



Universidad de Granada

Departamento de Análisis Matemático

**Bifurcación desde infinito, lateralidad y
aplicaciones**

Tesis Doctoral

JUAN FRANCISCO RUIZ HIDALGO

GRANADA, 2007



Universidad de Granada

Departamento de Análisis Matemático

**Bifurcación desde infinito, lateralidad y
aplicaciones**

Tesis Doctoral

JUAN FRANCISCO RUIZ HIDALGO

GRANADA, 2007

Bifurcación desde infinito, lateralidad y aplicaciones

Tesis Doctoral elaborada por JUAN FRANCISCO RUIZ HIDALGO
y dirigida por DR. D. JOSÉ LUIS GÁMEZ RUIZ
para optar al grado de Doctor por la Universidad de Granada,

al amparo del Proyecto del M.E.C.

“Análisis No Lineal y Ecuaciones en Derivadas Parciales Elípticas”

MTM2006 - 09282

y del Grupo de Investigación de la Junta de Andalucía
FQM 116 “Análisis no lineal y Ecuaciones Diferenciales”.

Fdo.: Juan Francisco Ruiz Hidalgo

VºBº del Director de Tesis

Fdo. Dr. D. José Luis Gámez Ruiz

A mi padre Blas Ruiz Delgado, en memoria

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento al director de este trabajo, D. José Luis Gámez Ruiz, la persona que más ha contribuido a que sea posible su realización por sus inestimables consejos, por sus infinitas paciencia y comprensión, por su magistral dirección y por el trato de amistad que siempre ha tenido para conmigo.

Agradezco a D. David Arcoya Álvarez y a D. Pedro J. Martínez Aparicio la ayuda incondicional que me han brindado en todo momento y su apoyo constante.

También me gustaría agradecer su hospitalidad durante la realización de este trabajo a todos los miembros del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada.

Gracias a mis compañeros del I.E.S. Antonio de Mendoza de Alcalá la Real que aguantan cuando estoy y cuando no estoy. En especial, a D. Antonio Quesada Ramos y a D. Antonio Heredia Rufián.

Para terminar no puedo olvidar agradecer el apoyo de mi familia y la confianza en mí de mi tío Juan Hidalgo, de mi hermana Inma y de mi madre Paquita. Y, por supuesto, gracias a Nuria porque sin ella hubiese sido imposible.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	XIII
1. Preliminares	1
Introducción	3
1.1. Bifurcación	4
1.2. Bifurcación desde infinito	11
1.3. Problemas de valores propios	13
1.3.1. Operador Laplaciano	13
1.3.2. Operador p-Laplaciano	15
1.3.3. Operador $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))$	15
1.4. Algunos comentarios sobre sub- y súper-soluciones	17
1.5. Notación y aclaraciones	20
1.5.1. Notación	21
2. Bifurcación para operador Laplaciano	23
Introducción	25

Justificación del uso de técnicas de bifurcación	27
Lateralidad en la bifurcación desde cero	31
2.1. Bifurcación desde infinito. Caso Neumann	33
2.2. Caso Dirichlet	36
2.2.1. Resultados existentes	36
2.3. Aportaciones	42
2.3.1. No linealidades pequeñas	42
2.3.2. Aportaciones para no linealidades grandes	47
2.4. Aplicación a problemas resonantes	51
3. Bifurcación para algunos operadores cuasilineales	55
Introducción	57
3.1. El operador p-Laplaciano	58
3.1.1. Resultados existentes	61
3.1.2. Aportaciones para el p-Laplaciano	64
3.1.3. Aplicación a la resolución del problema resonante	67
3.2. El operador $-\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u)$	69
3.2.1. Bifurcación para el operador $-\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u)$	70
3.2.2. Resultados existentes sobre lateralidad en infinito	71
3.2.3. Aportaciones y estudio pormenorizado	74
3.2.4. Aplicación a la resolución del problema resonante	81
4. Bifurcación global	83
Introducción	85
4.1. Bifurcación global	86
4.1.1. Caso $m \equiv 1$	86
4.1.2. Bifurcación global con peso	90
4.2. Aplicación a la resolución de problemas resonantes	94
5. Dimensión 1	97
Introducción	99
5.1. Primer valor propio	100

5.2. Autovalores mayores	103
5.3. Ejemplos	113
5.3.1. Ejemplos con g autónoma	113
5.3.2. Ejemplos con dependencia espacial $g(x, s)$	116
Notas finales	121
Bibliografía	127

Introducción

Esta memoria está dedicada al estudio de problemas de contorno mediante la utilización de técnicas de bifurcación. Se toma $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y

$$\left. \begin{array}{l} -\mathcal{L}u(x) = f(\lambda, x, u(x)), \quad x \in \Omega \\ B(u) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (\text{P}_\lambda)$$

donde \mathcal{L} es un operador elíptico lineal o cuasilineal y $B(u)$ son las condiciones de contorno, que son de tipo Dirichlet homogéneas o de tipo Neumann homogéneas, el objetivo principal es determinar para qué valores del parámetro λ existe solución de dicho problema. Estos valores del parámetro están siempre relacionados con los valores propios de los problemas auxiliares linealizados u homogeneizados asociados a (P_λ) y, por tanto, en todos los resultados al respecto están presentes tales autovalores. En particular, este trabajo se centra en tres tipos de operadores:

- el operador Laplaciano caso $\mathcal{L} = -\Delta$ con

$$f(\lambda, x, u(x)) = \lambda m(x)u + g(\lambda, x, u(x)),$$

- el operador p-Laplaciano $\mathcal{L} = -\Delta_p$ con

$$f(\lambda, x, u(x)) = \lambda m(x)|u(x)|^{p-2}u(x) + g(\lambda, x, u(x)),$$

- y, por último, el operador $\mathcal{L}(u) = -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u)$ de nuevo con

$$f(\lambda, x, u(x)) = \lambda m(x)u(x) + g(\lambda, x, u(x)).$$

Los teoremas abstractos de bifurcación (ver [50] y [58]) aplicados a problemas como (P_λ) , a pesar de la gran importancia que tienen, no ofrecen información concreta sobre las soluciones, sino que restringen sus conclusiones a la existencia o, a lo sumo, a una descripción global a grandes rasgos de ciertos conjuntos de soluciones. Concretamente, y considerando las bifurcaciones desde cero, cada valor propio del problema auxiliar asociado de multiplicidad algebraica impar está contenido en una componente conexa del cierre del conjunto de las soluciones no triviales que cumple que es no acotada o que contiene a otro punto de bifurcación desde cero, es decir, a otro valor propio diferente. Por otro lado, considerando las bifurcaciones desde infinito se puede enunciar una descripción del conjunto de soluciones también en forma de alternativa. Sin embargo, la mera descripción topológica de dichos conjuntos de soluciones, si bien es un potente resultado debido a su generalidad y aplicabilidad, deja sin respuesta cuestiones sencillas como ¿para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ admite el problema (P_λ) solución u no trivial? Se hace entonces necesario un análisis geométrico de tales conjuntos de soluciones, ya sea a nivel global o a nivel local (cerca del punto de bifurcación).

En estas condiciones, Ambrosetti y Hess escribieron un artículo en 1980 ([6]) en el que se estudiaban las soluciones positivas de (P_λ) con condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas, comparando los valores del parámetro λ con el primer valor propio, σ_1 , que es desde el cual se produce la bifurcación desde infinito de soluciones positivas. Esta comparación consiste en observar hacia qué lado de σ_1 se produce la bifurcación, lo que equivale a estudiar, para soluciones positivas de norma “grande”, cómo es el valor del parámetro λ en comparación con el primer valor propio, es decir, si es mayor o menor. La conclusión obtenida fue que el signo del límite en infinito de la parte no lineal de la función f determinaría el signo de $\sigma_1 - \lambda$ y, por tanto, daría la información requerida sobre el parámetro λ .

El resultado de Ambrosetti y Hess tiene el inconveniente de que es necesario que la parte no lineal de la función f tenga límite distinto de cero en infinito

además de que no ofrece ninguna información sobre lo que sucede en el caso en el que tal límite sea cero. Asumiendo esa dificultad existen trabajos como el artículo de Ambrosetti y Arcoya ([4]). En él, el decaimiento de dicha parte no lineal, g , se hace de forma “lenta” comparándose con una potencia de orden -1 y se determina a qué lado se produce la bifurcación mediante el valor del límite

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s)s,$$

en caso de que g sea autónoma y tal límite no sea nulo.

Lo que sucede en el caso en que dicho límite se anula lo abordan Arcoya y Gámez [11], siempre con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas, determinando el lado hacia el cual se produce la bifurcación argumentando que se puede seguir comparando la no linealidad con potencias adecuadas, permitiendo que la no linealidad se llegue a comportar asintóticamente como una potencia de orden -2 . Además, esta barrera es óptima, pues es posible encontrar ejemplos en los que hay decaimiento más rápido y no se puede predecir a qué lado de σ_1 se encuentra el parámetro λ , de manera que cuando

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s)s^2 = 0,$$

no se sabe hacia dónde se produce la bifurcación. El artículo citado motiva la búsqueda de nuevas condiciones que permitan conocer cómo son esas soluciones positivas y sugiere que el análisis del comportamiento asintótico de g no es, seguramente, el camino a seguir.

En esta memoria se aportan resultados que, además de mejorar los citados, resuelven la cuestión de la lateralidad en problemas donde los anteriores no son aplicables. Con condiciones de frontera de tipo Dirichlet, estos resultados no se centran en el comportamiento asintótico de la no linealidad g , sino que aluden a la forma global de ésta, siendo el valor integral (en caso de que pueda calcularse)

$$I = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left(\int_0^{+\infty} g(\sigma_1(m), y, s)s ds \right) dy,$$

el que determina si λ es mayor o menor que el primer valor propio σ_1 cuando las soluciones positivas tienen norma “grande”. Más concretamente, si (λ_n, u_n)

es una sucesión de soluciones de (P_λ) bifurcando desde $(\sigma_1, +\infty)$, entonces se demostrará que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n - \sigma_1) \|u_n\|^3 = \sigma_1 I. \quad (\text{R})$$

Cuando se considera el problema (P_λ) en dimensión 1 y $\Omega = (0, \pi)$, la no linealidad g es autónoma y las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet, la integral I adquiere la forma

$$I = \left(\frac{1}{\psi_1'(0)} - \frac{1}{\psi_1'(\pi)} \right) \int_0^{+\infty} g(s)s \, ds.$$

Esa expresión ayuda a comprender que lo que ocurre cuando las no linealidades son “pequeñas” en infinito es que los puntos del interior del dominio pierden importancia en la determinación de la lateralidad en favor de los puntos de la frontera de Ω , que junto con el valor de la integral de $g(s)s$ permiten conocer hacia qué lado se produce dicha bifurcación desde infinito.

