondientes al conflicto 1 (código “0” en la tabla 6.7)

Suj	T	Nº	Respuestas relacionadas con el conflicto 2
322	R	5/8	"No es exacto del todo. La representación es un método para comprender los nºs reales, pero como la recta real tiene infinitos puntos en un intervalo de amplitud unidad, es imposible dibujar exactamente 5/8."
341	R	1'41...	"No es la representación exacta porque dentro del último intervalo escogido hay infinitos puntos, y con un bolígrafo o cualquier método que pueda utilizar cometeré un error ya que represento muchos puntos al mismo tiempo."

Tabla 6.10: Respuestas correspondientes al conflicto 2

En las respuestas que figuran en las tablas 6.8 y 6.10 no se pueden constatar las dos condiciones exigidas para la existencia de un 'conflicto cognitivo', puesto que las inconsistencias (primera condición) observadas por la investigadora posiblemente no sean percibidas por los sujetos, y en consecuencia éstos no tienen conciencia (segunda condición) de la inconsistencia. No obstante, para referirnos a las respuestas de dichas tablas utilizaremos la expresión 'respuestas conflictivas', que estudiaremos seguidamente.

En la tabla 6.11 resumimos la lista de sujetos con respuestas conflictivas pertinentes para esta investigación en las tareas de valoración de la exactitud de la representación y de valoración de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento de longitud dada, según la selección realizada en la tabla 6.7. Esta nueva tabla es similar a la tabla 6.2, y resulta de eliminar a los sujetos que han sido rechazados como consecuencia de la aplicación de los criterios de decisión CD1, CD2, CD3 y CD4, respectivamente. Respecto de la tabla 6.2, además se han eliminado las columnas correspondientes a conflictos declarados por el sujeto.

Los códigos de la tabla 6.11 indican:

"0"	Respuestas no conflictivas
"1"	Respuestas conflictivas
"2"	Respuesta rechazada en la última selección
"3"	Inconsistencia considerada no pertinente para la investigación.

Sujeto	Número	Representación	División Mitad	Número	Representación	División Mitad
		C.O.I.	C.O.I.		C.O.I.	C.O.I.
711	5/8	0	0	0’3333...	1	3
123	1’4142...	1	1	5/8	0	0
723		1	1		0	0
222		0	1		0	0
823		1	3		0	0
322		0	0		1	0
135	√5	0	1	0’3333...	0	2
731		0	2		0	1
732		0	1		0	0
733		0	1		0	1
234		0	2		1	1
742	1’4142...	2	2	√5	0	1
744		1	1		1	1
341		1	2		0	0
155	0’3333...	0	1	0’24	0	0
753		0	1		0	0
253		1	1		0	0
255		1	1		0	0
352		1	0		0	0
355		1	0		0	0

Tabla 6.11: Listado final de sujetos con respuestas conflictivas

6.2.4. Estudio de las respuestas conflictivas seleccionadas

6.2.4.1. Introducción

En 6.2.3 hemos desarrollado un estudio enfocado sobre las respuestas de los sujetos en las que se observan inconsistencias. Después de una cuidadosa selección hemos escogido una serie de respuestas (tablas 6.8 y 6.10) que consideramos relacionadas con alguno de los dos conflictos estudiados mediante el cuestionario.

En los puntos que siguen estudiaremos en profundidad las respuestas escogidas. El estudio está basado principalmente en la comparación de estas respuestas con otras respuestas consideradas no conflictivas. La comparación se realizará a través de distintas aproximaciones y su finalidad es ampliar y mejorar la información referida a los conflictos estudiados.

En primer lugar realizamos (6.2.4.2) un estudio descriptivo de los dos grupos de respuestas (conflictivas y no conflictivas), para determinar si se observan o no diferencias respecto de cuestiones como nivel de enseñanza al que pertenecen los sujetos de cada grupo, procedimientos de representación utilizados o escrituras simbólicas de los números que se han representado en cada grupo.

En segundo lugar (6.2.4.3), después de asignar a las frases de ambos grupos de respuestas los criterios para el estudio de los números reales, comparamos su presencia en cada grupo. El objeto de esta comparación es observar si la presencia o ausencia de respuesta conflictiva está en relación con la utilización de determinados criterios.

En tercer lugar (6.2.4.4) comparamos nuestra apreciación y valoración de los dos grupos de las respuestas con la evaluación realizada por un profesor experto de secundaria, actualmente en ejercicio, con el objeto de estudiar las analogías y diferencias entre su valoración y la de la investigadora.

En el anexo11 describimos la selección de sujetos cuyas respuestas no son conflictivas e incluimos la información contenida en las tablas de Valoración del Desempeño I y II de los dos grupos de sujetos (con y sin respuestas conflictivas, respectivamente).

6.2.4.2. Estudio descriptivo de respuestas conflictivas y no conflictivas

6.2.4.2.1. Frecuencia de aparición de cada conflicto

En la tabla 6.12 retomamos la lista de sujetos escogidos en 6.2.3 y la organizamos en función de las dos tareas en las que se presentan las respuestas conflictivas: valoración de la exactitud de la representación (de ahora en adelante, Tarea 1) o valoración de la posibilidad de dividir por la mitad un segmento de longitud dada (de ahora en adelante, Tarea 2).

<table>
<tr><th>Sujeto</th><th>Número</th><th>Tarea 1</th><th>Tarea 2</th></tr>
<tr><td>711</td><td>0’33333...</td><td>C. 1</td><td>-</td></tr>
<tr><td>123</td><td rowspan="4">1’4142136...</td><td>C. 1</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>723</td><td>C. 1</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>222</td><td>-</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>823</td><td>C. 1</td><td>-</td></tr>
<tr><td>322</td><td>5/8</td><td>C. 2</td><td>-</td></tr>
<tr><td>135</td><td>√5</td><td>-</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>731</td><td>0’33333...</td><td>-</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>732</td><td rowspan="2">√5</td><td>-</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>733</td><td>-</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>733</td><td rowspan="2">0’33333...</td><td>-</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>234</td><td>C. 1</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>742</td><td>√5</td><td>-</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>744</td><td>1’4142136...</td><td>C. 1</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>744</td><td>√5</td><td>C. 1</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>341</td><td>1’4142136...</td><td>C. 2</td><td>-</td></tr>
<tr><td>155</td><td rowspan="6">0’33333...</td><td>-</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>753</td><td>-</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>253</td><td>C. 1</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>255</td><td>C. 1</td><td>C. 1</td></tr>
<tr><td>352</td><td>C. 1</td><td>-</td></tr>
<tr><td>355</td><td>C. 1</td><td>-</td></tr>
</table>

Tabla 6.12: Presencia de respuestas conflictivas en cada tarea

En la tabla 6.12 comprobamos que las respuestas conflictivas corresponden en mayor medida al conflicto 1, es decir, la dificultad para admitir el cierre del proceso infinito. En cambio sólo se observan dos respuestas relacionadas con el conflicto 2 (relación entre resultado u objeto matemático y objeto del mundo físico).

Además observamos que las respuestas conflictivas se manifiestan con más frecuencia en la tarea 2 (valorar la posibilidad de dividir por la mitad un segmento de recta de longitud determinada) que en la tarea 1 (valorar la exactitud de la representación). Hemos analizado en 5.2.2 las tareas, y hemos mencionado lo infrecuente que resulta en el medio escolar la pregunta acerca de la posibilidad de dividir por la mitad un segmento, cuando se da su longitud. En la tabla 6.13 mostramos la frecuencia de respuestas conflictivas en cada tarea según se relacionen con el conflicto 1 o con el conflicto 2.

Tareas	Conflicto 1	Conflicto 2
Val. Exact. Representación	4	2
División Mitad	9	-
Ambas tareas	7	-

Tabla 6.13: Frecuencia de respuestas conflictivas en cada tarea según los conflictos

Observamos que las respuestas relacionadas con el conflicto 1 son más numerosas que las relacionadas con el conflicto 2.

Las causas de esas frecuencias notablemente diferentes pueden ser diversas.

Una opción es que las tareas propuestas en el instrumento (cuestionario) privilegien la aparición del conflicto 1, en detrimento del conflicto 2. Cabe recordar, a este respecto, que las tareas propuestas para evaluar la posible aparición del conflicto 2 constituían un conjunto de ítems que fueron simplificados en una única tarea (la presentada en 1d) y 2d)) del cuestionario final, para que su extensión no resultase excesiva.

Una segunda explicación que justificaría el predominio del conflicto 1 es que se haya producido por nuestra parte una interpretación inadecuada de las respuestas de los sujetos a los ítems del cuestionario.

Teniendo en cuenta que no es posible descartar ninguna de las dos posibilidades anteriores, intentaremos aún reflexionar en torno a una tercera opción. Consideremos en qué casos interpretamos que se manifiesta una afirmación relacionada con el conflicto 1 y en qué casos una relacionada con el conflicto 2.

En una afirmación relacionada con el conflicto 1, el sujeto expresa que la representación en la recta de un número no es exacta o que no es posible dividir exactamente por la mitad un segmento cuya longitud se expresa mediante un número porque su escritura decimal es infinita (periódica o no). Todos los sujetos a los que se administró el cuestionario se han encontrado con un número (en algunos casos con dos números) cuya escritura decimal es infinita, y a juzgar por las respuestas contenidas en la tabla 6.8, la existencia de una infinidad de cifras no ha pasado desapercibida. En las respuestas relacionadas con el conflicto 1, observamos que los sujetos no pueden prescindir de la infinitud de las cifras del número, y se apoyan en ella para evaluar cuestiones que se resuelven mediante otro tipo de consideraciones (entre otras, considerar si el número admite o no una construcción con regla y compás, o reconocer que las representaciones son, desde el punto de vista físico, siempre aproximadas).

El conflicto 2 se manifiesta cuando el sujeto aparentemente no distingue bien dos "planos": mundo ideal y mundo físico. Las respuestas incluidas en la tabla 6.10 ponen de manifiesto que se produce una confusión entre estos planos. Los sujetos parten de una afirmación concebida en el plano ideal '*en un intervalo existen infinitos puntos'* que tiene una consecuencia en el plano físico '*no es posible determinar exactamente la marca sobre el folio'*. El matemático sabe convivir con esa dicotomía. Esto, dicho sin considerarlo en la perspectiva platónica, simplemente significa que es capaz de concebir la representación exacta de $\sqrt{2}$ en la recta, que no la puede hacer exactamente en el papel, cuando la hace con regla y compás reales comete error y que concibe compases y reglas ideales con los que esos errores no se cometerían. Sin embargo, para el matemático, una consideración realizada en el plano ideal no tiene consecuencias en el plano físico. Se trata de dos "mundos" diferentes.

Conjeturamos que las afirmaciones relacionadas con el conflicto provocado por la presencia de infinitas cifras es más susceptible de aparecer (en lo que constituye nuestra tercera opción) porque las infinitas cifras "saltan a la vista" en la incompletitud de la representación posicional infinita, mientras que las consideraciones necesarias para que surja el conflicto 2, requieren de un análisis que supone un razonamiento más abstracto.

6.2.4.2.2. Frecuencia de sujetos según el nivel

El total de cuestionarios estudiados es de 124, distribuidos en los siguientes cursos y niveles del Sistema Educativo:

Nivel	Frecuencia	Porcentaje
1º Bachillerato	50	40'3
2º Bachillerato	50	40'3
1º Lic. Matemática	24	19'4
Total	124	100

Tabla 6.14: Frecuencias de sujetos según el nivel

La frecuencia de sujetos de Licenciatura en Matemáticas es menor que la mitad de la correspondiente a los otros dos niveles. Esa diferencia será considerada cuando estudiemos la frecuencia de sujetos con y sin respuestas conflictivas.

En la tabla 6.15 no se mantiene la paridad existente en la tabla 6.14 entre sujetos de 1º y 2º de Bachillerato. Mientras que, en el total de sujetos, los de 1º de Bachillerato representan aproximadamente el 40%, el porcentaje de sujetos de este nivel en el total de sujetos sin y con respuestas conflictivas es del 20% y del 55% respectivamente.

Con respecto a los sujetos de 2º de Bachillerato, que constituyen el 40% del total de sujetos estudiados, los porcentajes de sujetos de este nivel son del 55% en sujetos sin respuesta conflictiva y del 25% en sujetos con respuesta conflictiva.

Más de la mitad de los sujeto sin respuestas conflictivas son sujetos de 2º de Bachillerato, mientras que más de la mitad de sujetos con respuestas conflictivas corresponden a 1º de Bachillerato.

El porcentaje de sujetos de 1º de Licenciatura no se modifica mucho de una tabla a otra, puesto que se mantiene alrededor del 20%.

Nivel	**Sujeto sin respuestas conflictivas**		**Sujetos con respuestas conflictivas**	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
1º Bachillerato	6	20,7	11	55,0
2º Bachillerato	16	55,2	5	25,0
1º Licenciatura	7	24,1	4	20,0
Total	29	100,0	20	100,0

Tabla 6.15: Distribución de sujetos con respuestas conflictivas o no según el nivel

Parece sensato, a primera vista, aceptar que entre los sujetos con respuestas conflictivas predominen los de 1º de Bachillerato, puesto que se supone que son los que poseen menos herramientas matemáticas para abordar las diferentes tareas, y aunque dispongan de las mismas herramientas, la diferencia de edad puede determinar diferentes grados de maduración.

A continuación estudiaremos la distribución de conflictos 1 y 2 en los sujetos con respuestas conflictivas según el nivel al que pertenecen.

Nivel	**Conflicto 1 (frecuencia)**	**Conflicto 2 (frecuencia)**
1º de Bachillerato	11	0
2º de Bachillerato	5	0
1º de Licenciatura en Matemáticas	2	2
Total	20	2

Tabla 6.16: Distribución de conflictos 1 y 2 según el nivel

En la tabla 6.16 observamos que las respuestas relacionadas con el conflicto 1 se manifiestan especialmente en sujetos de 1º de Bachillerato y disminuye la frecuencia a medida que sube el nivel. Las respuestas relacionadas con el conflicto 2, en cambio, sólo se manifiestan en sujetos de 1º de Licenciatura.

Estos datos de alguna manera nos inducen a mantener nuestra conjetura acerca de que las afirmaciones relacionadas con el conflicto 1 se producen con más frecuencia porque la presencia de infinitas cifras de los números precipita a los sujetos a basar su respuesta en ellas, mientras que el conflicto 2 requiere de un análisis más abstracto, que es más natural que se produzca en sujetos más experimentados, que a su vez se ven influidos en menor grado por la presencia de infinitas cifras de los números.

Para terminar con el análisis según el nivel, estudiaremos las respuestas conflictivas en las tareas 1 y 2 según el nivel al que pertenecen los sujetos.

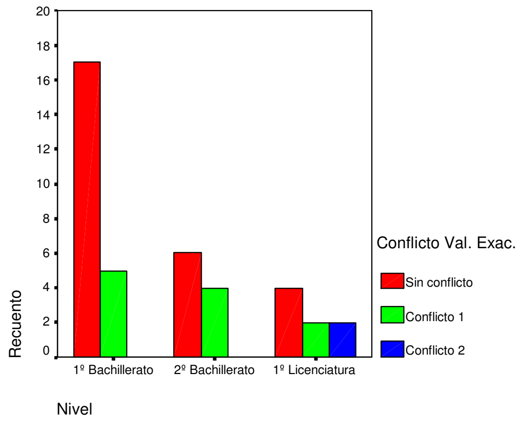


Figura 6.2: Respuestas conflictivas en tarea 1 según el nivel

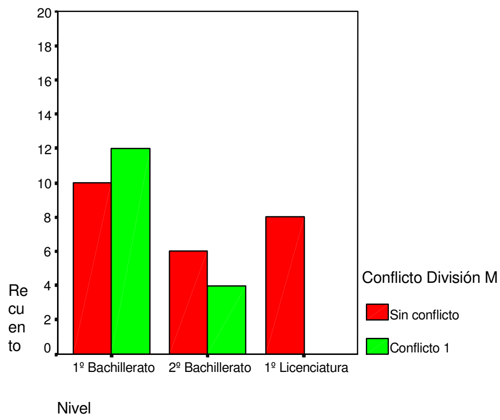


Figura 6.3: Respuestas conflictivas en tarea 2 según el nivel

La figura 6.2 corresponde a la tarea de Valorar la exactitud de la representación y la figura 6.3 a la tarea de Valorar la posibilidad de dividir el segmento obtenido por su mitad.

Algunas cuestiones que surgen de los datos de las figuras 6.2 y 6.3 son las siguientes:

- En sujetos de 1º de Bachillerato, la respuesta relacionada con el conflicto 1 se manifiesta especialmente en la tarea 2. La tarea 2 ha generado para estos sujetos más dificultades que la tarea 1.
- En sujetos de 2º de Bachillerato, la razón entre respuestas conflictivas y no conflictivas no varía con la tarea (6/4).
- En sujetos de 1º de Licenciatura las respuestas conflictivas (conflictos 1 ó 2) se observan únicamente en la tarea 1. Según estos datos, la tarea 2 no ha generado dificultad en estos sujetos.

6.2.4.2.3. Frecuencia de sujetos según los números representados

Las tareas propuestas en los ítems 1 y 2 versan sobre dos números diferentes, uno para cada ítem. Estos dos números se escogen entre los siguientes: 5/8, 0’24, √5, 0’33333,,, y 1’4142136... Cada uno de los 124 sujetos a los que se administró el cuestionario ha trabajado con dos de ellos, de donde resulta que los números indicados se han distribuido entre 142 x2 = 248 ítems. La distribución de los cinco números entre esos 248 ítems es la que figura en la tabla .

Número	Frecuencia sujetos	Porcentaje
0'24	25	10'08
0'3333...	74	29'84
1'4142136...	50	20'16
5/8	50	20'16
√5	49	19'76
Total	248	100

Tabla 6.17: Frecuencia de sujetos según los números trabajados

Se observa un predominio del número 0'3333... como consecuencia de estudiar 25 modelos de cuestionarios en lugar de los 30 concebidos desde un principio (las razones se especifican en la sección 2.6.2). De no producirse la eliminación de los cinco modelos, los números 0'333... y 1'4142136... deberían aparecer con la misma frecuencia, así como los números 0'24, 5/8 y √5.

Los sujetos seleccionados por sus respuestas conflictivas son 20, y los seleccionados por no presentar respuestas conflictivas, 29. Cada uno de ellos ha resuelto dos ítems, que versa cada uno sobre uno de los cinco números indicados. Se tienen en total 40 ítems para los sujetos con respuestas conflictivas, y 58 para los sujeto sin respuestas conflictivas. En la tabla 6.18 indicamos la distribución de los cinco números en esos totales.

La proporción de números cuya expresión decimal es infinita se mantiene en general estable. Se observa, por ejemplo, que el porcentaje correspondiente al número 0'3333... se mantiene alrededor del 30% en ambas tablas, mientras que los porcentajes correspondientes a 1'414... y a √5 se mantienen alrededor del 20% en ambas tablas.

Número	Sujetos sin respuestas conflictivas		Sujetos con respuestas conflictivas	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
0'24	4	6,9	6	15,0
0'333...	18	31,0	12	30,0
1'414...	11	19,0	8	20,0
5/8	15	25,9	6	15,0
√5	10	17,2	8	20,0
Total	58	100,0	40	100,0

Tabla 6.18: Frecuencia de sujetos con respuesta conflictiva o no según los números trabajados

Se observan, en cambio, pequeñas diferencias en los porcentajes correspondientes a 0'24 y a 5/8, que curiosamente son los números que ofrecen menor complejidad respecto de su escritura decimal, puesto que es finita. Sin embargo, la tabla 6.18 no ofrece información respecto de cómo se distribuyen los conflictos 1 y 2 según los números representados.

Para estudiar esa distribución, construimos las tablas 6.19 y 6.20, en las que se resumen los conflictos en función de los números implicados en cada tarea.

Número	**Conflicto Tarea 1**			**Total**
	Sin conflicto	**Conflicto 1**	**Conflicto 2**	
0'24	6	0	0	6
0'333...	6	6	0	12
1'414...	3	4	1	8
5/8	5	0	1	6
√5	7	1	0	8
Total	27	11	2	40

Tabla 6.19: Frecuencias de sujetos con respuestas conflictivas en la tarea 1 según los números representados

En la tarea de valoración de la exactitud de la representación, las afirmaciones relacionadas con el conflicto 1 se han manifestado especialmente con los números 0'3333... y 1'4142136... (con frecuencias 6 y 4 respectivamente en la tercera columna de la tabla 6.19). Hemos conjeturado que la presencia del conflicto 1 se ve impulsada por la presencia de infinitas cifras decimales. La escritura decimal de √5 también es infinita. Sin embargo, se observa que su frecuencia en respuestas conflictivas es menor. Quizá la falta de referencia explícita a la infinitud de sus cifras decimales sea la causa de esa frecuencia menor.

Por otra parte, observamos que el número 0'24 no presenta ninguna respuesta conflictiva y el número 5/8 presenta una sola, y en este caso, corresponde al conflicto 2, es decir, la relación entre objeto matemático y objeto del mundo físico.

En la tabla 6.20 observamos que el conflicto 2 no aparece en la tarea de dividir un segmento por la mitad, y el conflicto 1 se manifiesta con los números 0'333..., 1'4142136... y √5. Estos resultados se explican porque ninguno de los tres números admite una escritura decimal finita. Curiosamente, la escritura decimal infinita de √5, que casi pasa desapercibida en la tarea de Valoración de la exactitud de la representación, es tomada en cuenta por los sujetos en la tarea de dividir el segmento por la mitad. Una posible razón es que en esta tarea, estos sujetos hayan pensado en la división de la medida del segmento entre 2, y haya surgido la dificultad de dividir entre 2 un número que posee infinitas cifras decimales. Esta conjetura será puesta a prueba más adelante, cuando estudiemos la utilización de los criterios para el estudio de los números reales en las justificaciones.

Número	Conflicto Tarea 2		Total
	Sin conflicto	Conflicto 1	
0’24	6	0	6
0’333...	5	7	12
1’414...	4	4	8
5/8	6	0	6
√5	3	5	8
Total	24	16	40

Tabla 6.20: Frecuencias de sujetos con respuestas conflictivas en la tarea 2 según los números representados

6.2.4.2.4. Frecuencia de sujetos según el procedimiento de representación

Los procedimientos de representación utilizados por los sujetos con y sin respuestas conflictivas se identifican con los códigos señalados en la tabla 6.21 (similares a los códigos utilizados en la tabla A.8.1 del anexo 8).

Código	Procedimiento
Mediatriz1	La marca correspondiente al número coincide con una mediatriz.
Mediatriz2	La marca correspondiente al número no coincide con una mediatriz.
Tales1	La marca correspondiente al número viene determinada por una de las paralelas trazadas.
Tales2	La marca correspondiente al número no coincide con una de las paralelas, pues está en el interior de un segmento obtenido al trazar las paralelas.
Pitágoras	La marca se obtiene como consecuencia de aplicar el teorema de Pitágoras.
D.U.1	La marca correspondiente al número coincide con una división de la unidad.
D.U.2	La marca correspondiente al número está en el interior de uno de los segmentos obtenidos.
Segm arb n v.	Se repite un segmento arbitrario cierto número de veces (que depende del número a representar) hasta determinar la unidad.
Reg. Grad.	Se utilizan las graduaciones de la regla para señalar el punto, y no se divide la unidad o no se tiene en cuenta la división de la unidad.
Combinación	Combinación de varios procedimientos.

Tabla 6.21: Códigos para los procedimientos de representación utilizados

En la tabla 6.22 resumimos los procedimientos de representación utilizados por los sujetos sin y con conflictos. En la primera columna, se indican los procedimientos de representación mediante el código utilizado en la tabla 6.21.

En los dos grupos de sujetos, observamos en la tabla 6.22 que el procedimiento más utilizado es el codificado como ‘Tales1’ (la marca correspondiente al número viene determinada por una de las paralelas trazadas).

El predominio de ese procedimiento puede explicarse si tenemos en cuenta que los números que admiten la utilización del procedimiento (0’24, 0’333... y 5/8) representan el 60% de los números representados en cada grupo (resultado que puede comprobarse en la tabla 6.18).

Procedimiento	Sujeto sin respuestas conflictivas		Sujetos con respuestas conflictivas	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Mediatriz1	2	3,4	0	0
Mediatriz2	0	0	2	5,0
Tales1	20	34,5	11	27,5
Tales2	1	1,7	1	2,5
Pitágoras	8	13,8	7	17,5
D.U.1	7	12,1	6	15,0
D.U.2	4	6,9	6	15,0
Segm arb n v.	4	6,9	0	0
Reg. Grad.	8	13,8	5	12,5
Combinación	4	6,9	2	5,0
Total	58	100,0	40	100,0

Tabla 6.22: Frecuencias de sujetos según los procedimientos de representación utilizados

Los procedimientos teorema de Pitágoras, D.U.1 y regla graduada son utilizados por un porcentaje que varía entre el 10% y 20% de los sujetos de ambos grupos. También se encuentra entre esos valores el porcentaje de sujetos con respuestas conflictivas que utiliza el procedimiento D.U.2. En términos generales no se observan diferencias en la tabla 6.22 entre ambos grupos de sujetos.

Para afinar un poco más la distribución de procedimientos en ambos grupos, agruparemos los diez procedimientos considerados en dos clases. En la clase A incluimos los procedimientos en los cuales la coincidencia entre la marca realizada y el número correspondiente están garantizadas por alguna relación geométrica (es decir, los procedimientos mediatriz1, Tales1, Pitágoras, D.U.1, Segmento arbitrario *n* veces). En la clase B incluimos los procedimientos restantes, en los que la marca que identifica al punto no está garantizada por alguna relación geométrica. En la tabla 6.23 resumimos los resultados de esta agrupación.

Procedimientos	Sujetos sin respuestas conflictivas		Sujetos con respuestas conflictivas	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Clase A	41	70’7	24	60
Clase B	17	29’3	16	40
Total	58	100	40	100

Tabla 6.23: Frecuencia de sujetos según los procedimientos de representación se apoyen o no en alguna relación geométrica

Tanto en los sujetos sin respuestas conflictivas como en los sujetos con respuestas conflictivas, las marcas realizadas en más de la mitad de las representaciones se apoyan en alguna relación geométrica.

A continuación estudiaremos la utilización de procedimientos de representación en las respuestas conflictivas.

En la tabla 6.24 observamos cómo se distribuyen los conflictos entre los procedimientos de representación utilizados por los sujetos.

En la tarea 1 (Valoración de la exactitud de la representación) los conflictos se distribuyen entre 5 de los procedimientos utilizados. En la tarea 2 ocurre lo mismo, pero en este caso aparece el procedimiento Mediatriz2 que no figura en la tarea 1, mientras que en ésta observamos el procedimiento Tales2 que no encontramos en la tarea 2. Concluimos que los procedimientos de representación utilizados por sujetos cuyas respuestas son conflictivas son, básicamente, cuatro: Tales1, Pitágoras, D.U.1 y D.U.2.

Procedimiento de Representación	**Tarea 1**			**Tarea 2**	
	Sin conflicto	**Conflicto 1**	**Conflicto 2**	**Sin conflicto**	**Conflicto 1**
Mediatriz1	-	-	-	-	-
Mediatriz2	1		1	2	
Tales1	7	4		7	4
Tales2	1				1
Pitágoras	6	1		3	4
D.U.1	4	2		3	3
D.U.2	3	3		2	4
Segm. arb. n v.	-	-	-	-	-
Regla	4		1	5	
Combinación	1	1		2	
	27	11	2	24	16

Tabla 6.24: Respuestas conflictivas según los procedimientos de representación utilizados

Ahora resumiremos la tabla anterior considerando las clases A y B, definidas por la posibilidad de que haya una marca garantizada o no por una relación geométrica. En la tabla 6.25 comprobamos que las afirmaciones relacionadas con el conflicto 1 se manifiestan más en la clase A que en la clase B (en ambas tareas). Es decir que la dificultad producida por la presencia de infinitas cifras decimales se observa con más frecuencia en representaciones en las que existe una relación geométrica (traducible en operaciones entre números) entre las marcas correspondientes a 0, 1 y el número correspondiente.

Procedimiento de Representación	Tarea 1			Tarea 2	
	Sin conflicto	Conflicto 1	Conflicto 2	Sin conflicto	Conflicto 1
Clase A	10	7	0	13	11
Clase B	17	4	2	11	5
Total	27	11	2	24	16

Tabla 6.25: Respuestas conflictivas según los procedimientos de representación se apoyen o no en alguna relación geométrica

Con el conflicto 2 ocurre lo contrario. Los dos casos observados se presentan en la clase B, es decir, en las representaciones en que no existe un relación geométrica entre las marcas correspondientes a 0, 1 y el número correspondiente.

6.2.4.3. Relaciones entre criterios y respuestas conflictivas y no conflictivas

6.2.4.3.1. Organización de las respuestas según los criterios

Para estudiar con más profundidad los contenidos de las respuestas conflictivas y no conflictivas decidimos describirlas y compararlas con ayuda de los criterios para el estudio de los números reales (presentados en 3.5).

Las justificaciones dadas por los sujetos con respuesta conflictiva o no en las tareas de valoración de la exactitud de la representación y de valoración de la posibilidad de dividir por la mitad un segmento de longitud determinada serán organizadas según su contenido en diferentes argumentos. A su vez, estos argumentos serán clasificados según los cinco criterios para el estudio de los números reales.

Procedimiento de organización del contenido de las respuestas

El procedimiento de elaboración de los argumentos se realizó siguiendo los mismos pasos en cada tarea. En la siguiente descripción, los ejemplos expuestos corresponden al procedimiento seguido para clasificar los argumentos utilizados en la Tarea 1.

En principio, leemos las respuestas en las que se observa respuesta conflictiva (tabla 6.8). En esa lectura, se comprueba que en las justificaciones de los sujetos hay referencias al tipo de número, a la existencia de errores causados por la utilización de algunos instrumentos, a la escritura decimal infinita del número, entre otras cuestiones, que se anotan en un borrador. Se elabora una lista de argumentos, que contiene los puntos que acabamos de mencionar, y otros que surgen de esa primera lectura de las respuestas.

Posteriormente se organizan esos argumentos según los criterios para el estudio de los números reales, y se asigna a cada uno un código (por ejemplo, T1, F2, etc.). En principio, algunos criterios resultan con varios argumentos, y otros permanecen sin argumentos. Se obtiene la lista de argumentos (Lista 1) que incluimos en la tabla 6.26.

Criterios	Códigos	Argumentos
Tipo de Número	T1	Número irracional.
Fenomenología	F6	División de la unidad.
	F1	Error en la representación gráfica.
	F2	Graduación de la regla.
	F3	Error de materiales.
	F4	Medida no exacta.
	F5	Exactitud teórica.
	F7	Infinitos puntos en un intervalo.
Representaciones	R1	Número periódico.
	R2	Infinitos decimales.
	R3	Número infinito.

Tabla 6.26: Lista 1. Primera clasificación de argumentos usados en Tarea 1.

Con esta primera clasificación de los argumentos (lista 1), comienza una segunda lectura en profundidad de las respuestas. Mientras que se lleva a cabo, se dividen las respuestas mediante corchetes, separando las frases que se consideran pertenecientes a distintos argumentos, e indicando por encima del corchete de cierre el código correspondiente.

Ante la aparición de frases que, según nuestra interpretación, no podían incluirse en ninguno de los argumentos existentes, se elaboran nuevos argumentos, que se incluyen en el criterio correspondiente. Se repite la lectura de las respuestas conflictivas hasta que todas las frases quedan clasificadas.

Una vez llegados a este punto, se realiza un estudio de los argumentos hasta aquí elaborados (independientemente de las respuestas de los sujetos), para tratar de agrupar los que resultan referidos a una misma cuestión. Por ejemplo, tres argumentos considerados por separado en la primera clasificación de las respuestas a la tarea 1 fueron: ‘Error de materiales’, ‘Medida no exacta’ y ‘Exactitud teórica’. Durante la agrupación y consideración de los argumentos que estamos describiendo, los tres indicados fueron agrupados bajo un único argumento: ‘Dicotomía exactitud teórica/ inexactitud práctica’. Resulta una segunda clasificación de los argumentos (Lista 2), que incluimos en la tabla 627.

<table>
<tr><th>Criterios</th><th>Códigos</th><th colspan="2">Argumentos</th></tr>
<tr><td>Orden</td><td>O1</td><td colspan="2">Intervalos encajados.</td></tr>
<tr><td>Tipo de Número</td><td>T1</td><td colspan="2">Clasificación del número según el conjunto numérico al que pertenece.</td></tr>
<tr><td rowspan="10">Fenomenología</td><td>F1</td><td colspan="2">División de la unidad.</td></tr>
<tr><td rowspan="5">F2</td><td rowspan="5">Dicotomía exactitud teórica/ inexactitud práctica.</td><td>Error en la representación gráfica.</td></tr>
<tr><td>Graduación de la regla.</td></tr>
<tr><td>Error de materiales.</td></tr>
<tr><td>Medida no exacta.</td></tr>
<tr><td>Exactitud teórica.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">F3</td><td rowspan="3">Consideración respecto de la existencia de puntos en la recta</td><td>Infinitos puntos en un intervalo.</td></tr>
<tr><td>Entre dos puntos siempre hay otro en medio</td></tr>
<tr><td>Nunca habrá un punto exacto.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Representaciones</td><td rowspan="3">R1</td><td rowspan="3">Alusión a la escritura simbólica del número.</td><td>Número periódico.</td></tr>
<tr><td>Infinitos decimales.</td></tr>
<tr><td>Número infinito.</td></tr>
<tr><td>R2</td><td colspan="2">Valoración de la representación en la recta.</td></tr>
</table>

Tabla 6.27: Lista 2. Segunda clasificación de argumentos usados en Tarea 1.

La nueva clasificación se utiliza para organizar las respuestas del grupo de sujetos sin respuestas conflictivas. Esta vez, señalando los corchetes y colocando los códigos correspondientes en las respuestas (fotocopias de los originales) de los cuestionarios. En esta etapa aparecen nuevamente frases que no pueden clasificarse según los argumentos existentes, y deben enunciarse otros nuevos. Por ejemplo, en la tarea 1 se incluye el argumento 'no utilización de cálculos matemáticos' que no había surgido en la lectura de las respuestas conflictivas.

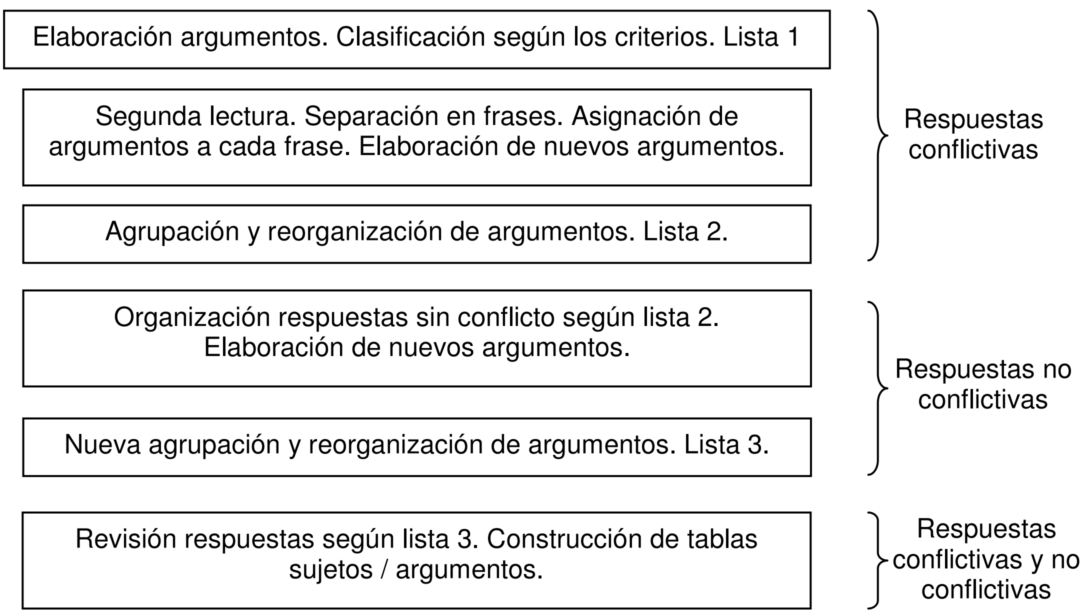


Figura 6.4: Procedimiento de organización de respuestas según criterios

Se tiene una lista de argumentos ampliada que se revisa nuevamente, intentando agrupar los referidos a las mismas cuestiones y obteniendo en consecuencia una nueva lista (Lista 3) que incluimos en la tabla 6.28 . Finalmente se revisan las respuestas de los dos grupos, según la lista 3, construyendo mientras tanto las tablas 6.30 y 6.33, que contienen las casillas resultantes de cruzar los sujetos con todos los argumentos resultantes en cada tarea. En la figura 6.4 resumimos los pasos seguidos en la clasificación de los argumentos.

6.2.4.3.2. Argumentos utilizados en la Tarea 1

A continuación (tabla 6.28) describimos los argumentos utilizados para clasificar las respuestas a la tarea de valoración de la exactitud de la representación (ítems 1c y 2c) clasificados según los criterios para el estudio de los números reales.

Criterios	Código	Argumentos
Orden	O1	Acotación del número (en un intervalo).
Tipo de Número	T1	Clasificación del número según el conjunto numérico al que pertenece.
	T2	Consideraciones filosóficas sobre el número.
Fenomenología.	F1	Alusión al procedimiento utilizado (algunos de los procedimientos descritos en 5.1.2.2).
	F2	Dicotomía exactitud teórica/ inexactitud práctica. Se incluyen aquí las referencias a una de las cuestiones o a ambas.
	F3	Consideración respecto de la existencia de puntos en la recta.
	F4	Comparación de distancias o longitudes de segmentos.
Representaciones	R1	Alusión a la escritura simbólica del número.
	R2	Alusión a la conveniencia o no del uso de una determinada escritura simbólica/ Utilización de una escritura simbólica diferente a la dada.
	R3	Valoración de lo que constituye una representación en la recta.
Operaciones	P1	Referencia a la no utilización de cálculos matemáticos.
	P2	Existencia de una operación con un solo número (simplificación, redondeo o alusiones a que se han despreciado decimales).
	P3	Existencia de operación binaria (multiplicación, raíz cuadrada).
	P4	Existencia de operación con más de dos números (planteo de proporción).
	P5	Alusión al uso de calculadora.

Tabla 6.28: Clasificación de los argumentos utilizados en la Tarea 1 (Lista 3).

En la tabla 6.29 organizamos las respuestas conflictivas según los argumentos anteriores. Cada respuesta resulta dividida en distintas partes mediante corchetes. En cada corchete de cierre se indica el argumento en el cual incluimos dicha frase. La organización de las respuestas no conflictivas está incluida en el anexo 12 (Tabla A.12.1).

Esta división de las respuestas en varias partes ocasiona una ruptura del contexto en el que se enmarca cada frase. Aunque reconocemos esta consecuencia, optamos por la división de la respuesta con el objetivo de enfocar las frases que encierran la afirmación conflictiva. Esta decisión permitirá obtener información respecto del criterio o criterios que se utilizan en las respuestas conflictivas.

Las frases encerradas entre corchetes se identifican con un código constituido por dos símbolos, una letra y una cifra, que indican el argumento en el cual se incluye la frase. Por ejemplo:

(Sujeto 234) “No, [es un número inexistente porque nunca lo podemos conocer en su
T2 F2
totalidad], además [la representación gráfica siempre da error.]”

En la primera frase encerrada entre corchetes, los dos símbolos del código asignado (‘T2’) indican que la frase se incluye en el argumento T2 (es decir, “Consideraciones filosóficas sobre el número”). En la segunda frase, los símbolos del código (‘F2’) indican que la frase se incluye en el argumento F2 (‘Dicotomía exactitud teórica / inexactitud práctica’).

Suj	Número	Respuesta con conflicto en Tarea 1
711	0’3...	F2 “Sí, [aunque se cometería el error humano y el sistemático (indispensable)], R1 [además del error de ser un número periódico puro.]”
123	1’4...	R1 “No [ya que tiene ∞ decimales] y nunca podrá ser exacta esta representación.”
723	1’4...	T1 F3 “No. [Porque es un número irracional] y[nunca habrá un punto exacto.]”
823	1’4...	“No, es imposible que lo sea, [ya que la regla no tiene la suficiente graduación F2 T1 R2 como para que lo sea] [así como que es un número irracional], [√2], por lo cual R1 su representación no es exacta [al tener infinitos decimales.]”
322	5/8	“No es exacto del todo. [La representación es un método para comprender los R3 nºs reales], pero [como la recta real tiene infinitos puntos en un intervalo de F3 amplitud unidad, es imposible dibujar exactamente 5/8].”
234	0’3...	“No, [es un número inexistente porque nunca lo podemos conocer en su T2 F2 totalidad], además [la representación gráfica siempre da error.]”
744	1’4...	R2 R1 “No porque la [√2] [es un número con infinitos números decimales] y [aunque el postulado de Cantor diga que la sucesión de los intervalos encajados de un O1 número exacto] [yo no he podido concretamente porque entre dos puntos F3 siempre hay otro en medio]. [También tenemos que tener en cuenta los errores F2 del material, y el error de medir.]”

Tabla 6.29: Respuestas conflictivas en Tarea 1.

Suj	Número	Respuesta conflictiva a Tarea 1.
744	√5	T1 "No es exacto [porque es un número irracional] y [jamás se puede dar un punto F3 F2 exacto] [además del error humano y material.]"
341	1'4...	"No es la representación exacta [porque dentro del último intervalo escogido hay F3 Infinitos puntos], [y con un bolígrafo o cualquier método que pueda utilizar F2 cometeré un error ya que represento muchos puntos al mismo tiempo.]"
253	0'3...	R1 (Ver Nota 1) "No, [al ser un número infinito], [nunca nos acercamos lo suficiente como para O1 llegar a la exactitud.]"
255	0'3...	R1 "No. [Ya que tiene un número infinito de cifras decimales] y [por tanto siempre F2 vas a cometer un margen de error. Además, ninguna medida es exacta.]"
352	0'3...	"Es exacta, [porque no he tomado como medida la regla, sino que he dividido la F1 unidad en tres partes exactamente iguales]. [Pero el trazo del lápiz le quita F2 T1 R1 exactitud], [ya que es un número irracional] y [los decimales son infinitos] por lo que se calcula de una manera aproximada."
355	0'3...	T1 R1 "No, [porque al ser un número irracional], es decir, [que tiene infinitos decimales] la representación no puede ser nunca exacta. [Teóricamente el punto obtenido tiene que ser exacto pero en el trazo es muy F2 difícil obtener la precisión para lograrlo con total exactitud.]"

Continuación tabla 6.29: Respuestas conflictivas en Tarea 1.

(Nota 1) La expresión 'número infinito' del sujeto se interpreta como una referencia a las infinitud de las cifras decimales, dado que por el nivel en que se encuentra este sujeto, no puede tener conocimiento acerca de los números infinitos (ver 3.5.2.2.4).

En la tabla 6.30 resumimos los argumentos y criterios correspondientes a cada respuesta de la tabla 6.29, y a cada respuesta sin conflicto (incluidas en la tabla A.12.1 del anexo 12). El código utilizado es el siguiente:

Casilla ij	
(vacía)	No usa argumento j
1	Usa argumento j y se asigna el conflicto 1
2	Usa argumento j y se asigna el conflicto 2
3	Usa el argumento j y no se asigna ningún conflicto

Sujeto	Orden	Tipo de Número		Fenomenología				Represen-taciones			Operaciones				
	O1	**T1**	**T2**	**F1**	**F2**	**F3**	**F4**	**R1**	**R2**	**R3**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
711					1			1							
123								1							
723		1				1									
823		1			1			1	1						
322						2				2					
234			1		1										
744*	1				1	1		1	1						
744		1			1	1									
341					2	2									
253	1							1							
255					1			1							
352		1		1	1			1							
355		1			1			1							
112				3	3										
112				3											
712					3										
712					3										
212							3					3			
212							3		3				3		
214					3										
214					3										
811					3										
811				3	3				3						
812					3				3						
812									3						
813				3	3			3							
813					3										
312					3										
312					3										
313				3											
313				3											
314				3											
314									3						
724															
724		3													
725				3											
725		3													
223					3								3		
223				3	3										
821					3										
821					3										
822					3										
822					3										3
134					3										
134					3										

Tabla 6.30: Organización de las respuestas conflictivas y no conflictivas a la Tarea 1 según los criterios

Sujeto	Orden	Tipo de Número		Fenomenología				Representaciones			Operaciones				
	O1	T1	T2	F1	F2	F3	F4	R1	R2	R3	P1	P2	P3	P4	P5
233				3	3										
233				3	3										
832					3							3			
832					3										
335				3								3			
335								3				3		3	
144				3				3							
144				3				3							
244					3										
244					3										
841															
841				3											
343				3	3										
343					3										
344					3										
344					3										
345	3														
345	3														
251				3											
251				3											
252				3											
252				3	3										
254									3						
254									3						
855					3						3	3			
855				3							3				

Continuación tabla 6.30: Organización de las respuestas conflictivas y no conflictivas a la Tarea 1 según los criterios

(*) Sujeto 744: A la respuesta del sujeto 744 se la considera relacionada con el conflicto 1, sin embargo, las afirmaciones parecen también relacionarse con el conflicto 2, puesto que el sujeto indica 'que no ha podido concretamente' (mundo físico) 'porque entre dos puntos siempre hay otro en medio' (mundo ideal). Sin embargo, no estamos en condiciones de asegurar que el término 'concretamente' hace referencia al gráfico trazado en el papel. Por ello, sólo indicamos la relación con el conflicto 1.

6.2.4.3.3. Argumentos utilizados en la Tarea 2

A continuación describimos los argumentos utilizados para clasificar las respuestas a la tarea de Valorar la posibilidad de dividir por la mitad el segmento obtenido (ítems 1d y 2d) clasificados según los criterios para el estudio de los números reales.

Criterios	Códigos	Argumentos
Orden	O1	Acotación del número (en un intervalo).
Tipo de Número	T1	Clasificación del número según el conjunto numérico al que pertenece.
Fenomenología	F1	Alusión al procedimiento utilizado (mediatriz, Tales, regla, cambio de unidad).
	F2	Dicotomía exactitud teórica/imposibilidad de exactitud práctica. Se incluyen aquí las referencias a una de las cuestiones o a ambas.
Representaciones	R1	Alusión a la escritura simbólica del número.
	R2	Utilización de una escritura simbólica diferente a la dada.
Operaciones	O1	Alusión a la división entre 2.
	O2	Redondeo del número a dividir o del cociente obtenido.
	O3	Alusión al uso de calculadora.

Tabla 6.31: Clasificación de los argumentos utilizados en la Tarea 2.

En la tabla 6.32 utilizamos los argumentos anteriores para clasificar las distintas frases de las respuestas conflictivas en la tarea de división por la mitad. El código asignado a cada frase es similar al utilizado en las repuestas de la tabla 6.29. Una organización similar de las respuestas no conflictivas a la tarea 2 se incluye en la tabla A.12.2 del anexo 12.

Suj.	Número	Respuestas conflictivas a Tarea 2.
123	1’4...	R1 “No [ya que al ser infinito el número en decimales] [es muy difícil dividir P1 exactamente por la mitad.]”
723	1’4...	T1 “ No exactamente [debido a que es un número irracional] y[tiene unas cifras R1 indefinidas de decimales], y[al tener que delimitar sus cifras decimales ya no es P2 exacto.]”
222	1’4...	R1 “No es posible [porque es un nº de infinitas cifras con lo cual no lo tengo entero] F2 y [no puedo localizarlo.]”

Tabla 6.32: Respuestas conflictivas en Tarea 2

Suj	Número	Respuestas conflictivas a Tarea 2.
135	√5	R1 "No, [ya que es un número con infinitos decimales], [al no poder dividirse justo P1 por la mitad.]"
731	0'3...	R1 "No, [porque es periódico puro y significa que tiene infinitos decimales.]"
732	√5	R1 "No, [porque no te saldría exacto tiene cifras infinitas de decimales.]"
733	√5	T1 R1 "No, [pq no es exacto ya que √5 es irracional] y [tiene cifras infinitas.]"
733	0'3...	R1 "No [porque tampoco es exacto, tiene cifras infinitas.]"
234	0'3...	R1 "No, [el número 0'3 tiene infinitos decimales] [la representación gráfica nunca F2 sería exacta, por no conocer el número, por grosor del lápiz...] y [aunque he R2 aplicado 1/3 que incluye a todos los decimales] [la representación gráfica exacta F2 es imposible.]"
742	√5	R1 "No, [porque la raíz de 5 no es un nº exacto.]"
744	1'4...	P1 T1 "No [pq nunca acabarías de dividir]. [Es un número irracional.]"
744	√5	T1 P1 "No, igual que con la √2 [es un número irracional] y [nunca se acabaría de dividir] R1 [ya que nunca terminan sus cifras decimales.]"
155	0'3...	R1 "Exactamente no, [ya que 0'33333... es un número en período.] [0'33333... se R2 puede decir que es 1/3]. [Suponiendo esto, podemos hallar la mitad 1/3. ½ = P1 1/6]"
753	0'3...	"No, [porque es un número periódico, es decir, que nunca se acaba, entonces no R1 se podría porque es un número infinito.]"
253	0'3...	P1 R1 P1 "No, [no saldrían mitades exactamente iguales] [porque al ser infinito], [su mitad] R1 [sería otro número infinito sin una completa exactitud]. [Aunque se podría hacer F2 ya que la representación gráfica de dicho número tampoco es exacta.]"
255	0'3...	R1 "No [ya que daría otro número de cifras infinitas decimales: 0'1]. [Por tanto por muchas cifras que cogieras, nunca estarías dividiéndolo exactamente por la P1 mitad.]"

Continuación tabla 6.32: Respuestas conflictivas en Tarea 2

A continuación resumimos la utilización de los criterios (y argumentos correspondientes) en cada respuesta conflictiva y no conflictiva a la Tarea 2. Usamos la codificación indicada en la página 295.

Sujeto	Orden	Tipo Núm.	Fenomenología		Represen-taciones		Operaciones		
	O1	T1	F1	F2	R1	R2	P1	P2	P3
123					1		1		
723		1			1			1	
222				1	1				
135					1		1		
731					1				
732					1				
733		1			1				
733					1				
234				1	1	1			
742					1				
744		1					1		
744		1			1		1		
155					1	1	1		
753					1				
253				1	1		1		
255					1		1		
112			3						
112			3						
712			3						
712				3					
212			3				3		
212			3				3		
214			3	3					
214			3	3					
811			3				3		
811						3	3		
812			3						
812			3						
813			3	3			3		
813				3		3	3		
312			3	3					
312			3	3					
313			3						
313			3						
314			3						
314			3						
724		3					3	3	
724							3		
725			3						
725			3						
223			3						
223			3						

Tabla 6.33: Organización respuestas conflictivas o no conflictivas a Tarea 2 según los criterios

Su-jeto	Orden	Tipo Núm.	Fenomenología		Represen-taciones		Operaciones		
	O1	**T1**	**F1**	**F2**	**R1**	**R2**	**P1**	**P2**	**P3**
821			3						
821			3	3					
822			3						
822			3						
134				3					
134				3					3
233			3						
233			3						
832			3	3					
832			3						
335			3				3		
335							3		
144			3				3		3
144			3						
244			3						
244			3						
841			3				3		
841			3				3		
343			3	3					
343			3						
344			3	3					
344			3						
345	3								
345	3								
251			3						
251			3						
252			3	3					3
252			3						
254			3				3		
254			3			3			
855			3		3				
855			3		3		3		

Continuación tabla 6.33: Organización respuestas conflictivas o no conflictivas a Tarea 2 según los criterios

6.2.4.3.4. Estudio de argumentos utilizados en respuestas a la Tarea 1

En la tabla 6.34 observamos que el criterio más utilizado para valorar la exactitud de la representación es Fenomenología. En segundo lugar, y con una frecuencia mucho menor se utiliza Representaciones, seguido por Operaciones, Tipo de Número y Orden. En la tabla 6.35 observamos las frecuencias de uso de cada argumento.

Respuesta	Frecuencia de uso de criterios en Tarea 1				
	Orden	Tipo de número	Fenomeno-logía	Representa-ciones	Operacione s
No conflictiva	2	2	55	11	11
Conflictiva	2	6	15	11	0
Total	4	8	70	22	11

Tabla 6.34: Criterios usados en Tarea 1

	Argumentos Tarea 1														
	O1	T1	T2	F1	F2	F3	F4	R1	R2	R3	P1	P2	P3	P4	P5
Usa	4	7	1	22	41	5	2	12	9	1	2	5	2	1	1

Tabla 6.35: Argumentos usados en Tarea 1

A continuación estudiaremos por separado los argumentos utilizados en respuestas no conflictivas y conflictivas.

Argumentos usados en respuestas no conflictivas a Tarea 1

El criterio usado con más frecuencia en las respuestas no conflictivas es Fenomenología (con frecuencia 55), seguido de Representaciones y Operaciones (ambos con frecuencia 11), Orden y Tipo de Número (ambos con frecuencia 2). Para observar los argumentos usados en cada criterio construimos la tabla 6.36.

Los argumentos F2 (Dicotomía exactitud teórica / inexactitud práctica) y F1 (Alusión al procedimiento utilizado) predominan ampliamente en las respuestas no conflictivas. Los sujetos sin respuestas conflictivas concentran su atención en la existencia de errores y en el procedimiento utilizado en la representación.

El argumento más utilizado de Representaciones es R2 (Alusión a la conveniencia o no del uso de una determinada escritura simbólica / Utilización de una escritura simbólica diferente a la dada). Hemos mencionado que la constructibilidad de los números está más ligada a una escritura que a otra, y ello se pone en evidencia en el cambio de escritura que realizan los sujetos.

<table>
<tr><th rowspan="2">Res-puesta</th><th colspan="15">Argumentos usados en Tarea 1 (Sujeto sin respuestas conflictivas)</th></tr>
<tr><th>O1</th><th>T1</th><th>T2</th><th>F1</th><th>F2</th><th>F3</th><th>F4</th><th>R1</th><th>R2</th><th>R3</th><th>P1</th><th>P2</th><th>P3</th><th>P4</th><th>P5</th></tr>
<tr><td rowspan="2">No conflic-tiva</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td><td>21</td><td>32</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>7</td><td>0</td><td>2</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">2</td><td colspan="4">55</td><td colspan="3">11</td><td colspan="5">11</td></tr>
</table>

Tabla 6.36: Argumentos usados en respuestas no conflictivas a la Tarea 1

El argumento más utilizado del criterio Operaciones es P2 (Existencia de una operación con un solo número: simplificación, redondeo o alusiones a que se han despreciado decimales).

Argumentos usados en respuestas conflictivas a Tarea 1

El 21’4% (15 de 70) de los argumentos incluidos en Fenomenología corresponden a respuestas conflictivas, mientras que el 50% (11 de 22) de los argumentos incluidos en Representaciones (el segundo más usado) corresponden a respuestas conflictivas. En la tabla 6.37 observamos cómo se distribuyen las respuestas conflictivas entre los distintos argumentos incluidos en cada criterio.

Conflicto	Argumentos usados en Tarea 1. (Sujetos con respuestas conflictivas)														
	O1	**T1**	**T2**	**F1**	**F2**	**F3**	**F4**	**R1**	**R2**	**R3**	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
Respuesta conflictiva	2	6		15				11			0				
Conflicto 1	2	5	1	1	8	3	0	8	2	0	0	0	0	0	0
Conflicto 2	0	0	0	0	1	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Tabla 6.37: Argumentos usados en respuestas conflictivas a la tarea 1

Las frases relacionadas con el conflicto 1, se presentan especialmente en los argumentos ‘Dicotomía exactitud teórica / inexactitud práctica’ y ‘Alusión a la escritura simbólica del número’ (F2 y R1 respectivamente). Ocho de las quince correspondientes a Fenomenología pertenecen a F2, mientras que ocho de las once incluidas en Representaciones corresponden a R1. En este caso, tiene sentido que esto ocurra puesto que el conflicto 1 surge por la presencia de infinitas cifras decimales en la escritura del número, y R1 contiene las frases que hacen referencia a la escritura del número.

Comprobamos en la tabla 6.30 que 6 de los ocho casos incluidos en R1 corresponden también a F2, es decir, que los dos argumentos más usados en las respuestas conflictivas se usan conjuntamente. Estudiando estos casos en la tabla 6.29, observamos que los sujetos afirman, por un lado, que la representación obtenida no es exacta debido a las infinitas cifras del número en cuestión, y posteriormente, mediante la utilización de expresiones del tipo ‘además’ o ‘así como que’, completan su argumento añadiendo que la representación no es exacta por la presencia de errores provenientes de los distintos materiales utilizados. Aunque la segunda afirmación es verdadera, la primera parte (alusión a infinitas cifras) es irrelevante para la exactitud de la representación puesto que todos los números dados son constructibles. Cabe la posibilidad de que estos sujetos no se hayan percatado de la constructibilidad del número. Para constatarlo, recurrimos a la tabla A.11.1 del anexo 11, y observamos la columna 2 y 11, en las que se incluye el procedimiento de representación utilizado. De los seis casos analizados (sujetos 711, 823, 744, 255, 352 y 355 respectivamente), dos sujetos (823 y 744 respectivamente) obtienen una marca aproximada para el número en cuestión, mientras que la marca correspondiente al número realizada por los cuatro sujetos restantes se basa en relaciones geométricas con los puntos correspondientes al origen y a la unidad. Hemos mencionado que la dificultad producida por la presencia de infinitas cifras decimales se observa con más frecuencia en representaciones en las que existe una relación geométrica (traducible en operaciones entre números) entre las marcas correspondientes a 0, 1 y el número correspondiente que en las que no existe una relación geométrica.

Como consecuencia de estas observaciones, conjeturamos que, al menos en los cuatro sujetos citados, se trataría de conflictos 'genuinos', en el sentido de que son situaciones en las que se presenta la dificultad en aceptar que a un número que se expresa mediante infinitas cifras decimales le corresponde un punto determinado sobre la recta numérica.

Un respuesta conflictiva correspondiente al conflicto 1 usada con bastante frecuencia, aunque en menor medida que F2 y R1, es T1: 'Clasificación del número según el conjunto numérico al que pertenece'. Observando en la tabla 6.29 comprobamos que en los cinco casos se trata de la alusión al hecho de que el número representado es irracional. Esta afirmación se complementa en tres de los cinco casos con una alusión a la infinitud de las cifras decimales del número, y en los dos restantes con el argumento F3. Nuestra lectura, en este caso, es la siguiente: por un lado, al tratarse de un número irracional tiene infinitas cifras, y por tanto la representación no es exacta; por otro lado, al tratarse de un número irracional, existen dificultades para determinar el punto de la recta que corresponde a dicho número.

En cuanto a las respuestas conflictivas relacionadas con el conflicto 2, corresponden al criterio Fenomenología y en segundo lugar a Representaciones. Se trata de los criterios F3: 'Consideración respecto de la existencia de puntos en la recta', F2: 'Dicotomía exactitud teórica / inexactitud práctica' y R3: 'Valoración de lo que constituye una representación en la recta'. Hemos mencionado que en las dos respuestas correspondientes a este conflicto se presenta una confusión entre dos "planos" (ideal y físico). Una consideración realizada en el plano ideal (relacionada con la existencia de puntos en la recta) tiene, para estos sujetos, una consecuencia en el plano físico (imposibilidad de determinar una marca para ese número).

6.2.4.3.5. Estudio de argumentos utilizados en respuestas a la tarea 2

En la tabla 6.38 observamos que el criterio más utilizado para valorar la posibilidad de dividir por la mitad el segmento obtenido es Fenomenología. En segundo lugar, y con una frecuencia menor que la mitad (de la correspondiente a Fenomenología) se utiliza Operaciones, seguido por Representaciones. Los criterios Tipo de Número y Orden se utilizan aún con menor frecuencia. En la tabla 6.39 observamos la frecuencia de uso de cada argumento. A continuación

Respuesta	Criterios usados en Tarea 2				
	Orden	**Tipo de Número**	**Fenomenología**	**Representaciones**	**Operaciones**
No conflictiva	2	1	62	5	19
Conflictiva	0	4	3	17	8
Total	2	5	65	22	27

Tabla 6.38: Criterios usados en la tarea 2

	Argumentos Tarea 2								
	O1	**T1**	**F1**	**F2**	**R1**	**R2**	**P1**	**P2**	**P3**
Usa	2	5	48	17	17	5	22	2	3

Tabla 6.39: Frecuencia de uso de cada argumento en Tarea 2

Argumentos usados en respuestas no conflictivas a Tarea 2

El argumento F1 (Alusión al procedimiento utilizado) es el más utilizado entre las respuestas no conflictivas. Observando la tabla A.11.4 del anexo 11, comprobamos que 37 sujetos mencionan el trazado de la mediatriz como procedimiento que permite dividir por la mitad el segmento obtenido. Otros sujetos aluden a la división utilizando el teorema de Tales, y otros midiendo con la regla el segmento y dividiendo entre dos su medida.

Respuesta	Argumentos usados en Tarea 2 (Sujeto sin respuestas conflictivas)								
	O1	**T1**	**F1**	**F2**	**R1**	**R2**	**P1**	**P2**	**P3**
No conflictiva	2	1	48	14	2	3	15	1	3
	2	1	62		5		19		

Tabla 6.40: Argumentos usados en respuestas no conflictivas a tarea 2

Otros argumentos utilizados, aunque con frecuencia inferior a la correspondiente a F1, son P1 (Alusión a la división entre 2) y F2 (Dicotomía exactitud teórica/imposibilidad de exactitud práctica).

Con respecto a la alusión de una división entre dos, algunos sujetos (como máximo, 9) hacen referencia explícita a dividir entre dos el número contenido en el enunciado, que mide la longitud del segmento. Esta afirmación puede venir sola (por ejemplo, sujeto 724) o acompañada con referencias a la representación en la recta del cociente obtenido (por ejemplo, sujeto 335), o al hecho de que el cociente corresponde al punto obtenido gráficamente mediante el trazado de la mediatriz (sujeto 254).

Otros sujetos, en cambio, hacen referencia a dividir entre dos el resultado de medir con la regla el segmento obtenido (sujetos 813, 842, 144 y 855).

No es posible determinar si los sujetos que hacen referencia únicamente a la división entre dos del número contenido en el enunciado, han confundido la tarea de dividir el segmento con la de dividir el número entre dos. Podría tratarse también de respuestas incompletas, en el sentido de que después de la división, el sujeto estaría considerando la representación en la recta del cociente obtenido. De todas formas, estas opciones sólo pueden esclarecerse mediante una entrevista confirmatoria.

Las respuestas que utilizan el argumento F2 señalan la imposibilidad de dividir exactamente por la mitad el segmento dado, por la presencia de errores.

Argumentos usados en respuestas conflictivas a Tarea 2

En la tabla siguiente observamos cómo se distribuyen las respuestas conflictivas a la Tarea 2 entre los distintos argumentos incluidos en cada criterio.

Conflicto	Argumentos usados en Tarea 2. (Sujetos con respuestas conflictivas)								
	O1	**T1**	**F1**	**F2**	**R1**	**R2**	**P1**	**P2**	**P3**
Conflicto 1	0	4	3		17		8		
	0	4	0	3	15	2	7	1	0

Tabla 6.41: Argumentos usados en respuestas conflictivas a Tarea 2

No se observan respuestas relacionadas con el conflicto 2 entre las respuestas conflictivas, razón por la que sólo analizaremos en este caso los argumentos utilizados en respuestas relacionadas con el conflicto 1.

El argumento que predomina es R1 (Alusión a la escritura simbólica del número). Se trata, obviamente, de todas las respuestas en las que se alude a la infinitud de las cifras decimales de los números en cuestión. Nos interesa observar ahora si el argumento R1 es utilizado junto a otros argumentos. Para ello analizamos la tabla 6.33.

En primer lugar, observamos que, de 16 respuestas conflictivas, 15 utilizan el argumento R1. En cinco de las 15 respuestas se utiliza exclusivamente ese argumento, mientras que en las 10 restantes se combina con otros.

Respecto de la utilización exclusiva de R1, se trata de sujetos que afirman que no es posible dividir el segmento porque el número tiene infinitas cifras. No sabemos con certeza qué consideraciones realizan los sujetos para sostener ese argumento y las entrevistas confirmatorias permitirán aproximarnos a esas consideraciones. Es posible que estos sujetos hayan confundido la tarea de dividir por la mitad el segmento con la de dividir el número (que expresa su longitud) entre dos.

El argumento R1 se combina con los argumentos T1, F2, R2 , P1 y P2. En 6 oportunidades se utiliza con P1 (Alusión a la división entre 2). Se trata de los sujetos que afirman que debido a la infinitud de cifras decimales del número, no es posible dividirlo entre dos. En estos casos, conjeturamos que se trata de la imposibilidad de aplicar el algoritmo de la división, porque uno de los números (el dividendo) posee infinitas cifras decimales.

En tres oportunidades se utiliza el argumento R1 en combinación con T1 (Clasificación del número según el conjunto numérico al que pertenece). Se trata de casos en que los sujetos afirman que debido a que el número es irracional tiene infinitas cifras. Esta respuesta no nos permite vislumbrar de qué modo afecta ello a la tarea asignada (es decir, dividir por la mitad el segmento). Podría tratarse también de la imposibilidad de hallar el resultado de una división de un número que posee infinitas cifras. Esta conjetura se podrá confirmar o rechazar en caso de que los sujetos implicados sean entrevistados.

Observamos en la tabla 6.41 que los argumentos P1 y T1 son usados en las respuestas conflictivas, aunque en ningún caso se utiliza cada uno en forma exclusiva, sino que se usan combinados con otros argumentos (esto lo podemos comprobar en la tabla 6.33).

6.2.4.4. Comparación con la evaluación de un profesor experto

Con el objeto de efectuar un control sobre nuestro análisis de respuestas hemos sometido las respuestas a los ítems 1 y 2 del cuestionario de sujetos con respuestas conflictivas y no conflictivas a una evaluación por parte de un profesor actualmente en ejercicio.

El profesor ha evaluado en total 49 cuestionarios, 20 correspondientes a sujetos con respuestas conflictivas y 29 a sujetos sin respuestas conflictivas. Cada cuestionario consta de dos ítems (los ítems 1 y 2 del cuestionario administrado a los sujetos).

El profesor desconocía el análisis de las respuestas, y en particular no tenía ninguna información respecto de nuestro interés por estudiar dos conflictos: la dificultad en admitir el control de un proceso infinito y la relación entre objeto matemático y objeto físico. Los cuestionarios pertenecientes a sujetos con respuestas conflictivas y no conflictivas fueron entremezclados entre sí; de hecho, el profesor desconocía lo que entendemos por respuesta conflictiva o no conflictiva.

La única instrucción que recibió fue puntuar cada ítem (de los dos que conforman el cuestionario que debe evaluar) sobre un total de 10 puntos. De manera que la puntuación máxima para cada sujeto sea igual a 20 (pues cada sujeto resuelve dos ítems).

El profesor disponía de total libertad para asignar los 10 puntos correspondientes a cada ítem en el total de incisos que los constituyen (cada ítem incluye cuatro incisos: representación de un número, explicación del procedimiento utilizado, valoración de la exactitud de la representación y valoración de la posibilidad de dividir el segmento obtenido por su mitad).

El estudio de los resultados de las puntuaciones se ha realizado separando cada cuestionario en dos partes, una para cada ítem. De este modo, los casos que se han estudiado son en total 98 (49 x 2). La información que se considera en cada caso es: número de sujeto, nivel al que pertenece, número representado, puntuación otorgada por el profesor, presencia o ausencia de respuesta conflictiva en la tarea Valoración de la exactitud de la representación (tarea 1), presencia o ausencia de respuesta conflictiva en la tarea Valoración de la posibilidad de dividir el segmento obtenido por la mitad, entre otros.

En la tabla A.13.2 del anexo 13 incluimos todos los datos considerados para realizar los estudios incluidos en el presente apartado.

6.2.4.4.1. Criterios de corrección utilizados por el profesor experto

Los criterios de puntuación (establecidos por el profesor) se indican en las tablas 6.42, 6.43 y 6.44.

Los criterios utilizados dependen del número que se debe representar y el profesor ha evaluado los incisos a) y b) en forma conjunta.

Incisos	Criterios de corrección	5/8	
		Puntuación	Puntuación
Inciso a	Utiliza procedimiento geométrico	5	6
	Aproxima	2	
	Respuesta sin sentido	0	
Inciso b	Aporta información adicional	1	
	No aporta información adicional	0	
	Respuesta incoherente con a)	-1	
Inciso c	Errores de medida	2	2
	Afirma que la representación es exacta	1	
	Respuesta incorrecta	0	
Inciso d	Respuesta correcta	2	2
	Respuesta incorrecta	0	
Total			10

Tabla 6.42: Código de puntuación asignado al ítem 5/8

Incisos	Criterios de corrección	0’33333... y 0’24	
		Puntuación	Puntuación
Inciso a	Identifica 0’3333... con 1/3 o 0’24 con 6/25	3	6
	Utiliza procedimiento geométrico	3	
	Aproxima	2	
	Respuesta sin sentido	0	
Inciso b	Respuesta incoherente con a)	-1	
Inciso c	Errores de medida	2	2
	Afirma que la representación es exacta	1	
	Respuesta incorrecta	0	
Inciso d	Respuesta correcta	2	2
	Respuesta incorrecta	0	
Total			10

Tabla 6.43: Código de puntuación asignado a los ítems 0’333... y 0’24

Incisos	Criterios de corrección	1’4142136... y √5	
		Puntuación	Puntuación
Inciso a	Utiliza procedimiento geométrico	4	4
	Aproxima hasta el segundo decimal	4	
	Aproxima hasta el primer decimal	2	
	Respuesta sin sentido	0	
Inciso b	Respuesta incoherente con a)	-1	
Inciso c	Si usa procedimiento geométrico y afirma	3	3
	Si aproxima y afirma que no es exacta	3	
	Respuesta incorrecta	0	
Inciso d	Respuesta correcta	3	3
	Respuesta incorrecta	0	
Total			10

Tabla 6.44: Código de puntuación asignado a los ítems correspondientes a 1’414... y √5

Resumiendo los criterios que figuran en las tablas anteriores, enunciamos las siguientes observaciones:

Inciso a) Representación de un número

Con respecto al inciso a, el profesor ha considerado en general dos opciones, si utiliza un procedimiento geométrico de representación o bien si aproxima.

Inciso b) Explicación del procedimiento utilizado

Las consideraciones que hace se refieren a que exista coherencia con lo realizado en el inciso a.

Inciso c) Valoración de la exactitud de la representación

Observa especialmente si existe coherencia con las respuestas anteriores, si el sujeto señala errores de medida y si afirma que es exacta.

Inciso d) Valoración de la posibilidad de dividir el segmento obtenido por su mitad

Considera si es o no correcta la respuesta del sujeto.

La diferente puntuación asignada a la representación de los números 1’4142136... y √5, ha sido explicada por el profesor por el hecho de que considera que la construcción implicada es más difícil, dado que había entendido que se trataba de sujetos del nivel Secundario. Por ello, el total de 10 puntos los distribuye para esos números de forma diferente a la realizada para los otros números.

Según el criterio de corrección, una representación correcta mediante la utilización de un método geométrico en el inciso a) y una explicación coherente con dicha representación en b) son suficientes para superar el aprobado en caso de que los números representados son 5/8, 0’24 y 0’333333... No ocurre lo mismo con los números 1’4142136... y √5, puesto que los puntos otorgados a los incisos a y b suman 4, es decir, no alcanzan el aprobado.

6.2.4.4.2. Puntuaciones generales

Las medidas de tendencia central de las puntuaciones otorgadas figuran en la tabla 6.45.

	N	Mínimo	Máximo	Media	Mediana	Desv. típ.
PUNTUACIO-NES	98	1,00	10,00	7,0153	7,00	2,4584

Tabla 6.45 : Medidas de tendencia central de las puntuaciones

La media de las puntuaciones otorgadas por el profesor excede en algo más de dos puntos al aprobado (es decir, 5).

Los 49 cuestionarios (98 ítems) considerados han sido seleccionados por la investigadora de modo que satisfagan la condición de presentar un desempeño correcto, salvo posibles ligeras imprecisiones, en las tareas de representar el número y explicar el procedimiento utilizado. El cumplimiento de esa condición en los 49 cuestionarios está debidamente justificado en la sección 6.2.3.3 del presente capítulo (para los sujetos con respuestas conflictivas) y en el anexo 11 (para los sujetos sin respuestas conflictivas).

Si comparamos la media (superior al aprobado) de las puntuaciones otorgadas por el profesor con la condición impuesta por la investigadora a los cuestionarios evaluados es posible hablar de una cierta afinidad en la valoración de las respuestas realizada por ambos.

Sin embargo, observamos que la puntuación mínima otorgada por el profesor es de 1 punto y hay un total de 16 ítems que no alcanzan el aprobado, por lo que estimamos que ha habido diferencias entre las valoraciones efectuadas por el profesor y la investigadora.

Hemos mencionado en reiteradas oportunidades que los números presentados son todos constructibles. El profesor ha tomado en cuenta la utilización de un procedimiento de representación para valorar las puntuaciones, y en los casos en que las representaciones son aproximadas la puntuación que otorga es menor. Cuando se trata de los números 5/8 y 0’24, la representación aproximada recibe dos puntos, mientras que la representación mediante procedimientos geométricos recibe 5 puntos. La representación aproximada del número 0’333... recibe 2 puntos frente a los 3 puntos asignados a la representación de este número mediante un procedimiento geométrico. En cuanto a los números 1’4142136... y $\sqrt{5}$, cuando el sujeto aproxima hasta el segundo decimal la puntuación asignada es igual que la correspondiente a la representación mediante un procedimiento geométrico (4 puntos), mientras que si aproxima hasta el primer decimal, la puntuación asignada es de 2 puntos.

A la vista de las consideraciones anteriores, es posible que algunas diferencias entre la valoración del profesor y la nuestra radiquen en el hecho de que consideramos correctas todas las representaciones independientemente de que se realicen o no mediante procedimientos geométricos.

6.2.4.4.3. Medidas de tendencia central en los grupos con y sin respuestas conflictivas

En la figura 6.5 observamos los gráficos de cajas construidos para las puntuaciones de los 98 ítems, clasificados según entre la presencia o ausencia de respuesta conflictiva.

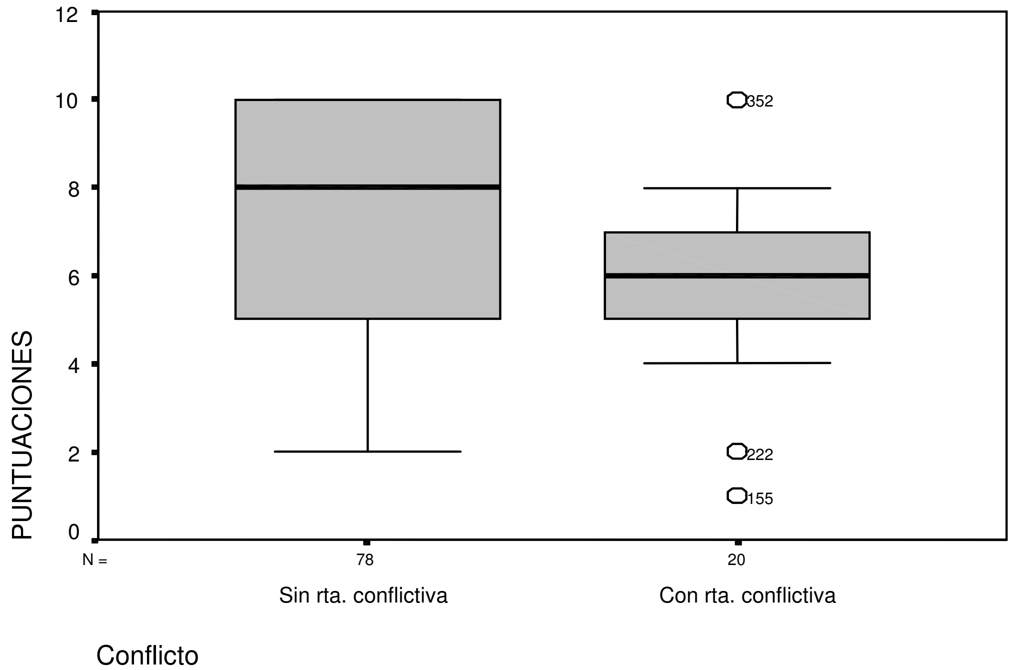


Figura 6.5: Gráfico de cajas para las puntuaciones clasificadas según la presencia o ausencia de respuesta conflictiva

En la tabla 6.46 observamos que la media, mediana y moda de las puntuaciones de respuestas sin conflicto son superiores a las correspondientes a respuestas en las que se observa algún conflicto.

Ítems	**Re-cuento**	**Máxi--mo**	**Media**	**Mínimo**	**Media-na**	**Moda**	**Rango**	**Desvia-ción típ.**	**Varian-za**
Respuesta no conflictiva	78	10’00	7’29	2’00	8’00	10’00	8’00	2’47	6’12
Respuesta conflictiva	20	10’00	5’93	1’00	6’00	7’00	9’00	2’12	4’48

Tabla 6.46: Algunos descriptivos de los grupos sin y con respuesta conflictiva

Además, la desviación típica de las respuestas consideradas no conflictivas es mayor que la correspondiente a las respuestas conflictivas, es decir, las puntuaciones son más variadas en las respuestas no conflictivas. Es preciso considerar, en este caso, que mientras que los ítems sin respuesta conflictiva son en total 78, los ítems con respuesta conflictiva son 20, por lo que cabe esperar una menor varianza entre los ítems de la muestra más numerosa.

En general, los ítems que son considerados sin respuesta conflictiva han recibido una mayor puntuación por parte del profesor que los considerados con respuesta conflictiva. Hemos dicho que el profesor desconoce el análisis de dos conflictos en las respuestas, sin embargo, afirmamos que la presencia de alguna respuesta conflictiva ha generado ‘ruido’ en su valoración y que las ligeras imprecisiones que hemos tolerado no lo hayan sido por él. Este ruido se manifiesta en la obtención de medidas de tendencia central inferiores en las puntuaciones de respuestas conflictivas.

		Prueba de Levene		Prueba T						
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ de la diferencia	Intervalo de confianza para la diferencia	
									Inf.	Sup.
Puntuaciones	Se han asumido varianzas iguales	4’049	0‘047	2’270	96	0‘025	1’3699	0‘6034	0‘1722	2’5676
	No se han asumido varianzas iguales			2’491	33’62	0‘018	1’3699	0‘5500	0‘2517	2’4881

Tabla 6.47: Resultados obtenidos en la prueba t aplicado a las puntuaciones con y sin respuestas conflictivas

Para determinar si las medias resultantes de agrupar todos los ítems según la presencia o ausencia de respuesta conflictiva son iguales, realizamos un contraste de hipótesis sobre dos medias independientes. En este trabajo no estamos estudiando muestras representativas, por lo que el estudio que sigue (y los que más adelante realizaremos) deben considerarse con esa precaución. En la tabla 6.47 resumimos los resultados obtenidos. La hipótesis nula consiste en afirmar que las medias poblacionales son iguales. La hipótesis alternativa consiste en afirmar, en cambio, que las muestras proceden de poblaciones con medias diferentes.

Aunque en la tabla 6.47 incluimos los resultados asumiendo dos opciones posibles para la varianza (iguales y distintas), teniendo en cuenta los resultados de la prueba de Levene, consideramos los resultados obtenidos en el primer supuesto, es decir, con varianzas iguales (Pardo y San Martín, 1994; p.198). Puesto que el intervalo de confianza no contiene el valor 0, rechazamos la hipótesis nula con un nivel de riesgo inferior a 0’05. Por lo tanto, aceptamos la hipótesis alternativa de que las medias son estadísticamente diferentes. Este estudio lo repetiremos a continuación, con las muestras resultantes de suprimir los sujetos con puntuaciones menores al aprobado.

6.2.4.4.4. Exclusión de sujetos con puntuaciones menor al aprobado

En este punto estudiaremos las puntuaciones excluyendo de la lista de 98 ítems los 16 ítems que han recibido una puntuación menor que 5. Teniendo en cuenta que uno de los criterios utilizados durante el estudio y selección de respuestas ha sido escoger las consideradas correctas, aplicamos ahora el mismo criterio a los 98 ítems, esta vez valorados por el profesor.