También se aportan resultados cuando las condiciones de contorno son de tipo Neumann, haciendo un estudio similar al caso Dirichlet y se comprueba que, en este caso, el comportamiento en infinito de g basta para completar el análisis de la lateralidad.

El problema (P_λ) considerado con operadores diferentes del Laplaciano también se puede abordar con técnicas de bifurcación, ya sea el caso del operador p-Laplaciano ([32]) o el caso del operador $-\text{div}(A(x, u)\nabla u)$ ([10]), lo cual sugiere que también se podría estudiar para qué valores del parámetro λ existe solución positiva. Respuestas parciales imponiendo condiciones sobre la no linealidad g se han expuesto en los trabajos [5], [4], [11] para el p-Laplaciano, y en [10], [19] para el segundo operador. Aquí se adapta a estos dos operadores el procedimiento usado para el operador Laplaciano y, a pesar de las diferencias, los resultados vuelven a involucrar a la forma global de la parte no lineal. Esta parte no lineal involucra, en el caso del operador $-\text{div}(A(x, u)\nabla u)$ a la forma cuadrática A , la

cual es incluso más importante que g en la determinación del lado al cual se produce la bifurcación desde infinito en el primer valor propio.

Un vez que se ha determinado localmente el lado hacia el cual se produce la bifurcación desde infinito para el problema (P_λ) , para las soluciones de (P_λ) que se encuentren al otro lado del valor propio se pueden encontrar cotas a priori, es decir, dada una solución (μ, v) , si la bifurcación es hacia la izquierda y $\mu > \sigma_1$ (μ está a la derecha de σ_1), se puede encontrar una cota para la norma de $\|v\|$. Esta cota, junto con resultados de existencia de solución de (P_λ) para $\lambda \neq \sigma_1$ (ver [34], [29], [12], [9]) y junto con un procedimiento estándar de compacidad (ver [48], [57], [11]), implican la existencia de solución del problema resonante

$$\left. \begin{array}{l} -\mathcal{L}u(x) = f(\sigma_1, x, u(x)), \quad x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (\text{P})$$

Este problema resonante ha sido ampliamente estudiado [14], [26], [65], [69], [61], [62], [63], [46], [47], [20]. Las aportaciones de esta memoria mejoran parte de los resultados citados.

Hasta este punto sólo se aborda el problema de forma local cuando las soluciones están cercanas a infinito. Cambiando este punto de vista y acudiendo al estudio global del conjunto de soluciones se obtienen resultados que también generan información sobre cómo es el parámetro λ si (λ, u) es una solución de (P_λ) . Así, cuando Σ representa al conjunto de soluciones de (P_λ) junto con el punto (σ_1, ∞) , gracias a la alternativa de Rabinowitz para la bifurcación desde infinito ([59]), existe un conjunto cerrado y conexo \mathcal{C} de soluciones de la forma (λ, u) que bifurca desde σ_1 y que es no acotado en λ o contiene a otro punto de bifurcación σ_k . Además, en el caso particular de la bifurcación desde el primer valor propio que es simple, y bajo ciertas hipótesis, este conjunto se puede separar globalmente en dos conjuntos cerrados conexos disjuntos, Σ^+ de soluciones positivas bifurcando desde $+\infty$ y Σ^- de soluciones no positivas bifurcando desde

$-\infty$. La estructura global de estos dos conjuntos genera nueva información sobre cómo son las soluciones de (P_λ) .

La importancia de la positividad de las soluciones resulta fundamental en la descripción de éstas. Esto lleva a que cuando se intenta determinar la lateralidad de las bifurcaciones para autovalores mayores que el primero, no se pueden encontrar condiciones que sean generalización o adaptación de las que se usan para estudiarla en el primer valor propio. Sin embargo, cuando el problema (P_λ) se restringe a una dimensión y $\mathcal{L}u = -u''$, las características de los valores propios σ_k y de las funciones propias permite realizar un análisis similar al que se hace en el primer autovalor. La clave de esta adaptación del resultado está basada en que el número de ceros que poseen las funciones propias en el interior del dominio es finito. Esto permite obtener un resultado similar a (R) para autovalores mayores.

Con el objeto de tratar todos los aspectos comentados, la memoria está estructurada en cinco capítulos. El primero presenta un resumen de resultados generales sobre las técnicas que se van a utilizar a lo largo de la memoria. Estas técnicas se refieren a conceptos básicos de bifurcación, repaso de los valores propios de algunos operadores y sub- y súper-soluciones, no profundizando en ninguno de ellos. Al final, se incluye una sección de aclaraciones y notación que es de mucha utilidad tanto para familiarizarse con las expresiones utilizadas a lo largo de todo el trabajo, como para evitar malinterpretaciones de frases o esquemas.

El segundo capítulo está dedicado al estudio de la lateralidad desde infinito para el operador Laplaciano con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, es decir, a conocer a qué lado del primer valor propio del operador están las soluciones de norma muy grande. También se incluye el estudio de dicha lateralidad para el operador $-\Delta + \text{Id}$ cuando se consideran condiciones de contorno de tipo Neumann. Los resultados obtenidos para las diferentes condiciones de contorno pueden parecer similares, pero mediante un ejemplo se ponen de manifiesto las diferencias, que se remarcan cuando se hace el estudio detallado de lo que ocurre

con el operador Laplaciano con condiciones Dirichlet.

En este capítulo se encuentran las ideas fundamentales de la memoria que se pueden resumir en que el comportamiento de los continuos de soluciones bifurcando desde infinito en el primer valor propio del operador Laplaciano con condiciones de frontera de tipo Dirichlet homogéneas se puede determinar calculando el valor I .

Un estudio similar, salvando las diferencias, se realiza en el capítulo tercero para los operadores p-Laplaciano y $-\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u)$. Tras justificar que las técnicas de bifurcación son aplicables, a cada uno de ellos se le realizan una serie de adaptaciones concretas dirigidas a encontrar condiciones suficientes que permitan determinar la lateralidad de la bifurcación desde infinito en el primer autovalor. Para el operador p-Laplaciano, I volverá a ser el determinante de la lateralidad y, en el caso de $-\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u)$, habrá que recurrir a la expresión

$$\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left[\int_0^{+\infty} [A(y, +\infty) - A(y, s)] ds \right] \nabla\psi_1(y) \cdot \nabla\psi_1(y) dy + \int_{\Omega} g(\sigma_1(m), x, +\infty)\psi_1.$$

En el cuarto capítulo se realiza un análisis de los conjuntos de soluciones desde un punto de vista global. Se dejan de observar las soluciones de norma “grande” y se centra la atención en todas las soluciones que pertenecen a los conjuntos conexos de soluciones.

Para terminar, cuando la dimensión es uno, se extienden los resultados obtenidos en el primer capítulo al resto de valores propios. Así, desde cualquier valor propio se estudian la lateralidad de las soluciones que bifurcan desde infinito, obteniendo resultados que de nuevo, esencialmente, dependen del valor de la integral de $g(s)s$. Se incluyen varios ejemplos, con distintas no linealidades, que ilustran

diferentes posibilidades de bifurcación dependiendo del valor propio desde el que se consideren.

El final de cada capítulo incluye una sección dedicada a la búsqueda de soluciones del problema resonante (P), basados siempre en los resultados obtenidos en el correspondiente capítulo.

Algunos de los resultados que aparecen en la Memoria han sido comunicados en congresos, publicados en revistas especializadas internacionales o están siendo sometidos a publicación ([40], [41], [42], [43], [44]).

CAPÍTULO

1

Preliminares

Introducción

Este primer capítulo contiene resultados conocidos sobre bifurcación, autovalores y sub- y súper-soluciones. No pretende ser una aportación en ninguno de los apartados citados ni tampoco pretende ser un compendio de ellos. Su intención, además de introducir parte de la notación y el vocabulario que se usa en la memoria, es motivar el resto de capítulos y, por estas razones, los resultados que se presentan aquí no son, generalmente, enunciados tal y como se pueden encontrar en las fuentes de los que están tomados, sino que se han sido adaptados a las necesidades exigidas por la memoria.

El capítulo se divide en cuatro secciones. La primera y más extensa está dedicada a la bifurcación y en ella aparecen los resultados clásicos de Krasnoselskii ([50]) y Rabinowitz ([58]) que se aplican a lo largo del resto de la memoria.

La segunda sección se dedica a la descripción de los valores propios de algunos operadores concretos. Es una presentación a grandes rasgos de las caracterizaciones de los autovalores, remarcando las características de algunos de ellos, en los que se pone mayor interés a lo largo de este texto.

En la tercera sección se completa el resumen de contenidos iniciales y se hacen algunos comentarios sobre sub- y súper-soluciones que incluyen un resultado utilizado para probar uno de los teoremas (Teorema 4.1) que forma parte del Capítulo 4.

La última sección está dedicada a definiciones, comentarios y aclaraciones sobre notación y expresiones que se utilizan en la memoria.

1.1. Bifurcación

Dados X e Y dos espacios de Banach y $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ una función que depende del parámetro λ y que satisface:

$$F(\lambda, 0) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

se estudian ecuaciones del tipo

$$F(\lambda, u) = 0. \tag{1.1}$$

El conjunto de soluciones no triviales de la ecuación será

$$\Sigma = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : u \neq 0, F(\lambda, u) = 0\}.$$

Definición 1.1 Se dice que λ_0 es un punto de bifurcación desde 0 para F si existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times X$, con $u_n \neq 0$ y $F(\lambda_n, u_n) = 0$ tal que

$$(\lambda_n, u_n) \rightarrow (\lambda_0, 0).$$

Equivalentemente, λ_0 es un punto de bifurcación desde 0 para F si $(\lambda_0, 0) \in \overline{\Sigma}$.

Ejemplo 1.2 Si $F(\lambda, u) = u - \lambda K(u)$, con K un operador lineal y compacto, entonces $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un punto de bifurcación desde 0 si, y sólo si, λ_0 es valor característico de K , es decir, $1/\lambda_0$ es un autovalor del operador de K .

Comentario 1.3 Para tener otro punto de vista de la bifurcación se puede consultar [7], donde se introduce la bifurcación para operadores diferenciables usando el Teorema de la Función Implícita.

Para los propósitos de esta memoria se centrará la atención, a partir de este momento, en un tipo de ecuaciones (1.1) de especial interés que considera $X = Y$ y tiene la forma:

$$F(\lambda, u) = u - \lambda Ku - N(\lambda, u),$$

por lo que el problema (1.1) se transforma en:

$$u = \lambda Ku + N(\lambda, u), \tag{1.2}$$

bajo las hipótesis:

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} X \text{ es un espacio de Banach,} \\ K : X \rightarrow X \text{ es lineal y compacto y} \\ N : \mathbb{R} \times X \rightarrow X \text{ es un operador continuo y compacto satisfaciendo:} \\ \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{N(\lambda, u)}{\|u\|} = 0, \text{ uniformemente en conjuntos acotados} \\ \text{de valores de } \lambda. \end{array} \right.$$

Lema 1.4 (condición necesaria para ser punto de bifurcación)

Bajo las hipótesis (A) si $\lambda_0 \neq 0$ es un punto de bifurcación desde 0 del problema (1.2), entonces λ_0 es un valor característico de K , es decir, $1/\lambda_0$ es un autovalor de K .

DEMOSTRACIÓN.

Al ser λ_0 un punto de bifurcación, existe una sucesión $(\lambda_n, u_n) \rightarrow (\lambda_0, 0)$ de soluciones de (1.2), con $u_n \neq 0$. Tomando $v_n = u_n/\|u_n\|$, $\|v_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y

$$v_n = \lambda_n K v_n + N(\lambda_n, v_n) = \lambda_n K v_n + \frac{N(\lambda_n, u_n)}{\|u_n\|},$$

donde, usando (A), $\frac{N(\lambda_n, u_n)}{\|u_n\|} \rightarrow 0$. Puesto que K es compacto y v_n está acotada, $K v_n$ tiene una parcial convergente (que se notará igual que la sucesión), $K v_n \rightarrow v$. Tomando límites $v_n \rightarrow \lambda_0 v$, lo que implica que $\|v\| = 1/\lambda_0$. Se aplica K a v_n , $K v_n \rightarrow K \lambda_0 v \Rightarrow v = \lambda_0 K v$, es decir, λ_0 es valor característico de K . ■

La pregunta natural que surge tras el lema es si cualquier valor característico es punto de bifurcación. Se verá en el siguiente ejemplo que no. Pero entonces, ¿qué condiciones ha de tener un valor característico para ser punto de bifurcación? La respuesta a esta pregunta es uno de los dos teoremas más importantes de bifurcación, dado por Krasnoselskii [50], donde se determina que los valores característicos con multiplicidad algebraica impar son puntos de bifurcación. Es importante resaltar el papel del grado topológico en este resultado ya que el hecho de que un valor característico tenga multiplicidad algebraica impar será la clave de que haya un cambio de índice, es decir, del grado en las soluciones aisladas.

Ejemplo 1.5 Sea $X = \mathbb{R}^2$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = (x, y) + (y^3, -x^3)$. El valor $\lambda_0 = 1$ es un autovalor de la parte lineal de f de multiplicidad algebraica 2. Se toma $(1, (0, 0))$ y se estudia si es punto de bifurcación. Si $(\lambda, (x, y))$ es una solución de $(x, y) = \lambda(x, y) + (y^3, -x^3)$, entonces

$$\begin{aligned}x &= \lambda x + y^3 \\ y &= \lambda y - x^3\end{aligned}$$

de donde $x^4 + y^4 = 0$. Esta ecuación sólo posee la solución trivial, luego $(1, (0, 0))$ no puede ser punto de bifurcación.

Con los siguientes resultados se establece concretamente que el índice de la función F en los puntos $(\lambda, 0)$ es constante si λ no es un valor característico y que, cuando λ tenga multiplicidad algebraica impar será punto de bifurcación:

Lema 1.6 Se considera que $F = I - T$ donde T es un operador continuo y compacto. Si $(\lambda_0, 0)$ no es un punto de bifurcación para F entonces, $\exists \varepsilon_0 > 0$ tal que:

- a) Si (λ, u) es solución de $F = 0$ con $\|u\| < \varepsilon_0$ y $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$, entonces $u = 0$.
- b) Existe el índice $i(F(\lambda, \cdot), 0)$, $\forall \lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0]$, siendo

$$i(F, u_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \deg(F, B(u_0, r), 0).$$

- c) Dicho índice es constante en $[\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0]$.

DEMOSTRACIÓN.

- a) Evidente a partir de la definición de punto de bifurcación.
- b) Sea $\Omega \subset X$ y $F = I - T$ con $T : \bar{\Omega} \rightarrow X$ operador continuo y compacto y $u_0 \in \Omega$ es una solución aislada de la ecuación $F(\lambda, u) = 0$, es decir,

$$\exists r_0 > 0 : \text{si } \|u - u_0\| < r_0 \Rightarrow F(\lambda, u) \neq 0.$$

En estas condiciones se puede deducir que

$$\forall r_0 \in (0, \varepsilon), \exists \deg(F, B(u_0, r), 0) = \deg(F, B(u_0, r_0), 0),$$

donde $B(u_0, r) = \{u \in \Omega : \|u - u_0\| \leq r\}$. Por todo ello se puede definir el índice de la función F en el punto u_0 tal como se ha hecho en el enunciado del lema.

c) Se define la homotopía

$$F_t(u) = F(t, u), \quad t \in [\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0].$$

Puesto que $0 \notin F_t(\partial B(0, \varepsilon_0)) \Rightarrow \deg(F_t, B(0, \varepsilon_0), 0)$ es constante. ■

Se observa que en el cálculo del índice de una función de la forma $F(\lambda, u) = u - \lambda Ku - N(\lambda, u)$ la parte no lineal (bajo las hipótesis (A)) puede ser descartada, de forma que el índice de F coincidirá con el de $I - \lambda K$.

Lema 1.7 *En las condiciones (A), si $F(\lambda, u) = u - \lambda Ku - N(\lambda, u)$ y λ_0 no es un valor característico de K , entonces:*

$$i(F(\lambda_0, \cdot), 0) = i(I - \lambda_0 K, 0).$$

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN.

Como consecuencia de no ser valor característico, λ_0 no es punto de bifurcación. Basta comprobar que

$$H_t(u) = t(u - \lambda_0 Ku) + (1 - t)(u - \lambda_0 Ku - N(\lambda_0, u)) = u - \lambda_0 Ku - tN(\lambda_0, u),$$

es una homotopía que está bien definida y que $0 \notin H_t(\partial B(0, \varepsilon_0))$, $\forall t \in [0, 1]$. ■

Como consecuencia de los dos lemas, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 1.8 *Si $K : X \rightarrow X$ es lineal y compacto y λ_0 no es valor característico de K , entonces, para ε_0 dado en el el Lema 1.6*

$$i(I - \lambda K, 0) \text{ es constante para } \lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0].$$

En particular, denotando $VC(K)$ al conjunto de los valores característicos de K , se puede definir la aplicación continua:

$$d : \mathbb{R} \setminus VC(K) \rightarrow \mathbb{Z} \text{ definida por } d(\lambda) = i(I - \lambda K, 0).$$

Los siguientes resultados relacionan el índice con la multiplicidad algebraica.

Lema 1.9 Si $K : X \rightarrow X$ es lineal y continua y $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un valor característico de K , entonces para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_0 - \varepsilon_0 \leq \lambda < \lambda_0 < \mu \leq \lambda_0 + \varepsilon_0$, se tiene que:

$$d(\lambda) = (-1)^{m_a(\lambda_0)} d(\mu),$$

donde $m_a(\lambda_0)$ es la multiplicidad algebraica del valor característico λ_0 .

Corolario 1.10 Si H es un espacio de Hilbert y $K : H \rightarrow H$ es lineal, compacto y positivo. Dado un λ que no sea valor característico de K , entonces:

$$d(\lambda) = (-1)^\beta \quad , \quad \text{donde } \beta = \sum_{\lambda_n \in VC(L), \lambda_n < \lambda} m_a(\lambda_n).$$

Como consecuencia inmediata se deduce:

Teorema 1.11 (Krasnoselskii, [50])

Bajo la hipótesis (A) y siendo λ_0 un valor característico de K con multiplicidad algebraica impar. Entonces, λ_0 es un punto de bifurcación desde cero para K .

Teorema 1.12 (Bifurcación global. Rabinowitz, [58])

Bajo las hipótesis (A), si λ_0 es un valor característico de K con multiplicidad algebraica impar, entonces la componente conexa de la clausura del conjunto de soluciones no triviales, $\bar{\Sigma}$, que contiene a $(\lambda_0, 0)$, denotada \mathcal{C} , verifica, al menos, una de las siguientes condiciones:

- a) \mathcal{C} es no acotada en $\mathbb{R} \times X$.
- b) $\exists \mu_0 \neq \lambda_0$, valor característico de K , tal que $(\mu_0, 0) \in \mathcal{C}$.

En el mismo artículo ([58]) en el que Rabinowitz publica el teorema anterior aparece también un resultado más concreto sobre la estructura que han de tener los conjuntos \mathcal{C} .

Teorema 1.13 (Teorema 1.27, [58])

En las hipótesis del teorema anterior, si la multiplicidad algebraica de λ_0 es uno, \mathcal{C} se puede descomponer en dos \mathcal{C}^+ y \mathcal{C}^- que satisfacen la alternativa del Teorema 1.12 o que contienen una pareja de puntos (λ, u) y $(\lambda, -u)$.

Comentario 1.14 Este teorema y el [58, Teorema 1.40] contenido en el mismo artículo han sido objeto de revisión y mejora por Dancer ([25] y [27]) dado que las demostraciones originales no eran completas.

López-Gómez ([56]) ha realizado otra mejora importante al cambiar la hipótesis de que λ_0 tenga multiplicidad algebraica 1 por la de que su multiplicidad geométrica sea 1 y la algebraica impar.

Comentario 1.15 Para los resultados de esta memoria es suficiente con la certeza de que \mathcal{C} se puede descomponer en dos conjuntos \mathcal{C}^+ y \mathcal{C}^- . De hecho, el resultado se utilizará en dimensión 1, cuando todos los valores propios del operador tienen multiplicidad algebraica uno y, en ese caso, el uso que se hace es local (ver Capítulo 5).