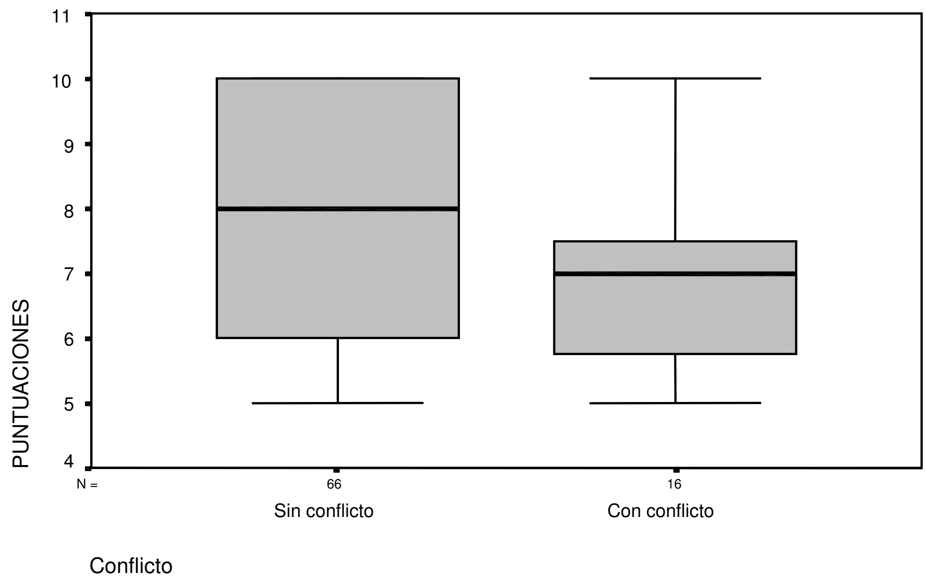


Figura 6.6: Diagrama de cajas para los ítems aprobados, clasificados según la existencia o ausencia de respuesta conflictiva

En primer lugar, con los 82 ítems resultantes construimos el diagrama de cajas de la figura 6.6. En este caso, observamos que en el grupo sin respuestas conflictivas las puntuaciones se concentran entre los valores 6 y 10, mientras que en el grupo con respuestas conflictivas lo hacen entre algo menos que 6 y 7’5.

En segundo lugar, comparamos las medias de los grupos con y sin respuestas conflictivas, obteniendo los resultados de la tabla 6.48. Las medias difieren en algo más de un punto.

Conflicto	**Media**	**N**	**Desv. típ.**
Respuesta no conflictiva	7,9924	66	1,9739
Respuesta conflictiva	6,7188	16	1,3659
Total	7,7439	82	1,9313

Tabla 6.48: Medias de los ítems aprobados, clasificados según la existencia o ausencia de respuesta conflictiva

Por último, compararemos la media de los grupos con y sin respuestas conflictivas mediante la prueba t para muestras independientes (efectuada anteriormente con los 98 ítems, cuyos resultados figuran en la tabla 6.47). Recordamos el hecho de que las muestras no son representativas.

En la tabla 6.49 incluimos los resultados obtenidos. Nuevamente en este caso la hipótesis nula consiste en afirmar que las medias de las dos poblaciones son iguales. Incluimos los resultados obtenidos con la prueba de Levene, que estudia si las varianzas de los grupos son iguales.

En la prueba de Levene hemos obtenido un valor del estadístico F alto, y una significación menor que 0’01, razón por la que es posible descartar la hipótesis nula de que las varianzas son iguales.

		Prueba de Levene		Prue-ba T						
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilate-ral)	Diferen-cia de medias	Error típ de la diferen-cia	Intervalo de confianza para la diferencia	
									Inf.	Sup.
Pun-tua-cio-nes	Se han asumido varianzas iguales	7’224	0‘009	2’438	80	0‘017	1’2737	0‘5225	0‘2339	2’3134
				3’039	32’132	0‘005	1’2737	0‘4191	0‘4202	2’1272

Tabla 6.49: Resultados obtenidos en la prueba T aplicada a las puntuaciones de respuestas conflictivas y no conflictivas, excluyendo los ítems no aprobados

Posteriormente, consideramos el valor t obtenido bajo la hipótesis de que las varianzas son distintas. Debido a que el intervalo de confianza no contiene el valor 0, asumimos que la hipótesis nula de igualdad de medias es rechazada. En consecuencia, aceptamos la hipótesis alternativa consistente en afirmar que las medias difieren significativamente.

Después de excluir los ítems no aprobados por el profesor sigue manifestándose la diferencia de puntuaciones en los grupos con y sin respuestas conflictivas. Sin embargo, exigiremos aún más a nuestra selección de ítems, y por ello a continuación estudiaremos los ítems cuyas puntuaciones son iguales o mayores que la mediana de las puntuaciones de los 98 ítems.

6.2.4.4.5. Exclusión de sujetos con puntuaciones menor a la mediana

En la tabla 6.45 observamos que la mediana de las puntuaciones es igual a 7. En este punto excluiremos todos los ítems cuya puntuación es menor o igual a 7, para observar si existen diferencias entre los grupos con y sin respuestas conflictivas.

En la tabla 6.50 incluimos el total de sujetos de cada nivel incluido en los ítems resultantes.

Nivel	Total sujetos	Porcentaje
1º de Bachillerato	16	28,6
2º de Bachillerato	24	42,9
1º de Licenciatura	16	28,6
Total	56	100,0

Tabla 6.50: Sujetos resultantes de excluir los de puntuación menor que 7, según el nivel

Siguiendo el orden del estudio realizado en el punto anterior, construimos diagramas de barra para las puntuaciones clasificadas según la presencia o ausencia de conflicto (figura 6.7).

Las cajas pertenecientes a los dos grupos sin y con respuestas conflictivas difieren considerablemente. En el grupo sin respuesta conflictiva las notas se agrupan en torno a la puntuación máxima, mientras que en el grupo con respuesta conflictiva se agrupan alrededor de la mediana, es decir, 7.

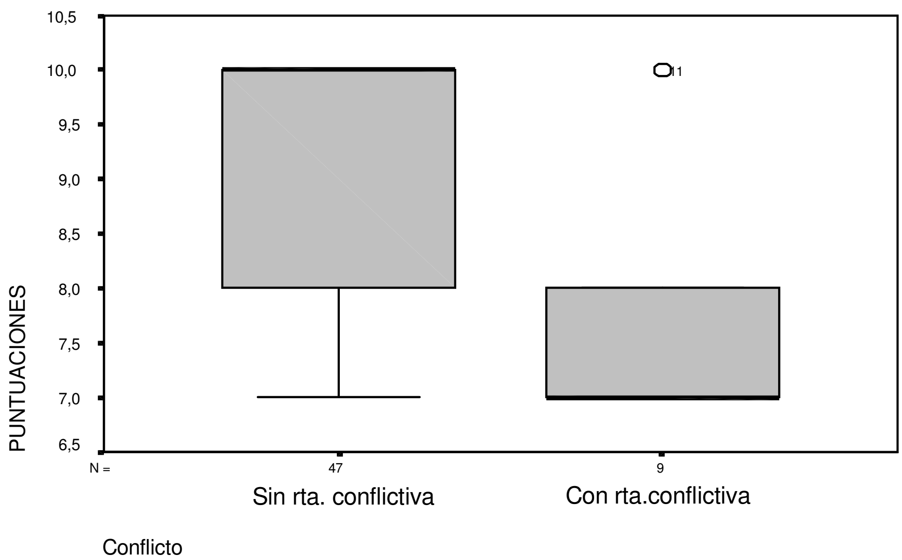


Figura 6.7: Diagrama de cajas para los ítems con puntuación mayor o igual que la mediana, clasificados según la existencia o ausencia de respuesta conflictiva

En segundo lugar calculamos la media de los grupos con respuestas conflictivas o no. En la tabla 6.51 incluimos los resultados. En este caso comprobamos que las medias difieren nuevamente en más de un punto.

Conflicto	Media	N	Desv. Típ.
Respuesta no conflictiva	9,0638	47	1,1497
Respuesta conflictiva	7,6667	9	1,0000
Total	8,8393	56	1,2325

Tabla 6.51: Medias de los ítems con puntuaciones iguales o mayores que la mediana, clasificados según la existencia o ausencia de respuesta conflictiva

Para comprobar si esta diferencia es estadísticamente significativa, realizamos la prueba t de la comparación de medias para grupos independientes. En la tabla 6.52 incluimos los resultados.

En la prueba de Levene observamos que es posible asumir que las varianzas son iguales. Dado que en la prueba t hemos obtenido un intervalo de confianza que no incluye al cero, podemos afirmar que se rechaza la hipótesis nula de que las medias de los grupos son iguales.

Como consecuencia de los resultados obtenidos, afirmamos que la presencia de respuesta conflictiva se manifiesta claramente en la valoración del profesor mediante la aplicación de puntuaciones más bajas que en las respuestas no conflictivas.

		Prueba de Levene		Prueba T						
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ de la diferencia	Intervalo de confianza para la diferencia	
									Inf.	Sup.
Puntuaciones	Se han asumido varianzas iguales	1’540	0‘220	3’402	54	0‘001	1’3972	0‘4107	0‘5737	2’2206
				3’744	12’424	0‘003	1’3972	0‘3731	0‘5872	2’2071

Tabla 6.52: Resultados obtenidos en la prueba T aplicada a las puntuaciones de los grupos sin y con respuestas conflictivas, excluyendo los ítems cuya puntuación es menor que la mediana.

A pesar del desconocimiento por parte del profesor de la existencia de respuestas consideradas conflictivas, el "ruido" provocado por los conflictos se ha reflejado en las puntuaciones.

Los resultados obtenidos en las comparaciones de medias (tablas 6.47, 6.49 y 4.52) serán comentados en las conclusiones del capítulo. En los gráficos contenidos en las figuras 6.5, 6.6 y 6.7 observamos que a medida que se suprimen las puntuaciones más bajas, los dos grupos considerados, con y sin respuestas conflictivas, van diferenciándose paulatina y progresivamente. Es decir, a medida que se eligen intervalos cada vez más reducidos caracterizados por notas cada vez mejores, los grupos con y sin respuestas conflictivas se separan cada vez más. En las conclusiones enunciaremos algunas conjeturas como consecuencia de estos resultados.

6.2.4.4.6. Puntuaciones y respuestas conflictivas en la Tarea 1

En este punto analizaremos en particular las puntuaciones que el profesor ha asignado a las respuestas al ítem c). El objeto de este estudio es comparar estas puntuaciones con la ausencia o presencia de respuestas conflictivas.

Teniendo en cuenta que la puntuación asignada por el profesor al inciso c) está en función del número que se debe representar, necesitamos unificar la valoración del profesor. En la tabla 6.53 indicamos la puntuación máxima asignada por el profesor al inciso c) según cada número, y en la última columna indicamos la puntuación relativa para cada una de las puntuaciones asignadas por el profesor.

Número	**Puntuación máxima profesor**	**Puntuación asignada profesor**	**Puntuación relativa**
5/8, 0'3333... y 0'24	2	0	0/2 = 0
		1	½ = 0'5
		2	2/2 = 1
1'4142... y √5	3	0	0/3 = 0
		1	1/3 = 0'33
		2	2/3 = 0'66
		3	3/3 = 1

Tabla 6.53: Puntuaciones relativas de las puntuaciones asignadas por el profesor

En la tabla 6.54 incluimos los resultados de efectuar la comparación de medias de puntuaciones asignadas por el profesor a las respuestas del inciso c), codificados según la última columna de la tabla 6.53.

Tarea 1	**Media**	**N**	**Desv. Típ.**
Rta. no conflictiva	0'7134	85	0'3974
Conflicto 1	0'5455	11	0'5222
Conflicto 2	0'5000	2	0'7071
Total	0'6902	98	0'4167

Tabla 6.54: Medias de las puntuaciones al inciso c) según la presencia o ausencia de respuesta conflictiva

Observamos que en este caso, la media de las puntuaciones correspondientes a las respuestas no conflictivas es superior a la media de las valoraciones de las respuestas conflictivas (relacionadas con los conflictos 1 ó 2).

6.2.4.4.7. Puntuaciones y respuestas conflictivas en la Tarea 2

En este punto estudiaremos las puntuaciones otorgadas por el profesor a las respuestas al ítem d) de manera similar a la efectuada en el punto anterior para el ítem c). Teniendo en cuenta que las puntuaciones del ítem d) son similares a las del ítem c), estudiamos las puntuaciones medias utilizando las puntuaciones relativas que figuran en la tabla 6.53. En este caso también compararemos las puntuaciones medias de las respuestas clasificadas según la ausencia o presencia de respuesta conflictiva en la Tarea 2 (Valoración de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento obtenido).

Tarea 2	Media	N	Desv. típ.
Rta. no conflictiva	0'6259	82	0'4682
Conflicto 1	0'0000	16	0'0000
Total	0'5237	98	0'4869

Tabla 6.55: Medias de las puntuaciones al inciso c) según la presencia o ausencia de respuesta conflictiva

En este caso observamos que las respuestas relacionadas con el conflicto 1 poseen una puntuación media igual a 0, mientras que la puntuación de las respuestas no conflictivas es mayor que 0'5 (siendo 0 la puntuación nula y 1 la puntuación máxima).

En este caso hay un desajuste total entre la valoración del profesor y la nuestra, debido a que el profesor ha asignado puntuación nula a todas las respuestas consideradas con conflicto.

6.3. Estudio respuestas ítem 3

En el ítem 3 los sujetos deben indicar el grado de acuerdo o desacuerdo con diferentes afirmaciones relacionadas con la exactitud de una representación (en la recta de un número dado). Hemos indicado que las afirmaciones han sido extraídas de respuestas de sujetos durante las entrevistas exploratorias, y se han clasificado según una serie de criterios de valoración (que figuran en el anexo 6).

La asignación de cada afirmación escogida a los diferentes criterios de valoración se describe en la sección 5.2.3.5, y se ha contrastado mediante una consulta a expertos descrita en el anexo 7.

En las tablas que siguen incluimos las frecuencias obtenidas en las diferentes opciones (muy en desacuerdo, en desacuerdo, indeciso, de acuerdo y muy de acuerdo) propuestas para cada afirmación.

Teniendo en cuenta que según la presencia de dos o tres afirmaciones en el ítem 3 se presentan dos modelos de cuestionarios, analizaremos por separado las frecuencias obtenidas por cada opción de la escala.

6.3.1. Modelo 1 para el ítem 3

En este modelo cada sujeto debe valorar dos afirmaciones relativas a la exactitud de la representación. En la tabla 6.56 incluimos las frecuencias obtenidas en cada afirmación.

Afirmación	Frecuencias					
	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo	Muy de acuerdo	No contesta
A	1	2	2	15	9	1
B	2	1	2	3	4	0
C	2	5	5	3	0	0
E	6	3	10	7	2	1
G	1	3	3	13	10	0
I	0	3	5	4	0	2
J	1	1	1	6	6	0

Tabla 6.56: Frecuencias obtenidas en la afirmaciones incluidas en el modelo 1

Algunas afirmaciones han sido utilizadas dos veces en los enunciados de cuestionarios, como las afirmaciones A, E (sobre las que han opinados los sujetos cuyas tercera cifra del código son respectivamente 1 y 4) y G (sobre las que han opinado los sujetos cuyas tercera cifra del código son respectivamente 3 y 5). Por esa razón, los totales obtenidos por estas afirmaciones son mayores que los obtenidas por las afirmaciones B, C, I y J.

Analizaremos en cada afirmación por separado la tendencia general de las frecuencias de cada opción de la escala. Las afirmaciones aluden todas a representaciones de números en la recta caracterizadas por el hecho de que las marcas correspondientes a 0, 1 y el número correspondiente está basada en alguna relación numérica entre los segmentos determinados por los tres números.

Frase A: *"No es exacto, porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, coger un número exactamente, porque si haces una rayita más gorda, dentro de esa misma rayita hay un montón de números."*

El criterio de valoración en el cual incluimos la afirmación es 'Naturaleza del punto geométrico'. Esta afirmación es la única en la que no ha habido acuerdo entre los expertos consultados respecto de su inclusión en los criterios de valoración. Todos los criterios han sido escogidos por al menos un experto, y predominan los criterios 'Precisión de los instrumentos de representación' y 'Naturaleza del punto geométrico' (cada uno escogido por 4 expertos). Consideramos que se trata, por lo tanto, de la única afirmación controvertida, respecto de las interpretaciones a que da lugar, y por ello resulta difícil obtener conclusiones a partir de ella. (Nuestra interpretación teórica del Capítulo 7 podría explicar, sin embargo, esta discrepancia.)

Las frecuencias de las opciones escogidas por los sujetos son 3 en desacuerdo, 2 indecisos y 24 en la franja de acuerdo. Luego, claramente la opinión de los sujetos se ha mostrado a favor de aceptarla.

Frase B: *"Nos aproximamos, pero nunca vamos a obtener el punto exacto. Nunca se va a poder representar si tiene infinitos números decimales."*

Esta afirmación está incluida en el criterio 'Infinitas cifras decimales', y 6 de los 7 expertos consultados avalan esta asignación.

La opinión de los sujetos, aunque dividida, muestra una inclinación a estar de acuerdo con ella (3 en la franja del desacuerdo, 2 indecisos y 7 en la franja del acuerdo).

Frase C: *"Sería muy inexacto. Si hubiese un método geométrico para poder conseguirlo, seguro que sí sería exacto".*

Esta afirmación ese incluye en el criterio 'Procedimiento de representación', y esta asignación ha coincidido con la de 6 de los 7 expertos consultados.

En general, la opinión de los sujetos no está a favor de la aceptación de la afirmación, puesto que en la franja del desacuerdo la frecuencia es igual a 7, 5 indecisos y 3 de acuerdo.

Frase E: *"No, porque la marca sigue siendo un segmento pequeñito y cada cosa que pintas va a ser un segmento más pequeñito, pero va a seguir siendo un segmento. Entonces no puedo marcar exactamente el punto."*

Incluimos la afirmación en el criterio de valoración 'Naturaleza del punto geométrico'. Entre los expertos consultados ha habido acuerdo general respecto de la asignación de dicho criterio.

La opinión de los sujetos, a juzgar por las frecuencias observadas, está dividida. Observamos en la fila correspondiente a esta frase que 9 sujetos se encuentran en la franja correspondiente al desacuerdo, 10 se muestran indecisos y otros 9 se encuentran en la franja correspondiente al acuerdo.

Frase G: *"Yo creo que no, porque siempre los materiales que utilizamos tienen un margen de error."*

Esta afirmación se ha incluido en el criterio de valoración 'Precisión de los instrumentos de representación' y los expertos consultados coinciden en su totalidad con esta asignación.

Consideramos que la opinión de los sujetos encuestados se inclina a aceptar la afirmación porque observamos en la tabla 6.56 que 4 sujetos se encuentran en la franja del desacuerdo, frente a 3 indecisos y 23 en la franja de acuerdo.

Frase I: "*Sí, porque el teorema de Tales de da triángulos que son proporcionales".*

Incluimos la frase en el criterio de valoración 'Procedimiento de representación'. En este caso, 5 de los 7 expertos consultados han coincidido con nuestra asignación.

En cuanto a la opinión de los sujetos, 3 se han mostrado en desacuerdo, 5 indecisos y 6 en la franja correspondiente al acuerdo. Estas cifras nos indican que las opiniones están divididas y hay una leve inclinación por parte de los sujetos a aceptar la afirmación.

Frase J: *"Si es un número que tiene infinitas cifras decimales, jamás podríamos alcanzar el punto exacto, ya que tiene infinitas. Por mucho que estemos aquí."*

Los 7 expertos consultados han coincidido con nuestra asignación de esta afirmación en el criterio 'Infinitas cifras decimales'.

Los sujetos se han mostrado a favor de la aceptación de la afirmación, puesto que 2 se encuentran en la franja del desacuerdo, 1 indeciso y 12 en la franja del acuerdo.

Como primeras conclusiones de estos resultados, indicamos que la afirmación que ha obtenido mayor aceptación por los sujetos es la G, que hace referencia a la existencia de errores en la representación causados por los materiales o instrumentos usados.

En la tabla 6.35 (Argumentos usados en la Tarea 1) se observa entre las respuestas de los sujetos a la valoración de la exactitud de la representación, un predominio del argumento F2 (Dicotomía exactitud teórica / inexactitud práctica; se incluyen aquí las referencias a una de las cuestiones o a ambas). En este argumento se han incluido todas las afirmaciones en las que se indica la existencia de errores provenientes del uso de los instrumentos utilizados en la representación. En consecuencia, comprobamos que existe una coherencia entre los resultados obtenidos en la afirmación G del ítem 3, con los resultados de los sujetos en los ítems 1 y 2.

Respecto del criterio de valoración 'Procedimientos de representación', las afirmaciones C e I han sido incluidas en él. En la afirmación C se afirma que no es exacta la representación por la inexistencia de un procedimiento geométrico, en cambio, en la afirmación I se alude al hecho de que la utilización del procedimiento geométrico (basado en el teorema de Tales), permite afirmar la exactitud. Es decir, que los contenidos son semánticamente opuestos: en uno se alude la existencia, y en el otro la inexistencia del procedimiento geométrico.

La opinión de los sujetos se muestra dividida en ambas afirmaciones. Hay una leve inclinación al desacuerdo con la afirmación C y al acuerdo con la afirmación I.

Consultada la tabla 6.35, observamos que el argumento F1 (Alusión al procedimiento utilizado: algunos de los procedimientos descritos en Racionalidad) ha sido el segundo utilizado (después de F1) para valorar la exactitud de las representaciones. El argumento F2 está más relacionado con la afirmación I que con la frase C, puesto que en I se alude a la existencia de un determinado procedimiento (el teorema de Tales). En este caso, es posible hablar de una coherencia entre los resultados hallados en 6.2.4.3 y los que figuran en la tabla 6.56.

Las afirmaciones restantes están de alguna manera relacionada con los conflictos estudiados.

Respecto de las afirmaciones B y J, incluidas ambas en el criterio de valoración 'Infinitas cifras decimales', consideramos que ambas expresan la dificultad observada en el conflicto 1 (control de las infinitas cifras decimales). Si agrupamos las frecuencias de la tabla 6.56 de ambas afirmaciones, nos encontramos con 5 respuestas en la franja del desacuerdo, 3 indecisos y 19 respuestas en la franja del acuerdo. Luego, los sujetos que han debido valorar estas afirmaciones en general han estado de acuerdo con ellas.

En la tabla 6.35 observamos que el argumento R1 (Alusión a la escritura simbólica del número) es usado en tercer lugar por los sujetos, después de F2 y F1. Todas las afirmaciones de los sujetos en el ítem 1c y 2c en las que se alude a las infinitas cifras de los números implicados están consideradas en este argumento. Esto supone que nuevamente los resultados en el ítem 3 son coherentes con los obtenidos en los ítems 1c y 2c.

Con respecto a la afirmación E, que consideramos relacionada con el conflicto 2 (relación entre el objeto del mundo matemático y el objeto del mundo concreto), hemos visto que la opinión de los sujetos se encuentra dividida respecto del grado de acuerdo. Es decir, no podemos afirmar ninguna inclinación de los sujetos respecto de la aceptación o el rechazo de la afirmación.

En la tabla 6.28 comprobamos que hay dos argumentos relacionados en cierta forma con el criterio de valoración 'Naturaleza del punto geométrico', los argumentos F3 (Consideración respecto de la existencia de puntos en la recta) y R3 (Valoración de lo que constituye una representación en la recta). F3 ha sido utilizado por 5 sujetos, mientras que R3 por 1 sólo.

No nos atrevemos a expresar ninguna conclusión a partir de estos datos. Sólo que una reflexión respecto de la naturaleza del punto ha surgido en las respuestas de los sujetos respecto de la valoración de la exactitud de la representación (ítems 1c y 2c).

6.3.2. Modelo 2 para el ítem 3

En este modelo cada sujeto debe valorar tres afirmaciones relativas a la exactitud de la representación. En la tabla 6.57 incluimos las frecuencias obtenidas en cada afirmación.

Las afirmaciones incluidas en este modelo no son todas las consideradas en el modelo 1. Por esa razón, estudiaremos en primer lugar las frecuencias de las afirmaciones incluidas en ambos modelos y en segundo lugar las afirmaciones que están incluidas únicamente en el modelo 2.

Afirma-ción	Ítem 3					
	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo	Muy de acuerdo	No contesta
A	1	2	7	15	5	0
B	2	2	2	7	7	0
D	1	0	2	1	6	0
E	1	6	12	9	2	0
F	3	0	3	3	1	0
G	0	2	2	9	7	0
H	2	3	5	8	2	0
J	2	2	2	1	3	0

Tabla 6.57: Frecuencias obtenidas en las afirmaciones incluidas en el modelo 2

6.3.2.1. Comparación de las frecuencias obtenidas en ambos modelos

Respecto de las afirmaciones incluidas en ambos modelos (afirmaciones A, B, E, G y J), en la tabla 6.58 comparamos los totales obtenidos en los modelos 1 y 2 para cada uno, organizadas en tres grupos: franja de desacuerdo, indecisos y franja de acuerdo.

La afirmación A obtiene en ambos modelos respuestas similares (hay un predominio de respuestas de acuerdo).

Afir-mación	Modelo	Franja Desacuerdo	Indeciso	Franja Acuerdo
A	Modelo 1	3	2	24
	Modelo 2	3	7	20
B	Modelo 1	3	2	7
	Modelo 2	4	2	14
E	Modelo 1	9	10	9
	Modelo 2	7	12	11
G	Modelo 1	4	3	23
	Modelo 2	2	2	16
J	Modelo 1	2	1	12
	Modelo 2	4	2	4

Tabla 6.58: Frecuencias de las afirmaciones incluidas en los modelos 1 y 2

La afirmación B, incluida en el criterio de valoración 'Infinitas cifras decimales', obtiene una mayor frecuencia en los dos modelos en la franja correspondiente al acuerdo. La razón entre frecuencias de acuerdo / frecuencias en desacuerdo es de 7/3 para el modelo 1 y 14/4 (7/2) para el modelo 2. Podemos conjeturar que ha habido en el modelo 2 una mayor proporción de sujetos de acuerdo puesto que la afirmación B se ha usado en este modelo siempre acompañada por otra afirmación (la frase F y la frase J) que también hace referencia a la inexactitud debido a las infinitas cifras de los números correspondientes).

La afirmación E, incluida en el criterio de valoración 'Naturaleza del punto geométrico' ha obtenido en los dos modelos frecuencias similares. En ambos casos, las opiniones de los sujetos se encuentra muy dividida.

La afirmación G, incluida en el criterio de valoración 'Precisión de los instrumentos de representación', ha obtenido en ambos modelos una aceptación por parte de los sujetos. La razón frecuencias de acuerdo / frecuencias en desacuerdo es en el modelo 1 igual a 23/4 (es decir, 5'75) y en el modelo 2 igual a 16/2 (es decir, 8).

La afirmación J, incluida en el criterio 'Infinitas cifras decimales' ha obtenido frecuencias dispares en ambos modelos. Mientras que en el modelo 1 predominan los sujetos incluidos en la franja de acuerdo, en el modelo 2 hay tantos sujetos en la franja de acuerdo como en la franja de desacuerdo. Este resultado contradice la hipótesis de que en el modelo 2 podría haber una inclinación de la opinión hacia el acuerdo, dado que la afirmación J viene acompañada por la afirmación B que también hace referencia a la inexactitud por la presencia de infinitas cifras decimales.

Luego, teniendo en cuenta que en el modelo 2 se esperaba observar la influencia de dos afirmaciones con contenidos similares, podemos concluir que no es posible confirmar, a la vista de los datos, tal influencia. Desde luego sólo mediante las entrevistas confirmatorias podremos profundizar en las opiniones de los sujetos.

6.3.2.2. Resultados obtenidos en las afirmaciones incluidas únicamente en el modelo 2

En este punto estudiaremos las frecuencias obtenidas en las opciones referidas al grado de acuerdo con las afirmaciones que han sido utilizadas en el modelo 2 y no en el modelo 1.

Frase D: *"Sí. Tendría la mitad, y ahora, utilizo otra vez la mediatriz, y te daría otra vez la mitad."*

Esta afirmación se ha incluido en el criterio de valoración ‘Procedimiento de representación’, y 6 de los 7 expertos consultados coinciden con esta asignación.

Los sujetos que han tenido que valorar la afirmación han estado, en general, de acuerdo con ella, puesto que 1 sujeto se ha mostrado en desacuerdo, 2 indecisos y 7 en la franja de acuerdo.

Frase F: *“No, no es exacto. Si tienes infinitas cifras no puedes hallar la marca.”*

La afirmación se ha incluido en el criterio de valoración ‘Infinitas cifras decimales’, y los 7 expertos consultados están de acuerdo con esta afirmación.

La opinión de los sujetos que han valorado esta afirmación se muestra muy dividida, puesto que 3 sujetos se encuentran en la franja del desacuerdo, 3 indecisos y 4 en la franja de acuerdo.

Frase H: *“Yo creo que no. Los hombres no podemos perfeccionar el punto exacto, no lo podemos distinguir así con la vista.”*

Cinco de los siete expertos consultados ha coincidido en la asignación de esta afirmación en el criterio de valoración ‘Naturaleza del punto geométrico’.

Aunque la opinión de los sujetos está dividida, se observa una inclinación a aceptar la afirmación.

6.3.3. Respuestas al ítem 3 y conflictos

6.3.3.1. Resultados obtenidos en las afirmaciones relacionadas con los conflictos

En este punto estudiaremos los resultados generales obtenidos para las afirmaciones relacionadas con los conflictos.

En la tabla 6.59 incluimos los totales obtenidos en las afirmaciones relacionadas con el conflicto 1 (dificultad en admitir el control de un proceso infinito) y el conflicto 2 (relación entre objeto matemático y objeto físico).

En los dos conflictos predominan los sujetos que están de acuerdo con las afirmaciones correspondientes.

En el conflicto 1 (dificultad en admitir el control de un proceso infinito), las afirmaciones correspondientes se refieren a que la representación no es exacta porque el número tiene infinitas cifras decimales. Menos del 20% de los sujetos está en desacuerdo con estas frases, alrededor del 10% están indecisos y el 61% está incluido en la franja del acuerdo.

Respecto del conflicto de la relación entre el objeto o concepto matemático y el objeto físico, las afirmaciones correspondientes hacen alusión a que la representación no es exacta debido a que el punto (ideal) no puede identificarse con la marca hecha sobre la recta. En este caso, aunque también predominan los sujetos que están de acuerdo con esas afirmaciones, el porcentaje es menor (54%), aunque también supera la mitad del total.

En las afirmaciones relacionadas con el conflicto 2 se observa que hay más sujetos indecisos que sujetos en la franja del desacuerdo, mientras que en las afirmaciones relacionadas con el conflicto 1 esos valores están invertidos.

Conflicto	**Afirma-ción**	**Modelo**	**Franja Desacuerdo**	**Indeciso**	**Franja Acuerdo**
Conflicto 1	B	Modelo 1	3	2	7
		Modelo 2	4	2	14
	F	Modelo 2	3	3	4
	J	Modelo 1	2	1	12
		Modelo 2	4	2	4
	Total (100%)		16 (24%)	10 (15%)	41 (61%)
Conflicto 2	A	Modelo 1	3	2	24
		Modelo 2	3	7	20
	E	Modelo 1	9	10	9
		Modelo 2	7	12	11
	H	Modelo 2	5	5	10
	Total (100%)		27 (20%)	36 (26%)	74 (54%)

Tabla 6.59: Resultados obtenidos en las respuestas relacionadas con los dos conflictos

Salvo la diferencia indicada en el párrafo anterior, en general se observa que ha habido una respuesta similar en ambos conflictos: más de la mitad de los sujetos está de acuerdo con las frases correspondientes, y los sujetos restantes se reparten entre la indecisión y el desacuerdo.

6.3.3.2. Comparación entre resultados ítems 1 y 2 y resultados ítem 3.

En este punto estudiaremos las respuestas al ítem 3 en los dos grupos de sujetos (con y sin respuestas conflictivas) cuyas respuestas fueron estudiadas durante 6.2.4.

En la tabla de contingencia 6.60 cruzamos la respuesta escogida por el sujeto en el ítem 3 en las frases que consideramos relacionadas con el conflicto 1, con la ausencia o presencia de conflicto 1 en las respuestas del sujeto en los ítems 1 y 2.

Podemos comprobar en general una coherencia entre las 20 respuestas conflictivas (conflicto 1) referidas a la exactitud de la representación realizada o a la posibilidad de dividir por la mitad el segmento resultante y las respuestas que estos sujetos han dado en el ítem 3.

En efecto, de las 20 respuestas relacionadas con el conflicto del control de procesos infinitos, 9 de estos sujetos no han tenido que valorar ninguna de las afirmaciones B, F ó J relacionadas con ese conflicto, y de los 11 que sí se han encontrado con alguna de esas afirmaciones, 10 han estado de acuerdo y uno sólo se ha manifestado en contra.

Respuesta a la afirmación del ítem 3 relacionada con el conflicto 1		**Conflicto 1 en ítems 1 y 2**		**Total**
		Rta. no conflictiva	**Rta. conflictiva**	
Sin afirmación		41	9	50
Una sola afirmación	En desacuerdo	3	1	4
	Indeciso	4		4
	De acuerdo	17	7	24
Dos afirmaciones	Ambas en desacuerdo	6		6
	Ambas de acuerdo	3	3	6
	Desacuerdo/Acuerdo	2		2
	Indeciso/Acuerdo	2		2
	Total	78	20	98

Tabla 6.60: Tabla de contingencia entre respuestas al ítem 3 respecto de las afirmaciones relacionadas con el conflicto 1 y la presencia o ausencia de respuesta conflictiva (conflicto 1) en los ítems 1 y 2.

Entre las 78 respuestas no conflictivas correspondientes al conflicto 1 en los ítems 1 y 2, encontramos que 20 están de acuerdo con las afirmaciones encontradas en el ítem 3 (en las que se alude a la inexactitud de la representación debido a la presencia de infinitas cifras decimales del número), 9 están en desacuerdo con esas afirmaciones y 4 permanecen indecisos. Cuatro sujetos que han debido valorar en el ítem 3 dos afirmaciones referidas a la infinitud de las cifras decimales no han sido del todo coherentes (filas 8 y 9 de la tabla 6.60), especialmente dos sujetos que han indicado que están de acuerdo con una afirmación y en desacuerdo con otra.

En la tabla de contingencia 6.61 cruzamos las respuestas al ítem 3 con la presencia o ausencia de respuesta conflictiva relacionada con el conflicto 2 en los ítems 1 y 2.

Entre los ítems 1 y 2 se han observado tan sólo dos respuestas relacionadas con conflicto 2. En la tabla 6.61 comprobamos que de estos dos sujetos, uno de ellos no ha encontrado en el ítem 3 ninguna afirmación relacionada con el conflicto 2. El otro, en cambio, ha encontrado una afirmación relacionada con este conflicto y ha indicado que está de acuerdo con la misma.

En cuanto a los sujetos entre los que no se observa el conflicto 2, comprobamos que 33 están de acuerdo con algunas de las afirmaciones A, E o H del ítem 3 relacionadas con el conflicto 2, 14 indecisos y 18 en desacuerdo.

Doce sujetos que han tenido que valorar dos afirmaciones relacionadas con el conflicto 2 han dado respuestas diferentes en cada una.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Respuesta del ítem 3 a las afirmaciones relacionadas con el conflicto 2</th><th colspan="2">Conflicto 2 en ítems 1 y 2</th><th rowspan="2">Total</th></tr>
<tr><th>Sin conflicto</th><th>Conflicto 2</th></tr>
<tr><td colspan="2">Sin afirmación</td><td>17</td><td>1</td><td>18</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Una sola afirmación</td><td>No contesta</td><td>2</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>En desacuerdo</td><td>16</td><td></td><td>16</td></tr>
<tr><td>Indeciso</td><td>14</td><td></td><td>14</td></tr>
<tr><td>De acuerdo</td><td>27</td><td>1</td><td>28</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Dos afirmaciones</td><td>Ambas desacuerdo</td><td>2</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>Ambas de acuerdo</td><td>6</td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td>Desacuerdo/Indeciso</td><td>2</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td>Desacuerdo/Acuerdo</td><td>8</td><td></td><td>8</td></tr>
<tr><td>Indeciso/Acuerdo</td><td>2</td><td></td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>96</td><td>2</td><td>98</td></tr>
</table>

Tabla 6.61: Tabla de contingencia entre respuestas al ítem 3 respecto de las afirmaciones relacionadas con el conflicto 2 y la presencia o ausencia de respuesta conflictiva (conflicto 2) en los ítems 1 y 2.

6.4. Conclusiones del estudio de respuestas del cuestionario

En 6.2.2 nos ocupamos de organizar todas las respuestas obtenidas en los ítems 1 y 2 del cuestionario mediante tablas que recogen de forma resumida el desempeño de los sujetos y su valoración por la investigadora. Además, en 6.2.3 realizamos una cuidadosa selección y estudio de respuestas a los incisos c) (valoración de la exactitud de la representación) y d) (valoración de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento obtenido), que condujo a la obtención de una lista de 20 sujetos (tabla 6.11) cuyas respuestas a algunos de los incisos mencionados (o a ambos) evidencia la presencia de afirmaciones relacionadas con alguno de los dos conflictos que estamos estudiando.

En 6.2.4 estudiamos en profundidad las respuestas consideradas conflictivas, en comparación con respuestas consideradas no conflictivas. El objeto de este estudio es ampliar la información de diferentes cuestiones, como la manifestación de respuestas conflictivas según el nivel al que pertenece al sujeto, o en relación a los procedimientos de representación utilizados, el contenido de las afirmaciones relacionadas con algún conflicto respecto de los criterios para el estudio de los números reales, la comparación de nuestra valoración de respuestas con la valoración realizada por un profesor actualmente en ejercicio, entre otras. La comparación de estos resultados con los provenientes de las respuestas no conflictivas ha permitido caracterizar en mayor detalle el desempeño y las interpretaciones de los sujetos con respuestas conflictivas.

La confirmación de la presencia de conflictos se realizará durante las entrevistas confirmatorias. Antes de estudiar las respuestas de los sujetos durante las entrevistas, realizaremos un breve resumen de los resultados obtenidos en el estudio llevado a cabo en los apartados 6.2 y 6.3.

El resumen seguirá el orden seguido, con idea de exponer cómo algunas conjeturas enunciadas a la vista de algunos resultados son apoyadas o rechazadas por resultados posteriores.

Recordando que la investigación tiene un carácter descriptivo-interpretativo, las conjeturas deben considerarse como posibles explicaciones de los resultados obtenidos, que están principalmente en función de las situaciones propuestas en el cuestionario, con todas las posibilidades y limitaciones que ello supone, y de las características de los sujetos a los que se administró el cuestionario.

6.4.1. Algunas conclusiones del estudio descriptivo (6.2.4.2)

Entre las respuestas conflictivas, las relacionadas con el conflicto 1 tienen una frecuencia notablemente superior que las relacionadas con el conflicto 2. Aunque las razones de este resultado son diversas, conjeturamos que la presencia explícita de las infinitas cifras decimales de los números induce a los sujetos a centrar su respuesta (en los incisos c y d) en esa característica, mientras que el conflicto 2 supone la presencia de un razonamiento más abstracto, que es independiente de la escritura del número.

Mientras que las respuestas conflictivas relacionadas con el conflicto 1 se presentan en sujetos correspondientes a los tres niveles considerados (1º y 2º de Bachillerato y 1º de Licenciatura en Matemáticas), con un predominio de sujetos de 1º de Bachillerato, las relacionadas con el conflicto 2 se observan únicamente en dos sujetos de 1º de Licenciatura. Esto en cierta medida corrobora nuestra conjetura de que el conflicto 2 supone la presencia de un razonamiento más abstracto, que es independiente de las escritura simbólica del número representado.

Entre los sujetos sin respuestas conflictivas, en cambio, predominan los pertenecientes a 2º de Bachillerato, seguidos por los de 1º de Licenciatura y finalmente por los de 1º de Bachillerato.

Con respecto a la presencia de respuestas conflictivas relacionadas con el conflicto 1 en cada tarea, se observan con mayor frecuencia en la tarea 2 (Valoración de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento de longitud dada). Las relacionadas con el conflicto 2, en cambio, se observan sólo en la tarea 1 (Valoración de la exactitud de la representación).

La tarea 2 ha sido diseñada especialmente con el objeto de detectar afirmaciones relacionadas con el conflicto 2, es decir, la relación entre objeto matemático y objeto del mundo físico. En la sección 5.1.5 indicamos también que es posible que surja en la resolución de la tarea 2 el conflicto 1, en aquellos casos en que la longitud del segmento se expresa mediante un número con infinitas cifras.

Después de estudiar las respuestas comprobamos que el conflicto 2 no se manifiesta en la resolución de la tarea 2, mientras que sí lo hace el conflicto 1. Es posible que la tarea no haya estado bien diseñada, en el sentido de que no permita el estudio del conflicto 2 (a este respecto caber recordar que la propuesta inicial consistía en la consideración de diferentes opciones, según se incluya o no la longitud y un dibujo del segmento, respecto de los datos incluidos en el enunciado, que no fueron consideradas para que el cuestionario no resultase demasiado extenso). También es posible que el conflicto 1 esté íntimamente ligado con el conflicto 2, y en esta tarea concreta sea el primero el que "precipita", a causa de la presencia de las infinitas cifras decimales del número que mide la longitud del segmento. Independientemente de la validez de estas conjeturas, se torna necesario estudiar en mayor detalle las respuestas para desarrollar una explicación plausible.

Con respecto a la aparición de los distintos números (representados en la recta) en las respuestas conflictivas y no conflictivas, estudiamos en las tablas 6.17 y 6.18 que los porcentajes de números que aparecen en los grupos con y sin respuestas conflictivas son similares a los porcentajes de dichos números en el total de cuestionarios estudiados.

Mientras que las respuestas conflictivas relacionadas con el conflicto 1 se observan especialmente y como es de esperar, en los números presentados mediante la escritura decimal infinita (0’333... y 1’4142136..., y en menor grado en √5), las relacionadas con el conflicto 2 se observan en los números 5/8 y 1’414136...). Hemos dicho que la presencia del conflicto 2 es independiente de la escritura simbólica del número. Con respecto al número √5, observamos que las respuestas conflictivas referidas al conflicto 1 se manifiestan para este número con más frecuencia en la tarea 2 que en la tarea 1. A este respecto indicamos que es posible que los sujetos consideraran, durante la tarea 2, la división del número entre 2, y pensasen en la imposibilidad de hallar el resultado al dividir entre 2 un número con infinitas cifras decimales.

Con respecto a la utilización de procedimientos de representación, comprobamos que tanto en el grupo de sujeto sin respuestas conflictivas como en el de sujetos con respuestas conflictivas predomina la utilización de representaciones en las que la relación entre las marcas correspondientes a 0, 1 y el número *r* correspondiente se apoyan en una relación numérica (siendo O, I y R los puntos correspondientes a 0, 1y *r,* en el gráfico, se verifica que OR = r. OI).

En cuanto a la presencia de respuestas conflictivas, el conflicto 1 es más frecuente en las representaciones basadas en relaciones numéricas entre los segmentos determinados por los tres puntos indicados, mientras que el conflicto 2 se manifiesta en dos casos en los que los procedimientos utilizados no se apoyan en ninguna propiedad numérica.

6.4.2. Algunas conclusiones para la relación criterios / respuestas conflictivas (6.2.4.3)

6.4.2.1. Tarea 1

El criterio que predomina ampliamente en la tarea de valorar la exactitud de la representación es Fenomenología.

En general, los sujetos sin respuestas conflictivas justifican sus respuestas referidas a la exactitud de la representación aludiendo al hecho de que no es posible obtener representaciones exactas en el papel, debido a los errores provenientes del uso de materiales. En segundo lugar, y con frecuencia también alta, aluden al procedimiento de representación utilizado. En menor medida, mencionan la conveniencia de utilizar una determinada representación simbólica del número (criterio Representaciones) y la necesidad de redondear o de despreciar decimales (criterio Operaciones). Con frecuencias muy bajas se utilizan también los criterios Orden y Tipo de número.

Los argumentos más usados por los sujetos con respuestas conflictivas son la imposibilidad de obtener en el plano físico una marca exacta y la alusión a las infinitas cifras decimales de los números (pertenecientes a los criterios Fenomenología y Representaciones respectivamente). Estos argumentos en muchos casos se utilizan en forma conjunta. Estos sujetos justifican la inexactitud de la representación basándose en dos argumentos, uno adecuado y otro que, en nuestra interpretación, indica que nos hallamos en presencia de conflicto.

Otro argumento usado por los sujetos con respuestas conflictivas relacionadas con el conflicto 1 es la referencia a que se trata de números irracionales. Esta afirmación en algunos casos viene acompañada por la alusión a las infinitas cifras (consecuencia de la irracionalidad del número), o bien de la imposibilidad de determinar un punto en la recta para un número irracional.

El argumento de los sujetos con respuestas conflictivas relacionadas con el conflicto 2 combina la alusión a consideraciones relacionadas a la existencia de puntos en la recta (consideraciones de tipo ‘ideal’) con la imposibilidad de obtener en el plano concreto representaciones exactas o con valoraciones de lo que constituye para ellos la representación de un número en la recta.

6.4.2.2. Tarea 2

En las respuestas a la valoración de la posibilidad de dividir exactamente por la mitad un segmento de longitud determinada predomina ampliamente el criterio Fenomenología.

Entre las respuestas no conflictivas, las afirmaciones más frecuentes se refieren al procedimiento utilizado para dividir por la mitad el segmento obtenido (en especial, la alusión al trazado de la mediatriz). Con una frecuencia menor, encontramos la alusión a la división entre dos (del número que expresa la longitud del segmento, o de la longitud del segmento obtenida mediante el uso de un instrumento de medición) y la alusión a la imposibilidad de obtener en el plano concreto la mitad exacta del segmento.

Con referencia a la alusión de la división entre dos, es posible que algunos sujetos (que utilizan ese único argumento) hayan confundido la división del segmento con la división entre dos del número que expresa su longitud. Esto sólo podría confirmarse con una entrevista confirmatoria.

A excepción de un sujeto, todos los sujetos con respuestas conflictivas (conflicto 1) en la tarea 2 aluden a las infinitas cifras de los números considerados. En algunos casos se utiliza esa justificación en forma exclusiva, y en otros casos se combina con la referencia a la división entre dos o al hecho de que se trata de un número irracional.

Al igual que en algunos sujetos con respuestas no conflictivas, no es posible determinar si estos sujetos piensan sólo en la división entre dos del número que expresa la longitud del segmento (no consideran la división entre dos del segmento).

Estas cuestiones podrán aclararse en caso de que estos sujetos sean entrevistados.

6.4.3. Algunas conclusiones relacionadas con la valoración del profesor experto (6.2.4.4)

En general se ha observado cierta afinidad entre la valoración del profesor (expresada en la puntuaciones que ha otorgado) y la nuestra. Basamos esta afirmación en el hecho de que la media de las puntuaciones del profesor es 7 (es decir, supera en dos puntos al aprobado), en tanto que las representaciones de números incluidas en los 49 cuestionarios (respectivamente, 98 ítems) son considerados correctos o con ligeras imperfecciones según nuestra perspectiva. No obstante, ha habido puntuaciones inferiores al aprobado.

Todas las medidas de tendencia central del grupo sin respuestas conflictivas son mayores que las correspondientes al grupo con respuestas conflictivas.

Hemos indicado que el profesor ha otorgado mayor puntuación a las representaciones en la recta apoyadas en propiedades geométricas, cuestión que podría explicar en cierta medida alguna diferencia.

Con el objeto de aplicar a la valoración del profesor el mismo criterio que aplicamos a la primera selección de repuestas (exigimos que las representaciones fueran correctas), estudiamos las puntuaciones de los grupos con y sin respuestas conflictivas de los sujetos cuya puntuaciones son mayor o igual que el aprobado (es decir, 5), y posteriormente, los ítems con puntuaciones mayor o igual que la mediana (que es 7). En los dos estudios observamos diferencias entre las respuestas consideradas conflictivas y las consideradas no conflictivas y su "agrandamiento".

Hemos estudiado las puntuaciones otorgadas por el profesor a los inciso c y d y los hemos estudiado según la presencia o ausencia de conflicto en dichos incisos. Nos encontramos en todos los casos que la media de los grupos sin respuestas conflictivas es superior a la correspondiente a los grupos con respuestas conflictivas.

En las tres comparaciones de media realizadas (en primer lugar, con los 98 ítems, en segundo lugar quitando los ítems con puntuaciones inferiores al aprobado y por último quitando los ítems con puntuaciones inferiores a la mediana) comprobamos que las medias poblacionales son distintas y el valor del estadístico t es cada vez mayor. Reconociendo que el estudio no se ha realizado con muestras representativas, avanzamos algunas conclusiones.

A medida que se reduce la distancia entre las notas, los dos grupos parecen distanciarse cada vez más. Las causas de este comportamiento pueden ser diversas, como por ejemplo:

- Resultados estadísticos realizados en condiciones no adecuadas (muestra no representativa, tamaño de los grupos desiguales).
- Correctores diferentes: las diferencias pueden ser consecuencia del profesor que ha evaluado los cuestionarios. Es posible que con otro corrector los resultados varíen.
- Ausencia o presencia de respuesta conflictiva.

Si esta última razón es verdadera, nos encontramos con el resultado de que los grupos se van distinguiendo porque en uno las repuestas son conflictivas y en el otro no. A partir de este resultado, enunciamos algunas conjeturas, que podrían plantearse como hipótesis para futuras investigaciones (esta vez trabajando con una muestra representativa):

- Los errores y los conflictos se ocultan mutuamente.
- La enseñanza aparentemente no elimina el conflicto de todos los sujetos, aunque estos tengan un buen rendimiento escolar.
- La resolución del conflicto aparentemente no va ligada a la madurez o a la edad de los individuos.

Estos resultados conducen a afirmar que la presencia de respuestas conflictivas (desde nuestro punto de vista), ha generado (por parte del profesor experto) una reducción sistemática de puntuaciones. La investigadora puede inferir que los conflictos han generado "ruido" en la valoración del profesor y, de ser esto confirmado, aportaría una "categoría de análisis" (los conflictos) que habría que traducir a procedimientos de detección durante las tareas de evaluación por parte de los profesores en ejercicio.

6.4.4. Algunas conclusiones para los resultados obtenidos en el ítem 3 (sección 6.3)

Las respuestas al ítem 3 han mostrado su utilidad para tomar decisiones relativas a algunos sujetos en los que se observaba afirmaciones relacionadas con el conflicto 1 en las respuestas a los ítems 1c, 1d, 2c y 2d. Con respecto a los resultados globales obtenidos en este ítem, adelantamos algunas conclusiones, resultantes del análisis realizado en la sección 6.3.

Con respecto a las afirmaciones relacionadas con el conflicto de las infinitas cifras decimales, la opinión de los sujetos en ambos modelos se ha mostrado a favor de su aceptación (incluidas en el criterio de valoración 'Infinitas cifras decimales'). Más de la mitad de los sujetos (61%) ha indicado estar de acuerdo con las afirmaciones relacionadas con el conflicto 1, seguido por el 24% que se ha manifestado en desacuerdo y el 15% indeciso.

Con respecto a las afirmaciones relacionadas con el conflicto de la relación entre objeto matemático y objeto del mundo físico, en ambos modelos la opinión de los sujetos se ha inclinado hacia la aceptación de las afirmaciones correspondientes (incluidas en el criterio de valoración 'Naturaleza del punto geométrico'). En este caso las diferencias entre los grupos En desacuerdo / Indeciso / De acuerdo son menos marcadas que en el conflicto 1. El 54% de los sujetos está de acuerdo con esas afirmaciones, seguido por el 26% que se mantiene indeciso y el 20% que está en contra.

De estos resultados podemos concluir que se han observado evidencias de una inclinación general de los sujetos hacia la aceptación de las afirmaciones relacionadas con los conflictos. Esperamos obtener información puntual de las opiniones de los sujetos durante las entrevistas confirmatorias.

6.5. Entrevistas Confirmatorias

6.5.1. Introducción

El objetivo de estas entrevistas es confirmar la interpretación de las respuestas al cuestionario en relación con la presencia o ausencia de conflictos en los sujetos cuyas respuestas han sido consideradas conflictivas o no conflictivas, respectivamente.

Hemos estudiado las respuestas al cuestionario consideradas conflictivas de 20 sujetos y las respuestas consideradas no conflictivas de 29 sujetos. Hemos escogido algunos de esos sujetos (en total, 11) para realizar entrevistas que permitan confirmar y profundizar la interpretación de las respuestas. Aunque nuestro enfoque es cualitativo, aceptamos todas las posibilidades de los estudios confirmatorios cuantitativos, a saber:

Al interpretar (del cuestionario) que una respuesta es conflictiva (respectivamente, no conflictiva), el estudio de las entrevistas confirmatorias puede llevarnos bien a confirmar o bien a rechazar nuestra primera interpretación.

Una tercera posibilidad, propia del enfoque cualitativo ("no es posible confirmar ni rechazar"), no se ha dado en nuestro estudio, porque la hemos incorporado al caso más desfavorable para nuestra investigación (no confirmación).

En este apartado incluimos, en primer lugar, una descripción del guión de las entrevistas. Si bien nos centramos en solicitar aclaraciones o explicaciones de las afirmaciones realizadas por los sujetos en el cuestionario, es posible señalar algunas ideas consideradas

En segundo lugar describimos brevemente la codificación de las transcripciones.

Por último, incluimos el estudio de las respuestas de los sujetos. El estudio consta de dos partes. En la primera parte (6.5.4.1) describimos brevemente el desempeño individual de los sujetos entrevistados, mediante una serie de descriptores comunes que incluyen, entre otros, los datos personales, los conflictos con que se relacionan las respuestas conflictivas observadas en el cuestionario, una valoración de la investigadora respecto de la ausencia o presencia de conflictos durante la entrevista y algunos errores (cuando se han observado). En la segunda parte (6.5.4.2) incluimos los resultados de las entrevistas en cuanto a la confirmación de nuestra interpretación de las respuestas al cuestionario. Es decir, valoramos si se ha confirmado la ausencia o presencia de conflicto en cada uno de los sujetos entrevistados.

El muestreo ha sido a propósito (León y Montero, 1999). En el anexo 14 describimos la selección de los sujetos que han sido entrevistados. En la tabla 6.62 incluimos los sujetos resultantes del proceso de selección.

Centro	Conflicto	Curso	Sujeto	Posibles suplentes
C3	C1	2º Bach.	222	253 ó 255
			234	253 ó 255
	Sin rta. conflictiva	1º Bach.	134	112, 144
C1	C1	1º Bach.	732	742 ó 733
			744	723
	Sin respuesta conflictiva	2º Bach.	822	811, 812, 822, 832, 841, 855
Facultad de Ciencias	C1	1º L.M.	352	(Con conflicto rechazado en última selección) 324
			355	
	C2		322	-
			341	
	Sin respuesta conflictiva		343	344 ó 345

Tabla 6.62: Sujetos seleccionados para entrevistar.

Debido a que el sujeto 134 (sin respuesta conflictiva) no aceptó ser entrevistado, hemos entrevistado en su lugar al sujeto 112.

6.5.2. Guión de la entrevista

El objetivo de la entrevista es estudiar las respuestas seleccionadas en el cuestionario, para confirmar la presencia o ausencia de conflictos.

En caso de que no se confirme el conflicto en algún sujeto, las razones son variadas. Una razón plausible es que la búsqueda o la determinación del conflicto por parte de la investigadora no haya sido la adecuada. Otra razón es que el sujeto modifique su respuesta de modo que el conflicto no aparezca. Este último caso escapa al control de la investigadora.

La entrevista brinda además la oportunidad de comprobar si estos sujetos han interpretado cada cuestión propuesta en el cuestionario de la forma esperada, o bien si se han producido interpretaciones alternativas, no consideradas en el análisis de las situaciones.

La confirmación de la ausencia o presencia de conflicto puede abordarse mediante, al menos, dos vías posibles:

Vía a) Plantear preguntas o situaciones semejantes a las presentadas en el cuestionario.

Solicitar la representación en la recta de números constructibles cuya escritura decimal es infinita (planteada en cuestionario).

Solicitar la realización de procedimientos geométricos con segmentos cuyas longitudes (en función de una unidad determinada) se expresan mediante números constructibles cuya escritura decimal es infinita (en cuestionario, división mitad).

Vía b) Solicitar aclaraciones de las afirmaciones realizadas en el cuestionario.

A partir de las afirmaciones realizadas en el cuestionario por el sujeto, solicitar al sujeto que amplíe o aclare (después de releer lo que ha escrito) sus respuestas.

Hemos optado por dar prioridad a la vía b), como describimos a continuación.

En principio, solicitamos al sujeto que amplíe o comente las respuestas que ha dado en el cuestionario. Si el sujeto utiliza términos idénticos a los que ha usado en el cuestionario o bien si el sujeto no responde, la entrevistadora solicita que aclare el sentido de alguna expresión determinada (de su respuesta).

El sujeto puede ratificar, rectificar o añadir información nueva. Si el sujeto ratifica sus afirmaciones, la entrevistadora procura observar si no se producen incoherencias en sus respuestas. En caso de que se presentase alguna contradicción entre las respuestas del sujeto, la entrevistadora intentará ponerla de manifiesto. La estructura del cuestionario permite estudiar posibles incoherencias, puesto que en los ítems 1 y 2 se proponen tareas idénticas para números diferentes.

Si el sujeto rectifica sus afirmaciones, la entrevistadora intentará destacar las diferentes respuestas (la que figura en el cuestionario y la nueva aportada por el sujeto en la entrevista), y solicitará al sujeto que aclare las diferencias. Cuando el sujeto reconozca que sus opiniones son opuestas, la entrevistadora solicitará que tome partido por una de ellas.

Si el sujeto añade nueva información, la entrevistadora lo anima a que integre la nueva respuesta en la que figura en el cuestionario.

Hasta aquí, estamos dentro de la vía b).

Si la entrevistadora no está segura de la opinión o postura del sujeto, propone un número diferente a los dados en el cuestionario, y solicita al sujeto que realice la tarea (cuya respuesta interesa) con el nuevo número. La selección de este número estará en función de la cuestión que desea aclarar la entrevistadora. En este caso, nos encontramos en la vía a).

6.5.3. Codificación de la información

6.5.3.1. Codificación de las transcripciones

El código utilizado en la transcripción de las entrevistas es exactamente el mismo que el usado para las entrevistas exploratorias.

La transcripción se realiza en una tabla de tres columnas. En la primera enumeramos comenzando desde cero los minutos transcurridos desde el inicio de la entrevista.

En la segunda columna enumeramos las frases de los interlocutores con un código de dos cifras, a partir de 01.

En la tercera columna incluimos las frases de los interlocutores, identificando con A ó E según corresponda cada frase al sujeto o a la entrevistadora, respectivamente.

Así como lo hicimos para las entrevistas exploratorias, indicamos con puntos suspensivos las pausas prolongadas de algún interlocutor. Las frases encerradas entre corchetes contienen la descripción de acciones, gestos o expresiones de algún interlocutor, observadas en la grabación en vídeo. Los puntos suspensivos encerrados entre corchetes ([...]) indican que una parte del diálogo no ha sido transcrita por dificultades con la audición.

En este caso, no se añaden las columnas cuarta y quinta utilizadas en la codificación de la interpretación de las entrevistas exploratorias.

En el anexo 16 incluimos las transcripciones de tres entrevistas.

6.5.4. Estudio de las respuestas

El estudio de las respuestas consiste en el análisis de las frases de los sujetos orientado hacia la confirmación de las interpretaciones de las respuestas del cuestionario.

En 6.5.4.1 describimos el desempeño individual de los sujetos mediante una serie de descriptores comunes.

En 6.5.4.2 presentamos un resumen de los resultados observados referido a la confirmación de los conflictos.

En el estudio que sigue, las frases de los sujetos contenidas en el cuestionario, se indican en cursiva. Las frases de los sujetos durante el transcurso de la entrevista se identifican de dos modos: (a) se colocan entre comillas ("..."), o bien, (b) si se trata de un fragmento de entrevista, están precedidas por la letra A (de alumno).

Ejemplos:

- Frase del alumno contenida en el cuestionario: *es un número inexistente.*
- Frase del alumno contenida en la entrevista:

(a) "dentro de un punto, hay infinitos átomos, y dentro de un átomo, infinitos puntos", ó

(b) A Pues, porque al tener muchos dígitos nunca lo puedes... nunca lo puedes precisar. Entonces que podemos decir que no existe.

6.5.4.1. Informes individuales

En esta sección realizamos un informe individual del desempeño de cada sujeto entrevistado.

Para cada sujeto indicamos:

- Datos del sujeto: código, nivel, centro y edad.
- La presencia o ausencia de respuesta conflictiva, y si procede, el conflicto observado (Conflicto 1 ó 2) en el cuestionario, acompañado por el número en que se observa.
- En caso de que se observe alguna respuesta conflictiva, la tarea en que se observa (Valoración de la exactitud de la representación, valoración de la posibilidad de dividir el segmento obtenido por la mitad, o ambas).
- Impresión que genera el entrevistado en cuanto a la seguridad en sí mismo y a la expresión en voz alta.
- Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista en las tareas 1, 2 y en el ítem 3, acompañado de comentarios explicativos.
- Errores observados.

Datos del sujeto: Código: 144. Nivel: 1º de Bachillerato. Centro: C1. Edad: 16 años
Duración aproximada de la entrevista: 14' **Conflicto observado en el cuestionario:** Sujeto sin respuesta conflictiva. **Impresión que genera el entrevistado en cuanto a:** **Seguridad en sí mismo:** En algunas respuestas el sujeto se muestra inseguro (frases 1207 y 1213). **Expresión en voz alta:** Adecuada. **Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista** **En tarea 1:** Sin conflicto. **Comentario:** El sujeto indica que no es exacto porque "para que fuera exacta exacta habría que hacer muchas divisiones dentro de la recta". (frase 0101). La investigadora muestra la representación geométrica de √2, y al interrogar al sujeto acerca de si se han representado todas las cifras, éste al principio reconoce que sí (frase 1205) y luego duda (frases 1207/13). Termina indicando: "Pero... sí lo considero de una manera más exacta ésta [mediante Pitágoras] que ésta [mediante intervalos encajados]" (frase 1208) . **En tarea 2:** Sin conflicto. **Comentario:** El sujeto propone la mediatriz para dividir el segmento por la mitad (frase 0301). Posteriormente pregunta a la entrevistadora si la división por la mitad debe ser de manera gráfica o numérica (frase 0611). La entrevistadora devuelve la pregunta, e interroga acerca de cómo interpreta él la pregunta 2d, el sujeto indica: "Porque de manera numérica... con dividir entre dos el número con la calculadora. Y de manera gráfica pues, lo mismo que antes. Trazamos la bisectriz del segmento" (frases 0703 y 0704). (En el inciso 1d del cuestionario el alumno propone las dos soluciones). La entrevistadora pregunta cómo determinaría la mitad del segmento si procede 'de manera numérica', y el sujeto responde: "Si esto mide uno coma cuarenta y uno etc., pues, si lo divido entre dos, pues dibujar sólo la parte que dé, y dividirlo con una regla" (frase 0708). **En ítem 3:** De acuerdo con la primera afirmación relacionada con el conflicto 2, y en desacuerdo con la segunda. **Comentario:** Afirma que a simple vista no es posible determinar el punto exacto (frase 0901) y por otro lado que en algún momento se debe llegar a la marca exacta (frase 1003). **Errores observados:** Ninguno. **Comentario:** Parece confundirse cuando propone representar √5 mediante la representación de √1, √2, √3, √4, etc., (presumiblemente, mediante marcas equidistantes entre sí) pero al observar los resultados obtenidos en la calculadora renuncia a llevarlo a cabo (frases 0506 - 08, 0601 - 03).

Datos del sujeto: Código: 732. Nivel: 1º de Bachillerato. Centro: C1. Edad: 17 años
Duración aproximada de la entrevista: 15'
Conflicto observado en el cuestionario: Conflicto 1. **Número:** $\sqrt{5}$
Tarea en que se observa el conflicto: Valoración de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: **Seguridad en sí mismo:** En algunas respuestas la alumna se muestra insegura (frases 0906, 1006, 1213, 1308). **Expresión en voz alta:** Adecuada.
Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista **En tarea 1:** Sin conflicto. **Comentario:** Mantiene las respuestas que ha dado en el cuestionario, indicando que es exacto porque "he utilizado los procedimientos paso a paso" (frase 0101). **En tarea 2:** No se confirma el conflicto 1. **Comentario:** Ha habido una inadecuada interpretación de la tarea 1d (división mitad) del cuestionario por parte del sujeto. Éste indica que dividiría entre dos el resultado de raíz de 5. Cuando la entrevistadora pregunta cómo dividiría el segmento, se muestra sorprendida (frases 0303 - 0304, 0502), lo que interpretamos como que ha confundido la división del segmento con la división del número. Posteriormente indica que para dividir el segmento lo mediría y dividiría el resultado (frase 0310) e indica: "no podría apreciarlo bien arriba el papel" (frase 0601) por errores en el dibujo (frases 0610 y 0612). **En ítem 3:** No se confirma el conflicto 1. **Comentario:** En el cuestionario se ha manifestado de acuerdo con la frase relacionada con el conflicto 1. Durante la entrevista, al principio afirma que está de acuerdo (frases 1204/06) y luego cambia de idea (frases 1213, 1306). Al final afirma que no sería exacto "porque puedes tener un error" (frase 1310) y que está en desacuerdo con la afirmación referida a las infinitas cifras decimales (frases 1502 a 1508).

Datos del sujeto: Código: 744. Nivel: 1º de Bachillerato. Centro: C1. Edad: 16 años
Duración aproximada de la entrevista: 15’
Conflicto observado en el cuestionario: Conflicto 1. Algunas frases del sujeto en el ítem 1c podrían interpretarse como manifestando el conflicto 2. **Números:** 1’4152136... y √5
Tarea en que se observa el conflicto: Valoración de la exactitud de la representación y valoración de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: **Seguridad en sí mismo:** El sujeto se muestra seguro de sus afirmaciones. **Expresión en voz alta:** Adecuada.
Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista **En tarea 1:** Se confirma la dificultad relacionada con el conflicto 1. No ha podido despejarse la duda planteada con respecto a la existencia del conflicto 2. **Comentarios:** El sujeto en el cuestionario ha representado ambos números mediante intervalos encajados. La frase que utiliza a lo largo de todo el cuestionario para justificar la no exactitud es “siempre va a haber un punto entre medias” (frases 0205, 1108, 1209, 1403). La entrevistadora muestra la representación geométrica de √2, y el sujeto afirma que no es posible “concretar del todo el punto exacto” (frase 0905) para obtener el segmento de √2 unidades debido “a los decimales” (frase 0913). En cuanto a la representación de √5 mediante un procedimiento geométrico, afirma nuevamente: “siempre habrá un punto entre medias” (frase 1209). **En tarea 2:** Se confirma la dificultad relacionada con el conflicto 1. **Comentarios:** Queda claro que la respuesta dada por el sujeto en el cuestionario acerca de que nunca se acabaría de dividir está referida a la división de los números 1’41... ó √5 y no a la división del segmento (frases 0511 – 12 -14, 0601, 0707, 1304). Afirma que el segmento sí podría dividirse (midiéndolo y señalando con la regla su mitad, frase 0412), pero no el número, porque tiene “infinitos números decimales” (frase 0209) y “estarías toda la vida dividiendo” (frase 0215). Afirma que el número 1’4142... no es la longitud del segmento (frase 0709) comprendido entre 0 y √2. El conflicto se confirma cuando la entrevistadora muestra la construcción del segmento de longitud 1’4142... (frase de la entrevistadora 0806) y el sujeto dice que podría dividir el segmento por la mitad (midiéndolo con una regla, frase1004) pero “no vas a poder decir qué, o sea, a qué numero equivale” (frase 0917) y “no se puede poner el punto exacto, exacto” (frase 1010). La entrevistadora pregunta si no se puede por las cifras del número (frase 1011) y el sujeto contesta que cree que sí (frase 1012). **En ítem 3:** No se ha considerado.
Errores observados: El sujeto se ha mostrado confuso respecto de que el segmento comprendido entre el origen y un número representado mida el número dado.

Datos del sujeto: Código: 222. Nivel: 2º de Bachillerato. Centro: C3. Edad: 18 años
Duración aproximada de la entrevista: 11’
Conflicto observado en el cuestionario: Conflicto 1. **Número:** 1’4152136...
Tarea en que se observa el conflicto: Valoración de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: **Seguridad en sí mismo:** El sujeto se muestra seguro de sus afirmaciones. **Expresión en voz alta:** Adecuada.
Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista **En tarea 1:** Sin conflicto. **Comentario:** No ha justificado su respuesta 1c del cuestionario (en la que afirma que la representación es exacta). Cuando la entrevistadora solicita una explicación, afirma: “Es porque al... al saber, ¿no? que el número es la raíz de dos, ¿no?, y al hallar dónde está la raíz de dos, si se supone que el número es la raíz de dos y es ahí donde está [señala la marca obtenida con compás], pues,..., entonces supongo yo que la representación sí sería exacta, ¿no?” (frases 0403 y 0405). **En tarea 2:** No es posible confirmar el conflicto. **Comentario:** El sujeto se retracta de sus afirmaciones. Al principio mantiene la respuesta dada en el cuestionario e indica: “como no lo sé entero, pues no puedo hallarle la mitad a ese número, para localizarlo exactamente” (frase 0203). Más tarde (después de que la entrevistadora le hace ver que en el ítem 1a) lo ha ‘localizado’ reconoce que se está contradiciendo (0407) y afirma: “es que a lo mejor me confundí” (frase 0502). Posteriormente indica que de todas formas no puede dividir el segmento exactamente por la mitad “porque la calculadora no me coge todos los números” (frase 0613). Finalmente afirma: “La mitad sería hallándole la mediatriz a este segmento, ¿no?”, sólo que “puedo hallarlo pero no dando un número exacto, sino sólo con la mediatriz del segmento, pero no podría decir qué número es” (frase 0804). **En ítem 3:** No se ha planteado durante la entrevista.

Datos del sujeto:
Código: 234. Nivel: 2º de Bachillerato. Centro: C3. Edad: 17 años

Duración aproximada de la entrevista: 9’

Conflicto observado en el cuestionario: Conflicto 1. **Número:** 0’333...

Tarea en que se observa el conflicto: Valoración de la exactitud de la representación y valoración de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento.

Impresión que genera el entrevistado en cuanto a:
Seguridad en sí mismo: El sujeto se muestra seguro de sus afirmaciones.
Expresión en voz alta: Adecuada.

Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista
En tarea 1: Se confirma la dificultad relacionada con el conflicto 1.
Comentario: La entrevistadora pregunta qué significa la frase del alumno contenida en el cuestionario acerca de que 0’3333... *es un número inexistente*. El sujeto indica: “pues, porque al tener muchos dígitos nunca lo puedes... nunca lo puedes precisar” (frase 0102), “No podemos escribir ni imaginarlo” (frase 0207) “porque tiene infinitos decimales” (frase 0110). “Puedes hacer una aproximación siempre, pero nunca dar el número exacto” (frase 0207). Con $\sqrt{5}$ se confirma nuevamente (frase 0608).
En tarea 2: Se confirma la dificultad relacionada con el conflicto.
Comentario: El sujeto afirma que aún utilizando la mediatriz no podría hallar la mitad del segmento, pues “no llegaría nunca a eso, a ser un tercio ni a ser cero coma..., bueno, la mitad de eso” (frase 0410).
En ítem 3: No se ha planteado durante la entrevista.

Datos del sujeto: Código: 821. Nivel: 2º de Bachillerato. Centro: C1. Edad: 17 años
Duración aproximada de la entrevista: 12’
Conflicto observado en el cuestionario: Sin respuesta conflictiva.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: **Seguridad en sí mismo:** El sujeto se muestra seguro de sus afirmaciones. **Expresión en voz alta:** Adecuada.
Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista **En tarea 1:** Sin conflicto. **Comentario:** Afirma que la representación no es exacta porque siempre se producen errores “sistemáticos” o “de perspectiva” (frases 0108, 0202). **En tarea 2:** Sin conflicto. **Comentario:** Afirma que puede dividirse el segmento mediante el trazado de la mediatriz, pero nunca es exacta la división por los errores mencionados (0407). **En ítem 3:** No está de acuerdo con una afirmación relacionada con el conflicto 2, puesto que considera que “no sigue eso una lógica”, que no tiene que ver con la pregunta realizada (frase 1102).

Datos del sujeto: Código: 322. Nivel: 1º de Lic. en Matemáticas. Edad: 18 años
Duración aproximada de la entrevista: 8’
Conflicto observado en el cuestionario: Conflicto 2. **Número:** 5/8
Tarea en que se observa el conflicto: Valoración de la exactitud de la representación.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: **Seguridad en sí mismo:** Se muestra seguro de sus afirmaciones. **Expresión en voz alta:** Adecuada.
Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista **En tarea 1:** Se confirma la existencia de afirmaciones relacionadas con el conflicto 2. **Comentario:** El sujeto afirma que es imposible representar √2 “porque es que en el papel no puedo representarlo jamás” (frase 0009). Más adelante indica: “Porque si es que ni en el papel, hágame usted el punto pequeño que quiera, y yo seguro que le puedo hacer muchos más” (frase 0108). Posteriormente se refiere a los errores provocados por la imprecisión de los instrumentos (0409, 0410). **En tarea 2:** Se observa el conflicto 2. **Comentario:** Afirma que es imposible obtener la mitad del segmento (0106) por la misma razón. **En ítem 3:** Se confirma el conflicto 2. **Comentario:** Considera que la presencia o no de infinitas cifras decimales es irrelevante (0502/04, 0605, 0705) para la exactitud de la representación. En el ítem 3 reaparece el conflicto 2 cuando afirma que “aquí en este un punto, hay infinitos átomos. Y dentro de un átomo, hay infinitos puntos” (frase 0709).

Datos del sujeto: Código: 341. Nivel: 1º de Lic. en Matemáticas. Edad: 18 años
Duración aproximada de la entrevista: 22’
Conflicto observado en el cuestionario: Conflicto 2. **Número:** 1’4142...
Tarea en que se observa el conflicto: Valoración de la exactitud de la representación.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: **Seguridad en sí mismo:** El sujeto se muestra seguro aunque algunas de sus respuestas son imprecisas (0102, 2102). **Expresión en voz alta:** Adecuada.
Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista **En tarea 1:** Las afirmaciones relacionadas con el conflicto 2 se confirman. **Comentario:** Afirma que la representación no es exacta porque “dentro de dos puntos siempre hay infinitos” (frase 0207) y que la marca realizada “es una aproximación, pero ese punto que yo he representado, dentro de él hay muchos puntos en la recta”. Más adelante añade: “Yo pienso que por muy pequeña que sea la marca, mmm... nunca podremos... es que un punto es una... en esta recta no lo podemos representar” (frase 1301). **En tarea 2:** Se manifiesta el conflicto 2. **Comentario:** Afirma que puede dividirse el segmento mediante el trazado de la mediatriz, pero nunca es exacta la división porque en la marquita realizada “no podemos representar un punto solamente” (frase 1903). La entrevistadora pregunta si influyen las infinitas cifras del número en cuestión en la exactitud de la representación y el sujeto responde que no (1403/05). **En ítem 3:** Se confirma la presencia de la inconsistencia asociada al conflicto 2. **Comentario:** Indica que está de acuerdo con la afirmación relacionada con el conflicto 2 (frase 2004) porque se trazan segmentos y no puntos. Está indecisa respecto de la afirmación referida a los errores provocados por los materiales porque considera que lo que más influye es la imposibilidad de trazar un punto exacto (2102/04).

Datos del sujeto: Código: 343. Nivel: 1º de Lic. en Matemáticas. Edad: 18 años
Duración aproximada de la entrevista: 6’
Conflicto observado en el cuestionario: Sin respuesta conflictiva.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: **Seguridad en sí mismo:** El sujeto se muestra seguro de sus afirmaciones. **Expresión en voz alta:** Adecuada.
Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista **En tarea 1:** Sin conflicto. **Comentario:** Afirma que la representación no es exacta porque “con los aparatos de medida pues ya estamos cometiendo un error” (frase 0106). **En tarea 2:** Sin conflicto. **Comentario:** Afirma que puede dividirse el segmento mediante el trazado de la mediatriz, pero “aquí pues yo he hecho la... la salvedad pues lo mismo que antes: en los aparatos de medida, en nosotros mismos que no [...]. El fallo está en los artesanos, no en el arte” (frases 0308 a 0310). **En ítem 3:** Sin conflicto. **Comentario:** Afirma que la afirmación relativa a inexactitud debido a las infinitas cifras decimales del número no es correcta (0415). En cuanto a la afirmación relacionada con el conflicto 2, está de acuerdo con la afirmación de que no es exacto (por la falta de precisión, frase 0505) pero está en desacuerdo con el resto de la frase, que es la referencia al conflicto 2.

Datos del sujeto: Código: 352. Nivel: 1º de Lic. en Matemáticas. Edad: 18 años
Duración aproximada de la entrevista: 21’
Conflicto observado en el cuestionario: Conflicto 1. **Número:** 0’33...
Tarea en que se observa el conflicto: Valoración de la exactitud de la representación.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: **Seguridad en sí mismo:** El sujeto se muestra seguro de sí mismo. **Expresión en voz alta:** Adecuada.
Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista **En tarea 1:** No se confirma el conflicto 1; en cambio, se observan respuestas relacionadas con el conflicto 2. **Comentario:** Modifica la justificación dada en el cuestionario para la no exactitud de la representación. Afirma: “Aquí yo dije otra cosa que no es lo que... no me expresé bien” (frase 0205). No atribuye la inexactitud de la representación a las infinitas cifras decimales del número, sino que las explica del siguiente modo: “Aquí hay infinitos números entre cero y uno, ¿no? Entonces, no podemos representar con un lápiz los infinitos números” (frases 0103 y 0105). **En tarea 2:** Se manifiestan afirmaciones relacionadas con el conflicto 2. **Comentario:** Afirma que podría dividirse por la mitad pero “lo que pasa es que tampoco podemos decir qué número exactamente por donde... por el que pasa... Porque como es que no tenemos un número..., es un número que tiene infinitos decimales” (frases 0806 y 0807). Tampoco es exacto (frase 1008) “porque, claro, el punto donde se cortan las dos rectas es justo un punto, pero en nuestra representación, eso no es un punto. Ahí puede haber varios puntos” (frases 1101 y 1102). **En ítem 3:** Se manifiestan afirmaciones relacionadas con el conflicto 2. **Comentario:** Indica que la infinitud de las cifras decimales no influye (frases 1615 y 1803). “Podemos coger un intervalo muy pequeño, y en ese intervalo muy pequeño que cogemos siempre sigue habiendo infinitos... números, por muy pequeño que sea el intervalo” (frase 1805).
Errores observados: Afirma que 0’333... es irracional. Aparentemente, confunde ‘irracional’ con ‘infinitas cifras en la notación decimal’ (frases 0306/07).

Datos del sujeto: Código: 355. Nivel: 1º de Lic. en Matemáticas. Edad: 18 años
Duración aproximada de la entrevista: 12’
Conflicto observado en el cuestionario: Conflicto 1. **Número:** 0’33...
Tarea en que se observa el conflicto: Valoración de la exactitud de la representación.
Impresión que genera el entrevistado en cuanto a: **Seguridad en sí mismo:** Se muestra segura de sus afirmaciones. **Expresión en voz alta:** Adecuada.
Valoración de la investigadora respecto de la presencia o ausencia de conflicto durante la entrevista **En tarea 1:** Se confirma la inconsistencia relacionada con el conflicto 1. **Comentario:** El sujeto afirma: “al tener... infinitos decimales, pues, es como que... lo que siempre se dice: que nunca se llega, que... no se puede tener el número así” (frase 0205). Afirma que aunque en el plano teórico sea correcto (frase 0405), piensa que al tener infinitas cifras decimales el número “es que no sé si ya... sería alcanzable o no” (frase 0406). **En tarea 2:** No se observa ningún conflicto. **Comentario:** Considera la división del segmento mediante el trazado de la mediatriz (frases 0505 y 0802). **En ítem 3:** **Comentario:** Está de acuerdo con la afirmación relacionada con el conflicto 2 porque “como hay infinitos números en la recta real” es posible que una marca usada para representar un número corresponda también a otro número distinto, muy cercano al primero (1001).

6.5.4.2. Resultados de las entrevistas confirmatorias

En esta sección exponemos los resultados obtenidos en las entrevistas confirmatorias. El objetivo de las entrevistas es confirmar la interpretación de las respuestas del cuestionario. Para ello, seleccionamos 3 sujetos sin respuestas conflictivas, 6 sujetos con respuestas relacionadas con el conflicto 1 (dificultad en admitir el cierre de un proceso infinito) y 2 sujetos con respuestas relacionadas con el conflicto 2 (relación entre objeto matemático y objeto físico).

Durante las entrevistas confirmatorias los sujetos han tenido que explicar o ampliar las respuestas del cuestionario. Se esperaba en este sentido confirmar la interpretación de las respuestas al cuestionario.

Confirmamos la ausencia de conflicto en los tres sujetos (códigos 112, 822 y 343 respectivamente) sin respuestas conflictivas seleccionados. Los tres sujetos han mantenido la respuesta dada en el cuestionario, proporcionando en algunos casos alguna aclaración.

Con respecto a la dificultad en admitir el control de un proceso infinito, la hemos confirmado en tres de los seis sujetos entrevistados (códigos 744, 234 y 355 respectivamente). En los tres sujetos restantes no se ha confirmado la dificultad ocasionada por la presencia de infinitas cifras decimales (sujetos 732, 222 y 352 respectivamente).

La falta de distinción entre objeto matemático y objeto físico (conflicto 2) ha sido confirmada en los dos sujetos seleccionados (sujetos 322 y 341 respectivamente), y ha sido observada también en otro sujeto entrevistado (sujeto 352 con conflicto 1 no confirmado).

Hemos dicho que las respuestas conflictivas observadas en el cuestionario se caracterizan porque no hay conciencia por parte del sujeto de las inconsistencias presentadas. En las entrevistas confirmatorias tenemos la oportunidad de comprobar si el sujeto reconoce o no una inconsistencia, y en caso de que lo haga, si trata de superarla. Contamos así con distintas opciones para caracterizar las respuestas de los sujetos. Todos los sujetos han examinado simultáneamente las afirmaciones contradictorias, bien por su propia iniciativa, o bien porque la entrevistadora conduce a examinar afirmaciones contrarias a la que ellos mantienen. Sin embargo, mientras que algunos reconocen la inconsistencia e intentan resolver el conflicto cognitivo (que en este caso satisface las dos condiciones señaladas para la noción), otros sujetos no reconocen las afirmaciones como contradictorias.

A continuación incluimos algunas respuestas de los alumnos seguidas de comentarios.

6.5.4.2.1. Sujetos con conflicto 1

Sujetos que cambian la argumentación dada en el cuestionario

Hemos dicho que de los seis sujetos considerados con conflicto 1, tres de ellos modifican los argumentos dados en el cuestionario porque afirman que estaban equivocados o confundidos, o bien porque ha habido una interpretación inadecuada del enunciado de la tarea. A continuación analizaremos cada caso.

Suj., Nivel	Sujeto 732. Interpretación inadecuada de la tarea
732. 1ºB	La alumna ha confundido la tarea de dividir el segmento con la de dividir entre dos el número que expresa su longitud. Después de aclarar el malentendido, afirma que es posible dividir el segmento utilizando una regla graduada. En el ítem 3 afirma que no está de acuerdo con la afirmación de que un número con infinitos decimales nunca se podría representar: "Yo estaría de acuerdo en que nos aproximamos pero nunca vamos a obtener el punto exacto exacto. [Continúa leyendo]. Pero nunca se va a poder representar... eso sí estaría, eso estaría en desacuerdo, porque sí se podría representar." (frases 1501 y 1502)

Tabla 6.63: Interpretación inadecuada de la Tarea 2

En la tabla 6.63 resumimos la respuesta del sujeto 732. La alumna ha confundido la Tarea 2 con la tarea de dividir entre 2 el número dado (en este caso, el número $\sqrt{5}$). Respecto de la tarea de la división del segmento por la mitad, afirma que podría realizarse midiendo el segmento y marcando (con regla graduada) su mitad. En la tabla 6.63 se incluyen frases de la alumna en las que se confirma el hecho de que las infinitas cifras decimales del número no dificultan la aceptación de su representación en la recta.

En la tabla 6.64 incluimos un ejemplo de un sujeto que ha reconocido la inconsistencia en sus observaciones y posteriormente modifica su argumentación para superar el conflicto.

Suj., Nivel	Sujeto 222. La inconsistencia es reconocida y el conflicto superado
222. 2ºB	La alumna manifiesta que en el cuestionario se ha confundido, pues es posible localizar el número $\sqrt{2}$ en la recta, y hallar la mitad del segmento utilizando la mediatriz: "Es que a lo mejor me confundí... al ver el número, al hacer aquí [señala gráfico construido].... al saber que el número era la raíz de dos, pero luego al darle la vuelta lo habré visto con los puntos suspensivos, no habré pensado lo de la raíz de dos y digo yo pues al no tener el número exacto, pues no podría localizarlo exactamente, ¿no?" (frase 0502)

Tabla 6.64: Inconsistencia reconocida y conflicto superado

En la tabla 6.65 incluimos algunas frases del sujeto 352, que modifica la respuesta dada en el cuestionario. El sujeto afirma que en el cuestionario no se ha expresado bien, y en las respuestas incluidas en la tabla se observa que las infinitas cifras del número no suponen un problema. Consideramos que reconoce la inconsistencia de la frase del cuestionario al afirmar que no se ha expresado bien. Sin embargo, aunque supera el conflicto 1 (al menos rechaza la afirmación inconsistente) los nuevos argumentos indican la presencia del conflicto 2, como estudiaremos más adelante.

Suj., Nivel	**Sujeto 352. Cambio de argumentación.**
352. 1ºL.M.	La alumna afirma que no se ha expresado bien en el cuestionario. Considera que la inexactitud no es causada por las infinitas cifras: “Si tiene infinitas... es que, da igual que sea infinito o que sea... Sigue siendo un número. En un intervalo... podemos coger un intervalo muy pequeño, y en ese intervalo muy pequeño que cogemos siempre sigue habiendo infinitos... números, por muy pequeño que sea el intervalo.” (frases 1803 a 1805) Sin embargo, afirma que lo que sí influye es el hecho de que en un segmento de recta existen infinitos puntos (frases 0103, 0304, 0604, 0703, 1805). Consideramos que en estas frases se manifiesta el conflicto 2.

Tabla 6.65: No se confirma el conflicto 1 por cambio de argumentación

En los dos últimos casos (sujetos 222 y 352) observamos que se produce una nueva interpretación por parte de las alumnas de la situación planteada, aunque no podemos explicar las razones por las que se produce. Una nueva interpretación puede surgir por efecto de una maduración, o quizá porque el sujeto ha intercambiado ideas (relacionadas con el contenido del cuestionario) con otros compañeros, y como consecuencia, considere otro punto de vista. Se trata, en todo caso, de conjeturas que no estamos en condiciones de confirmar o rechazar.

Sujetos que mantienen la argumentación dada en el cuestionario

A continuación estudiamos las respuestas de los sujetos en los que se ha confirmado la presencia de dificultades en aceptar el cierre del proceso infinito expresado por las infinitas cifras decimales.

En la tabla 6.66 incluimos los argumentos utilizados por el sujeto 744. Considera que la representación de los números $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$ debe realizarse por intervalos encajados. Ante la evidencia de que existe un procedimiento geométrico que permite representar estos números, continúa afirmando que esos números se alcanzan mediante intervalos encajados. Y dado que entre dos puntos “siempre habrá un punto entre medias” (frase 1209) se encuentra con el dilema de que el proceso de generar intervalos no termina. No acepta que el proceso infinito de generar intervalos admite en el ámbito geométrico una solución que elude el proceso infinito. Este proceso obstaculiza la aceptación de la solución geométrica.

Sujeto 744. Inconsistencia no reconocida por el sujeto
(Frases 0910 a 0913) A Hombre, aquí exactamente, vamos, yo creo que no se puede decir aquí está exactamente raíz de dos. Porque... a lo mejor está... un milímetro o menos aún, si cabe, más para allá o un poquitín más para acá. E Pero eso a qué se debe que puede estar un mm más para un lado... A Pues, a los decimales, pienso, vamos. (Frases 1201 a 1208) E Y... en el caso de que yo aplico ... un procedimiento, no igual a éste, porque éste me da raíz de dos, pero otro parecido que me de raíz de cinco, ¿no? A [Asiente.] E ¿Qué va a pasar con la marca que yo tengo? [mientras dibuja] A Tú puedes representar, o sea, puedes, lo que es el segmento, dividirlo entre la mitad, porque es una representación. Pero tú no... o sea, no puedes concretar justamente el punto en el que va a estar raíz de cinco. Pues eso, porque es un punto que se tiene que poner por intervalos encajados o algo así. Se tiene que... ir cerrando el punto, ¿no? Pero siempre habrá un punto entre medias.

Tabla 6.66: Respuestas del sujeto 744, 1ºB. (conflicto 1)

En la tabla 6.67 incluimos las respuestas del sujeto 234. El sujeto ha representado el número 0’3333... mediante el teorema de Tales.

Sujeto 234. Inconsistencia no reconocida por el sujeto
(Frases 0101 a 0112) E ¿Y qué significa que *es un número inexistente*? A Pues, porque al tener muchos dígitos nunca lo puedes... nunca lo puedes precisar. Entonces que podemos decir que no existe. E ¿Podemos decir que es un número que no existe? A Sí. E ¿Cómo? ¿En qué sentido no existe? ¿Cómo no existe? A Porque no lo podemos decir, no podemos... No podemos escribir ni imaginarlo. Podemos decir que es un tercio, pero luego, un tercio ¿qué es? E ¿Por qué no lo podemos escribir? ¿O imaginarlo? A Porque tiene infinitos decimales. Tú puedes pensar que esto es un tercio [señalando en el gráfico construido mediante el teorema de Tales]. Pero lo amplías y te has equivocado. (Frases 0206 a 0303) A Sí, porque... en la representación gráfica es imposible porque... es lo que he explicado antes. Hacerlo... puedes hacer una aproximación siempre, pero nunca dar el número exacto. E ¿Eso es por...? A Porque... Lo de antes que es: infinitos decimales, el grosor del lápiz, la... que siempre te queda entre una pautas.

Tabla 6.67: Respuestas del sujeto 234, 2ºB.

Sujeto 234. Inconsistencia no reconocida por el sujeto
E ¿Hay alguna razón que sea más fuerte que otra? A Pues... E Para justificar este *no* [señalando en el folio]. A Pues... ¿una razón? E Sí. E Pues lo de inexistente. (Frases 0402, 0403, 0408 a 0414) E ¿Cómo harías para hallar esa mitad? ¿Cómo pensabas hacerlo? A Pues, usando lo de... gráficamente... Lo de hacer la mitad de un segmento [imita con sus dedos el movimiento del compás]. E ¿Y entonces? A Pues eso sería una aproximación. No... no llegaría nunca a eso, a ser un tercio ni a ser cero coma..., bueno, la mitad de eso. E Por el tema de... ¿por qué nunca llegaría a ser la mitad de ese? A Sí. E Por... ¿cuál es la razón entonces? Por los... A Porque... esto, porque no sabemos... no sabemos el número [señala el folio].

Continuación tabla 6.67: Respuestas del sujeto 234, 2ºB.

Este sujeto afirma que la representación no es exacta por diversas razones, entre las que menciona las limitaciones de los instrumentos y la presencia de infinitos decimales. La presencia de infinitos decimales para el sujeto es la razón más importante. El número 0’3333... no es igual, para este sujeto, que el número 1/3. La representación simbólica fraccionaria no ofrece información suficiente para reconocer o identificar al número, y tampoco la construcción geométrica. Es la representación decimal la que cuenta para el sujeto y al ser infinita, “no llegaría nunca a eso”, es decir, a 1/3. El sujeto no reconoce entonces la inconsistencia.

Finalmente, observemos en la tabla 6.68 las respuestas del sujeto 355. Este sujeto ha utilizado el teorema de Tales para representar el número 0’333...

Sujeto 355. Inconsistencias no reconocidas por el sujeto
(Frases 0205 a 0301) La entrevistadora solicita al sujeto que compare las representaciones de los números 0’24 y 0’3333... según la exactitud de cada una. A Porque es que... al tener... infinitos decimales, pues, es como que... lo que siempre se dice: que nunca se llega, que... no se puede tener el número así... Eso, como tenerlo..., como si fuera más... más tangible. Y al tener menos decimales, pues sí sería más... más aproximado, sería más... más exacto. Siempre teniendo en cuenta la... va lo del... gráfico que... que siempre hay un pequeño margen de error, pero yo creo que sería más exacto. (Frases 0704 y 0705) A Sí es que claro, al ser este número con finitos decimales, pues, yo creo que es más exacta la representación que en el caso primero, porque el caso primero tenía infinitos números decimales. Es como el caso del 0’25, ¿sí?

Tabla 6.68: Respuestas del sujeto 355, 1º L.M.

Las frases del sujeto ponen de manifiesto la dificultad en aceptar el cierre del proceso infinito explícito en la representación decimal del número: “nunca se llega”, “no se puede tener el número”. El proceso infinito determina en parte la falta de exactitud de la representación, aún cuando lo ha eludido mediante la utilización de la representación fraccionaria y del teorema de Tales.

Los últimos tres sujetos estudiados no reconocen la presencia de afirmaciones inconsistentes. Una de las condiciones exigidas en la definición de ‘conflicto cognitivo’ no se cumple en estos casos: los sujetos no reconocen las inconsistencias.

Se trata de dificultades ‘genuinas’, en el sentido de que los sujetos se han confrontado en el transcurso de la entrevista con la posibilidad de contrastar sus afirmaciones, y sin embargo, mantienen los argumentos iniciales.

6.5.4.2.2. Sujetos con conflicto 2

En este punto incluimos las respuestas de los sujetos en los que observamos afirmaciones relacionadas con el conflicto que designamos ‘relación entre objeto matemático y objeto físico’. Se trata de los sujetos 322, 341 y 352. El sujeto 352 fue seleccionado porque en su respuesta al cuestionario se pone de manifiesto el conflicto 1. Ya hemos indicado que no fue posible confirmar el conflicto 1, y en cambio, sí observamos el conflicto 2. A continuación incluimos fragmentos de las tres entrevistas seguidos de comentarios breves. Observamos el conflicto 2 cuando afirmaciones referidas a la exactitud de la marca física se justifican mediante referencias a propiedades o afirmaciones referidas al mundo matemático.

En la tabla 6.69 incluimos una selección de respuestas del sujeto 322.

Sujeto 322. Inconsistencia no reconocida
(Frases 0006 a 0101) A Pero después me preguntas que.. que si es exacta, es imposible que sea exacta. Yo en el punto que hay aquí, por pequeño que sea, puedo dibujar millones de puntos. Necesito un buen instrumento, pero como todos los instrumentos, no es tan exacto, yo siempre puedo representar más punto y más punto. Esto es una idea digamos que psicológica. Porque es que en el papel no puedo representarlo jamás. Es más, ni con un ordenador, haciendo, dibujando esta gráfica y haciendo zoom, lo vería. (Frase 0507) A Si es que en el mismo número aquí, en el número... en el mismo... en este espacio que está la marca del 1, yo puedo dibujar una recta entera, con infinitos puntos y llamarlos como yo quiera. (Frases 0705 a 0710) A Que no tenga decimales, tenga infinitos puntos [números] decimales, es lo mismo. Si es que yo ni siquiera en esta marca tan gruesa, si yo esto lo hubiera hecho con un compás, aquí hay un gran error de medida. Y esto, aunque la marca fuera finísima, aquí hay mucho error de medida. Porque es que en un punto, puedes meter infinitos puntos. Aquí en este punto, hay infinitos átomos. Y dentro del átomo, hay infinitos puntos. Es un espacio vectorial, yo que sé, no tiene sentido.

Tabla 6.69: Respuestas del sujeto 322, 1º L.M.

En las frases incluidas la tabla 6.69 observamos alternativamente referencias al mundo matemático ideal y al mundo físico. El sujeto afirma que la marca física está constituida por infinitos átomos, y que en cada átomo hay infinitos puntos.

En la tabla 6.70 incluimos una selección de respuestas del sujeto 341. Este sujeto indica que en la marca efectuada con el compás sigue habiendo infinitos puntos. La inexactitud de la representación es debida especialmente al hecho de que es imposible representar un punto (ideal) exacto. Cualquier representación física contiene infinitos puntos ideales. Se observa claramente un vaivén entre el mundo físico y el mundo ideal.

Sujeto 341. Inconsistencia no reconocida
(Frases 0205 a 0207) A Y me dices: "Con un bolígrafo o cualquier método que pueda utilizar siempre cometeré un error ya que represento muchos puntos al mismo tiempo." E Si me quieres comentar un poquito más esa... esa afirmación que haces. A Mmm... Porque... un punto en la recta real, dentro de dos puntos siempre hay infinitos y... y por muy pequeño que... por muy preciso el método que utilice, dentro de... esa representación sigue habiendo infinitos... (Frases 1701 a 1704) A Eh... con esa representación [mediante el teorema de Pitágoras] damos un punto pero ese punto no... no sería exacto, sería el... O sea, es que ese... es que donde pasa el compás, ahí, no hay un punto, hay infinitos puntos. Entonces, pues, no hay forma más... más precisa de hacerlo. Bueno, no sé si hay forma más precisa de hacerlo pero, con eso, de esta forma no. (Frases 2004 a 2104) A Pues eso que... al... ir marcando los... eh... al ir trazando segmentos, no va a trazar ningún punto, sigue trazando un segmento. Sin embargo, aquí... sólo sólo se refiere a los materiales y no... A los materiales, a los materiales que está utilizando que... se cometen errores pero... Eso influye pero lo que... lo que... más, o sea... lo que en realidad es, pues eso, que no se puede trazar... no sé cómo decirlo. E Bueno, estamos. O sea que acá me dices que es indeciso, ¿no? Que lo de los materiales influye menos que lo otro. A Influye pero no solamente eso porque... claro, por muy precisos que sean los materiales que utilice, nunca vas a trazar, es imposible... representar el punto exacto.

Tabla 6.70: Respuestas sujeto 341, 1º L.M. (conflicto 2)

Finalmente, en la tabla 6.71 incluimos respuestas del sujeto 352, relacionadas con el conflicto 2. El sujeto afirma que no es posible representar exactamente un número porque en la recta hay infinitos puntos, y porque hay infinitos números reales (afirmaciones referidas al mundo ideal), entonces, la actividad concreta de efectuar una marca (afirmación referida al mundo físico) correspondiente a un número determinado no puede realizarse.

Sujeto 352. Inconsistencia no reconocida
(Frases 0103 a 0108) A Aquí hay infinitos números entre cero y uno, ¿no? E Entre el cero y el uno hay infinitos números. A Entonces, no podemos representar con un lápiz los infinitos números. Esto es... es una manera de aproximarte a ese número en la recta real. Es que por muy gra... muy grande que sea la unidad, siempre hay infinitos. Nunca podremos... (Frases 0703/04) A Ahí lo que tenemos es una representación gráfica de un segmento entre el cero y el Uno y ahí, pues, puede haber infinitos números. Entonces... los infinitos números sí están localizados aquí pero no podemos localizar uno a uno. (Frases 1602 a 1609) A La representación no puede ser exacta. Es una representación que nosotros... hacemos lo más exacta posible, de forma que se aproxime lo más posible a donde se encuentra en la recta real, pero... no quiere decir que esté exactamente ahí. Se aproxima muchísimo. Mucho más que utilizando una regla milimetrada. E ¿Por qué... se aproxima mucho pero no es exacta¿ ¿Cuál es la razón? A Porque no podemos representar un punto en la... Cuando nosotros tomamos el 0 o el 1, ése, no quiere decir que ese punto esté exactamente ahí. Pues, el 5/6 igual. Es... para que nos hagamos una idea de dónde se encuentra en un espacio finito pero... como los números son infinitos, la recta real es infinita, entonces no podemos localizar punto a punto.

Tabla 6.71: Respuestas sujeto 352

En los tres sujetos observamos que la exactitud de la representación obtenida (de la marca física construida) es analizada a partir de consideraciones referidas al mundo matemático ideal (la existencia de infinitos puntos en un segmento de recta, o la existencia de infinitos números reales o infinitos puntos en la recta).

En los tres casos se produce la falta de distinción entre los mundos ideal y físico, y los sujetos no son conscientes de ello. En este caso, tampoco se satisface la condición exigida en la definición de conflicto cognitivo. Aparentemente, las respuestas no provocan 'insatisfacción' en los sujetos, puesto que están convencidos de sus argumentos.

6.5.5. Algunas conclusiones de las entrevistas confirmatorias

En las entrevistas exploratorias observamos dos conflictos: dificultad en admitir el cierre de un proceso infinito y la relación entre objeto matemático y objeto físico. En el cuestionario constatamos la existencia de afirmaciones relacionadas con esos conflictos y posteriormente seleccionamos algunos sujetos para realizar entrevistas con el objeto de confirmar nuestra interpretación de respuestas.

Hemos entrevistado a tres alumnos en cuyas respuestas no interpretamos la presencia de afirmaciones relacionadas con los conflictos. Durante las entrevistas confirmamos la ausencia de conflicto.

Entrevistamos a 8 sujetos en cuyas respuestas observamos afirmaciones relacionadas con alguno de los dos conflictos. Los resultados obtenidos son los siguientes:

- El sujeto (222) al que atribuimos el conflicto 1 ha reconocido que las afirmaciones del cuestionario conducen a ideas contradictorias y en consecuencia ha modificado sus argumentos porque no se siente satisfecho con ellos. Es decir, cuando este sujeto analiza su respuesta logra superar lo que identificamos como conflicto.
- El sujeto (732) ha interpretado inadecuadamente el enunciado de una tarea del cuestionario. Cuando el malentendido fue aclarado, comprobamos que no es posible relacionar su afirmación con el conflicto 1.
- Tres sujetos (744, 234 y 355 respectivamente) han mantenido las afirmaciones que relacionamos con el conflicto 1. Aunque la entrevistadora intenta suscitar en estos sujetos una reflexión que los conduzca a reevaluar sus afirmaciones, ellos las mantienen. En este caso, observamos que no hay consciencia por parte del alumno de la inconsistencia de sus argumentos.
- Un sujeto (352) ha modificado la afirmación que atribuimos al conflicto 1, por lo que no ha sido posible confirmar ese conflicto, y ha cambiado su argumentación. Al nuevo argumento expuesto por el sujeto le atribuimos, en cambio, el conflicto 2.
- Dos sujetos (322 y 341 respectivamente) han mantenido y reforzado sus afirmaciones que relacionamos con el conflicto 2. Tampoco hay conciencia en los alumnos de las inconsistencias surgidas.

No hemos confirmado la atribución de los conflictos en algunos sujetos. Algunas razones que pueden explicar este resultado son las siguientes:

- Una lectura del cuestionario influenciada por las expectativas del investigador (Wilson, 1973)
- En caso de que el conflicto deducido del cuestionario fuera “real”, el sujeto puede haber evolucionado durante el tiempo transcurrido entre la administración del cuestionario y la realización de las entrevistas exploratorias.
- La detección del conflicto no se ha ajustado más que a una casualidad donde la investigación no juega ningún papel.

Esta exigencia de circunspección hacia la propia investigación nos parece un requisito necesario. En este caso, los ‘cambios de estado’ que atribuimos a los sujetos cuando pasamos de la atribución de conflicto a su no confirmación deberían ocurrir al azar. Sin embargo, los cambios observados no parecen casuales: de los ocho sujetos cuyas respuestas al cuestionario las consideramos relacionadas con algún conflicto, en cinco de ellos (sujetos 744, 234, 355, 322 y 341 respectivamente) hemos confirmado la presencia de afirmaciones inconsistentes (que no han reconocido). El sujeto cuyo código es 222 ha reconocido la inconsistencia y superado el conflicto, el sujeto de código 732 ha interpretado la tarea de modo inadecuado, y en consecuencia, su respuesta al cuestionario (relacionada con un conflicto) pierde vigencia después de la entrevista. El sujeto 352 es el caso más difícil de explicar, porque mientras que el conflicto atribuido antes de la entrevista no ha podido confirmarse, hemos atribuido después de la entrevista otro conflicto. Por otro lado, se ha confirmado la ausencia de conflicto en los tres sujetos cuyas respuestas al cuestionario son valoradas como 'no conflictivas'.

En consecuencia, aceptamos como válida la interpretación realizada de las respuestas obtenidas en el cuestionario.

En el problema de investigación nos proponemos detectar obstáculos epistemológicos relacionados con la representación de números en la recta. En nuestro estudio empírico desarrollado en tres etapas: entrevistas exploratorias, cuestionario y entrevistas confirmatorias, hemos detectado y constatado dos conflictos surgidos en la valoración de la exactitud de la asignación números / puntos. La tarea que debemos abordar en consecuencia es estudiar si los conflictos detectados y confirmados pueden conectarse con obstáculos epistemológicos de la representación de números en la recta. En el capítulo siguiente abordamos ese estudio.

CAPÍTULO 7

EXPLICACIÓN DE DOS CONFLICTOS

7.1. Introducción

Este capítulo propone una explicación de los conflictos observados en las respuestas de los sujetos (capítulos 4 y 6), basada en la noción de obstáculo epistemológico.

Los conflictos se han suscitado en las respuestas de los sujetos a dos preguntas específicas del cuestionario. Los sujetos deben representar un número en la recta y explicar el procedimiento utilizado. Posteriormente se proponen las siguientes cuestiones:

- *¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.*
- *En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a k*[19] *unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?*
  Si tu repuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

En las preguntas planteadas se usan dos términos derivados de 'exacto' (exacta, exactamente) que han suscitado dudas, como se esperaba, en la caracterización de las actividades propuestas (representación de un número en la recta y determinación de la mitad de un segmento), en un cierto número de sujetos. El enunciado de las preguntas no especifica el sentido de los términos 'exacta' y 'exactamente'; ello supone una libertad de elección para el sujeto, lo que se manifiesta en la diversidad de respuestas y, en muchos casos, en la presencia de conflictos.

[19] *k* representa aquí el número dado, que el sujeto debe representar.

En el estudio de las posibles respuestas (secciones 5.2.2.2 y 5.2.2.3), se observa que la valoración de la exactitud (en cada tarea) conduce a hallar un equilibrio entre algunas parejas de posiciones intelectuales extremas. En las respuestas de los sujetos se ha puesto de manifiesto la búsqueda de ese equilibrio observado en el análisis previo. Veamos algunos ejemplos extraídos del anexo 12:

1) Sujeto 214: *"No, porque el compás siempre tiene un margen de error ya que no siempre se pincha en el centro de la raya hecha y además la punta del compás no está bien afilada. O sea teóricamente debería ser exacta la representación, pero en la práctica no lo es."*

2) Sujeto 821: *"Nunca una medida puede ser exacta, sin embargo, mi medida es muy aproximada."*

3) Sujeto 252: *"Sí lo es ya que como dije antes, he utilizado el teorema de Tales para la representación y un método muy fiable con ayuda de la escuadra y el cartabón."*

4) Sujeto 212: "*–Sí, tan sólo tendríamos que dividir el numerador por la mitad: 2'5/8.*
- *También podríamos una vez dado el segmento 5/8 trazar su mediatriz* [acompaña gráfico]*"*

En todos los casos se está valorando la exactitud (en los tres primeros, de la representación, y en el último, de la determinación del punto medio) pero la argumentación es esencialmente diferente.

El sujeto 214 busca un cierto equilibrio entre el mundo físico y el mundo ideal.

El sujeto 821 busca un cierto equilibrio entre lo exacto y lo aproximado.

El sujeto 252 busca un cierto equilibrio entre conceptos y procedimientos.

El sujeto 212 busca un cierto equilibrio entre la aritmética y la geometría.

Aunque cada una de las anteriores posiciones extremas se expresan en términos de dicotomías (mundo ideal / mundo físico, exacto / aproximado, conceptos / procedimientos, aritmética / geometría) es evidente que los sujetos no eligen necesariamente uno de los extremos, sino que, entendemos, "se sitúan" con respecto a alguno de ellos como si se tratara de un continuo o de una escala.

En esta interpretación, el uso de los términos *continuo* o *escala* constituye también una metáfora; por eso, a pesar de que los sujetos no optan necesariamente por uno de los extremos, nos referiremos a estas parejas de posiciones intelectuales extremas con el término *dicotomías*.

En este sentido, las cuatro dicotomías que permiten abarcar todas las respuestas de los sujetos son:

- Mundo ideal / Mundo físico
- Geometría / Aritmética
- Conceptos / Procedimientos.
- Exacto / Aproximado.

Cada sujeto tiene en cuenta o utiliza los dos componentes de una o varias dicotomías, aunque lo más frecuente en las respuestas de los sujetos es aludir a un solo componente. Por ejemplo, en la valoración de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento obtenido, la respuesta más utilizada ha sido el trazado de la mediatriz.

A lo largo de este capítulo tendremos ocasión de referirnos con mayor detalle a cada una de estas dicotomías; no obstante, en esta introducción presentamos una panorámica.

Aceptamos que es posible reflexionar sobre cada tarea en un mundo ideal o en un mundo físico.

En ese mundo ideal, el análisis de diferentes conocimientos matemáticos se enmarca mediante la geometría o la aritmética (que constituyen trasplanos del análisis al que nos referimos), y enfatiza lo conceptual o lo procedimental.

En el mundo físico del que hablamos se reflexiona sobre objetos materiales (trazos sobre el papel, realizados con instrumentos físicos como lápiz, bolígrafo, regla o compás) que se identifican (o no) con objetos matemáticos. Estos objetos materiales están sujetos a leyes o propiedades de la física y a la percepción del sujeto.

En la figura 7.1 hemos intentado ilustrar, esquemáticamente, las prioridades que entran en interacción en las respuestas de los sujetos cuando dan sentido al término 'exacto'.

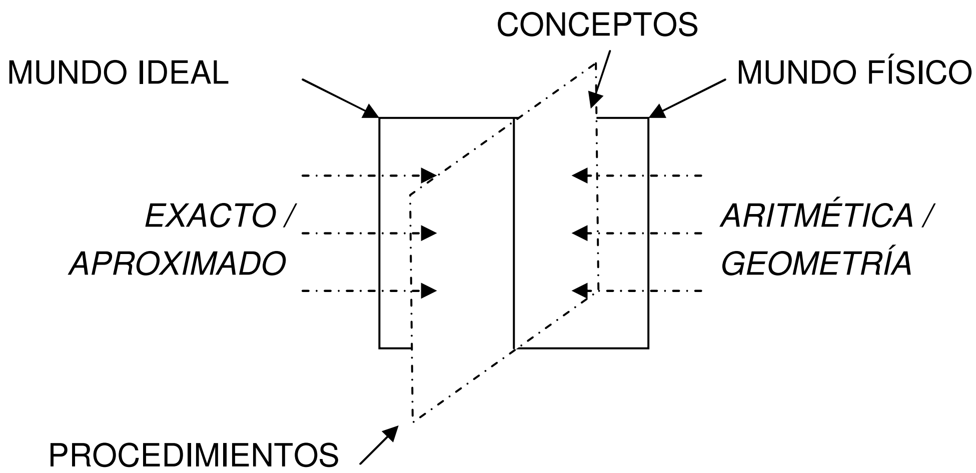


Figura 7.1: Prioridades que se establecen para dar sentido a 'exacto'

Mientras que las dicotomías mundo ideal / mundo físico y conceptos / procedimientos están representadas mediante planos secantes, las dicotomías restantes (aritmética / geometría y exacto / aproximado) están representadas mediante flechas perpendiculares a la recta de intersección. La razón de esa diferencia radica en el tratamiento diferente que daremos a las cuatro dicotomías.

Las dicotomías representadas mediante flechas intervienen de modo transversal en el estudio que desarrollaremos. Por un lado, podemos hablar de exacto / aproximado en el mundo ideal y en el mundo físico, o de procedimientos de representación (apoyados o no en teoremas) exactos o aproximados. Por otro lado, el análisis en el mundo ideal estará basado en conocimientos geométricos y aritméticos. Asimismo, los conceptos y procedimientos implicados corresponderán a los ámbitos geométrico y aritmético.

Como consecuencia, en el estudio que desarrollamos en el presente capítulo, las consideraciones sobre exactitud y aproximación y sobre aritmética y geometría van a recorrer el análisis de las dicotomías mundo ideal / mundo físico y conceptos / procedimientos.

En los apartados que siguen aportamos alguna evidencia sobre los acercamientos indicados y sobre su jerarquía relativa en diferentes sujetos.

7.2. Estudio y articulación de las dicotomías

7.2.1. Descripción global

En el capítulo 5 hemos estudiado las posibles respuestas para cada una de las tareas estudiadas. En este punto describimos de modo general algunos aspectos que comparten las dos tareas propuestas en el cuestionario.

Comenzamos por la dicotomía mundo ideal / mundo físico. Las tareas admiten una reflexión (y por lo tanto, respuestas) en el mundo ideal o en el mundo físico, en un sentido que explicamos a continuación (ver figura 7.2).

Cuando decimos mundo ideal nos referimos al análisis que se realiza en torno a nociones matemáticas como puntos, rectas, números, procedimientos geométricos y sus relaciones entre sí. Consideremos por ejemplo las afirmaciones matemáticas:

1. ‘Existe una biyección entre números reales y puntos de la recta’.
2. ‘Existen infinitos números reales comprendidos entre dos números reales’.
3. ‘Existen infinitos puntos de una recta entre dos puntos pertenecientes a esta recta.’
4. ‘Un número real es constructible si es algebraico en Q y su grado es una potencia de 2.’
5. ‘La mediatriz de un segmento es una recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.’
6. ‘El número $\sqrt{2}$ es constructible. El número π no es constructible’.
7. ‘La representación de $\sqrt{2}$ en la recta se apoya en el teorema de Pitágoras.’

8. ‘Para representar en la recta con regla y compás el número 0’5555..., es necesario expresarlo mediante la escritura fraccionaria.’

La lista da algunos ejemplos de axiomas (afirmaciones 1, 2, 3)[20] o propiedades (afirmaciones 4, 5, 6, 7, 8) que pueden utilizarse en el análisis de las tareas propuestas. Algunas de las afirmaciones pertenecen al campo geométrico (afirmaciones 3 y 5), otras al aritmético (afirmación 2). Otras incluso pertenecen a ambos (afirmación 1, 4, 6, 7, 8). Algunas ponen en juego conocimientos de tipo conceptual (afirmaciones 1, 2, 3, 4, 6), y otras procedimental (5, 7, 8).

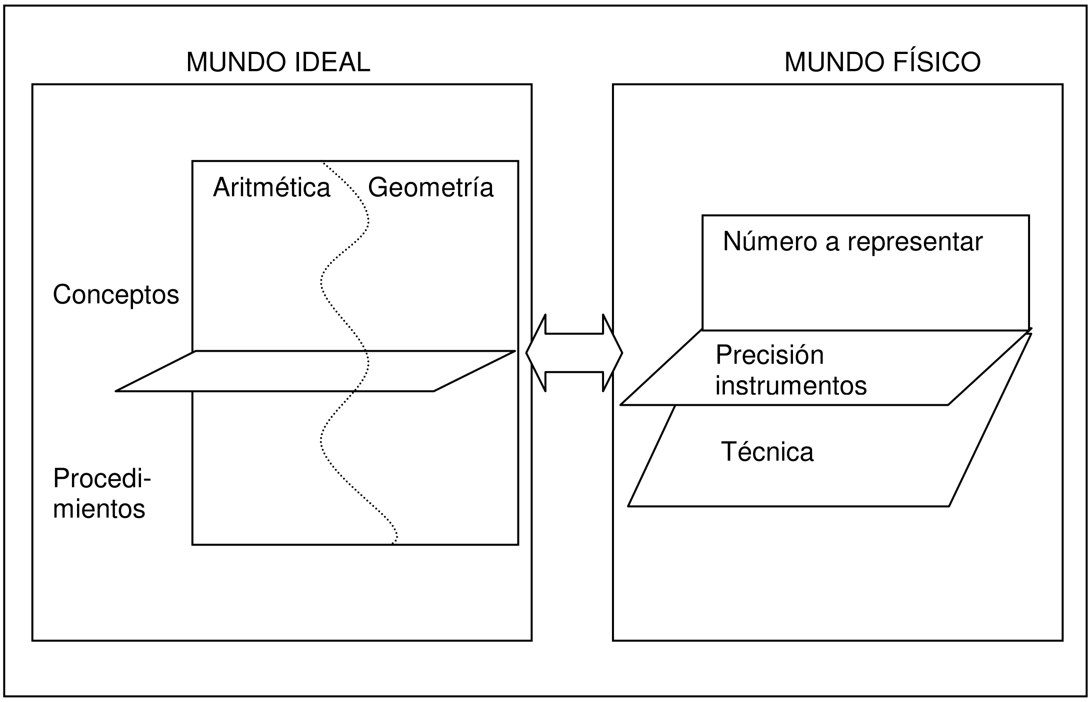


Figura 7.2: Caracterización de la exactitud

La reflexión en el mundo físico supone considerar los gráficos, y los instrumentos para construirlos, como representaciones (más o menos precisas) de los objetos matemáticos con los que se trabaja en el mundo ideal. Las rectas o segmentos de recta están representadas por trazos rectilíneos, los puntos pertenecientes a las rectas con trazos de pequeña longitud efectuados con lápiz o cualquier instrumento sobre los trazos que representan rectas o segmentos. Estos objetos físicos satisfacen las condiciones a las que está sujeto el conocimiento físico:

- La inexistencia de exactitud.
- La posibilidad constante de perfeccionamiento.
- Las reglas a las que se somete la medición de una magnitud extensiva como es en este caso la longitud.

[20] Con la salvedad de que los enunciados que en un sistema formal son considerados axiomas, en otro sistema podrían considerarse teoremas.

A las tres dicotomías mencionadas hay que añadir la última: exacto / aproximado, que está explícitamente considerada en el enunciado de cada tarea.

La exactitud de la asignación de un número a un fenómeno físico admite valoraciones diferentes, según sea considerado discreto o continuo. El caso que estamos valorando remite a la medición de una magnitud física continua (la longitud de un segmento).

Cuando se trata de un fenómeno discreto (por ejemplo, los libros de una biblioteca) es posible hablar de correspondencia perfecta entre los mundos ideal y físico, siempre que se trate de un número finito de objetos físicos. Así, podemos afirmar que el número que asignamos al total de libros de nuestra biblioteca es, por ejemplo, 332. En este caso, conviene aclarar, por precaución, cuál es la unidad considerada para efectuar la cuenta, prescindiendo de las peculiaridades que no alteran el resultado total; por ejemplo, prescindiendo del hecho de que quizá los libros son todos diferentes entre sí. Frege (1996) muestra la dificultad oculta bajo el término “unidad”, cuando aborda la tarea de definir el concepto de número. A medida que desecha las definiciones de otros autores que conducen, según su opinión, a conceptos erróneos de número, muestra que el término ‘unidad’ permite encubrir estas definiciones confusas. Así, por ejemplo, ‘unidad’ puede aplicarse a las cosas que hay que contar (cada libro de nuestra biblioteca) o a la reunión o agrupación de estas cosas (considerar el total de libros como una unidad: nuestra biblioteca) (Frege, 1996; p. 83).

Salvando las dificultades que entraña el término ‘unidad’, en la mayor parte de las situaciones en que debemos *contar* objetos físicos discretos y finitos, se produce una correspondencia perfecta entre mundo ideal y mundo físico. El problema se suscita cuando proyectamos esta creencia de asignación perfecta entre mundo ideal y mundo físico a los casos continuos. El número resultante de *medir* un segmento determinado nunca puede determinarse (desde el punto de vista físico) con exactitud (con la posible excepción de un único segmento cuya exactitud se declarase por definición). Desde el punto de vista ideal, como veremos a continuación, cabe hablar de exactitud.

Por ejemplo, es posible caracterizar la exactitud de la representación de un número en la recta o de la determinación del punto medio en función de la existencia o no de un procedimiento geométrico apoyado en alguna propiedad geométrica (mediatriz, teorema de Tales, teorema de Pitágoras). Entonces, es posible hablar de exactitud ‘ideal’ cuando el número se ha representado mediante uno de estos procedimientos o cuando el punto medio se determina mediante el trazado de la mediatriz. Cuando el procedimiento de representación no permite establecer una relación aritmética entre los puntos correspondientes a 0, 1 y el número considerado, se trata de una representación que es aproximada desde el punto de vista ideal (por ejemplo, la aproximación del punto que corresponde a $\sqrt{5}$ mediante el trazado de dos mediatrices en el intervalo [2, 3], conduce a la obtención del punto correspondiente a 2'25. Este número es una aproximación por exceso del número $\sqrt{5}$).

En cambio, si se considera la exactitud del gráfico construido sobre papel (mundo físico) siempre se trata de una representación aproximada de objetos que en un mundo ideal admiten una construcción exacta. "El trazo marcado sobre una regla no es en efecto una línea geométrica, no es un concepto, es ya una experiencia, un hecho" (Bachelard, 64; 1987). Sin embargo, es posible caracterizar la precisión del gráfico en función de diversos factores como el número representado, la precisión de los instrumentos utilizados y la técnica empleada en la construcción del gráfico. A modo de ejemplo, la representación de $\sqrt{2}$ mediante la construcción de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 unidad es 'más exacta' que la representación mediante intervalos encajados (que está limitada por razones de espacio a la determinación de, a lo sumo, 2 decimales). A su vez, esta representación es 'menos exacta' si se la compara con la representación del número 3 mediante la utilización de una regla graduada, pues la marca correspondiente a 3 coincidirá con una de las graduaciones de la regla, cosa que no ocurre con el número $\sqrt{2}$.

Un conflicto se induce cuando se da una representación gráfica (física) en un contexto matemático. El matemático usaría la representación gráfica para guiar su razonamiento, pero no como información fidedigna. El enunciado pretende precisamente ver si el estudiante: (1º) mantiene su argumentación en un solo mundo, y (2º) en qué medida algunas representaciones inducen más "ruido" que otras.

Los conflictos los hemos objetivado partiendo de desarrollos correctos de la tarea cuando hemos sido capaces de observar cambios en el origen de la argumentación, es decir, cuando el sujeto se siente obligado a modificar su prioridad para encontrar un argumento que considera convincente.

En 7.2.2 y 7.2.3 estudiamos en profundidad las dicotomías mundo ideal / mundo físico y conceptos / procedimientos, respectivamente. Las dicotomías restantes (conceptos / procedimientos y aritmética / geometría) se pondrán de manifiesto en el estudio de modo transversal.

7.2.2. El mundo ideal y el mundo físico

7.2.2.1. Breves consideraciones filosóficas

En la introducción (7.1) mencionamos que una de las prioridades consideradas por los sujetos para caracterizar la exactitud de las tareas realizadas es la dicotomía mundo ideal / mundo físico. Algunos sujetos recurren a una justificación basada en la consideración de propiedades de los objetos matemáticos (números, puntos, segmentos), otros basan su valoración en consideraciones referidas a las características físicas de los gráficos construidos, y finalmente, hay sujetos que combinan los dos tipos de consideraciones.

La búsqueda de relaciones entre objetos del mundo físico y capacidad del hombre para estudiarlos ha impregnado buena parte de las reflexiones filosóficas realizadas desde la antigüedad hasta nuestros días. "Saber es representar con precisión lo que hay fuera de la mente; entender de esta manera la posibilidad y naturaleza del conocimiento es entender la forma en que la mente es capaz de reconstruir tales representaciones. La preocupación fundamental de la filosofía es ser una teoría general de la representación, una teoría que divida la cultura en áreas que representen bien la realidad, otras que la representen menos bien y otras que no la representen en absoluto (a pesar de su pretensión de hacerlo)"[21] (Rorty, 1995; p. 13).

Un problema que ha interesado especialmente a los filósofos ha sido la relación entre lo físico y lo psíquico ('el problema cuerpo – mente'). En esta sección describimos brevemente las posiciones de algunos filósofos que consideramos claves en el estudio de este problema.

7.2.2.1.1. Platón y el mito de la caverna

No puede decirse que Platón haya abordado el problema cuerpo – mente en esos términos, puesto que la palabra 'mente' comenzó a utilizarse en el siglo XVII, especialmente en manos de Descartes (Rorty, 1995; pp.13-14). Sin embargo, el filósofo griego tenía una concepción de la relación entre mundo físico y conocimiento que pueden tener de él los seres humanos, que nos interesa describir.

En el libro séptimo de La República describe la relación entre la naturaleza humana, la ciencia y la ignorancia mediante lo que ha dado en llamarse 'el mito de la caverna':

> "Imagina un antro subterráneo, que tenga en toda su longitud una abertura que dé libre paso a la luz, y en esta caverna hombres encadenados desde la infancia, de suerte que no puedan mudar de lugar ni volver la cabeza [...], pudiendo solamente ver los objetos que tienen enfrente. Detrás de ellos, a cierta distancia y a cierta altura, supóngase un fuego cuyo resplandor los alumbra, y un camino escarpado entre este fuego y los cautivos. Supón a lo largo de este camino un muro [...]. Figúrate personas que pasan a lo largo del muro llevando objetos de toda clase, figuras de hombres, de animales, de madera o de piedra, de suerte que todo esto aparezca sobre el muro." (Platón, 1990; p. 205-206)

El filósofo prosigue en su descripción, indicando que los hombres cautivos sólo ven las sombras de los objetos que pasan detrás de ellos, y que esas sombras constituyen para estos hombres los objetos mismos: "En fin, no creerían que pudiera existir otra realidad que estas mismas sombras" (p. 206). Si uno de esos cautivos fuese liberado de sus cadenas, y fuese conducido, primero a observar

[21] El libro constituye en su conjunto una crítica del autor a las afirmaciones contenidas en el fragmento.

directamente los objetos de los que antes sólo veía las sombras, y más tarde fuera de la caverna, a ver la luz del sol:

> Si en seguida se le muestran las cosas a medida que se vayan presentando y a fuerza de preguntas se le obliga a decir lo que son, ¿no se le pondrá en el mayor conflicto y no estará él mismo persuadido de que lo que veía antes era más real que lo que ahora se le muestra? (Platón, 1990; p. 206)

Mediante esta alegoría, Platón expresa su visión de la condición humana respecto al conocimiento. "El antro subterráneo es este mundo visible; el fuego que le ilumina es la luz del sol; este cautivo, que sube a la región superior y que la contempla, es el alma que se eleva hasta la esfera inteligible" (p. 208). Los hombres somos los cautivos encadenados, que percibimos sólo las sombras del mundo en que vivimos. Gracias a una facultad especial que reside en el alma, mediante un órgano destinado para tal fin ('los ojos del alma'), accedemos a contemplar los objetos reales.

Considera que el mundo se compone de dos partes: el mundo visible (la caverna) y el mundo inteligible (el mundo exterior en su alegoría). En el mundo visible sitúa (en secciones separadas) por un lado, las imágenes, que describe como las sombras y los fantasmas representados en las aguas y sobre la superficie de los cuerpos opacos, tersos y brillantes. Por otro lado, sitúa los objetos que estas imágenes representan. Todos ellos son conocidos por el hombre, gracias a una facultad que denomina 'opinión' (*doxa,* facultad para juzgar según las apariencias), por medio de los sentidos: "Por consiguiente, para los que ven la multitud de cosas bellas, pero que no distinguen lo bello en su esencia, ni pueden seguir a los que intentan demostrárselo, que ven la multitud de cosas justas, pero no la justicia misma, y lo mismo todo lo demás, diremos que todos sus juicios son opiniones y no conocimientos." (p. 179)

En el mundo inteligible también supone dos partes. En una de ellas sitúa los conocimientos aritméticos y geométricos "que no puede alcanzar el alma sino sirviéndose de los datos del mundo visible, [...], partiendo de ciertas hipótesis, no para remontarse al principio, sino para descender a las conclusiones más remotas" (p. 204). En este caso, el 'conocimiento razonado' es la operación del alma que permite alcanzar estos conocimientos.

> "Sabes también que [los geómetras y los aritméticos] se valen de figuras visibles, a las que se refieren sus razonamientos, aunque no piensen en ellas, sino en otras figuras representadas por aquéllas. Por ejemplo, no recaen sus razonamientos ni sobre la diagonal que ellos trazan, sino sobre el cuadrado tal cual es en sí mismo con su diagonal. Lo mismo digo de las demás figuras que representan, sea en relieve, sea por el dibujo, y que se reproducen también ya en su sombra ya en las aguas. Los geómetras las emplean como otras tantas

imágenes, que les sirven para conocer las verdaderas figuras, que sólo pueden conocer por el pensamiento". (p. 204)

En la otra parte del mundo inteligible sitúa el puro conocimiento (esencias del Bien, de lo Bello, de la Bondad). En este caso también se parte desde una hipótesis, pero para llegar al principio independiente de toda hipótesis. La operación del alma que permite alcanzarlos es la 'pura inteligencia'.

7.2.2.1.2. Los tres mundos de Popper

Además de los objetos y estados físicos, Popper conjetura que hay *estados mentales* y que dichos estados son reales, ya que interactúan con nuestros cuerpos[22]. El interaccionismo da una solución al problema cuerpo - mente: es la teoría de que los estados mentales y físicos interactúan. Popper considera que aunque se pueda avanzar algo en el estudio de la interacción cerebro-mente, la solución será parcial (Popper, 1985; p. 41-42).

Avanzando más en su posición, acepta la existencia de tres mundos diferentes:

> "Primero, está el mundo físico –el universo de las entidades físicas-[...]; es a lo que llamaré «Mundo 1». En segundo lugar, está el mundo de los estados mentales, incluyendo entre ellos los estados de conciencia, las disposiciones psicológicas y los estados inconscientes; es lo que denominaré «Mundo 2». Pero hay también un *tercer* mundo, el mundo de los contenidos del pensamiento y, ciertamente, de los productos de la mente humana; a esto lo denominaré «Mundo 3»" (p. 43)

Los conocimientos matemáticos son producciones de la mente humana, por tanto, pertenecen al mundo 3. "Podría decirse que el Mundo 3 es un producto humano tan sólo por lo que respecta a su origen y que las teorías, una vez que existen, comienzan a tener una vida propia: producen consecuencias anteriormente invisibles y producen nuevos problemas." (p. 45)

> "Se *puede* decir que un sistema numérico lo construyen o inventan los hombres en lugar de descubrirlo. Mas la diferencia entre números pares e impares o divisibles y primos es un descubrimiento: esos conjuntos característicos de números están ahí, objetivamente, una vez que existe el sistema numérico, como consecuencia (inesperada) de la construcción del sistema, con lo que sus propiedades son susceptibles de descubrimiento." (pp. 45 – 46)

[22] Popper considera entidades 'reales' las que son capaces de ejercer un efecto causal sobre cosas materiales de tamaño ordinario. (Popper, 1985; p. 10).

Popper considera que Platón fue uno de los primeros en considerar una división parecida a la que él mismo hace. En la tabla 6. 1 describimos las similitudes y diferencias que establece con las ideas de Platón.

Platón según Popper	Popper
Contempla algo parecido a los tres mundos de Popper.	Acepta la existencia de 3 mundos
Mundo de objetos visibles.	Mundo 1: mundo físico. Se corresponde estrechamente con el mundo de objetos visibles de Platón, aunque no completamente.
Mundo de objetos inteligibles.	Mundo 3: mundo de los contenidos del pensamiento y de los productos de la mente humana. Coincide en algunos aspectos con el mundo inteligible de Platón, difiere en muchos otros.
Habla de afecciones o estados del alma.	Mundo 2: estados mentales.
Mundo de objetos inteligibles: consta de las “formas”, “ideas” o “esencias”:	Mundo 3: los objetos del mundo 3 existen, sin embargo no existen las esencias.
En el mundo inteligible sitúa los objetos a los que hacen referencia los conceptos o nociones generales.	No atribuye ninguna condición a los objetos o referentes de nuestros conceptos y nociones
No admitiría problemas o conjeturas (menos aún las falsas) en el mundo de objetos inteligibles.	Mundo 3: problemas y conjeturas (aunque sean falsas)
Comprendemos, captamos o “vemos” los objetos del mundo inteligible.	Es más fácil comprender cómo *hacemos* los objetos del mundo 3
Admite una intuición intelectual: “los ojos del alma”, una especie de órgano del sentido intelectual.	Admite una intuición intelectual. No admite la existencia de tal órgano. Hemos adquirido la facultad para argumentar o razonar, que se asemeja a un órgano.
Las formas o ideas se captan mediante “los ojos del alma”	Podemos comprender la captación o comprensión de un objeto del mundo 3 como un proceso activo.
La intuición intelectual es infalible.	Dista mucho de ser infalible. Se equivoca más de lo que acierta.

Tabla 7.1: Comparación entre Popper y Platón, según Popper

La tabla 7.1, además de comparar la concepción de ambos filósofos, brinda información, que ampliaremos más abajo, acerca de la posición de Popper respecto a la forma de adquisición de conocimientos. Aceptamos que la similitud más destacada entre ambos filósofos es la aceptación de diferentes estratos (uno físico, otro psíquico) en los que sitúa las actividades del hombre en relación con el mundo que le rodea.

Popper afirma que su consideración del mundo 3 permite abordar el problema cuerpo – mente, y lo hace mediante los siguientes argumentos:

> 1) Los objetos del Mundo 3 son abstractos (aún más abstractos que las fuerzas físicas); pero aún así son reales, pues constituyen herramientas poderosas para cambiar el Mundo 1. [...]

> 2) Los objetos del Mundo 3 poseen efectos sobre el Mundo 1 sólo a través de la interacción humana, la intervención de sus creadores; más concretamente, poseen dichos efectos gracias a que son captados, lo que constituye un proceso del Mundo 2, un proceso mental o, más exactamente, un proceso en el que entran en interacción los Mundos 2 y 3.
> 3) Por tanto, hemos de admitir la realidad tanto de los objetos del Mundo 3 como de los procesos del Mundo 2 [...]" (p. 54)

Popper considera que el conocimiento científico consta en gran medida o totalmente de hipótesis y conjeturas más bien que de un cuerpo de verdades conocidas y bien establecidas (p. 138). Rechaza la teoría empirista, según la cual todo nuestro conocimiento es el resultado de la experiencia de los sentidos. "Según mi manera de ver las cosas, podemos comprender la captación o comprensión de los objetos del mundo 3 [entre ellos, los objetos que forman parte del conocimiento matemático] como un proceso activo. Hemos de explicarla como la construcción o recreación de dicho objeto." (p. 50) Una vez que hemos adquirido la sensación de que podemos realizar el proceso de reconstrucción, el conocimiento se torna 'intuitivo' (p. 51).

En la tabla 7. 1 se pone de manifiesto que el filósofo no mantiene que el conocimiento se produzca debido a una especie de 'iluminación' que en nuestro interior nos hace reconocer la verdadera esencia de las cosas. Admite la existencia de la 'intuición intelectual', aunque reconoce que muchas veces ésta se equivoca.

El aumento de conocimiento lo explica como un proceso que incluye la elaboración de una teoría (que permite dar una primera solución al problema de partida) y el contraste e intento de falsación de la teoría mediante el método crítico de eliminación de error, que conduce a la formulación de un nuevo problema. "En suma, nuestro esquema dice que *el conocimiento parte de problemas y concluye con problemas* (si es que acaba alguna vez)" (Popper, 1997; p. 42)

7.2.2.1.3. Rorty: el acuerdo a través de la conversación

La posición de este filósofo contemporáneo respecto del problema cuerpo – mente es radicalmente diferente a las anteriores, puesto que considera que la relación entre el mundo físico y el mundo psíquico no constituye un problema.

Para justificar esa afirmación, se basa en los argumentos que a continuación transcribimos.

> "La imagen que mantiene cautiva a la filosofía tradicional es la de la mente como un gran espejo, que contiene representaciones diversas –algunas exactas, y otras no- y se puede estudiar por métodos puros, no empíricos. Sin la idea de mente como espejo, no se habría abierto paso la noción del conocimiento como representación exacta. Sin esta idea última, no habría tenido sentido la estrategia común de Descartes y Kant –obtener

> representaciones más exactas inspeccionando, reparando y limpiando el espejo, por así decirlo." (Rorty, 1995; p.20)

Rorty considera que puede pensarse en el conocimiento y su justificación de dos modos diferentes (p. 151):

a) Conocimiento y su justificación como relaciones privilegiadas con los objetos sobre los que versan dichas proposiciones.
b) Conocimiento como relación con proposiciones. Su justificación se considera como relación entre las proposiciones en cuestión y otras proposiciones de donde se pueden deducir las primeras.

La primera opción, que caracteriza a la filosofía tradicional, es la búsqueda 'intelectual' de un objeto privilegiado. Afirma que Kant fue el primero en concebir los fundamentos del conocimiento como proposiciones en vez de objetos. Antes de Kant, la búsqueda de "la naturaleza y origen del conocimiento" consistía en la búsqueda de representaciones internas privilegiadas. Después de Kant, se transformó en la búsqueda de las reglas que la mente se había impuesto. Sin embargo, el progreso de Kant respecto de una concepción del conocimiento proposicional y no perceptivo quedó a medio camino, porque quedó contenido en metáforas causales: pensaba que el sujeto cognoscente debía constituir la naturaleza.

La segunda opción es la que defiende el autor. Sostiene que la "certeza racional" constituye la victoria de un argumento más que la relación con un objeto conocido.

> Si consideramos nuestra certeza sobre el Teorema de Pitágoras como la confianza, basada en la experiencia con argumentos sobre estas materias, de que nadie encontrará una objeción a las premisas de las que lo deducimos, entonces no trataremos de explicarlo por la relación de la razón con la triangularidad. Nuestra certeza será cuestión de conversación entre personas, y no de interacción con la realidad no humana. (Rorty, 1995; p.149).

El autor considera que la verdad no es "la representación exacta de la realidad", sino "lo que nos es más conveniente creer" (p. 19). El éxito de la concepción tradicional "parece el producto final de un deseo original de sustituir la *conversación* por la *confrontación* en cuanto determinante de nuestra creencia" (p. 155) Según el autor, la conversación es suficiente, y debe abandonarse la búsqueda de la confrontación. Esto último supone no concebir el conocimiento como representaciones en el Espejo de la Naturaleza.

7.2.2.1.4. Enlace con nuestro análisis

Reconociendo las limitaciones de la investigadora en temas filosóficos y la parca selección de autores realizada, este paréntesis dedicado a la descripción de algunas posiciones filosóficas permite avanzar algunas consideraciones.

La distinción entre distintos tipos de mundos y, en consecuencia distintos tipos de conocimientos asociados a esos mundos son cuestiones que han surgido en filósofos de diversas épocas. En consecuencia, la distinción entre ‘objeto físico’ y ‘objeto producto de nuestro pensamiento’ ha formado parte de las reflexiones filosóficas, probablemente a causa (como afirma Rorty) del predominio en el pensamiento filosófico de la metáfora ‘la mente como espejo de la naturaleza’.

No nos interesa en este momento dilucidar las posibles causas (empresa que, por otra parte, difícilmente podríamos abordar). Sí nos interesa, en cambio, reconocer que la distinción entre objeto matemático y objeto físico (que en nuestro trabajo se manifiesta por el par punto / marca) ha sido abordada en la filosofía matemática y ha estado presente en el trabajo de matemáticos muy conocidos. En Brunschvicg (1972) encontramos algunas citas literales de Leibniz que apoyan esta última afirmación. Incluimos como ejemplo la siguiente:

> “Se puede decir en general que toda la continuidad es una cosa ideal, y que no hay absolutamente nada en la naturaleza que tenga partes perfectamente uniformes; pero en recompensa lo real no deja de gobernarse perfectamente por lo ideal y lo abstracto; ocurre que las reglas de lo finito triunfan en lo infinito, como si hubiera átomos (es decir, elementos asignables de la naturaleza) aunque no los haya, ya que la materia se divide actualmente sin fin; y que viceversa las reglas de lo infinito triunfan en lo finito, como si hubiera infinitésimos metafísicos, aunque no sean necesarios, y que la división de la materia no alcance nunca parcelas infinitamente pequeñas” (Leibniz, citado en Brunschvicg, 1972; p. 1702).

A modo de conclusión de este breve estudio filosófico (realizado después del estudio empírico) consideramos que los conflictos observados en los sujetos no son tan sorprendentes.

En las dos secciones siguientes profundizamos en la distinción mundo ideal / mundo físico aplicada al análisis de las tareas propuestas en el cuestionario[23]. Nos mantenemos en la tradición filosófica de la distinción cuerpo y mente y quedaría pendiente para futuros trabajos un estudio desde la perspectiva mantenida por Rorty.

[23] El mundo 2 de Popper no está explícitamente considerado en el análisis. Sin embargo, está presente de modo implícito en la organización (realizada por la investigadora) de las posibles respuestas mediante las 4 dicotomías.

7.2.2.2. Mundo ideal

En un mundo ideal, es posible asignar de modo ‘exacto’ el punto de la recta correspondiente a un número dado cuando el número es constructible.

Cuando el número no es constructible, sólo cabe admitir una representación en la recta, desde el punto de vista ideal, aproximada. Un número como π, por ejemplo, sólo admite una representación aproximada, estando el grado de aproximación en función de las cifras decimales del número que alcanzan a precisarse en la representación.

El conocimiento matemático involucrado en la biyección números reales / puntos de la recta enlaza conceptos aritméticos y conceptos geométricos. La representación en la recta de un número dado supone en primer lugar la formulación de un axioma que garantiza la biyección mencionada. En segundo lugar, exige la determinación de una ley de correspondencia, que tradicionalmente es la medida de longitudes. Para la aplicación de esta ley se hace necesaria la asignación concreta de dos números (0 y 1) a dos puntos cualesquiera de la recta. A partir de esta asignación, queda garantizada la correspondencia.

Los conocimientos anteriores se resumen en la posibilidad de expresar la longitud de un segmento cualquiera como el producto de un número real por la longitud de otro segmento considerado como unidad (longitud AB = *r* . longitud OI, siendo *r* real).

El hecho de que aceptemos axiomáticamente la existencia de un punto en la recta para cada número real no es equivalente a la posibilidad de asignar efectivamente un punto a un número dado. Esta posibilidad está estudiada en profundidad en la teoría de los números constructibles y la propiedad fundamental que éstos cumplen (ser raíces de polinomios con coeficientes racionales de grado potencia de dos) descansa sobre propiedades algebraicas (Carrega, 1981).

Por otro lado, desde la geometría se conocen procedimientos que permiten determinar, a partir de un segmento de longitud conocida *u*, otro segmento cuya longitud con el segmento dado (considera segmento unidad) se expresa en función de un número constructible. (AB = k. *u*, siendo *k* constructible).

La determinación del punto que corresponde al número *k* se basa en ese caso en procedimientos geométricos que conducen a la existencia de una relación aritmética entre los puntos correspondientes a 0, 1 y el número.

Al usar estos procedimientos geométricos los sujetos parecen considerarlos íntimamente relacionados con la escritura simbólica del número. Nos hemos referido a este punto en repetidas ocasiones. La aplicación del teorema de Tales o del teorema de Pitágoras para obtener el punto correspondiente a un número dado, conocidos el origen y la unidad, depende de que el número se haya sabido expresar como fracción de naturales o como la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de números enteros.

Algunos de los conocimientos matemáticos mencionados son de tipo conceptual y otros son de tipo procedimental, ya se estudien desde la geometría, desde la aritmética o exijan incluso una incursión por el álgebra.

Los sujetos de Bachillerato y de 1º de Licenciatura no necesitan conocer la teoría de los números constructibles para representar números en la recta. De hecho, los sujetos saben que con los números reales es posible "llenar" la recta geométrica, y conocen algunos procedimientos de representación sencillos (como la utilización del teorema de Tales, el trazado de mediatrices y el teorema de Pitágoras). Es posible que incluso ignoren algunos hechos como por ejemplo la trascendencia del número π (como se ha puesto de manifiesto durante las entrevistas exploratorias). Además necesitan conocer los procedimientos de conversión de una escritura simbólica a otra, para expresar los números de la forma más conveniente para el procedimiento.

En suma, los sujetos estudian algunos hechos básicos de la biyección números reales / puntos de la recta y algunos procedimientos de representación.

7.2.2.3. Mundo físico

La marca que identifica un número sobre un trazo rectilíneo nunca es exacta: "si el objeto lógico está exactamente determinado y limitado por las propiedades enumeradas, el objeto físico es un complejo indeterminado" (Bachelard, 1987; p. 57). La justeza de la marca estará en función del número considerado, de la precisión de los instrumentos utilizados y del modo de proceder para la construcción del gráfico.

En cuanto al número representado, no es lo mismo valorar la exactitud de la representación en la recta del número 2 que la representación del número $\sqrt{2}$. Con una regla graduada común, comprobaremos si la marca etiquetada con el número 2 es o no exacta (limitada a la precisión de la regla), pero no podríamos hacer lo mismo con la marca etiquetada con $\sqrt{2}$.

En cuanto a la precisión de los instrumentos, Bachelard afirma que "[...] a cada instrumento y a cada técnica les corresponde lo que podría llamarse el átomo instrumental [...]. Para cualquier aparato de amplificación que se utilice, las condiciones de empleo óptimo determinan un infinitamente pequeño pragmático que no se sabría superar." (Bachelard, 1987; p. 63).

En cuanto al modo de proceder, Bachelard afirma que "el concepto de precisión no es únicamente dependiente de la sensibilidad instrumental, [sino que] también es solidario de la técnica" (Bachelard, 1987; p. 65). Por ejemplo, la representación en la recta del número 1/4, podría realizarse de modos diferentes:

- Construcción a mano alzada.
- Utilización de una regla graduada para trazar el segmento de recta y las marcas correspondientes a 0, 1 y 1/4.
- Teorema de Tales en acto (Vergnaud, 1982).

- Combinación de los anteriores.

Si deseamos caracterizar la exactitud del gráfico obtenido en cada caso, intervendrá en nuestra valoración el modo escogido. Una construcción a mano alzada probablemente se considere menos exacta que una construcción realizada con regla graduada o regla sin graduar y compás. Entre estas dos, es posible que se valore como más exacta la última, aunque la valoración se apoye sólo en la satisfacción o tranquilidad que se tiene cuando la construcción se justifica por propiedades geométricas.

A simple vista, lo más probable es que no se observen diferencias entre una marca realizada con regla graduada y una marca realizada con regla sin graduar y compás. Es casi seguro que si utilizamos un instrumento de mayor precisión comiencen a notarse diferencias (incluso en las unidades, consideradas 'idénticas'). Sin embargo, no podríamos decidir *a priori* si el gráfico más exacto es el construido con regla graduada o con regla sin graduar y compás.

7.2.3. Conceptos y procedimientos

En las respuestas de los sujetos se observa un énfasis en conceptos o en procedimientos. En esta sección describimos brevemente el tratamiento desigual que algunos autores han dispensado a la distinción conceptos / procedimientos.

7.2.3.1. La dialéctica 'outil - objet'

R. Douady (1984) afirma que en un concepto matemático conviene distinguir su carácter 'outil' (herramienta) de su carácter 'objet' (objeto). "Por herramienta entendemos su funcionamiento científico en los diversos problemas que permite resolver. Un concepto toma su sentido de su carácter como *herramienta*. Sin embargo, ese carácter pone en juego las relaciones que mantiene con los otros conceptos implicados en el mismo problema. Dicho de otro modo, desde el punto de vista herramental, no se puede hablar de un concepto sino de una red de conceptos gravitando eventualmente en torno de un concepto principal. [...]

Por *objeto*, entendemos el concepto matemático, considerado como objeto cultural que tiene su sitio en un edificio más grande [...] en un momento dado, reconocido socialmente" (Douady, 1984; 9-10).

R. Douady diseña una serie de situaciones (sin pérdida de generalidad, podrían considerarse unidades didácticas) para desarrollar en clase. En cada caso, establece los conocimientos previos (conceptos conocidos en tanto que objetos) que se emplearán (como herramientas antiguas) para abordar el problema propuesto. Se supone que no serán suficientes para resolverlo, de modo que los sujetos deberán utilizar una nueva herramienta (es decir, nuevos conceptos en tanto que herramientas), aunque de forma implícita, es decir, sin tomar consciencia de que están utilizando un nuevo concepto. En la fase siguiente se hace explícito el nuevo concepto, con carácter de objeto o con carácter de herramienta.

En las respuestas de nuestros sujetos podemos considerar, por ejemplo, que la mediatriz del segmento se utiliza en calidad de herramienta para resolver la cuestión de dividir por la mitad un segmento. Otros procedimientos para determinar la mitad del segmento también involucran la utilización de conocimientos como herramientas (medir el segmento con regla), aunque parezca más idóneo el trazado de la mediatriz (por tratarse de un segmento). En este caso, la definición geométrica de mediatriz, y su utilización en la demostración de otras propiedades, constituye el carácter de objeto del concepto. Si se trata de dividir una varilla de madera, el procedimiento más adecuado involucra la medición de la varilla con la regla. En este último caso, la medición de una longitud es el conocimiento que interviene en calidad de herramienta.

Así, buena parte de los conocimientos matemáticos y físicos empleados para responder las cuestiones son utilizados, según nuestra opinión, en calidad de herramientas. El carácter de objeto de un concepto se pone en juego cuando se considera este concepto como perteneciente a una área de conocimiento matemático determinado.

Sin embargo, nos preguntamos si en algunas justificaciones de la inexactitud de la representación surge algún concepto en su carácter de objeto.

Veamos el siguiente ejemplo:

> (Respuesta a ítem 1c del cuestionario, sujeto 744) “No [es exacta la representación] porque la $\sqrt{2}$ es un número con infinitos números decimales y aunque el postulado de Cantor diga que la sucesión de los intervalos encajados dé un número exacto yo no he podido concretamente porque entre dos puntos siempre hay otro en medio.”

En la respuesta anterior consideramos que se solapan, sucesivamente, dos dificultades. La primera es la presencia de infinitas cifras decimales, que responde a un rasgo de la representación decimal del número. La segunda, que nos interesa analizar en este momento, es la dificultad de articular dos afirmaciones verdaderas en las matemáticas, a saber: el axioma de que la sucesión de intervalos encajados conduce a un único número real, y la propiedad de que entre dos puntos de una recta siempre hay otro.

Podríamos pensar que esta segunda dificultad es propia de los conceptos implicados, pero en tanto que objetos, no como herramientas. Las dos afirmaciones mencionadas forman parte de ‘del edificio más grande’ constituido por esa área del conocimiento matemático.

Sin embargo, en la respuesta transcrita se comprueba la existencia de ‘una red de conceptos que gravita’ en torno al concepto de número real (en particular, del número $\sqrt{2}$), que es un rasgo específico de la utilización de un concepto como herramienta. Aceptamos finalmente que es el carácter de herramienta el que se pone en juego, y que la red de conceptos y propiedades que también participan en la respuesta del sujeto son el resultado de la puesta en práctica de objetos conocidos como herramientas explícitas para resolver la cuestión.

7.2.3.2. Conocimiento conceptual y conocimiento procedimental

En la adquisición de conocimientos, Hiebert y Lefevre (1986) distinguen entre conceptos y procedimientos. En matemáticas esta distinción suele reflejarse como comprensión y destrezas, y ha sido estudiada desde comienzos de este siglo.

Estos autores afirman que el *conocimiento conceptual* se caracteriza por ser rico en relaciones. “Puede pensarse como una membrana conectada de conocimientos, una red en la que las relaciones de conexión son tan importantes como las piezas discretas de información” (p. 3). “El desarrollo del conocimiento conceptual se alcanza mediante la construcción de relaciones entre piezas de información. Este proceso de conexión puede darse entre dos piezas de información que ya estaban almacenadas en la memoria o entre una pieza existente de conocimiento y otra que acaba de aprenderse” (Hiebert y Lefevre, 1986, p. 4.).

En cuanto al *conocimiento procedimental*, “se construye con dos partes diferentes. Una parte se compone del lenguaje formal, o sistema de representación simbólica de las matemáticas. La otra parte consta de algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas.” (p. 6). “Muchos de los procedimientos que los estudiantes tienen son probablemente cadenas de prescripciones para manipular símbolos. Sin embargo, el conocimiento procedimental también incluye estrategias para resolver problemas que no operan directamente sobre los símbolos.” (p. 8).

Hiebert y Lefevre consideran que la mayor diferencia entre los dos tipos de conocimientos radica en que mientras que el conocimiento procedimental enfatiza la relación ‘después de’, el conocimiento conceptual está saturado de relaciones de muchas clases (p. 8).

Las construcciones empleadas por los sujetos para representar números en la recta (mediante regla y compás) son ejemplos claros de conocimiento procedimental. Hiebert y Lefevre incluyen las construcciones con regla y compás en una clase de procedimientos que describen como “estrategias o acciones para la resolución de problemas que operan sobre objetos concretos, diagramas visuales, imágenes mentales u otros objetos que no son símbolos estándares de nuestros sistemas matemáticos” (p. 7). Sin embargo, una construcción con regla y compás aplicada a la obtención de la representación del número $\sqrt{5}$ en la recta, por ejemplo, exige reconocer que $\sqrt{5}$ puede expresarse como raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de dos números naturales (1 y 2). En este caso, se trata de una red de conceptos e ideas que se enlazan, correspondiendo por tanto a conocimiento conceptual. Una vez conseguida la expresión $\sqrt{5} = \sqrt{(2^2 + 1^1)}$, los pasos seguidos en la construcción podrían considerarse piezas de conocimiento procedimental.

Las reflexiones de los sujetos en torno a la exactitud de las representaciones obtenidas las consideramos como piezas de conocimiento conceptual, pues el sujeto debe valorar la representación realizada basándose en conocimientos de diferente índole (por ejemplo, reconocer que desde el punto de vista físico no es posible conseguir representaciones exactas; desde la matemática, valorar el procedimiento utilizado según se apoye o no en una propiedad geométrica, o reconocer la necesidad de modificar la escritura del número para aplicar un determinado procedimiento).

La distinción entre conocimiento conceptual y conocimiento procedimental intenta establecer una distinción entre conocimientos que, como los mismos autores reconocen, no siempre es fácil: "no todos los conocimientos se ajustan adecuadamente a una u otra clase. Algunos conocimientos encajan en la intersección" (p. 9). "Algunas conexiones son inevitables. De hecho, aunque es posible considerar procedimientos sin conceptos, no es fácil imaginar conocimiento conceptual que no esté ligado con algún procedimiento." Nuestro ejemplo de la representación de $\sqrt{5}$ constituye un caso de combinación de los dos tipos de conocimiento.

Consideramos que la *dialéctica herramienta – objeto* planteada por Douady (1984) y la distinción *conocimiento conceptual / conocimiento procedimental* establecida por Hiebert y Lefevre (1986) responden a enfoques diferentes. En el primer caso, un concepto matemático adquiere un carácter de herramienta o de objeto, según se utilice en el proceso de resolución de un problema, o se considere formando parte del conocimiento matemático. En el segundo caso, se trata de una distinción entre dos tipos de conocimientos matemáticos, que se emplean *ambos* en la resolución de problemas.

7.2.3.3. Enlace con nuestro estudio

La dialéctica herramienta / objeto que se pone en juego en la tareas planteadas en el cuestionario proporciona un marco para analizar los conflictos observados en las respuestas de los sujetos.

- Al valorar la exactitud de una representación sobre el papel desde el punto de vista matemático, la herramienta que bastaría considerar es la constructibilidad del número dado, sea cual sea su representación.
- Según que el sujeto dé prioridad a una reflexión sobre objetos matemáticos o sobre objetos del mundo físico, las herramientas puestas en juego serán diferentes.

El conflicto 1 surge porque se utiliza en la valoración de la exactitud de la representación una herramienta inadecuada (su representación posicional infinita), puesto que en todos los casos se ha reconocido la constructibilidad del número (y de hecho, se ha representado el número mediante algún procedimiento geométrico).

El conflicto 2 surge como consecuencia de la utilización de conocimientos en calidad de herramientas en ámbitos inadecuados (físico o matemático).

En el marco de la dialéctica ‘outil – objet’ los dos conflictos se explican por el uso de herramientas inadecuadas; faltaría aún determinar las razones por las que los sujetos las prefieren. No se trata de un desconocimiento de las herramientas adecuadas porque en todos los casos éstas están presentes; si siguiéramos a Douady, deberíamos concluir que la elección hecha por los sujetos fue equivocada, pero no hemos podido desarrollar el marco adecuado para entender el porqué de ese “error”.

La distinción entre conocimiento conceptual y conocimiento procedimental ha sido utilizada en 7.2.1 para clasificar una serie de afirmaciones matemáticas. Sin embargo, hemos de reconocer (al igual que los autores consultados) que no siempre es posible establecer una frontera clara entre los dos tipos de conocimiento.

7.3. Una explicación de los conflictos observados

El estudio empírico descrito en los capítulos 4 y 5 y 6 se ha centrado en la indagación en torno a dos conflictos detectados durante las entrevistas exploratorias. Las preguntas incluidas en el cuestionario fueron pensadas para suscitar la manifestación de esos conflictos y el estudio de las respuestas estuvo orientado a la detección de repuestas conflictivas, que fueron confirmadas durante las entrevistas confirmatorias.

En la figura 7.3 reproducimos la figura 7.2, esta vez proponiendo una ‘ubicación’ de los dos conflictos estudiados, de los que daremos una explicación en las siguientes secciones.

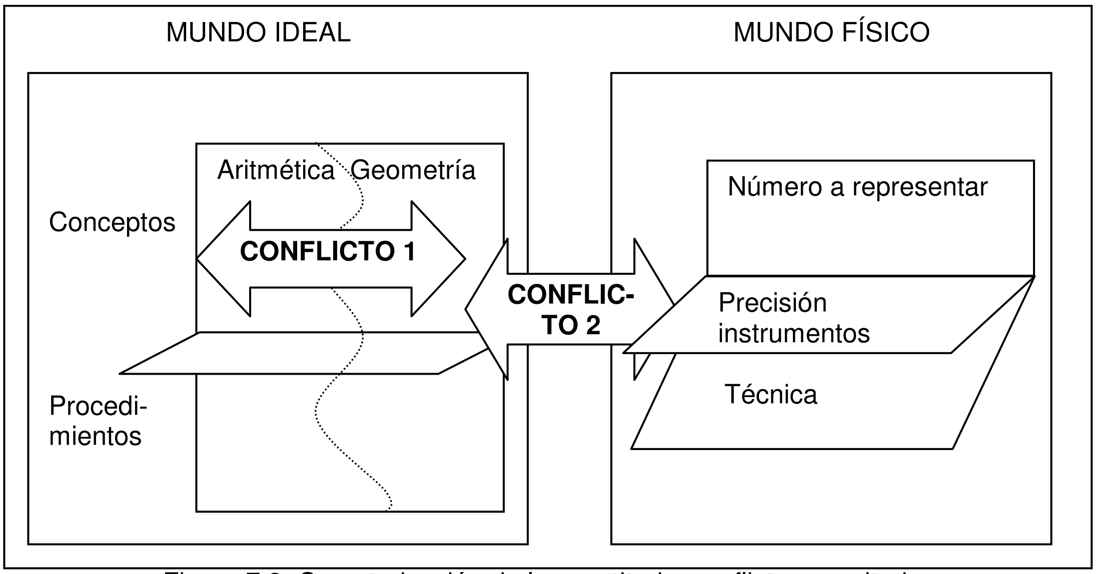


Figura 7.3: Caracterización de la exactitud y conflictos suscitados

7.3.1. Conflicto 1: Dificultad en admitir el control de un proceso infinito

7.3.1.1. Estudio inductivo del conflicto 1.

En primer lugar, incluimos algunas respuestas obtenidas en el cuestionario, en las que hemos consideramos que se manifiesta el conflicto (tabla 7.2; tabla 6.8)

Suj.	T	Número	Respuesta
234	R	0’33...	“No, es un número inexistente porque nunca lo podemos conocer en su totalidad, además la representación gráfica siempre da error.”
234	D	0’33...	No, el número 0’3 tiene infinitos decimales la representación gráfica nunca sería exacta, por no conocer el número, por grosor del lápiz... y aunque he aplicado 1/3 que incluye a todos los decimales la representación gráfica exacta es imposible.”
355	R	0’33...	(fracción, Tales; divide la unidad en 3 partes): “No, porque al ser un número irracional, es decir, que tiene infinitos decimales la representación no puede ser nunca exacta. Teóricamente el punto obtenido tiene que ser exacto pero en el trazo es muy difícil obtener la precisión para lograrlo con total exactitud.”

Tabla 7.2: Respuestas con conflicto 1

En las respuestas anteriores los sujetos indican que la representación no es exacta, o que no es posible dividir exactamente por la mitad el segmento cuya longitud es el número dado apelando a diversas razones, una de las cuales es la presencia de infinitas cifras decimales en el número considerado.

La respuesta del sujeto 234 constituye un ejemplo típico del conflicto. Después de utilizar el teorema de Tales para representar el número 0’333... en la recta, al que reconoce como la fracción 1/3, afirma que la representación no es exacta porque el número posee infinitas cifras decimales. Por la misma razón, considera que no es posible dividir por la mitad el segmento de extremos 0 y 0’33333... obtenido en su representación.