Ejemplo 1.16 En este ejemplo se puede observar cómo un problema de ecuaciones en derivadas parciales se puede transformar en otro al que se le pueden aplicar los teoremas de bifurcación.

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y $f \in C^1(\mathbb{R})$ cumpliendo $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$, se considera el problema no lineal

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta u = \lambda f(u), \quad x \in \Omega \\ u = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\}$$

Se intenta transformar este problema en uno del tipo (1.2). Para ello, si se considera el operador lineal:

$$L = (-\Delta)^{-1} : C(\bar{\Omega}) \rightarrow C(\bar{\Omega})$$

definido por $(-\Delta)^{-1}(v) = w$ como la única solución de

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta w = v, \quad x \in \Omega \\ w = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\}$$

y denotando como $f : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R})$ el operador de Nemitstki dado por

$$f(v)(x) = f(v(x)), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall v \in C^1(\mathbb{R}),$$

entonces el problema es equivalente a:

$$F(\lambda, u) = u - L(\lambda f(u)) = 0, \quad u \in C^1(\mathbb{R}).$$

Si además $f'(0) = 1$ (sin pérdida de generalidad puesto que $f'(0) \neq 0$), $f(s)$ se puede descomponer en parte lineal y no lineal

$$f(s) = s + g(s), \quad \text{con } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s)}{s} = 0,$$

y F adquiere la forma

$$F(\lambda, u) = u - \lambda Lu - \lambda L(g(u)),$$

que tiene la forma del problema (1.2).

1.2. Bifurcación desde infinito

De la misma forma que se define punto de bifurcación desde cero se puede hacer una extensión para definir punto de bifurcación desde infinito.

Definición 1.17 *Se dice que $\lambda_\infty \in \mathbb{R}$ es un punto de bifurcación desde infinito de (1.2) si existe una sucesión (λ_n, u_n) de soluciones de (1.2) satisfaciendo:*

$$\lambda_n \rightarrow \lambda_\infty, \quad \|u_n\| \rightarrow +\infty.$$

Tomando

$$F(\lambda, u) = u - \lambda Ku - N(\lambda, u),$$

y haciendo la transformación de Kelvin (siguiendo los pasos de Rabinowitz en [59]),

$$w = \frac{u}{\|u\|^2}, \quad u \neq 0,$$

se obtiene que (λ, u) , $u \neq 0$ es una solución de (1.2) si, y sólo si, es solución de

$$w = \lambda Kw + M(\lambda, w), \tag{1.3}$$

con $M(\lambda, w) = \|w\|^2 N(\lambda, w/\|w\|^2)$ para $w \neq 0$ y $M(\lambda, 0) = 0$. Dadas las hipótesis

$$(A') \left\{ \begin{array}{l} X \text{ es un espacio de Banach.} \\ K : X \rightarrow X \text{ es lineal y compacto.} \\ N : \mathbb{R} \times X \rightarrow X \text{ es un operador continuo y compacto satisfaciendo:} \\ \lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{N(\lambda, u)}{\|u\|} = 0, \text{ uniformemente en conjuntos acotados} \\ \text{de valores de } \lambda. \end{array} \right.$$

cuando el operador N cumple (A'), el nuevo operador M cumple las condiciones (A) y, por tanto, al problema (1.3) se le puede aplicar el teorema de bifurcación global de Rabinowitz 1.12: sea λ_0 un valor característico de K con multiplicidad algebraica impar, entonces, el cierre del conjunto de soluciones no triviales, $\bar{\Sigma}$, de (1.3) contiene a $(\lambda_0, 0)$. Más aún, la componente conexa \mathcal{C} de dicho cierre que contiene a $(\lambda_0, 0)$ satisface una de las dos siguientes hipótesis:

- a) \mathcal{C} es no acotada en $\mathbb{R} \times X$.
- b) $\exists \mu_0 \neq \lambda_0$, valor característico de L , tal que $(\mu_0, 0) \in \mathcal{C}$.

Adaptando este teorema al problema (1.2) usando las hipótesis (A') en lugar de (A) se obtiene el siguiente resultado:

Teorema 1.18 (bifurcación global desde infinito) *Se considera el problema (1.2) bajo las hipótesis (A'), si λ_∞ es un valor característico de K con multiplicidad algebraica impar, entonces es un punto de bifurcación desde infinito para (1.2). Más aún, sea*

$$\Sigma' = \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X \text{ soluciones de (1.2) con } u \neq 0\} \cup (\lambda_\infty, \infty).$$

Entonces, la componente conexa de $\overline{\Sigma'}$, que contiene a (λ_∞, ∞) , denotada \mathcal{C}' , verifica, al menos, una de las siguientes condiciones:

- a) La proyección sobre λ de \mathcal{C}' es no acotada.
- b) \mathcal{C}' contiene otro punto de bifurcación desde infinito distinto de λ_∞ .
- c) \mathcal{C}' contiene un punto de bifurcación desde cero.

1.3. Problemas de valores propios

A lo largo de toda la memoria se utilizarán los teoremas de bifurcación enunciados anteriormente aplicados a diferentes operadores. Por ello, es necesario conocer determinados aspectos de los valores propios de estos operadores y, dado que la mayor parte del estudio se centra en las soluciones positivas, fundamentalmente del primer valor propio positivo.

1.3.1. Operador Laplaciano

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera regular, se considera el problema

$$\left. \begin{aligned} -\mathcal{L}u(x) &= \lambda m(x)u(x), & x \in \Omega \\ B(u) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

donde \mathcal{L} es un operador elíptico invertible cuando se toma con las condiciones de frontera $B(u)$, que podrán ser de tipo Dirichlet o de tipo Neumann y la función $m(x)$ está contenida en el espacio $L^r(\Omega)$ ($r > N/2$). El estudio de dicho problema consiste en determinar los valores reales del parámetro λ para los cuales el problema (1.4) admite solución débil no trivial. Tales valores se denominan valores propios y las soluciones asociadas a ellos se denominan funciones propias.

Cuando las condiciones de frontera sean de tipo Dirichlet homogéneo, el operador \mathcal{L} será $-\Delta$ y el problema (1.4) se transformará en

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda m(x)u(x), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Es conocido (ver [49] o [28]), que si $m^+ = \max\{m, 0\}$ no es idénticamente 0 este problema tiene una sucesión de autovalores

$$0 < \sigma_1(m) < \sigma_2(m) \leq \dots \leq \sigma_n(m) \leq \dots \rightarrow +\infty,$$

donde $\sigma_1(m)$ es un valor propio simple caracterizado variacionalmente por:

$$\frac{1}{\sigma_1(m)} = \max_{\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} m\phi^2}{\int_{\Omega} |\nabla\phi|^2} > 0,$$

y su espacio propio asociado está generado por una función positiva $\psi_1(m)$.

Si además, $m^- = \min\{m, 0\}$ no es idénticamente cero el problema tiene otra sucesión de autovalores

$$-\infty \leftarrow \dots \leq \sigma_{-n}(m) \leq \dots \leq \sigma_{-2}(m) < \sigma_{-1}(m) < 0,$$

donde $\sigma_{-1}(m)$ es un valor propio simple (principal) caracterizado por

$$\frac{1}{\sigma_{-1}(m)} = \min_{\phi \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} m\phi^2}{\int_{\Omega} |\nabla\phi|^2} < 0,$$

y su espacio propio asociado está generado por una función positiva $\psi_{-1}(m)$.

Para las condiciones de frontera de tipo Neumann se tomará el operador $\mathcal{L} = -\Delta + \text{Id}$, el cual es invertible, siendo Id el operador identidad. Para este caso, al igual que antes, si m cambia de signo, existen dos sucesiones

$$\begin{aligned} 0 < \sigma_1(m) < \sigma_2(m) \leq \dots \leq \sigma_n(m) \leq \dots \rightarrow +\infty, \\ -\infty \leftarrow \dots \leq \sigma_{-n}(m) \leq \dots \leq \sigma_{-2}(m) < \sigma_{-1}(m) < 0, \end{aligned}$$

y dos valores propios, uno positivo y otro negativo, simples principales caracterizados por

$$\frac{1}{\sigma_1(m)} = \max_{\phi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} m\phi^2}{\int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 + \phi^2} > 0,$$

$$\frac{1}{\sigma_{-1}(m)} = \min_{\phi \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} m\phi^2}{\int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 + \phi^2} < 0.$$

Comentario 1.19 Como caso interesante, cuando m es una función regular, el problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda m(x)u(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

tiene siempre el valor propio principal $\sigma_0(m) = 0$ (ver [1]). Además, existe otro valor propio principal $\sigma_1(m)$ positivo (respectivamente negativo) si, y sólo si, $\int_{\Omega} m(x) < 0$ (respectivamente > 0). Si $\int_{\Omega} m(x) = 0$, sólo existe, como valor propio principal, el 0.

La ecuación (1.6) no será objeto de estudio puesto que, con estas condiciones de contorno, el operador $-\Delta$ no es invertible, lo que genera dificultades adicionales a la hora de usar las técnicas desarrolladas en esta memoria.

1.3.2. Operador p-Laplaciano

Se considera el operador p-Laplaciano definido por

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad \text{para } p > 1.$$

Tomando en este caso $m \in L^\infty(\Omega)$, $m^+ \not\equiv 0$, el problema de valores propios

$$\left. \begin{aligned} -\Delta_p \phi &= \lambda m(x) |\phi|^{p-2} \phi, & x \in \Omega \\ \phi(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

tiene un primer autovalor $\sigma_1(m)$ (ver [8] y [55]) y una función propia asociada ψ_1 que genera un espacio de dimensión uno. Además, esta función propia es positiva y el valor propio se puede caracterizar variacionalmente como

$$\frac{1}{\sigma_1(m)} = \max_{\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega m \phi^p}{\int_\Omega |\nabla \phi|^p},$$

donde el supremo se alcanza sólomente en autofunciones asociadas a $\sigma_1(m)$.

1.3.3. Operador $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))$

Al igual que lo que ocurre con el operador Laplaciano, el problema

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)) &= \lambda m(x) u(x), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

donde $A(x)$ es una matriz elíptica y acotada y $-\operatorname{div}(A(x)\nabla u(x))$ es un operador elíptico se satisfacen también, como ocurre con el operador Laplaciano con condiciones de contorno Dirichlet, las hipótesis de trabajo consideradas por De Figueiredo en [28] y, por tanto, si $m \in L^r(\Omega)$ ($r > N/2$) y m^+ no es idénticamente nula, existe una sucesión creciente de valores propios positivos

$$0 < \sigma_1(m) < \sigma_2(m) \leq \dots \leq \sigma_n(m) \leq \dots \rightarrow +\infty,$$

de los cuales el primero de ellos es simple y tiene asociada una función propia ψ_1 positiva. Si además m^- no es idénticamente nula, hay una sucesión de valores propios negativos

$$-\infty \leftarrow \dots \leq \sigma_{-n}(m) \leq \dots \leq \sigma_{-2}(m) < \sigma_{-1}(m) < 0,$$

y también $\sigma_{-1}(m)$ es simple y su función propia asociada ψ_{-1} es positiva.