Hemos estudiado en la sección anterior que la representación o la determinación del punto medio del segmento nunca son ‘físicamente’ exactas, y son ‘idealmente’ exactas cuando se emplea un procedimiento geométrico. En las respuestas anteriores se observan alusiones a la inexactitud física, incluso a la exactitud teórica. La alusión a las infinitas cifras decimales del número genera una dificultad que valoramos como un conflicto cognitivo.

La presencia de infinitos números decimales explica una representación ideal aproximada cuando los números implicados no son constructibles. En el cuestionario se han utilizado únicamente números constructibles, y los sujetos cuyas respuestas se incluyen en la tabla 7.2 han usado procedimientos geométricos de representación (el teorema de Tales). Por lo tanto, mediante la utilización de una escritura simbólica adecuada (en los ejemplos usados, la escritura fraccionaria 1/3) es posible representar en la recta el número ‘exactamente’ desde un punto de vista ideal aunque, como es inevitable, 'inexactamente' desde un punto de vista físico. Sin embargo, la inexactitud desde el punto de vista físico de ningún modo es, en este caso, matemáticamente hablando, imputable a los infinitos decimales.

Dicha imputación es pertinente cuando estamos en presencia de un número no constructible, por ejemplo 0'123456... En este caso, sólo es posible una representación ideal aproximada porque no contamos con un procedimiento geométrico que exprese una relación aritmética entre el segmento unidad y el segmento determinado por el origen y el número dado.

Sin embargo, el caso anterior no se ha presentado en el cuestionario, porque todos los números utilizados son constructibles. De las 27 respuestas en las que se observa el conflicto (tabla 5.25), 13 corresponden a representaciones apoyadas en propiedades geométricas (teorema de Tales o teorema de Pitágoras), 5 a representaciones realizadas mediante la división de la unidad en partes iguales, de manera que la marca correspondiente al número coincide con una división de la unidad y en las 9 restantes la marca correspondiente al número se ha determinado de forma aproximada.

En estos últimos casos es posible que los sujetos no se hayan percatado de la existencia de un procedimiento geométrico Durante las entrevistas confirmatorias se ha considerado esta posibilidad, y cuando el sujeto entrevistado no hacía referencia a un procedimiento geométrico (de representación o para determinar la mitad del segmento) la investigadora lo sugería.

Es así como en tres casos la inconsistencia se ha confirmado (sujetos 744, 234 y 355) y en otros tres casos se han dado diferentes resultados (sujetos 732, 222 y 352), pues los sujetos modificaron su argumentación después de considerar el procedimiento geométrico o bien por otras razones, expuestas en 6.5.4.2.

En la figura 7.3 el conflicto 1 se manifiesta en el seno de la disciplina matemática. Lo hemos ubicado en la "intersección" entre los trasplanos aritmético y geométrico. Los sujetos con conflicto no logran realizar una síntesis adecuada de las informaciones provenientes de ambos trasplanos porque les resultan contradictorias.

Las escrituras simbólicas de un número constructible proporcionan información abundante: conjunto numérico al que pertenece, posibilidades y limitaciones operatorias, procedimiento geométrico para su representación. Sin embargo, un manejo satisfactorio de los números debe contemplar la posibilidad de separar el concepto (el número en cuestión) de su escritura. Las limitaciones propias de una representación no deberían convertirse en incapacidades o limitaciones del concepto propiamente dicho. "No se debe confundir al objeto representado con el «contenido» de la representación. En efecto, el contenido de la representación depende en parte de la forma, en la medida en que *el «contenido» es lo que el registro utilizado permite presentar explícitamente del objeto representado*" (Duval, 1996, p.8). Este autor, en un trabajo anterior describe el 'obstáculo del desdoblamiento de los objetos matemáticos' como una "resistencia a disociar las propiedades inherentes a un objeto" (Duval, 1983). "Es en cada paso nuevo del aprendizaje que algunos alumnos se encuentran desorientados por esta exigencia sin señales: separar las propiedades o las características hasta entonces fuertemente asociadas a un mismo objeto, o atribuir las denominaciones o las representaciones diferentes a un objeto que se piensa que es el mismo."

El obstáculo identificado por Duval en algunos sujetos guarda cierta similitud con el conflicto detectado. No obstante, debemos proseguir nuestra reflexión para describir el conflicto en mayor detalle y si es posible, conectarlo con un obstáculo epistemológico.

Mientras que la representación posicional de un número irracional es siempre infinita, la finitud o infinitud de la representación posicional en una base *b* (natural) de un número racional no es una propiedad intrínseca del número, sino que depende de la base utilizada.

Es llamativo el hecho de que aún ante la presencia de otras escrituras diferentes de la decimal infinita, las respuestas de estos sujetos con conflicto se vean completamente influenciadas por la escritura infinita. La identificación entre continuo aritmético (**R**) y continuo geométrico (la recta) se ve obstaculizada, para estos sujetos, por la representación simbólica del número.

Durante la entrevista al sujeto 355, se ha planteado la representación mediante el teorema de Tales de otros números, como 0'25 y 0'24 (este último estaba incluido en el cuestionario). En un momento dado de la entrevista, la investigadora pregunta cuál de las dos representaciones es más exacta, la correspondiente a 0'333... o la correspondiente a 0'25, suponiendo que en los dos casos se hubiese realizado con mucho cuidado. La respuesta del sujeto es la siguiente:

> (Frase 0405) Es que... en el plano teórico esto está completamente correcto porque... la fracción un tercio da este número, entonces, teóricamente se supone que este es el número.
>
> (Frase 0406) Lo que pasa es que al tener infinitos decimales, pues, es que no sé si ya... sería alcanzable o no.
>
> (Frase 0407) Hombre, éste [se refiere a 0'24] se ve... más exacto. Pero teóricamente los dos son iguales.
>
> (Frase 0408) Lo que pasa es que este... por la naturaleza del número, se ve más... más exacto en la representación."

Posteriormente la investigadora interroga al sujeto respecto de la exactitud de la representación del número 0'24 (realizada también mediante el teorema de Tales). El sujeto afirma lo siguiente:

(Frase 0704) "Sí es que claro, al ser este número con finitos decimales, pues, yo creo que es más exacta la representación que en el caso primero, porque el caso primero tenía infinitos números decimales."

En las respuestas anteriores observamos que el sujeto no valora de la misma forma las representaciones de los números 1/3,1/4 y 6/25 porque en el primer caso el número tiene infinitas cifras decimales.

7.3.1.2. Explicación del conflicto 1

Bachelard hace referencia a ese conocimiento de las nociones matemáticas mediante planos diferentes cuando afirma: "Las matemáticas se desarrollan en planos múltiples y una noción netamente precisada en un dominio deberá a menudo ser estudiada mediante elementos que pertenecen a un orden teórico diferente. El conocimiento exacto en un dominio se vuelve inexacto con respecto a otros procedimientos de estudio. Así el número π queda muy exactamente definido por la razón de la circunferencia a su diámetro cuando se acepta la intuición geométrica como algo dado. En su evaluación con los medios aritméticos, esta noción resulta inexacta y son entonces necesarios procedimientos de aproximación. No se trata de algo desconocido en sí, sino de algo desconocido en relación con un medio de conocer especificado. Se puede decir, por ejemplo, que la diagonal de un cuadrado es conocida geométricamente y es desconocida aritméticamente. Esta heterogeneidad de los dominios es la fuente de la resistencia a la asimilación recíproca de las nociones matemáticas" (Bachelard, 1987; p.188).

Bachelard continúa afirmando que es esa heterogeneidad de los dominios la que da existencia a los entes de razón. "La función «existencia» aparecerá justo cuando se quiera aplicar uno de estos dominios heterogéneos en el otro; esta función corresponde a *la opacidad relativa de dos métodos diferentes*. Si hubiese correspondencia exacta no habría realmente dualidad de dominios. Por otra parte, un dominio de explicación es siempre puro y claro con respecto a sus propios elementos. Una noción no produce sombra en él a no ser que se la intente analizar por procedimientos indirectos, extraños al dominio natural de la noción. Pero como este análisis es a la vez imperfecto, crea la apariencia objetiva. Como lo señalábamos al comienzo de esta discusión, [encontramos] aquí nuevamente el fracaso de la representación que supone postular una realidad en cierto modo hostil." (Bachelard, 1987; p.188-189).

Bachelard considera que la interferencia entre distintos dominios permite corregir las nociones, abstraerlas de la intuición que las propone. En nuestro análisis, la interferencia entre diferentes representaciones (dominios) conduce a una noción de número como ente de razón que supera las limitaciones propias de algunos dominios.

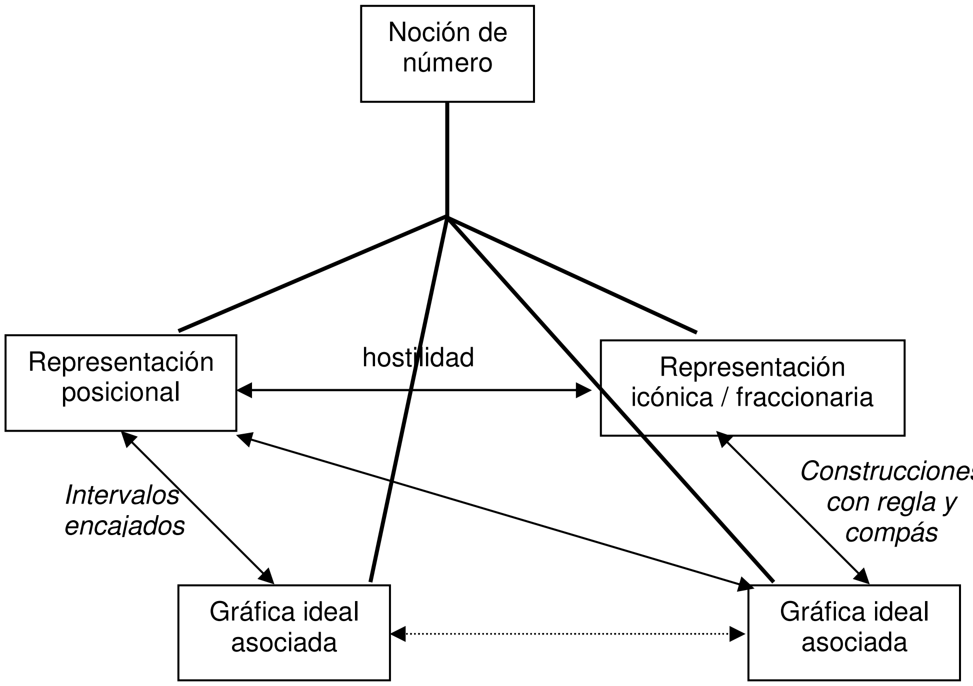


Figura 7.4: La noción de número como resultado de la interacción de representaciones

Interpretando las afirmaciones de Bachelard, consideramos que la apariencia objetiva del número 0'333... (o de cualquier número real) resulta de la confrontación de representaciones (dominios) heterogéneas. En el esquema de la figura 7.4 la noción de número resulta de la confrontación de las representaciones posicional e icónica / fraccionaria (todas simbólicas), acompañadas por sus respectivas representaciones gráficas, por tratarse de un problema de representación en la recta.

Las representaciones icónica / fraccionaria expresan, "como un todo", el valor numérico asignado a la suma (finita o infinita) que involucra la representación posicional; cuando la representación posicional es finita, también describe el número "como un todo". En la figura 7.4, la flecha que une las representaciones simbólicas posicional e icónica / fraccionaria la dibujamos continua para expresar la idea anterior. Los sujetos, al afrontar una representación posicional infinita (como 0'333...), aunque dispongan de procedimientos operatorios para pasar a la representación fraccionaria (1/3), o simplemente la reconozcan, deben superar una cierta hostilidad entre el número "como un todo" y el número "incompleto" o sobreentendido.

Para obtener la marca ideal exacta (es decir, para representar el número en la recta), es necesario asociar una de las representaciones simbólicas (posicional o icónica / fraccionaria) con procedimientos de representación ideales específicos: intervalos encajados y construcciones con regla y compás, respectivamente.

Mientras que los primeros conducen a representaciones ideales exactas o aproximadas, dependiendo del número de cifras correspondiente (finito o infinito), las segundas conducen a representaciones (en la recta) ideales exactas. Por esa razón, la flecha que une las gráficas ideales es discontinua. Sólo hay coincidencia ideal cuando el número de cifras del número es finito; cuando el número de cifras es infinito, las representaciones gráficas no son compatibles (a través de los intervalos encajados, la representación ideal es inaccesible, mientras que a través de las construcciones con regla y compás se llega a esa representación gráfica ideal), por lo que puede ocurrir que amplifiquen la hostilidad inicial de los dominios posicional e icónico / fraccionario.

A título de ejemplo, en la figura 7.5 representamos las respuestas del sujeto 355 según el esquema 7.4. En 7.5(a) representamos las respuestas referidas a la representación de 0'24, y en 7.5(b) las respuestas referidas a la representación de 0'3333...

En la figura 7.5 observamos que mientras que el sujeto reconoce la conexión natural entre todas las representaciones para el número 0'24, no reconoce en cambio la conexión entre el número 0'333... y la representación ideal exacta.

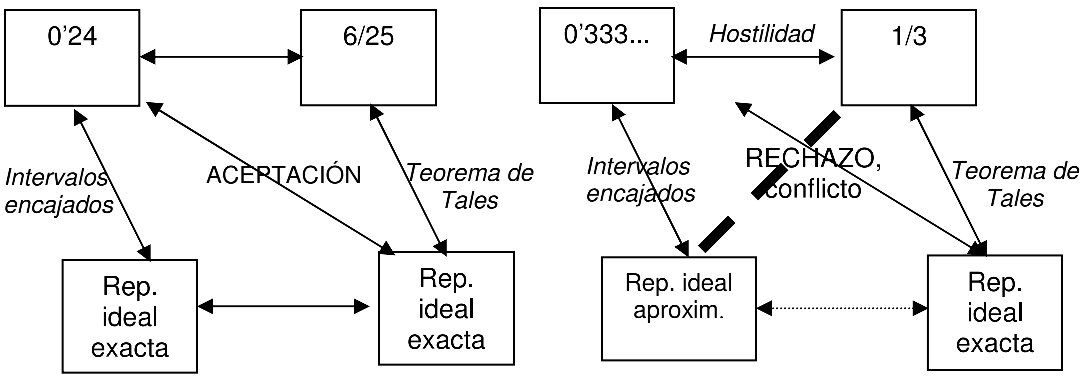


Figura 7.5 (a) Figura 7.5 (b)

Figura 7.5: La relación entre las distintas representaciones (dominios). Sujeto 355 (conf. 1).

A continuación incluimos una respuesta del sujeto que corrobora nuestra afirmación.

> (Sujeto 355; frase 0704) "Sí es que claro, al ser este número con finitos decimales [0'24], pues yo creo que es más exacta la representación que en el caso primero [0'333...], porque el caso primero tenía infinitos números decimales."

El alumno 234 ha afirmado en el cuestionario que el número 0'333... es un número inexistente. En el transcurso de la entrevista confirmatoria, la entrevistadora intenta poner de manifiesto las "razones" que respaldan esa afirmación (frases 0101 a 0202):

E ¿Y qué significa que es un *número inexistente*?
A Pues, porque al tener muchos dígitos nunca lo puedes... nunca lo puedes precisar. Entonces que podemos decir que no existe.
E ¿Podemos decir que es un número que no existe?
A Sí.
E ¿Cómo? ¿En qué sentido no existe? ¿Cómo no existe?
A Porque no lo podemos decir, no podemos... No podemos escribir ni imaginarlo. Podemos decir que es un tercio, pero luego, un tercio, ¿qué es?
E ¿Por qué no lo podemos escribir? ¿O imaginarlo?
A Porque tiene infinitos decimales.
Tú puedes pensar que esto es un tercio [señalando en el gráfico].
Pero lo amplías y te has equivocado, porque...
E ¿Cómo si lo amplío? ¿Cómo?
A Que... tú esto lo haces más grande.
E Sí.
A Y ves que te has equivocado para un lado o para el otro.
Que si... según vas aumentando el error es mayor. O sea, cuanto la escala es más pequeña, mayor es el error.
Y por eso no existe.

El alumno reconoce que el número 0’333... es 1/3. Además, lo ha representado en la recta mediante el teorema de Tales. Sin embargo, la representación fraccionaria no le permite reconocer al número (‘Podemos decir que es un tercio, pero luego, un tercio, ¿qué es?’). Es decir, no acepta que la representación fraccionaria esté indicando un objeto determinado.

La aceptación de la existencia del número se ve obstaculizada por su representación decimal infinita, y el desajuste entre las representaciones gráficas correspondientes amplifica la dificultad. Otras representaciones del número (representación fraccionaria y representación gráfica en la recta) deberían constituir los dominios heterogéneos que posibilitaran la aparición de la función «existencia». Sin embargo, un dominio aritmético (la representación posicional infinita) genera en este alumno un rechazo de su compatibilidad con otros dominios (la representación icónica / fraccionaria y la representación geométrica asociada).

La infinidad de cifras no es aceptada como un todo por los sujetos con conflicto 1; incluso cuando reconocen la existencia del límite (en las entrevistas confirmatorias, los tres alumnos con conflicto 1 reconocen que los número 1/3 y √2 son iguales a los números 0’333... y 1’4142136..., respectivamente). Aún considerando otra representación simbólica (1/3 o √2) que expresa ese límite constructible, e incluso dominando una representación geométrica que permite identificar el número con una magnitud determinada, dan prioridad a la “incompletitud” suscitada por la representación posicional infinita.

Bachelard (1987) describe el progreso en el conocimiento matemático como un proceso de reificación progresiva, donde la existencia surge de la intervención de una noción en dominios extraños. En los alumnos con conflicto 1, la representación decimal infinita constituye un obstáculo para generar una noción de número compatible con todos los dominios aritméticos y geométricos mencionados.

Como conclusión a la precedente argumentación, afirmamos que *la representación decimal infinita de un número genera un obstáculo epistemológico para la aceptación del número como objeto matemático (ente de razón)*.

Parafraseando a Bachelard (1948; p. 15): en el propio acto de conocer, la representación decimal infinita constituye una 'causa de estancamiento y hasta de retroceso', *es decir, un obstáculo epistemológico*.

7.3.1.3. El conflicto 1 y resultados de otras investigaciones

Algunos estudios dedicados a la detección de dificultades en el aprendizaje de la noción de límite han mencionado dificultades con la representación decimal infinita.

Tall (1992) señala que el concepto de límite implica avanzar a un plano superior de pensamiento matemático (p. 501) y estudia las dificultades observadas por algunos investigadores en diferentes contextos matemáticos en los que interviene la noción de límite, entre ellos la escritura decimal infinita. Menciona así diversas investigaciones en las que se ha puesto de manifiesto la creencia en los sujetos de que "cero punto nueve periódico" es "justo menor que uno". (p. 502).

El número 0'999... tiene la dificultad añadida de que no puede obtenerse como resultado de una división entre dos números enteros. En cambio, los números con infinitas cifras decimales utilizados en nuestro cuestionario pueden obtenerse efectuando una división (0'333...) o una raíz cuadrada (1'4142136...).

Sierpinska (1985 y 1987) ha estudiado los obstáculos de los sujetos relativos a la noción de límite. En Sierpinska (1987) relata algunas sesiones de trabajo con estudiantes de humanidades. En una de estas sesiones, los sujetos discuten el resultado (y la prueba correspondiente) de que 0'999... = 1. La investigadora describe las actitudes de los sujetos frente a este resultado, dos de las cuales suponen su rechazo. Concluye afirmando que "los factores importantes que parecen determinar las actitudes de los estudiantes hacia el resultado 0'999... = 1 son sus actitudes hacia el conocimiento matemático y el infinito." Algunos sujetos no discuten la validez matemática del resultado, sino su valor verdadero (distinguen entre validez matemática de un resultado, y validez "extra - matemática" o "lógica"). El concepto de infinito que tienen algunos alumnos, según esta investigadora, es el de "infinito potencial, algo que nunca puede ser completado" (Sierpinska, 1987)[24].

El infinito potencial involucra un proceso que puede ser repetido una y otra vez (hasta que se dé el agotamiento), con la característica de que en cualquier etapa dada abarca un número finito de repeticiones. Una noción de infinito potencial (como un proceso que no puede ser completado, es decir, en el sentido que damos

[24] Para dar sentido a esta cita, creemos que es necesario distinguir la realización concreta del proceso, definido mediante un patrón, del proceso intelectual conocido como "paso al límite" que, en determinados casos, sí permite completar el proceso. La realización concreta del proceso genera un agotamiento cognitivo (Coriat, Martínez y Baena, 1993) que el método de exhausción (por ejemplo) permite superar.

al trabajo de Sierpinska) correspondería al siguiente fragmento, del sujeto 744 (con conflicto):

> (Frases 1205/06/07/08) “Pero tú no... o sea, no puedes concretar justamente el punto en el que va a estar √5. Pues eso, porque es un punto que se tiene que poner por intervalos encajados o algo así. Se tiene que... ir cerrando el punto, ¿no? Pero siempre habrá un punto entre medias.”

En las frases anteriores observamos que se trata de la dificultad de articular el axioma de los intervalos encajados (‘para cada sucesión de intervalos encajados cuyas longitudes convergen a cero, existe un único punto perteneciente a todos los intervalos’), con la propiedad de que entre dos puntos dados de una recta existen infinitos puntos. El infinito potencial “incompleto” está involucrado en el hecho de que para cualquier intervalo escogido, siempre habrá otro intervalo incluido en él, puesto que entre dos puntos distintos de una recta existen infinitos puntos.

Sin embargo, en la situación propuesta al sujeto 744, ese proceso tiene límite (√5) y, por tanto, sin apelar a una construcción geométrica concreta, cabe afirmar la existencia de un punto que corresponde exactamente a ese número.

Si usamos nuestro esquema explicativo (figura 7.4), las dificultades mencionadas por Tall (1992) y Sierpinska (1987) se sitúan en la conexión entre las representaciones simbólicas posicional e icónica / fraccionaria. En nuestra explicación, hemos expuesto la hostilidad entre esos dominios y hemos tratado de poner de manifiesto que la representación decimal infinita, cuando se erige como obstáculo, no sólo incide en la representación icónica / fraccionaria, sino también en la representación gráfica. Podemos coincidir con Sierpinska en la “incompletitud” de la escritura 0’333... o 1’4142..., pero opinamos, sin haberlo estudiado en nuestra investigación, apelando a la evidencia indirecta de que para nuestros alumnos con conflicto la igualdad 0’333... = 1/3 no sólo no es problemática, sino que en algunos casos lo que resulta problemático es el sentido del segundo miembro (v. supra, fragmentos del sujeto 234), que el infinito potencial no es un obstáculo para la aceptación de la correspondiente escritura decimal infinita (aunque, por supuesto, parece acertado conjeturar que un cierto dominio del infinito potencial, debidamente conectado con diferentes representaciones, ayuda a superar el obstáculo que hemos mencionado).

7.3.2. Relación entre objeto matemático y objeto físico

7.3.2.1. Estudio inductivo del conflicto 2

En la figura 7.3 situamos el conflicto 2 en el punto de enlace entre los mundos ideal y físico. En esta sección justificaremos esa decisión.

El conflicto denominado *relación entre objeto matemático y objeto físico* surge según nuestra opinión cuando los sujetos utilizan una argumentación basada en conocimientos pertenecientes a uno de los dos mundos, para valorar resultados o situaciones incluidas en el otro. Es decir, los sujetos “alternan”, durante su argumentación, los mundos ideal y físico, aparentemente sin tener conciencia de ello.

En la tabla 7.3 (tabla 6.10) incluimos las respuestas del cuestionario consideradas con conflicto 2, que han sido confirmadas durante las entrevistas exploratorias. Los sujetos valoran la exactitud de la señal realizada con lápiz o bolígrafo en el gráfico en función de conocimientos que pertenecen exclusivamente al mundo ideal, como la afirmación: 'en un intervalo existen infinitos puntos'.

En la figura 7.3 se plasma la conjunción de una serie de prioridades: mundo real / mundo físico, trasplano aritmético / trasplano geométrico, conocimiento conceptual / conocimiento procedimental, exacto / aproximado que entran en juego durante la valoración de la exactitud de la representación de un número en la recta.

Suj.	**T**	**Número**	**Respuestas en las que se observa el conflicto 2**
322	R	5/8	"No es exacto del todo. La representación es un método para comprender los nºs reales, pero como la recta real tiene infinitos puntos en un intervalo de amplitud unidad, es imposible dibujar exactamente 5/8."
341	R	1'41...	"No es la representación exacta porque dentro del último intervalo escogido hay infinitos puntos, y con un bolígrafo o cualquier método que pueda utilizar cometeré un error ya que represento muchos puntos al mismo tiempo."

Tabla 7.3: Respuestas correspondientes al conflicto 2

Los sujetos con el conflicto 2 mezclan las argumentaciones, de modo que en la respuesta global conviven argumentos que pertenecen exclusivamente a uno de los mundos (en los ejemplos, el mundo ideal) para justificar una afirmación relativa al otro mundo (el físico).

A continuación veremos cómo se ha puesto de manifiesto el conflicto durante las entrevistas confirmatorias.

> (Sujeto 322, frases 0706) "Si es que yo ni siquiera en esta marca tan gruesa, si yo esto lo hubiera hecho con un compás, aquí hay un gran error de medida."
> (Frase 0707) "Y esto, aunque la marca fuera finísima, aquí hay mucho error de medida."
> (Frase 0708) "Porque es que en un punto, puedes meter infinitos puntos."
> (Frase 0709) "Aquí en este punto, hay infinitos átomos. Y dentro del átomo, hay infinitos puntos."[25]

En principio, la respuesta del sujeto parece referida a la inexistencia de exactitud en el plano físico. La expresión 'aquí hay un gran error de medida' la consideramos dirigida hacia el gráfico del mundo físico. Durante toda la entrevista, el sujeto hace afirmaciones relativas a errores de los instrumentos, del compás o de

[25] Es sorprendente el parecido entre las afirmaciones del alumno y las afirmaciones contenidas en la cita de Leibniz de la página 378.

la regla. En una primera interpretación, esas frases son las que sobresalen, y las que nos hicieron pensar que el conflicto no se confirmaba. Sin embargo, si estudiamos en detalle la respuesta completa, comprobamos que la inexactitud en el plano físico es causada (según el sujeto) por el hecho de que en la marca realizada 'puedes meter infinitos puntos'. El resto de la frase es una combinación de referencias a los dos mundos: "Aquí en este punto [marca física] hay infinitos átomos [mundo físico]. Y dentro del átomo, hay infinitos puntos [mundo ideal]".

Durante el transcurso de la entrevista comprobamos que el sujeto justifica la falta de exactitud del dibujo físico en propiedades o afirmaciones que sólo tienen sentido en el mundo ideal.

La respuesta dada en el cuestionario por el sujeto 352 no evidencia el conflicto 2, sino el conflicto 1. Sin embargo, durante las respuestas de la entrevista confirmatoria, el sujeto modifica su argumentación (indica que no ha sabido explicarse durante el cuestionario) y comprobamos que también se manifiesta el conflicto 2.

> (Frases 0103) "Aquí hay infinitos números entre cero y uno, ¿no?"
> (Frase 0105) "Entonces, no podremos representar con un lápiz los infinitos números."
> (Frase 0106) "Esto es... es una manera de aproximarte a ese número en la recta real."
> (Frase 0107) "Es que por muy gra.. muy grande que sea la unidad, siempre hay infinitos."
> (Frase 0108) "Nunca podremos.

El sujeto indica expresamente que debido a la presencia de infinitos números en el intervalo unidad (afirmación relativa al mundo ideal), no es posible representar en el gráfico, con un lápiz, cada uno de ellos (afirmación relativa al mundo físico).

Hasta aquí hemos confirmado los cambios de argumentos en sujetos con conflicto cuando se trabaja en la representación en la recta. Ahora intentamos proponer una explicación.

En el capítulo 3 de esta memoria y en las primeras secciones de este capítulo hemos justificado la convivencia de dos fenomenologías diferentes en la representación en la recta de números reales: una relativa al mundo ideal y otra al mundo físico. En el mundo ideal existe una biyección números / puntos que está justificada axiomáticamente. Sin embargo, en ese mundo ideal sólo podemos realizar representaciones (idealmente) exactas cuando existe una relación explícita entre los puntos correspondientes a 0, 1 y el número dado que sea equivalente a la constructibilidad con regla y compás. Por otro lado, en el mundo físico la identificación punto / número nunca es exacta. Cabe esperar entonces que en el ámbito estudiantil se produzcan esos cambios de argumentos.

7.3.2.2. Explicación del conflicto 2

Hemos mencionado en 7.3.1.2 que, según Bachelard, la existencia de las nociones matemáticas surge cuando se quiere confrontar dos dominios heterogéneos. Prosigue su análisis planteando la siguiente cuestión: ¿Podrá darse una heterogeneidad de dominios más acentuada que "aquella que separa las construcciones de la razón de los resultados de la experiencia física? Los mundos que la física matemática consigue reunir son tan extraños entre sí que una coincidencia aproximada invenciblemente acredita una realidad, bien porque se atribuya esta realidad a los seres de razón, o bien porque que se reconozca que en la materia se halle inscrito el plan de un espíritu creador" (Bachelard, 1987; p.189).

Bachelard cita ejemplos de matemáticos para los que la realidad de las nociones está en íntima conexión con objetos del mundo físico:

> "El Análisis matemático tiene las relaciones necesarias con los fenómenos sensibles; su objeto no es creado por la inteligencia del hombre; es un elemento preexistente del orden universal y no tiene nada de contingente y de fortuito." (Fourier, citado por Bachelard, 1987; p. 189)
> "Cuando una barra metálica es expuesta por su extremidad a la acción contante de un hogar y tal que todos sus puntos han adquirido el grado más alto de calor, el sistema de las temperaturas fijas corresponde exactamente a una Tabla de logaritmos; los números son las elevaciones de los termómetros situados en diferentes puntos y los logaritmos son las distancias de estos puntos al hogar." (Fourier, citado por Bachelard, 1987; p. 189)

La falta de distinción entre el objeto matemático y el objeto físico afianza la existencia del objeto matemático (ente de razón). "En esas condiciones, ¿cómo oponerse a la existencia de unos entes de razón tan netamente solidarios con la realidad? ¿Cómo explicar sin ello el éxito verdaderamente físico de un formalismo absoluto? Este formalismo tiene más que una coherencia intrínseca, tiene en primer lugar su inherencia con lo real." (Bachelard, 1987; p. 190).

En 7.2.2.1 describimos el esfuerzo realizado a lo largo de la historia de la filosofía para dilucidar las relaciones entre mente y cuerpo, y cómo esta relación explica la interpretación de los fenómenos del mundo físico. En aquella sección incluimos también una cita de Leibniz en la que fusiona objetos del mundo matemático y del mundo físico, dando a esta fusión un carácter inevitable.

La amalgama entre objetos del mundo matemático y objetos del mundo físico no ha impedido a estos matemáticos desarrollar conocimientos matemáticos interesantes y originales. Según Bachelard, esa amalgama afianza el realismo (ilusorio) atribuido a las nociones matemáticas. "Al acercar los dominios matemático y físico, se racionaliza lo real, pero a cambio se hace real lo geométrico." (p. 190.).

En las respuestas del sujeto 322, al acercar los dominios matemático y físico, 'se racionaliza' la marca física, y a cambio, 'se hace real' el punto geométrico.

En la figura 7.6 describimos la respuesta del sujeto 322 mediante un gráfico similar al de la figura 7.4.

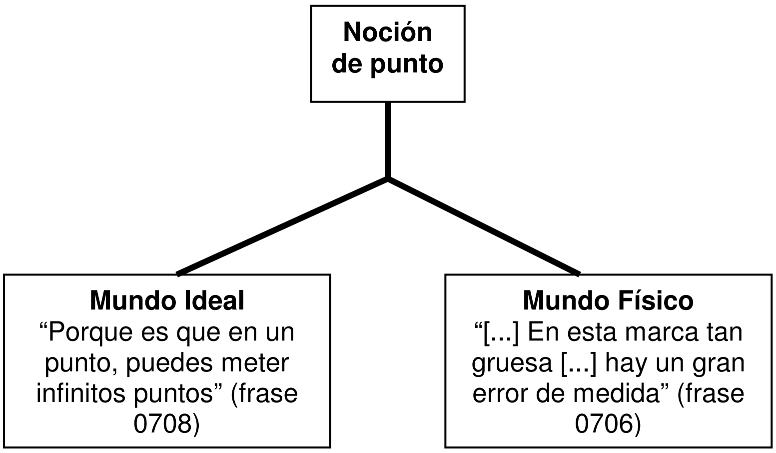


Figura 7.6: Esquema de la respuesta del sujeto 322

Las observaciones anteriores conducen a afirmar que *el conflicto 2 no parece constituir un obstáculo epistemológico en el desarrollo individual de los conceptos implicados; a modo de conjetura, afirmaríamos que constituye un obstáculo epistemológico de la cultura occidental, por su persistencia a través de los siglos*. No parece que haya evidencia de que el acercamiento entre objeto matemático y objeto físico conduzca a dificultades posteriores en el aprendizaje de esos conceptos u otros relacionados con ellos. La explicación de Bachelard parece indicar, en cambio, que este acercamiento favorece la aceptación de la existencia de las nociones matemáticas como productos de razón.

7.3.2.3. El conflicto 2 y resultados de otras investigaciones

Algunos investigadores han estudiado la habilidad de los estudiantes para distinguir entre dos problemas aparentemente similares, aunque referidos a objetos de distinta naturaleza (matemáticos o físicos). Fischbein, Tirosh, Stavy y Oster (1990), Tirosh y Stavy (1992), Tirosh, Stavy y Cohen (1998) y Tirosh, Stavy y Aboulafia (1998) han descrito los resultados obtenidos en investigaciones en las que se propone a los sujetos una misma cuestión referida a objetos diferentes. Se trata de determinar si las sucesivas divisiones por la mitad de un segmento de recta y de un alambre de cobre alcanzan un fin. En todos los casos comprobaron que los sujetos más jóvenes (grados 7 a 11) tienden a dar en los dos casos respuestas afirmativas (el proceso de división alcanza un fin) mientras que los sujetos mayores tienden a dar en ambos casos respuestas negativas (el proceso no alcanza un fin).

Los investigadores han propuesto diferentes métodos de intervención, para intentar suscitar la respuesta adecuada en cada caso, y no siempre han alcanzado respuestas satisfactorias. En uno de los trabajos (Tirosh, Stavy y Cohen, 1998) los investigadores afirman que en las respuestas inadecuadas de los sujetos intervienen dos reglas intuitivas: 'Todo alcanza un fin' y 'Todo puede ser dividido'. Mientras que la primera regla influye más en los sujetos de menor edad, la segunda lo hace en sujetos mayores. Los investigadores indican que en educación debería suscitarse un examen crítico de las respuestas de los estudiantes a la luz del conocimiento formal implicado en cada caso.

Las investigaciones anteriores esperaban suscitar mediante una cuestión concreta (la división sucesiva por la mitad) una reflexión en los sujetos, mencionando explícitamente dos objetos de naturaleza diferente. Han llegado a la conclusión de que los sujetos, en general, no analizan la naturaleza (matemática o física) del objeto implicado en sus respuestas. En nuestra investigación, en cambio, no se exponen explícitamente dos objetos de diferente naturaleza, aunque la valoración de la exactitud permite abordar la respuesta desde mundos diferentes (ideal o físico respectivamente).

En las investigaciones mencionadas preocupa la falta de distinción por parte de los alumnos, porque en los enunciados se ha resaltado el objeto (físico o matemático) implicado.

La comparación entre el alambre de cobre (o el segmento dibujado) y el segmento de recta (en la tarea de divisiones sucesivas por la mitad) ¿puede hacerse, efectivamente, mediante la dicotomía "proceso finito / proceso infinito"? Las investigaciones mencionadas, a nuestro entender, ponen de manifiesto la convivencia en cada individuo de dos nociones, una continua y otra discreta, que los sujetos aprenden progresivamente a aplicar a los objetos geométricos y a los objetos materiales, respectivamente.

En nuestra investigación algunos sujetos establecen la diferencia entre mundo ideal y mundo físico, otros se mantienen en un mismo mundo y finalmente otros combinan las afirmaciones, apoyándose en un mundo para explicar consecuencias en el otro. Estos últimos son los que han suscitado nuestra atención, especialmente porque sus respuestas escapan a nuestras predicciones. Sin embargo, como hemos afirmado, esa alusión a dos mundos diferentes no constituye un obstáculo en el desarrollo de las nociones implicadas; más bien parece una dicotomía cuyo equilibrio (variable en la historia) aporta incesantes temas de reflexión.

7.4. Conclusiones

A lo largo del capítulo reflexionamos en torno a las cuestiones implicadas en dos tareas propuestas en el cuestionario, que han dado origen a respuestas variadas de los sujetos:

- Valoración de la exactitud de la representación de un número en la recta, y
- Valoración de la posibilidad de dividir exactamente por la mitad un segmento de longitud determinada.

Nuestro análisis ha girado en torno a diferentes dicotomías[26] que consideramos implicadas en la resolución de las tareas: mundo ideal / mundo físico, conceptos / procedimientos, aritmética / geometría y exacto / aproximado. Las últimas dos dicotomías, consideradas transversales en el análisis, han intervenido en el estudio de las dos primeras.

Este estudio se realizó recurriendo a diversas autoridades en los temas implicados. En la dicotomía mundo ideal / mundo físico recurrimos a las posiciones de algunos filósofos que han permitido describir sucintamente un panorama de la reflexión filosófica en torno al problema cuerpo – mente (que subyace en el análisis de las tareas desde los puntos de vista matemático y físico). En la dicotomía conceptos / procedimientos recurrimos a investigadores que han elaborado diferentes marcos para estudiar los conocimientos matemáticos según el modo en que intervienen en la resolución de los problemas.

Las posibles respuestas consideradas para las tareas fueron organizadas mediante un diagrama (figura 7.2) que ha permitido situar los conflictos según los elementos que intervienen en cada uno (figura 7.3).

El conflicto 1 (dificultad para admitir el control de un proceso infinito) se ha situado en el seno de la disciplina, puesto que surge ante la presencia explícita de un proceso infinito (indicado por los puntos suspensivos del número) en la representación simbólica. Esa representación simbólica infinita obstaculiza la interpretación del número y de la magnitud.

El conflicto 2 (relación entre objeto matemático y objeto físico), en cambio, lo situamos en el encuentro entre los mundos ideal y físico. Entre las respuestas de los sujetos a la valoración de la exactitud, algunas remiten a objetos del mundo físico (la determinación del punto nunca es físicamente exacta); otras, remiten a objetos del mundo ideal (la exactitud ideal depende del procedimiento empleado); finalmente, observamos respuestas inesperadas, que calificamos como conflictivas. En estas respuestas, la valoración de la marca física se apoya en justificaciones correspondientes al mundo ideal.

La explicación de los conflictos observados está enmarcada en la posición que Bachelard defiende respecto del desarrollo de los conocimientos matemáticos. Las nociones matemáticas son el resultado del ejercicio del espíritu, no son dadas por una enseñanza del mundo exterior. En este sentido, el realismo matemático es ilusorio, aunque las causas de esta ilusión pueden explicarse. La apariencia objetiva de las nociones matemáticas es el resultado de su estudio a través de dominios diferentes, heterogéneos. Mientras que la noción ha surgido en un dominio determinado, el análisis mediante otros dominios extraños (no naturales a la noción) le dan existencia como ente de razón. La heterogeneidad de los dominios (que da existencia a las nociones matemáticas) no se refiere necesariamente a

[26] El sentido atribuido al término se describe en 7.1.

dominios matemáticos (por ejemplo, aritmético y geométrico). También incluye la heterogeneidad entre los dominios matemático y físico.

La cuestión clave para nuestra investigación, que permite explicar los dos conflictos e identificarlos o no con obstáculos epistemológicos, es la siguiente: l*a heterogeneidad de los dominios da la existencia a las nociones matemáticas, crea su apariencia objetiva.*

En los alumnos con conflicto 1, la representación simbólica infinita (uno de los dominios, en este caso, representación en que se presenta el número) opera como obstáculo para que este número sea aceptado por los alumnos en otros dominios diferentes. En consecuencia, los alumnos tienen dificultad para aceptar la existencia del número. El proceso infinito indicado por los puntos suspensivos constituye un obstáculo epistemológico en el conocimiento de estos números.

En los alumnos con conflicto 2, en cambio, la falta de distinción entre los objetos físico y matemático favorece la aceptación de la noción matemática como ente de razón. La confusión entre marca y punto "racionaliza lo real [la marca], pero a cambio hace real lo geométrico [el punto]" (Bachelard, 1987; p.190). En este caso, no nos encontramos con un obstáculo epistemológico en el desarrollo del conocimiento matemático individual. Se trata de una consecuencia (previsible) de la adaptación de las matemáticas a la teoría física y, como conjetura, de un obstáculo epistemológico inherente a la cultura occidental.

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES

8.1. Introducción

En este trabajo hemos estudiado la representación de números reales en la recta, para conocer en mayor detalle la posibilidad de utilizar la recta geométrica como un modelo 'sencillo' que facilite el aprendizaje del sistema de números reales.

Por esa razón hemos estudiado la relación entre números reales y puntos de la recta, tanto desde los puntos de vista matemático y escolar, como desde las interpretaciones que los sujetos dan a esa relación.

En la revisión de investigaciones hemos encontrado algunos estudios que indagan acerca de las ideas que tiene los sujetos respecto de la biyección entre números reales y puntos de la recta (Fischbein et al., 1995), especialmente respecto de la cuestión de qué conjunto numérico 'llena' la recta. Encontramos, además, investigaciones en las cuales, en un cuestionario único los investigadores estudian las ideas de los alumnos del sistema **R** y las ideas de la recta, pero por separado, sin considerar en una misma pregunta la relación entre números y puntos (Robinet, 1986; Romero, 1996). De hecho, la única investigación estudiada en la que los sujetos realizan tareas concretas de representar números en al recta es la investigación de Romero (1995), mencionada como antecedente directo de nuestro trabajo.

Es así como nos interesamos en estudiar las ideas, interpretaciones o posibles conflictos en los sujetos cuando representan números reales en la recta.

Adoptando el enfoque de Freudenthal, nos preocupamos por estudiar fenómenos organizados por el número real, y que puedan ser abordados pos sujetos de Bachillerato, que es el nivel del Sistema Educativo Español en que está contemplada la introducción del número real. Consideramos, desde este enfoque, la recta geométrica y la longitud como fenómenos explicados por el número real.

En el diseño del estudio (capítulo 2) hemos mencionado la realización de un estudio empírico previo (cuya principal aportación ha sido la de sustentar la conveniencia de enunciar criterios para el estudio de los números reales) seguido de un primer estudio teórico, un estudio empírico y finalmente, un segundo estudio teórico. En la presente memoria no hemos estudiado en detalle las respuestas de los alumnos en el estudio empírico previo, puesto que las cuestiones planteadas allí no proporcionan información útil para el propósito central y los objetivos generales del trabajo.

En el primer estudio teórico, estudiamos, por un lado, los constructos teóricos utilizados en nuestra investigación: obstáculo epistemológico, fenomenología didáctica, medida de longitudes y conflicto cognitivo, analizando, en cada caso, la conexión con nuestra investigación (capítulo 3).

Además, realizamos dos estudios de los conceptos matemáticos centrales para la investigación. En el primero, estudiamos el sistema de números reales desde los puntos de vista matemático y escolar, mediante los cinco ámbitos surgidos del estudio empírico previo, denominados *criterios para el estudio de los números reales* (apartado 3.5). En el segundo, estudiamos la representación de los números reales en la recta, con objeto de identificar los rasgos conceptuales y procedimentales de esa representación (apartado 3.6). Estos estudios han proporcionado ideas para diseñar las situaciones que incluimos en los instrumentos utilizados en el estudio empírico.

El estudio empírico, conformado por entrevistas exploratorias (capítulo 4), un cuestionario (capítulos 5 y 6) y entrevistas de tipo confirmatorio (capítulo 6), fue realizado con la finalidad de detectar conflictos en los sujetos en tareas de representación de números en la recta.

Finalmente, el segundo estudio teórico lo realizamos con la finalidad de estudiar la posibilidad de conectar los conflictos detectados con obstáculos epistemológicos (capítulo 7). Para ello recurrimos al análisis de Bachelard (1987) referido al progreso en el conocimiento matemático.

En 6.4.4, 6.5.5 y 7.4 hemos desarrollado las conclusiones de los respectivos estudios. En los próximos apartados resumimos los resultados de la investigación, desde el punto de vista de los logros de objetivos e hipótesis propuestas, así como de las limitaciones del trabajo y de las implicaciones para futuras investigaciones.

8.2. Objetivos generales de la investigación

Los **supuestos** en los que basamos el enunciado de los objetivos generales son los siguientes:

- La biyección entre números reales y puntos de la recta atribuye una estructura a la recta que ha cosechado adeptos pero también adversarios en el ámbito matemático y filosófico.

- Los elementos conceptuales y procedimentales de la representación en la recta de números reales requieren una clarificación, con la finalidad de estudiar la posibilidad de utilizar esta representación como apoyo básico en el estudio del sistema **R**.

- La interpretación por parte de los alumnos de la biyección números reales / puntos de la recta está poco estudiada y hay indicios de que resulte conflictiva para los alumnos.

Bajo estos supuestos, los **objetivos generales** de la investigación se enunciaron como sigue:

- Analizar dos fenómenos organizados por el número real: la recta geométrica y la longitud.
- Con ayuda de esos fenómenos diseñar situaciones que permitan detectar conflictos cognitivos en sujetos de Bachillerato o que comienzan los estudios universitarios.
- Establecer una interpretación de esos conflictos cognitivos en términos de obstáculos epistemológicos.

8.3. Consecución de los objetivos parciales

En este apartado analizaremos en qué medida han sido alcanzados los objetivos parciales propuestos.

Objetivo 1. Elaborar criterios para estudiar el sistema de números reales.

El estudio del sistema de los números reales se ha desarrollado en el apartado 3.5 del capítulo 3. Este estudio se ha realizado mediante la consideración de cinco criterios o ámbitos de estudio, cuyo origen inductivo se describe también en el capítulo 3.

El estudio del sistema **R** realizado a partir de los cinco criterios: *Orden*, *Tipo de Número*, *Fenomenología*, *Representaciones* y *Operaciones*, ha permitido un estudio que destaca no sólo las dificultades conceptuales implicadas en este sistema, sino también el modo en que estas dificultades se abordan en el medio educativo.

Consideramos que este primer objetivo ha sido alcanzado, dado que disponemos de un estudio del sistema **R**, organizado en cinco criterios, que permite cubrir los aspectos conceptuales y procedimentales relacionados con este sistema numérico, así como el tratamiento escolar de estos aspectos. Creemos haber puesto de manifiesto la utilidad de los criterios que, por no ser interpretables como compartimentos estancos, no permiten, sin embargo, hablar de clasificación.

Objetivo 2. Describir fenómenos que, organizados por el número real, están a disposición de alumnos de Bachillerato: la recta y la longitud.

En 3.6 se ha analizado el sistema de números reales como estructura que permite organizar la recta. La recta geométrica recibe, a partir de un axioma adecuado, una estructura similar a la del sistema **R**. En esta representación de **R** mediante la recta se pone de manifiesto el orden continuo y total de **R**. La representación en la recta permite 'actualizar' en un segmento la totalidad del conjunto de números reales.

La longitud, que es utilizada como enlace entre **R** y la recta geométrica, ha sido abordada en 3.5.2.3.1 como un fenómeno organizado por el sistema **R**. Gracias al sistema de números reales es posible, a partir de una unidad determinada, asignar un número a cualquier cantidad de longitud. Este número expresa la relación entre esta cantidad de longitud con la longitud considerada unidad. El sistema de números reales es indispensable para definir el proceso de medición en cualquier magnitud continua, no sólo en la longitud.

En consecuencia, consideramos que el objetivo 2 ha sido alcanzado.

No constituye un objetivo de esta investigación establecer cómo abordar la enseñanza de la representación de números reales en la recta, sino describir el campo en el que creemos que estos fenómenos tienen sentido para los alumnos de los niveles estudiados.

Objetivo 3. Describir las demandas conceptuales y procedimentales de la representación en la recta de los números reales.

En el apartado 3.6 se han puesto de manifiesto algunas precauciones con que debe abordarse en Secundaria la representación en la recta, relacionadas con:

- La 'naturaleza' controvertida de la recta. Las diferentes estructuras matemáticas que se asignan hoy día a la recta están basadas en intuiciones que en matemática han servido para formular distintos axiomas y que en educación pueden actuar como barreras que impiden una aceptación de la formulación axiomática en la que descansa la biyección números reales / puntos de la recta.

- Las dificultades conceptuales y procedimentales de la asignación punto / número, entre las que mencionamos:
  - Sólo admiten una representación idealmente exacta (mediante construcciones con regla y compás) los números reales constructibles.
  - La condición necesaria y suficiente para determinar de modo exacto el número real que corresponde a un punto determinado de la recta, conocidos los puntos que corresponden a 0 y a 1 es el establecimiento de una relación métrica entre dos de los segmentos determinados por los tres puntos.
  - Las representaciones físicas son siempre aproximadas.
  - Dado que los puntos son indistinguibles, la identificación del número correspondiente a un punto resaltado exige siempre la utilización de alguna representación simbólica para el número.

En consecuencia, consideramos que se han descrito las principales demandas conceptuales y procedimentales de la representación en la recta.

Aunque se afirma una biyección entre números reales y puntos de la recta, no disponemos de procedimientos que permitan asignar efectivamente cualquier número real a puntos de la recta, a partir de un origen y unidad determinados. Hemos mencionado en 3.6 la creencia básica mantenida en Bachillerato referida a que la biyección número / punto podría realizarse efectivamente para todo número real. Sin adoptar una posición constructivista (en el sentido de exigir, por ejemplo, que "cualquier número real pueda ser *calculado*", Myhill, 1972), pensamos que esa creencia que se induce en Bachillerato puede resultar perniciosa.

Objetivo 4. Detectar conflictos que surgen en los sujetos en tareas de representación de números reales constructibles en la recta.

En el estudio empírico realizado se han puesto de manifiesto, por interpretación, dos conflictos en la representación de números constructibles en la recta (capítulos 4, 5 y 6).

El primero de ellos, denominado *dificultad en admitir el control de un proceso infinito*, se ha observado en algunos alumnos que no admiten que a un número constructible cuya representación posicional es infinita le corresponda un punto determinado en la recta. Este conflicto ha sido observado en alumnos de los tres niveles considerados: 1º y 2º de Bachillerato y 1º de Licenciatura en Matemáticas.

El segundo conflicto detectado, denominado *relación entre objeto matemático y objeto físico*, se refiere a la falta de distinción observada en alumnos de 1º de Licenciatura en Matemáticas entre el objeto 'ideal' punto o segmento geométrico y la marca o trazo efectuados con lápiz para representarlos.

En consecuencia, el objetivo ha sido alcanzado.

Conviene, no obstante, llamar la atención sobre el hecho de que en el estudio desarrollado en el capítulo 6 se han clasificado los sujetos según dos posibilidades: (a) según que la representación del número dado en la recta se hiciera o no correctamente, y (b) según la presencia o ausencia de respuestas conflictivas. En una clasificación empírica de esta índole, subyace la amenaza de adjudicar erróneamente un sujeto a un grupo determinado. En este trabajo hemos estado alerta ante esa amenaza e incluso se ha dado el caso de modificar la atribución de conflictos a algunos sujetos (véase 6.5.5), aunque no hemos indagado en las razones que podrían explicar el cambio de argumentación de éstos individuos.

Objetivo 5. Caracterizar los conflictos detectados en los sujetos.

La conflictos detectados han comenzado a explicarse durante el estudio empírico (capítulos 4 y 6), en la medida en que se comparan las respuestas consideradas conflictivas (entre sí, y con respuestas consideradas no conflictivas) y se interpretan mediante los criterios para el estudio de los números reales.

Posteriormente, en el capítulo 7 se realiza un estudio de las tareas en las que se observan los conflictos, que permite una caracterización más detallada de éstos.

Como consecuencia del contraste con la calificación del profesor experto nos atrevemos a afirmar que los conflictos pueden suponer una bajada de puntuación aunque la explicación no es una falta de estudio o un desconocimiento por parte del alumno.

Objetivo 6. Explicar los conflictos detectados en términos de obstáculos epistemológicos.

En el capítulo 7 llevamos a cabo un estudio dirigido a estudiar los dos conflictos detectados a la luz del análisis que Bachelard realiza respecto del progreso en el conocimiento matemático.

Como consecuencia de ese estudio, afirmamos que el conflicto 1 constituye un obstáculo epistemológico que enunciamos en los siguientes términos:

La representación decimal infinita de un número genera un obstáculo epistemológico para la aceptación del número como objeto matemático (ente de razón).

Con respecto al conflicto 2, la confusión entre un objeto matemático y el objeto físico es una consecuencia (previsible) de la adaptación de las matemáticas a la teoría física. En consecuencia afirmamos que:

El conflicto 2 no parece constituir un obstáculo epistemológico en el desarrollo individual de los conceptos implicados; a modo de conjetura, afirmaríamos que constituye un obstáculo epistemológico de la cultura occidental, por su persistencia a través de los siglos.

La justificación de las dos afirmaciones referidas a la conexión entre los conflictos 1 y 2 con obstáculos epistemológicos se desarrolla en el capítulo 7.

En la medida en que hayamos interpretado correctamente a Bachelard creemos que el objetivo ha sido alcanzado y que hemos sido capaces de marcar cierta diferencia con otras investigaciones.

8.4. Limitaciones del trabajo

Señalamos las siguientes limitaciones del trabajo:

- Entre el proyecto de tesis y la presente memoria han quedado objetivos y algunas preguntas de investigación sin abordar, debido a que hemos tenido la necesidad de delimitar el proyecto inicial después de realizar las entrevistas exploratorias. Los objetivos y preguntas de investigación planteadas en el proyecto de tesis generan una base de preguntas demasiado extensa (capítulo 5) que una investigación de tipo individual no podía abordar exhaustivamente.

A continuación enunciamos algunos asuntos indicados en el proyecto de tesis que han quedado descartados en el estudio empírico:

1) La búsqueda de intuiciones o interpretaciones en los alumnos que se puedan atribuir a axiomáticas diferentes de aquella en que se apoya la representación en la recta.
   En particular, las intuiciones observadas respecto de los infinitésimos durante algunas entrevistas exploratorias (capítulo 4).
2) Estudiar con detalle el campo semántico de la expresión ‘medida de longitudes’ entre los alumnos.
3) Estudiar los términos utilizados por los alumnos para referirse a segmentos continuos según su tamaño mediante la utilización de grafos semánticos.

- No hemos logrado diseñar un cuestionario relativamente sencillo que permitiera detectar la ausencia o presencia de conflicto cognitivo.

Para estudiar las respuestas de los alumnos en el cuestionario tuvimos que adecuar el constructo teórico ‘conflicto cognitivo’ a las características de las respuestas escritas.

8.5. Hipótesis de investigación. Resultados

En este apartado analizaremos las hipótesis de investigación establecidas a la luz de los resultados obtenidos en los diferentes estudios que componen la investigación.

Hipótesis 1:
Los criterios para el estudio de los números reales proporcionan un marco para la descripción del sistema **R** y de las dificultades conceptuales y procedimentales implicadas en él.

Hipótesis 2:
Los criterios para el estudio de los números reales permiten organizar las respuestas de sujetos en las situaciones propuestas en el estudio empírico.

A continuación mencionamos algunas dificultades del sistema **R** que se han puesto de manifiesto como consecuencia del estudio de los criterios:

- La dificultad implícita en el axioma de completitud, como consecuencia de constituir un axioma de segundo orden (Criterio Orden).
- La dificultad para tratar en el medio escolar este axioma (Criterio Orden).
- La inexistencia de una definición de número que ‘alcance’ a todos los números reales y que sea posible abordar de modo no axiomático en la enseñanza secundaria (Criterios Tipo de Número y Fenomenología).
- La no utilización de los números reales en la vida cotidiana (Criterio Fenomenología).
- La imposibilidad de obtener los números irracionales mediante un proceso de medición directa (Criterio Fenomenología).
- El proceso infinito implícito en la inconmesurabilidad de dos segmentos determinados (Criterio Fenomenología).
- La inexistencia de una representación simbólica que permita expresar todos y cada uno de los números reales (Criterio Representaciones).
- El proceso infinito explícito en la representación posicional en cualquier base para la mayoría de los números reales (Criterio Representaciones).
- El excesivo hincapié en la enseñanza de algoritmos en el sistema educativo (Criterio Operaciones).
- Las limitaciones de la calculadora u ordenadores, normalmente desconocidas por los alumnos, y que generan errores en los cálculos (Criterio Operaciones).

Todas las limitaciones indicadas son conocidas. Los criterios generan un marco que permite situarlas.

Por otra parte, los criterios mencionados se revelan adecuados para organizar todas las afirmaciones de los sujetos obtenidas en el estudio empírico descrito en los capítulos 4 (Entrevistas Exploratorias) y 6 (Cuestionario). Conjeturamos que, salvo pequeñas modificaciones, los criterios son adecuados para aplicarlos a cualquier afirmación de alumnos sobre los números reales.

En los capítulos 4 y 6 han sido utilizados los criterios, junto con otros descriptores, para organizar las respuestas de los alumnos.

En las entrevistas exploratorias los criterios se asignaron a las frases de los sujetos entrevistados en la propia transcripción de las entrevistas. Las respuestas en las que se interpretó la presencia de conflicto también han sido estudiadas desde el puntos de vista de los criterios implicados.

En el cuestionario, los criterios se asignaron a las frases de los sujetos referidas a la valoración de la exactitud de la representación y a la valoración de la posibilidad de dividir por la mitad un segmento dado, permitiendo un estudio de estas respuestas en función de los criterios utilizados.

En el capítulo 6 los criterios han permitido, además, establecer un perfil de las respuestas 'aparentemente conflictivas' y de las respuestas 'no conflictivas'. Mientras que las primeras están especialmente centradas en los criterios Fenomenología, Representaciones (usados en general en forma conjunta) y, en menor grado, Tipo de Número, las segundas corresponden en su mayoría al criterio Fenomenología.

Si bien, por su carácter inductivo, no es posible garantizar una exhaustividad completa, hemos ilustrado la 'validez' de los criterios analizando textos completamente independiente de nuestra investigación, lo que creemos constituye una prueba indirecta de su relativa exhaustividad.

Como consecuencia, afirmamos que las hipótesis de investigación 1 y 2 han sido confirmadas en el estudio desarrollado.

Hipótesis 3:
La representación en la recta de los números reales es conceptual y procedimentalmente más compleja que otras representaciones de estos números.

En el capítulo 3 (apartado 3.6) desarrollamos un análisis destinado a poner de manifiesto diversas cuestiones relacionadas con la representación de números en la recta. Estas cuestiones atañen a diversos ámbitos: epistemológico, fenomenológico, cognitivo y a la comparación de la representación en la recta con otras representaciones. En particular, hemos conjeturado la hipótesis 3 y creemos haber dado argumentos que la justifican o que no permiten rechazarla con respecto al ámbito fenomenológico. Las tareas de identificar el punto de la recta que le corresponde a un número dado, o determinar la abscisa de un punto dado, conocidos el origen y la unidad, aunque aparentemente sencillas, no pueden realizarse exactamente desde un punto de vista ideal y mediante un procedimiento finito para todo número real, o para todo punto de la recta, respectivamente.

Con respecto a los ámbitos fenomenológico y cognitivo, pensamos que es necesario continuar el estudio de la representación en la recta desde esos ámbitos, para estudiar la posible pertinencia de la hipótesis.

En caso de que se pudiera ratificar la hipótesis por otras vías, o incluso con la información aportada en el apartado 3.6, creemos que es necesario realizar una revisión de la creencia que se suscita en secundaria, de que 'los números reales llenan la recta'. Pensamos que es inevitable que se exponga a los alumnos ante decisiones que, en cierto modo, son filosóficas, pero que también vienen de la intuición.

Hipótesis 4:
Algunos conflictos detectados en alumnos de Bachillerato y 1º de Licenciatura de Matemáticas al representar en la recta números constructibles surgen por la representación posicional infinita.

Hipótesis 5:
Algunos conflictos detectados en alumnos de Bachillerato y 1º de Licenciatura de Matemáticas al representar en la recta números constructibles surgen de la confusión entre dos nociones de representación gráfica (objeto físico / objeto geométrico).

Hipótesis 6:
La valoración de la exactitud de la representación constituye una estrategia adecuada para poner de manifiesto los conflictos mencionados en las dos hipótesis anteriores.

La presencia explícita de un proceso infinito en la representación simbólica posicional de algunos números constructibles actúa como una barrera que impide al sujeto aceptar otras representaciones simbólicas exactas y, por añadidura, le impide aceptar también las representaciones gráficas (idealmente) exactas asociadas.

Hemos observado que si la información recibida por el sujeto es la representación icónica, el porcentaje de sujetos con conflicto decae marcadamente. Nuestra conclusión es que es la representación simbólica posicional infinita la que origina el conflicto en los sujetos.

El conflicto 2 se manifiesta por una falta de distinción entre un objeto matemático y el objeto físico que los representa. Hemos explicado la presencia del conflicto 2 en sujetos mayores como una consecuencia de que este conflicto surge al analizar las tareas implicadas desde un punto de vista abstracto. Las afirmaciones de los sujetos con el conflicto, en efecto, se relacionan especialmente con la existencia de infinitos puntos en un segmento de recta y con el hecho de que el punto geométrico no tiene extensión.

Mientras que en las entrevistas exploratorias se detectaron los dos conflictos cognitivos, en el cuestionario se observaron afirmaciones relacionadas con estos conflictos que fueron confirmadas (o no) en las entrevistas confirmatorias. Los conflictos (detectados en entrevistas) o los indicios de conflictos (detectados en el cuestionario) surgieron en todos los casos a partir de tareas de valoración de la exactitud de la representación de números en la recta.

8.6. Hallazgos de la investigación

Consideramos como hallazgos de este trabajo los resultados que citamos a continuación:

1. Elaboración de un marco para el estudio de un sistema numérico que incluye el análisis de cinco criterios: orden, tipo de número, fenomenología, representaciones y operaciones. Aplicación de este marco al sistema de números reales.

2. Conjetura referida a la relativa complejidad conceptual y procedimental de la representación de números reales en la recta respecto de otras representaciones de estos números.

3. Elaboración de instrumentos para detectar respuestas conflictivas en la representación de números en la recta en alumnos de Bachillerato y 1º de Licenciatura en Matemáticas.

4. Propuesta de explicación de los conflictos, uno mediante un obstáculo epistemológico y otro como aparente constante en la historia del pensamiento occidental.

5. En el proyecto de tesis hemos definido el problema de caracterizar obstáculos epistemológicos de la representación de números reales en la recta. En el estudio empírico estudiamos las respuestas de alumnos en tareas de representar números en la recta. Después de obtener información sobre distintas cuestiones relacionadas con esas tareas, hemos decidido centrar el estudio en la indagación de dos conflictos detectados.

Los conflictos aparecen en relación con la estrategia indicada en 3.6.4. En la primera parte de dicha estrategia (dado el número, hallar el punto de la recta que le corresponde, a partir de un origen y unidad determinados), hemos aislado el obstáculo que está fundamentalmente relacionado con la noción de número (figura 7.4). En la segunda parte (dado el punto, hallar el número, conocidos los puntos correspondientes a 0 y 1), hemos aislado un conflicto cognitivo que, aparentemente, no constituye un obstáculo epistemológico para la noción de punto (7.3.2).

La explicación anterior justifica el cambio de título del trabajo. Mientras que en el proyecto de tesis se menciona la identificación de obstáculos epistemológicos de la representación en la recta, en el nuevo título se destacan los dos conflictos. Si bien es necesario superarlos para realizar satisfactoriamente tareas de representar números en la recta, los obstáculos caracterizados no corresponden a la representación en la recta, sino a la noción de número y a la noción de punto.

8.7. Replicabilidad de la investigación

León y Montero (1999, p.11) señalan la necesidad de especificar muy claramente la naturaleza de los instrumentos utilizados durante una investigación, así como la secuencia seguida en su aplicación, para favorecer la replicabilidad de los posibles hallazgos.

En ese sentido, consideramos que un objetivo que ha guiado el diseño y realización de la presente memoria ha sido incluir toda la información relacionada con las decisiones tomadas, las modificaciones efectuadas sobre el proyecto original y las razones que explican dichas modificaciones.

Como ocurre con trabajos de esta índole, es posible que un investigador que retome los datos obtenidos en nuestro estudio empírico (por ejemplo, las transcripciones de entrevistas o los cuestionarios resueltos por los alumnos) desarrolle con éstos un trabajo centrado en otros aspectos, diferentes a los considerados en el presente estudio. Creemos que, si este hipotético investigador se propusiera estudiar los conflictos cognitivos detectados en otros sujetos (de edad y nivel similares a los sujetos de nuestro estudio), contaría con una descripción detallada de la utilización de la noción de conflicto cognitivo en el estudio de respuestas obtenidas mediante diferentes instrumentos. Además, contaría con un cuestionario cuya estructura se encuentra debidamente estudiada (capítulo 5) y permite variaciones destinadas a 'controlar' diferentes aspectos, o estudiar diferentes matices.

En resumen, pensamos que esta memoria de investigación contiene información suficiente para replicarla.

8.8. Implicaciones para futuras investigaciones

El presente trabajo de investigación ha permitido avanzar afirmaciones relacionadas con la representación de números en la recta. El estudio realizado ha abierto nuevas perspectivas en la utilización de la representación en la recta como soporte para el estudio de los números reales. A continuación indicamos algunas posibles vías para trabajos futuros:

Cuestiones planteadas en el proyecto de tesis, no investigadas en esta memoria:

- Estudio de las posibles intuiciones de los alumnos respecto de infinitésimos.

- Estudio del campo semántico de la expresión “medida de longitudes” entre los alumnos.

Como consecuencia de los hallazgos (8.6):

- Análisis y valoración de la utilidad general de los cinco criterios para el estudio de los sistemas numéricos.

- Diseño de material que permita abordar satisfactoriamente en el medio educativo la representación de números reales en la recta usando la estrategia mencionada en 3.6.4.

- Aplicación de los instrumentos elaborados con muestras representativas.

- Diseño de material de trabajo que permita salvar el obstáculo identificado.

- Estudio de caso longitudinal (evolución de sujetos con el conflicto 2), con el fin de detectar la posible evolución del conflicto, o su posible incidencia en el desempeño de los sujetos.

Nuevas cuestiones

- Estudio histórico de la utilización de la recta numérica (o de la biyección puntos / números reales) en libros de textos y otros documentos.

- Estudio histórico relacionado con la dificultad en admitir la existencia de números con infinitas cifras.

- Estudio histórico del conflicto 2 en matemáticos destacados.

- Analizar las intuiciones de la recta geométrica que subyacen bajo un enfoque constructivista de los números reales.

Desde la investigación en educación matemática, esperamos haber contribuido a desentrañar rasgos esenciales de la representación de números reales en la recta y a profundizar la reflexión acerca de la enseñanza y el aprendizaje de los números reales.

REFERENCIAS

Abellanas, P. (1963): *Matemática para Físicos e Ingenieros*. Madrid:

Alper, J. y Bridger, M. (1997): "Mathematics, Models and Zeno's Paradoxes". *Synthese,* 110, pp.143-166.

Alvarez, F., García, C., Garrido, L.M. y Vila, A. (1989): *Matemáticas. Factor-1*. B.U.P. 1º curso. Barcelona: Vicens-Vives S.A.

Apostol T. M. (1996): *Análisis matemático.* Barcelona: Editorial Reverté, S.A.

Aristóteles (1995): *Física*. Trad. G. R. de Echandía. Madrid: Gredos.

Artigue, M., Robinet, J. (1982): "Conceptions du cercle chez des enfants de l'ecole elementaire". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, pp. 5-64.

Asimov, I. (1998): *De los números y su historia*. Buenos Aires: El Ateneo.

Azcárate C. (1998): "La entrevista en investigaciones de didáctica de las matemáticas. Análisis de algunas experiencias próximas". *Acta II Seminario de la S.E.I.E.M.* Pendiente de publicación.

Babbie E. (1990): *Survey Research Methods*. Belmont: Wadsworth Publishing Company.

Bachelard, G. (1987): *Essai sur la connaissance approchée.* París: Vrin.

Bachelard, G. (1988): *La Formación del Espíritu Científico*. Buenos Aires: Siglo Veintiuno Editores.

Badiou, A. (1990): *Le Nombre et les nombres.*París: Éditions du Seuil.

Behr, M. y Harel, G. (1990): "Students' Errors, Misconceptions, and Cognitive Conflict in Application of Procedures". *Focus on learning Problems in mathematics,*12, 3 y 4, pp. 75-84.

Bell A. (1984): "Some implications of research on the teaching of mathematics". En A. Bell, b. Low y J. Kilpatrick (eds.): *Theory, Research and Practice in mathematical Education*. *ICME 5 (ADELAIDE)*. Nottingham, pp: 61-79.

Bell A. (1993): "Some experiments in diagnostic teaching". *Educational Studies in Mathematics*, 24, pp. 115-137.

Belna, J-P. (1996): *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege. Théories, conceptions et philosophie*. París: Vrin.

Beskin, N. (1987): *Fracciones Maravillosas*. Moscú: MIR.

Bessot, A. y Eberhard, M. (1983): "Une approche didactique des problemes de la mesure". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 4, nº 3, pp.293-324.

Bishop, E. and Bridges, D. (1985): *Constructive Analysis*. Berlín: Springer-Verlag.

Bisquerra, R. (1989): *Métodos de Investigación Educativa. Guía Práctica*. Barcelona: Ediciones Ceac.

Bouvier A. y George, M. (1984): *Diccionario de Matemáticas*. Trad. M. Armiño y V. Bordoy. Madrid: Akal.

Bridges, D. (1994): "A Constructive Look at the Real Number Line". En P. Erlich (ed.): *Real Number, Generalizations of the Reals, and Theories of Continue*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brunschvicg. L. (1972): *Les étapes de la philosophie mathématique.* París: A. Blanchard.

Carman, R. (1971): "Mathematical misteak". *Mathematics Teacher*, 64, 2, pp.109-115.

Carman, R. (1972): "The Language of Science". *School Science and Mathematics*, 72, 4; pp. 308-316.

Carnap, R. (1966): *Philosophical Foundations of Physics*. Nueva York: Basic Books.

Carpenter, T. et al. (1980): "Results and Implications of the Second NAEP Mathematics Assessments: Elementary School". *Arithmetic Teacher*, 27 (8), 10-12, pp.44-47.

Carrega, J.C. (1981): *Théorie des corps. La règle et le compas*. París: Hermann.

Castro, E. (1994): *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria (12-14 años).* Granada: Tesis Doctoral.

Castro, E., Rico, L. Castro, E. (1987): *Números y Operaciones. Fundamentos para una Aritmética escolar.* Madrid: Síntesis.

Caveing, M. (1996): "The Debate between H. G. Zeuthen and H. Vogt (1909-1915) on the Historical Source of the Knowledge of Irrational Quantities". *Centaurus*, 38, pp. 277-292.

Caveing, M: (1984): "Algunas observaciones sobre el trato que recibe el continuo en los Elementos de Euclides y en la Física de Aristóteles". En: *Pensar la Matemática*. Barcelona: Labor.

Centeno, J. (1987): *Números decimales, ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

Cohen, L. y Manion, L. (1990): *Métodos de Investigación Educativa*. Madrid: La Muralla.

Conway, J.H. (1976*): On Number and Games*. Londres: Academic Press.

Coriat, M., García, C., Lara, A., Pérez, A., Pérez, R., Sandoval, P. y Vela, M. (1989). *Seis para cuadrar.* Madrid: M.E.C.

Coriat, M., Martínez, P. y Baena, J. (1993): "Numbers and colours". *International Journal in Educational Science and Technology*, 24, 4, pp. 501-510.

Coriat, M. y Scaglia S. (2000): "La representación de los números reales en la recta". *Enseñanza de las ciencias,* 18 (1), pp. 25-34.

Cornu, B. (1982): "Grandes lignes de l'evolution historique de la notion de limite". *Bulletin APMEP*, 335, pp. 627-641.

Cornu, B. (1982): “Quelques obstacles à l’ apprentissage de la notion de limite". *Cahier du Séminaire de l’ Equipe de Recherche en Didactique et Pédagogie des Mathematiques*, 34, pp. 235-268.

Crossley, J.N. (1987) *The emergence of number.* Singapur: World Scientific.

Davis P. y Hersh R. (1989): *Experiencia Matemática*. Barcelona: Editorial Labor y Ministerio de Educación y Ciencia.

Dedekind, R. (1998): *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Trad. J. Ferreirós. Madrid: Alianza Editorial.

Demidovitch, B. dir. (1977). *Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique*. 7ª ed. Moscú: MIR

Donnedu, A. (1976): *Nouveau Cours de Mathématiques. Tome 1. Structures fondamentales.* París: Vuibert.

Douady, R. (1984): *Jeux de cadres et dialectique outil – objet dans l’ enseignement des mathématics.* These de Doctorat D’ Etat. Universite Paris VII.

Duval, R (1996): “Quel Cognitif Retenir en Didactique des Mathématiques?" *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 16, 3, pp.349 – 382.

Duval, R. (1983): “L’ Obstacle du Dédoublement des Objets Mathématiques". *Educational Studies in Mathematics.* 14, pp. 385 – 414.

Ebbinghaus, H.D. (1990): “Set Theory and Mathematics”. En Ebbinghaus et al. (eds.): *Numbers*. Nueva York: Springer-Verlag, pp.355-379.

Ehrlich, P. (1994): *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ercilla, S., Burbano, E., Gracia, C. (1993): *Física General*. Zaragoza: Mira Editores.

Euclides: *Elementos, Libros X-XIII*. Versión: Ma. L. Puertas (1996): Madrid: Gredos.

Feferman, S. (1989): *The number systems. Foundations of Algebra and Analysis*. New York: Chelsea.

Fernández Cano, A. (1995): “Metodologías de la Investigación en Educación Matemática”. En Luis Berenguer, et al. (eds.): *Investigación en el Aula de Matemáticas*. Granada: Sociedad Andaluza de educación Matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Fischbein, E., Tirosh, D. y Hess, P. (1979): “The intuition of infinity”. *Educational Studies in Mathematics*, 10, pp. 3-40.

Fischbein, E. (1987): *Intuition in Science and Mathematics*. An Educational Approach. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fischbein , E., Jehiam, R. y Cohen, D. (1995): “The concept of irrational numbers in High-Scool students and prospective teachers”. *Educational Studies in Mathematics*, 29, pp. 29-44.

Fischbein, E., Tirosh, D., Stavy, R. y Oster A. (1990): “The Autonomy of Mental Models”. *For the Learning of Mathematics*, 10, 1, pp: 23-30.

Fisher, G. (1994): "Veronese's Non-Archimedean Linear Continuum". En P. Ehrlich (ed.): *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. pp.107-145.

Fourastié, J. (1996): "Nul en math?". *Bulletín APMEP*, 405, pp.465-473.

Fowler, D. (1992): "Dedekind's theorem: $\sqrt{2}.\sqrt{3}=\sqrt{6}$". *American Mathematical Monthly*, 99, 8, pp.725-733.

Frege G. (1996): *Escritos Filosóficos.* Barcelona: Crítica.

Freudenthal, H. (1983): *Didactic Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht Reidel Pub. Co.

Gardiner, A. (1982): *Infinite Processes. Background to Analysis*. Nueva York: Springer-Verlag.

Goetz J.P. y LeCompte M.D. (1988): *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Goldblatt R. (1998): *Lectures on the Hyperreals. An Introduction to Nonstandard Analysis*. New York: Springer-Verlag.

Gómez, B. (1988): *Numeración y Cálculo*. Madrid: Síntesis.

González Mari, J.L. (1995): *El campo conceptual de los números naturales relativos.* Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Grabiner, J.V. (1981): *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. Cambridge: Mit Press.

Guedj, D. (1998): *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona: Ediciones B, S.A.

Guzmán, M. de, Colera, J. Salvador, A. (1989): *Matemáticas. Bachillerato 1*. Madrid: Anaya.

Hersh, R. (1986): "Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics". En Tymoczko, T. (ed.): *New Directions in the Philosophy of Mathematics*. Boston: Birkhäuser.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986): "Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: In Introductory Analysis". En J. Hiebert (ed.): *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics.* New Jersey: LEA, pp. 1-27. Traducción no publicada de L. Rico.

Hilbert, D. (1996): "Sobre el concepto de número". En *Fundamentos de la Geometría*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, pp.244-249.

Hobson, E.W. (1994): "On the Infinite and the Infinitesimal in Mathematical Analysis". En Ehrlich, P. (ed.): *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp.3- 26.

Ifrah G. (1987): *Las cifras. Historia de una gran invención*. Madrid: Alianza Editorial.

Junta de Andalucía (1994): Decreto 126/1994, por el que se establecen las enseñanzas del Bachillerato en Andalucía. BOJA Nº 15, del 26 de julio de 1994.

Keisler, H.J. (1976): *Elementary Calculus*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt Incorporated.

Knuth, D.E. (1979): *Números surreales*. Trad. L. Garriga. Barcelona: Reverté.

Kossak, R. (1996): "What are infinitesimals and why they cannot be seen". *American Mathematical Monthly,* 103, 10, pp.846-853.

Kyburg, H. (1997): "Quantities, magnitudes, and numbers". *Philosophy of Science*, 64, pp. 377-410.

Lave, J. (1985): "The Social Organization of Knowledge and Practice: A Symposium". *Antropology & Education Quarterly*, 16 (1), pp. 171-176.

León O. y Montero I. (1999): *Diseño de Investigaciones*. Madrid: McGraw-Hill.

Linchevski L. y Vinner S. (1989): "Canonical Representations of Fractions as Cognitive Obstacles in Elementary Teachers". En Vergnaud, G., Rogalski, J., Artigue, M. (eds.): *Proceedings of the Conference of the International Group for the P.M.E 13th.* París, Vol. 2, pp.242-249.

Llinares, S., Sánchez, V. (1991): "The knowledge about unity in fraction tasks of prospective elementary teachers". En Furinghetti, F. (ed.): *Proceedings of the Conference of the International Group for the P.M.E. 15th*. Asís; Vol.2; pp.334-341.

Lorenzo, J. de (1998): *La matemática: de sus fundamentos y crisis*. Madrid: Tecnos.

Mainzer, K. (1990): "Real Numbers". En Ebbinghaus et al. (Eds.): *Numbers*. Nueva York: Springer-Verlag. pp.27-53.

Mansfield, H. (1985): "Points. lines, and their representations". *For the Learning of Mathematics*, 5,3, pp. 2-6.

Margolinas, C. (1988): "Une etude sur les difficultes d'enseignement des nombres reels ». *Petit x*, 16, pp. 51-66.

Martínez Arosa, J. (1984): "La computadora también tiene sus limitaciones"*. Épsilon*, 6-7, pp. 125-131.

Maza, C. (1991a): *Enseñanza de la suma y de la resta*. Madrid: Síntesis.

Maza, C. (1991b): *Enseñanza de la multiplicación y división*. Madrid: Síntesis.

McDonald, D. (1992): "Infinite sequences: a logical (¿) extensión". *The Mathematics Teacher,* vol. 85, nº 3, pp.228-229.

McIntosh A. y Ching Yang D. (1999). "Assessing Number Sense of Students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States". *School Science and Mathematics*, 99 (2), pp.61-70.

Measor L. (1985): "Interviewing: a Strategy in Qualitative Research". En R. Burgess (ed.): *Strategies of Educational Research.* Basingstoke: The Falmer Press.

Moliner, M. (1996): *Diccionario de Uso del Español.* Madrid: Gredos.

Moreno, L. y Waldegg, G. (1991): "The conceptual evolution of actual mathematical infinity". *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 211-231.

Myhill, J. (1972): "What is a real number?" *American Mathematical Montthly*, 79, pp. 748-754.

Nagel E. y Newman, J. (1994): *El Teorema de Gödel.* Madrid: Tecnos.

Nelson, E. (1977): "Internal Set Theory: a New Approach to Nonstandard Analysis". *Bulletin of the American Mathematical Society*,83, 6, pp. 1165-1198.

Pardo, A. y San Martín, R. (1994): "Análisis de datos en psicología II". Madrid: Pirámide.