Un estudio de estos problemas cuando m es regular se puede encontrar en el trabajo de Hess y Kato [49].

1.4. Algunos comentarios sobre sub- y súper-soluciones

Para completar la parte introductoria es importante hacer varios comentarios sobre sub- y súper-soluciones que serán de utilidad en el Capítulo 4. En este apartado se recoge uno de los resultados esenciales para las demostraciones de dicho capítulo, pudiendo completarse el estudio sobre sub y súper-soluciones consultando los trabajos clásicos de Amman [2] y [3] o de Sattinger [60].

Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio regular se considera el problema:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= f(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

Definición 1.20 *Se denomina sub-solución del problema (1.9) a toda función $\underline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ que verifique*

$$\left. \begin{aligned} -\Delta \underline{u}(x) &\leq f(\lambda, x, \underline{u}(x)), & x \in \Omega \\ \underline{u}(x) &\leq 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

Del mismo modo, se denomina super-solución del problema (1.9) a toda función $\overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ que verifique

$$\left. \begin{aligned} -\Delta \overline{u}(x) &\geq f(\lambda, x, \overline{u}(x)), & x \in \Omega \\ \overline{u}(x) &\geq 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

Aunque no se utilizará en esta memoria, dada la importancia que tiene, merece la pena recordar el teorema de existencia de solución cuando hay sub- y súper-soluciones.

Teorema 1.21 ([2], [60]) *Si $\underline{u}, \overline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ son, respectivamente, sub-solución y super-solución de (1.9), con $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x), \forall x \in \overline{\Omega}$, entonces existe $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solución de (1.9) cumpliendo*

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \forall x \in \overline{\Omega}.$$

A continuación se expone un resultado desarrollado por Gámez en [39], que será de utilidad en el Capítulo 4.

Teorema 1.22 *Se asume que f es localmente Lipschitziana. Se supone que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y sea $\mathcal{C} \subset I \times C_0^2(\overline{\Omega})$ un conjunto conexo de soluciones de (1.9).*

- a) *Se considera una función continua $\overline{U} : I \rightarrow C_0^2(\overline{\Omega})$ tal que $\overline{U}(\lambda)$ es una súper-solución de (1.9), para cada $\lambda \in I$, pero que no es una solución. Si $u_0 \leq \overline{U}(\lambda_0)$ en Ω para algún $(\lambda_0, u_0) \in \mathcal{C}$, entonces $u < \overline{U}(\lambda)$ en Ω , para todo $(\lambda, u) \in \mathcal{C}$.*
- b) *Se considera una función continua $\underline{U} : I \rightarrow C_0^2(\overline{\Omega})$ tal que $\underline{U}(\lambda)$ es una sub-solución de (1.9), para cada $\lambda \in I$, pero que no es una solución. Si $u_0 \geq \underline{U}(\lambda_0)$ en Ω para algún $(\lambda_0, u_0) \in \mathcal{C}$, entonces $u > \underline{U}(\lambda)$ en Ω , para todo $(\lambda, u) \in \mathcal{C}$.*

DEMOSTRACIÓN.

Se prueba el apartado a). El b) se hace de forma análoga. Para la demostración habrá que probar el siguiente lema:

Lema 1.23 *Se asume que f es localmente Lipschitziana y sea $\bar{u} \in C_0^2(\overline{\Omega})$ una súper-solución de (1.9) para λ fijo. Se supone que $u \in C_0^2(\overline{\Omega})$ es una solución de (1.9) para el mismo λ , con $u \neq \bar{u}$. Entonces, $\bar{u} - u \notin \partial\mathcal{P}$.*

DEMOSTRACIÓN.

Si se supone que $\bar{u} - u \in \partial\mathcal{P}$, se tiene, en particular, que $\bar{u}(x) \geq u(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Sea L la constante de Lipschitz de f en $\lambda \times \overline{\Omega} \times [\min_{\overline{\Omega}} u, \max_{\overline{\Omega}} u]$. Entonces, para cada $x \in \overline{\Omega}$,

$$\begin{aligned} -\Delta(\bar{u}(x) - u(x)) &+ L(\bar{u}(x) - u(x)) \\ &\geq f(\lambda, x, \bar{u}(x)) - f(\lambda, x, u(x)) + L(\bar{u}(x) - u(x)) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Por el principio de máximo, puesto que $\bar{u} - u \neq 0$, se obtiene que $\bar{u} - u \in \text{int}(\mathcal{P})$, lo que supone una contradicción y queda demostrado el lema. \square

Para terminar con la demostración del teorema se considera la función continua

$$\begin{aligned} T : I \times C_0^2(\overline{\Omega}) &\rightarrow C_0^2(\overline{\Omega}) \\ (\lambda, u) &\mapsto T(\lambda, u) = \overline{U}(\lambda) - u. \end{aligned}$$

Puesto que \bar{U} es continua, T es un operador continuo. Por tanto, $T(\mathcal{C})$ es un conjunto conexo. Usando el lema, $T(\mathcal{C}) \cap \partial\mathcal{P} = \emptyset$. En particular, $T(\mathcal{C})$ está completamente contenido en $\text{int}(\mathcal{P})$ o completamente fuera de \mathcal{P} . Puesto que $(\lambda_0, u_0) \in \mathcal{P}$, se puede concluir que $T(\mathcal{C}) \subset \text{int}(\mathcal{P})$, es decir, $u < \bar{U}(\lambda)$ en Ω , para todo $(\lambda, u) \in \mathcal{C}$. ■

1.5. Aclaraciones sobre la notación

A lo largo de toda la memoria se habla de bifurcación y, en ocasiones, se llega a abusar del lenguaje. Tanto para evitar ambigüedades como para definir términos es conveniente dedicar unas líneas a aclaraciones sobre la notación y el vocabulario que se utilizará.

1. Definiciones de bifurcaciones subcrítica y supercrítica.

Definición 1.24 Si λ_0 es un punto de bifurcación desde cero de soluciones $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X$ para $F(\lambda, u) = 0$, se dice que la bifurcación es subcrítica o hacia la izquierda (respectivamente supercrítica o hacia la derecha) si existe un entorno V de $(\lambda_0, 0)$ en $\mathbb{R} \times X$ tal que toda solución no trivial $(\lambda, u) \in V$ cumple que $\lambda < \lambda_0$ (respectivamente $\lambda > \lambda_0$) (ver figura 1.1).

De la misma manera, si λ_∞ es un punto de bifurcación desde infinito se dice que la bifurcación es subcrítica (respectivamente supercrítica) si existe un entorno de (λ_∞, ∞) en $\mathbb{R} \times X$, $V = [\lambda_\infty - \varepsilon, \lambda_\infty + \varepsilon] \times (X \setminus B_X(0, M))$ tal que toda solución $(\lambda, u) \in V$ cumple que $\lambda < \lambda_0$ (respectivamente $\lambda > \lambda_0$) (ver figura 1.2).

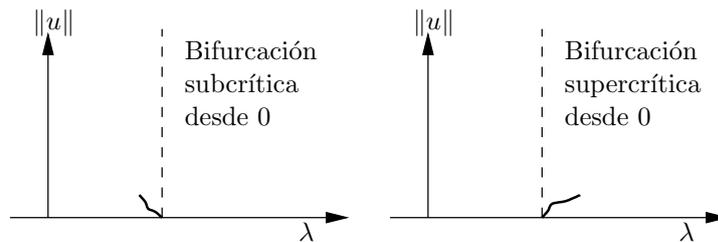


Figura 1.1: Bifurcaciones subcrítica y supercrítica desde cero

- Se utilizan los denominados diagramas de bifurcación (como, por ejemplo, las figuras 1.1 y 1.2) para representar las bifurcaciones. Estos diagramas son sólo ilustrativos y nunca se pretende justificar una demostración con ellos.

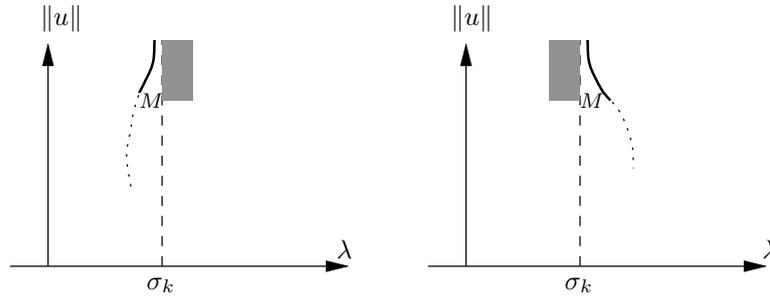


Figura 1.2: Bifurcaciones subcrítica y supercrítica desde infinito

El eje horizontal representa siempre el parámetro λ , pero el eje vertical a veces representará la norma de las soluciones y en otras la proyección sobre el espacio generado por la correspondiente autofunción. Por tanto, se recomienda que se analicen con atención y que se tenga precaución al observarlos.

3. En ocasiones se usan expresiones al referirse a la bifurcación que no corresponden exactamente con las dadas en las definiciones. En concreto se encuentran a lo largo del trabajo expresiones como
 - *Continuo de soluciones bifurcando desde infinito*. Esta expresión se refiere a la componente conexa del cierre del conjunto de soluciones que contiene al punto de bifurcación desde infinito correspondiente.
 - Una *sucesión de soluciones bifurcando desde (σ_1, ∞)* es una sucesión de soluciones que converge al punto de bifurcación. Cuando además las soluciones son positivas se utiliza la expresión *sucesión de soluciones bifurcando desde $(\sigma_1, +\infty)$* .

1.5.1. Notación

\emptyset - Conjunto vacío.

\mathbb{N} - Conjunto de los números naturales.

\mathbb{Z} - Conjunto de los números enteros.

\mathbb{R} - Conjunto de los números reales.

Ω - Dominio (abierto y conexo) acotado de \mathbb{R}^N .

$\partial\Omega$ - Frontera de Ω .

n_e - vector normal exterior en un punto de la frontera de Ω .