Pérez de Tudela y Velasco, J. (1981): *El problema del continuo. Una aproximación sistemática al concepto de fundamentación.* Madrid: Copiasol.

Petitot, J. (1989): "Rappels sur l' Anlayse Non Standard". En H. Barreau y J. Harthong (eds.): *La Mathématique Non Standard.* París: Editions du CNRS, pp.187-209.

Platón (1990): *La república o el estado.* Madrid: Espasa Calpe.

Popper, K. (1997): *El cuerpo y la mente.* Barcelona: Paidós.

Popper, K. y Eccles, J. (1985): *El yo y su cerebro.* Barcelona: Labor Universitaria.

Porter M.K. y Masingila J.O. (1995). "The Effectos of Writing To Learn Mathematics on the Types of Error Students Make in a College Calculus Class". *Proceedings Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Puig Adam, P. (1962): *Curso Teórico Práctico de Cálculo Integral Aplicado a la Física y Técnica.* Madrid: Biblioteca Matemática.

Puig, L (1995): "Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal". En *Fenomenología Didáctica de las estructuras matemáticas (textos seleccionados).* Trad. de L. Puig. México: Cinvestav – IPM.

Puig, L. (1997): "Análisis Fenomenológico". En L. Rico et al. (eds.): *La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori. Pp.61-94.

Real Academia Española (1992): *Diccionario de la Lengua Española.*

Recio, T. (1998). *Cálculo simbólico y geométrico.* Madrid: Síntesis.

Recio, T. y González, M.J. (1997): "Does Computer Algebra help at all learning about real numbers?" *Mathematics and Computers in Simulation*, 1454, pp.1-11.

Rico L. (1996): "Pensamiento Numérico". En Hitt, F. (ed.): *Investigaciones en Matemática Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana, pp. 27 a 53.

Rico, L. (1995): *Conocimiento Numérico y Formación del Profesorado*. Lección Inaugural. Apertura Curso Académico. Universidad de granada.

Robinet (1986): "Les Réels: Quels Modèles en Ont les Élèves?" *Educational Studies in Mathematics,* 17, pp. 359-386.

Robinson, A. (1974): *Non – Standard Analysis.* (Ed. Revisada). Amsterdam: North-Holland Pub.Co.

Romero, C. (1996): “Una investigación sobre los esquemas conceptuales del continuo. Ensayo de un cuestionario”. *Enseñanza de las Ciencias*, 14 (1), pp. 3-14.

Romero, I. (1995): *La introducción del número real en educación secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rorty, R. (1995): *La Filosofía y el Espejo de la Naturaleza.* Madrid: Cátedra.

Rucker, R. (1987): *Mind Tools*. Londres: Penguin Books.

Ruiz López, F. (1996): *Estudio sobre tablas numéricas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Documento no publicado.

Scaglia, S. (1998): *Dos creencias de los profesores en formación acerca de la evaluación de temas numéricos.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.

Scriven, M. (1988): “Philosophical Inquiry Methods in Education”. En Jaeger, R. (ed.): *Complementary Methods For Research in Education*. Washington: American Educational Research Association. pp.: 131-154.

Sfard, A. y Linchevski L. (1994): “The gains and the pitfalls of reification. The case of Algebra”. *Educational Studies in Mathematics*; 26, pp.191-228.

Shavelson, R., Webb, N., Burstein, L. (1986): Measurement of Teaching. En M. Wittrock (ed.): *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan Publishing Company. pp.: 50-91.

Sierpinska, A. (1985): “Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/4, pp. 371-397.

Sierpinska, A. (1987): “Humanities students and apistemological obstacles related to limits”. En *Educational Studies in Mathematics,* 18, pp. 371-397.

Sierpinska, A. Viwegier, M. (1989): “How and when attitudes towards mathematics and infinity become constituted into obstacles in students?”. *Proceedings of the XIII PME Conference.* París, pp. 166-173.

Sinaceur, H. (1992): "La Construction Algébrique du Continu: Calcul, Ordre, Contiuité". En J-M Salanskis, H. Sinaceur (eds.): *Le labyrinthe du Continu*. París: Springer-Verlag, pp.104-116.

Socas, M. (1997): “Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria”. En L. Rico (coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori., pp.125-154.

Solomon, A. (1991): “What is a line?” *For the Learning of Mathematics*. 11, 1, pp.9-12.

Sullivan, K. (1976): “The Teaching of Elementary Calculus Using the Nonstandard Analysis Approach”. *The American Mathematical Monthly*, 83, 5, pp. 370-375.

Tall, D. (1980): “The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity”. *Educational Studies in Mathematics*, 11, pp. 271-284.

Tall, D. (1992): “The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof”. En D. A. Grouws N.C.T.M. (ed.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. NCTM. New York: Macmillam Pub. Co., pp. 495-511.

Tall, D. (1995): “Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking”. En L.Meira y D.Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the P.M.E.* Recife, (pp. 61-75, V.I).

Tall, D. (1996): “Functions and Calculus”. En A. J. Bishop et al (eds.): *International Handbook of Mathematics Education*. Lugar: Kluwer Academic Publishers. pp. 289-325.

Tirosh D. (1990): “Inconsistencies in Students’ Mathematical Constructs”. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 3 y 4, pp. 111-129.

Tirosh, D. y Stavy, R. (1992): “Studentes’ Ability to Confine Their Application of Knowledge: The Case of Mathematics and Science”. *School Science and Mathematics*, 92, 7, pp. 353-358.

Tirosh, D., Stavy R. y Cohen, S. (1998): “Cognitive conflict and intuitive rules”. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology* , 20, 10, pp. 1257-1269.

Tirosh, D., Stavy, R. y Aboulafia, M. (1998): “Is it possible to confine the application of the intuitive rule: ‘Subdivision processes can always be repeated?” *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology,* 29, 6, pp. 813-825.

Truss , J.K. (1997): *Foundations of Mathematical Analysis*. Oxford: Clarendon Press. Tusquets Editores, pp.17-41.

Udina i Abello, (1989): *Aritmética y Calculadoras*. Madrid: Síntesis.

Van Dalen, D. (1997): “How connected is the intuitionistic continuum?” *The Journal of Symbolic Logic*, 62, 4, pp.1147-1150.

Vergnaud, G. (1982): “Cognitive and Developmental Psychology and research in Mathematics Education: some theoretical and methodological issues”. *For the Learning of Mathematics*, 3, 2, pp.31-41.

Veronese, G. (1994): “On non-archimedean geometry”. En P. Ehrlich (ed.): *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. pp.169-187.

Vizmanos, Anzola, Primo (1988): *Funciones-1 Matemáticas 1º B.U.P*. Madrid: SM

Wilson, P. (1990): “Inconsistent ideas Related to Definitions and Examples”. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 3 y 4, pp. 31-47.

ANEXOS

ANEXO 1

Cuestionario Piloto sobre la Comparación de Números

Anexo 1.1. Primer ensayo cuestionario piloto.

El primer ensayo del cuestionario piloto se administró a alumnos de 1º año de Educación Infantil.

El cuestionario consiste básicamente en 14 pares de números que los sujetos deben comparar, indicando en cada caso un parecido y una diferencia. A continuación incluimos un ejemplo. (Los siguientes cuestionarios son mencionados en 1.3 y en 3.5.3.)

ENCUESTA PILOTO SOBRE NÚMEROS

Fecha: | | |

Edad: años

Sexo: Masc. | Fem. (Tachar lo que no corresponda)

Carrera que cursa: Año de cursado:

Para responder a las siguientes cuestiones puedes utilizar todas las ideas que tengas acerca de los números, tanto las estudiadas en la escuela como otras que surjan del uso que tú haces de los números.

No nos interesa determinar el conocimiento que tengas acerca de los números, sino que expreses las ideas, tanto aprendidas en la escuela o no, de las que te sientes completamente convencido o convencida.

En la última columna de la tabla preguntamos en qué se diferencian los números que constituyen cada par. Esta pregunta no se refiere a la operación resta o diferencia entre ambos números, sino a las posibles distinciones que puedas realizar entre los números que constituyen cada par.

Observa los siguientes pares de números:		¿En qué se parecen?	¿En qué se diferencian?
300 000	Unos trescientos mil		
$\boxed{9}$ $\boxed{\sqrt{}}$	18/6		
3’14	π		
1/3	0’3333333...		
Dos al cubo	3^2		
0’123456...	0’1		
5/8	0’625		
Dos centésimas	2.10^{-2}		
1’4142136...	$\sqrt{}2$		
1’3	1’30		
-$\sqrt{}$20	$\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\sqrt{}}$		
-$\sqrt{}$3 - 2	$\sqrt{}$3 + 2		
pi	3		
$\sqrt{}$(20+5)	125/25		

Anexo 1.2: Segundo ensayo Cuestionario Piloto

El segundo ensayo del cuestionario piloto se administró a alumnos de las modalidades B.U.P. y Formación profesional.

En este caso también se proponen pares de números y se añaden dos afirmaciones de un alumno hipotético para cada par, para que los sujetos indiquen si están o no de acuerdo.

Cada alumno debe comparar cuatro pares de números. Se construyeron 4 modelos de cuestionarios, que difieren entre sí según los números a comparar. En la tabla A.1.1 indicamos los pares de números incluidos en cada modelo.

Modelo	Pares de Números
Modelo 1	a) pi y 3 b) 2 y 5 c) 1'3 y 1'30 d) 1/4 y 0'25
Modelo 2	a) π y $\sqrt{2}$ b) 0'3333... y 1/3 c) Dos al cubo y $\sqrt{64}$ d) 1/2 y –1/2
Modelo 3	a) 0'12345... y 0'1 b) Dos centésimas y 0'02 c) 0' y 0'01 d) $\sqrt{15}$ y $\sqrt{16}$
Modelo 4	a) 2/3 y 0'6666... b) pi y 3'14 c) –15'2 y 15'2 d) 0'9999... y 1

Tabla A.1.1: Pares de números incluidos en cada modelo.

A continuación incluimos un ejemplo de cuestionario, correspondiente al modelo 2.

ENCUESTA PILOTO SOBRE NÚMEROS

Fecha: | | |

Edad: años

Sexo: Masc. | Fem. (Tachar lo que no corresponda)

Centro:

Curso: de

Grupo:

Para responder a las siguientes cuestiones puedes utilizar todas las ideas que tengas acerca de los números, tanto las que surjan del uso que tú haces de los números como otras estudiadas en la escuela.

Hemos presentado a Norberto, alumno de ESO, algunos pares de números para que anote los parecidos y diferencias que él observa. En las tablas siguientes figuran los pares de números y las respuestas que en cada caso dio Norberto. Te pedimos:

1. Que indiques si estás de acuerdo o no con sus respuestas.

2. Que expliques tus razones.

3. Que añadas todos los parecidos y diferencias que se te ocurran.

a) 1- Números que tenía que comparar Norberto:

π	$\sqrt{2}$

2- Respuesta que dio Norberto:

¿En qué se parecen?	**¿En qué se diferencian?**
"Los dos son números irracionales."	"π es mayor que $\sqrt{2}$."

Las siguientes preguntas son para ti y no para Norberto:

3- ¿Estás de acuerdo con las respuestas anteriores?

Sí ☐ No ☐ No sé ☐ (Marca lo que proceda)

4- Explica por qué estás de acuerdo o en desacuerdo o por qué no sabes contestar la pregunta anterior.

5- Indica otros parecidos y diferencias (si se te ocurren)

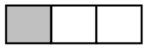
π	$\sqrt{2}$

¿En qué se parecen?	**¿En qué se diferencian?**

b) 1- Números que tenía que comparar Norberto:

0’3333...	$\frac{1}{3}$

2- Respuesta que dio Norberto:

¿En qué se parecen?	**¿En qué se diferencian?**
“Es la misma cantidad.”	“Es más simple representar $\frac{1}{3}$.” 

Las siguientes preguntas son para ti y no para Norberto:

3- ¿Estás de acuerdo con las respuestas anteriores?

Sí ☐ No ☐ No sé ☐ (Marca lo que proceda)

4- Explica por qué estás de acuerdo o en desacuerdo o por qué no sabes contestar la pregunta anterior.

5- Indica otros parecidos y diferencias (si se te ocurren)

0’33333...	$\frac{1}{3}$

¿En qué se parecen?	**¿En qué se diferencian?**

c) 1- Números que tenía que comparar Norberto:

Dos al cubo	√64

2- Respuesta que dio Norberto:

¿En qué se parecen?	¿En qué se diferencian?
"Se obtiene el mismo resultado."	"Son operaciones diferentes."

Las siguientes preguntas son para ti y no para Norberto:

3- ¿Estás de acuerdo con las respuestas anteriores?

Sí ☐ No ☐ No sé ☐ (Marca lo que proceda)

4- Explica por qué estás de acuerdo o en desacuerdo o por qué no sabes contestar la pregunta anterior.

5- Indica otros parecidos y diferencias (si se te ocurren)

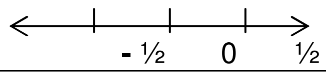
Dos al cubo	√64

¿En qué se parecen?	¿En qué se diferencian?

d) 1- Números que tenía que comparar Norberto:

$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

2- Respuesta que dio Norberto:

¿En qué se parecen?	**¿En qué se diferencian?**
"Los dos están a igual distancia de cero." 	"En el signo."

Las siguientes preguntas son para ti y no para Norberto:

3- ¿Estás de acuerdo con las respuestas anteriores?

Sí ☐ No ☐ No sé ☐ (Marca lo que proceda)

4- Explica por qué estás de acuerdo o en desacuerdo o por qué no sabes contestar la pregunta anterior.

5- Indica otros parecidos y diferencias (si se te ocurren)

$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

¿En qué se parecen?	**¿En qué se diferencian?**

ANEXO 2

Proyecto de Tesis

(El proyecto de tesis se menciona en 1.4 y en 2.4)

Obstáculos epistemológicos de la recta numérica. Su posible incidencia en producciones de alumnos de Bachillerato y Universidad.

(Título provisional)

1. Introducción
2. El problema de investigación y su estructura
   2.1. Objetivos de la investigación
   2.2. Supuestos de la investigación
   2.3. Preguntas de investigación; conjeturas e hipótesis
3. Marco teórico
   3.1. Demarcación del estudio
   3.2. Antecedentes
4. Metodología
   4.1. Diseño
   4.2. Instrumentos para la recogida de datos
   4.3. Instrumentos para el análisis de datos
   4.4. Sujetos de estudio
   4.5. Figuras ilustrativas
   4.6. Dificultades y limitaciones de la investigación
5. Consecuencias y expectativas.

1. Introducción

Las investigaciones en Educación Matemática en el campo de los números reales se orientan principalmente al estudio de propiedades básicas de funciones, con o sin ordenadores, y generalmente con una componente algebraica más o menos fuerte (Li et al., 1993, Monaghan et al. ,1994) y al aprendizaje del concepto de límite (Cornu, 1982; Sierpinska, 1985; Robinet, 1983). En esta introducción presentamos a grandes rasgos el campo problemático en el que localizamos nuestra investigación.

Freudenthal (1983; 28) considera que los objetos matemáticos organizan fenómenos, matemáticos o no. En esta investigación estudiaremos la recta geométrica como un fenómeno matemático organizado por el número real. La recta, que se trabaja en la escuela desde edades muy tempranas, se utiliza como "soporte" de los conjuntos numéricos que se estudian gradualmente. El ámbito educativo ha acuñado la expresión “representación en la recta” para referirse a la imagen visual de la biyección punto-número apoyada tradicionalmente en la medida de longitudes. Esto nos conduce a considerar un segundo fenómeno también organizado por el número real, a saber: la magnitud continua longitud. La medida exacta admite interpretaciones de tipo físico y de tipo matemático. Las últimas están bien estudiadas (números constructibles) y pensamos que la primera ha sido estudiada desde la física y su epistemología; para la medida aproximada disponemos de teorías bien fundamentadas. De esta manera, nos centramos en dos fenómenos explicados por el número real, uno matemático (la recta) y otro físico (la longitud).

Cuando se intenta organizar la longitud con ayuda del número real, no es posible llegar a los números irracionales como resultado de una medición directa, si se exige que dicha medición se apoye en un procedimiento finito. En el contexto de la medida, estos números surgen de una actividad intelectual, de una medición indirecta (aplicando fórmulas o relaciones matemáticas) o un razonamiento (apoyado en imágenes físicas, pero justificado de manera abstracta, o en procesos infinitos).

Los currículos de Bachillerato mencionan una breve introducción al número real que, sin desarrollar el concepto, permite trabajar diferentes “representaciones”: icónica, posicional y la recta. Uno de los mayores retos de cualquier introducción al número real está precisamente en que no disponemos de una “representación” unificadora y adecuada para cada uno ellos. Por ejemplo, el conjunto de números decimales de hasta n cifras, $\mathbf{D_n}$, es numerable, mientras que **R** no lo es; sabemos describir todos los algebraicos, pero no todos los números trascendentes. Por otra parte, como dice Romero (1995; 62-63), una “representación” no permite exhibir todas las características de un objeto matemático. Se comprende así que las “representaciones” de los números reales generen dificultades escolares.

En este trabajo, cuando hablamos de 'representación' nos referimos exclusivamente a representaciones externas. Más precisamente, admitimos que hay conceptos públicamente compartidos (recta geométrica, número real) y representaciones de los unos por los otros públicamente compartidas.

Las dificultades de la representación en la recta del número real no tienen su origen en el ámbito escolar. La representación en la recta del número real procede de una elección axiomática, y la propia estructura de la recta geométrica es una cuestión controvertida que da lugar a diferentes interpretaciones, a las que nos referiremos más adelante.

Tall (1995) sostiene que el desarrollo del pensamiento matemático, entre los niveles intermedio y avanzado, está marcado por la introducción del método axiomático. En la Facultad de Matemáticas el número real se introduce bien axiomática o bien constructivamente, lo que permite definir el continuo (Severi, 1960; 85). Como consecuencia, el continuo lineal se identifica con el conjunto de los números reales, acuñándose la expresión recta numérica (Bouvier et al., 1984; 580).

La recta numérica constituye para nosotros un modelo de la recta geométrica generado por la axiomática del conjunto de números reales. Más generalmente, cuando nos refiramos a modelos de la recta, deberá entenderse que distintas axiomáticas están entrando en juego para estructurar la recta geométrica de una u otra manera.

En matemáticas se definen conjuntos numéricos que no siempre apelan a lógicas compatibles entre sí. Junto a los números reales (Dedekind, Cantor), han surgido los hiperreales de Robinson, los surreales de Conway y los números reales constructivos. Los infinitésimos, no arquimedianos, que fueron trabajados intuitivamente en el siglo XVIII, reciben en la actualidad un tratamiento matemático riguroso, numérico (Robinson, 1974) o geométrico (Veronese, 1994). Nos interesa estudiar los números reales y los números hiperreales porque se apoyan en lógicas compatibles y pueden representarse en la recta geométrica teniendo, sin embargo, elementos diferentes. Estos conjuntos numéricos generan diferentes modelos de recta.

¿Qué lleva a los matemáticos a elaborar axiomáticas diferentes? Nosotros no pretendemos contestar a esta pregunta. Sin embargo, algunos documentos consultados (Solomon, 1991; Veronese, 1994) inducen a pensar que las distintas formulaciones axiomáticas se sustentan en distintas intuiciones. Fischbein (1987; 211) sostiene que, desde el punto de vista educativo, es necesario que los estudiantes desarrollen una capacidad para analizar y controlar sus intuiciones, construyendo otras intuiciones nuevas, coherentes con las demandas científicas. Por ello en nuestra investigación queremos analizar algunas intuiciones de matemáticos que, una vez formalizadas, permiten utilizar la recta geométrica como modelo de dos conjuntos numéricos: los números reales y los números hiperreales. Parece adecuado estudiar si en la escuela o en la universidad surgen intuiciones respecto de estos números. Por ello, indagaremos en las interpretaciones e intuiciones que los alumnos de Bachillerato y de los primeros años de Universidad ponen en juego cuando manejan la biyección entre los números reales y los puntos de la recta.

Para que la representación de los números reales en la recta tenga sentido, se necesitan dos cosas:

(1º) Conocer cómo la recta geométrica queda organizada por el número real. En este trabajo deseamos caracterizar obstáculos epistemológicos (en el sentido de Bachelard) que surjan de la organización de la recta por el número real; algunas razones nos inducen a pensar que constituye un objetivo alcanzable: por ejemplo, el estudio de textos de matemáticos del S XX muestra cómo “compiten” dos conceptos de infinitésimo (número – punto para Robinson o segmento para Veronese), que no tienen cabida en la interpretación de la axiomática estándar.

(2º) Establecer las características de la propia representación. Estudios previos nos llevan a conjeturar que la representación en la recta es, conceptual y procedimentalmente, más compleja que otras representaciones. Algunas de estas representaciones son inseparables del aprendizaje del número real.

Por consiguiente, nuestras reflexiones se articulan alrededor de:

- Análisis de la recta geométrica y de la longitud como fenómenos organizados por el número real.
- Estudio de características distintivas de la representación de los reales en la recta, en relación con otras representaciones de estos números.
- Descripción de obstáculos epistemológicos (en el sentido de Bachelard) relacionados con los estudios anteriores.
- Diseño de situaciones escolares (adecuadas para incluir en entrevistas y cuestionarios), compatibles con el currículo e inspiradas en los obstáculos descritos.
- Estudio y análisis de las producciones de algunos sujetos (1º y 2º de Bachillerato y 1º y 2º de Matemáticas) ante las situaciones diseñadas.

Se deduce que los descriptores básicos de la investigación son los siguientes: número real, fenomenología didáctica, obstáculos epistemológicos, interpretaciones de alumnos, modelos de recta, longitud.

2. El problema de investigación y su estructura

Esta investigación analizará dos fenómenos organizados por el número real: la recta geométrica y la longitud, con la doble intención de caracterizar obstáculos epistemológicos relacionados con estos fenómenos y con su organización por el número real, y de detectar la presencia o la ausencia de interpretaciones e intuiciones, explicables mediante esos obstáculos (o relacionados con ellos), en las producciones de sujetos que terminan la etapa Secundaria y comienzan los estudios universitarios.

2.1. Objetivos de la investigación

1- Analizar fenómenos que, organizados por el número real, están a disposición de alumnos de Bachillerato: la recta y la longitud.
2- Recopilar intuiciones que, debidamente formuladas, adquieren significado matemático en conjuntos numéricos (reales e hiperreales).
3- Describir del modo más exhaustivo posible las demandas conceptuales y procedimentales de la representación en la recta de los números reales.
4- Establecer obstáculos epistemológicos como consecuencia de los estudios anteriores.
5- Elaborar criterios para estudiar las producciones de los alumnos que resulten de las situaciones diseñadas en la investigación.

6- Reconocer la ausencia o presencia de interpretaciones e intuiciones en las producciones de los alumnos que, en su caso, fueran explicables mediante los obstáculos descritos (o estuvieran relacionadas con ellos).

2.2. Supuestos de la investigación

Los siguientes enunciados corresponden a los campos generales en que nos apoyamos para enunciar preguntas de investigación a partir del problema de investigación. En cierto modo, designan líneas principales (y no exhaustivas) de búsqueda sobre las que establecemos una selección (las preguntas) basada en nuestra formación previa, preferencias e intereses.

1- Durante el aprendizaje escolar de los números reales, las interpretaciones e intuiciones de los alumnos se manifiestan a través de:
   a) La dicotomía exacto/aproximado.
   b) La dicotomía discreto/continuo.
   c) La dicotomía finito/infinito.
   d) La conceptualización pre-cuantitativa (en el sentido de Carnap) de la medida de longitudes.
   e) La noción de infinitésimo.

2- El aprendizaje de la axiomática de **R** no modifica las interpretaciones e intuiciones de los alumnos.

2.3. Preguntas de investigación; conjeturas e hipótesis

1- ¿De qué manera el número real organiza la longitud y la recta?

1.1. Freudenthal (1983) sostiene que los números han sido creados para organizar el fenómeno de la cantidad. En particular, el número real debe organizar el fenómeno de la longitud. Al consultar documentos orientados a explicar la longitud (Carnap, 1966; Bachelard, 1987; Michell, 1994) se observa una íntima conexión entre ésta y el número real, pero no hemos hallado aún una descripción de la organización preconizada por Freudenthal. Creemos que en Educación Matemática esta descripción es necesaria.

Conjetura 1: Al cotejar distintos documentos orientados a explicar la longitud, es posible establecer principios básicos de la organización de la longitud por el número real en el sentido de Freudenthal.

1.2. La representación escolar de los números reales en la recta se apoya en la medida de longitudes. Dados un origen y un segmento unidad, conocemos dos principios básicos de la organización de la recta por el número real: (1) existe una biyección entre puntos y números; y (2) todo número real coincide con la medida de un segmento, y recíprocamente. Con la forzosa elección de una unidad se consigue

eludir el manejo de razones de longitudes y la asociación de éstas con razones de números reales.
Se trata de confirmar estos dos principios básicos a partir de lo aprendido en el estudio 1.1 y del estudio de documentación suplementaria.

1. ¿Cuáles son las características de la representación de los números reales en la recta?

Los modelos de la recta dan cabida a determinadas intuiciones pero no a otras; por ejemplo, la recta numérica no da cabida a ninguna intuición de infinitésimo.
Sin embargo, esas intuiciones se encuentran en el medio escolar, tanto en física ("si la densidad fuera *un pelín mayor* la bola se hundiría") como en matemáticas ("*por mucho que* 1/n *se acerque* a cero, *nunca lo alcanza*, salvo en el límite"). [Las cursivas se refieren a las intuiciones indicadas.]
Nos proponemos determinar los rasgos más importantes de la representación de números reales en la recta para entender posteriormente si las intuiciones de los alumnos detectadas en el trabajo empírico se relacionan con las intuiciones subyacentes en dos modelos de la recta: uno, que se deriva de **R,** y otro, que incluye números infinitésimos en la recta geométrica.
Conjetura 2: La representación en la recta de los números reales es conceptual y procedimentalmente más compleja que otras representaciones de estos números.
Se trata de precisar el significado y el alcance de esa "mayor complejidad".
Hipótesis 1: Al realizar representaciones de números en la recta, se manifiestan intuiciones e interpretaciones que se pueden atribuir a axiomáticas diferentes de aquella en que se apoya la representación realizada.

Como consecuencia del estudio correspondiente a las preguntas 1 y 2, esperamos enunciar obstáculos epistemológicos que surjan de la organización de la recta por el número real.

3. ¿Cuál es el campo semántico de la expresión "medida de longitudes" entre los alumnos?

Esta pregunta tiene una finalidad exploratoria. Se trata de determinar las expresiones castellanas usadas por los alumnos para referirse a segmentos continuos según su "tamaño" y de describir la interacción de intuiciones de los infinitésimos con las dicotomías exacto / aproximado, discreto / continuo, finito / infinitamente-pequeño. Por ejemplo, en una primera etapa, los sujetos imaginarán que la investigadora ha cortado cuidadosamente una varilla de madera en dos partes iguales; al superponerlas, se observa que no han salido perfectamente iguales. ¿Qué pueden decir sobre el tamaño de esa diferencia? ¿Cómo explican la desigualdad, a pesar del cuidado puesto en la tarea? Para el tamaño, la investigadora insistirá en que usen un adjetivo algo más preciso que "pequeño".

Para la explicación de la desigualdad, la investigadora suscitará sucesivamente las tres dicotomías indicadas. En una segunda etapa, los sujetos determinarán el punto medio de un segmento y se suscitarán preguntas análogas suponiendo que se estudia la coincidencia de los extremos de ambas mitades observándolas con un microscopio de precisión (figuras preparadas por la investigadora). En la tercera y última etapa se razonará exclusivamente en términos intelectuales con segmentos “abstractos”.

Con los términos utilizados por los sujetos se construirán grafos semánticos. Las siguientes hipótesis remiten a los criterios que se mencionan en el objetivo 5 y en 4.3.

Hipótesis 2: El criterio Operaciones tendrá un predominio en los nodos de los grafos semánticos respecto de los demás criterios.

Hipótesis 3: Las componentes fuertemente conexas de los grafos semánticos obtenidos mostrarán escasas relaciones entre los criterios.

4. La representación en la recta de un número irracional, ¿induce al alumno a “cobijarse” en la representación aproximada?

Esta pregunta abarca algunos números algebraicos, constructibles con regla y compás o no. La siguiente hipótesis surge de la variedad de representaciones disponibles para los números constructibles frente a las disponibles para los no constructibles.

Hipótesis 4: En los sujetos de secundaria, la representación en la recta de los números constructibles es conflictiva, mientras que la representación de los números no constructibles no lo es.

En los sujetos universitarios, se procurará usar como representación adicional la fracción continua; aún no podemos avanzar expectativas sobre las respuestas de estos últimos sujetos.

Como consecuencia de los estudios correspondientes a las preguntas 2, 3 y 4 esperamos reconocer la ausencia o presencia de interpretaciones e intuiciones explicables mediante los obstáculos mencionados (o relacionadas con ellos).

3. Marco teórico

3.1. Demarcación del estudio

Partimos de la fenomenología didáctica: la fenomenología del número real consiste en el estudio de los fenómenos (físicos o matemáticos) organizados por el concepto de número real.

La fenomenología didáctica del número real debe comenzar por el estudio de los fenómenos que solicitan ser organizados mediante este concepto y enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización. “En la fenomenología didáctica de la longitud, número, etc., los fenómenos organizados por longitud, número, etc., se muestran lo más ampliamente posible. Si en una edad dada dichos fenómenos no están a disposición de los alumnos, uno abandona el intento –inútil- de inculcar el concepto [...]" (Freudenthal, 1983; pag 32).

El número real organiza los fenómenos de las magnitudes físicas continuas en relación a su medida. Parece conveniente profundizar en el significado de la medida de conceptos cuantitativos y en el esquema de medida de cualquier magnitud extensiva. En este punto seguiremos críticamente el estudio epistemológico de Carnap. La magnitud que nos interesa especialmente es la longitud, y ello por varias razones:

(1) Suele considerarse una magnitud fundamental en el sentido de que sirve para definir otras (como superficie o volumen), llamadas derivadas, y también porque muchas escalas de medida de diversas magnitudes (como la temperatura) consisten en longitudes.

(2) La representación en la recta de los números reales se apoya tradicionalmente en la medida de longitudes.

Respecto de la representación en la recta, las aportaciones de diferentes matemáticos suponen interpretaciones distintas de la naturaleza de la recta. Tomaremos aquí las aportaciones de Dedekind (1998) y Cantor (Belna, 1996), Veronese (1994) y Robinson (1974).

La lista de eminentes matemáticos y filósofos que se han pronunciado en la controversia acerca de la naturaleza de la recta es extensa (Pérez de Tudela, 1981); para hacer una selección, adoptamos un heurístico, a saber: las interpretaciones de los autores elegidos deben permitir considerar la recta geométrica como modelo de sistemas numéricos diferentes entre sí. Ahora bien, la recta geométrica no es un modelo adecuado del continuo intuicionista (Heyting, 1976), mientras que la representación en la recta de los surreales (v. Badiou, 1990) exige señalar en una semirrecta los dos conjuntos que definen a cada número, lo que supone una interpretación diferente de la habitual, siendo además, menos intuitiva. De ahí la selección indicada anteriormente (los números reales y los números hiperreales). Las intuiciones de la recta geométrica que subyacen en estos modelos son diferentes.

Tomamos las nociones de obstáculo epistemológico, en particular, obstáculos del conocimiento cuantitativo de Bachelard (1969). Diferentes investigadores (Chevallard, Sierpinska) también se remiten a este autor. Por ejemplo, en relación con los obstáculos del conocimiento cuantitativo, Bachelard observa que "la precisión de una medida debe referirse constantemente a la sensibilidad del método de medida y a que debe tener en cuenta naturalmente las condiciones de permanencia del objeto medido" (pag. 213).

En cuanto al estudio con los sujetos, hemos señalado que analizaremos sus producciones y respuestas ante situaciones especialmente diseñadas. La interpretación de esas producciones se hará desde tres puntos de vista:

1- Caracterización de las respuestas en base a un conjunto de criterios que permiten abarcar todas las cuestiones relacionadas con el número real.
2- Construcción de grafos semánticos (Goujon, 1975) basados en los términos utilizados por los sujetos, que informen sobre las relaciones que establecen.
3- Reinterpretación de los análisis anteriores orientada a exhibir intuiciones e interpretaciones de los sujetos explicables mediante los obstáculos señalados.

3.2. Antecedentes

Este trabajo se enmarca en la línea de investigación Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Un antecedente directo lo constituye la tesis de I. Romero (1995) "La introducción del número real en educación secundaria", elaborada dentro de esta línea de investigación. Este trabajo explora dificultades y potencialidades que presenta la introducción del número real en jóvenes de 14-15 años. La propuesta didáctica se basa en que la complejidad del número real exige la utilización de diferentes sistemas de representación, que permitan poner de manifiesto distintas características del concepto. La representación en la recta es uno de los sistemas de representación que se utilizan, por considerarlo ineludible para la comprensión del concepto.

Desde el punto de vista metodológico, encontramos ciertas semejanzas entre nuestro trabajo y la investigación en la que Artigue et al. (1982) estudian las concepciones de círculo en niños de la escuela elemental. Citaremos algunas:

- un análisis teórico define un área problemática (obstáculos epistemológicos);
- mediante una indagación previa (entrevistas exploratorias), se define un área de posibilidades con los alumnos;
- se diseñan situaciones que respondan al análisis teórico para presentar a los alumnos (cuestionario);
- se estudian las producciones de los alumnos.

Los campos de trabajo que se consideran relacionados con el presente estudio, y que se tendrán en cuenta para el desarrollo del mismo son los siguientes:

- Estudios de la fenomenología didáctica de diferentes clases de números. Se analizarán los capítulos de Freudenthal (1983) respecto de la fenomenología de la longitud, números naturales, fracciones y medida por medio de la Geometría y artículos que aborden la fenomenología del número real (Coriat et al. (1993), Baena et al. (1996)).

- Estudios referidos al aprendizaje del número real: concepciones, obstáculos, dificultades y potencialidades. (I. Romero, (1995); Fischbein (1995); C. Romero, (1996)).

- Concepciones de los alumnos respecto del infinito: obstáculos, dificultades, limitaciones. (Fischbein (1979), Tall (1980), Sierpinska et al. (1989), Moreno et al. (1991)).

- Concepciones de los alumnos respecto de la recta geométrica (Mansfield, (1985); Tirosh et al. (1992)).

- Estudios relacionados con la enseñanza de números utilizando la recta numérica (Ernest, (1985), Herbst (1997)).

- Estudios relacionados con las representaciones de conjuntos numéricos (Castro, 1994)

Nuestra memoria para la obtención de la suficiencia investigadora (Scaglia, 1998), constituye un antecedente de formación personal de carácter metodológico. En ella tuvimos ocasión de trabajar con uno de los métodos, policy capturing, que Shavelson (1986) incluye en la categoría de investigación *cognitiva*.

4. Metodología

4.1. Diseño

El estudio, encuadrado en el paradigma interpretativo, se organiza mediante dos aproximaciones deseablemente convergentes: la primera orientada al estudio crítico de bibliografía, y la segunda orientada a suscitar y analizar producciones de sujetos.

Convencionalmente, designaremos la primera como “estudio teórico” y la segunda como “estudio empírico”.

(A) El estudio teórico se realizará mediante el Análisis Conceptual (Scriven, 1988), siendo sus principales instrumentos el análisis crítico de bibliografía, las discusiones con expertos, presentaciones y discusiones en seminarios de investigación y congresos.

(B) El estudio empírico se refiere a la interpretación de producciones de sujetos.

4.2. Instrumentos para la recogida de datos (B)

Las técnicas (encuestas y entrevistas) exigen desarrollar instrumentos (cuestionarios y protocolos) ad hoc. En este momento la secuencia que consideramos más adecuada es la siguiente: Análisis exploratorio (principalmente Entrevistas y consultas a expertos) -> Cuestionario -> Análisis confirmatorio (principalmente Entrevistas).

4.3. Instrumentos para el análisis de datos

Todas las entrevistas son semiestructuradas. Las entrevistas de la fase exploratoria pretenden precisar el alcance y la comprensibilidad de los ítems del cuestionario, mientras que las de la fase confirmatoria harán plausibles el análisis del desempeño realizado por los investigadores.

El formato de los ítems de los cuestionarios (respuesta abierta u opción múltiple con explicación de la opción elegida) debe promover respuestas que permitan la construcción de grafos semánticos.

Con las entrevistas y los cuestionarios se pretende elaborar una descripción de las interpretaciones e intuiciones de los sujetos; para ello se organizará la siguiente información: Términos y expresiones usadas, conexiones entre los términos (misma / distinta frase), términos / expresiones que remiten a intuiciones, términos / expresiones que remiten a interpretaciones.

Adaptando ideas de Shavelson (1986) nos interesamos por los procesos mediante los cuales las personas toman decisiones razonables (con alguna intención) y aprenden de las consecuencias de esas decisiones. Los sujetos, por tanto, son seres activos capaces de organizar la información que reciben, elegir aquello que consideran relevante, reconocer alguna dificultad, planificar una manera de superarla, intentarlo, y valorar si lo han conseguido; a partir de su experiencia, se espera que a la larga ajusten sus juicios y sus decisiones. Los procesos subrayados sirven de marco para las entrevistas.

En Secundaria, las entrevistas se realizarán a sujetos designados por sus profesores de matemáticas. Inmediatamente de realizadas, se analizarán holísticamente para dilucidar si se observan en ellas esos procesos o algunos de ellos; seguidamente, se seleccionarán los fragmentos correspondientes a los procesos encontrados y se estudiarán desde el punto de vista del contenido, con ayuda de los criterios de análisis a los que enseguida nos referiremos.

Precauciones:

-Los términos y expresiones reconocidos en las entrevistas o en las respuestas a los cuestionarios, ¿fueron previamente usados por la investigadora?

-Las intuiciones e interpretaciones de los sujetos, ¿se corresponden con las expectativas, son atribuibles a conocimientos previos insuficientes o no interpretables por la investigadora?

Para el análisis de las producciones de los sujetos estamos elaborando una colección de criterios que, en nuestra opinión, abarcan todos los aspectos que atañen al número real. Estos criterios tienen su origen en estudios teóricos y en las respuestas de alumnos de Secundaria a una encuesta piloto referida a la comparación de números. Hemos puesto a prueba su utilidad, no sólo estudiando respuestas de alumnos, sino también analizando textos independientes (en el sentido de que estaban publicados antes de elaborar los criterios y no fueron consultados para su elaboración).

Los criterios se reparten bajo los siguientes títulos descriptivos (en orden alfabético):

1- Fenomenología
2- Operaciones
3- Orden
4- Representación
5- Tipo de número

El contenido de estos criterios y los subcriterios asociados a cada uno se halla en fase de elaboración.

4.4. Sujetos de estudio

Alumnos de Bachillerato LOGSE (modalidades Ciencia de la Salud y Tecnología). Alumnos de C.O.U. (opciones A y B). Alumnos de Polimodal –Argentina- (2º y 3º). Alumnos de 1º y 2º de Matemáticas (Universidad de Granada; Universidad Nacional del Litoral, Argentina).

En todos los casos, se trata de sujetos y muestras intencionales de extracción urbana (ciudad de Granada, España; ciudad de Santa Fe, Argentina).

Características de la muestra

Alumnos Bachillerato, C.O.U. y Polimodal:

Nivel, Centro, Curso, Edad, Sexo, Piensa continuar estudios universitarios, En caso afirmativo, estudios que pretende seguir, Nota de la última evaluación de Matemáticas

Alumnos Universidad:

País, Curso, Edad, Sexo, Nota media de Selectividad, Razones por las que eligió Matemáticas, Tiene aprobado el Análisis Matemático de 1º.

-A los sujetos argentinos sólo se les administrarán cuestionarios.

4.5. Figuras ilustrativas

La figura A.2.1 muestra un esquema del estudio teórico, destacando los aspectos principales del mismo.

La figura A.2.2 muestra la secuencia global del estudio empírico y su relación al estudio teórico.

La figura A.2.3 presenta la parrilla global para el análisis de las entrevistas que se realicen, tanto exploratorias como confirmatorias. La única función de esta parrilla en el proyecto es precisar las dos componentes básicas con las que trabajamos. En la componente Criterios no se han incluido los subcriterios.

Esquema del estudio teórico

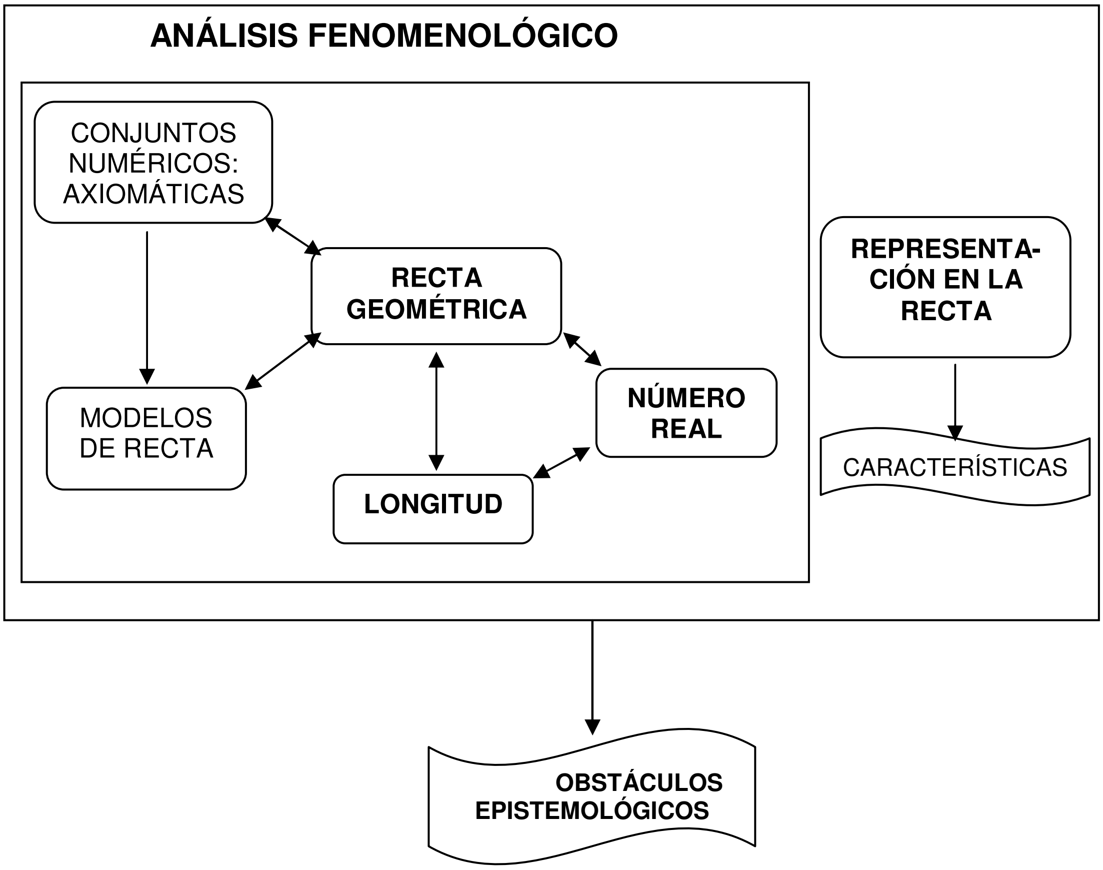


Figura A.2.1: Esquema del estudio teórico

Secuencia global del estudio empírico

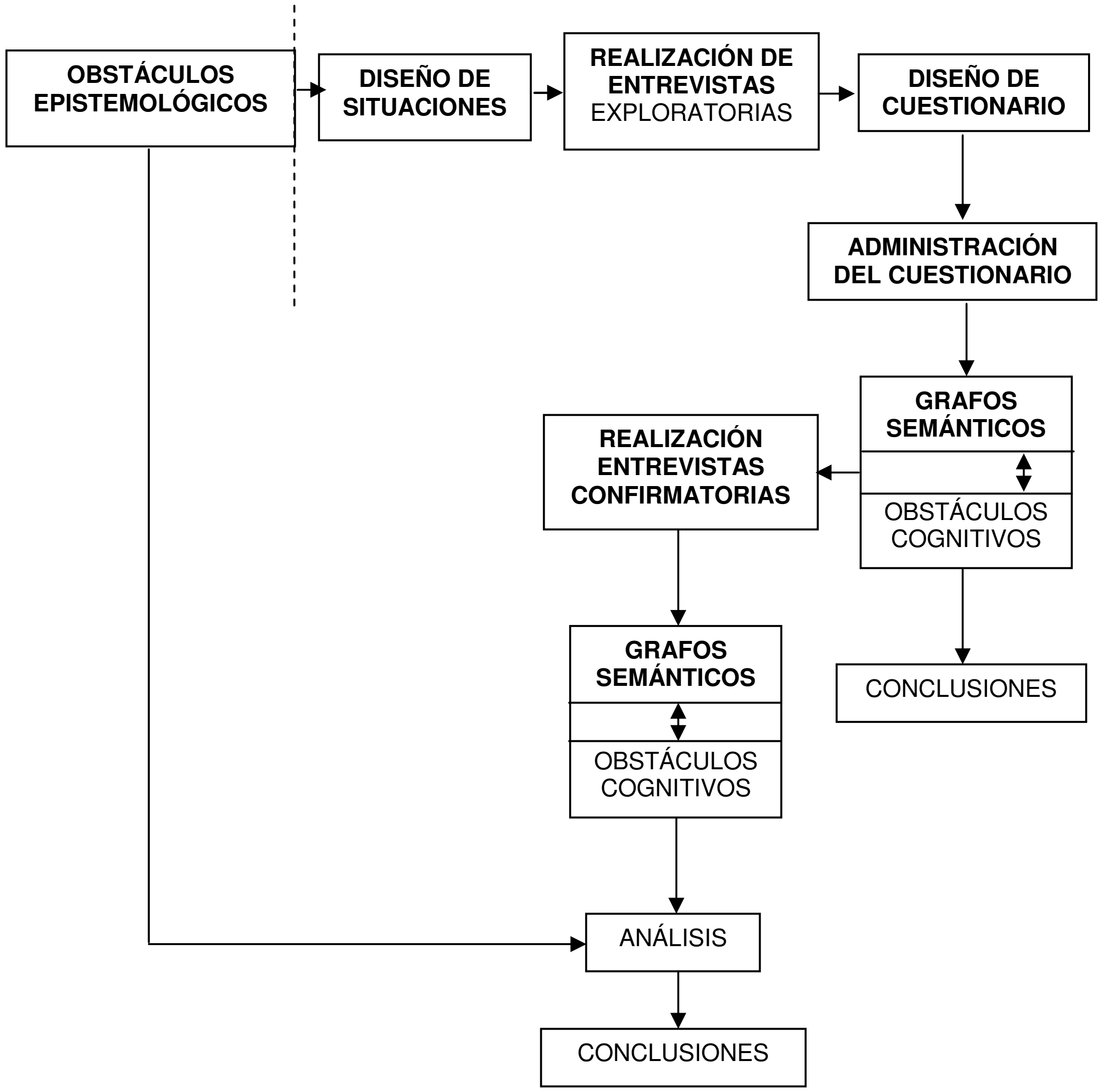


Figura A.2.2: Esquema del estudio empírico

Parrilla global para el análisis de las entrevistas

Criterios / Procesos	Fenomenología	Operaciones	Orden	Representación	Tipo de Número
Organizar					
Elegir					
Reconocer					
Planificar					
Intentar					
Valorar					

Figura A.2.3: Parrilla para el análisis de las entrevistas

4.6. Dificultades y limitaciones de la investigación

1ª. Esta tesis depende críticamente del establecimiento de conexiones entre, por una parte, los obstáculos epistemológicos que se describan y, por otra, la interpretación de las producciones de los sujetos en términos de esos obstáculos. La bibliografía consultada no permite, en estos momentos, garantizar que esa conexión sea posible, como ilustra el siguiente ejemplo. Adaptando consideraciones de Bachelard (1969; pp. 236-237), diríamos que, para que sea posible la idea de aproximar un real por otro, necesitamos aceptar que cada número real "dispone" de una identificación inequívoca. Si se utiliza la recta, a esa identificación le corresponde un único punto. Ambas ideas (identificación y aproximación) son inseparables; la una recibe sentido gracias a la otra y recíprocamente. El obstáculo epistemológico surge al considerarlas como independientes, al considerar por ejemplo que la aproximación consiste en otorgar a un número real el lugar (posición) de otro sin las precauciones que impone una teoría de errores. En cambio, cuando una persona considera correcto identificar π con 3'14, tenemos la certeza de hallarnos ante un obstáculo cognitivo pero no la seguridad de conectar esta identificación inadecuada con un obstáculo epistemológico.

2ª. Escasez de bibliografía en didáctica de la Matemática sobre el tema del Proyecto.

3ª. Dificultad de enunciar preguntas de encuesta que sean de fácil comprensión para los alumnos. Aunque conocemos el mito del cuestionario (Wilson, 1973), reconocemos por los estudios previos realizados que, cuando las preguntas no se parecen a los exámenes a que están acostumbrados (más precisamente, cuando las preguntas no son "de operar"), suscitan mucha inquietud e inseguridad en los alumnos de secundaria. Esta inseguridad se supera en la entrevista, cuando el investigador está debidamente preparado. En la encuesta es más difícil, porque aunque a los alumnos se les permite preguntar en voz alta, no todos interpretan homogéneamente las indicaciones del investigador.

4ª. La mención y uso de la recta geométrica supone la aceptación del infinito actual (por lo demás, necesario en la construcción de R). Dicha aceptación puede constituir una limitación, desde el punto de vista de los investigadores, en dos sentidos:

(1º) No vamos a seguir los brillantes desarrollos de los matemáticos intuicionistas que dan lugar a intuiciones muy poderosas. Por ejemplo, Van Dalen (1997) afirma: "si se quita un punto del continuo intuicionista, quedan puntos de los que no podemos saber si pertenecen o no a la parte restante".

(2º) No seremos capaces de detectar posibles intuiciones relacionadas con el continuo intuicionista que pudieran expresar las personas encuestadas, ya que los instrumentos elaborados no se orientan a ello.

5. Consecuencias y expectativas

La posibilidad de contar con una fenomenología didáctica del número real accesible a alumnos de Bachillerato mejorará las condiciones que permiten realizar el 'salto conceptual' que conduce a los números irracionales.

La determinación del carácter más complejo de la representación en la recta de los números reales respecto de otras representaciones de estos números constituye un aporte original en Didáctica de la Matemática, cuyos beneficiarios serán los profesores de matemáticas en formación inicial y permanente.

La noción de infinitésimo ha desaparecido de las matemáticas escolares y universitarias (al menos en el primer ciclo) por no ser compatible con el sistema de axiomas de **R**. El sistema educativo aún no ha encontrado la manera de integrar mediante nociones simples la aportación de Robinson (1974) que, como él mismo dice, es compatible con la lógica en que se sustenta **R**. Esperamos que como resultado de nuestro estudio sea posible reintroducir en educación secundaria el uso de nociones como la de infinitésimo.

El uso de los criterios mencionados en el análisis de datos permitirá evaluar la adecuación de los mismos en la interpretación de resultados en investigaciones referidas a temas numéricos. De igual modo, se espera que la construcción de grafos semánticos a partir de los términos utilizados por los alumnos proporcione una técnica valiosa en el estudio de respuestas.

Los resultados de la investigación aportarán sugerencias para adecuar los límites inferiores de acceso a la Universidad con los límites superiores que, sobre el número real, pueden impartirse razonablemente en Bachillerato (en las modalidades Ciencias de la Salud y Tecnología). Ello constituye un indudable beneficio para los currículos de matemáticas.

ANEXO 3

Información personal de los sujetos de las entrevistas exploratorias

En el presente anexo resumimos la información personal de los sujetos entrevistados durante las entrevistas exploratorias.

En la tabla A.3.1 se ha recogido la información correspondiente a los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato. Los datos incluyen: centro de estudios, curso, modalidad, grupo, edad, sexo, si piensa proseguir estudios universitarios, en caso afirmativo qué carrera, última nota en matemáticas (trimestral).

En la tabla A.3.2 se recoge información correspondiente a alumnos de 1º de Licenciatura: edad, sexo, nota media de selectividad, las razones por las que eligió estudiar matemáticas, si tiene o no aprobado Análisis Matemático de 1º.

En la última columna de las tablas A.3.1 y A.3.2 se incluye el número de casete (de vídeo) en que se encuentra grabada cada entrevista.

Nº suj	C.	Curso	Moda-lidad	Grupo	Edad	Sexo	¿Est. univ?	Carrera	Última nota	Cas. Nº
1	C1	1º B.	C.N.yS.	C	17	F	Sí	Informac./Telecom.	3	1
2	C1	1º B.	C.N.yS.	C	17	F	Sí	Educ. Física ó Veterinaria	5	1y2
3	C1	1º B.	C.N.yS.		19	M	N/S	-	Suspen	1
4	C1	1º B.	C.N.yS.			M	N/S	-		1
5	C1	1º B.	C.N.yS.	B	17	F	Sí	Medicina	6'50	1
6	C1	1º B.	C.N.yS.	B	16	M	Sí	Relac. con C.N. y S.	10	1
7	C1	1º B.	C.N.yS.	C	16	F	Sí	No sabe	3	2
8	C1	1º B.	C.N.yS.	C		F	Sí	Medicina	Sufic.	2
9	C1	1º B.	C.N.yS.	C		M	Sí	Diseño/Ingeniería	5	2
10	C1	1º B.	C.N.yS.	A	17	M	Sí	Adm. Empres/Econom.	9	2
11	C2	C.O.U			17	F	Sí	Medicina	Sobres.	3
12	C2	C.O.U			18	F	Sí	Enfermería	Insuf.	3
13	C2	C.O.U			18	M	Sí	Medicina	Sobres.	3
14	C2	C.O.U			17	M	Sí	Matemáticas	Sobres.	3
15	C2	C.O.U			17	M	Sí	Física	Sobres.	3

Tabla A.3.1: información de los sujetos de 1º de Bachillerato y C.O.U. entrevistados durante las entrevistas exploratorias

Suj. Nº	Edad	Sexo	Nota media selec.	¿Por qué eligió estudiar Matemática?	¿Tiene aprobado Análisis Matemático?	Cas. Nº
16	20	M	4'73	Es lo que más le gusta.	Aún cursa	4
17	18	M	6'2	Es lo que menos le costaba.	Aún cursa	4
18	18	M	8'78	Es lo que más le gusta. No pensó en la salida.	Aún cursa	4
19	19	M	8'76	Le gusta.	Aún cursa	4
20	18	M	8'72	Le gusta mucho. Sobre todo resolución de prob.	Aún cursa	3

Tabla A.3.2: información de los sujetos de Licenciatura en Matemáticas entrevistados durante las entrevistas exploratorias

ANEXO 4

Guiones de las entrevistas exploratorias

Anexo 4.1. Guión Entrevista 1

Parte 1: Corte de una cuerda en trozos iguales.

1- (La entrevistadora ofrece un trozo de cuerda)
Corta cuidadosamente esta cuerda en cuatro trozos iguales.
2- Mira a ver si te han salido todos iguales (debes convencerme de que son iguales).
3- ¿Cómo comprobaríamos eso que estás diciendo?
4- (La entrevistadora ofrece una segunda cuerda)
Por favor, corta cuidadosamente esta cuerda en tres trozos iguales.
5- ¿Miden exactamente lo mismo? ¿Por qué?
6- Compruébalo.
7- (Si la respuesta es que no miden lo mismo) ¿En cuánto difieren los trozos?
(Si la respuesta es que miden lo mismo) ¿Siempre obtendrás trozos iguales al cortar de ese modo las cuerdas?
8- 1. (Si el alumno ha usado el mismo procedimiento al cortar las respectivas cuerdas en tres o cuatro trozos) ¿Podrías haber utilizado diferentes procedimientos? (En caso afirmativo:) Descríbelos.
9- 2. (Si ha usado diferentes procedimientos? Cuéntame porqué has usado diferentes procedimientos.
10- ¿Es alguno de ellos más exacto que el otro? O ¿Influyen esos procedimientos diferentes en la exactitud de los cortes? (En caso afirmativo) ¿Cómo?

Parte 2: Medición de segmentos de recta.

10- (La entrevistadora toma el compás y lo abre con una abertura cualquiera. Luego ofrece al sujeto un folio con gráficos que no poseen origen y unidad)
Marca esta distancia en un gráfico y dime cuánto mide el segmento que coincide con esta abertura.
(Si el sujeto pregunta por la unidad, se le informa que la escoja él)
11- (La entrevistadora ofrece a continuación un folio que contiene gráficos con diferentes escalas)
Ahora escoge un gráfico de éstos y dime cuánto mide el mismo segmento (la longitud de abertura del compás de la pregunta anterior).
12- Compara los resultados. ¿Hay diferencias entre las medidas obtenidas?
13- 1. (Si la respuesta es positiva) ¿Cómo explicas esa diferencia?

13.2. (Si la respuesta es negativa) ¿Es por casualidad o existen razones específicas?

14- ¿Conoces algún procedimiento geométrico que te permita determinar el punto medio de un segmento utilizando regla sin graduar y compás?

15- (Respuesta afirmativa) Por favor, determina el punto medio de este segmento.
(Respuesta negativa: la entrevistadora explica cómo hacerlo) ¿Puedes repetir el procedimiento con este segmento?

16- ¿Piensas que la marca obtenida indica exactamente el punto medio? ¿Por qué?

17- (En caso de respuesta negativa) ¿Cuánto mide aproximadamente la diferencia?

Parte 3: Representación de números en la recta.

18- Vamos a efectuar algunas representaciones de números en la recta. Cuéntame lo que piensas que es importante en relación con ese tema.

19- Comencemos por representar algunos números en la recta. Propone tú un número para representar en la recta.

20- Bien, escoge una hoja para representarlo (se le ofrecen tres hojas: una en blanco y las otras dos con segmentos dibujados, una con escala y la otra no).

21- ¿Por qué has escogido esta? Recuerda que debes comentar en voz alta el procedimiento que sigas.

22- ¿Esta representación es exacta? ¿Por qué?

23- Representa ahora los siguientes números: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, 0’41 y π. ¿Qué folios prefieres para trabajar? ¿Por qué? Cuéntame cómo lo haces.

24- ¿Qué diferencias encuentras entre las distintas representaciones?

25-¿Estas representaciones son exactas? ¿Por qué?

Anexo 4.2. Guión Entrevista 2

Parte 1: Generalidades acerca de la representación en la recta.

1- Cuéntame lo que consideres importante de la representación de los números en la recta.

2- Observa esta lista de números:

0’1234567...
$\sqrt{2}$
$\sqrt[3]{2}$
1’25
π
1’18 (período 18)
0’101001000100001...

¿Es posible representar a cada uno de ellos en la recta? Explícame tu respuesta.

Parte 2: Representación de números.

3) ¿Cuándo un número no entero puede expresarse como fracción?

4) ¿Qué números de la tabla pueden expresarse como fracción? Explica tu respuesta y transfórmalos en fracción.

5) Representa en la recta el número 1’25. Comenta en voz alta el procedimiento utilizado. (Se observa la notación utilizada, decimal o fraccionaria)

6) ¿Es exacta tu representación? Explica tu respuesta.

7) Has utilizado la escritura (fraccionaria o decimal). ¿Qué ocurre si utilizas la otra escritura? ¿Es más fácil o más difícil?

8) En caso de utilizar la otra escritura en lugar de la que has usado, ¿el procedimiento de representación sería el que has utilizado?

9) ¿Cualquier fracción puede representarse en la recta?

10) La entrevistadora solicita la representación de otros números de la tabla no racionales: $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, π, 0’1010010001... y 0’12345...

En cada caso pregunta si la representación obtenida es exacta, y solicita la justificación de esa respuesta.

11) Para el caso en que no se aplica un procedimiento geométrico en la representación, pregunta:

¿Existe algún método geométrico para representar este número, como por ejemplo el que has utilizado para representar $\sqrt{2}$?

Parte 3: Representación en la recta de números expresados mediante diferentes notaciones.

(Representación de 0’3 periódico)

Voy a contarte un problema que debo resolver, que en principio parecía muy sencillo, y sin embargo ahora no puedo continuar. Vamos a ver si puedes ayudarme.

Todo empezó durante una mañana en la que estaba preparando una serie de preguntas para un cuestionario acerca de la representación de números reales en la recta.

(Mientras habla, la entrevistadora muestra un folio que contiene la figura 1)

La primer pregunta que se me ocurrió es muy sencilla: “Representar en la recta numérica el número 0’3 (período 3)”.

Tengo la costumbre de resolver inmediatamente las preguntas o problemas que incluyo en los cuestionarios, y eso fue lo que hice.

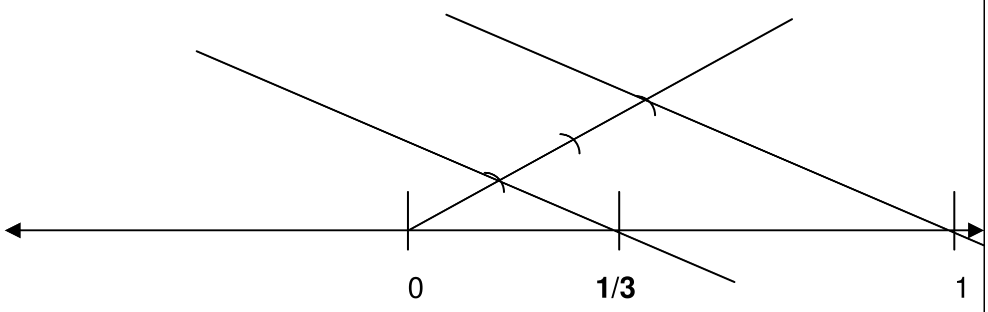
Lo primero que hice fue expresar el número en fracción: 0’3 = 1/3, y luego representé 1/3.

Estaba terminando cuando se acercó un colega, y mientras observaba lo que estaba haciendo me dijo:

- "Solicitas a los alumnos que representen 0'3 periódico y lo que tú haces es representar 1/3. Los alumnos intentarán hacer lo que tú pides, es decir, representar 0'3333333... ¿Por qué no lo intentas tú?"

Entonces me dispuse a representar 03333..., siguiendo la recomendación de este colega.
Resulta que no es tan sencillo como parece. Lo primero que hice fue tomar la unidad bien grande, y dividirla en 10 partes. A continuación tomé la parte limitada por 0'3 y 0'4, y la subdividí en 10 partes. No podía efectuar más subdivisiones porque ya no tenía espacio.
He representado un intervalo [0'33 , 0'34] en el que se encuentra el número 0'3 (periódico), pero no soy capaz de representar al número 0'3 (periódico) exactamente.
Para eso te pido ayuda a ti. ¿Cómo puedo resolver este problema?

1- Representar en la recta numérica el número 1/3.



"Representa el número 0'3333333... sin usar fracción".

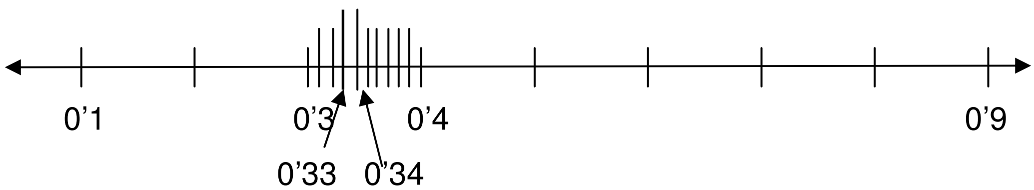
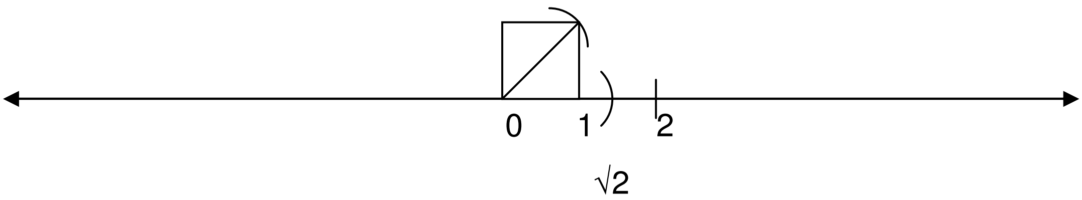


Figura A.3.1

(Representación de √2)
He estado pensando que tengo un problema similar con otros números. Por ejemplo, puedo representar √2 utilizando regla y compás, pero cuando quiero

representar 1’4142136... (√2 en notación decimal) me encuentro con el mismo problema (muestra la figura 2).
En este otro caso, cómo lo harías tú?

Representación de √2 en la recta numérica:



Representación de 1’4142136... sin utilizar el teorema de Pitágoras.

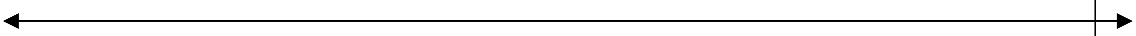


Figura A.3.2

Anexo 4.3. Guión Entrevista 3

Parte 1: Representación de números: idea de unidad.

Observa este gráfico Sobre la recta numérica se ha marcado un punto correspondiente al número 0 y otro punto que denominamos A.

1- ¿Qué número real le corresponde al número A y por qué?

La pregunta anterior se la he formulado a un alumno (de 1º de Bachillerato) y me ha respondido que al punto A le corresponde el número √2 (o cualquier número que él no diga; si responde que a A le corresponde cualquier real positivo mantengo la afirmación inicial).

2- ¿Qué piensas de su respuesta?

3- ¿A qué se debe que no coincide con tu respuesta?

4- ¿Qué analogías y qué diferencias hay entre los dos etiquetados?
5- Haz una marca en la recta del gráfico anterior que corresponda al número 1. (Otra versión de la misma pregunta: 'Representa sobre la recta del gráfico anterior el número 1')¿Es posible hacerlo? ¿Cómo?

Parte 2: Propiedad arquimediana.

6) Representa en la recta el número √2.
7) Representa en la recta el número 2√2.
8) Tomamos un segmentos cuya longitud es igual a la mitad de la unidad y lo aplicamos de manera sucesiva, a partir de 0, hasta alcanzar el número 2√2. ¿Cuántos pasos debemos dar para alcanzar ese número?
9) Ahora tomamos un segmento igual a la décima parte de la unidad. ¿Cuántos pasos son necesarios para alcanzar el número 2√2?
10) Si ahora tomamos un segmento más pequeño, digamos 1/1000. ¿Es posible alcanzar 2√2 aplicando este segmento sucesivamente, a partir de la unidad?
11) (Si contesta afirmativamente) ¿Cuántos pasos son necesarios?
(Si contesta negativamente) Explica por qué no es posible.
12) Tomemos un segmento muy pequeño, digamos la cienmilésima parte de √2, es decir, √2/100000, o $\sqrt{2}/10^5$. ¿Podemos alcanzar 2√2 si aplicamos, a partir de 0, este segmento en forma sucesiva?
13) ¿Crees que sería posible hallar un número tan pequeño tal que si lo repetimos muchas veces, no alcanzamos el número 2√2? Supongamos que disponemos de todo el tiempo que queramos, ¿puede existir un número (o más de uno) tal que si aplicamos sucesivamente un segmento cuya longitud es ese número, no podamos alcanzar 2√2?
14) (En caso afirmativo) ¿Cómo expresarías ese número?

ANEXO 5

Fragmentos de transcripción de tres entrevistas exploratorias

Anexo 5.1: Fragmento de entrevista. Guión Nº 1

Sujeto Nº5; 17; 1º Bachillerato; E-1; 11/05/99; 10:38-11:00

Mi nu	Nº fras e		Transcripción de frases literales	Cri	Pro Cog
			Parte 1: Corte de una cuerda en trozos iguales. **Tarea 1.1:** Cortar una cuerda en cuatro trozos iguales.		
00	01	E	La primera cosa que quiero que hagas es que cortes la cuerda ..., un trozo de cuerda que yo te voy a dar, que trates de cortarlo exactamente en cuatro partes iguales.		
				FE	GT
	02	A	Bueno, dame la tijera, ¿no?	FE	AT
	03	E	Sí, sí, claro.		
	04	A	Aquí no hay tiempo ni nada, ¿no?		
	05	E	No, en absoluto.		
	06	A	Ya. [Dobla por la mitad y corta,	FE	RZ
	07		dobla los dos trozos juntos por la mitad y corta otra vez.]	FE	RZ
01	01	E	Bueno. ¿Estás segura de que miden lo mismo?	FE	PP
	02	A	Hombre, segura, segura, no, pero... [Ríe]	FE	VA
	03	E	Bueno, entonces, ¿lo quieres comprobar?		GT
	04	A	Vale. [Riendo]		AT
	05	E	Acá tienes elementos [señala la regla y la escuadra] para comprobar si miden lo mismo..., o lo que te haga falta.		
	06	A	Sí. [Mide cada trozo con la regla].	FE	RZ
	07	E	Puedes usar de aquí lo que quieras. Si quieres anotar acá los resultados.		
	08	A	No. Bueno. Ese da más o menos.		
	09		Éste mide menos, medio cm menos.	FE	VA
	10	E	Si quieres hablar un poquito más alto.		
	11	A	Y éste sí.		
	12	E	Bueno, entonces, ¿cuánto miden?	FE	PP
	13	A	Diez cm, menos uno que mide nueve cm y medio.	FE	DE
	14	E	Anótalo, por favor.		
	15		Entonces, no son iguales, ¿no?	OR	PP
	16	A	[Mientras escribe] No. Hay uno...		
02	01	E	¿Y a qué se debe que no son iguales?, ¿qué te parece?	OR	PP
	02	A	Pues que yo no los he..., que al recortarlos no los he medido, simplemente he doblado y he cortado.	FE	VA
	03	E	¿Y podrían haber salido los cuatro iguales, si hubieses tenido más cuidado, o te parece que siempre puede que haya alguna diferencia?	FE	PP
	04	A	Claro, siempre hay alguna diferencia.	FE	VA
	05	E	¿Ah, si? ¿Por qué?		
	06	A	Porque si son cuatro trozos y serían treinta y nueve cm y medio siempre..., que no podrían medir lo mismo.	OP FE	CF
	07	E	Claro, tú has medido, eh..., tú sabes que la longitud total de la cuerda que yo te di era de..., ¿cuánto?	FE	PP
	08	A	Treinta y nueve y medio.	RE	DE

	09	E	Treinta y nueve y medio, entonces, ¿te parece que por eso no es posible cortar los cuatro iguales?		
	10	A	Sí.		
	11	E	¿Y si lo hacés con la calculadora?	OP	PP
	12	A	[Ríe.]		
	13	E	¿Si hicieras treinta y nueve y medio dividido cuatro? ¿Qué te parece?	OP	PP
	14	A	Sí, que cada trozo saldría una longitud exacta pero para recortarlo...	FE OP	CF
	15	E	Podría haber diferencias.		
			Tarea 1.2: Cortar una cuerda en tres trozos iguales.		
03	01		Bueno, y ahora yo te voy a pedir que ahora cortes otro trozo pero esta vez en tres partes iguales	FE	GT
	02		Tratar de cortarlos cuidadosamente para que salgan tres partes iguales ahora.	FE	GT
	03	A	¿Midiendo, o...?	FE	PA
	04	E	Como tú quieras. Yo quiero que vos lo hagas de manera que creas que te va a salir más exacto el corte. Si piensas que midiendo es más exacto, lo haces midiendo. Como a ti te parezca.		
	05	A	Yo qué se.		
	06		[Intenta doblar en tres la cuerda.	FE	RZ
	07		Mide la cuerda completa.	FE	RZ
04	01		Usa la calculadora-	OP	RZ
	02		Mide otra vez un trozo de cuerda.]	FE	RZ
	03		Espérate, espérate, que me parece que me he liado yo solica... [Sonríe]		
	04		[Mide la cuerda completa otra vez]	FE	RZ
	05	E	¿Cuánto mide?	FE	PP
	06	A	Cuarenta y un cm.	FE	DE
	07	E	Cuarenta y un cm.		
	08	A	Sí. [usa la calculadora]	OP	RZ
	09	E	¿Y ahora qué haces?		
	10	A	Pues, dividir entre tres...	OP	DE
	11		Sale inexacto.	RE FE	VA
	12	E	¿Por qué sale inexacto?		
	13	A	Porque...		
	14	E	¿Cuánto te da?		
	15	A	Trece con sesenta y seis.	RE	DE
05	01	E	¿Y entonces? ¿Cómo vas a hacer, que te dio trece con sesenta y seis [mira la pantalla de la calculadora].	RE	PP
	02		Y más decimales ¿no?	RE	PP
	03		¿Y entonces? ¿Qué vamos a medir? [Sonríe]		
	04	A	[Sonríe, parece nerviosa] Bueno.		CF
	05		Tampoco no me van a salir los tres trozos iguales, o sea que...	FE	VA
	06		[Mide un primer trozo y corta,	FE	RZ
	07		dobla por la mitad el trozo restante]	FE	RZ
	08		¿Todas las pruebas son así?		
	09	E	[Ríe]		
	10	A	Es que [...] que me equivoque.		
	11	E	Bueno, no pasa nada [...]		
	12		Bueno, ¿y entonces? ¿Qué pasó? ¿Miden lo mismo?		
	13		¿A ver cómo quedó?		
	14	A	Pues, soy muy... [Riendo]		
06	01		[Mide] Trece con seis, trece con cuatro y trece con siete.	RE	RZ DE
	02	E	Anótalo, por favor. Trece con cuatro...		
	03		Has usado diferentes procedimientos, ¿verdad?	FE	PP
	04	A	Sí.		

	05	E	¿Cuál te parece más útil?	FE	PP
	06		Utilizando la regla, o como has hecho, como en el primer caso, ¿no?, que doblaste por la mitad y cortaste, y después doblaste otra vez por la mitad.	FE	PP DE
	07	A	Hombre, con la regla.	FE	EL
	08	E	Con la regla, ¿te parece que es más seguro?		
	09	A	Sí.		
	10	E	¿Y habría alguna forma de hacer los cortes, de manera que los tres trozos midan exactamente lo mismo?	FE	PP
	11	A	¿Sin medir o midiendo?	FE	PA
	12	E	No sé, te pregunto, midiendo o sin medir. ¿Hay alguna forma de asegurarte de que los trozos midan lo mismo cuando vas a hacer cortes?	FE	PP
	13	A	Midiéndolos.	FE	EL
	14	E	¿Midiéndolos?		
	15	A	Creo que sí.		
	16	E	¿Siempre te van a salir iguales?		
	17		¿Qué pasó ahora que no te han salido iguales?	OR	PP
07	01	A	Porque uno si lo midió pero los otros dos no.	FE	RC
	02		He doblado simplemente la cuerda.	FE	DE
	03	E	Eh, bueno.		
	04	A	Bueno, no me saldría tampoco pero... [ríe]		
	05		Porque uno mide trece con siete, otro mide trece con cuatro y nunca me saldría trece con seis.	FE	DE VA
	06	E	¿Y por qué será? ¿Qué pasa con esos numeritos?		
	07	A	¿Con el trozo de la cuerda que queda?		
	08	E	[Asiente].		
	09	A	Pues que..., que uno salió más grande que otro.	OR	VA
	10	E	Uno salió más grande que otro.		
	11	A	Sí.		
	12	E	Bueno, ahí tenés tres medidas diferentes.	FE	RC

Anexo 5.2: Fragmento de entrevista. Guión Nº 2.

Sujeto Nº15; 17; C.O.U.; E-2; 27/05/99; 12:29-12:51.

Mi nut	Nº frase		Transcripción de frases literales	Cri.	Pro Cog
			Parte 2: Representación de números. **Tarea 2.1:** Representación de números racionales.		
02	01	E	Bueno, entonces vamos a empezar por representar... ¿Habría alguno que tendría alguna diferencia en la representación, entre uno y otro? ¿O te parece que da lo mismo, cualquiera que escojamos...? [señalando los números de la tabla]	RE	PP
	02	A	¿En la forma de representarlo?	RE	PA
	03	E	Sí, para representarlo en la recta. Cualquiera..., yo escojo cualquiera de éstos y bueno, ¿hay diferencias de procedimiento,		PP
	04	A	Sí.		
	05	E	De dificultad, de lo que sea.		
	06	A	Sí. Pues..., el uno veinticinco, por ejemplo, es más directo, es más fácil, se puede representar más fácil.	RE	VA
	07		Raíz cúbica de dos, pues sería más complicado representarlo... con exactitud.	RE	VA
	08	E	Pero se puede...		
	09	A	Sí, se puede representar.		
	10	E	¿En todos se puede determinar la marca justa que corresponde a ese número?	FE	PP
	11	A	Sí.		VA

	12	E	¿Sí?		
	13	A	Sí, sí.		
	14	E	Bueno, vamos a empezar por representar el uno con veinticinco. ¿Ese número se puede transformar en fracción, uno con veinticInco?	RE	PP
	15	A	Sí.		RC
	16	E	¿Cómo será la fracción?	RE	PP
03	01	A	Uno con veinticinco sería... cinco cuartos.	RE	RC
	02	E	Bueno. Escribe ahí cinco cuartos. ¿Cualquiera de estos números se pueden representar como fracción?	RE	PP
	03	A	Eh...		
	04	E	¿Qué te parece?		
	05	A	Éstos no [Señala $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$].		VA
	06	E	Esos no.		
	07	A	Sí.		
	08	E	Ni raíz de dos ni raíz cúbica de dos. Y éste: cero com...	RE	DE
	09	A	Sí. Y éste... tampoco. [señala π]		VA
	10	E	Pi tampoco. ¿Por qué, estos números no?		
	11	A	Porque son números... irracionales.	TI	EX
	12	E	Ah...		
	13	A	Y éste pues...		
	14	E	Cero con uno, el último de la lista.		
	15	A	Sí, sí, pues no sé.		
	16	E	¿Qué te parece, cómo sigue ese número?	RE	PP
	17	A	Cero..., pues, seguirían cinco ceros y el uno, seis ceros y el uno.	RE	VA
	18	E	Bueno, y ese número ¿se podrá escribir como fracción?	RE	PP
	19	A	Creo que no.	re	VA
	20	E	Bueno, no.		
	21	A	Creo que no.		
	22	E	Me dijiste raíz de dos no, raíz cúbica de dos tampoco, pi tampoco, éste tampoco, ¿éste, el primero?	RE	PP
	23	A	Y éste... creo que tampoco.	RE	VA
04	01	E	Crees que no. ¿Por qué no, crees que no?		
	02	A	Porque no es..., no es un número irracional..., no, digo irracional,	TI	EX
			no es periódico puro de éstos, ni tampoco...	RE	DU
	03		Sigue un orden lógico, ¿no?, pero... no sé, no estoy seguro.	RE	DU
	04	E	¿Y el uno con dieciocho se puede expresar como fracción?	RE	PP
	05	A	Sí.	re	VA
	06	E	¿Sí?		
	07	A	Sí, sí.		
	08	E	Bueno. Entonces ahora quiero que representes el 1’25 ¿Cómo haces? Recuerda que tienes que tratar de contar en voz alta lo que vayas haciendo.		
	09	A	Sí. Pues, se marca el origen...	FE	DE
	10	E	Bueno.		
	11	A	Y... cinco cuartos. Si cogemos las unidades así, sería una unidad más un cuarto. Más o menos aquí.	FE	DE
	12	E	Bueno, marca.		
	13	A	Sí.		
	14	E	¿Esta marca que has hecho es exacta? ¿Corresponde justo al número?	FE	PP
	15	A	No. Será aproximada.	fe	VA
	16	E	¿Por qué no?		
05	01	A	Porque... haría falta una regla o algo más preciso. Esto es a ojo.	FE	RC
					DE
	02	E	¿Y si lo haces con la regla?	FE	PP
	03	A	Tampoco sería del todo exacta.	FE	VA
	04	E	¿Por qué?		

	05	A	Sería más exacta. Porque tiene... esto tiene errores de medida. La regla sería..., tendería hasta... apreciaría hasta los mm pero no..., no sería del todo exacto.	FE	EX
	06	E	O sea que no es exacto.		
	07	A	No, no es exacto.		
	08	E	Bueno. ¿Crees que hay alguna forma de hacerlo exacto?	FE	PP
	09	A	Sí, tiene que haber alguna.		
	10	E	¿Tiene que haber alguna? ¿Y cómo..., se te ocurre alguna?		
	11	A	Pues dividiendo, aún sí con..., haciendo la mediatriz de este segmento, y luego se vuelve a calcular otra vez la mediatriz.	FE	DE
	12	E	[Asiente]		
	13	A	Y ya tendría aquí... [...]		
06	01	E	¡Ah, utilizando la mediatriz te daría justo, la marca justa...		
	02	A	Tendría la mitad, y ahora, utilizo otra vez la mediatriz, te daría otra vez la mitad.	FE	PL
	03	E	Sí, sí, sí, te entiendo. Y entonces eso sería justa la marca del punto... del punto que le corresponde, ¿no?	FE	PP
	04	A	Sí.	fe	VA
	05	E	A cinco cuartos. Y acá el uno ¿cuál sería? La unidad.		
	06	A	La unidad pues sería ésta.	FE	RC
	07	E	¿Y ésta marca es justo la de la unidad?	FE	PP
	08	A	Sí porque la he hecho yo como unidad.	FE	EX
	09	E	Ésa, ésa... tú has hecho una marca, y esa marca coge justo al punto que corresponde al número uno?	FE	PP
	10	A	Sí.		VA
	11	E	Sí. ¿Y esta marca justo coge al punto que corresponde...	FE	PP
	12	A	A cero.	FE	RC
	13	E	A cero, sin ningún problema.		
	14	A	Sí.		
07	01	E	Bueno. Eh... si tuvieses que representar... Bueno, acá has escogido cinco cuartos, y qué pasaba, por qué no tomaste la notación en forma decimal: uno con veinticinco, ¿es lo mismo?	RE	PP
	02	A	Sería lo mismo.	re	VA
	03	E	Pero cuál te parece más fácil de trabajar en la recta, para representar.	RE	PP
	04	A	Sería más fácil como esto [indica la escritura fraccionaria].	RE	EL
	05	E	¿Por qué?		
	06	A	Porque te está diciendo que dividiendo en cuatro..., de cuatro divisiones que hagas de la unidad, pues coges cinco.	FE	EX
	07	E	Estamos. Y si tienes que representar el uno con dieciocho periódico, ¿qué harías? Hemos dicho que lo pasas... que se puede pasar a fracción.	RE FE	PP
	08	A	Se puede pasar a fracción.	RE	RC
	09	E	Bueno, pero si lo tuvieses que representar, ahora no lo vamos a hacer, pero qué harías, lo pasarías a fracción o lo representarías ahí, como está, en notación decimal.		PP
	10	A	Pues así como está, coges una aproximación.	OP	EL
	11	E	Una aproximación.		
	12	A	[Asiente]		
			Tarea 2.2: Representación de números irracionales.		
	13	E	Bueno, ahora quiero que representes el número primero: cero con uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, sigue.	RE	GT
08	01	A	Pues... se divide..., se divide la unidad en diez partes...	FE	DE
	02	E	Se divide la unidad en diez partes...		
	03	A	Y tiene... como tiene cero coma uno, dos tres, pues, ese número tiene que estar comprendido entre cero coma uno y cero coma dos.	RE OR	EX
	04	E	Sí.		

	05	A	Sería lo mismo otra vez en diez partes y... estaría comprendido entre el dos y el tres.	FE OR	DE
	06	E	Bueno, entonces, haz una marca. ¿Dónde estaría el punto, el número ése.		
	07	A	[Escribe]		
09	01	E	Anótalo. Cero con... el número aquel. Esa marca ¿es exacta?	FE	PP
	02	A	No.	fe	VA
	03	E	¿No? ¿Por qué?		
	04	A	Porque lo he hecho... aproximado. No se puede hacer exacto.	FE	VA
	05	E	¿Por qué... por qué no se puede hacer exacto?		
	06	A	Pues porque... no sé. Por lo que yo sé sería infinito y...	RE	DU
	07		Debe tener una marca en la recta real, pero... no sé.	FE	DU
	08	E	Vamos a ver. Una marca tiene que haber		
	09	A	Sí.		
	10	E	Pero no estás seguro de si es ésa.		
	11	A	Tiene que ser aproximadamente ésta, que se puede hacer a ojo.	FE	VA
	12	E	¿Exactamente se puede hacer?	FE	PP
	13	A	Sí.		
10	01	E	¿Y cómo harías?		
	02	A	No sé, pero tiene que haber alguna forma, ¿no?	fe	VA
	03		Tiene que haber alguna forma. De todos estos números, cuáles se pueden determinar exactamente. Pero cuando yo te digo exactamente yo digo, teniendo el cero y teniendo el uno, ¿no?		
	04	A	Sí.		
	05	E	Éste es el cero y éste es el uno. Yo te digo: ¿cuáles de estos aquí se pueden representar justo, hacer la marca justa, que con esa marca cojas justo el punto de ese número? ¿Cuáles de éstos?	RE FE	PP
	06	A	Pues, raíz de dos, raíz cúbica de dos...		VA
	07	E	¿Por qué me dices que esos dos se puede?		
	08	A	Porque... sí se puede.		
	09	E	¿Por qué?		
	10	A	Me suena de... otros cursos que sí se puede.		
	11	E	Pero por qué se puede.		
	12	A	Con... con trigonometría o algo así se podía.	FE	EX
11	01	E	Éste se puede y éste se puede. ¿Y éste: cero con uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete... es el que yo te he pedido que marques acá? ¿Se puede hacer la marca justa?	RE FE	PP
	02	A	Sí.		VA
	03	E	Sí. ¿Uno con veinticinco?		PP
	04	A	También.		VA
	05	E	También. ¿Y pi?		PP
	06	A	También.		VA
	07	E	También. Una marca justa para ese número. ¿Y uno con dieciocho?		PP
	08	A	También.		VA
	09	E	¿Y éste último?		PP
	10	A	También.		VA
	11	E	También. O sea, todo se puede construir con el medio que sea, ¿no? ¿O habrá métodos especiales o es todo el mismo método? ¿Qué crees?	FE	PP
	12	A	Habrá métodos especiales para cada uno.	FE	VA
	13	E	Pero en todos yo puedo hallar la marca que corresponde justo a ese..., el puntito justo.		
	14	A	Estos dos no sé. Estos dos no estoy muy seguro, pero... creo que sí. Éstos sí.	RE FE	VA
	15	E	Excepto el primero y el último, los otros estás seguro.		
	16	A	[Asiente]		
	17	E	Bueno. Entonces, cómo harías para representar, por ejemplo, pi. O... represéntalo pi.	RE FE	GT

12	01	A	¿Pi? Pi sería...		
	02	E	Puedes escoger éste o éste, lo que quieras, el que tú quieras [señalando gráficos con diferentes escalas]		
	03	A	[...] Sería aquí, pi.		
	04	E	Bueno, ése...		
	05	A	Sería tres catorce dieciséis.	RE	DE
	06	E	¿Esa marca que has hecho de pi es exacta?	FE	PP
	07	A	No, sería aproximada.	FE	VA
	08	E	¿No? ¿Por qué?		
	09	A	Es aproximada.		
	10	E	¿Por qué es aproximada?		
	11	A	Porque he representado tres catorce dieciséis, que es una aproximación de pi.	FE OP	EX
	12	E	¿Y cómo estás seguro que eso es tres con catorce dieciséis? ¿Que esa marca le corresponde a tres catorce dieciséis?	FE	PP
	13	A	Pues... que... proporcionalmente [...]	OP	VA
	14	E	¿Cómo has hecho, a ver? Cuenta en voz alta cómo has hecho.		
13	01	A	Pues, hasta aquí va el tres...	FE	DE
	02	E	Sí.		
	03	A	El tres catorce, pues sería, tres..., un número próximo, estaría próximo a tres, más próximo a tres que a cuatro.	OR	EX
	04	E	Sí.		
	05	A	Tres catorce, pues, más o menos por aquí.	FE	VA
	06	E	Ahí estaría, donde has hecho una marquita más o menos tres catorce, y la otra era...		
	07	A	La otra era aquí, aquí.		
	08	E	A ver, márcala más larga así yo la noto. Bueno, ésa sería, eso sería qué, qué cosa, entonces.		
	09	A	Tres catorce dieciséis.	FE RE	DE
	10	E	Tres catorce die...		
	11	A	Que es una aproximación de pi.	OP	RC
	12	E	Que es una aproximación de pi. Entonces, ¿podemos determinar..., y eso, esa aproximación es exacta? ¿Ese número seguro que es tres con catorce dieciséis, sí?	FE	PP
	13	A	Más o menos.		VA
	14	E	¿Más o menos?		
	15	A	Sí.		
	16	E	¿Por qué más o menos?		
	17	A	Porque... tendré otra vez que... no tengo..., si utilizo la regla o... lo he hecho a ojo, aproximando.	FE	EX
	18	E	Pero si hubieses utilizado la regla, ¿qué pasaba?	FE	PP
	19	A	También seguiría siendo una aproximación.	OP	VA
	20	E	¿Por qué?		
14	01	A	Porque la regla tampoco es exacta.	FE	EX
	02	E	Bueno. Entonces este... ¿Y pi se podría tener exactamente?	FE	PP
	03	A	Sí.		VA
	04	E	¿Sí? ¿Seguro?		
	05	A	Sí.		
	06	E	Justo la marca que corresponde al punto.		
	07	A	Sí.		

Anexo 5.3: Fragmento de entrevista. Guión Nº 3.

Sujeto Nº18; 18; L. Matemática; E-3; 19/05/99; 09:05-09:58.

Mi-un.	Nº frase		Transcripción de frases literales	Cri.	Pro Co
			Parte 2: Propiedad arquimediana.		
49	01	E	Bueno, bueno. Ahora te hago yo otra pregunta. Vamos a suponer que yo tomo este... tomo sobre la unidad segmentos. La parto a la unidad en diez segmentos de manera que cada uno me queda la décima parte de la unidad, ¿sí?		
	02	A	[Asiente]		
	03	E	Bueno. Hay una manera de hacerlo, lo que pasa es que tenemos poquito tiempo. Una forma de hacerlo es tomar [cuenta el procedimiento de división de un segmento en n partes iguales, con n=10]		
	04		Pero vamos a hacerlo más rápido, y vamos a hacerlo a ojo.		
	05	A	[Ríe]		
	06	E	Ésa es la mitad, más o menos [divide el segmento unidad en diez partes]..		
50	01		Bueno, entonces tomo la décima parte de este segmento, más o menos.		
	02	A	Sí.		
	03	E	Lo repito: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez. Y llego a la unidad. Lo sigo repitiendo y llego a raíz de dos, ¿no? ¿Sí? No voy a llegar exactamente a raíz de dos, me voy a pasar.		
	04	A	Sí.		
	05	E	Voy a estar acá en uno con uno, uno con dos, uno con tres, uno con cuatro, uno con cinco. Me pasé.		
	06	A	Sí.		
51	01	E	Bueno. La cuestión que con uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, trece, catorce, con quince saltos, con quince pasos		
	02	A	Sí.		
	03	E	Yo he alcanzado y he sobrepasado raíz de dos.		
	04	A	[Asiente]		
	05	E	¿Qué pasa si yo tomo, en lugar de un segmento igual a una décima de la unidad, tomo un segmento más pequeño: una diezmilésima? Uno partido por diez mil [escribe]. Ésa es la longitud del segmento que yo tomo.	FE	PP
	06	A	Sí.		
	07	E	Es la longitud del paso que voy a dar. ¿Alcanzo raíz de dos? ¿Qué te parece?	FE OR	PP
	08	A	Que sí. O sea, el mismo proceso...	fe	VA
	09	E	De repetirlo.		
	10	A	Eh... sí. En un número finito de pasos se puede alcanzar.	OR	VA
	11	E	¿En un número finito?	OR	PP
	12	A	¿A ver? Mmmm. Sí.		
	13	E	¿Sí?		
	14	A	Sería cuestión de escoger..., sí, de repetirlo ciento cincuenta mil veces.	OP	PL

52	01	E	¿Ciento cincuenta mil veces?	OP	PP
	02	A	O quizá un poquito menos, porque ya me estoy pasando. Con ciento cincuenta mil veces lo sobrepasamos.	OP	VA
	03	E	¿Ah, sí?		
	04	A	¿A ver? Sí, sí..., o no, no. Eh..., no, quince mil.	OP	VA
	05	E	Con quince mil.		
	06	A	Sí.		
	07	E	Bien. Con quince mil pasos lo sobrepaso a raíz de dos. Bueno pero ahora yo quiero tomar un número más pequeño, eh... uno partido por diez elevado a cincuenta.		
	08	A	[Sonríe]		
	09	E	¿Qué hago con eso?		PP
	10	A	¿Si puedo alcanzar raíz de dos?	OR	PA
	11	E	Sí, si doy pasos tan extremadamente pequeños, ¿no?	OR	
	12	A	También.	OR	VA
	13	E	¿Alcanzo?		
	14	A	Sí.		
	15	E	¿Por qué lo alcanzo? ¿Cómo?		
	16	A	Porque en... Sí, si damos..., o sea. Tomo el uno con cincuenta, es mayor que raíz de dos, que es el uno con cuatro y pico...	OP OR	EX
53	01		Sí..., para alcanzar el uno con cinco lo único que necesito es repetir ese proceso de dar pasos diez a la cincuenta veces.	FE	
	02		Por tanto, con que de este número de pasos, uno con cinco por diez elevado a cincuenta, es suficiente para alcanzar raíz de dos.	FE OP OR	RC
	03	E	Bueno. Entonces a vos se te ocurre que yo podré encontrar un número... un número tan pequeño, tan pequeño, que aunque yo de, y de pasos, y de pasos no pueda alcanzar raíz de dos? ¿Es posible que exista un número muy pequeño que dando pasos no me permita alcanzar raíz de dos?	OR FE	PP
	04	A	Vamos a verlo.		
54	01		Eh... Quizá si cogemos el número diez elevado a la menos *n*, con *n* tendiendo a infinito, sí, si no, no.	OP	RA
	02		Es decir, hay que saltar al límite de este número en infinito.	OR	VA
	03		Si no..., porque por muy pequeño que sea éste número, o por... muchos pasos que hay que dar, si ese número no tiende a infinito, o sea, no lo hacemos tender a infinito, el número de pasos es finito, entonces se puede alcanzar.	OR FE	EX
	04	E	Entonces, vos lo que me has dicho es..., a ver si te entendí. Si no hacemos tender el número al infinito, entonces, se puede alcanzar. Ahora, si este número tiende al infinito...		
	05	A	[Asiente] Nos quedamos sin intervalo.	OR	RC
	06	E	Entonces, no lo alcanzamos.		
	07	A	Claro, porque nos quedamos sin intervalo.	OR	RC
55	01	E	Estamos, sí, sí, sí. Entonces puede ser que sea posible hallar..., o sea, un valor que sea tan, tan pequeño que no me permita alcanzar esa marca.		
	02	A	Lo que pasa es que a lo mejor no es un valor definido, como por ejemplo puede ser éste, diez elevado a menos cincuenta, sino diez elevado a menos *n* haciendo tender *n* a infinito, que eso ya... ya digo...	OR OP	VA
	03	E	¿Lo podría expresar de alguna manera así...? Bueno, has hecho esto [señala 10^{-n}] ¿Ésa sería la expresión del número?	RE	PP
	04	A	Sí.		
	05	E	Diez elevado a menos *n*.		
	06	A	Sí. O mejor dic..., no. Sería el límite cuando *n* tiende a infinito. Ese número [lo recuadra]	RE	DE
	07	E	¿Ese número?		

	08	A	Yo pienso que sí [sonríe]		
	09	E	Bien, bien. Perfecto.		
	10	A	Sí.		
	11	E	Bueno, bueno. Entonces vamos a terminar la entrevista.		

ANEXO 6

Justificaciones de la exactitud / inexactitud de la representación

La valoración de la exactitud de la representación en la recta de los distintos números propuestos se ha solicitado en los tres guiones de entrevista.

En este anexo recopilamos las respuestas de los sujetos y las organizamos mediante los siguientes grupos:

1) Alusión a la notación decimal: Incluye las frases que aluden a las características de la parte decimal del número (tabla A.6.1).
2) Precisión de los instrumentos de representación: Incluye las frases que hacen referencia a errores causados por los materiales usados (tabla A.6.2).
3) Procedimiento de representación: Incluye las frases que apelan al procedimiento usado para representar el número y las que hacen referencia a la presencia o ausencia de un método o procedimiento geométrico (tabla A.6.3).
4) ‘Naturaleza’ del punto geométrico: Incluye frases en las que se indica que el punto marcado (con lápiz, bolígrafo o compás) no constituye un punto geométrico ideal (tabla A.6.4).
5) Sistema de referencia: Incluye las frases en las que se menciona la dependencia de la marca realizada del origen y/o unidad utilizados (tabla A.6.5).
6) Referencia a una aproximación: Incluye las frases en las que se destaca que se ha obtenido una aproximación del número pedido (tabla A.6.6).
7) Otras justificaciones: Incluye las respuestas que no hemos incluido en ninguno de los grupos anteriores. En la tabla A.6.7 incluimos estas frases indicando (cuando es posible) los grupos (anteriores) con los que guardan cierta relación.

Nº rta.	**Grupo 1: Alusión a la notación decimal**
1	(S. Nº 1, 1511/12-1602, rep. √2 mediante regla graduada) “Tomando uno coma cuatro, pues coges uno coma cuatro. Como tiene más decimales, o sea, te acercas al uno coma cinco, pero claro, no da exacto, no es el punto justo. Si son números enteros, sí.”
2	(S.Nº 2, 2502, representación de 1’4142...) “Pero es que como tiene infinitas cifras pues, y la recta es una, pues... ya en cuanto hagas otros trazos ya...”.
3	(S.Nº 2, 2504, representación de 1’4142...) “No, porque no es un número periódico”.
4	(S.Nº 4, 2103, representación de 0’12345...) “Si tienes infinitas cifras no puedes hallar la marca” 2105: “No, no es exacto”.
5	(S.Nº 4, 2207, rep. 0’12345...) “Es que cuando tiene un número infinito [de decimales], podría dar un intervalo entre éste y éste, y el intervalo lo podría concretar entre éste y éste, y otra vez entre éste y éste, pero exactamente no porque es infinito”.
6	(S. Nº5, 1701, rep. √2 mediante regla graduada) No. “Porque tiene muchos decimales, y esto sólo va de mm en mm.”
7	(S.Nº 8, 1004, rep. de 0’12345...) “Si es un número que tiene infinitas cifras decimales, nosotros exacta, exactamente no lo vamos a poder representar”.
8	(S.Nº8, 1008, rep.0’12345...) “Si es un número que tiene infinitas cifras decimales, jamás podríamos alcanzar el punto exacto, ya que tiene infinitas. Por mucho que estemos aquí.”
9	(S.Nº 8, 1802, rep. 1’4142...) “Nos aproximamos, pero nunca vamos a obtener el punto exacto. Nunca se va a poder representar si tiene infinitos números decimales.”
10	(S. Nº 13, 2803, rep. π y $\sqrt[3]{2}$ usando regla graduada) Poco exactas. “Pues, pi tiene infinitas cifras decimales y el raíz cúbica de dos también.”
11	(S.Nº 17, 1402, rep. 0’12345... con regla graduada) “No. Pasa lo mismo que para raíz de dos, que no... La cola decimal no tiene por qué corresponderse con el desplazamiento que he hecho de la marca.”
12	(S. Nº 19, 5002/04, rep. $\sqrt[3]{2}$ y √2 o un número irracional mediante cualquier método) “Es que lo que yo pienso es que un número real tiene una expresión decimal, ¿no? Y entonces, si yo pongo una unidad de medida, entonces hay algunos números que es imposible que los llegue a aproximar porque necesitaría coger infinitas fracciones de esa unidad de medida, y entonces representar ese número resultaría imposible.”

Tabla A.6.1: Frases incluidas en ‘Alusión a la notación decimal’

Nº rta.	**Grupo 2: Precisión de los instrumentos de representación.**
1	(S. Nº 3, 06190701, rep. 1 al azar) “Es aproximadamente 1. Porque si, por ejemplo, cogiésemos otro bolígrafo más fino, podríamos dividir el trozo donde hemos cogido 1 en 2, 3, ... ya dependiendo de...”
2	(S. Nº 5, 2115/17, ¿es posible obtener una representación exacta en la recta?) “Yo creo que no. Porque siempre los materiales que utilizamos tienen un margen de error.”
3	(S. Nº 17, 2005/06, rep. 1/3 mediante Tales) “El único margen de error que puede tener es el del compás, de los medios que utilicemos. Pero si nos aseguraran que el error es cero, sí, debería ser un tercio justo, debería ser la marca.”
4	(S. Nº 9, 1906, rep. $\sqrt[3]{2}$ usando regla graduada) No. “Porque tiene un margen de... de un mm de error, porque con la regla y el boli no son exactos.”
5	(S. Nº 9, 2004, rep. 2 usando regla graduada) “Tampoco. Bueno, es un poco más exacto que éste ($\sqrt[3]{2}$ usando regla graduada), porque en éste yo no tenía raya, y tenía que aproximar. Pero también tiene un margen de error.”
6	(S. Nº 11, 02, rep. 8’25 con regla graduada) No, porque se ha medido con la regla y eso no es exacto. Tiene un error de centésimas.
7	(S. Nº15, 0505, rep. de 5/4 con regla graduada) “Porque tiene... esto tiene errores de medida. La regla sería... tendería hasta... apreciaría hasta los mm, pero no, no sería del todo exacto.”
8	(S. Nº 17, 1001, rep. de $\sqrt{2}$ con regla graduada) “No lo creo porque, entre otras cosas, con los aparatos que tengo o que yo soy capaz de manejar, porque con esto (señalando el compás), según me enseñaron, sale más exacto..”
9	(S. Nº 11, 1402/03, rep. $\sqrt{2}$ t. Pitágoras) “Hombre, exactamente no, porque el compás siempre falla, y volvemos a lo de antes que era un poco complejo. Pero vamos, sería el punto medio de todos los que consideramos, sería raíz de dos.”
10	(S. Nº 9, 2111, rep. $\sqrt{2}$ usando t. Pitágoras) “Quizá más [exacto que $\sqrt[3]{2}$ usando regla graduada], claro que trazar la perpendicular y todo, sabemos que acumula errores.”

Tabla A.6.2: Frases incluidas en ‘Precisión de los instrumentos de representación’

Nº Rta.	Grupo 3: Procedimiento de representación
1	(S. Nº 12, 2802, rep. geom. de √2) "¿Si esto es exactamente raíz de dos? Pues sí, pienso que sí. Si lo trasladamos, esto es raíz de dos."
2	(S.Nº15, 2114, rep. √2 mediante t. de Pitágoras) Sí, "Y aquí por el teorema de Pitágoras."
3	(S. Nº 17, 2413, rep. √2 mediante t. Pitágoras) "Tiene que serlo, con este método del cuadrado unidad, de longitud unidad, tiene que salirte raíz de dos."
4	(S. Nº 18, 4810, rep. √2 med. T. Pitágoras) "Sí porque...[...] Si en realidad lo que estamos haciendo es tomar esta hipotenusa como el radio de una circunferencia y trazar la circunferencia. Entonces, si la hipotenusa es raíz de dos...".
5	(S. Nº 20, 0407/08/09, rep. √2 t. Pitágoras) "Sí, porque... bueno, según el teorema de Pitágoras, este segmento es la longitud de éste al cuadrado más la longitud de éste al cuadrado, la raíz de eso. Y como esto al cuadrado es uno, y esto también, sería raíz de dos. Y esto, al trasladar la distancia con el compás se mantiene."
6	(S. Nº 20, 2004y 2008, rep. √2 t. Pitágoras) "El teorema de Pitágoras te garantiza que la longitud del... de ese cuadrado, la diagonal de ese cuadrado, va a medir la distancia esa, raíz de dos. Entonces, al trasladar la distancia con el compás, el compás conserva la distancia."
7	(S.Nº 2, 1907, representación mediante Tales de 1/3) Sí, "porque has dividido el segmento en tres partes, tiene que ser un tercio".
8	(S.Nº 15, 2112, rep. 1/3 mediante Tales) Sí, "porque aquí, por el teorema de... de Tales que te da triángulos que son... que son proporcionales, ¿no?"
9	(S. Nº 17, 2415, rep. 1/3 mediante t. Tales) "Y aquí igual. Mediante paralelas y... la división en tres partes de la unidad, pues, cogiendo la primera tiene que salir un tercio."
10	(S. Nº 20, 1510, 1601/02/03, rep. de 1/3 mediante t. Tales) "Lo hemos hecho uniendo tres segmentos como ése. Entonces, como la proporción tiene que ser la misma, el primer segmento tiene que tener una longitud un tercio de la longitud de éste que es la unidad. Y un tercio de la unidad sería un tercio. Así que sí sería el punto... el punto del problema."
11	(S. Nº 13, 2204, rep. $\sqrt[3]{2}$ usando regla graduada) Sería muy inexacto. "Si hubiese algún método, lo mismo hay, geométrico o lo que sea para... para poder conseguirlo, pues, seguro que sí sería exactamente."
12	(S. Nº 17, 0508, rep. 5/4 usando regla graduada) "Si está bien hecho [...] las divisiones de la recta de los distintos puntos y he tomado bien, un cuarto del intervalo de uno y dos, debería."
13	(S.Nº15, 0602, rep. 5/4 usando la mediatriz) Sí, "Tendría la mitad, y ahora, utilizo otra vez la mediatriz, te daría otra vez la mitad."

Tabla A.6.3: Frases incluidas en 'Procedimiento de representación'

Nº Rta.	Grupo 4: Naturaleza del punto geométrico
1	(S.Nº 6, 1503, repr. Geométrica para √2 y 1/3) “Lo que pasa es que por ejemplo si... pensamos que haces intervalos, otra vez, aquí dentro (señalando la marca), llegarías también a poner en la recta un intervalo que sería... mayores que la marca, ¿no?, que se ha puesto así. 1601 “Es que el punto de supone que es tan pequeñito...” 1604 Con esa marca “abarcarías un intervalo”.
2	(S.Nº 8, 0801, rep. 1’25) No es exacto, “porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, coger un número exactamente, porque dentro de..., si haces una rayita más gorda, dentro de... de ésta misma rayita hay un montón de números”.
3	(S. Nº 11, 0704/06, rep. 1 determinando con compás el punto medio del segmento [0,2]) “Yo he marcado aquí el punto 1, pero en realidad, no sé, los puntos no tienen dimensión, o sea que... estaría allí el punto pero... Porque aquí haciendo esa marca, pues, yo englobo muchísimos puntos.”
4	(S. Nº 11, 0714/16, rep. 1 determinando con compás el punto medio del segmento [0,2]) “Porque esto (señala la marca) sigue siendo un segmento pequeñito y cada cosa que pintas va a ser un segmento más pequeñito, pero va a seguir siendo un segmento. Entonces no puedo marcar exactamente el punto.”
5	(S.Nº12, 1005, rep. de 5/4 ‘al azar’) No, “porque... hay muchos [puntos], no infinitos, pero hay muchos, y... no sé, creo que es un poco impreciso.”
6	(S. Nº 14, 1101-1201/02/04, rep. 2√2 met. Geométrico) “Bueno, creo que sí. [...] Hombre, claro que siempre está el grosor de..., es que el número no tiene grosor, entonces no... siempre cerca de éste habrá otro, y la mina no puede apreciarlo. Eso es cuestión de abstracción mental.”
7	S. Nº 16, 2009-2104, rep. √2 a ojo) No. ”Porque yo sé que en esa línea hay infinitos valores, que estará comprendido, o... infinitos valores está como ser en el centro, es decir, nos podemos aproximar más al número raíz de dos.” “Pues... no podríamos marcar exactamente raíz de dos, podemos marcar una aproximación a raíz de dos.”
8	(S. Nº 16, 2207/08, rep. √2 med. T. Pitágoras) “Yo creo que no, porque siempre... lo que estábamos diciendo antes que... el bolígrafo, el grosor es... siempre al escribir la línea, aunque nos quedemos en un punto, pues ese punto siempre no... tiene que... Los hombres no podemos perfeccionar el... punto exacto, que no lo podemos distinguir así con la vista.”

Tabla A.6.4: Frases incluidas en ‘Naturaleza del punto geométrico’

Nº Rta	Grupo 5: Sistema de referencia
1	(S. Nº 2, 1315, representación de 1’25) “Pues, sabiendo que esto vale uno..., yo creo que sí”.
2	(S. Nº 10, 0401, 0403, rep. 8,3 con regla graduada) “No, porque al ser el vector unitario uno, lo lógico sería medir de... unidades de uno en uno, y las décimas no serían exactas. Tendríamos..., para tomar las décimas exactas tendríamos que hacer un vector unitario más pequeño y ya nos aseguraríamos que las décimas son exactas.”
3	(S. Nº 17, 1603, rep. de 3 usando regla graduada) “Sí, yo..., desde mi punto de vista, con este sistema de referencia que yo he marcado poniendo aquí y con la escala de ir poniendo cada unidad, cada número entero a dos cm y medio del cero, pues sí.”

Tabla A.6.5: Frases incluidas en ‘Sistema de referencia’

Nº Rta.	Grupo 6: Referencia a una aproximación
1	(S.Nº15, 1209, rep. de π ‘a ojo’) Es aproximada, “porque he representado tres catorce dieciséis, que es una aproximación de π.”
2	(S.Nº 15, 17, 171712/13, rep. de 0’3333... mediante subdivisión sucesiva de la unidad) No es exacto, “porque... si lo que estás haciendo es aproximarte. Cada vez obtienes intervalos más, más pequeños, y la aproximación es cada vez mayor. Pero tenerlo así, exactamente, no se puede.”
3	(S. Nº 15, 2110, rep. de 0’3333... y 1’4142... mediante subdivisiones de la unidad) “Aquí sólo puedes obtener aproximaciones, cada vez más aproximado, cada vez más, pero sólo eso.”
4	(S. Nº 17, 2306/07, rep. 1’4142... mediante subdivisión de intervalos) “Es una medida aproximativa, no es exacto. Aquí más o menos tiene que estar raíz de dos, un poco más, poco menos. Exacto, exacto, pues no.”
5	(S. Nº 19, 4901, rep. $\sqrt[3]{2}$ mediante subdivisión de intervalo en partes iguales) No. “En cambio aquí lo único que he hecho es calcular una aproximación con la calculadora y colocarlo más o menos según la aproximación que tenía de las décimas de esa unidad.”

Tabla A.6.6: Frases incluidas en ‘Referencia a una aproximación’

Grupo 7: Otras justificaciones	Posibles gru-pos
(S.Nº12, 2701, rep. Geométrica de $\sqrt{2}$) “Es que... dentro de esa marca, si eso... fuera justamente raíz de dos, ahí dentro tienen que estar todos estos números” (señalando la notación decimal).	-
(S. Nº 14, 08-09, rep. geom. $\sqrt{2}$) “Despreciando errores de [...] el grosor de la mina y todo esto, pues debería representar raíz de dos. Pero bueno, exacto, exacto... Es una serie infinita de números, [...] nunca podremos determinar exactamente.”	2 1
“Pero claro, tomando así esto, tomando la hipotenusa y proyectándola, se supone que es exacto. Pero claro, nunca podremos... Matemáticamente está comprobado que es así, pero... físicamente no podemos determinar: eso es raíz de dos.”	3 2
(S. Nº 16, 2502, rep. 0’41 con regla graduada) “Yo creo que no, porque éste cero cuarenta y uno sería cero cero cero y éste cero cuarenta y uno puede ser cero cuarenta y uno cinco, seis... que todavía puede continuar.”	6
(S. Nº 20, 0908, rep. 0’101001000... mediante regla graduada) “Y lo podría ir acotando todo lo que yo quisiera, pero representarlo exactamente, a menos que hiciera infinitos intervalos, creo que no..., que no es posible.”	1 6

Tabla A.6.7: Frases incluidas en ‘Otras justificaciones’

ANEXO 7

Consulta a expertos

A continuación describimos la consulta a expertos realizada para corroborar la asignación de criterios de valoración a cada una de las frases utilizadas en el ítem del cuestionario 'Valoración de la representación de un número en la recta'.

En el cuadro A.7.1 incluimos el texto presentado a los expertos.

Consulta a expertos

Durante una serie de entrevistas exploratorias individuales, se ha solicitado a varios alumnos que determinen el punto de la recta correspondiente a un número dado.

Los alumnos tenían a su disposición diferentes materiales: calculadora, regla graduada, escuadra graduada y compás, y se les había indicado previamente que podían usarlos si lo consideraban necesario.

Después de que el número es representado, la entrevistadora pregunta si la representación obtenida es exacta. En la página 2 hemos transcrito (en la segunda columna de la tabla) las respuestas de los alumnos a esta última pregunta.

Se han elaborado cuatro criterios con el objeto de clasificar las respuestas de los alumnos.

SU TAREA:

Completar la columna 3 de la tabla, emparejando el número de criterio (1, 2, 3 ó 4) con cada frase.

Si considera que alguna frase se corresponde con más de un criterio, utilice por favor la cuarta columna, teniendo en cuenta que se trata de criterios elegidos en segundo lugar.

Si considera que alguna/s frase/s no puede/n incluirse en ninguno de los criterios mencionados, señale con una cruz en la casilla correspondiente y explique, debajo del título *Observaciones*, lo que piensa de esa frase (y si lo considera pertinente, describa un nuevo criterio en el cual la incluiría).

Observaciones

Cuadro A.7.1

Criterios

1. Infinitas cifras decimales (IC): incluye las frases que hacen referencia a que el número tiene infinitas cifras decimales.

2. Precisión de los instrumentos de representación (PI): incluye las frases que hacen referencia a errores causados por los materiales usados.

3. Procedimiento de representación (PR): incluye las frases que apelan el procedimiento geométrico usado para representar el número, y las que hacen referencia a la presencia o ausencia de un método o procedimiento geométrico.

4. 'Naturaleza' del punto geométrico (NP): incluye frases en las que se indica que el punto marcado (con lápiz, bolígrafo o compás) no constituye un punto geométrico 'ideal'.

Tabla

	Frase	Criterio Número	
A	*"No es exacto, porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, coger un número exactamente, porque si haces una rayita más gorda, dentro de esa misma rayita hay un montón de números."*		
B	*"Nos aproximamos, pero nunca vamos a obtener el punto exacto. Nunca se va a poder representar si tiene infinitos números decimales."*		
C	*"Sería muy inexacto. Si hubiese un método geométrico para poder conseguirlo, seguro que sí sería exacto".*		
D	*"Sí. Tendría la mitad, y ahora, utilizo otra vez la mediatriz, y te daría otra vez la mitad."*		
E	*"No, porque la marca sigue siendo un segmento pequeñito y cada cosa que pintas va a ser un segmento más pequeñito, pero va a seguir siendo un segmento. Entonces no puedo marcar exactamente el punto."*		
F	*"No, no es exacto. Si tienes infinitas cifras no puedes hallar la marca."*		
G	*"Yo creo que no, porque siempre los materiales que utilizamos tienen un margen de error."*		
H	*"Yo creo que no. Los hombres no podemos perfeccionar el punto exacto, no lo podemos distinguir así con la vista."*		
I	"*Sí, porque el teorema de Tales de da triángulos que son proporcionales".*		
J	*"Si es un número que tiene infinitas cifras decimales, jamás podríamos alcanzar el punto exacto, ya que tiene infinitas. Por mucho que estemos aquí."*		

Continuación cuadro A.7.1

Los expertos consultados fueron 7 y las respuestas obtenidas se resumen en la tabla A.7.1.

Frases	Criterios seleccionados en primer lugar				Criterios seleccionados en segundo lugar				Criterio esperado
	Crit. IC	Crit. PI	Crit. PR	Crit. NP	Crit. IC	Crit. PI	Crit. PR	Crit. NP	
A	1	4	-	3	1	-	1	1	NP
B	6	-	1	-	-	-	-	-	IC
C	-	-	6	1	-	-	-	-	PR
D	-	1	6	-	-	-	1	-	PR
E	-	-	-	7	-	-	1	-	NP
F	7	-	-	-	-	-	-	-	IC
G	-	7	-	-	-	-	-	-	PI
H	-	-	1	5	-	-	-	-	NP
I	-	-	5	1	-	-	-	-	PR
J	7	-	-	-	-	-	-	-	IC

Tabla A.7.1: Resultado de la consulta a expertos

Teniendo en cuenta la frecuencia obtenida en cada criterio esperado, observamos que el único 'desajuste' se produce en la frase A. Mientras que el criterio esperado es 'Naturaleza del punto geométrico', la frecuencia para ese criterio es 3, y el criterio 'Procedimiento de representación' obtiene una frecuencia mayor. Sin embargo, la suma de las frecuencias asignadas al criterio al criterio esperado (criterios asignado en 1º lugar más criterios asignados en 2º lugar) iguala a la frecuencia del criterio 'Procedimiento de representación'.

Podemos concluir a la luz de los resultados obtenidos que nuestra asignación de criterios de valoración a las frases escogidas para incluir en el cuestionario está razonablemente corroborada.

ANEXO 8

Tabla de Desempeño Global de los alumnos

La Tabla de Desempeño Global incluye información acerca de las respuestas proporcionadas por cada alumno a los ítems 1 y 2 del cuestionario. Esta información versa sobre los siguientes puntos:

- Código que identifica al alumno.
- Procedimientos utilizados para representar los números.
- Respuesta del alumno respecto de la exactitud de la representación obtenida (afirmación, negación, u otras).
- Términos o frases utilizadas por el alumno consideradas 'claves' en la valoración de la exactitud de la representación obtenida (inciso c) de los ítems 1 y 2).
- Existencia o ausencia de un conflicto explícitamente reconocido por el alumno en alguna de las tareas correspondientes a los incisos a, b y c de los ítems 1 y 2[1].
- Respuesta del alumno respecto de la posibilidad de dividir exactamente por la mitad el segmento obtenido (afirmación, negación u otras)
- Términos o frases considerados claves en la justificación proporcionada por el alumno en el inciso d) de los ítems 1 y 2.

Existencia o ausencia de un conflicto explícitamente reconocido por el alumno en la tarea correspondiente al inciso d) de los ítems 1 y 2.

Las columnas que constituyen la tabla siguen el orden de la descripción anterior para cada número que el alumno debe representar.

Código utilizado en las tablas de desempeño global de los alumnos

Columna 1 (Alumno): Se indica el código correspondiente a cada alumno. Se ha suprimido la última cifra del código debido a que se trata de la misma en todos los casos (el número '1').

Columnas 2 y 9 (Procedimiento de representación utilizado; ítems 1a y 2a): Se incluye el procedimiento utilizado por el alumno para representar el número dado. Los valores utilizados en esta columna están indicados en la tabla A.8.1.

[1] Consideramos la presencia de un conflicto explícitamente reconocido por el sujeto cuando éste reconoce que no sabe o no puede responder una pregunta determinada.

Procedimiento	Descripción		Código
Mediatriz	La marca se obtiene a partir del trazado de mediatrices.	La marca del número coincide con la mediatriz..	Mediatriz1
		La marca del número no coincide con la mediatriz.	Mediatriz2
Tales	Se aplica el teorema de Tales para dividir un segmento unidad. El número que figura entre paréntesis indica el número de partes en que se ha dividido un segmento unidad.	La marca correspondiente al número viene determinada por una de las paralelas trazadas.	Tales1 (Nº)
		La marca correspondiente al número no coincide con una de las paralelas, pues está en el interior de un segmento obtenido al trazar las paralelas.	Tales2 (Nº)
Pitágoras	La marca se obtiene como consecuencia de aplicar el teorema de Pitágoras.		Pitágoras
División unidad	Se divide la unidad en partes iguales (con regla graduada o compás) y se indica entre paréntesis el número de partes en que se ha dividido el segmento unidad.	La marca correspondiente al número coincide con una división de la unidad.	D.U.1 (Nº)
		La marca correspondiente al número está en el interior de uno de los segmentos obtenidos.	D.U.2 (Nº)
Segmentos	Se repite un segmento arbitrario cierto número de veces (que depende del número a representar) hasta determinar la unidad.		Segm arb n v.
Intervalos	Se utilizan intervalos encajados (al menos 2).		Int.
Regla graduada	Se utilizan las graduaciones de la regla para señalar el punto, y no se divide la unidad o no se tiene en cuenta la división de la unidad		Reg. Grad.
Combinación	Combinación de varios procedimientos	Madiatriz/Tales	(Combinación de códigos anteriores)
		Mediatriz/D.U.	
		Mediatriz/Regla graduada	
		Mediatriz/Tales/Interv. Encajados	
		D.U./Tales	
		D.U./Interv. Encajados	
Al azar	Se realiza sobre un segmento de recta (sin indicar origen ni unidad) una marca al azar.		Azar
Tanteo	La marca correspondiente al número se realiza a ojo, sobre un segmento que posee indicados origen y unidad.		Tanteo

Tabla A.8.1: Código correspondiente al procedimiento de representación utilizado

Columnas 3 y 10 (Valoración de la exactitud por el alumno; ítems 1c y 2c): incluye la respuesta del alumno (afirmación o negación) respecto de la exactitud de la representación obtenida. El código utilizado está indicado en la tabla A.8.2.

Valoración Exactitud	Código
Considera que es exacta. (Sí)	0
Considera que no es exacta (No)	1
Afirma que es exacta por una razón y no exacta o aproximada por otra (Sí y no)	2
No sabe	3
No contesta	4

Tabla A.8.2: Código utilizado para la valoración de la exactitud

Columnas 4 y 11 (Exactitud): Se incluyen palabras textuales de los alumnos consideradas claves en la valoración de la exactitud. Los términos o frases escogidas en esta columna no saturan la respuesta del sujeto en cada caso, sino que constituyen cuestiones que la investigadora considera relevantes de la respuesta del sujeto.

Columnas 5 y 12 (Conflicto declarado por el alumno, ítems 1 y 2): Los valores Sí/No corresponden a si existe o no un conflicto reconocido por el alumno. Se considera que el alumno reconoce el conflicto cuando manifiesta claramente que no sabe o no puede realizar lo pedido.

Columnas 6 y 13 (Respuesta del alumno respecto de la posibilidad de dividir exactamente por la mitad un segmento determinado): Incluye la respuesta del alumno (afirmación o negación) respecto de la posibilidad de dividir exactamente por la mitad un segmento de longitud igual a *r* unidades, siendo *r* el número real que ha representado en el inciso a de la misma pregunta. El código utilizado está descrito en la tabla A.8.3.

Respuestas de los alumnos	**Etiqueta**
Sí	0
No	1
Sí y No	2
No sabe	3
No contesta	4

Tabla A.8.3: Código utilizado en la valoración de la posibilidad de dividir el segmento por su mitad

Columnas 7 y 14 (Términos utilizados por los alumnos): Incluye algunos términos o frases cortas usadas por cada alumno para justificar su respuesta y que son considerados claves en su respuesta.

Columnas 8 y 15 (Conflicto declarado por el alumno): los valores Sí/No corresponden a si existe o no un conflicto reconocido por el alumno. Se considera que el alumno reconoce el conflicto cuando manifiesta claramente que no sabe o no puede realizar lo pedido.

Suj.	5/8							0'33333...						
	Representación				División Mitad			Representación				División mitad		
C1	C2	3	C4	C5	6	C7	C8	C9		C11	12		C14	15
111	D.U.1 (8)	1	Decim., med. peq	No	1	No justifica	No	D.U.1 (3)	1	Cifras, N° no exac	No	1	Mides, div. N°dec.	No
112	D.U.1 (8)	2	Err med., mediat.	No	0	Mediatriz	No	D.U.1 (3)	2	A ojo	No	0	mediatriz	No
113	D.U.1(8) Tales1(8)	1	No sale n°exa, red.	No	0	Espacio reducido	No	D.U. (3)	0	div. partes ig.	No	0	procedimiento	No
114	D.[0'5,1]2 (5)	1	Regla, medir	No	0	5:8 = 0'625: 2	No	D.U.2 (5)	1	N° periód.	No	1	periódico	No
115	D.U.2 (10)	1	1° decim., a ojo	No	0	0'625:2 =0'312	No	D.U.2 (10)	2	div. exacta, periód	No	0	0'16 mitad de 0'3	No
711	Tales1 (8)	2	Err humano e ins	No	0	mediatriz	No	D.U.1 (9)	2	Err hum, err periód	No	2	div. por 2, decimal	No
712	Tales1 (8)	1	Err med	No	0	mediariz	No	Tales1 (9)	1	Err med	No	0	Error medida	No
713	Tales1 (8)	1	Err	No	0	Es exacto	No	Tales1 (9)	1	err	No	0	Inf cif decim	No
714	Tales1 (8)	1	Entre 0y1	No	0	No justifica	No	D.U.1 (3)	1	err	No	0	Inf cif decim	No
715	D.U.1 (8)	1	Sens.escuadra	No	0	mediatriz	No	No represen.	1	Inf. decim	No	1	No enc seg 0'3 ex.	No
211	Mediat./D.U.(8)	0	Mediatriz	No	0	mediatriz	No	Tales1 (42)	1	Decim., div.	No	0	mediatriz	No
212	D.U.1 (8)	0	Dist 0a5/8 ig 0a2'5/4	No	0	2'5/8; mediatriz	No	Segm arb. 3 v	0	1/3.2=2/3	No	0	0'5/3; mediatriz	No
213	Mediatriz1	2	Útiles, err.	No	0	mediatriz	No	Segm arb. 3 v	2	Quit Defe; 0'3=1/3	No	0	mediatriz	No
214	Mediatriz1	2	Teór., práctica	No	2	Bisect, marg. error	No	Tales1 (3)	2	Teór., práctica	No	2	Bisect, marg. error	No
215	Tales1(8)	2	div.ex.; marg err	No	0	mediatriz	No	D.U.2 (10) 2v.	1	N° no acaba nunca	No	1	No es n° que acabe	No
811	D.U.1 (8)	2	Aparatos ex.	No	0	Unid 5 partes, 5/2	No	D.U.1 (3)	2	Unidad, regla	No	0	1/3 se div. x 2, 1/6	No
812	Tales1 (8)	0	No decim	No	0	mediatriz	No	Tales1 (3)	0	Fracc, evitar decim	No	0	mediatriz	No
813	D.U.1 (8)	1	Decim., regla	No	2	Mido, div en dos	No	D.U.1 (3)	1	Prec inst.	No	2	1/6; fracci, med err	No
814	D.U.1 (8)	1	A ojo, marg. err.	No	0	Div; 10/16,5/16	No	Regla grad	1	N° infinito	No	1	Número infinito	Sí
815	D.U.1 (8)	1	No med, nada ex.	No	0	div. ocho partes	No	Regla grad/A ojo	1	Nada exacto	No	1	No justifica	No
311	D.U.1 (8)	1	Mét dibujo, reg comp	No	0	Mét gráf (Tales) o mid. Long.	No	Tales1 (3)	2	Mét exacto, marg err	No	0	Dividir segme (Tales)	No
312	Tales1 (8)	1	Inst materiales	No	2	Mediatriz, no exacta	No	Segm arb 3v		Inst; err humanos	No	2	Mediatriz, no exacta	No
313	Tales1 (8)	0	Entender 5/8	No	0	Procedim. (Tales)	No	Tales (3)	0	Ídem 1c	No	0	Misma for (Tales)	No
314	Mediatriz1	0	geométricamente	No	0	mediatriz	No	Segm. arb 3v	0	1/3 más preciso	No	0	Mediatrices	No
315	Med/Regla	1	Decimales; útiles	No	4	No justifica	No	Regla grad.	1	Decim; útiles, err	No	1	Nunca daría exacm. con tal pto.	No

Suj.	1'4142136...							5/8						
	Representación				División Mitad			Representación				División mitad		
C1	C2	3	C4	C5	6	C7	C8	C9		C11	12		C14	15
121	Regla grad	1	Muchos decimales	No	1	N° nototalm. defin	No	D.U.1 (8)	1	Cometen errores	No	2	Numéric, gráficam	No
122	Regla grad.	1	Medidas pequeñas	No	2	Deci, unid. Pequ.	No	Regla grad.	1	Número pequeño	No	2	Fracc a nº, div entre 2, med	No
123	D.U.2 (10)	1	∞ decimales	No	1	Inf en decim	No	D.U.2 (10) 2v	2	3 decimales	No	0	Decim no infinito	No
124	D.U.2 (10)	4	-	No	1	Redond, medi justa	No	D.U.1 (8)	0	Divisiones iguales	No	1	5 nº impar	No
125	Pitágoras	0	Método Pitágoras	No	1	Demasiados decim	No	D.U.1 (8)	0	Denom., numerad.	No	1	No hay nº entre 5/8	No
721	Tales2 (10)	3	No justifica	Sí	0	Div. segm en 10	No	Tales1 (8)	0	No justifica	No	0	Div 8 part. Cojo 4	No
722	Tales2 (10)	0	Método frecuente	No	0	div. en 10 partes	No	Tales1 (8)	0	No justifica	No	0	Cogien el pto 4/8	No
723	Pitágoras	1	Número irracional	No	1	Irrac, cif indef dec.	No	Tales1 (8)	0	Número racional	No	0	N° racional	No
724	Pitágoras	0	No justifica	No	0	Div, irrac, cif det	No	Tales1 (8)	0	Número racional	No	0	2'5/4	No
725	Med/Regla grad.	1	Es una aproximaci	No	0	mediatriz	No	Tales1 (8)	0	Número racional	No	0	mediatriz	No
221	Me/D.[1, 1'5]2 (5)	1	Muchos decimales	No	1	No puedo hall nº	No	Tales1 (8)	0	div. proporcionalm	No	0	mediatriz	No
222	Pitágoras	0	No justifica	No	1	N° de infinit cifras	No	Tales1 (8)	4	No justifica	No	0	Sabemos sus cifras	No
223	Pitágoras	0	Sistema, teóricam.	No	0	Mediatriz	No	Tales1 (8)	0	Teóricam., procedi	No	0	Mediatriz, técnica	No
224	Tales2 (10)	1	Método utilizado	No	1	No segm. exac	No	Tales1 (8)	2	Parte ig, gros. lápiz	No	0	mediatriz	No
225	Tales2 (10)	1	Dimens. más gdes.	No	1	Marg de error	No	Tales1 (8)	2	Marg err; pasos	No	0	mediatriz	No
821	Med/Tales2 (5)	1	Toda med. tien err	No	0	mediatriz	No	Tales1 (8)	1	Nunca med. exacta	No	0	Mismo proc. 1d	No
822	Med/Tales2 (5)	1	Toda med. tien err	No	0	Ut compás (med)	No	Tales1 (8)	0	No util. Inst, err	No	0	Lo mismo que 1d	No
823	Med/D.U.2 (5)	1	Reg, irrac, inf deci	No	1	Impos hallar el seg	No	D.U.1 (8)	0	Div en 8 y tomar 5	No	0	mediatriz	No
824	D.[1, 1'5]2 (5)	1	Med peq., regla	No	1	Irraciona, inf cifras	No	D.U.1 (8)	1	Reg, ning med. ex	No	0	Mitad es 10/40	No
825	Regla grad.	1	Aprox., no matem.	No	0	Mediatriz, distanc	No	Azar	1	Matemáticam no	No	0	Mediatriz, distanc	No
321	D.U.2 (10) 2v	1	próximo	No	0	mediatriz	No	/T/D.[0'6,0'7] (4)	2	Reg y c se movido	No	0	mediatrices	No
322	Pitágoras	2	Mente, papel	No	2	Rep gráf aprox	No	Regla grad.	1	Infinitos puntos	No	2	Igual que 1d	No
323	Regla grad.	1	Regla, mm, aprox.	No	2	(mediat), aproxim	No	Regla grad.	2	Err comp y reg	No	0	mediana	No
324	Regla grad.	1	Err inst., nº irracio	No	2	(mediat); inf. dec	No	D.U1 (8)	1	Inst. marg err	No	0	Procedim. Anál. 1d	No
325	Regla grad.	1	N° no exac, regla	No	1	No sé cuál es el n; tantos decim	No	Tales1 (8)	0	N° fraccionario	No	0	fracciones, uni div 16	No

Suj.	$\sqrt{5}$							0'33333...						
	Representación				División Mitad			Representación				División mitad		
1	C2	3	C4	C5	6	C7	8	C9		C11	12		C14	15
131	D.U.2 (2)	1	Punto aproximado	No	1	Distancia corta	No	D.U.2 (2) 2v.	1	Punto aproximado	No	1	Nº decim peró inf	No
132	Regla grad.	1	Raíz de 5 no da ex	No	4	No justifica	No	D.U.1 (10)	1	Nº no ex, sino dec.	No	4	No justifica	No
133	Pitágoras	1	No sé si está bien	Sí	1	No da nº exac, dec.	No	D.U.1 (3)	1	Ídem 1c	Sí	1	Igual que la otra	No
134	Regla grad.	1	Regla, aproximado	No	2	Aprox; Recta mejor graduada	No	Regla grad.	1	No soy capaz de marcar exact.el pto	Sí	2	Aprox., medida	No
135	D.U.2 (10)	1	Muc decim, herra	No	1	Infinitos decim	No	D.U.2 (10)	1	Ídem 1c	No	1	Decimal periódico	No
731	Pitágoras	0	He seguido los proce	No	1	No exacta, decim	No	Tales1 (3)	3	No estoy segura	Sí	1	Perióḋ purO, inf decim	No
732	Pitágoras	0	Utiliz proce. e inst.	No	1	Inf decimales	No	D.U.1 (3)	0	Proced específico	No	1	Nunca sería exacto	No
733	Pitágoras	0	Proc.para rep, raíz	No	1	Irracion., inf cifras	No	D.U.1 (3)	0	perió se repr exm.	No	1	Cifras infinitas	No
734	Pitágoras	0	No justifica	No	1	Unid., regla en cm	No	D.U.1 (3)	4	No justifica	No	1	No es nº exacto	No
735	Tales2 (10)	1	A ojo	No	1	No es un nº exacto	No	Tales2 (10) 2v.	1	perióḋ, inf, decim	No	1	No es un nº exacto	No
231	Med/Tales2 (5)	1	No todos sus dec.	No	2	Raíz, irrac., aprox.	No	Tales2 (10) 2v.	1	Nº perióḋ puro, inf.	No	2	0'16; imprec; perió	No
232	D.U.2 (10)	1	No ex y tend inf de	No	0	mediatriz	No	D.U.1 (3)	0	No rep. decim. Inf.	No	0	mediatriz	No
233	Pitágoras	2	Proc.exac, abs prec	No	0	(mediatriz)	No	Segm. arb. 3v.	2	Ídem 1c	No	0	Mismo razon	No
234	Pitágoras	1	Nunca es precisa	No	1	Inf deci, err mayor	No	Tales1 (3)	1	Nº inexistente	No	1	Inf dec., gros lápiz	No
235	Tales2 (4)	1	Inf nºs decim	No	0	mediatriz	No	Regla grad.	1	Depende de las unid	No	0	Mismo que 1d	No
831	Regla grad.	1	Marg error	No	0	Tales	No	Regla grad.	1	Ídem 1c	No	0	Tales	No
832	Tales2 (4)	1	Err prec. Inst	No	2	Error, dividir unidad	No	Tales1 (3)	1	Mín err, inst 1mm	No	0	Mismo método (Tales)	No
833	D.U.2 (2) 3v.	1	Medir o marcar	No	1	Pto no marcado exacm	No	Regla grad.	1	He rep el pto. 0'3	No	1	Pto no es exacto	No
834	Regla grad.	1	Despre. décimas	No	2	Med. no ex; bisectr	No	Azar	0	Nuestro criterio	No	0	bisectriz	No
835	Regla grad.	1	Segm no graduado	No	0	Medimos, $\sqrt{(2'5)}$	No	Tanteo	1	Segm no graduado	No	1	Segm demasi pequ	No
331	D.U.2 810)	1	Hecho a mano	No	2	Calcul., error, dec.	No	D.U.2 (10)	1	Hecho a mano	No	1	Nunca medir 0'3...	No
333	Pitágoras	2	Proced., err inst.	No	0	(desc mediatriz)	No	Segm. arb. 3v.	0	(describe el proc)	No	0	Mét. constructivo	No
334	Regla grad	1	Gran nº de decim	No	4	Mi rep de $\sqrt{5}$ no ex	No	Tanteo	1	Ídem 1c	No	4	Mismo 1º ejerc.	No
335	Regla grad	1	He despreciado dec.	No	0	$\sqrt{5}/2$; 30'18 mm	No	Regla grad.	1	Decim, aprox. buena	No	0	Div por dos obt. 0'166	No

Suj.	1'4142136...							√5						
	Representación				División Mitad			Representación				División mitad		
	C2	3	C4	C5	6	C7	C8	C9		C11	12		C14	15
141	D[1, 1'5]2 (5)	1	Sin calcular nada	No	0	Divis por 2, lo div.	No	Regla grad.	1	A ojo	No	0	Todo nº se puede div	No
142	Regla grad.	1	Lín. más "ampliada"	No	0	Papel milimetrado	No	Regla grad.	1	Otro proced más ex.	No	0	No sé exacta. cómo	Sí
143	D.U.2 (10)	1	Midien. poco a poco	No	1	Siempre sobraría o falt. poco	No	Pitágoras	1	Compás, medida	No	1	Muchos decimales	No
144	D.U.2 (10)	1	Decim., div. compleja	No	0	Calculad, regla, bis	No	D.U.2 (10)	1	Div más compleja	No	0	bisectriz	No
145	D.U.2 (10)	1	Nº no ex., div. milim	No	0	mediatriz	No	D.U.2 (10)	1	Div muy pequeña	No	0	mediatriz	No
741	Tales2 (10)	1	Cent. y milés.	No	1	Apreciación, no nº ver	No	Tales2 (3) (10)	1	Ídem1c, gros. lápiz	No	1	No aprecias el nº exac	No
742	Med/Tales2 (5)	1	Nº irrac, inf. decim	No	1	1'4... no es nº exac	No	Tales2 (10)	1	Interv más aprox	No	1	No es nº exacto	No
743	Med/Tales/Int	1	Int inf, irracionales	No	1	Jamás saldrá exact	No	D.U.2(10)/Int.	1	Nº irrac. nunca ex.	No	1	Nunca saldrá exacto	No
744	D.U.2 (10)	1	Inf dec., err material	No	1	Nunca acab; Nº irr	No	D.U.2 (10)	1	irrac, err hum y mat.	No	1	irr, nunca term dec	No
745	Pitágoras	0	Irrac; inf cif; √2	No	2	Puede exp, no reali	No	Pitágoras	4	a^2= 4+1=5	No	2	Puede exp, no realiz.	No
241	D.U.2 (10)	1	Otra forma más prec	No	0	Mediatriz[1,1'41]	No	D.U.2 (10)	1	Otra forma más prec	No	0	Mediatriz[2,2'23]	No
242	Tales2 (10)	1	Ojo hu. no ex. en med	No	0	No sé	Sí	Pitág. y Tales	1	A ojo	No	0	No sé	Sí
243	Tales2 (10)	1	Muchos decim	No	2	Decim., mediatriz	No	Pitágoras	1	Impos "exacta",	No	2	No poder rep; media	No
244	Regla grad.	1	Margen error	No	0	Longit, mediatriz	No	Pitágoras	1	Margen error	No	0	mediatriz	No
245	Med/Tales2 (5)	1	Decim, med. aprox.	No	2	Mediat, más decim	No	Tales2 (10)	1	Med aprox	No	2	Mediat; no ser exact	No
841	D.U.2 (2) y (5)	0	No justifica	No	0	Mediría regla	No	DU(2)/Tal2 (5)	1	Medir a ojo	No	0	Misma forma	No
842	Regla grad.	1	Nº no exacto	No	0	mediatriz	No	Regla grad.	1	He cogido un dec	No	0	mediatriz	No
843	Regla grad.	1	Error, total decim	No	1	No sabemos decim	No	Regla grad.	1	Demas. decim.	No	1	Demasiados decim	No
844	Med/Regla grad	1	Medir, inf div	No	0	Hallaríam. la fracc	No	Azar	0	No hay intervalos	No	0	mediatriz	No
845	D.U.(10)	1	Err hum o de med	No	0	Div entre 2, exacto	No	D.U. (10)	1	Err medida	No	0	Al div. sale exacto	No
341	Mediatriz2	1	Inf ptos, bolígr err	No	1	Pto no ex., inf dec	No	Mediatriz2	1	No justifica	No	0	Igual anterior (¿)	No
342	Pitágoras	3	Nº irra, inf dec, apro	No	1	Infinitos decim	No	Pitágoras	1	Irrac, inf dec, aprox	No	1	Nº irracional	No
343	Pitágoras	2	Inst err, proced exac	No	2	Err med, mediatriz	No	Pitágoras	2	Ídem1c	No	0	mediatriz	No
344	Pitágoras	1	Aprox., Impr ins	No	2	Aprox., (mediatriz)	No	Pitágoras	1	Aprox, err inst	No	0	Procedim anál 1d	No
345	Regla grad	1	No alcanza nº, acota	No	1	Acotar esa mitad	No	Regla grad	1	Idem 1c, intervalo	No	1	intervalo	No

Suj.	0'33333...							0'24						
	Representación				División Mitad			Representación				División mitad		
	C2	3	C4	C5	6	C7	C8	C9		C11	12		C14	15
151	Tales (3)	1	Hay imperf., perió	No	4	No just. (mediatr)	No	Mediatriz2	1	Diferen, 1 cma.	No	4	No just. (mediat)	No
152	Tales (3)	1	N° no exacto	No	1	Cifras infinitas	No	Tales1[0'1, 025]	1	A mano alzada	No	0	Div. seg por la mit	No
153	D.U.2 (10) y (3)	1	Número periódico	No	1	periódico	No	D.U.2 (10)	0	No justifica	No	0	No justifica	No
154	D.U.2 (10) y (3)	1	Número período	No	4	No justifica	No	D.U.2 (10)	0	No justifica	No	4	No justifica	No
155	D.U.1 (3)	1	Error al medir	No	2	período, hallar mit	No	Regla grad.	2	Unid más gdes, inex	No	0	0'24:2=0'12	No
751	D.U.2 (10)	0	Otro proc dará mism	No	1	Da resulta. mayor	No	D.U. 1(10) 2v	0	Otra forma tb da ex.	No	0	No inf cifras decim	No
752	Tales (3)	1	perió, siempre err	No	1	N° periódico	No	Tales1 (25)	2	N° ex; siempre error	No	0	Div entre 2, n° exa	No
753	Tales1 (3)	1	Regla, aproximado	No	1	periódico, infinito	No	Regla grad	1	Regla no aprecia	No	2	Gráf, numéricam.	No
754	Tales2 (10)/Regla	1	Medida más exac.	No	1	Exactamente no	No	D.U. (10) 2v	1	Medida nunca exac	No	0	Regla graduada	No
755	Tales1 (10)	1	N° periódico	No	1	Mid es 0'16..., apr	No	D.[0, 0'25] (25)	0	100 partes iguales	No	0	N° 0'12; graduació	No
251	Tales1 (3)	0	Proceso correcto	No	0	mediatriz	No	Tales1(4) y (25)	0	Proceso utilizado	No	0	mediatriz	No
252	Tales1 (3)	0	Método muy fiable	No	0	bisectirz	No	Tales1 (25)	2	Bast. fiable, tant n°s	No	0	Bisectriz o regla	No
253	Tales1 (3)	1	N° infinito	No	1	Inf, mitad infinita	No	Tales1 (25)	0	N° exac, no periód	No	0	Longitud; div el n°	No
254	Tales1 (3)	0	1/3 igual a 0'3	No	0	Div el segmento	No	Tales1 (25)	0	0'24 igual a 6/25	No	0	Tomaba 3/25	No
255	D.U.1 (3)	1	N° inf decim	No	1	Infinitos decimales	No	Regla grad	0	N° dec limitado	No	0	0'6cm equiv. 0'12 unid	No
851	Regla grad.	1	Tantos decimales	No	1	Dec; no med. exact	No	Regla grad	1	Aparición decim.	No	1	Decim, exacta sit	No
852	D. U.2 (10)	1	aproximación	No	0	Utiliz. calculadora	No	D.U.2 (10)	1	No justifica	No	0	Calculadora, exact	No
853	D.U. 1 (3)	1	Err hum., regla	No	2	Medi en mm, div 2	No	Regla grad/Azar	0	Sólo hay 2 medidas	No	2	Mm, div. entre 2	No
854	Regla grad/D.U.(·3)	1	Marq err inst o hum.	No	0	N° dec a n° frac; multplic. por 1/2	No	Regla grad	2	Ídem 1c; pto ex.	No	0	mediatriz	No
855	Regla grad	1	Aprec regl,rech dec., no cálc matem	No	0	Cif inf; mediatriz	No	D.U.2 (4)	1	Regla, ojo, no cálc. matem.	No	0	Regla, med, no inf cif	No
351	Tales1 (3)	0	Más ex q' con regla	No	0	Medida, compás	No	Azar	0	Si hubiera [...] escala	No	1	No obtuv un seg	No
352	Tales1 (3)	2	Parte exa iq; dec inf	No	0	mediatriz	No	Regla grad	1	He tomado con regla	No	0	mediatriz	No
353	No representa	4	No justifica	No	2	Métodos (mediatr); rep gráf es aprox	No	Regla grad	1	No justifica	No	1	Este método	No
354	Tales1 (3)	0	Expresió ex, propor	No	0	mediatriz	No	Azar	3	Totalm arbitrario	No	1	No obtuvo segm	No
355	Tales1 (3)	2	Irrac., inf decim; teóricam exac	No	2	Mediatriz, difícil exac	No	Tales1[0,6] (25)	2	Analogo 1, excepto irrac; racional	No	2	Análogo al ítem 1	No

ANEXO 9

Tablas de Valoración del Desempeño

Código utilizado en las tablas de Valoración del Desempeño

Hemos indicado que las tablas de Valoración del Desempeño se obtienen a partir de la tabla de Desempeño Global, añadiendo algunas columnas y organizando la información resultante mediante dos tablas, una correspondiente a la tarea de Representación en la recta y la otra correspondiente a la tarea de División de un segmento por su mitad.

El código de las columnas que provienen de la tabla de Desempeño Global no se modifica y por ello se describirá sucintamente en este anexo. Algunas de estas columnas cambian de posición, y por tanto, de número.

Anexo 9.1. Tabla de Valoración del Desempeño I

Columna 1 (Alumno): Se indica el código correspondiente a cada alumno.

Columnas 2 y 10 (Procedimiento de representación en los ítems 1ª y 2ª): se incluye el procedimiento utilizado por el alumno para representar el número dado. Los valores utilizados en esta columna son los descritos en la tabla A.8.1 del anexo 8.

Columnas 3 y 11 (Valoración de la representación realizada por el alumno en ítems 1a y 2a): La investigadora valora las representaciones de los alumnos mediante la utilización de los códigos que figuran en la tabla A.9.1.

Los valores considerados en esta tabla permiten organizar todas las respuestas obtenidas en el cuestionario. Sin embargo no pretendemos afirmar que esa lista permite clasificar o valorar cualquier representación de números en la recta. A medida que analicemos nuevas respuestas, probablemente la lista de la tabla A.9.1 se amplíe, no sólo con nuevos valores en cada uno de los 6 apartados considerados en la columna 1, sino incluso con nuevos apartados.

Valoración representa-ción	Descripción	Cd
Correcta	La representación gráfica permite interpretar la marca obtenida sin más objeción que la posible limitación instrumental.	00
Imprecisa	La división en partes iguales se realiza de forma irregular.	21
	El punto etiquetado está desplazado de su posición adecuada.	22
	Se modifica el tamaño de la unidad.	23
	División de la unidad inadecuada.	24
Incompleta	Realiza una marca pero no identifica con una etiqueta.	11
	Falta etiquetar origen y unidad.	12
	Falta etiquetar el origen.	13
	Falta etiquetar la unidad.	14
	Representa un número diferente al solicitado (muy próximo al número pedido).	15
	No realiza la marca.	16
Errónea	Coloca la etiqueta en la marca correspondiente a otro número.	31
	Error al aplicar el teorema de Pitágoras.	32
	Error al aplicar el teorema de Tales.	33
	Marca aparentemente arbitraria.	34
	Error al etiquetar las unidades.	35
Ausente		50
Combinaciones de las anteriores	12 y 31	41
	23 y 22	42
	14 y 34	43
	23 y 13	44
	13, 21 y 24	45
	11, 32 y 33	46
	11 y 22	47
	15 y 31	48
	11 y 12	49

Tabla A.9.1: Código para valorar las representaciones de los alumnos

Columnas 4 y 12 (Valoración de la explicación de la construcción; ítems 1b y 2b): La investigadora valora la explicación realizada por el alumno del procedimiento seguido para representar el número dado en la recta.

En este caso también reconocemos que la clasificación realizada en la tabla A.9.2 permite organizar todas las respuestas estudiadas, aunque no pretende ser exhaustiva. Es posible que ante nuevas explicaciones sea necesario ampliar la tabla.

Valoración explicación	Valoración de la explicación (ítems 1b y 2b)	Cd.
Correcta	La explicación se ajusta a lo realizado y no incluye términos o frases inadecuados.	00
Imprecisión del lenguaje	Recta/Segmento, segmento unidad o unidad	11
	Unidad/parte	12
	Bisectriz/Mediatriz	13
	Uno/Unidad	14
	Recta perpendicualar/Recta auxiliar o cualquiera	15
	Cm ó m/Unidad	16
	Punto/Segmento	17
	Perpendicular/Mediatriz	18
	Confusión al mencionar la representación simbólica de los números.	19
Error conceptual	Aplicación errónea del teorema de Tales.	31
	Aplicación errónea del teorema de Pitágoras.	32
	Error conceptual de la escritura simbólica o en el cambio de escritura simbólica.	33
	Confusión en cambios de unidades.	34
Desajuste entre la construcción (a) y la descripción (b)		40
Combinación	14 y 40	50
	16 y 34	51
Otros que no se clasifican.		60
Sin explicación		70

Tabla A.9.2: Código utilizado para valorar las explicaciones de los alumnos

Columnas 5 y 13 (Valoración de la exactitud por el alumno; ítems 1c y 2c): Incluye la respuesta del alumno (afirmación o negación) respecto de la exactitud de la representación obtenida. El código utilizado está descrito en la tabla A.8.2 del anexo 8.

Columnas 6 y 14 (Exactitud): Se incluyen palabras textuales de los alumnos consideradas claves en la valoración de la exactitud.

Columnas 7 y 15 (Criterios usados para valorar la exactitud): Se indica el o los criterios (de los Criterios para el estudio de los números reales) asignados por la investigadora a los términos que figuran en las columnas 6 y 14 respectivamente. Hemos dicho que los términos escogidos no saturan la respuesta del sujeto. Por esa razón, el criterio asignado en las columnas 7 y 15 no tienen por qué abarcar todas las frases que completan su respuesta. El estudio de los criterios implicados en las respuestas de los alumnos se realizará con mayor profundidad cuando se estudien las respuestas relacionadas con los conflictos relevantes para la investigación.

En la tabla A.9.3 se indican wl xódigo utilizado en las columnas 7 y 15.

Criterios	Código
Orden	o
Tipo de Número	t
Fenomenología	f
Representaciones	r
Operaciones	p
Orden y tipo de número	a
Orden y fenomenología	b
Orden y representaciones	c
Orden y operaciones	d
Tipo de número y fenomenología	e
Tipo de número y representaciones	g
Tipo de número y operaciones	h
Fenomenología y representaciones	i
Fenomenología y operaciones	j
Representaciones y operaciones	k
Tipo de número, fenomenología y representaciones	n
Orden, tipo de número y representaciones	q
Orden, fenomenología y representaciones	s
Fenomenología, representaciones y operaciones (*)	u
Tipo de número, fenomenología y operaciones (*)	v

Tabla A.9.3: Códigos que identifican a los criterios asignados a los términos o frases de los alumnos

(*) Sólo utilizado en el estudio de las respuestas correspondientes a los ítems 1d y 2d.

Los alumnos deben valorar en 1c y 2c la exactitud de una tarea de representación. El criterio Representaciones está por lo tanto implícito en la actividad que están valorando, pues la marca realizada sobre la recta, dados un origen y una unidad, está señalando la posición del punto de la recta que se corresponde con el número dado. Sin embargo, aunque el criterio esté implícito en todas las respuestas, sólo se usará en las columnas 7 y 15 cuando exista mención explícita a alguna representación simbólica del número dado.

Columnas 8 y 16 (Conflicto declarado por el alumno, ítems 1 y 2): Los valores Sí/No corresponden a si existe o no un conflicto reconocido por el alumno. Se considera que el alumno reconoce el conflicto cuando manifiesta claramente que no sabe o no puede realizar lo pedido.

Columnas 9 y 17 (Inconsistencia observada por la investigadora): se indica si se observa o no una respuesta inadecuada en la respuesta del alumno a la valoración de la exactitud de la representación. El código utilizado está descrito en la tabla A.9.4.