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ - gradiente de u .

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$ - Laplaciano de u .

$L^p(\Omega)$ - Espacio de funciones $\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \text{medible}, \int_{\Omega} |u|^p < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$.

$\|u\|_p$ - Norma de u en el espacio $L^p(\Omega)$, $\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

$L^\infty(\Omega)$ - Espacio $\{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ medible} : \exists C \in \mathbb{R} : |u(x)| \leq C \text{ p.c.t. } x \in \Omega\}$.

$\|\cdot\|_\infty$ - Norma en $L^\infty(\Omega)$, $\|u\|_\infty = \text{Inf}\{C : |u(x)| \leq C \text{ p.c.t. } x \in \Omega\}$.

$W^{2,r}(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ - Espacios usuales de Sobolev (ver [17]).

$\|u\|_X$ - Norma de u como elemento del espacio normado X .

m^+ - Parte positiva de la función m , $m^+ = \text{máx}\{m, 0\}$.

m^- - Parte negativa de la función m , $m^- = \text{mín}\{m, 0\}$.

$\text{dist}(x, y)$ - distancia de x a y .

\mathcal{P} - cono de las funciones positivas de $C_0^1(\overline{\Omega})$,

$$\mathcal{P} = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u(x) \geq 0, \forall x \in \overline{\Omega}\}.$$

$\text{int}(\mathcal{P})$ - interior de \mathcal{P} :

$$\text{int}(\mathcal{P}) = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u(x) > 0, \forall x \in \Omega, \frac{\partial u}{\partial n_e}(x) < 0, \forall x \in \partial\Omega\}$$

Dadas dos matrices M_1 y M_2 , se dice que $M_1 - M_2 > 0$ o que $M_1 > M_2$ (respectivamente $M_1 - M_2 \geq 0$) si la forma cuadrática inducida por $M_1 - M_2$ es definida positiva (respectivamente semidefinida positiva).

$\|u\|$ - Representará dos normas diferentes, dependiendo de las condiciones de contorno. En el caso de que las condiciones de contorno sean de tipo Dirichlet,

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

y en el caso en que las condiciones de contorno sean de tipo Neumann,

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

CAPÍTULO

2

Lateralidad de las bifurcaciones para el
operador Laplaciano

Introducción

Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, con frontera $\partial\Omega \in C^2$, se considera el problema:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}u(x) &= \lambda m(x)u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ B(u) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

donde \mathcal{L} es un operador uniformemente fuertemente elíptico y autoadjunto y $B(u)$ significa condiciones de frontera. En particular, se considerarán dos casos, el primero con condiciones de contorno de tipo Dirichlet y con $\mathcal{L} = -\Delta$,

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda m(x)u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

y el segundo con condiciones de frontera de tipo Neumann y $\mathcal{L} = -\Delta + \text{Id}$ un operador invertible con este tipo de condiciones de contorno,

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) + u(x) &= \lambda m(x)u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

El propósito de este capítulo es estudiar hacia qué lado se produce la bifurcación desde infinito de soluciones de (2.1) desde el primer valor propio de los problemas linealizados. Puesto que se conoce que el primer valor propio para ambas condiciones de contorno es simple, bajo las hipótesis que se impondrán, tal autovalor $\sigma_1(m)$, será un punto de bifurcación desde 0 o desde infinito. La cuestión que se aborda aquí es la lateralidad de esa bifurcación, es decir, si se produce hacia la derecha o hacia la izquierda. Más explícitamente, si (λ, u) es una solución de (2.1) contenida en el continuo de soluciones bifurcando desde $\sigma_1(m)$ y que pertenece a un entorno del punto de bifurcación, si será $\lambda > \sigma_1(m)$ (bifurcación supercrítica) o será $\lambda < \sigma_1(m)$ (bifurcación subcrítica).

El capítulo está estructurado en cuatro secciones, además de la introducción, en la que se justifica el uso de las técnicas de bifurcación como instrumento de estudio de los problemas (2.2) y (2.3), se delimita el marco de trabajo y se presentan algunos resultados referentes a la bifurcación desde cero en el primer

valor propio. En estos ejemplos queda claro que el comportamiento de la función g en un entorno del punto de bifurcación $(\sigma_1(m), 0)$ determina la lateralidad.

La primera sección está dedicada a la bifurcación desde infinito en $\sigma_1(m)$ con condiciones de contorno de tipo Neumann. Esta sección es una aportación del autor en colaboración con J.L. Gámez que se puede encontrar parcialmente en [41] y que muestra que la lateralidad en la bifurcación desde infinito, en este caso, está determinada por el comportamiento local en infinito de la no linealidad.

La segunda parte del capítulo se centra en presentar los resultados existentes sobre lateralidad en la bifurcación desde infinito en $\sigma_1(m)$ con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, esto es, los resultados dados por Ambrosetti y Hess [6], por Ambrosetti y Arcoya en [4] y por Arcoya y Gámez en [11], todos ellos con hipótesis locales en infinito para la no linealidad.

En la tercera sección se aportan nuevos resultados en los que no se imponen condiciones locales sobre la no linealidad, sino que dando hipótesis globales sobre g se obtienen conclusiones locales sobre la lateralidad de la bifurcación. Además, éstos se pueden generalizar para mejorar la mayoría de los que forman parte del epígrafe anterior.

En la cuarta y última sección se aplican los resultados obtenidos en las secciones precedentes para resolver el problema resonante en el primer valor propio.

Finalmente, se observa que las secciones referentes a bifurcación desde infinito se centran en los casos en que

$$g(\sigma_1(m), x, +\infty) = \lim_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1(m), +\infty)} g(\lambda, x, s) = 0,$$

pero que todos los teoremas serán válidos también en el caso en que el límite definido $g(\sigma_1(m), x, +\infty)$ sea ortogonal a ψ_1 (ver comentario 2.17).

Justificación del uso de técnicas de bifurcación

Se asume la hipótesis:

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad g : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ es una función Carathéodory} \\ \quad \text{(es decir medible en } x \in \Omega \text{ para todo } (\lambda, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \quad \text{y continua respecto de } (\lambda, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ p.c.t. } x \in \Omega), \\ \bullet \quad \exists r \in (N, +\infty] \text{ tal que } m \in L^r(\Omega) \\ \quad \text{con } m^+ = \text{máx}\{m, 0\} \neq 0 \text{ y} \\ \bullet \quad \text{existen } h \in L^r(\Omega) \text{ y dos funciones continuas} \\ \quad \Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad \mathcal{U} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ cumpliendo} \\ \quad |g(\lambda, x, s)| \leq \Lambda(\lambda)h(x)\mathcal{U}(s), \quad \forall (\lambda, x, s) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Para poder utilizar los teoremas de bifurcación enunciados en el capítulo anterior será necesario considerar ciertas hipótesis que aseguren que alguno de los Teoremas 1.12 (bifurcación desde cero) o 1.18 (bifurcación desde infinito) se pueden aplicar. Para ello, el problema (2.1), ayudado de la hipótesis (H), se transforma en uno del tipo (1.2) y, una vez hecho esto, se debe comprobar que se cumplen las hipótesis (A) o (A') de los teoremas de bifurcación. Será necesario imponer nuevas condiciones que aseguren que la parte no lineal tiene orden de convergencia menor que $\|u\|$, bien sea en cero, en infinito o en ambos casos.

Se toma como espacio ambiente $X = W^{2,r}(\Omega)$ dotado de su norma usual $\|\cdot\|_{2,r}$. Tomando el inverso de \mathcal{L} , bien sea el Laplaciano con condiciones de contorno Dirichlet o bien el operador invertible con condiciones de contorno Neumann, $L = (\mathcal{L})^{-1} : L^r(\Omega) \rightarrow X$ y el operador de Nemitstki g_λ definido por

$$\begin{aligned} g_\lambda : X &\rightarrow L^r(\Omega) \\ u &\mapsto g_\lambda(u) = g(\lambda, \cdot, u(\cdot)), \end{aligned}$$

se puede definir el operador $N(\lambda, u) = L(g_\lambda(u))$, para $u \in X$.

Así, notando $K(u) = L(mu)$ y usando una notación similar a la del capítulo anterior, se define

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times X &\rightarrow X \\ (\lambda, u) &\mapsto F(\lambda, u) = u - \lambda K(u) - N(\lambda, u). \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \frac{\|N(\lambda, u)\|_{2,r}}{\|u\|_{2,r}} &= \frac{\|L(g_\lambda(u))\|_{2,r}}{\|u\|_{2,r}} \leq C_1 \frac{\|g_\lambda(u)\|_{L^r}}{\|u\|_{2,r}} \leq C_1 \Lambda(\lambda) \frac{\|h\mathcal{U}(u)\|_{L^r}}{\|u\|_{2,r}} \\ &\leq C_2 \Lambda(\lambda) \|h\|_{L^r} \frac{\max_{|t| \leq \|u\|_\infty} \mathcal{U}(t)}{\|u\|_\infty}. \end{aligned}$$

Con la pretensión de que se cumplan las hipótesis (A) o (A'), se añaden dos nuevas hipótesis de bifurcación, la primera para asegurar la bifurcación desde cero la segunda para la bifurcación desde infinito.

$$\begin{aligned} (B_0) \quad & \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}(s)}{s} = 0 \\ (B_\infty) \quad & \lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(s)}{s} = 0. \end{aligned}$$

En el caso particular en que sea la función g la que converja a cero de forma adecuada, las hipótesis anteriores se cumplen, es decir, la condición (B_0) se satisface cuando

$$\lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{g(\lambda, x, s)}{s} = 0 \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ y } \lambda \text{ en acotados,}$$

y la condición (B_∞) si

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{g(\lambda, x, s)}{s} = 0 \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ y } \lambda \text{ en acotados.}$$

Así, si se supone (B_0) , entonces,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\max_{|t| \leq s} \mathcal{U}(t)}{s} = 0 \Rightarrow \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{N(\lambda, u)}{\|u\|_{2,r}} = 0,$$

uniformemente para λ en conjuntos acotados de \mathbb{R} .

Por otro lado si se supone (B_∞) , entonces,

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{\max_{|t| \leq s} \mathcal{U}(t)}{s} = 0 \Rightarrow \lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{N(\lambda, u)}{\|u\|_{2,r}} = 0,$$

uniformemente para λ en conjuntos acotados de \mathbb{R} .