Afirmación inconsistente en la valoración de la exactitud	Etiqueta
No se observa ninguna inconsistencia	0
Se observa una inconsistencia.	1

Tabla A.9.4: Código utilizado para valorar la presencia o ausencia de afirmaciones inconsistentes

A.9.1. Tabla de Valoración del Desempeño I

Suj.	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA																
	√5								0'33333...								
	Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR		Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR	
C1	C2	3	4	5	C6	7	C8	9	C10	11	12		C14		16	
111	D.U.1 (8)	21	19	1	Decim., med. peq	i	**No**	**0**	D.U.1 (3)	49	11	1	Cifras, N° no exacto	r	**No**	**1**
112	D.U.1 (8)	00	00	2	Err med., mediat.	f	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	12	2	A ojo	f	**No**	**0**
113	D.U.1(8) y Tales1(8)	00	11	1	No sale n° exacto, red.	p	**No**	**0**	D.U. (3)	14	00	0	div. partes ig.	f	**No**	**0**
114	D.[0'5,1]2 (5)	21	00	1	Regla, medir	f	**No**	**0**	D.U.2 (5)	00	11	1	N° periód.	r	**No**	**1**
115	D.U.2 (10)	21	00	1	1° decim., a ojo	i	**No**	**0**	D.U.2 (10)	31	00	2	div. exacta, periód	i	**No**	**1**
711	Tales1 (8)	00	00	2	Err humano e ins	f	**No**	**0**	D.U.1 (9)	00	00	2	Err hum, err periód	i	**No**	**1**
712	Tales1 (8)	00	11	1	Err med	f	**No**	**0**	Tales1 (9)	00	00	1	Err med	F	**No**	**0**
713	Tales1 (8)	00	00	1	err	f	**No**	**0**	Tales1 (9)	00	00	1	Err	f	**No**	**0**
714	Tales1 (8)	00	00	1	Entre 0y1	o	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	00	1	Err	f	**No**	**0**
715	D.U.1 (8)	00	00	1	Sens.escuadra	f	**No**	**0**	No represen.	50	70	1	Inf. decim	r	**No**	**1**
211	Mediat./D.U.(8)	00	00	0	mediatriz	r	**No**	**0**	Tales1 (42)	33	31	1	Decim., div.	P	**No**	**1**
212	D.U.1 (8)	00	00	0	Dist 0a5/8 ig 0a2'5/4	j	**No**	**0**	Segm arb. 3 v	00	00	0	1/3.2=2/3	j	**No**	**0**
213	Mediatriz1	11	00	2	Útiles, err.	f	**No**	**0**	Segm arb. 3 v	00	00	2	Quit Defect; 0'3=1/3	i	**No**	**0**
214	Mediatriz1	00	00	2	Teór., práctica	f	**No**	**0**	Tales1 (3)	00	00	2	Teór., práctica	f	**No**	**0**
215	Tales1(8)	00	00	2	div.ex.; marg err	f	**No**	**0**	D.U.2 (10) 2v.	00	00	1	N° no acaba nunca	r	**No**	**1**
811	D.U.1 (8)	00	00	2	Aparatos ex.	f	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	00	2	Unidad, regla	f	**No**	**0**
812	Tales1 (8)	00	00	0	No decim	r	**No**	**0**	Tales1 (3)	00	00	0	Fracc, evitar decim	r	**No**	**0**
813	D.U.1 (8)	00	00	1	Decim., regla	i	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	00	1	Prec inst.	f	**No**	**0**
814	D.U.1 (8)	00	00	1	A ojo, marg. err.	f	**No**	**0**	Regla grad	00	00	1	N° infinito	i	**No**	**1**
815	D.U.1 (8)	21	00	1	No med, nada ex.	f	**No**	**0**	Regla grad/A ojo	11	00	1	Nada exacto	f	**No**	**0**
311	D.U.1 (8)	00	00	1	Mét dibujo, regla compás	i	**No**	**0**	Tales1 (3)	12	00	2	Mét exacto, marg err	i	**No**	**0**
312	Tales1 (8)	00	00	1	Inst materiales	f	**No**	**0**	Segm arb 3v	00	00		Inst; err humanos	f	**No**	**0**
313	Tales1 (8)	00	00	0	Entender 5/8	f	**No**	**0**	Tales (3)	00	00	0	Ídem 1c	f	**No**	**0**
314	Mediatriz1	00	00	0	geométricamente	f	**No**	**0**	Segm. arb 3v	00	00	0	1/3 más preciso	r	**No**	**0**
315	Med/Regla	00	13	1	Decimales; útiles	i	**No**	**0**	Regla grad.	00	00	1	Decim; útiles, err	i	**No**	**0**

Suj.	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA															
	√5								0'33333...							
	Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR		Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR	
C1	C2	3	4	5	C6	7	C8	9	C10	11	12		C14		16	
121	Regla grad	00	00	1	Muchos decimales	r	**No**	**1**	D.U.1 (8)	00	00	1	Cometen errores	f	**No**	**0**
122	Regla grad.	00	00	1	Medidas pequeñas	f	**No**	**0**	Regla grad.	00	00	1	Número pequeño	f	**No**	**0**
123	D.U.2 (10)	21	00	1	∞ decimales	r	**No**	**1**	D.U.2 (10) 2v	00	00	2	3 decimales	r	**No**	**0**
124	D.U.2 (10)	21	11	4	-	-	**No**	**0**	D.U.1 (8)	12	11	0	Divisiones iguales	f	**No**	**0**
125	Pitágoras	00	00	0	Método de Pitágoras	r	**No**	**0**	D.U.1 (8)	00	00	0	Denomin., numerad.	r	**No**	**0**
721	Tales2 (10)	00	00	3	No justifica	-	**Sí**	**0**	Tales1 (8)	00	00	0	No justifica	-	**No**	**0**
722	Tales2 (10)	00	12	0	Método frecuente	r	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	11	0	No justifica	-	**No**	**0**
723	Pitágoras	00	00	1	Número irracional	t	**No**	**1**	Tales1 (8)	00	15	0	Número racional	t	**No**	**0**
724	Pitágoras	00	00	0	No justifica	-	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	0	Número racional	t	**No**	**0**
725	Med/Regla grad.	22	00	1	Es una aproximación	f	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	0	Número racional	t	**No**	**0**
221	Med/D.[1, 1'5]2 (5)	00	00	1	Muchos decimales	i	**No**	**0**	Tales1 (8)	12	11	0	div. proporcionalm.	f	**No**	**0**
222	Pitágoras	00	10	0	No justifica	-	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	4	No justifica	-	**No**	**0**
223	Pitágoras	00	00	0	Sistema; teóricam.	k	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	0	Teóricam., procedim	i	**No**	**0**
224	Tales2 (10)	00	00	1	Método utilizado	r	**No**	**0**	Tales1 (8)	35	00	2	Partes ig, gros. lápiz	f	**No**	**0**
225	Tales2 (10)	00	00	1	Dimens. más gdes.	f	**No**	**0**	Tales1 (8)	12	00	2	Marg err, pasos	f	**No**	**0**
821	Med/Tales2 (5)	00	00	1	Toda med. tiene err	f	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	1	Nunca med. exacta	f	**No**	**0**
822	Med/Tales2 (5)	00	00	1	Toda med. tiene err	f	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	0	No util. Inst, err	f	**No**	**0**
823	Med/D.U.2 (5)	00	00	1	Reg, irrac, inf decim.	n	**No**	**1**	D.U.1 (8)	00	00	0	Div en 8 y tomar 5	r	**No**	**0**
824	D.[1, 1'5]2 (5)	00	00	1	Med peq., regla	f	**No**	**0**	D.U.1 (8)	12	00	1	Reg, ning med. es ex	f	**No**	**0**
825	Regla grad.	00	00	1	Aprox., no matem.	f	**No**	**0**	Azar	34	60	1	Matemáticamente no	f	**No**	**1**
321	D.U.2 (10) 2v	11	00	1	próximo	f	**No**	**0**	Med/T/D.[0'6,0'7] (4)	00	00	2	Reg y compás se han movido	f	**No**	**0**
322	Pitágoras	00	00	2	Mente, papel	f	**No**	**0**	Regla grad.	00	00	1	Infinitos puntos	f	**No**	**1**
323	Regla grad.	00	00	1	Regla, mm, aprox.	f	**No**	**0**	Regla grad.	12	00	2	Err comp y reg	f	**No**	**0**
324	Regla grad.	00	00	1	Err inst., nº irracion.	n	**No**	**1**	D.U1 (8)	00	00	1	Inst. marg err	f	**No**	**0**
325	Regla grad.	00	00	1	Nº no exac, regla	i	**No**	**1**	Tales1 (8)	00	00	0	Nº fraccionario	i	**No**	**0**

Suj.	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA																
	√5								0'33333...								
	Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR		Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR	
C1	C2	3	4	5	C6	7	C8	9	C10	11	12		C14		16	
131	D.U.2 (2)	00	00	1	Punto aproximado	f	**No**	**0**	D.U.2 (2) 2v.	00	00	1	Punto aproximado	f	**No**	**0**
132	Regla grad.	42	00	1	Raíz de 5 no da exac	p	**No**	**1**	D.U.1 (10)	31	33	1	N° no exac, sino dec.	r	**No**	**1**
133	Pitágoras	32	32	1	No sé si está bien	-	**Sí**	**1**	D.U.1 (3)	13	00	1	Ídem 1c	-	**Sí**	**1**
134	Regla grad.	22	00	1	Regla, aproximado	f	**No**	**0**	Regla grad.	00	00	1	No soy capaz de marcar exact.el pto	f	**Sí**	**0**
135	D.U.2 (10)	00	00	1	Muchos decim, herra	i	**No**	**0**	D.U.2 (10)	00	00	1	Ídem 1c	i	**No**	**0**
731	Pitágoras	00	00	0	He seguido los proce	r	**No**	**0**	Tales1 (3)	00	00	3	No estoy segura	-	**Sí**	**0**
732	Pitágoras	23	00	0	Utiliz proced. e inst.	r	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	00	0	Proced específico	r	**No**	**0**
733	Pitágoras	23	16	0	Proc.para rep, raíz	r	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	00	0	N° perió se repr exm.	r	**No**	**0**
734	Pitágoras	23	00	0	No justifica	-	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	00	4	No justifica	-	**No**	**0**
735	Tales2 (10)	00	00	1	A ojo	f	**No**	**0**	Tales2 (10) 2v.	31	60	1	N° periód, inf, decim	R	**No**	**1**
231	Med/Tales2 (5)	31	00	1	No todos sus decim	r	**No**	**0**	Tales2 (10) 2v.	00	00	1	N° periód puro, inf.	r	**No**	**1**
232	D.U.2 (10)	00	00	1	No exac. y tender al inf sus deci,	r	**No**	**1**	D.U.1 (3)	00	00	0	No tener que rep. decim. Inf.	r	**No**	**0**
233	Pitágoras	00	00	2	Proc.exac, absol.prec	i	**No**	**0**	Segm. arb. 3v.	00	00	2	Ídem 1c	i	**No**	**0**
234	Pitágoras	00	00	1	Nunca es precisa	f	**No**	**0**	Tales1 (3)	00	00	1	N° inexistente	i	**No**	**1**
235	Tales2 (4)	00	00	1	Inf n°s decim	r	**No**	**1**	Regla grad.	00	00	1	Depende de las unid	f	**No**	**0**
831	Regla grad.	00	00	1	Marg error	f	**No**	**0**	Regla grad.	13	00	1	Ídem 1c	f	**No**	**0**
832	Tales2 (4)	00	00	1	Err prec. Inst	i	**No**	**0**	Tales1 (3)	00	00	1	Mín err, inst 1mm	f	**No**	**0**
833	D.U.2 (2) 3v.	00	00	1	Medir o marcar	f	**No**	**0**	Regla grad.	15	00	1	He rep el pto. 0'3	o	**No**	**0**
834	Regla grad.	00	00	1	Despreciar décimas	f	**No**	**0**	Azar	43	00	0	Nuestro criterio	r	**No**	**1**
835	Regla grad.	00	00	1	Segm no graduado	f	**No**	**0**	Tanteo	00	00	1	Segm no graduado	f	**No**	**0**
331	D.U.2 810)	00	00	1	Hecho a mano	f	**No**	**0**	D.U.2 (10)	00	00	1	Hecho a mano	f	**No**	**0**
333	Pitágoras	32	32	2	Proced., err inst.	i	**No**	**0**	Segm. arb. 3v.	00	00	0	(describe el proc)	i	**No**	**0**
334	Regla grad	00	00	1	Gran n° de decim	r	**No**	**1**	Tanteo	00	00	1	Ídem 1c	r	**No**	**1**
335	Regla grad	00	00	1	He despreciado dec.	i	**No**	**0**	Regla grad.	00	00	1	Decim, aprox. buena	i	**No**	**0**

Suj.	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA																
	1'4142136...								√5								
	Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR		Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR		
C1	C2	3	4	5	C6	7	C8	9	C10	11	12		C14		16		
141	D[1, 1'5]2 (5)	00	00	1	Sin calcular nada	f	**No**	**0**	Regla grad.	00	00	1	A ojo	f	**No**	**0**	
142	Regla grad.	00	00	1	Lín. más "ampliada"	f	**No**	**0**	Regla grad.	22	00	1	Otro proced más ex.	r	**No**	**0**	
143	D.U.2 (10)	00	00	1	Midien. poco a poco	f	**No**	**0**	Pitágoras	44	40	1	Compàs, medida	f	**No**	**0**	
144	D.U.2 (10)	21	00	1	Decimales, div. Más compleja	r	**No**	**0**	D.U.2 (10)	21	00	1	Div más compleja	r	**No**	**0**	
145	D.U.2 (10)	21	17	1	Nº no ex., div. milim	i	**No**	**1**	D.U.2 (10)	45	17	1	Div muy pequeña	f	**No**	**0**	
741	Tales2 (10)	00	00	1	Cent. y milés.	f	**No**	**0**	Tales2 (3) (10)	00	00	1	Ídem1c, gros. lápiz	f	**No**	**0**	
742	Med/Tales2 (5)	00	00	1	Nº irrac, inf. decim	q	**No**	**1**	Tales2 (10)	00	00	1	Interv más aprox	o	**No**	**0**	
743	Med/Tales/Int	33	00	1	Int inf, irracionales	a	**No**	**1**	D.U.2(10)/Int.	00	00	1	Nº irrac. nunca ex.	t	**No**	**1**	
744	D.U.2 (10)	00	00	1	Inf dec., err material	s	**No**	**1**	D.U.2 (10)	00	00	1	irrac, err hum y mat.	e	**No**	**1**	
745	Pitágoras	23	00	0	Irrac; inf cif; √2	g	**No**	**0**	Pitágoras	00	00	4	a^2= 4+1=5	P	**No**	**0**	
241	D.U.2 (10)	24	00	1	Otra forma más prec	r	**No**	**0**	D.U.2 (10)	21	00	1	Otra forma más prec	r	**No**	**0**	
242	Tales2 (10)	00	00	1	Ojo hum no ex. en sus med	f	**No**	**0**	Pitágoras y Tales	46	32	1	A ojo	f	**No**	**1**	
243	Tales2 (10)	00	00	1	Muchos decim	i	**No**	**0**	Pitágoras	00	00	1	Impos "exacta",	f	**No**	**0**	
244	Regla grad.	00	00	1	Margen error	f	**No**	**0**	Pitágoras	00	00	1	Margen error	f	**No**	**0**	
245	Med/Tales2 (5)	00	00	1	Decim, med. aprox.	i	**No**	**0**	Tales2 (10)	00	00	1	Med aprox	f	**No**	**0**	
841	D.U.2 (2) y (5)	21	00	0	No justifica	-	**No**	**0**	D.U.(2)/Tales2 (5)	00	00	1	Medir a ojo	f	**No**	**0**	
842	Regla grad.	47	00	1	Nº no exacto	r	**No**	**1**	Regla grad.	00	00	1	He cogido un dec	r	**No**	**0**	
843	Regla grad.	00	00	1	Error, total decim	i	**No**	**1**	Regla grad.	34	00	1	Demas. decim.	r	**No**	**1**	
844	Med/Regla grad	00	00	1	Medir; inf div	b	**No**	**1**	Azar	34	40	0	No hay intervalos	o	**No**	**1**	
845	D.U.(10)	11	70	1	Err hum o de med	f	**No**	**0**	D.U. (10)	00	11	1	Err medida	f	**No**	**0**	
341	Mediatriz2	00	00	1	Inf ptos, bolígr err	f	**No**	**1**	Mediatriz2	00	00	1	No justifica	-	**No**	**0**	
342	Pitágoras	00	00	3	Nº irra, inf dec, apro	g	**No**	**1**	Pitágoras	32	32	1	Irrac, inf dec, aprox	g	**No**	**1**	
343	Pitágoras	00	00	2	Inst err, proced exac	i	**No**	**0**	Pitágoras	00	00	2	Ídem1c	i	**No**	**0**	
344	Pitágoras	00	00	1	Aprox., Impr ins	f	**No**	**0**	Pitágoras	00	00	1	Aprox, err inst	f	**No**	**0**	
345	Regla grad	00	00	1	No alcanza nº, acota	o	**No**	**0**	Regla grad	00	00	1	Idem 1c, intervalo	o	**No**	**0**	

Suj.	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA															
	0'33333...								0'24							
	Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR		Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR	
C1	C2	3	4	5	C6	7	C8	9	C10	11	12		C14		16	
151	Tales (3)	48	00	1	Hay imperf., nºperió	i	**No**	**1**	Mediatriz2	31	18	1	Diferen, 1 cma.	f	**No**	**0**
152	Tales (3)	31	33	1	Nº no exacto	i	**No**	**1**	Tales1[0'1, 025]	00	00	1	A mano alzada	f	**No**	**0**
153	D.U.2 (10) y (3)	00	00	1	Número periódico	r	**No**	**1**	D.U.2 (10)	16	00	0	No justifica	-	**No**	**0**
154	D.U.2 (10) y (3)	00	00	1	Número período	r	**No**	**1**	D.U.2 (10)	22	70	0	No justifica	-	**No**	**0**
155	D.U.1 (3)	00	00	1	Error al medir	f	**No**	**0**	Regla grad.	00	00	2	Unid más gdes, inex por mm	f	**No**	**0**
751	D.U.2 (10)	31	33	0	Otro proc dará mism	r	**No**	**1**	D.U. 1(10) 2v	31	70	0	Otra forma tb da ex.	r	**No**	**0**
752	Tales (3)	00	00	1	Nº perió, siempre err	i	**No**	**1**	Tales1 (25)	00	70	2	Nº ex; siempre error	i	**No**	**0**
753	Tales1 (3)	00	00	1	Regla, aproximado	f	**No**	**0**	Regla grad	00	00	1	Regla no aprecia	f	**No**	**0**
754	Tales2 (10)/Regla	00	00	1	Medida más exac.	f	**No**	**0**	D.U. (10) 2v	00	51	1	Medida nunca exac	f	**No**	**0**
755	Tales1 (10)	00	00	1	Nº periódico	r	**No**	**1**	D.[0, 0'25] (25)	00	00	0	100 partes iguales	f	**No**	**0**
251	Tales1 (3)	00	00	0	Proceso correcto	r	**No**	**0**	Tales1(4) y (25)	00	00	0	Proceso utilizado	r	**No**	**0**
252	Tales1 (3)	00	00	0	Método muy fiable	r	**No**	**0**	Tales1 (25)	00	00	2	Bast. fiable, tant nºs	f	**No**	**0**
253	Tales1 (3)	00	00	1	Nº infinito	r	**No**	**1**	Tales1 (25)	00	00	0	Nº exac, no periód	r	**No**	**0**
254	Tales1 (3)	00	00	0	1/3 igual a 0'3	r	**No**	**0**	Tales1 (25)	00	00	0	0'24 igual a 6/25	r	**No**	**0**
255	D.U.1 (3)	00	00	1	Nº inf decim	i	**No**	**1**	Regla grad	00	00	0	Nº dec limitado	r	**No**	**0**
851	Regla grad.	11	00	1	Tantos decimales	r	**No**	**0**	Regla grad	34	00	1	Aparición decim.	r	**No**	**0**
852	D. U.2 (10)	11	00	1	aproximación	f	**No**	**0**	D.U.2 (10)	11	34	1	No justifica	-	**No**	**1**
853	D.U. 1 (3)	00	00	1	Err hum., regla	f	**No**	**0**	Regla grad/Azar	43	60	0	Sólo hay 2 medidas	f	**No**	**1**
854	Regla gra/D.U.(·3)	00	00	1	Marg err inst o hum.	f	**No**	**0**	Regla grad	43	00	2	Ídem 1c; pto ex.	f	**No**	**0**
855	Regla grad	00	00	1	Aprec regl,rech dec., no cálc matem	i	**No**	**0**	D.U.2 (4)	00	00	1	Regla, ojo, no cálc. matem.	f	**No**	**0**
351	Tales1 (3)	00	00	0	Más ex q' con regla	i	**No**	**0**	Azar	34	60	0	Si hubiera [...] escala	f	**No**	**1**
352	Tales1 (3)	00	00	2	Partes exa ig; dec inf	n	**No**	**1**	Regla grad	00	00	1	He tomado con regla	f	**No**	**0**
353	No representa	50	70	4	No justifica	-	**No**	**1**	Regla grad	00	00	1	No justifica	-	**No**	**0**
354	Tales1 (3)	00	00	0	Expresión ex, propor	r	**No**	**0**	Azar	34	60	3	Totalm arbitrario	f	**No**	**1**
355	Tales1 (3)	00	00	2	Irrac., inf decim; teóricam exac	n	**No**	**1**	Tales1[0,6] (25)	00	00	2	Analogo 1, excepto irrac; racional	e	**No**	**0**

Anexo 9.2. Tabla de Valoración del Desempeño II

Columna 1 (Alumno): Se indica el código correspondiente a cada alumno.

Columnas 2 y 7 (Respuesta del alumno respecto de la posibilidad de dividir exactamente por la mitad un segmento determinado)
Incluye la respuesta del alumno (afirmación o negación) respecto de la posibilidad de dividir exactamente por la mitad un segmento de longitud igual a *r* unidades, siendo *r* el número real que ha representado en el inciso a de la misma pregunta. El Código utilizado figura en la tabla 3 del anexo 8.

Columnas 3 y 8 (Términos utilizados por los alumnos): Incluye algunos términos o frases cortas usadas por cada alumno para justificar su respuesta y consideradas claves por la investigadora.

Columnas 4 y 9 (Criterios usados para justificar la respuesta): Incluye el o los criterios asignados por la investigadora a los términos o frases claves recogidos en las columnas 3 y 8 respectivamente. Las etiquetas son las indicadas en la tabla A.9.3 de este anexo.

Columnas 5 y 10 (Conflicto declarado por el alumno): Los valores Sí/No corresponden a si existe o no un conflicto reconocido por el alumno. Se considera que el alumno reconoce el conflicto cuando manifiesta claramente que no sabe o no puede realizar lo pedido.

Columnas 6 y 11 (Inconsistencia observada por la investigadora): Se indica si se observa o no una afirmación inconsistente en la respuesta del alumno a la valoración de la posibilidad de dividir por la mitad el segmento obtenido. El código utilizado es el de la tabla A.9.4 de este anexo.

A.9.2. TABLA DE VALORACIÓN II

Suj.	DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR LA MITAD									
	5/8					0’33333...				
	Rta	Términos usados	Criterio	C/R/A	**I/O**	Rta	Términos usados	Criterio	C/R/A	I/O
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
111	1	No justifica	-	No	**0**	1	Mides, divides. Nºdec.	i	No	**1**
112	0	Mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
113	0	Espacio reducido	f	No	**0**	0	procedimiento	r	No	**0**
114	0	5:8 = 0’625: 2	p	No	**0**	1	periódico	r	No	**1**
115	0	0’625:2 =0’312	p	No	**0**	0	0’1$\overline{6}$ mitad de 0’$\overline{3}$	p	No	**0**
711	0	mediatriz	f	No	**0**	2	div. por 2, decimales	k	No	**1**
712	0	mediatriz	f	No	**0**	0	Error medida	f	No	**0**
713	0	Es exacto	r	No	**0**	0	Inf cif decim	r	No	**1**
714	0	No justifica	-	No	**0**	0	Inf cif decim	r	No	**1**
715	0	mediatriz	f	No	**0**	1	No enc seg 0’33 exac.	f	No	**1**
211	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
212	0	2’5/8; mediatriz	j	No	**0**	0	0’5/3; mediatriz	j	No	**0**
213	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
214	2	Bisectriz, marg. error	f	No	**0**	2	Bisectriz, marg. error	f	No	**0**
215	0	mediatriz	f	No	**0**	1	No es nº que acabe	r	No	**1**
811	0	Unidad 5 partes, 5/2	j	No	**0**	0	1/3 se div. entre 2, 1/6	p	No	**0**
812	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
813	2	Mido, divido en dos	f	No	**0**	2	1/6; fracción, med err	i	No	**0**
814	0	Div partes; 10/16, su mitad es 5/16	j	No	**0**	1	Número infinito	r	Sí	**1**
815	0	div. ocho partes	j	No	**0**	1	No justifica	-	No	**0**
311	0	Mét gráf (Tales) o mid. Long.	i	No	**0**	0	Dividir segme (Tales)	f	No	**0**
312	2	Mediatriz, no exacta	f	No	**0**	2	Mediatriz, no exacta	f	No	**0**
313	0	Procedimiento (Tales)	f	No	**0**	0	Misma forma (Tales)	f	No	**0**
314	0	mediatriz	f	No	**0**	0	Mediatrices	f	No	**0**
315	4	No justifica	-	No	**0**	1	Nunca daría exacm. con tal pto.	f	No	**1**

Suj.	DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR LA MITAD									
	Rta	Términos usados	Criterio	C/R/A	**I/O**	Rta	Términos usados	Criterio	C/R/A	I/O
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
121	1	Nº no totalm. definido	r*	No	**1**	2	Numéricam, gráficam	j	No	**0**
122	2	Decima, unid. Pequ.	i	No	**1**	2	Fracc a nº, div entre 2, medidas	u	No	**0**
123	1	Inf en decim	r	No	**1**	0	Decim no infinito	r	No	**0**
124	1	Redond, medida justa	f	No	**0**	1	5 nº impar	t	No	**1**
125	1	Demasiados decim	r	No	**1**	1	No hay nº entre 5/8	o	No	**1**
721	0	Div. segm en 10 partes	f	No	**1**	0	Div 8 partes. Cojo 4	f	No	**1**
722	0	div. en 10 partes	f	No	**1**	0	Cogiendo el pto 4/8	f	No	**1**
723	1	Irrac, cifras indef dec.	g	No	**1**	0	Nº racional	t	No	**0**
724	0	Div; irrac, cifras det	h	No	**0**	0	2’5/4	p	No	**0**
725	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
221	1	No puedo hall nº	r	No	**1**	0	mediatriz	f	No	**0**
222	1	Nº de infinitas cifras	r	No	**1**	0	Sabemos sus cifras	r	No	**0**
223	0	Mediatriz	f	No	**0**	0	Mediatriz, técnica	f	No	**0**
224	1	No he conseguido el segm. exactm.		No	**1**	0	mediatriz	f	No	**0**
225	1	Marg de error	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
821	0	mediatriz	f	No	**0**	0	Mismo proc. 1d	f	No	**0**
822	0	Ut. Compás (med.)	f	No	**0**	0	Lo mismo que 1d	f	No	**0**
823	1	Imposible hallar el seg	f	No	**1**	0	mediatriz	f	No	**0**
824	1	Irracional, inf cifras	g	No	**1**	0	Mitad es 10/40	p	No	**1**
825	0	Mediatriz; distancia	f	No	**0**	0	Mediatriz; distancia	f	No	**0**
321	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatrices	f	No	**0**
322	2	Rep gráf aprox	f	No	**0**	2	Igual que 1d	f	No	**0**
323	2	(describe mediat), aproxim	i	No	**0**	0	mediana	f	No	**0**
324	2	(desc med.); inf. decim	r	No	**1**	0	Procedim. Anál. 1d	r	No	**0**
325	1	No sé cuál es el n; tantos decim	r	No	**1**	0	Saber por fracciones, unidad div 16 partes	j	No	**0**

Suj.	DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR LA MITAD									
	Rta	Términos usados	Criterio	C/R/A	**I/O**	Rta	Términos usados	Criterio	C/R/A	I/O
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
131	1	Distancia corta	f	No	**0**	1	Nº decim peró inf	r	No	**1**
132	4	No justifica	-	No	**0**	4	No justifica	-	No	**0**
133	1	No da nº exacto, dec.	r	No	**1**	1	Igual que la otra	r	No	**1**
134	2	Aprox; Recta mejor graduada	f	No	**0**	2	Aprox., medida	f	No	**0**
135	1	Infinitos decim	r	No	**1**	1	Decimal periódico	r	No	**1**
731	1	No exacta, tiene decim	r	No	**1**	1	Periód puro, inf decim	r	No	**1**
732	1	Inf decimales	r	No	**1**	1	Nunca sería exacto	r	No	**0**
733	1	Irracional, inf cifras	g	No	**1**	1	Cifras infinitas	r	No	**1**
734	1	Unidades, regla en cm	f	No	**1**	1	No es nº exacto	r	No	**1**
735	1	No es un nº exacto	r	No	**1**	1	No es un nº exacto	r	No	**1**
231	2	Raíz, irracional, aprox.	v	No	**1**	2	0’16; imprec; periód	u	No	**1**
232	0	mediatriz	r	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
233	0	(mediatriz)	f	No	**0**	0	Mismo razon	f	No	**0**
234	1	Inf decim, err mayor	i	No	**1**	1	Inf decim, grosor lápiz	i	No	**1**
235	0	mediatriz	f	No	**0**	0	Mismo que 1d	f	No	**0**
831	0	Tales	f	No	**0**	0	Tales	f	No	**0**
832	2	Error, dividir unidad	f	No	**0**	0	Mismo método (Tales)	f	No	**0**
833	1	Pto no marcado exacm	f	No	**0**	1	Pto no es exacto	f	No	**0**
834	2	Medida no ex; bisectr	f	No	**0**	0	bisectriz	f	No	**0**
835	0	Medimos, √(2’5)	j	No	**1**	1	Segm demasiado pequ	f	No	**0**
331	2	Calcularía, error; dec.	u	No	**0**	1	Nunca sabré lo que mide 0’333...	f	No	**1**
333	0	(desc mediatriz)	f	No	**0**	0	Método constructivo	f	No	**0**
334	4	Mi rep de √5 no es ex	r	No	**0**	4	Mismo 1º ejerc.	r	No	**0**
335	0	√5/2; 30’18 mm	j	No	**0**	0	Div por dos obt. 0’166	p	No	**0**

Suj.	DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR LA MITAD									
	Rta	Términos usados	Criterio	C/R/A	**I/O**	Rta	Términos usados	Criterio	C/R/A	I/O
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
141	0	Divisible por 2, lo div.	h	No	**1**	0	Todo nº se puede div	h	No	**1**
142	0	Papel milimetrado	f	No	**1**	0	No sé exactam. cómo	-	Sí	**1**
143	1	Siempre le sobraría o faltaría un poco	f	No	**1**	1	Muchos decimales	r	No	**1**
144	0	Calculad, regla, bisect	j	No	**0**	0	bisectriz	f	No	**0**
145	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
741	1	Apreciación, no nº ver	f	No	**1**	1	No aprecias el nº exac	f	No	**1**
742	1	1’41... no es nº exacto	r	No	**1**	1	No es nº exacto	r	No	**1**
743	1	Jamás saldrá exacto	p	No	**1**	1	Nunca saldrá exacto	p	No	**1**
744	1	Nunca acabaría; Nº irr	g	No	**1**	1	Nº irr, nunca term dec	g	No	**1**
745	2	Puede expr, no realiz	f	No	**1**	2	Puede expr, no realiz.	f	No	**1**
241	0	Mediatriz[1,1’41]	f	No	**1**	0	Mediatriz[2,2’23]	f	No	**1**
242	0	No sé	-	Sí	**1**	0	No sé	-	Sí	**1**
243	2	Decimales, mediatriz	i	No	**1**	2	No poder rep; mediatr	f	No	**1**
244	0	Longitud, mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
245	2	Mediatriz, más decim	i	No	**1**	2	Mediatriz; no ser exact	f	No	**1**
841	0	Mediría con la regla	f	No	**0**	0	Misma forma	f	No	**0**
842	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
843	1	No sabemos nº decim	r	No	**1**	1	Demasiados decim	r	No	**1**
844	0	Hallaríamos la fracc	r	No	**1**	0	mediatriz	f	No	**0**
845	0	Div entre 2, exacto	p	No	**1**	0	Al div. sale exacto	p	No	**1**
341	1	Pto no exac., inf nºs dec	r	No	**1**	0	Igual anterior (¿)	-	No	**0**
342	1	Infinitos decim	r	No	**1**	1	Nº irracional	t	No	**1**
343	2	Err med, mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
344	2	Aprox., (mediatriz)	f	No	**0**	0	Procedimiento anál 1d	f	No	**0**
345	1	Acotar esa mitad	o	No	**0**	1	intervalo	o	No	**0**

Suj.	DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR LA MITAD									
	0’33333...					0’24				
	Rta	Términos usados	Criterio	C/R/A	**I/O**	Rta	Términos usados	Criterio	C/R/A	I/O
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
151	4	No just. (const mediat)	-	No	**0**	4	No just. (cons mediat)	-	No	**0**
152	1	Cifras infinitas	r	No	**1**	0	Div. segm por la mitad	f	No	**0**
153	1	periódico	r	No	**1**	0	No justifica	-	No	**0**
154	4	No justifica	-	No	**0**	4	No justifica	-	No	**0**
155	2	Nº en período, hallar mitad	k	No	**1**	0	0’24:2=0’12	p	No	**0**
751	1	Da resultado mayor	o	No	**1**	0	No inf cifras decim	r	No	**1**
752	1	Nº periódico	r	No	**1**	0	Div entre 2, nº exacto	k	No	**0**
753	1	Nº periódico, infinito	r	No	**1**	2	Gráf; numéricam.	k	No	**0**
754	1	Exactamente no	p	No	**0**	0	Regla graduada	f	No	**0**
755	1	Mitad es 0’1666..., apr	j	No	**1**	0	Nº 0’12; graduación	j	No	**0**
251	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
252	0	bisectirz	f	No	**0**	0	Bisectriz o regla	f	No	**0**
253	1	Inf; mitad infinita	r	No	**1**	0	Lonfgitud; div el nº	j	No	**0**
254	0	Div el segmento	r	No	**0**	0	Tomaba 3/25 [de la recta]	k	No	**0**
255	1	Infinitos decimales	r	No	**1**	0	0’6cm equiv. 0’12 unid	f	No	**0**
851	1	Dec; no med. exacta	i	No	**0**	1	Decim, exacta sit	i	No	**0**
852	0	Utiliz. calculadora	p	No	**0**	0	Calculadora, exacto	k	No	**0**
853	2	Medida en mm, div 2	j	No	**0**	2	Mm, div. entre 2	j	No	**0**
854	0	Nº dec a nº frac; multplicaría por 1/2	k	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
855	0	Cif inf; mediatriz	i	No	**0**	0	Regla, med, no inf cif	i	No	**0**
351	0	Olv. Medida, compás	l	No	**0**	1	No obtuv un seg		No	**0**
352	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
353 (*)	2	Métodos (mediatriz); rep gráf es aprox	f	No	**0**	1	Este método	f	No	**0**
354	0	mediatriz	f	No	**0**	1	No obtuvo segm	f	No	**0**
355	2	Mediatriz, difícil exac	f	No	**0**	2	Análogo al ítem 1	f	No	**0**

ANEXO 10

Respuestas al cuestionario de tres sujetos

En 6.2.2.3 se incluyen tres ejemplos de interpretación de datos de las tablas de Valoración I y II. Se han escogido al azar tres sujetos del total de 124 sujetos, y se explica en cada caso la interpretación de la información que viene en cada tabla.

En este anexo incluimos las respuestas textuales de los tres alumnos, procesadas digitalmente de los originales.

Cada cuestionario contiene 6 páginas en total. Hemos disminuido el tamaño de los originales, de modo que el cuestionario de cada alumno ocupa en total 3 páginas de la memoria.

Anexo 10.1: Respuestas sujeto 114.

Código: 1 1 4 1

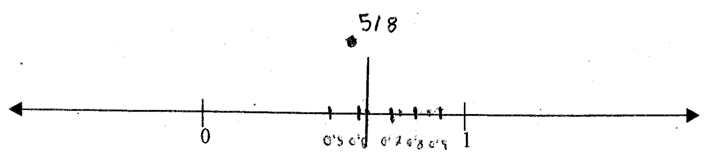
Fecha: 21 10 99 Edad: 16 Sexo: Masculino ☒ Femenino ☐

Curso: 1º BACHILLER División: A Modalidad: C. NATURALEZA Y SALUD

¿Piensas continuar estudios universitarios? Sí ☒ No ☐ No sabe ☐ Carrera: No sabe

Última nota Matemáticas: SUFICIENTE

Ítem 1. a) Representa en la recta el número 5/8. 5 : 8 = 0'625



b) Explica el procedimiento utilizado.

he dividido 5 entre 8, he dividido en partes iguales desde 0'5 a 1 y lo he colocado en la posición en que estaría situado en la recta.

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

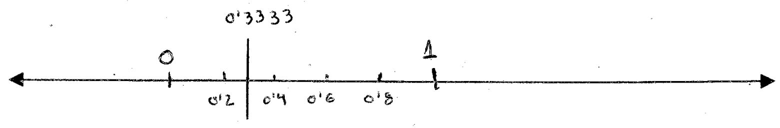
No mucho porque exactamente no se puede obtener ya que siempre hay pequeñas variaciones de la regla al medir.

d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a 5/8 unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

si . Yo dividiría 5 : 8 = 0'625 : 2 que es la mitad = 0'3125. Ahora lo volvería a representar en la recta.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 1a).
Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☒
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☐
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐
Compás: ☐
Calculadora: ☒
Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 2. a) Representa en la recta el número 0'33333...



b) Explica el procedimiento utilizado.

he dividido la recta en partes iguales, he tomado aproximadamente donde se situaría 0'3333...

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

No ya que los numeros periodicos no se pueden representar exactamente en la recta.

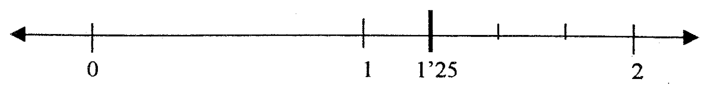
d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a 0'33333... unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

No porque es periódico. Al ser periódica al dividirla no te puede salir la mitad justa sino que te saldría otro numero periódico.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 1b).
Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☒
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☐
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐
Compás: ☐
Calculadora: ☐
Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 3:
La pregunta indicada en el recuadro se planteó a algunos alumnos de Bachillerato y de Universidad (Licenciatura en Matemáticas):

En la siguiente figura se ha representado el número 1'25 ¿Es exacta esa representación?



Algunas respuestas obtenidas son las siguientes:

Elena: *"Yo creo que no. Los hombres no podemos perfeccionar el punto exacto, no lo podemos distinguir así con la vista."*

Mirta: *"Yo creo que no, porque siempre los materiales que utilizamos tienen un margen de error."*

Ariel: *"No, porque la marca sigue siendo un segmento pequeñito y cada cosa que pintas va a ser un segmento más pequeñito, pero va a seguir siendo un segmento. Entonces no puedo marcar exactamente el punto."*

Para expresar el grado de acuerdo con las respuestas anteriores completa la siguiente tabla, señalando con una cruz (x) en la opción elegida en cada caso.

	¿Estás de acuerdo?				
Alumno	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo	Muy de acuerdo
Elena	☐	☐	☐	☐	☒
Mirta	☐	☐	☐	☐	☒
Ariel	☐	☐	☒	☐	☐

Anexo 10.2: Respuestas sujeto 343

Código: 3 4 3 1

Fecha: 26 10 99 Edad: 18 Sexo: Masculino ☒ Femenino ☐

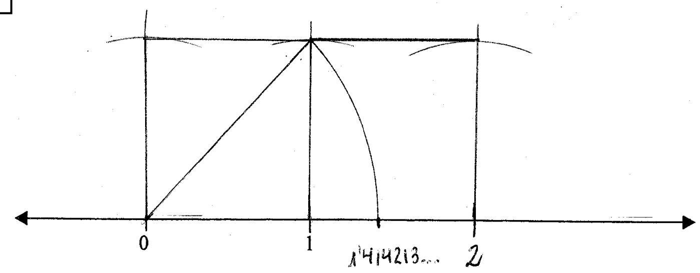
Curso: 1º

Nota media de selectividad: ¿6'68?

Razones por las que eligió Matemáticas: PORQUE ES LA CARRERA QUE MÁS ME GUSTA; Y EN EL BACHILLERATO SE ME DIERON BIEN LAS MATEMÁTICAS

¿Tiene aprobado Análisis Matemático de 1º? LO ESTOY CURSANDO.

Ítem 1. a) Representa en la recta el número 1'4142136...



b) Explica el procedimiento utilizado. Es obvio que el nº 1'414213... es irracional al ser un decimal ilimitado no periódico; concretamente es el resultado de efectuar $\sqrt{2}$. Basándonos en que cualquier nº+ se puede expresar como la suma de los cuadrados de al menos dos nºs y por el Teorema de Pitágoras

a 1 $a^2 = 1^2 + 1^2 = 1+1 = 2$; $a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ u.l.

Una vez hallado $\sqrt{2}$ sólo hay que trasladarlo a partir del cero.

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.
Si entendemos por exacto no cometer ningún error; no, no es exacto; además sería imposible; ya que los instrumentos de medida ya llevan un error implícito; y al medir nosotros cometemos errores. Salvando estas "pequeñas distancias" bajo mi punto de vista es el procedimiento más exacto posible.

d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a 1'4142136... unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

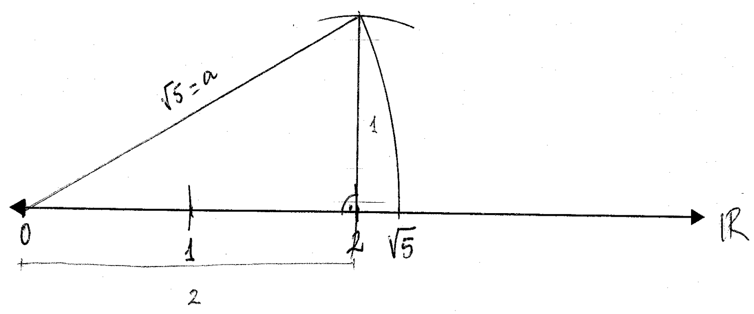
Sí, es posible; ~~entendiendo por~~ entendiendo por exacto, lo más o menos exacto (al igual que antes salvando los errores absolutos y relativos de aparato de medida y el mío a la hora de efectuar medidas). Lo haría mediante otro procedimiento gráfico muy sencillo; que se conoce como la mediatriz de un segmento.

1º/ Consideramos el segmento 1'414213... u.; pinchamos en un extremo con el compás con una abertura mayor a la mitad y trazamos dos arcos uno por encima y otro por debajo; análogamente y con la misma abertura pinchamos en el otro extremo del compás.

2º/ Unimos los puntos donde se cortan los arcos trazados anteriormente y obtenemos una recta; donde esta recta corte al segmento de longitud 1'414213... es la mitad "es exacta".

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 1a).
Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☐
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☒
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐
Compás: ☒
Calculadora: ☐
Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 2. a) Representa en la recta el número √5.



b) Explica el procedimiento utilizado.

Análogamente al caso anterior, sólo que ahora construyo un triángulo rectángulo de hipotenusa √5, y lo traslado con el compás a la recta IR. Me baso en los mismos fundamentos matemáticos.

$\sqrt{5} = a$; $a^2 = 1^2 + 2^2$ T. Pitágoras.

$a^2 = 1 + 4$

$a^2 = 5$

$a = \sqrt{5}$

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

Haciendo la salvación de lo que entiendo por exacto igual que en el caso anterior; considero que es la más exacta posible que se puede conseguir con los instrumentos con que trabajo.

d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a √5 unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?

Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

Sí es posible y el procedimiento es análogo al del apartado 1d); consiste en trazar la mediatriz de un segmento (proceso con anterioridad explicado)

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 2a).

Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☐

Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☒

Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☒

Compás: ☒

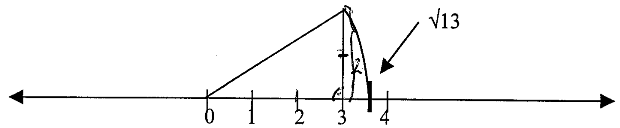
Calculadora: ☐

Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 3:

La pregunta indicada en el recuadro se planteó a algunos alumnos de Bachillerato y de Universidad (Licenciatura en Matemáticas):

En la siguiente figura se ha representado el número √13 utilizando el teorema de Pitágoras ¿Es exacta esa representación?



Se han extraído al azar las respuestas de dos alumnos. Lee atentamente cada una, y piensa si estás o no de acuerdo con ella.

Debes indicar tu opinión en la tabla que figura más abajo, con una cruz en la casilla correspondiente.

Claudia: *"Si es un número que tiene infinitas cifras decimales, jamás podríamos alcanzar el punto exacto, ya que tiene infinitas. Por mucho que estemos aquí."*

Federico: *"No es exacto, porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, coger un número exactamente, porque si haces una rayita más gorda, dentro de esa misma rayita hay un montón de números."*

Para expresar el grado de acuerdo con las respuestas anteriores completa la siguiente tabla, señalando con una cruz (x) en la opción elegida en cada caso.

	¿Estás de acuerdo?				
Alumno	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo	Muy de acuerdo
Claudia	☐	☒	☐	☐	☐
Federico	☐	☐	☒	☐	☐

Anexo 10.3: Respuestas sujeto 355

Código: | 3 | 5 | 5 | 1 |

Fecha: | 26 | 10 | 99 | Edad: | 17 | Sexo: Masculino ☐ Femenino ☒

Curso: | 1º |

Nota media de selectividad: | 6'05 |

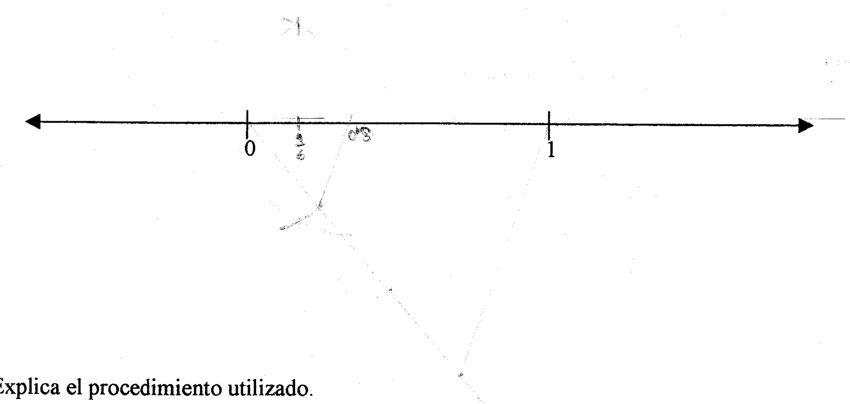
Razones por las que eligió Matemáticas:

Me gustan porque se analizan las cosas profundamente y se razona, se concreta, y por mi vocación de profesora.

¿Tiene aprobado Análisis Matemático de 1º?

Estoy cursando

Ítem 1. a) Representa en la recta el número 0'33333...



b) Explica el procedimiento utilizado.

El teorema de Thales. Si un haz de rectas son cortadas por paralelas (coplanarias, es decir, del mismo plano) se obtienen trozos de rectas semejantes.
Probando con la calculadora supé que $\frac{1}{3} = 0'\hat{3}$

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

No, porque al ser un número irracional, es decir, que tiene infinitos decimales la representación no puede ser nunca exacta.
Teóricamente el punto obtenido tiene que ser exacto pero en el trazo es muy difícil obtener la precisión para lograrlo con total exactitud.

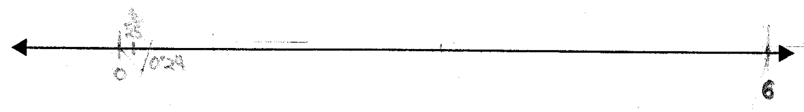
d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a 0'33333... unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

Mi respuesta es parecida a la anterior. Teóricamente, con la mediatriz se divide un segmento en dos partes iguales pero en el trazo es difícil la completa exactitud.
La mediatriz la haría así: pincharía con el compás en cada extremo del segmento. Se abre el compás más de la mitad del segmento y se hacen arcos por arriba y por debajo del segmento; éstos arcos se cruzan y uniéndolos nos da la mediatriz.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 1a).

Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☐
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☒
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☒
Compás: ☒
Calculadora: ☒
Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 2. a) Representa en la recta el número 0'24.



b) Explica el procedimiento utilizado.

Teorema de Thales

$\frac{24}{100} = \frac{6}{25} = 0'24$

Simplificando

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

Respuesta análoga a la del Ítem 1 excepto lo relacionado con los números irracionales, pues éste es racional.

d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a 0'24 unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

Respuesta análoga a la del Ítem 1

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 2a).

Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : [ ]
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): [X]
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): [X]
Compás: [X]
Calculadora: [X]
Otros: [ ] ¿Cuáles? ....

ANEXO 11

Ítem 3:
La pregunta indicada en el recuadro se planteó a algunos alumnos de Bachillerato y de Universidad (Licenciatura en Matemáticas):

En la siguiente figura se ha representado el número 0'63 ¿Es exacta esa representación?

Se han extraído al azar las respuestas de dos alumnos. Lee atentamente cada una, y piensa si estás o no de acuerdo con ella.
Debes indicar tu opinión en la tabla que figura más abajo, con una cruz en la casilla correspondiente.

Alicia: *"Sería muy inexacto. Si hubiese un método geométrico para poder conseguirlo, seguro que sí sería exacto."*

Federico: *"No es exacto, porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, tomar un número exactamente, porque si haces una rayita más gorda, dentro de esa misma rayita hay un montón de números."*

Para expresar el grado de acuerdo con las respuestas anteriores completa la siguiente tabla, señalando con una cruz (x) en la opción elegida en cada caso.

	¿Estás de acuerdo?				
Alumno	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo	Muy de acuerdo
Alicia	[ ]	[X]	[ ]	[ ]	[ ]
Federico	[ ]	[ ]	[ ]	[X]	[ ]

Lista de sujetos con y sin respuestas conflictivas seleccionados

Selección de sujetos con respuestas correctas

Los alumnos en los que no se observa respuesta conflictiva seleccionados son todos aquellos que figuran en las tablas de Valoración del Desempeño I y II con valor ‘0’ en las columnas correspondientes a ‘Inconsistencias observadas por la investigadora’ y que además poseen un desempeño correcto, salvo ligeras imprecisiones, en las tarea de representar un número en la recta y de describir el procedimiento de representación utilizado (ítems 1a, 1b, 2a y 2b del cuestionario). Ello supone seleccionar los alumnos que presentan, como dijimos, el valor “0” en las columnas 9 y 17 de la tabla I de Valoración del Desempeño, y en las columnas 7 y 11 de la tabla de Valoración del Desempeño II. Además, la exigencia del desempeño correcto salvo ligeras imperfecciones conduce a escoger de estos alumnos los que presentan en las columnas 3 y 12 de la tabla de Valoración del Desempeño I algunos de los siguientes valores: “00”, “21”, “22”, “23” ó “24”; y en las columnas 4 y 13 algunos de estos otros: “00”, “10”, “11”, “12” hasta “19”.

En las tablas siguientes se recoge toda la información contenida en las tablas de Valoración del Desempeño I y II de los alumnos con y sin respuesta conflictiva, organizadas de la siguiente forma:

Tabla A.11.1	Tabla de Valoración I	Alumnos con respuesta conflictiva
Tabla A.11.2	Tabla de Valoración II	Alumnos con respuestta conflictiva
Tabla A.11.3	Tabla de Valoración I	Alumnos sin respuesta conflictiva
Tabla A.11.4	Tabla de Valoración II	Alumnos sin respuesta conflictiva

SUJETOS CON RESPUESTAS CONFLICTIVAS Y RESOLUCIÓN CORRECTA

Suj.	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA															
	Ítem 1								Ítem 2							
	Procedimiento	V R	VE	Exactitud Representación		Cr	C R	IO	Procedimiento	V R	VE	Exactitud Representación		Cr	C R	IO
C1	C2	3	4	5	C6	7	C8	9	C10	11	12	13	C14	15	16	17
711	Tales1 (8)	00	00	2	Err humano e ins	f	**No**	**0**	D.U.1 (9)	00	00	2	Err hum, err perlód	i	**No**	**1**
123	D.U.2 (10)	21	00	1	∞ decimales	r	**No**	**1**	D.U.2 (10) 2v	00	00	2	3 decimales	r	**No**	**0**
723	Pitágoras	00	00	1	Número irracional	t	**No**	**1**	Tales1 (8)	00	15	0	Número racional	t	**No**	**0**
222	Pitágoras	00	10	0	No justifica	-	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	4	No justifica	-	**No**	**0**
823	Med/D.U.2 (5)	00	00	1	Reg, irrac, inf decim.	n	**No**	**1**	D.U.1 (8)	00	00	0	Div en 8 y tomar 5	r	**No**	**0**
322	Pitágoras	00	00	2	Mente, papel	f	**No**	**0**	Regla grad.	00	00	1	Infinitos puntos	f	**No**	**1**
135	D.U.2 (10)	00	00	1	Muchos decim, herra	i	**No**	**0**	D.U.2 (10)	00	00	1	Ídem 1c	i	**No**	**0**
731	Pitágoras	00	00	0	He seguido los proce	r	**No**	**0**	Tales1 (3)	00	00	3	No estoy segura	-	**Sí**	**0**
732	Pitágoras	23	00	0	Utiliz proced. e inst.	r	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	00	0	Proced específico	r	**No**	**0**
733	Pitágoras	23	16	0	Proc.para rep, raíz	r	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	00	0	Nº perió se repr exm.	r	**No**	**0**
234	Pitágoras	00	00	1	Nunca es precisa	f	**No**	**0**	Tales1 (3)	00	00	1	Nº inexistente	i	**No**	**1**
742	Med/Tales2 (5)	00	00	1	Nº irrac, inf. decim	q	**No**	**1**	Tales2 (10)	00	00	1	Interv más aprox	o	**No**	**0**
744	D.U.2 (10)	00	00	1	Inf dec., err material	s	**No**	**1**	D.U.2 (10)	00	00	1	irrac, err hum y mat.	e	**No**	**1**
341	Mediatriz2	00	00	1	Inf ptos, bolígr err	f	**No**	**1**	Mediatriz2	00	00	1	No justifica	-	**No**	**0**
155	D.U.1 (3)	00	00	1	Error al medir	f	**No**	**0**	Regla grad.	00	00	2	Unid más gdes, inex por mm	f	**No**	**0**
753	Tales1 (3)	00	00	1	Regla, aproximado	f	**No**	**0**	Regla grad	00	00	1	Regla no aprecia	f	**No**	**0**
253	Tales1 (3)	00	00	1	Nº infinito	r	**No**	**1**	Tales1 (25)	00	00	0	Nº exac, no perlód	r	**No**	**0**
255	D.U.1 (3)	00	00	1	Nº inf decim	i	**No**	**1**	Regla grad	00	00	0	Nº dec limitado	r	**No**	**0**
352	Tales1 (3)	00	00	2	Partes exa ig; dec inf	n	**No**	**1**	Regla grad	00	00	1	He tomado con regla	f	**No**	**0**
355	Tales1 (3)	00	00	2	Irrac., inf decim; teóricam exac	n	**No**	**1**	Tales1[0,6] (25)	00	00	2	Analogo 1, excepto irrac; racional	e	**No**	**0**

Tabla A.11.1: Alumnos con respuestas conflictivas, tabla de Valoración I

Alum.	DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR LA MITAD											
	Ítem 1					Ítem 2						
	Rta.	Términos usados	Cri	C/R/A	C/O	Rta.	Términos usados	Cri	C/R/A	C/O		
1	2	3	4	6	7	8	9	10	12	13		
711	0	mediatriz	f	No	**0**	2	Div. por 2, decimales	k	No	**1**		
123	1	Inf en decim	r	No	**1**	0	Decim no infinito	r	No	**0**		
723	1	Irrac, cifras indef dec.	G	No	**1**	0	Nº racional	t	No	**0**		
222	1	Nº de infinitas cifras	r	No	**1**	0	Sabemos sus cifras	r	No	**0**		
823	1	Imposible hallar el seg	f	No	**1**	0	mediatriz	f	No	**0**		
322	2	Rep gráf aprox	F	No	**0**	2	Igual que 1d	f	No	**0**		
135	1	Infinitos decim	r	No	**1**	1	Decimal peródico	r	No	**1**		
731	1	No exacta, tiene decim	r	No	**1**	1	Periód puro, inf decim	r	No	**1**		
732	1	Inf decimales	r	No	**1**	1	Nunca sería exacto	r	No	**0**		
733	1	Irracional, inf cifras	g	No	**1**	1	Cifras infinitas	r	No	**1**		
234	1	Inf decim, err mayor	i	No	**1**	1	Inf decim, grosor lápiz	i	No	**1**		
742	1	1’41... no es nº exacto	r	No	**1**	1	No es nº exacto	r	No	**1**		
744	1	Nunca acabaría; Nº irr	g	No	**1**	1	Nº irr, nunca term dec	g	No	**1**		
341	1	Pto no exac., inf nºs dec	r	No	**1**	0	Igual anterior (¿)	-	No	**0**		
155	2	Nº en período, hallar mitad	k	No	**1**	0	0’24:2=0’12	p	No	**0**		
753	1	Nº periódico, infinito	r	No	**1**	2	Gráf; numéricam.	k	No	**0**		
253	1	Inf; mitad infinita	r	No	**1**	0	Lonfgitud; div el nº	j	No	**0**		
255	1	Infinitos decimales	r	No	**1**	0	0’6cm equiv. 0’12 unid	f	No	**0**		
352	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**		
355	2	Mediatriz, difícil exac	f	No	**0**	2	Análogo al ítem 1	f	No	**0**		

Tabla A.11.2: Alumnos con respuestas conflictivas, tabla de Valoración II

ALUMNOS SIN RESPUESTAS CONFLICTIVAS Y RESOLUCIÓN CORRECTA

Suj.	REPRESENTACIÓN EN LA RECTA															
	Ítem 1								Ítem 2							
	Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR		Procedimiento	VR	VE		Exac. Repres.		CR	
C1	C2	3	4	5	C6	7	C8	9	C10	11	12	13	C14		16	
112	D.U.1 (8)	00	00	2	Err med., mediat.	f	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	12	2	A ojo	f	**No**	**0**
712	Tales1 (8)	00	11	1	Err med	f	**No**	**0**	Tales1 (9)	00	00	1	Err med	F	**No**	**0**
212	D.U.1 (8)	00	00	0	Dist 0a5/8 ig 0a2'5/4	i	**No**	**0**	Segm arb. 3 v	00	00	0	1/3.2=2/3	i	**No**	**0**
214	Mediatriz	00	00	2	Teór., práctica	f	**No**	**0**	Tales1 (3)	00	00	2	Teór., práctica	f	**No**	**0**
811	D.U.1 (8)	00	00	2	Aparatos ex.	f	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	00	2	Unidad, regla	f	**No**	**0**
812	Tales1 (8)	00	00	0	No decim	r	**No**	**0**	Tales1 (3)	00	00	0	Fracc, evitar decim	r	**No**	**0**
813	D.U.1 (8)	00	00	1	Decim., regla	i	**No**	**0**	D.U.1 (3)	00	00	1	Prec inst.	f	**No**	**0**
312	Tales1 (8)	00	00	1	Inst materiales	f	**No**	**0**	Segm arb 3v	00	00		Inst; err humanos	f	**No**	**0**
313	Tales1 (8)	00	00	0	Entender 5/8	f	**No**	**0**	Tales (3)	00	00	0	Ídem 1c	f	**No**	**0**
314	Mediatriz	00	00	0	geométricamente	f	**No**	**0**	Segm. arb 3v	00	00	0	1/3 más preciso	r	**No**	**0**
724	Pitágoras	00	00	0	No justifica	-	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	0	Número racional	t	**No**	**0**
725	Med/Regla grad.	22	00	1	Es una aproximación	f	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	0	Número racional	t	**No**	**0**
223	Pitágoras	00	00	0	Sistema; teóricam.	k	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	0	Teóricam., procedim	i	**No**	**0**
821	Med/Tales2 (5)	00	00	1	Toda med. tiene err	f	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	1	Nunca med. exacta	f	**No**	**0**
822	Med/Tales2 (5)	00	00	1	Toda med. tiene err	f	**No**	**0**	Tales1 (8)	00	00	0	No util. Inst, err	f	**No**	**0**
134	Regla grad.	22	00	1	Regla, aproximado	f	**No**	**0**	Regla grad.	00	00	1	No cpz. marc exa. pto	f	**Sí**	**0**
233	Pitágoras	00	00	2	Proc. exac, absol. prec	i	**No**	**0**	Segm. arb. 3v.	00	00	2	Ídem 1c	i	**No**	**0**
832	Tales2 (4)	00	00	1	Err prec. Inst	i	**No**	**0**	Tales1 (3)	00	00	1	Mín err, inst 1mm	f	**No**	**0**
335	Regla grad	00	00	1	He despreciado dec.	i	**No**	**0**	Regla grad.	00	00	1	Decim, aprox. buena	i	**No**	**0**
144	D.U.2 (10)	21	00	1	Dec., div. Más comp	r	**No**	**0**	D.U.2 (10)	21	00	1	Div más compleja	r	**No**	**0**
244	Regla grad.	00	00	1	Margen error	f	**No**	**0**	Pitágoras	00	00	1	Margen error	f	**No**	**0**
841	D.U.2 (2) y (5)	21	00	0	No justifica	-	**No**	**0**	D.U.(2)/T2 (5)	00	00	1	Medir a ojo	f	**No**	**0**
343	Pitágoras	00	00	2	Inst err, proced exac	i	**No**	**0**	Pitágoras	00	00	2	Ídem1c	i	**No**	**0**
344	Pitágoras	00	00	1	Aprox., Impr ins	f	**No**	**0**	Pitágoras	00	00	1	Aprox, err inst	f	**No**	**0**
345	Regla grad	00	00	1	No alcanza nº, acota	o	**No**	**0**	Regla grad	00	00	1	Idem 1c, intervalo	o	**No**	**0**
251	Tales1 (3)	00	00	0	Proceso correcto	r	**No**	**0**	Tales1 (4) y (25)	00	00	0	Proceso utilizado	r	**No**	**0**
252	Tales1 (3)	00	00	0	Método muy fiable	r	**No**	**0**	Tales1 (25)	00	00	2	Bast. fiable, tant nºs	f	**No**	**0**
254	Tales1 (3)	00	00	0	1/3 igual a 0'3	r	**No**	**0**	Tales1 (25)	00	00	0	0'24 igual a 6/25	r	**No**	**0**
855	Regla grad	00	00	1	Aprec regl, rech dec., no cálc matem	i	**No**	**0**	D.U.2 (4)	00	00	1	Regla, ojo, no cálc. matem.	f	**No**	**0**

Tabla A.11.3: Alumnos sin respuestas conflictivas, tabla de Valoración I

Alum.	DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR LA MITAD									
	Ítem 1					Ítem 2				
	Rta.	Términos usados	Crit	C/R/A	**C/O**	Rta	Términos usados	Crit	C/R/A	**C/O**
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	C11
112	0	Mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
712	0	mediatriz	f	No	**0**	0	Error medida	f	No	**0**
212	0	2’5/8; mediatriz	j	No	**0**	0	0’5/3; mediatriz	j	No	**0**
214	2	Bisectriz, marg. error	f	No	**0**	2	Bisectriz, marg. error	f	No	**0**
811	0	Unidad 5 partes, 5/2	j	No	**0**	0	1/3 se div. entre 2, 1/6	p	No	**0**
812	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
813	2	Mido, divido en dos	f	No	**0**	2	1/6; fracción, med err	i	No	**0**
312	2	Mediatriz, no exacta	f	No	**0**	2	Mediatriz, no exacta	f	No	**0**
313	0	Procedimiento (Tales)	f	No	**0**	0	Misma forma (Tales)	f	No	**0**
314	0	mediatriz	f	No	**0**	0	Mediatrices	f	No	**0**
724	0	Div; irrac, cifras det	h	No	**0**	0	2’5/4	p	No	**0**
725	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
223	0	Mediatriz	f	No	**0**	0	Mediatriz, técnica	f	No	**0**
821	0	mediatriz	f	No	**0**	0	Mismo proc. 1d	f	No	**0**
822	0	Utiliz compás(med)	f	No	**0**	0	Lo mismo que 1d	f	No	**0**
134	2	Aprox; Recta mejor gradu	f	No	**0**	2	Aprox., medida	f	No	**0**
233	0	(mediatriz)	f	No	**0**	0	Mismo razon	f	No	**0**
832	2	Error, dividir unidad	f	No	**0**	0	Mismo método (Tales)	f	No	**0**
335	0	√5/2; 30’18 mm	j	No	**0**	0	Div por dos obt. 0’166	p	No	**0**
144	0	Calculad, regla, bisect	j	No	**0**	0	bisectriz	f	No	**0**
244	0	Longitud, mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
841	0	Mediría con la regla	f	No	**0**	0	Misma forma	f	No	**0**
343	2	Err med, mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
344	2	Aprox., (mediatriz)	f	No	**0**	0	Procedimiento anál 1d	f	No	**0**
345	1	Acotar esa mitad	o	No	**0**	1	intervalo	o	No	**0**
251	0	mediatriz	f	No	**0**	0	mediatriz	f	No	**0**
252	0	bisectirz	f	No	**0**	0	Bisectriz o regla	f	No	**0**
254	0	Div el segmento	r	No	**0**	0	Tomaba 3/25 [de la recta]	k	No	**0**
855	0	Cif inf; mediatriz	i	No	**0**	0	Regla, med, no inf cif	i	No	**0**

Tabla A.11.4: Alumnos sin respuestas conflictivas, tabla de Valoración II

ANEXO 12

Interpretación de las respuestas no conflictivas mediante los criterios

Las tablas A.12.1 y A.12.2 incluyen las respuestas correctas a las tareas Valoración de la exactitud de la representación y Valoración de la posibilidad de dividir el segmento obtenido por su mitad, respectivamente. Todas las respuestas han sido organizadas según los argumentos expuestos en 6.2.4.3.2 y 6.2.4.3.3. Para cada respuesta se ha indicado el código del alumno correspondiente y el número que debía representarse.

Suj	Núm.	Respuestas no conflictivas a Tarea 1
112	5/8	"Más o menos. [Puede que no sea exacta porque me he podido equivocar un poco al tomar la medida o al hacer las divisiones pero es prácticamente exacta.]**F2** [Para evitar equivocarme demasiado al hacer las divisiones, en vez de hacerlo a ojo o con la regla he ido haciendo las mediatrices hasta conseguir las ocho divisiones]**F1**, [esto lo he hecho con el compás, así el error en la medida es menor.]**F2**
112	0'33...	["Es más o menos exacta, aunque menos que en el caso anterior ya que las divisiones esta vez las he hecho un poco a ojo o con la regla y no con el compás."]**F1**
712	5/8	[Aproximadamente. Siempre se comete un error al medir."]**F2**
712	0'33...	[Aproximadamente, siempre se comete un error al medir."]**F2**
212	5/8	["Sí, lo sé porque si simplifico la fracción (tendría entonces 2'5/4)] **P2** y la represento: (representación de 2'5/4 mediante división de la unidad) [Entonces, la distancia de 0 a 5/8 (1ª representación) es igual a la distancia de 0 a 2'5/4 (2ª representación)."]**F4**
212	0'33...	[Sí, porque si cojo el segmento 0 - 1/3 veo perfectamente que es la mitad del 1/3-1 que son 2/3] **F4-R2**; [y 2/3 es el doble de 1/3. 1/3 . 2 = 2/3] **P3**
214	5/8	["No, porque el compás siempre tiene un margen de error ya que no siempre se pincha en el centro de la raya hecha y además la punto del compás no está bien afilada. O sea teóricamente debería ser exacta la representación pero en la práctica no lo es.] **F2**
214	0'33...	["Teóricamente sí prácticamente no ya que en el dibujo siempre tiene un margen de error como ya expliqué anteriormente; pero en esta casi inapreciable a simple vista.] **F2**
811	5/8	["Sí, aunque es relativo. Muy exacto no es, no dispongo de aparatos más exactos."] **F2**
811	0'33...	"Sí, es igual que el anterior. [Se podría precisar más, pero me he equivocado. Si hubiera tomado como unidad 3 cm, al representar el 1/3, hubiera cogido 1 cm, mientras que al cogerla como 5 cm, no he podido precisar, he llegado al 0'6 mm]**F1-R2**, [y la regla no da para tanto."]**F2**

Tabla A.12.1: Respuestas no conflictivas a la Tarea 1 según los criterios (véase tabla 6.28)

Suj.	Núm.	Respuestas no conflictivas a Tarea 1
812	5/8	"Sí. [La representación es exacta (aunque mi construcción en concreto no lo sea, pues no he sido meticuloso).]**F2** [Mediante este sistema no jugamos con decimales, y ello hace que el resultado sea exacto."]**R2**
812	0'33...	"La representación es exacta, por el mismo motivo que en el caso anterior: [trabajamos con fracciones (divisiones de segmentos) para evitar la falta de exactitud de los decimales."]**R2**
813		["No porque las partes que se obtienen al dividir la longitud 01 entre 8]**F1** [son decimales: 0'6875]**R1** y [la regla sólo aprecia hasta 1 cm."]**F2**
813	0'33...	["No, por la precisión del instrumento, pero es bastante aproximada."]**F2**
312	5/8	["No, porque es muy difícil obtener exactitud en el trazado con instrumentos materiales (más si son malos) que siempre tienen error. Si no es el error suyo, seguramente será del que los utiliza.]**F2**
312	0'33...	["No, por los instrumentos y por los errores humanos de vista, pulso, movimientos (que influyen a la hora de pinchar en el compás, por ejemplo).]**F2**
313	5/8	["Pienso que sí. Una forma de entender 5/8 es dividir la unidad en 8 partes iguales y sumar 5 de esas partes, empezando, obviamente, por el 0."]**F1**
313	0'33...	["Por la misma razón que antes, pienso que sí.]**F1**
314	5/8	"Creo que sí, creo que es lo más exacta posible[ya que no lo he hecho a ojo, sino que lo he hecho geométricamente."]**F1**
314	0'33...	["Creo que es la más exacta que se podría realizar ya que si hubiese tomado los decimales, no hubiese sido tan precisa ya que siempre se me escaparían decimales y por ello he utilizado el 1/3 que es más preciso."]**R2**
724	1'41...	"Sí."
724	5/8	["Sí, porque es un nº racional."]**T1**
725	1'41...	["No, porque no es correcta, es una aproximación."]**F1**
725	5/8	["Sí, porque es un número racional."]**T1**
223	1'41...	["Mediante este sistema la respuesta es totalmente exacta (teóricamente).]**F2** [Lo que pasa es que ha dado la casualidad de que el número a representar es raíz cuadrada de un número natural y por lo visto la tarea se facilita mucho."]**P3**
223	5/8	["La representación realizada es (teóricamente, ya que siempre hay errores al trazar las rectas y paralelas) totalmente exacta]**F2** [ya que el procedimiento utilizado divide el segmento en el número de partes que queramos y exactamente iguales.]**F1**
821	1'41...	["No es exacta porque toda medida tiene un error. No existe la medición perfecta.]**F2**
821	5/8	["Nunca una medida puede ser exacta, sin embargo, mi medida es muy aproximada."]**F2**
822	1'41...	["No es aproximado puesto que toda medida puede tener un error, éste puede ser sistemático (por las personas) y los de los instrumentos.]**F2**
822	5/8	["Sí porque no he utilizado instrumentos que tengan un margen de error]**F2** [como puede ser dividir con la calculadora y obtener milésima imposible de representar."]**P5**
134	$\sqrt{5}$	["No, porque con la regla no puedo medir exactamente el punto que se pide pero es un valor aproximado.]**F2**
134	0'33...	["No, porque no soy capaz de marcar exactamente dicho punto."]**F2**
233	$\sqrt{5}$	["Debería ser exacta, puesto que este procedimiento es exacto]**F1**, [pero al no haber trabajado con absoluta precisión, es posible que haya algunas diferencias en el resultado final."]**F2**
233	0'33...	[Ídem a la anterior.]F**1-F2**

Continuación tabla A.12.1: Respuestas no conflictivas a la Tarea 1 según los criterios (véase tabla 6.28)

Suj.	Núm.	Respuestas no conflictivas a Tarea 1
832	√5	[“No, siempre hay errores]**F2** y [además en este cálculo se ha aproximado por exceso a 2’25]**P2**, [así que como mínimo hay 0’2 , el error que se comete con la precisión del instrumento: 1 mm. Además nunca se podrá conseguir la medida exacta (Con los decimales finitos).”]**F2**
832	0’33...	[“Si no es exacto podría decir que tiene el mínimo error: el del instrumento 1 mm.]**F2**
335	√5	[“Exacta, exacta no porque he despreciado algunos decimales]**P2**, luego por tanto ya no es exacta, sin embargo existen otras formas de hacerlo con las que podría salir exacto, pero ahora mismo no lo recuerdo, era como haciendo triángulos.”]**F1**
335	0’33...	[“Exacta lo que se dice exacta no pienso que esté por los decimales]**R1**, pero pienso que es una aproximación bastante buena, [ya que al tener en cuenta la proporción]**P4** tampoco despreciamos tantos decimales de mm.]**P2**
144	1’41...	[“No, es un número con muchos decimales]**R1**, y para representarlo exactamente [habría que hacer divisiones más complejas... Así queda representado (1´41) de una forma más elemental.]**F1**
144	√5	[“No porque para representar el nº con todos sus decimales exactamente]**R1**, [habría que hacer la división más compleja. Está representado de una forma más elemental (2,23)”]**F1**
244	1’41...	[“No, porque algunas décimas, centésimas, milésimas, etc. no se puede representar correctamente en su totalidad ya que hay un margen de error, este error es muy poco apreciable pero existe.]**F2**
244	√5	[“Exactamente no, porque siempre va ha haber un margen de error, pero ese margen de error puede ser en la abertura no apropiada del compás o al plasmar las medidas con el lápiz.]**F2**
841	1’41...	Yo creo que sí es exacta.
841	√5	[“Creo que no es muy exacta que digamos. Eso de medir a ojo no es muy exacto.]**F1**
343	1’41...	[“Si entendemos por exacto no cometer ningún error, no, no es exacto; además sería imposible; ya que los instrumentos de medida ya llevan un error implícito; y al medir nosotros cometemos errores.]**F2** [Salvando estas “pequeñas distancias” bajo mi punto de vista es el procedimiento más exacto posible.”]**F1**
343	√5	[“Haciendo la salvación de lo que entiendo por exacto igual que en el caso anterior; considero que es la más exacta posible que se puede conseguir con los instrumentos con que trabajo.]**F1**
344	1’41...	[“Es aproximado ya que se comete siempre error por la imprecisión de los instrumentos utilizados (lápiz, compás, regla ...) pero nos da una idea intuitiva y permite una visualización gráfica para su mejor entendimiento.]**F2**
344	√5	[“Como justificaba en el ítem 1c) no es exacta la representación pero sí aproximada si queremos visualizar en una recta dicho número. El sistema de medición que poseemos no nos permite precisar con exactitud, siempre hay un margen de error por los instrumentos utilizados.]**F2**
345	1’41...	[“No, no es exacta, porque no llego al alcanzar el número lo único que consigo es acotarlo entre dos valores.]**O1**
345	√5	[“No, ocurre igual que en el caso anterior, he hallado un intervalo (que puede ser muy pequeño, pero que no es √5.”]**O1**
251	0’33...	[“Sí, puesto que la división del segmento es lo más exacta posible ya que las tres partes obtenidas por dicho teorema van a ser siempre iguales, siempre y cuando el proceso de mecánica sea el correcto.]**F1**
251	0’24	[“Sí ya que el proceso utilizado es el mismo que el anterior, es decir, se utiliza el Teorema de Thales, en ambas divisiones para que estas sean lo más perfectas posibles.”]**F1**

Continuación tabla A.12.1: Respuestas no conflictivas a la Tarea 1 según los criterios (véase tabla 6.28)

Suj.	Núm.	Respuesta no conflictivas a Tarea 1
252	0’33...	[“Sí lo es ya que como dije antes, he utilizado el Teorema de Tales para la representación y un método muy fiable con ayuda de la escuadra y el cartabón.]**F1**
252	0’24	[“Lo cierto es que nada puede ser lo suficientemente preciso y menos el humano aunque es bastante fiable] **F2**, aunque cuando llegas ya a hacerlo con tantos números como yo lo he hecho puede no ser lo totalmente correcto.”]**F1**
254	0’33...	[“Sí, porque la 3º parte de 1 es decir 1/3 es igual a 0’$\overline{3}$.”]**R2**
254	0’24	[“Sí puesto que 0’24 es igual a 6/25.]**R2**
855	0’33...	[“En mi caso, la representación no sería exacta, ya que la apreciación de la regla es en cm.]**F2** [Además, debemos de tener en cuenta, que he rechazado los decimales (algunos, como el tres periódico).]**P2** [Hay que contar con que no se han usado cálculos matemáticos avanzados para realizarlo]**P1** y [que además tenemos un folio sin ninguna marca característica para apoyarnos.”]**F2**
855	0’24	[“No sería exacto ya que utilizamos prácticamente una regla y ojo casi todo.]**F1** Además no he utilizado cálculos matemáticos para hallarlo.]**P1**

Continuación tabla A.12.1: Respuestas no conflictivas a la tarea 1 según los criterios (véase tabla 6.28)

Suj.	Núm.	Respuestas no conflictivas a Tarea 2
112	5/8	[“Sí, hallando con el compás la mediatriz de dicho segmento (5/8). (Gráfico). Si tenemos un segmento trazamos desde cada uno de sus extremos un arco de radio mayor que la mitad del segmento con el compás, y unimos los puntos en los que se cortan los arcos. Estos forman una línea perpendicular al segmento que es la mediatriz.”] **F1**
112	0’33...	[“Sí. Con la mediatriz del segmento, igual que en el ejercicio anterior.”] **F1**
712	5/8	[“Sí, bajando la mediatriz. Se trazan dos semicírculos desde el 0 a 5/8 y donde se corten se hace una recta.”] **F1**
712	0’33...	[Se podría pero se cometería un error de medida grande.] **F2**
212	5/8	[“- Sí, tan sólo tendríamos que dividir el numerador por la mitad. 2’5/8] **P1** [- También podríamos una vez dado el segmento 5/8 trazar su mediatriz. (gráfico).”] **F1**
212	0’33...	[“Sí, divido el numerador por 2 $\rightarrow$ 0’5/3] **P1** o, [como en el caso anterior realizo la mediatriz.] **F1**
214	5/8	[“Se hallaría la bisectriz] **F1** [pero no sería exacto del todo debido al margen de error ya explicado en el apartado anterior.”] **F2**
214	0’33...	[Sí con una bisectriz] **F1**, [pero como ya he dicho siempre hay margen de error.] **F2**
811	5/8	[“Sí. Tomaría como unidad las 5 partes]**F1**, [y las dividiría entre 2, 5/2.”]**P1**
811	0’33...	[“Sí, sabiendo que 0’$\overline{3}$ = 1/3.]**R2** [1/3 se divide entre 2 $\rightarrow$ 1/6.”]**P1**
812	5/8	“Sí, es posible. Trazaría la mediatriz del segmento 0 5/8. Para ello, tomo una medida mayor que la mitad del segmento, y trazo un arco por encima y por debajo del segmento con centro en 0. Con la misma amplitud de compás y centro en 5/8, repito la operación. Uno los dos puntos en que se cortan los arcos y obtengo la mediatriz.]**F1**
812	0’33...	[“Se puede dividir de forma idéntica a la señalada en el caso anterior: trazando la mediatriz del segmento = 1/3.”]**F1**

Tabla A.12.2: Respuestas no conflictivas a la Tarea 2 según los criterios (véase tabla 6.31)

Suj.	Núm.	Respuestas no conflictivas a Tarea 2
813	5/8	[“Mido desde el punto 0 al 5/8 y divido en dos partes iguales, cada 1 sería de 1’75 cm.]**F1-P1** [Si tuviera un instrumento que apreciase hasta ½ cm lo podría dividir más exactamente aunque siempre habrá un mayor o menor error en la medida que hallamos. (Los errores ya van con el hecho de medir.)]**F2**
813	0’33...	[La representación sería 1/6.]**P1** [Se puede hacer la representación más exactamente si lo representamos por una fracción.]**R2** [Pero cada medida tiene error.”]**F2**
312	5/8	[“Podría hacerse una división por la mitad haciendo la mediatriz del segmento]**F1**, [pero como digo pienso que no es posible una división exacta por las mismas razones que en c).]**F2**
312	0’33...	[“Se podría dividir por la mitad usando una mediatriz]**F1**,]pero no sería exacto por las razones de c). Aunque si pensamos que dividir es dividir exactamente, me vería forzado a decir que no es posible dividir por la mitad.]**F2**
313	5/8	“Creo que sí. [De nuevo, se repetiría el mismo procedimiento, dividiendo el intervalo [0, 5/8] en dos partes iguales. Si no queremos hacerlo sobre la misma recta, podemos trasladarlo, tomando la longitud con el compás, a otro sitio, y allí repetir el procedimiento de división.”]**F1**
313	0’33...	[“De nuevo, se puede dividir exactamente por la mitad. Dividiendo de la misma forma, en este caso el intervalo [0, 1/3].”]**F1**
314	5/8	[“Sí es posible y lo he hecho de forma análoga a la anterior, es decir, he trazado la mediatriz al segmento 0-0’625=5/8 y así he obtenido el pto. medio de dicho segmento, es decir, el pto. 5/16.”]**F1**
314	0’33...	[“Sí, y lo haría por el procedimiento de las mediatrices; es decir, le trazaría la mediatriz al segmento 0, 1/3 y así hallaría su pto. medio.”]**F1**
724	1’41...	[“Se puede dividir entre 2]**P1**, [sólo que es un nº irracional]**T1**, [y tienes que poner unas cifras determinadas.”]**P2**
724	5/8	[“Sí, 2’5/4.”]**P1**
725	1’41...	(Gráfico) [“Calculo nuevamente la mediatriz del segmento obtenido desde el punto 0 hasta el 1’4142136...”]**F1**
725	5/8	[“Sí, trazándole la mediatriz al segmento obtenido.”]**F1**
223	1’41...	[“Podemos dividirlo fácilmente por la mitad utilizando la técnica para hallar la mediatriz de un segmento. El procedimiento a seguir sería el siguiente: Con centro en uno de los extremos del segmento a dividir y con la apertura del compás más de la mitad trazamso un arco. Con centro en el otro extremo y la apertura del compás igual trazamos otro arco que corta al anterior en dos puntos P y M. Unimos esos dos puntos y donde corte el segmento PM al que queremos dividir es exactamente el centro del mismo. Punto O.” (gráfico)]**F1**
223	5/8	[“Sí es posible. Podemos dividirlo mediante el proceso descrito anteriormente de la mediatriz o también con la técnica utilizada para dividirlo en 8 partes iguales. Con el compás trazamos en la misma recta r o otra hecha s dos partes iguales. Trazamos una recta que pase por el punto de s 2 y el punto 5/8 y después se traza una paralela a 2 5/8 que pase por el punto 1 de s.”]**F1**
821	1’41...	[“Sí. Proceso: se hace la mediatriz de dicho segmento mediante el compás. Ejemplo: (acompaña gráfico)”]**F1**
821	5/8	[“Sí, por el mismo procedimiento que en la pregunta 1d] **F1** [(aunque exacto nunca sale).”]**F2**
822	1’41...	[“Sí, utilizando el compás. Con una apertura mayor a la mitad del segmento trazaría un arco por encima y por debajo del segmento desde los dos extremos y uniría los puntos obtenidos (acompaña gráfico):”]**F1**

Continuación tabla A.12.2: Respuestas no conflictivas a la Tarea 2 según los criterios (véase tabla 6.31)

Suj.	Núm.	Respuestas no conflictivas a Tarea 2
822	5/8	[“Sí, se responde lo mismo que en la 2d.”]**F1**
134	√5	[“He conseguido un valor aproximado. Sí es posible dividirlo pero tendría que tener una recta mejor graduada.”]**F2**
134	0’33...	Aproximadamente sí. [Sí es posible, teniendo mucha precisión a la hora de marcar el punto]**F2** [ya que la medida se puede obtener con la calculadora.”]**P3**
233	√5	[“Sí, es absolutamente posible mediante la división de un segmento de recta en dos partes iguales trazando algunos arcos con el compás.” (acompaña gráfico)]**F1**
233	0’33...	[“Sí, es posible por el mismo razonamiento que el ejercicio anterior.”]**F1**
832	√5	[“Exactamente no, siempre habrá un error]**F2**, [pero aproximadamente sería hacerlo como lo hemos hecho al dividir la unidad 1.]**F1**
832	0’33...	[“Pues por el mismo método de antes (¿Hace falta que lo explique?)]**F1**
335	√5	[“Sí es posible dividirlo por la mitad, tan solo tengo que dividir √5 entre 2 y ya está. √5/2 = 1’11 unidades] **P1** [que en el papel le corresponden 30’18 mm.]**F1**
335	0’33...	[“Sí, todo es posible dividirlo entre dos, a excepción del cero, ya que cero dividido entre dos también es cero y obtenemos el mismo número. Por tanto: 0’33333 al dividirlo por dos obtenemos 0’166665.]**P1**
144	1’41...	[“Para dividirlo entre 2]**P1**, [o se coge la calculadora]**P3**, [o con una regla precisa se toma la mitad. (Acompaña gráfico). O trazando las bisectrices.]**F1**
144	√5	[“Sí, trazando la bisectriz (acompaña gráfico). Pinchando el compás en ambos extremos, y con una abertura mayor que la mitad.”]**F1**
244	1’41...	[“El segmento de longitud 1’4142136... unidades es posible dividirlo por la mitad, pero [...] matemático (se puede realizar de este modo pero es muy complicado), [para que resultase más cómodo y fácil de hacer se puede realizar una mediatriz la cual hace que el segmento se divide en dos partes iguales.”]**F1**
244	√5	[“Sí, como en el ejercicio anterior (1.a) se puede realizar de la misma forma, realizando la mediatriz la cual divide al segmento en dos partes iguales.]**F1**
841	1’41...	[“Mediría con la regla la distancia de 0 a 1’4142136]**F1**, [y dividiría esa distancia entre 2.]**P1** [Entonces lo señalaría en la recta.]**F1**
841	√5	[“De la misma forma q en el ejercicio anterior.”]**F1-P1**
343	1’41...	[“Sí, es posible; entendiendo por exacto, lo más o menos exacto (al igual que antes salvando los errores absolutos y relativos de aparatos de medida y el mío a la hora de efectuar medidas).]**F2** [Lo haría mediante otro procedimiento gráfico muy sencillo; que se conoce como la mediatriz de un segmento. 1) Consideramos el segmento 1’414213... u.; pinchamos en un extremo con el compás con una abertura mayor a la mitad y trazamos dos arcos uno por encima y otro por debajo; análogamente y con la misma abertura pinchamos en el otro extremo del compás. 2) Unimos los puntos donde se cortan los arcos trazados anteriormente y obtenemos una recta y donde esta recta corte al segmento de longitud 1’414213... es la mitad ‘exacta’.”]**F1**
343	√5	[“Sí es posible y el procedimiento es análogo al del apartado 1d); consiste en trazar la mediatriz de un segmento (proceso con anterioridad explicado.]**F1**
344	1’41...	[“Como afirmaba en el inciso c), no es posible una representación exacta en el sentido estricto de la palabra, pero sí una aproxi0mada, es decir podríamos afinar.]**F2** [Procedimiento: Pinchando con el compás en los extremos del segmento, respectivamente, de longitud igual a 1’4142136 unidades y con la longitud del segmento trazamos dos arcos. Dichos arcos se cortarán en dos puntos y uniéndolos ambos con una recta, el segmento nos queda dividido, aproximadamente, por la mitad.]**F1**

Continuación tabla A.12.2: Respuestas no conflictivas a la Tarea 2 según los criterios (véase tabla 6.31)

Suj.	**Núm.**	**Respuestas no conflictivas a Tarea 2**
344	√5	[“Procedimiento análogo al explicado en el inciso d) del ítem 1.”]**F1**
345	1’41...	[“No, no es posible dividirlo por la mitad, porque nos encontraríamos con el mismo problema, podríamos llegar a acotar esa mitad.]**O1**
345	√5	[“No, porque en este caso, obtendríamos un intervalo en el cual estaría la mitad, pero no podríamos llegar a conocer cuál es exactamente esa mitad.]**O1**
251	0’33...	(Acompaña gráfico) “Sí es posible y para ello trazo la mediatriz del segmento que me va a decir el punto medio del mismo.”]**F1**
251	0’24	[“Al igual que en el caso anterior podríamos trazar la mediatriz de dicho segmento y de esa forma hallar el punto medio.”]**F1**
252	0’33...	[“Si lo hiciésemos con calculadora] **P3**, [el resultado sería muy difícil representarlo en el dibujo.]**F2**]Con que, es mejor, hallar una simple bisectriz al segmento. (Acompaña gráfico) Imaginando que fuera así. Hallamos la bisectriz con el compás. Para el ejercicio anterior he hallado con el compás los puntos A y B (se hacen desde el punto 0 y 1/3, y sin cerrar ni abrir el compás) después trazo una recta entre esos dos puntos y tengo la mitad.]**F1**
252	0’24	[“Si con el mismo método de la bisectriz o simplemente con una regla.]**F1**
254	0’33...	[“Sí, dividimos el segmento entre el intervalo 0 y 0’~~3~~ en 2 partes y ese punto equivale a 0’1~~6~~ que es lo que se nos ha pedido”]**P1** [(acompaña gráfico de trazado de mediatriz)]**F1**
254	0’24	[“En vez de tomar 6/25 de la recta tomaba 3/25 de ella.]**F1-R2**
855	0’33...	[“Aunque tiene cifras infinitas]**R1**, [sería posible dividirlo por la mitad trazando la mediatriz de este segmento.]**F1** Pero como no soy de matemáticas me temo que no me será posible realizarlo ya que no recuerdo exactamente el procedimiento.
855	0’24	[“Este sería posible dividirlo con una regla (aunque se pueda hacer con la mediatriz)]**F1**, [ya que aunque tenemos un nº decimal no tiene infinitas cifras]**R1** [para poder dividirlo]**P1**; para hacerlo cogería la regla, y según la medida correspondiente en regla-papel lo dividiría en la mitad 0’12.”]**F1-P1**

Continuación tabla A.12.2: Respuestas no conflictivas a la Tarea 2 según los criterios (véase tabla 6.31)

ANEXO 13

Puntuaciones otorgadas por el profesor en ejercicio a los ítems 1 y 2

En el presente anexo incluimos las puntuaciones otorgadas por el profesor a los ítems 1 y 2 del cuestionario. En la tabla A.13.1 indicamos el código correspondiente a las columnas de la tabla A.13.2.