A partir de este momento se está en condiciones de usar el Teorema 1.11, que afirma que bajo las hipótesis (H) y (B_0) , cualquier valor propio, $\sigma_k(m)$, de (1.4)

con multiplicidad algebraica impar es un punto de bifurcación desde cero para el problema (2.1). Esto significa que $(\sigma_k(m), 0)$ pertenece a la clausura de Σ , el conjunto de soluciones no triviales $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X$ de $F(\lambda, u) = 0$. Además, usando el Teorema de Bifurcación Global de Rabinowitz (Teorema 1.12), la componente conexa de la clausura de Σ que contiene al punto de bifurcación $(\sigma_k(m), 0)$ o bien es no acotada, o bien contiene a otro punto de bifurcación diferente $(\sigma_l(m), 0)$, $l \neq k$, o bien ambas.

De manera similar, bajo las hipótesis (H) y (B_∞) , cualquier valor propio, $\sigma_k(m)$, de (1.4) con multiplicidad algebraica impar es un punto de bifurcación desde infinito para el problema (2.1). Además, considerando el cierre del conjunto de soluciones Σ junto con el punto $(\sigma_k(m), \infty)$, la componente conexa de éste que contiene a este punto de bifurcación es, o bien no acotada en λ , o bien bifurca desde otro punto, ya sea desde cero o desde infinito.

En cualquiera de los dos casos, bifurcación desde cero o desde infinito, de toda sucesión (λ_n, u_n) de soluciones de (2.1) que converge al punto de bifurcación que cumple que existe una función propia ψ_k asociada a $\sigma_k(m)$, de norma 1 y una subsucesión (λ_{n_j}, u_{n_j}) que cumple:

$$\frac{u_{n_j}}{\|u_{n_j}\|_{2,r}} \rightarrow \psi_k \quad \text{en } X.$$

Tal como se ha comentado anteriormente, la hipótesis contenida en (H), $r > N$ implica que el espacio de trabajo $W^{2,r}(\Omega)$ esté continuamente embebido en $C(\bar{\Omega})$ (para lo que bastaría que $r > N/2$), el cual está provisto de un cono de funciones positivas. En esta memoria se exigirá aún más, se buscarán soluciones de (2.1) que pertenezcan al espacio de Banach $C^1(\bar{\Omega})$ (lo cual está asegurado gracias a que $r > N$), el cual tiene un cono de funciones positivas \mathcal{P} con interior no vacío. Así, la primera función propia de (1.5) está contenida en \mathcal{P} , de lo que se puede deducir que, cerca del punto de bifurcación, las soluciones u_{n_j} tienen el mismo signo que ψ_1 . Además, también tiene sentido hablar de la primera función propia negativa $-\psi_1$, lo cual permitirá, en este caso, referirse a la bifurcación desde menos infinito (ver Comentario 2.18).

Para simplificar la notación, a partir de este momento el operador \mathcal{L} será, como se comentó anteriormente, o bien el operador Laplaciano usual, $-\Delta$, cuando se trabaje con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, o bien $-\Delta + \text{Id}$, cuando las condiciones de frontera sean de tipo Neumann. Además, por simplicidad y comodidad en la presentación de resultados, se trabajará, cuando se consideren condiciones de contorno Dirichlet, en el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ dotado con la norma

$$\|u\| = \|\nabla u\|_2,$$

o en $H^1(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + |u|^2,$$

cuando las condiciones de contorno sean de tipo Neumann. Con la finalidad de determinar la lateralidad de la bifurcación se utilizará de forma fundamental que el operador es autoadjunto y, de esta forma, si (λ, u) es una solución de (2.2), tomando la primera función propia positiva ψ_1 como función test en la definición de solución débil de (2.2) se obtiene,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \psi_1 = \lambda \int_{\Omega} m u \psi_1 + \int_{\Omega} g(\lambda, x, u) \psi_1.$$

Por otro lado, tomando $\sigma_1(m)$ el valor propio principal positivo de (1.5) y ψ_1 , si se toma u como función test,

$$\int_{\Omega} \nabla \psi_1 \nabla u = \sigma_1(m) \int_{\Omega} m \psi_1 u.$$

Igualando las dos expresiones,

$$(\sigma_1(m) - \lambda) \int_{\Omega} m u \psi_1 = \int_{\Omega} g(\lambda, x, u) \psi_1. \quad (2.4)$$

Comentario 2.1 *Adaptando el argumento anterior y realizando los ajustes necesarios cuando las condiciones de contorno son de tipo Neumann (problema (2.3)) se obtiene la misma expresión (2.4).*

Lateralidad en la bifurcación desde cero

Como motivación de los resultados fundamentales de este capítulo, se presenta un resultado, contenido en [11], referente a la lateralidad de la bifurcación desde cero en el primer valor propio del problema (2.1), el cual establece que el lado de la bifurcación es consecuencia del comportamiento local de la no linealidad g cerca de 0. Además, tras analizar la demostración se puede concluir que no existen diferencias en el estudio de esta lateralidad entre las condiciones de contorno Dirichlet y las Neumann.

Teorema 2.2 (Lateralidad desde cero)

Se consideran las hipótesis (H) y (B_0) . Si existen $\alpha < -1$ y $b \in L^1(\Omega)$ tales que $|g(\lambda, x, s)||s|^\alpha \leq b(x)$, cuando (λ, s) pertenece a un entorno del punto de bifurcación $(\sigma_1(m), 0)$, entonces,:

- a) La bifurcación desde cero de soluciones no triviales del problema (2.1) en $\sigma_1(m)$ es subcrítica si

$$\int_{\Omega} \underline{a}_\alpha |\psi_1|^{1-\alpha} > 0,$$

donde $\underline{a}_\alpha(x) := \liminf_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1, 0)} g(\lambda, x, s)|s|^{\alpha-1}s$.

- b) La bifurcación desde cero de soluciones no triviales del problema (2.1) en $\sigma_1(m)$ es supercrítica si se cumple:

$$\int_{\Omega} \bar{a}_\alpha |\psi_1|^{1-\alpha} < 0,$$

con $\bar{a}_\alpha(x) := \limsup_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1, 0)} g(\lambda, x, s)|s|^{\alpha-1}s$.

DEMOSTRACIÓN.

Se probará el apartado a). El b) se hace de forma análoga. Sea (λ_n, u_n) una sucesión de soluciones de (2.3) o de (2.2) tendiendo al punto de bifurcación $(\sigma_1(m), 0)$. Esto significa que $\lambda_n \rightarrow \sigma_1(m)$, $u_n \rightarrow 0$ y que existe una subsucesión (que se denotará igual que la sucesión) que cumple $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$ (convergencia en C^1). Usando la igualdad (2.4):

$$\int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n)\psi_1 = \int_{\Omega_n} [g(\lambda_n, x, u_n)|u_n|^{\alpha-1}u_n]\psi_1|u_n|^{-1-\alpha}u_n,$$

con $\Omega_n = \{x \in \Omega : u_n(x) \neq 0\}$. Denotando:

$$g_n(x) = \begin{cases} g(\lambda_n, x, u_n)|u_n|^{\alpha-1}u_n, & \text{si } x \in \Omega_n, \\ \underline{a}_\alpha(x), & \text{si } x \in \Omega \setminus \Omega_n, \end{cases}$$

se tiene que

$$\int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n)\psi_1 = \int_{\Omega} g_n\psi_1|u_n|^{-1-\alpha}u_n = \|u_n\|^{-\alpha} \int_{\Omega} g_n\psi_1 \left(\frac{|u_n|}{\|u_n\|}\right)^{-1-\alpha} \frac{u_n}{\|u_n\|}.$$

Puesto que u_n converge uniformemente a 0, usando las hipótesis, $|g_n(x)| \leq b(x)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, $\alpha < -1$ y la convergencia uniforme de $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$, se concluye que

$$\left| g_n(x)\psi_1 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^{-1-\alpha} \frac{u_n}{\|u_n\|} \right| \leq Mb \in L^1(\Omega),$$

para cierto $M > 0$. Aplicando el lema de Fatou y usando las hipótesis,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(x)\psi_1 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^{-1-\alpha} \frac{u_n}{\|u_n\|} \geq \int_{\Omega} \underline{a}_\alpha|\psi_1|^{1-\alpha} > 0,$$

y, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \text{signo}(\sigma_1(m) - \lambda_n) &= \text{signo} \left[\int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n)\psi_1 \right] \\ &= \text{signo} \left[\int_{\Omega} g_n(x)\psi_1 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right)^{-1-\alpha} \frac{u_n}{\|u_n\|} \right] > 0, \end{aligned}$$

y la bifurcación será subcrítica. ■

2.1. Bifurcación desde infinito con condiciones de frontera Neumann

Al contrario de lo que ocurre con la bifurcación desde cero, cuando se considera la bifurcación desde infinito el problema de la determinación del lado de la bifurcación cambia su naturaleza cuando se cambian las condiciones frontera y, como se verá a lo largo de esta y la siguiente secciones, los problemas con condiciones de contorno diferentes ya no se comportan de la misma manera.

Esta sección está centrada en el estudio de la bifurcación desde infinito en el primer valor propio $\sigma_1(m)$ del problema (2.1) con condiciones de contorno de tipo Neumann. Concretamente, se estudiará la lateralidad para el problema (2.3):

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) + u(x) &= \lambda m(x)u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

El propósito es, por tanto, el estudio de los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que el problema tiene soluciones “cercanas” a infinito. En un caso particular de éste, en el que la función peso $m \equiv 1$, publicado en [41], se comprobó que el comportamiento local del conjunto de soluciones está caracterizado por el comportamiento asintótico de la no linealidad $g(\lambda, x, u)$. A continuación se generaliza ese resultado para $m \not\equiv 1$ cambiando de signo y se demuestra que la lateralidad de la bifurcación desde infinito también está caracterizada por el comportamiento asintótico en infinito de la no linealidad.