Col	Título		Descripción contenido
1	Alum.		Código correspondiente al alumno.
2	Nivel		Nivel al que pertenece el alumno. (0: 1º Bachillerato; 1: 2º Bachillerato; 2: 1º Licenciatura Matemáticas)
3	Núm.		Número que se representa en el ítem.
4	Conflicto		Ausencia o presencia de respuesta conflictiva en Tareas 1 y 2. (0: Sin conflicto; 1: Conflicto)
5	Punt.		Puntuación otorgada al ítem por el profesor.
6	Ítem c (Tarea 1)	Conf.	Ausencia o presencia de respuesta conflictiva en el ítem c. (0: Sin conflicto; 1: Conflicto 1; 2: Conflicto 2)
7		Conf. 1	Ausencia o presencia de respuesta conflictiva relacionada con el conflicto 1 en el ítem c. (0: Sin conflicto 1; 1: Conflicto 1)
8		Punt.	Puntuación otorgada por el profesor al ítem c. (Valores posibles: 0, 1 , 2 y 3)
9		Punt. p.	Puntuación del profesor estimada entre 0 y 1. (Valores posibles: 0, 0’33, 0’5, 0’66, 1)
10	Item d (Tarea 2)	Conf.	Ausencia o presencia de respuesta conflictiva (conflicto 1) en el ítem d. (0: Sin conflcito; 1: Conflicto 1)
11		Punt.	Puntuación otorgada por el profesor al ítem d. (Valores posibles: 0, 1, 2 y 3)
12		Punt. p.	Puntuación del profesor estimada entre 0 y 1. (Valores posibles: 0, 0’33, 0’5, 0’66, 1)

Tabla A.13.1: Código de identificación de las columnas de la tabla A.13.2

Alum.	Nivel	Núm.	Núm.	Punt.	Ítem c (Tarea 1)				Ítem d (Tarea 2)		
					Conf.	C. 1	Punt.	Punt.	Conf.	Punt.	Punt.
C. 1	**C. 2**	**C. 3**	**C. 4**	**C. 5**	**C. 6**	**C. 7**	**C. 8**	**C. 9**	**C. 10**	**C. 11**	**C. 12**
711	0	5/8	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
123	0	1’4...	1	5,00	1	1	3,00	1,00	1	,00	,00
723	0	1’4...	1	4,00	1	1	,00	,00	1	,00	,00
222	1	1’4...	1	2,00	0	0	,00	,00	1	,00	,00
823	1	1’4...	1	7,00	1	1	3,00	1,00	0	,00	,00
322	2	1’4...	0	6,00	0	0	2,00	,66	0	,00	,00
135	0	√5	1	7,00	0	0	3,00	1,00	1	,00	,00
731	0	√5	0	7,00	0	0	3,00	1,00	0	,00	,00
732	0	√5	1	7,00	0	0	3,00	1,00	1	,00	,00
733	0	√5	1	7,00	0	0	3,00	1,00	1	,00	,00
234	1	√5	0	7,00	0	0	3,00	1,00	0	,00	,00
742	0	1’4...	0	7,00	0	0	3,00	1,00	0	,00	,00
744	0	1’4...	1	5,00	1	1	3,00	1,00	1	,00	,00
341	2	1’4...	0	10,00	2	0	3,00	1,00	0	3,00	1,00
155	0	0’3...	1	1,00	0	0	,00	,00	1	,00	,00
753	0	0’3...	1	8,00	0	0	2,00	1,00	1	,00	,00
253	1	0’3...	1	6,00	1	1	,00	,00	1	,00	,00
255	1	0’3...	1	4,00	1	1	,00	,00	1	,00	,00
352	2	0’3...	1	10,00	1	1	2,00	1,00	0	2,00	1,00
355	2	0’3...	1	8,00	1	1	,00	,00	0	2,00	1,00
711	0	0’3...	1	8,00	1	1	2,00	1,00	0	,00	,00
123	0	5/8	0	4,00	0	0	1,00	,50	0	,00	,00
723	0	5/8	0	4,50	0	0	1,00	,50	0	,00	,00
222	1	5/8	0	5,00	0	0	,00	,00	0	,00	,00
823	1	5/8	0	8,00	0	0	1,00	,50	0	2,00	1,00
322	2	5/8	0	6,00	2	0	,00	,00	0	,00	,00
135	0	0’3...	0	3,00	0	0	2,00	1,00	0	,00	,00
731	0	0’3...	1	6,00	0	0	,00	,00	1	,00	,00
732	0	0’3...	0	4,50	0	0	,00	,00	0	,00	,00
733	0	0’3...	1	5,50	0	0	1,00	,50	1	,00	,00
234	1	0’3...	1	6,00	1	1	,00	,00	1	,00	,00
742	0	√5	1	7,00	0	0	3,00	1,00	1	,00	,00
744	0	√5	1	5,00	1	1	3,00	1,00	1	,00	,00
341	2	√5	0	10,00	0	0	3,00	1,00	0	3,00	1,00
155	0	0'24	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
753	0	0'24	0	4,50	0	0	,00	,00	0	,00	,00
253	1	0'24	0	5,00	0	0	,00	,00	0	,00	,00
255	1	0'24	0	4,00	0	0	,00	,00	0	,00	,00
352	2	0'24	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00

Tabla A.13.2: Puntuaciones otorgadas por el profesor

Alum	Nivel	Núm.	Núm.	Punt.	Ítem c (Tarea 1)				Ítem d (Tarea 2)		
					Conf	C. 1	Punt.	Punt.	Conf.	Punt.	Punt.
C. 1	**C. 2**	**C. 3**	**C. 4**	**C. 5**	**C. 6**	**C. 7**	**C. 8**	**C. 9**	**C. 10**	**C. 11**	**C. 12**
355	2	0'24	0	8,00	0	0	,00	,00	0	2,00	1,00
112	0	5/8	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
712	0	5/8	0	9,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
212	1	5/8	0	2,00	0	0	,00	,00	0	1,00	,50
214	1	5/8	0	9,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
811	1	5/8	0	7,00	0	0	1,00	,50	0	1,00	,50
812	1	5/8	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
813	1	5/8	0	4,00	0	0	2,00	1,00	0	,00	,00
312	2	5/8	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
313	2	5/8	0	8,00	0	0	1,00	,50	0	2,00	1,00
314	2	5/8	0	9,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
724	0	1’4...	0	6,00	0	0	2,00	,66	0	,00	,00
725	0	1’4...	0	5,00	0	0	,00	,00	0	3,00	1,00
223	1	1’4...	0	10,00	0	0	3,00	1,00	0	3,00	1,00
821	1	1’4...	0	5,00	0	0	,00	,00	0	3,00	1,00
822	1	1’4...	0	5,00	0	0	,00	,00	0	3,00	1,00
134	0	√5	0	5,00	0	0	3,00	1,00	0	,00	,00
233	1	√5	0	10,00	0	0	3,00	1,00	0	3,00	1,00
832	1	√5	0	6,00	0	0	2,00	,66	0	2,00	,66
335	2	√5	0	5,00	0	0	3,00	1,00	0	,00	,00
144	0	1’4...	0	8,00	0	0	3,00	1,00	0	3,00	1,00
244	1	1’4...	0	5,00	0	0	1,00	,33	0	2,00	,66
841	1	1’4...	0	2,00	0	0	,00	,00	0	,00	,00
343	2	1’4...	0	10,00	0	0	3,00	1,00	0	3,00	1,00
344	2	1’4...	0	10,00	0	0	3,00	1,00	0	3,00	1,00
345	2	1’4...	0	5,00	0	0	3,00	1,00	0	,00	,00
251	1	0’3...	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
252	1	0’3...	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
254	1	0’3...	0	9,00	0	0	1,00	,50	0	2,00	1,00
855	1	0’3...	0	5,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
112	0	0’3...	0	8,00	0	0	,00	,00	0	2,00	1,00
712	0	0’3...	0	6,50	0	0	2,00	1,00	0	,00	,00
212	1	0’3...	0	7,00	0	0	,00	,00	0	1,00	,50
214	1	0’3...	0	7,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
811	1	0’3...	0	3,00	0	0	1,00	,50	0	,00	,00
812	1	0’3...	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
813	1	0’3...	0	7,00	0	0	2,00	1,00	0	1,00	,50
312	2	0’3...	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
313	2	0’3...	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
314	2	0’3...	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
724	0	5/8	0	6,00	0	0	1,00	,50	0	,00	,00

Continuación tabla A.13.2: Puntuaciones otorgadas por el profesor

Alum	Nivel	Núm.	Núm.	Punt.	Ítem c (Tarea 1)				Ítem d (Tarea 2)		
					Conf	C. 1	Punt.	Punt.	Conf.	Punt.	Punt.
C. 1	C. 2	C. 3	C. 4	C. 5	C. 6	C. 7	C. 8	C. 9	C. 10	C. 11	C. 12
725	0	5/8	0	8,00	0	0	1,00	,50	0	2,00	1,00
223	1	5/8	0	9,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
821	1	5/8	0	9,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
822	1	5/8	0	8,00	0	0	1,00	,50	0	2,00	1,00
134	0	0’3...	0	3,00	0	0	2,00	1,00	0	,00	,00
233	1	0’3...	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
832	1	0’3...	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
335	2	0’3...	0	5,00	0	0	2,00	1,00	0	,00	,00
144	0	√5	0	8,00	0	0	3,00	1,00	0	3,00	1,00
244	1	√5	0	10,00	0	0	3,00	1,00	0	3,00	1,00
841	1	√5	0	3,00	0	0	1,00	,33	0	,00	,00
343	2	√5	0	10,00	0	0	3,00	1,00	0	3,00	1,00
344	2	√5	0	10,00	0	0	3,00	1,00	0	3,00	1,00
345	2	√5	0	5,00	0	0	3,00	1,00	0	,00	,00
251	1	0'24	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
252	1	0'24	0	10,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00
254	1	0'24	0	9,00	0	0	1,00	,50	0	2,00	1,00
855	1	0'24	0	5,00	0	0	2,00	1,00	0	2,00	1,00

Continuación tabla A.13.2: Puntuaciones otorgadas por el profesor

ANEXO 14

Selección de alumnos para las entrevistas confirmatorias

En la tabla 6.11 se incluyen los alumnos cuyas respuestas son consideradas conflictivas, indicándose en cada caso el conflicto de que se trata y el número representado.

Observamos que las respuestas conflictivas se observan en la tarea *Valoración de la exactitud de la representación* (Tarea 1), en la tarea *Valoración de la posibilidad de dividir por la mitad un segmento de longitud dada* (Tarea 2) ó en ambas.

Además, mientras que las respuestas relacionadas con el conflicto 1 aparece en los números 0'33333..., 1'4142136... y √5, las correspondientes al conflicto 2 se observan en los números 5/8 y 1'4142136...

Estas distintas opciones (conflicto 1, 2 ó ausencia de conflicto, tareas 1 ó 2 y número en que aparece el conflicto) constituyen las variables a considerar en la selección de alumnos, a las que añadimos: nivel escolar y centro (para los alumnos de Bachillerato).

En la tabla A.14.1 figura la distribución de alumnos con conflicto según las variables consideradas, a saber: conflicto observado, tarea en que se presenta el conflicto, nivel al que pertenece cada alumno, centro y número en que se presenta el conflicto.

Entre los alumnos con conflicto seleccionados esperamos que en lo posible resulten representados todos los valores (Tabla A.14.1) de cada variable en la misma proporción. En esta sección describimos la selección realizada con el objeto de satisfacer esta condición, considerando la limitación de trabajar con una lista cerrada de alumnos. A continuación describimos los criterios considerados en la selección de alumnos para entrevistar.

En primer lugar, serán entrevistados alumnos con conflicto y también alumnos sin conflicto. Considerando que el conflicto 2 se ha observado en dos alumnos únicamente (ambos pertenecientes a 1º de Licenciatura en Matemáticas), no es posible considerar distintos valores para las variables restantes. De modo que los dos alumnos con conflicto 2 serán entrevistados.

Conflicto	Tarea	Nivel	Centro[2]	Número	Código
Conflicto 1	Tarea 1	1º B	C1	0’33333...	711
		2º B		1’4142136...	823
		1º L.M.		0’33333...	352
		1º L.M.		0’33333...	355
	Tarea 2	1º B	C3	$\sqrt{5}$	135
				0’33333...	155
			C1	0’3333...	731
				$\sqrt{5}$	732
				$\sqrt{5}$ y	733
				$\sqrt{5}$	742
				0’33333...	753
		2º B	C3	1’41421356...	222
	Tareas 1 y 2	1º B	C3	1’41421356...	123
			C1	1’41421356...	723
				1’41421356... y $\sqrt{5}$	744
		2º B	C3	0’33333...	234
				0’33333...	253
				0’33333...	255
Conflicto 2	Tarea 1	1º L.M.	C4	5/8	322
				1’4142136...	341

Tabla A.14.1: Variables consideradas en la selección de alumnos

En cuanto al conflicto 1, decidimos entrevistar a 2 alumnos con conflicto 1 por cada uno de los niveles considerados. Esta elección está determinada por el hecho de que la lista de alumnos con conflicto 1 contiene sólo dos alumnos de Licenciatura. Si decidiésemos escoger más de dos alumnos de los niveles 1º y 2º de Bachillerato, resultaría el nivel 1º de Licenciatura con menos representantes.

El conflicto 1 observado en los dos alumnos de 1º de Licenciatura corresponde a la tarea 1. Para que los tres valores de la variable tarea (conflicto en tarea 1, conflicto en tarea 2 o conflicto en ambas tareas) estén equiparados, los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato deberán escogerse entre los que poseen conflicto en la tarea 2 y conflicto en ambas tareas.

En la tabla A.14.2 resumimos la situación planteada hasta ahora y las combinaciones que resultan en la selección de cuatro alumnos de Bachillerato (dos de 1º y dos de 2º respectivamente). En la tabla A.14.3 analizamos las opciones A y B resultantes, de manera de escoger dos alumnos de cada Instituto (C1 e C3) de nivel secundario.

[2] Los alumnos de Bachillerato pertenecen a los centros C1 y C3. El centro indicado con C4 es la Facultad de Ciencias.

Conflicto 1				
Tarea 1	Tarea 2 (posibilidades)		Tareas 1 y 2 (posibilidades)	Opciones
Dos alumnos de 1º de L.M.	1) Dos alumnos del mismo nivel.	Dos alumnos de 1º B. →	Dos alumnos de 2º B →	A
		Dos alumnos de 2º B (no es posible(*)) →	Dos alumnos de 1º B →	Descar-tado
	2) Un alumno de cada nivel. →	Un alumno de 1º B y otro de 2º B →	Un alumno de 1º B y otro de 2º B →	B

Tabla A.14.2: Posibilidades de selección según el conflicto 1 se observe en la tarea 1, 2 ó en ambas.

(*) La imposibilidad se debe a que hay un solo alumno de 2º de Bachillerato (alumno 222) con conflicto 1 únicamente en la tarea 2.

Op-ción	Conflicto 1 (*)				Resul-tado
	Tarea 2 (posibilidades)		Tareas 1 y 2 (posibilidades)		
A	Dos alum-nos de 1º B	A1) Dos alumnos de C3	Dos alum-nos de 2º B	A1) Dos alumnos de C1 (no es posible)	Descar-tado
		A2) Dos alumnos de C1		A2) Dos alumnos de C3	A2
		A3) Uno de cada instituto		A3) Uno de cada instituto (no es posible)	Descar-tado
B	Un alum-no de cada nivel	B1) Alumno de 1ºB→ C3 Alumno de 2º B→ C3	Un alum-no de cada nivel	B1) Alumno de 1º B→C1 Alumno de 2º B→C1 (no es posible)	Descar-tado
		B2) Alumno de 1º B→C1 Alumno de 2º B→C1 (no es posible)			Descar-tado
		B3) Alumno de 1º B→C3 Alumno de 2º B→C1 (no es posible)			Descar-tado
		B4) Alumno de 1º B→C1 Alumno de 2º B→ C3		B4) Alumno de 1º B→ C3 Alumno de 2º B→C1 (no es posible)	Descar-tado
				B5) Alumno de 1º B→C1 Alumno de 2º B→ C3	B5

Tabla A.14.3: Selección de alumnos con conflicto 1.
(*) La imposibilidad en los casos indicados se debe a un número insuficiente de alumnos que cumplen con las condiciones requeridas.

Del análisis realizado en la tabla A.14.3 resultan dos opciones posibles, que denominamos A2 y B5. Para definir con cuál de las dos nos quedamos, analizamos en la tabla A.14.4 los números implicados en cada caso.

	Tareas	Nivel	Nº suj.	Número	Código	Resultado
A2	Conflicto en T1	L.M.	2	0’33333...	352	Descartado (no aparece 1’4...)
				0’33333...	355	
	Conflicto en T2	1ºB, C1	2	0’33333...	731	
				√5	732	
				√5 y 0’333...	733	
				√5	742	
				0’33333...	753	
	Conflicto en T1 y T2	2ºB, C3	2	0’33333...	234	
				0’33333...	253	
				0’33333...	255	
B5	Conflicto en T1	L.M.	2	**0’33333...**	**352**	Sí
				0’33333...	**355**	Sí
	Conflicto en T2	1ºB, C1	1	0’33333...	731	No
				√5	*732*	Uno de los tres
				√5 y 0’3333...	*733*	
				√5	*742*	
				0’33333...	753	No
		2ºB, C3	1	**1’4142...**	**222**	Sí
	Conflicto en T1 y T2	1ºB, C1	1	1’4142...	723	No
				1’4142... y √5	**744**	Sí
		2ºB, C3	1	*0’33333...*	*234*	Uno de los tres
				0’33333...	*253*	
				0’33333...	*255*	

Tabla A.14.4: Selección de alumnos con conflicto 1 según el número en que se observa el conflicto.

Los valores señalados en negrita en la tabla A.14.4 indican los códigos de los alumnos que deben seleccionarse necesariamente para que aparezca, al menos, dos veces cada número (con respecto a los tres números posibles: 0’333..., 1’4142... y √5). Los valores señalados en cursiva son posibles casos entre los que se tiene que escoger al azar uno solo.

Selección de alumnos sin conflicto

Se entrevistará un solo alumno sin conflicto de cada nivel. En este caso, imponemos la condición de escoger un alumno de 1º de Bachillerato del Instituto Padre Suárez y uno de 2º de Bachillerato del Instituto Zaidín Vergeles, dado que en cada uno de esos niveles no se han escogido alumnos de dichos centros.

Además, seleccionaremos los alumnos de modo que aparezcan, al menos una vez, cada uno de los tres números: 0’3333..., 1’4142... y √5.

Respetando estas condiciones, la elección será al azar.

Alumnos seleccionados

En la tabla A.14.5 incluimos los alumnos seleccionados.

<table>
<tr><th>Centro</th><th>Conflicto</th><th>Curso</th><th>Código</th><th>Posibles suplentes</th></tr>
<tr><td rowspan="3">C3</td><td rowspan="2">C1</td><td rowspan="2">2º Bach.</td><td>222</td><td>253 ó 255</td></tr>
<tr><td>234</td><td>253 ó 255</td></tr>
<tr><td>Sin conflicto</td><td>1º Bach.</td><td>134</td><td>112, 144</td></tr>
<tr><td rowspan="3">C1</td><td rowspan="2">C1</td><td rowspan="2">1º Bach.</td><td>732</td><td>742 ó 733</td></tr>
<tr><td>744</td><td>723</td></tr>
<tr><td>Sin conflicto</td><td>2º Bach.</td><td>822</td><td>811, 812, 822, 832, 841, 855</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Facultad de Ciencias</td><td rowspan="2">C1</td><td rowspan="5">1º L.M.</td><td>352</td><td rowspan="2">(Con conflicto rechazado en última selección) 324</td></tr>
<tr><td>355</td></tr>
<tr><td rowspan="2">C2</td><td>322</td><td rowspan="2">-</td></tr>
<tr><td>341</td></tr>
<tr><td>Sin conflicto</td><td>343</td><td>344 ó 345</td></tr>
</table>

Tabla A.14.5: Alumnos seleccionados para entrevistar.

Debido a que el alumno 134 (sin conflicto) no aceptó ser entrevistado, hemos entrevistado en su lugar al alumno 112.

ANEXO 15

Respuestas al cuestionario de alumnos entrevistados

En el anexo 14 se han seleccionado 11 sujetos para administrarles una entrevista confirmatoria. En este anexo incluimos las respuestas dadas a los diferentes ítems del cuestionario por cuatro de estos sujetos (sujetos 222, 234, 322 y 352 respectivamente). Estas respuestas han sido procesadas digitalmente.

En la tabla A.15.1 se indica el conflicto con el que relacionamos algunas respuestas de cada alumno.

Código sujeto	Respuesta relacionada con:
222	Conflicto 1
234	Conflicto 1
322	Conflicto 2
352	Conflicto 1

Tabla A.15.1: Conflictos atribuidos a los sujetos

En 6.5.4.2 se discute la interpretación de las entrevistas confirmatorias con respecto a la confirmación o rechazo de los conflictos para cada sujeto.

En el anexo 10 se han incluido los cuestionarios de tres sujetos (114, 343 y 355 respectivamente) escogidos al azar. A dos de aquéllos sujetos (sujetos 343 y 355) se les ha administrado también una entrevista confirmatoria: el sujeto 343, al que no se atribuyen respuestas conflictivas en el cuestionario, y el sujeto 355, al que se atribuye el conflicto 1.

Código: 2 2 2 1

Fecha: 21 10 99 Edad: 18 Sexo: Masculino ☐ Femenino ☒

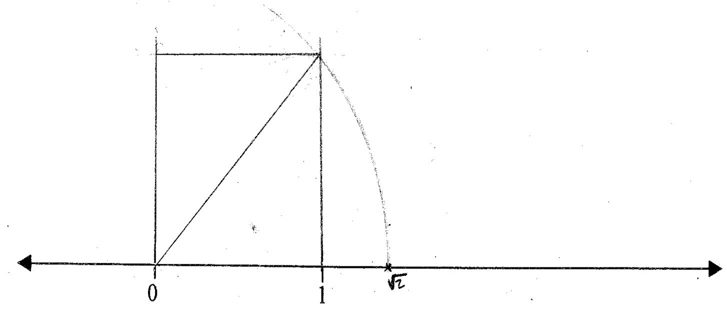
Curso: 2º BACH. División: B Modalidad: Cient. Técn

¿Piensas continuar estudios universitarios? Sí ☐ No ☐ No sabe ☒ Carrera: EMPRESARIALES

Última nota Matemáticas: 6

~~c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.~~
Sí.

Ítem 1. a) Representa en la recta el número 1'4142136...



b) Explica el procedimiento utilizado.

1º me he dado cuenta de que el nº equivale a la $\sqrt{(1)^2}$, he ~~pero~~ abierto un radio con el compás q me equivale a 1 y luego, pinchando en cada pto, he trazado dos marcas con el compás con la finalidad de crear un cuadrado al q he trazado la diagonal. Luego, pinchando en cero y con el radio de la medida de la diagonal he trazado un arco q ha sobrepasado al 1 indicándome la posición exacta del número 1'412136....

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.
Sí.

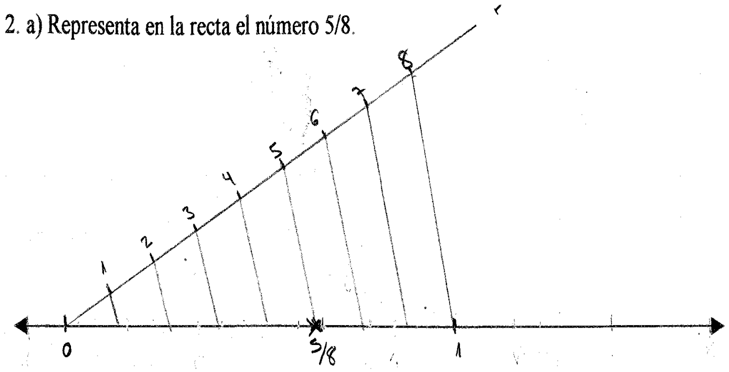
d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a 1'4142136... unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

No es posible porque ~~es~~ es un nº de infinitas cifras con lo cuál no lo tengo entero y no puedo localizarlo.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 1a).

Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☒
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☐
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐
Compás: ☒
Calculadora: ☒
Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 2. a) Representa en la recta el número 5/8.



b) Explica el procedimiento utilizado.

He dividido el segmento 0-1 en ocho partes y ~~...~~ he localizado la 5ª, supongo q ~~...~~ ahí se hallará el nº 5/8 = 0'625.

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a 5/8 unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

~~[illegible]~~

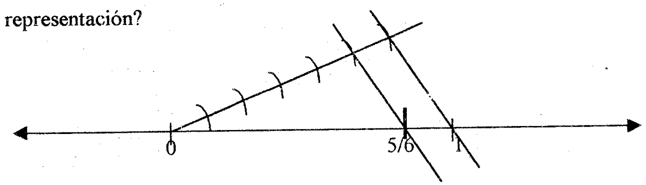
Sí porq es un nº del cuál sabemos todas sus cifras con lo cuál sí podríamos hallarlo.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 2a).

Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☒
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☐
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐
Compás: ☐
Calculadora: ☒
Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 3:
La pregunta indicada en el recuadro se planteó a algunos alumnos de Bachillerato y de Universidad (Licenciatura en Matemáticas):

En la siguiente figura se ha representado el número 5/6 utilizando el teorema de Tales ¿Es exacta esa representación?



Algunas respuestas obtenidas son las siguientes:

Silvia: *"No, no es exacto. Si tienes infinitas cifras no puedes hallar la marca."*

Arturo: *"Nos aproximamos, pero nunca vamos a obtener el punto exacto. Nunca se va a poder representar si tiene infinitos números decimales."*

Federico: *"No es exacto, porque es muy difícil, aún con regla, aún con lo que sea, coger un número exactamente, porque si haces una rayita más gorda, dentro de esa misma rayita hay un montón de números."*

Para expresar el grado de acuerdo con las respuestas anteriores completa la siguiente tabla, señalando con una cruz (x) en la opción elegida en cada caso.

	¿Estás de acuerdo?				
Alumno	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo	Muy de acuerdo
Silvia	☐	☐	☐	☒	☐
Arturo	☐	☐	☐	☒	☐
Federico	☐	☐	☒	☐	☐

Código: 2 3 4 1

Fecha: 21 10 99 Edad: 17 Sexo: Masculino [X] Femenino [ ]

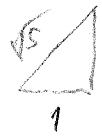
Curso: 2 BACHILLER División: C Modalidad: TEGNOLOGIA

¿Piensas continuar estudios universitarios? Sí [X] No [ ] No sabe [ ] Carrera:

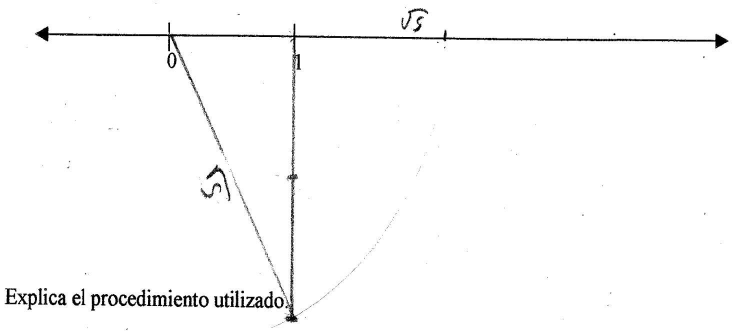
Última nota Matemáticas: 10

Ítem 1. a) Representa en la recta el número √5.

~~Para hallar el punto la distancia (0,1) desde 0 ⊕, 5 veces~~.



$(\sqrt{5})^2 = 1 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$



b) Explica el procedimiento utilizado.

Hemos utilizado el teorema de pitagoras, considerando √5 como la hipotenusa y la distancia (0,1) como uno de los catetos, hemos hallado el otro cateto matematicamente y lo hemos representado el triangulo para hallar la distancia √5

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

No es probable ya que aunque ~~la respuesta~~ a la hora de aplicar los ~~cifras~~ cifras el resultado ~~es exacto~~ ~~no~~ puede ser exacto, la representación grafica nunca es precisa, ya que nunca existe la exactitud.

d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a √5 unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

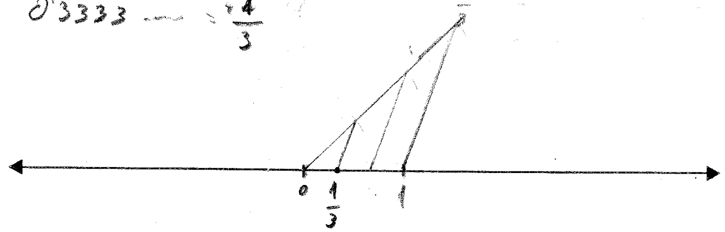
~~Par~~ Nunca ya que haciendolo con los cifras √5 ~~tie~~ tiene infinitos decimales por lo que nunca sera exacto por muchos que tomaros y medir la mitad exacta de un numero que no conoces es imposible.

Ademas graficamente el ~~err~~ error podria ser mayor por el grosor del lapiz o por muchas otras cosas.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 1a).
Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☒
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☐
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐
Compás: ☒
Calculadora: ☐
Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 2. a) Representa en la recta el número 0'33333...

0'3333 ... = $\frac{1}{3}$



b) Explica el procedimiento utilizado.

~~Hemos h~~ Hemos hallado un numero ~~...~~ que se aproxime lo maximo a 0'3 y es $\frac{1}{3}$ y lo hemos ~~intenta~~ intentado representar en la recta con mayor ~~exact~~ exactitud

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

No, es un numero inexistente porque nunca lo podemos ~~conoc~~ conocer en su totalidad, ademas la representacion grafica siempre da error.

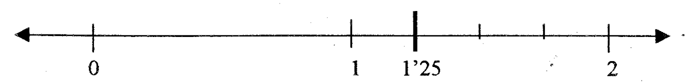
d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a 0'33333... unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

No, el numero 0'$\hat{3}$ ~~es~~ tiene ~~infinito~~ infinitos decimales la representación grafica nunca sería exacta, ~~por infinitos~~ por no conocer el numero, por grosor del lapiz...
y aunque lo aplicando $\frac{1}{3}$ que incluye a todos los decimales la representación grafica exacta es imposible.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 2a).
Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☐ Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☒ Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐ Compás: ☒ Calculadora: ☐ Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 3:
La pregunta indicada en el recuadro se planteó a algunos alumnos de Bachillerato y de Universidad (Licenciatura en Matemáticas):

En la siguiente figura se ha representado el número 1'25 ¿Es exacta esa representación?



Algunas respuestas obtenidas son las siguientes:

Elena: *"Yo creo que no. Los hombres no podemos perfeccionar el punto exacto, no lo podemos distinguir así con la vista."*

Mirta: *"Yo creo que no, porque siempre los materiales que utilizamos tienen un margen de error."*

Ariel: *"No, porque la marca sigue siendo un segmento pequeñito y cada cosa que pintas va a ser un segmento más pequeñito, pero va a seguir siendo un segmento. Entonces no puedo marcar exactamente el punto."*

Para expresar el grado de acuerdo con las respuestas anteriores completa la siguiente tabla, señalando con una cruz (x) en la opción elegida en cada caso.

Alumno	¿Estás de acuerdo? Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo	Muy de acuerdo
Elena	☐	☐	☐	☒	☐
Mirta	☐	☐	☐	☒	☐
Ariel	☐	☐	☐	☐	☒

Código: | 3 | 4 | 1 | 1 |

Fecha: | 26 | 10 | 99 | Edad: | 18 | Sexo: Masculino ☐ Femenino ☒

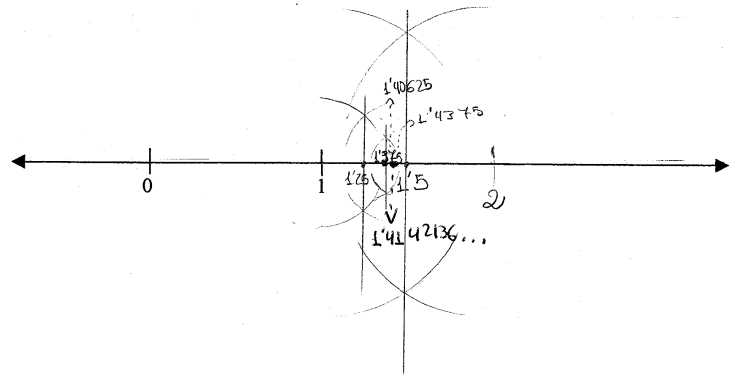
Curso: 1º

Nota media de selectividad: 5'65

Razones por las que eligió Matemáticas: siempre me han gustado y disfruto cuando estoy estudiando.

¿Tiene aprobado Análisis Matemático de 1º? Estoy cursando.

Ítem 1. a) Representa en la recta el número 1'4142136...



b) Explica el procedimiento utilizado.

1º Con el compás traslado el intervalo [0, 1]. Así consigo situar el nº 2. Trazando la mediatriz del segundo segmento puedo obtener donde está 1'5 (más próximo al número pedido). Sigo dividiendo cada intervalo en 2 partes iguales hasta llegar a uno lo suficientemente pequeño que me permita saber que el número pedido lo puedo representar lo más exactamente que pueda.

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

No es la reperentación exacta porque dentro del último interva lo escogido hay infinitos puntos, y con un bolígrafo o cualquier método que pueda utilizar siempre cometeré un error. ya que represento muchos puntos al mismo tiempo.

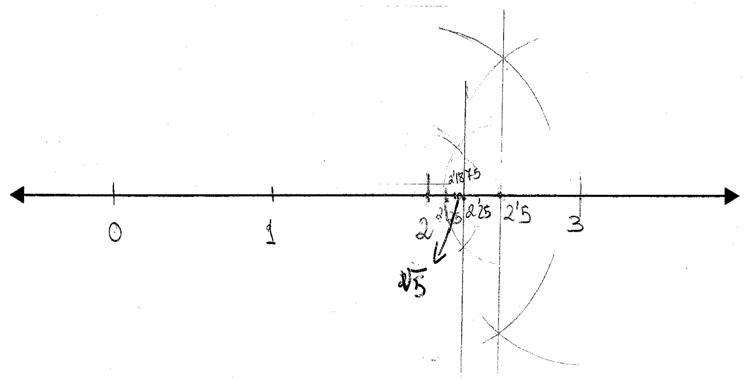
d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a 1'4142136... unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

Puedo dividir cualquier intervalo por la mitad, aunque sea muy pequeño utilizando herramientas muy precisas.
Como el punto que he obtenido no es exactamente el pedido, aunque divida el segmento por la mitad no podré obtener exactamente la longitud pedida. Además, 1'4142136 tiene infinitos números decimales que no puedo representar.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 1a).

Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☐
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☒
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐
Compás: ☒
Calculadora: ☐
Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 2. a) Representa en la recta el número √5. $\sqrt{5} = 2'236067...$



b) Explica el procedimiento utilizado.

De igual manera que en el ejercicio anterior pero cogiendo el intervalo [0,1] arbitrario

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

No es exacta.

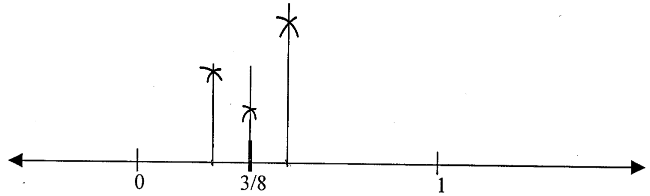
d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a $\sqrt{5}$ unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

Sí puedo dividirlo por la mitad, de igual forma q en el anterior.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 2a).
Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☐
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☒
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐
Compás: ☒
Calculadora: ☐
Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 3:
La pregunta indicada en el recuadro se planteó a algunos alumnos de Bachillerato y de Universidad (Licenciatura en Matemáticas):

En la siguiente figura se ha representado el número 3/8 mediante el trazado de mediatrices. ¿Es exacta esa representación?



Se han extraído al azar las respuestas de dos alumnos. Lee atentamente cada una, y piensa si estás o no de acuerdo con ella.
Debes indicar tu opinión en la tabla que figura más abajo, con una cruz en la casilla correspondiente.

Ariel: *"No, porque la marca sigue siendo un segmento pequeñito y cada cosa que pintas va a ser un segmento más pequeñito, pero va a seguir siendo un segmento. Entonces no puedo marcar exactamente el punto."*

Mirta: *"Yo creo que no, porque siempre los materiales que utilizamos tienen un margen de error."*

Para expresar el grado de acuerdo con las respuestas anteriores completa la siguiente tabla, señalando con una cruz (x) en la opción elegida en cada caso.

Alumno	¿Estás de acuerdo?				
	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo	Muy de acuerdo
Ariel	☐	☐	☐	☒	☐
Mirta	☐	☐	☒	☐	☐

Código: | 3 | 5 | 2 | 1 |

Fecha: | 26 | 10 | 99 | Edad: 18   Sexo: Masculino ☐ Femenino ☒

Curso: 1º

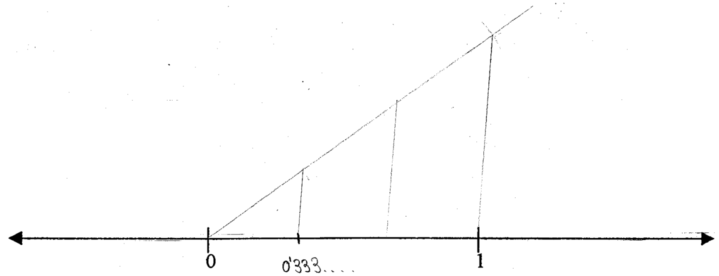
Nota media de selectividad: 7'42

Razones por las que eligió Matemáticas: Porque me gustan las matemáticas y también la enseñanza.

¿Tiene aprobado Análisis Matemático de 1º?

Lo estoy cursando.

Ítem 1. a) Representa en la recta el número 0'33333...



b) Explica el procedimiento utilizado.

Sabiendo que que 0'333... es $\frac{1}{3}$, he dividido la unidad en 3 partes iguales, de forma que $\frac{1}{3}$ queda señalado.

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

Es exacta, porque no he tomado como medida la regla, sino que he dividido la unidad en tres partes exactamente iguales. Pero el trazo del lápiz le quita exactitud, ya que es un número irracional y los decimales son infinitos por lo que se calcula de una manera aproximada.

Ítem 2. a) Representa en la recta el número 0'24.

b) Explica el procedimiento utilizado.

He tomado como longitud de la unidad 100 mm con la regla graduada. La longitudo 0'24 en este segmento es bastante grande como para tomarla con la regla graduada.

c) ¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.

No es muy exacta, ya que la he tomado con la regla. Si la longitud de la unidad fuera más grande, la representación de 0'24 en ese segmento sería más exacta.

d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a 0'33333... unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

Se puede dividir por la mitad de forma que $\frac{1}{3}$ quede dividido en dos partes iguales. Esto se puede calcular haciendo la mediatriz del segmento que tiene como longitud $\frac{1}{3}$.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 1a).
Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☒
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☒
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☒
Compás: ☒
Calculadora: ☐
Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

d) En el inciso a) has obtenido un segmento de longitud igual a 0'24 unidades. ¿Es posible dividirlo exactamente por la mitad?
Si tu respuesta es afirmativa, explica detalladamente cómo lo harías, o en caso contrario, por qué no es posible hacerlo.

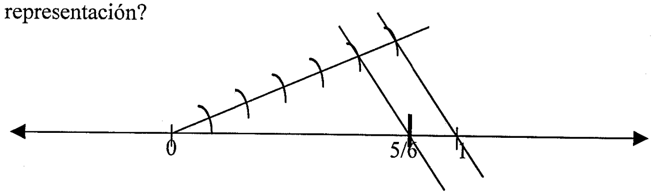
Si el valor tomado fuere exacto, se podría dividir exactamente por la mitad, ya que haciendo la mediatriz de esa longitud, se calcula exactamente 0'12.

Señala con una cruz los elementos que hayas utilizado en 2a).

Regla o escuadra graduada (para medir o guiar la representación del número en la recta) : ☒
Regla o escuadra sin graduar (para trazar segmentos): ☐
Escuadra (para trazar paralelas o perpendiculares): ☐
Compás: ☐
Calculadora: ☐
Otros: ☐ ¿Cuáles? ....

Ítem 3:
La pregunta indicada en el recuadro se planteó a algunos alumnos de Bachillerato y de Universidad (Licenciatura en Matemáticas):

En la siguiente figura se ha representado el número 5/6 utilizando el teorema de Tales ¿Es exacta esa representación?



Se han extraído al azar las respuestas de dos alumnos. Lee atentamente cada una, y piensa si estás o no de acuerdo con ella.
Debes indicar tu opinión en la tabla que figura más abajo, con una cruz en la casilla correspondiente.

Ester: *"Sí, porque por el teorema de Tales te da triángulos que son proporcionales."*

Arturo: *"Nos aproximamos, pero nunca vamos a obtener el punto exacto. Nunca se va a poder representar si tiene infinitos números decimales."*

Para expresar el grado de acuerdo con las respuestas anteriores completa la siguiente tabla, señalando con una cruz (x) en la opción elegida en cada caso.

Alumno	¿Estás de acuerdo?				
	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Indeciso	De acuerdo	Muy de acuerdo
Ester	☐	☐	☒	☐	☐
Arturo	☐	☐	☐	☒	☒

ANEXO 16

Transcripción de tres entrevistas confirmatorias

Anexo 16.1. Sujeto 222

Datos:

Nivel: 2º Bachillerato; Respuesta conflictiva en cuestionario: conflicto 1 en tarea 2, número: 1’4142136...

Fecha: 21/01/00. Hora: 12:25 a 12:36. Duración aproximada: 11’

Mi-nu	Fra.		Transcripción de frases literales
00	01	E	Bueno, entonces, si quieres hojear un poquito lo que has hecho en esa oportunidad.
	02	A	Yo si te digo la verdad no sé ni...
	03	E	¿No te acuerdas?
	04	A	Ni cómo lo hice ni...
	05	E	Bueno, pero...
	06	A	A mí las matemáticas tampoco se me han dado nunca bien.
	07	E	Bueno, pero mira... mira cómo lo has hecho y repásalo. Revisas y....
	08		(Observando las respuestas de la alumna) Esto está muy bien. Esta construcción está perfecta, muy bien está. Y acá has contado cómo lo has hecho y...
	09		Bueno, acá hay una sola cosita, que en lugar de un ‘1’ sería un ‘2’, como acá, pero bueno, eso es un detalle digamos. Está muy bien. La construcción de este número está perfecta, la representación de ese número. Bueno.
	10		Después acá te pregunto si es exacta la representación que has obtenido. Me contestas que sí y... me faltaría, bueno, que justifiques la respuesta. Y vamos a ver ésta otra. ¿Cómo era ésta? (La alumna y la entrevistadora observan la respuesta a 1d)
01	01	A	¿Y se puede localizar un número de infinitas cifras?
	02	E	Eso es lo que yo vengo a preguntarte a ti. Quiero que me expliques ... por qué has puesto esto. ¿Qué quiere decir esto?
	03	A	Pues no sé. Como viene con puntos suspensivos, me imagino que el número no tenía final, ¿no?
	04	E	(Asiente)
	05	A	Entonces, pues, un número que no tiene final, si no sé cuál es el último número cómo voy a localizarlo.
	06	E	¿Y en la pregunta concreta de si es posible dividirlo al segmento por la mitad?
	07		O sea, acá te pregunto si a este segmento que has obtenido, desde 0 hasta este número (señala en el gráfico el número 1’4142136...), si este segmento se puede dividir por la mitad.
02	01		Entonces tú me dices esto, ¿no?: “No es posible porque un número de infinitas cifras”... No, perdón, “porque es un número de infinitas cifras con lo cual no lo tengo entero y no puedo localizarlo”.
	02		Entonces, ¿Qué quiere decir eso? ¿A qué te refieres, que no lo tienes entero y que no puedes localizarlo?
	03	A	Pues eso, ¿no? Que no..., como no lo sé entero, pues no puedo hallarle la mitad a ese número, para localizarlo exactamente.
	04	E	¿Cómo hallarías esa mitad?
	05	A	Dividiendo entre dos.

	06	E	¡Ah, hacer la división entre dos! “Y no puedo localizarlo” ¿A qué se refiere esta expresión: “no puedo localizarlo”? ¿Qué quiere decir eso?
	07	A	Porque no podría encontrarlo exactamente en la recta, siempre sería un número que no fuera el mismo, aunque sólo se diferenciara en... en décimas, ¿no?, o en muy poco.
03	01		Porque como no lo tengo entero y no lo puedo dividir entero entonces exactamente no podría encontrarlo en esa recta.
	02		No podría saber cuál es el punto exacto donde está, como dice que ‘exactamente’...
	03	E	¿Y te refieres a este número (señala 1’41421356...) o a la mitad de este número?
	04	A	A este número y a la mitad.
	05	E	A este número en concreto (señala 1’4142136...) no lo puedes localizar exactamente.
	06		Y entonces, ¿qué pasa con esta construcción? (señala la construcción realizada en 1ª por la alumna)
	07	A	No sé ni cómo... Yo lo hice porque como estamos haciendo dibujo técnico, pues, de habérmelo estudiado para el examen, pues, fue lo que se me ocurrió hacer con eso...
	08	E	Y acá no me contestas... no me respondes (señala ítem 1c).
	09		Yo te pregunto: “¿Es exacta la representación que has obtenido? Justifica tu respuesta.” Y me dices que sí. Y entonces, ¿eso cómo me lo explicas?
04	01	A	(La alumna se queda un momento en silencio, observando lo realizado. Luego mira a la entrevistadora negando con la cabeza, con expresión dubitativa)
	02	E	Esta respuesta acá, c, no me justificas. ¿Por qué has puesto que sí?
	03	A	Es porque al... al saber que... ¿no? que el número es la raíz de dos, ¿no?
	04	E	(Asiente)
	05	A	Y al hallar dónde está la raíz de dos, si se supone que el número es la raíz de dos y es ahí donde está (señala la marca obtenida con compás), pues..., entonces supongo yo que la representación sí sería exacta, ¿no? Si encuentro dónde está el número...
	06	E	Y entonces acá por qué no se puede (mientras pasa la hoja) ¿Y aquí por qué no se puede? (señalando en 1d)
	07	A	Acá me contradije yo solita.
05	01	E	No, pero cuéntame, a lo mejor este... me explicas por qué.
	02	A	Es que a lo mejor me confundí... al ver el número, al hacer aquí (señala gráfico construido en 1a).... al saber que el número era la raíz de dos, pero luego al darle la vuelta lo habré visto con los puntos suspensivos, no habré pensado lo de la raíz de dos y digo yo pues al no tener el número exacto, pues no podría localizarlo exactamente, ¿no?
	03	E	(Asiente) ¿Y entonces?
	04	A	Entonces no lo he relacionado con éste (señala gráfico 1a), sino que lo he contestado según esto (señala enunciado 1d).
	05	E	Y ahora que... y ahora que ya tienes en cuenta lo otro, ¿qué piensas de esta pregunta? ¿Es posible dividir ese segmento exactamente por la mitad?
	06	A	Pues si al hacer la raíz de dos me da un número exacto, [...] tengo que dividirlo, no
	07	E	¿Cómo, cómo? ¿Qué cosa dividirías?
06	01	A	Este, éste número es la raíz de dos, ¿no? (usa la calculadora)
	02	E	(Asiente)
	03	A	¿Y éste es todo el número? (señalando en la calculadora)
	04	E	Esto es lo que coge la calculadora, pero en realidad el número tiene infinitas cifras.
	05	A	Pues sigo sin poder hallarlo.

	06		Pues como no tengo todo el número entero no puedo hallarlo exactamente, o sea, podría hacer algo aproximado, no?, dividiéndolo entre dos (hace la división con calculadora) y me daría eso, ¿no?
	07		De todos modos la calculadora sí coge todos los números en realidad, ¿no?
	08	E	No, tampoco.
	09	A	¿Sólo eso? (Señalando la pantalla)
	10	E	Puede coger, que no estén en pantalla, hasta dos cifras más. Esta calculadora, en especial.
	11	A	Pues entonces no. Podría ser un número aproximado, pero no el sitio exacto.
	12	E	¿Entonces el problema viene por...?
	13	A	Porque la calculadora no me coge todos los números.
	14	E	Para hacer la división.
	15	A	(Asiente)
07	01	E	Y... ¿no conoces algún procedimiento que te permita hacer la división por la mitad? ¿Algún procedimiento que tengas que utilizar la regla o el compás?
	02	A	Sí, hallándole la mediatriz al segmento, ¿no?
	03	E	Y esa mediatriz, ¿se podría hacer en este caso?
	04	A	No, porque tengo el segmento con dos puntos que... tengo localizados, ¿no?
	05		Acá yo sólo tendría que hallar la mitad desde aquí (señalando en el gráfico) hasta aquí.
	06		Porque se supone que si esto es todo el número... todo el segmento que me dan, ¿no? (Mira 1d, y luego mira nuevamente el gráfico).
	07		Claro, hasta aquí es ese número, ¿no?
	08	E	(asiente) No sé. Eso lo has hecho tú, no sé. Tú me dices si es hasta ahí o si no es hasta ahí ese número.
	09	A	La mitad sería hallándole la mediatriz a este segmento, ¿no?
	10	E	Y entonces, ¿qué pasa con esta respuesta? (señalando 1d) ¿La tenemos en cuenta?
	11	A	No, porque sí se la podría hallar, pues no.
	12	E	¿Sí se podría hallar entonces?
	13	A	Sí.
08	01	E	¿Y qué pasa con este número de infinitas cifras?
	02	A	No lo sé.
	03	E	¿No lo sabes? No sabes. ¿Qué dices, cuál será la respuesta... que a ti te parece, bueno, mejor responder? ¿Qué sería mejor responder acá? ¿Esto? (Señalando la respuesta de la alumna a 1d)
	04	A	Que puedo hallarlo pero no dando un número exacto, sino sólo con la mediatriz del segmento, pero que no podría decir qué número es.
	05		Sabría localizarlo en la recta teniendo este segmento pero no puedo decir el número exacto que es.
	06	E	No puedes decir el número... las cifras de ese número.
	07	A	La mitad de este número no lo puedo decir.
	08		Puedo localizarlo entonces dónde está, haciéndole la mediatriz al segmento, pero no puedo decir cuál es.
	09	E	Bien. Y entonces, esta respuesta.
09	01		¿Te animas a responderla? ¿Qué me dices acá, en el inciso c?
	02	A	Pues diría que sí es exacto porque he hallado el punto, este punto, este número, la raíz de dos, aunque no me sepa todo el número.
	03		He hallado dónde está la raíz de dos, ¿no? Y luego también será exacto que hallaré la mitad de ese número porque lo hallo con la mediatriz.
	04		También sé cuál es la mitad exacta de ese... de ese segmento, ¿no?

	05	E	Bueno. Bueno, entonces... ¿no estás de acuerdo con lo que has escrito acá? ¿Cambias de idea? (Señalando la respuesta 1d)
	06	A	(Asiente)
	07	E	Bueno. ¿Quieres agregar algo más?
	08	A	¿Lo escribo?
	09	E	Si quieres, pero mejor acá (le alcanza un folio en blanco)
10	01	A	(Escribe en el folio)
	02		"1.d) Sí puedo hallar la mitad exacta de la (2 hallándole la mediatriz al segmento obtenido aunque no sabría cuál es el número exacto porque tiene infinitas cifras."
	03	E	Bueno, perfecto, entonces vamos a dejar acá.

Anexo 16.2: Sujeto 322

Datos:

Nivel: 1º Licenciatura en Matemáticas; Respuesta conflictiva en cuestionario: conflicto 2 en tarea 1, número: 5/8

Fecha: 22/02/00. Hora:17:52 a 18:00. Duración aproximada: 8'

Mi-nu	Fra.		Transcripción de frases literales
00	01	E	Yo lo que quiero que hagas, quiero hablar un poquito de todo lo que has puesto, y que me comentes un poquito, ¿no? todas las respuestas tuyas.
	02		Bueno, aquí tenías que representar el número 1'4142, ¿si?, que es raíz de dos. Entonces coméntame un poquito lo que has hecho.
	03	A	Pues he utilizado el teorema de Pitágoras, es la representación típica que se... que... se 1º de B.U.P.
	04		Que hacíamos un triángulo... cómo se llama esto, rectángulo, de lado 1 y 1, y esta longitud es raíz de dos.
	05		La he trasladado con el compás y la he marcado.
	06		(Asiente) Pero después me preguntas que.. que si es exacta, es imposible que sea exacta.
	07		Yo en el punto que hay aquí, por pequeño que sea, puedo dibujar millones de puntos.
	08		Necesito un buen instrumento, pero como todos los instrumentos no es tan exacto, yo siempre puedo representar más punto y más punto.
	09		Esto es una idea digamos que psicológica. Porque es que en el papel no puedo representarlo jamás.
01	01		Es más, ni con un ordenador, haciendo, dibujando esta gráfica y haciendo zoom, lo vería.
	02		La raíz de dos... es que es imposible.
	03		Y cuando preguntas aquí (girando el folio) pues, dividir por la mitad es lo mismo.
	04		Si aquí es imposible representarlo, pues dividirlo por la mitad tampoco, si es imposible.
	05	E	¿Es imposible por qué razón entonces?
	06	A	¿Representar raíz de dos ni raíz de dos medios?
	07	E	Claro.
	08	A	Porque si es que ni en el papel un punto, hágame Ud. el punto pequeño que quiera, y yo seguro que le puedo hacer muchos más.
	09		Entonces yo veo a los números reales como una idea psicológica.
	10		Yo me puedo imaginar a la recta y representar un punto.
	11		Pero en ese punto, yo puedo representar muchísimos más.
	12	E	O sea, esa marquita que tú has hecho acá. ¿Eso es lo que me estás diciendo?

	13	A	Sí.
	14	E	En esa marquita que está acá.
	15	A	Sí. Esta representación en mi mente, la veo, en el papel, es imposible.
02	01		En el dibujo, por ejemplo, cuando se dibuja un pentágono, por muy exacto que sea el instrumento de medida nunca se dibuja perfecto.
	02		Un compás que no sea muy bueno, yo dibujo un pentágono regular, y seguro que si el compás no es bueno no me va a coincidir.
	03		Y aunque sea muy bueno no me pue... y me coincidiera, seguro, que si cojo un grado y hago ese punto, represento el pentágono, voy haciendo zoom me daré cuenta que los puntos que yo he encontrado no coinciden con los reales.
	04		Pero es que el propio ordenador se puede equivocar. Por muy potente que sea...
	05	E	El propio ordenador.
	06	A	(Asiente) El propio ordenador, el propio ordenador se equivoca.
	07		El propio ordenador no sabe lo que es raíz de dos.
	08	E	Sí, sí.
	09	A	Da una infinita sucesión de números, como con el Derive.
	10		Le puedo pedir una aproximación de 1000 números, pero no es raíz de dos.
	11		Raíz de dos es un número irracional que no puedo decir yo lo que es.
	12		O sea, sé sus propiedades, pero representarlo y obtenerlo exactamente, me tiraría toda la vida, imposible.
	13	E	Y... entonces qué pasa con el número 5/8.
	14	A	Ocurre lo mismo.
03	01		Si esto fuera 5/8, estoy seguro, que en este punto yo puedo hacer más puntos. Ud. puede.
	02	E	¿En esa marca que tú has hecho ahí?
	03	A	En esa marca, puede dibujar muchas más marcas.
	04		Ud., por ejemplo, cuando decimos el intervalo (a,b) abierto, al punto a me puedo aproximar infinitamente, es imposible que yo diga: el a, aquí está. (Niega con la cabeza)
	05		Claro y si fuese cerrado y lo representaba, lo mismo, o sea que es imposible.
	06		Esto es una idea pero... a la hora de la verdad, representarlo, imposible (negando con la cabeza).
	07		Luego, igual que el teorema de Tales cuando dice más adelante, tampoco.
	08		Yo estoy seguro que si yo escojo esto mismo (gira el folio).
	09		Esto está hecho con... 0’1, con mucho 0’2.
	10		Si cojo un instrumento más preciso, seguro que aquí saco otra recta.
	11		Y en esta recta meto 4 ó 5.
	12	E	¿En esta recta que está acá? (Señala en el gráfico de ítem 3) ¿Ésta me estás diciendo?
	13	A	Sí.
	14	E	¿Qué ahí podrías dibujar otras 4 ó 5, todas paralelas entre sí?
	15	A	Sí. Y mi ojo no lo distinguiría.
04	01		Y me las representaría 5/6, o un número muy aproximado, pero nunca 5/6.
	02	E	Bien. Entonces quiero que me comentes un poquito lo que dices de... de estas dos respuestas.
	03	A	Aquí dice: “Sí porque el teorema de tales da triángulos que son proporcionales.”
	04		Pero es que un triángulo, aunque me de proporcional, a la hora de dibujarlo, no... no puedo saber si esta recta, por ejemplo, es paralela a ésta.
	05		Existe un error, seguro.
	06	E	Sí. En el dibujo existe un error. ¿Y en la mente?
	07	A	En la mente no. La mente no tiene errores.
	08		Tú por ejemplo, para ver cuando lo representamos con el compás y la regla, se puede mover la regla.
	09		La regla no es perfecta. No existe una regla en el mundo perfecta.
	10		Es más, incluso al representarlo en un ordenador, lo mitas, per... tú no lo ves

			exactamente.
	11		Lo podrás ver muy bien porque la pantalla sea muy buena, pero, no puedes estar seguro. Le pongas la resolución que le pongas.
05	01		Que con toda seguridad, el niño 2 lleva razón, está diciendo (lee): “Es aproximado, pero nunca vamos a obtener el punto exacto. Nunca se va a poder representar si tiene un número infinito de decimales.”
	02		Aunque tuviera un número de decimales finito. Es que yo no lo puedo saber.
	03	E	Pero acá has puesto que estás muy de acuerdo con Arturo.
	04	A	Estoy muy de acuerdo con Arturo porque lleva razón, pero... lo de los infinitos números decimales...
	05		Es verdad, es más fácil, hombre... psicológicamente para el alumno, por ejemplo, representar el punto 1, que muy bien, que representar 5/6 ó (2 o cualquier número... con infinitas cifras decimales.
	06		Pero... es verdad que ese número no lo podemos saber.
	07		Si es que en el mismo número aquí, en el número... en el mismo... en este espacio que está la marca del 1, yo puedo dibujar una recta entera, con infinitos puntos y llamarlos como yo quiera.
	08		Esto yo lo veo...
	09	E	Eh... ¿dónde dibujarías una recta entera, a ver?
	10	A	En este mismo punto 1, si yo hago aquí un zoom y aumento, y lo aumento, yo puedo dibujar ahí todo lo que quiera, todo.
06	01		Como si quiero dibujar ahí un libro entero.
	02	E	En la marquita esa.
	03	A	Esa marquita. [...] un microfilm, esto de... que llevan los espías, en ese espacio, en este espacio... coge de todo.
	04	E	Bueno, pero el tema de esta afirmación: “Nunca se va a poder representar si tiene infinitos números decimales”. ¿Con eso estás completamente de acuerdo?
	05	A	Estoy de acuerdo en que nunca se va a poder representar si tiene infinitos números decimales, pero es que, aunque tuviera finitos, tampoco.
	06	E	O sea, ¿qué el problema no es de la infinitud de los decimales?
	07	A	No.
	08	E	O sea, según tu visión, eso no influye.
	09	A	No influye. Aunque para un alumno, si tiene infinitos, si tiene finitos números decimales, es más fácil verlo.
	10		Porque... yo cojo el segmento 01, marco un punto, lo voy aumentando y el niño lo puede ver muy claro.
	11		Pero, si tiene infinitos, no lo voy a ver tan claro.
	12		Pero es que ninguna de las dos representaciones es buena, ninguna.
07	01	E	Bueno, pero... vos que ya sos... que ya estás en 1º de Licenciatura, a vos, qué te parece, ¿el hecho de que tenga infinitos decimales influye?
	02	A	¿En qué?
	03	E	En la representación.
	04	A	No influye. A un alumno de... que está haciendo un dibujo en 1º de B.U.P. puede que le influya a la hora de representarlo, pero... (niega con la cabeza) para mí que no influye.
	05		Que no tenga decimales, tenga infinitos puntos decimales, es lo mismo.
	06		Si es que yo ni siquiera en esta marca tan gruesa, si yo esto lo hubiera hecho con un compás, aquí hay un gran error de medida.
	07		Y esto, aunque la marca fuera finísima, aquí hay mucho error de medida.
	08		Porque es que en un punto, puedes meter infinitos puntos.
	09		Aquí en este punto, hay infinitos átomos. Y dentro del átomo, hay infinitos puntos.
	10		Es un espacio vectorial, yo que sé, no tiene sentido.
	11	E	Bueno, estamos, listo.

Anexo 16.3. Sujeto 352

Datos:

Nivel: 1º Licenciatura en Matemáticas; Respuesta conflictiva en cuestionario: conflicto 1 en tarea 1, número: 0'3333...

Fecha: 22/02/00. Hora: 17:15 a 17:36. Duración aproximada: 8'

Mi-nu	Fra.		Transcripción de frases literales
00	01	E	Bueno, entonces vamos a empezar... Me vas a ir contando y bueno, un poquito contame.
	02	A	Sí.
	03	E	Si querés con un poquito más de explicación todo lo que has puesto aquí.
	04		Primero había que representar al número cero tres periódico, ¿verdad? Bueno, ¿y aquí qué es lo que has hecho, entonces, en la representación?
	05	A	Pues... he utilizado una recta auxiliar.
	06		Aquí podemos medir con la regla algo exacto, bueno, no, aproximadamente...
	07		Lo unimos con el uno y dividimos... en partes iguales.
	08	E	(Asiente) Perfecto. Y entonces has representado aquí el número... eh... cero tres periódico que sería un tercio, ¿verdad?
	09	A	Sí.
	10	E	Bueno. Ahora coméntame un poquito la respuesta c.
	11		Si es exacta la representación que has obtenido, te pregunto, y tú me dices...
01	01		Bueno, a ver, contame lo que pones ahí, que me dices (lee): "Es exacta, porque no he tomado como medida la regla, sino que he dividido la unidad en tres partes exactamente iguales. Pero el trazo del lápiz le quita exactitud, ya que es un número irracional y los decimales son infinitos, por lo que se calcula de una manera aproximada."
	02		Yo quiero que me expliques un poquito más esto también.
	03	A	Aquí hay infinitos números entre cero y uno, ¿no?
	04	E	Entre el cero y el uno hay infinitos números.
	05	A	Entonces, no podemos representar con un lápiz los infinitos números.
	06		Esto es... es una manera de aproximarte a ese número en la recta real.
	07		Es que por muy gra... muy grande que sea la unidad, siempre hay infinitos.
	08		Nunca podremos...
	09	E	¿Eso entonces es lo que me dices acá?
	10	A	Sí.
02	01	E	Bueno entonces me dices: "Ya que es un número irracional y los decimales son infinitos".
	02		No es exactamente lo mismo. Acá me estás diciendo... Recién me acabas de decir que en el intervalo comprendido entre 0 y 1 hay infinitos números.
	03	A	Sí, eso.
	04	E	Y que entonces es difícil. Ahora acá me estás diciendo (mira la respuesta)...
	05	A	Aquí dije otra cosa que no es loque... no me expresé bien.
	06	E	¡Ah! Pero entonces, qué te parece de... cuál es tu respuesta, digamos, te quedas... o
	07		¿ésta también la reconoces como que también es verdadera, digamos? ¿Qué te parece?
	08	A	Es que no... Esto es siempre una representación aproximada, nunca podremos... poner el número exacto.
	09	E	Claro, eso es exacto, perdón, no es exacto, es aproximado, ¿no?
	10		Bueno, pero... ¿por qué es aproximado?
03	01	A	Porque... si queremos también representar el cero coma treinta y dos nos va a salir en el mismo punto, porque es que está muy cerca.
	02	E	(Asiente) ¿Y si... en lugar de tener una unidad de este tamaño tenemos una unidad más grande?

	03	A	Sigue habiendo infinitos puntos.
	04	E	O sea... en esa unidad seguimos teniendo infinitos puntos.
	05		¿Y cuál es el problema de hallar ése, de hallar justo el que nosotros queremos en este caso, cero tres periódico?
	06		Porque ese número es un número que no es racional.
	07		Entonces... tiene infinitos decimales, no sabemos cuál es su último decimal.
	08	E	Vamos a suponer que tuviésemos que representar el número...
	09	A	Es que no podemos representar el número.
	10	E	No, pero vamos a tomar el cero tres, tres, tres, uno. Este número lo podríamos representar, ¿verdad?
04	01	A	Sí.
	02	E	Y si ahora... agregamos un decimal más, hasta ahí. El 0'3333. ¿Ése lo podemos representar?
	03	A	Lo podemos representar todos.
	04		Pero es una... es para nosotros tener una idea de dónde está ese número en la recta real.
	05		Per... esa... el uno aquí, ahí puede que esté también cero coma nueve, nueve, nueve período, porque... es una forma de aproximarse a ese punto.
	06	E	Sí. Eh... y si yo tengo que... a ver, aquí cuál tenemos que representar.
	07		Aquí has representado el 0'24. ¿Y con éste qué pasa?
	08	A	Es lo mismo.
	09	E	Es lo mismo. ¿Cómo es?
05	01	A	Sí porque siempre hay... puede haber un número decimal que sea anterior a éste, que no sea racional que sea irracional, y se aproxima todo lo que queramos al cero con veinticuatro y la representación pues estará en la misma, en el mismo...
	02		Nosotros veremos la representación ahí justo también.
	03	E	O sea, este número no es irracional, ¿verdad?
	04	A	No.
	05	E	Bueno. Este número tiene nada más que dos cifras después de la coma, dos cifras decimales.
	06		Entonces, ¿es la misma situación que éste, que tiene infinitas cifras, o cambia? O la respuesta varía en cierto sentido.
	07		Esta respuesta c respecto de la exactitud de la representación.
	08		Vos me decís que en este caso (1c) y en este caso (2c) es exactamente lo mismo.
	09		Porque... acá no ha sido la misma (respuesta), ¿no? Evidentemente aquí me hablas de que los decimales son infinitos y aquí... no. Acá me dices que si la longitud de la unidad fuese más... si la unidad fuese más grande, la representación sería más exacta, de 0'24.
06	01	A	Pero seguiría... siempre tendríamos un...
	02		Si... si ahora me pide que le represente un punto que se aproxime mucho a 0'24, todo lo que queramos, o un número que sea irracional, por debajo o por encima da igual, la representación va a caer... puede que esté ahí mismo.
	03		Y no es el mismo número, pero... como esto es una representación...
	04		Cuando representamos en una recta, por ejemplo, hay infinitos puntos en el segmento y no localizamos cada punto, porque no podríamos localizarlo en la recta.
	05	E	Porque hay infinitos puntos en ese segmento.
	06	A	En un segmento sí, hay infinitos puntos.
	07	E	Y números, ¿o no?
	08	A	Sí.
	09	E	También. ¿Entonces el problema es establecer esa asignación entre números y puntos? ¿Cuál es el problema?
07	01	A	Vamos a ver. Esto... es que no es... nosotros no podemos tener en una hoja la recta real.
	02	E	Claro.
	03	A	Ahí lo que tenemos es una representación gráfica de un segmento entre el

			cero y el uno y ahí, pues, puede haber infinitos números.
	04		Entonces... los infinitos números sí están localizados aquí pero no podemos localizar uno a uno.
	05	E	Sí. Y ahora, bueno, vamos a ver acá qué me decías, en la respuesta al inciso d, que pregunta si es posible dividir el segmento obtenido, no sé si has revisado esto...
08	01	A	No. (Lee en 1d) Dividir eh... un tercio (gira el folio, hacia el ítem 1a)
	02	E	El segmento éste que has obtenido, ¿no?, comprendido entre cero, sería el intervalo entre cero y cero tres periódico.
	03		Si se puede dividir por la mitad, eso te pregunto.
	04	A	Un segmento... se puede dividir por la mitad, sí.
	05		Porque la intersección de dos rectas te da un punto, entonces... podemos dividir el segmento por la mitad.
	06		Lo que pasa es que tampoco podemos decir qué número exactamente por donde... por el que pasa...
	07		Porque como es que no tenemos un número..., es un número que tiene infinitos decimales.
09	01		Entonces no podemos decir: en el punto... uno coma cinco esta..., en el cero coma quince está el punto medio, porque... no hay punto medio.
	02	E	¿Por qué no hay punto medio?
	03	A	Porque este número no... no podemos saber cuál e... es que ese número nunca... no es finito.
	04	E	Bueno. Y entonces acá me comentas que usarías la mediatriz, ¿no? ¿Para hacer la mitad?
	05	A	Sí. Para representar la mitad de un segmento.
	06		Pero no diría qué punto es esa mitad. Solamente lo representaría.
	07	E	O sea, trazarías la mediatriz y te quedaría determinada, pero no serías capaz de decirme cuál sería la notación decimal de ese número. ¿Eso me estás diciendo?
	08		No me identificarías al número con unas cifras determinadas.
10	01	A	No sería exacto. Si lo represen... si lo pongo con un número... pienso que no sería... algo exacto.
	02	E	¿Y en el caso de hacer la mitad de... 0’24?
	03	A	La mitad de 0’24.
	04	E	Bueno, perdón, la mitad del segmento de longitud 0’24, ¿no?
	05	A	(Asiente)
	06	E	Es este segmento que tenemos acá, comprendido entre 0 y 0’24. El segmento tiene longitud...
	07	A	Pues el punto medio sería cero... cero doce.
	08		Pero mi representación tampoco sería... sería una representación para que nosotros lo entendamos pero... no sería una representación...
11	01		Porque, claro, el punto donde se cortan las dos rectas es justo un punto, pero en nuestra representación, eso no es un punto.
	02		Ahí puede haber varios puntos.
	03	E	(Asiente) Sí, te entiendo. Bueno, yo quiero que me digas este... bueno, que me digas qué piensas con respecto a este inciso c ¿no?
	04		A esta respuesta que me has dado que después la... me has dicho que había otra respuesta posible, que es este... teniendo en cuenta que entre 0 y 1 hay infinitos puntos, cómo harías para determinar... justamente el punto que corresponde.
	05		Y acá me dices que el número tiene infinitos decimales.
12	01		Entonces, cuál te parece a vos que es la... la razón de mayor peso entre las dos, ¿las infinitas cifras decimales de este número?
	02	A	No. No porque entonces estaríamos en el caso del número este 0’24 y no es... no es... Es un número finito y tampoco la representación...
	03		Por ejemplo, el cero o el uno tampoco...
	04		Si yo pongo 0’1 o 0’0009, puede que el punto me caiga justo en la representación que tengo del 0, porque se aproxima mucho.
	05	E	¿Y si tuviese infinitas cifras como en este caso?

	06	A	Pues, es lo mismo que en el caso finito.
	07		Aunque tenga infinitas cifras, hay siempre un número que se aproxima a ése, que se puede aproximar.
13	01	E	Bueno, ahora quiero que me digas, que me comentes... Ah, bueno, ¿Qué piensas de la...? Te acuerdas de que tenías aquí, había una representación y había este... dos respuestas de alumnos que tenías que determinar... vos tenías que decir si estabas de acuerdo o no con cada uno de ellos.
	02		Y quiero que me comentes un poquito las respuestas que has dado. Bueno, acá se ha utilizado en número 5/6, ¿no?, mediante la utilización del teorema de tales, que es la representación que usaste acá para representar 0’3 periódico.
	03	A	Sí.
	04	E	Y acá dice Ester: “Sí, porque el teorema de tales te da triángulos que son proporcionales”. ¿De esa respuesta qué opinas? Porque ahí no me has anotado nada. ¿Qué opinas de eso?
	05	A	A ver. Sí, el teorema de... (recuerda la tarea)
14	01		El punto que nosotros tenemos que representar está... justo en la intersección de las dos rectas, por el teorema de Tales.
	02		Pero ahí, solamente ese punto no hay, no está.
	03		Puede que haya más puntos, porque una representación no es...
	04	E	Sí, pero... ¿estás de acuerdo con lo que dice Ester, o no?
	05	A	¿Qué dice?
	06	E	(Lee) “Sí, porque el teorema de Tales te da triángulos que son proporcionales.”
	07	A	¡Ah!, y la pregunta era que si era exacta.
	08		Sí. El punto está dentro de la representación.
	09		Porque... es que es... es más exacto que utilizar una regla milimetrada.
15	01		Y claro, es la intersección de dos rectas y da un punto, pero... el 5/6 puede que... que no...
	02		Ahí está el 5/6, pero puede haber otro número que esté también ahí... No sé. Porque yo...
	03	E	No, en ese momento no has puesto nada. Y ahora también. ¿En todo caso estarías indecisa?
	04	A	(Riendo) Sí.
	05	E	¿No? ¿Entonces sería ésta, la del medio? ¿O qué piensas?
	06	A	Sí. Está claro que dividimos la unidad en partes iguales.
	07	E	(Asiente)
	08	A	Pero... Vamos a ver...
	09	E	¿Qué es lo que estás pensando? A ver, contáme en voz alta. ¿Cuáles son las dudas que te surgen al analizar esa resp... que al fina y al cabo, es el mismo caso del tuyo, ¿no?
	10	A	Sí, sí.
16	01	E	Es lo mismo. Es otro número pero en la representación utilizas el mismo procedimiento geométrico.
	02	A	La representación no puede ser exacta.
	03		Es una representación que nosotros... hacemos lo más exacta posible, de forma que se aproxime lo más posible a donde se encuentra en la recta real, pero... no quiere decir que esté exactamente ahí.
	04		Se aproxima muchísimo. Mucho más que utilizando una regla milimetrada.
	05	E	¿Por qué... se aproxima mucho pero no es exacta¿ ¿Cuál es la razón?
	06	A	Porque no podemos representar un punto en la...
	07		Cuando nosotros tomamos el 0 o el 1, ése, no quiere decir que ese punto esté exactamente ahí.
	08		Pues, el 5/6 igual.
	09		Es... para que nos hagamos una idea de dónde se encuentra en un espacio finito pero... como los números son infinitos, la recta real es infinita, entonces no podemos localizar punto a punto.
	10	E	Bueno. Ahora quiero que me digas lo de Antonio, que has puesto que muy de acuerdo.

	11	A	No es porque tenga infinitos números decimales el 5/6.
	12		He puesto muy de acuerdo. Es porque... porque es que ningún número se puede representar exactamente.
	13	E	Y el hecho de que tenga infinitos números, cifras decimales, ¿influye o no influye?
	14	A	El que teng... ¿el que sea un número... infinito?
	15		Da igual. Porque 5/6... es lo mismo que si decimos representar el 1 en la recta real. Es un número.
	16	E	Da igual entonces el tema de las cifras decimales.
	17		Entonces ahora, ¿esto lo cambiarías entonces? ¿Qué te parece?
17	01	A	Es que él dice que... que nunca nos vamos a aproximar a un punto exacto.
	02		Eso... en eso estoy de acuerdo.
	03	E	En eso estás de acuerdo.
	04	A	Pero que... que sea porque tiene infinitos números decimales...
	05		Pues no sé, porque... podemos encontrar un número que tenga finitas núm... cifras decimales y tampoco... tampoco tiene un punto exacto aquí en esta recta.
	06	E	O sea que ningún número encontraría su punto exacto cuando lo dibujamos, ¿no? ¿Eso me estás diciendo?
	07	A	Sí porque... es que aquí como tenemos infinitos, no podemos saber cuál es cada punto.
18	01	E	Para ningún número encontraríamos exactamente, o sea, sería una aproximación.
	02		Ahora, si el número tiene infinitas cifras decimales, o no, eso, ¿influye o no influye? ¿Qué te parece?
	03	A	Si tiene infinitas... es que, da igual que sea infinito o que sea...
	04		Sigue siendo un número.
	05		En un intervalo... podemos coger un intervalo muy pequeño, y en ese intervalo muy pequeño que cogemos siempre sigue habiendo infinitos... números, por muy pequeño que sea el intervalo.
	06		Entonces aquí por mucho que nos aproximemos al uno, siempre va a haber infinitos... cifras.
	07	E	Bueno, y entonces qué haríamos con esto, ¿lo dejamos ahí?
	08		Bueno, al final, en el primero no sé, de Ester que me dices. ¿Te animas a decir algo de Ester? O sea, a marcar una casillita.
19	01	A	Que la representación no puede ser exacta.
	02	E	Bueno, entonces qué ponemos.
	03	A	Se aproxima mucho al punto pero... no es exacto.
	04	E	Entonces, ¿qué pondrías ahí?
	05	A	No sé. Creo que indecisa pondría (sonriendo)
	06	E	Bueno, vamos a ponerlo (riendo) total no pasa nada.
	07	A	¿Con boli?
	08	E	Sí, no pasa nada. ¿Y el otro, Arturo, cambiarías ese o lo dejamos ahí?
	09	A	Es que... lo cambiaría porque... (lee)
	10		Pondría de acuerdo con la primera parte y... no de ac... y... la segunda parte, no importa que sea infinito.
	11	E	Bueno.
	12	A	Lo pongo aquí.
20	13	E	Bueno, estamos. Bueno, entonces terminamos.

ANEXO 17

Notaciones

En la tabla A.17.1 incluimos algunas notaciones utilizadas en la memoria.

Símbolo	
$\varnothing$	Conjunto vacío.
N	Conjunto de números naturales.
$\mathbf{Z}^{+}$	Conjunto de números enteros mayores o iguales que 0.
Z	Conjunto de números enteros.
Q	Conjunto de números racionales.
$\mathbf{D}_{n}$	Conjunto de números decimales de hasta n cifras.
D	Conjunto de números decimales.
I	Conjunto de números irracionales.
$\mathcal{C}$	Conjunto de números constructibles.
$\mathbb{A}$	Conjunto de números algebraicos.
CM	Conjunto de números computables.
$\mathbf{R}^{+}$	Conjunto de números reales mayores o iguales que 0.
R - {0}	Conjunto de números reales excluido el 0.
R	Conjunto de números reales.
R*	Conjunto de números hiperreales.
C	Conjunto de números complejos.
~ M	Conjunto complemento del conjunto M.
$\aleph_0$	Cardinal de **N**.
$\aleph_1$ ó c	Cardinal de **R**.
π	Número pi.
e	Base del logaritmo natural.
ϕ	Número de oro.
$\cup$	Unión
$\cap$	Intersección.
$\subset$	Inclusión
ω	Primer ordinal infinito.

Tabla A.17.1: Símbolos utilizados en la memoria