Las siguientes definiciones, que serán de utilidad en secciones posteriores, facilitan el enunciado de los resultados. Siendo $\alpha \in \mathbb{R}$, se definen los límites puntuales,

$$A_\alpha(x) = \lim_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1(m), +\infty)} g(\lambda, x, s)s^\alpha. \quad (2.5)$$

$$\underline{A}_\alpha(x) = \liminf_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1(m), +\infty)} g(\lambda, x, s)s^\alpha. \quad (2.6)$$

$$\overline{A}_\alpha(x) = \limsup_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1(m), +\infty)} g(\lambda, x, s)s^\alpha. \quad (2.7)$$

Teorema 2.3 (Lateralidad en infinito con condiciones Neumann)

Bajo las hipótesis (H) y (B_∞) ,

a) Si existen $M > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\underline{B} \in L^r(\Omega)$ tales que

1. $g(\lambda, x, s)s^\alpha \geq \underline{B}(x)$, para todo $s > M$ y para λ en un entorno de $\sigma_1(m)$
y

2. $\int_\Omega \underline{A}_\alpha \psi_1^{1-\alpha} > 0$,

entonces, la bifurcación desde $(\sigma_1(m), \infty)$ de soluciones positivas de (2.3) es subcrítica.

b) Si existen $M > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\overline{B} \in L^r(\Omega)$ tales que

1. $g(\lambda, x, s)s^\alpha \leq \overline{B}(x)$, para todo $s > M$ y para λ en un entorno de $\sigma_1(m)$
y

2. $\int_\Omega \overline{A}_\alpha \psi_1^{1-\alpha} < 0$,

entonces, la bifurcación desde $(\sigma_1(m), \infty)$ de soluciones positivas de (2.3) es supercrítica.

DEMOSTRACIÓN.

Se probará el apartado a). El apartado b) se demuestra de forma análoga.

Será suficiente probar que cada sucesión (λ_n, u_n) de soluciones estrictamente positivas de (2.3) convergiendo al punto de bifurcación $(\sigma_1(m), +\infty)$ satisface que $\lambda_n < \sigma_1(m)$ para n suficientemente grande. Puesto que $\lambda_n \rightarrow \sigma_1(m)$, $\|u_n\| \rightarrow +\infty$ y $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$ en $C^1(\overline{\Omega})$, usando (2.4),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^{1+\alpha} (\sigma_1(m) - \lambda_n) \int_\Omega m \frac{u_n}{\|u_n\|} \psi_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^\alpha \int_\Omega g(\lambda_n, x, u_n) \psi_1, \quad (2.8)$$

y puesto que

$$\int_\Omega m \frac{u_n}{\|u_n\|} \psi_1 \rightarrow \int_\Omega m \psi_1^2 = \frac{1}{\sigma_1(m)} \int_\Omega (|\nabla \psi_1|^2 + |\psi_1|^2) = \frac{1}{\sigma_1(m)} > 0,$$

bastará determinar el límite de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^\alpha \int_\Omega g(\lambda_n, x, u_n) \psi_1,$$

para demostrar el apartado a) del teorema. Para calcular dicho límite se multiplica y se divide por u_n^α ,

$$\begin{aligned} \|u_n\|^\alpha \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) \psi_1 &= \|u_n\|^\alpha \int_{\Omega} [g(\lambda_n, x, u_n) u_n^\alpha] \psi_1 u_n^{-\alpha} \\ &= \int_{\Omega} [g(\lambda_n, x, u_n) u_n^\alpha] \psi_1 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Usando la acotación inferior dada por el epígrafe 1 del teorema y la hipótesis (H), existe $B_1 \in L^1(\Omega)$ tal que el último integrando satisface

$$[g(\lambda_n, x, u_n) u_n^\alpha] \psi_1 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right)^{-\alpha} \geq B_1 \in L^1(\Omega).$$

Aplicando el lema de Fatou y usando 2,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} [g(\lambda_n, x, u_n) u_n^\alpha] \psi_1 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right)^{-\alpha} \geq \int_{\Omega} \underline{A}_\alpha \psi_1^{1-\alpha} > 0.$$

Inmediatamente se concluye que,

$$\text{signo}(\sigma_1(m) - \lambda_n) = \text{signo} \left[\int_{\Omega} [g(\lambda_n, x, u_n) u_n^\alpha] \psi_1 \left(\frac{u_n}{\|u_n\|} \right)^{-\alpha} \right] > 0,$$

para n suficientemente grande. ■

Comentario 2.4 *En el caso $m \equiv 1$ la primera función propia $\psi_1 \equiv 1$ no interviene en la determinación del signo y puesto que $\sigma_1 = 0$, tomando la igualdad (2.4) adaptada a este caso*

$$\text{signo}(\lambda) = -\text{signo} \left(\int_{\Omega} g(\lambda, x, u) \right).$$

El resultado se podría enunciar de la siguiente forma (ilustrando mucho mejor cómo influye el comportamiento asintótico de g en infinito en la lateralidad):

La bifurcación de soluciones de (2.3) es subcrítica (respectivamente supercrítica) si

$$\int_{\Omega} g(0, x, +\infty) > 0 \quad (\text{respectivamente } < 0),$$

donde $g(0, x, +\infty) = \lim_{(\lambda, s) \rightarrow (0, +\infty)} g(\lambda, x, s)$ (límite uniforme).

Para ver más detalles de este caso se puede consultar [41].

2.2. Bifurcación desde infinito con condiciones de frontera Dirichlet. Resultados existentes.

En la sección anterior se ha comprobado que el comportamiento local de la bifurcación desde infinito del problema (2.1) con condiciones de contorno de tipo Neumann depende, esencialmente, de cómo sea la no linealidad g “cerca” de infinito. Cabría esperar que las condiciones de contorno no influyesen en el razonamiento y también para el caso Dirichlet el comportamiento asintótico de g determinase el lado de la bifurcación. Desde este punto de vista trabajaron Ambrosetti y Hess en [6], Ambrosetti y Arcoya en [4] y Arcoya y Gámez en [11] y sus conclusiones se presentan en la primera parte de esta sección.

En esta sección se enuncian las conclusiones de los dos primeros artículos citados en una versión ligeramente más general que como originalmente fueron redactadas.

Se concluye la sección presentando un ejemplo que pone de manifiesto las diferencias entre los casos de condiciones de contorno de tipo Dirichlet y de tipo Neumann¹.

2.2.1. Resultados existentes

Se considera el problema (2.2):

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda m(x)u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

El problema lineal de autovalores (1.5) asociado es:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda m(x)u(x), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

¹Para ver las diferencias de forma explícita se puede consultar [41, Ejemplo 2.3.2] reproducido aquí como Ejemplo 2.10.

y si $m^+ \neq 0$, entonces existe una sucesión de autovalores positivos $0 < \sigma_1(m) < \sigma_2(m) \leq \dots \leq \sigma_n(m) \rightarrow +\infty$, donde $\sigma_1 > 0$ es un autovalor simple y su espacio propio asociado está generado por una función positiva ψ_1 .

Retomando la igualdad (2.4):

$$(\sigma_1 - \lambda) \int_{\Omega} m u \psi_1 = \int_{\Omega} g(\lambda, x, u) \psi_1, \quad (2.9)$$

sea (λ_n, u_n) una sucesión de soluciones de (2.2) bifurcando desde $(\sigma_1, +\infty)$, lo que quiere decir que $\lambda_n \rightarrow \sigma_1$ y que $\|u_n\| \rightarrow +\infty$. Además, existe una sucesión parcial, denotada igual que la sucesión, que cumple $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$ (convergencia en C^1). Teniendo esto en cuenta

$$\int_{\Omega} m \frac{u_n}{\|u_n\|} \psi_1 \rightarrow \int_{\Omega} m \psi_1^2 = \frac{1}{\sigma_1(m)} \int_{\Omega} |\nabla \psi_1|^2 = \frac{1}{\sigma_1(m)} > 0,$$

y el signo de $(\sigma_1(m) - \lambda_n)$ vendrá dado, para n grande, por el signo que tenga la integral

$$\int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) \psi_1. \quad (2.10)$$

Como se ha comentado con anterioridad, la determinación de dicho signo ha dependido en la literatura existente del comportamiento asintótico de la no linealidad g . Cuanto más “pequeña” es g , más difícil se hace determinar el signo de la integral. Siguiendo el orden cronológico, en [6] no se permite que g se acerque a cero en infinito, de manera que su límite siempre es positivo o negativo. Después, en [4], se compara la función g con cierta potencia $s^{-\alpha}$ ($\alpha < 1$) y el signo de esta comparación da el signo de la integral. En ambos casos la no linealidad se toma “grande”, o en otras palabras, las funciones g consideradas no son integrables en infinito, pero tienen signo, el cual determina el signo de la integral. En [11], el razonamiento es esencialmente el mismo, la función g se compara (ahora más sutilmente puesto que es “más pequeña”) con $s^{-\alpha}$ para $\alpha < 2$ para determinar el signo.

Para presentar los resultados existentes de forma ordenada en el tiempo se retoman las definiciones de $A_{\alpha}(x)$, $\underline{A}_{\alpha}(x)$ y $\overline{A}_{\alpha}(x)$ dadas por (2.5), (2.6) y (2.7) respectivamente. Aunque esta notación se introdujo en [11] y los teoremas de [6] y

[4] están aquí enunciados para problemas autónomos y sin peso m , es interesante enunciarlos de forma más general.

Teorema 2.5 (Lateralidad de la bifurcación Ambrosetti-Hess, [6])

Bajo las hipótesis (H) y (B_∞) ,

- a) Si $\underline{A}_0(x) \geq \varepsilon > 0$, entonces la bifurcación desde $(\sigma_1(m), \infty)$ de soluciones positivas de (2.2) es subcrítica.
- b) Si $\overline{A}_0(x) \leq -\varepsilon < 0$, entonces la bifurcación desde $(\sigma_1(m), \infty)$ de soluciones positivas de (2.2) es supercrítica.

Teorema 2.6 (Lateralidad de la bifurcación Ambrosetti-Arcoya, [4])

Bajo las hipótesis (H) y (B_∞) , si existe $\alpha \leq 1$ tal que

- a) $\underline{A}_\alpha(x) \geq \varepsilon > 0$, entonces la bifurcación desde $(\sigma_1(m), \infty)$ de soluciones positivas de (2.2) es subcrítica.
- b) $\overline{A}_\alpha(x) \leq -\varepsilon < 0$, entonces la bifurcación desde $(\sigma_1(m), \infty)$ de soluciones positivas de (2.2) es supercrítica.

Teorema 2.7 (Bifurcación subcrítica Arcoya-Gómez, [11])

Bajo las hipótesis (H) y (B_∞) ,

- a) Si existen $M > 0$, $\alpha < 2 - 1/r$ y $\underline{B} \in L^r(\Omega)$ tales que
 1. $g(\lambda, x, s)s^\alpha \geq \underline{B}(x)$ para todo $s > M$, y para λ en un entorno de $\sigma_1(m)$
y
 2. $\int_\Omega \underline{A}_\alpha \psi_1^{1-\alpha} > 0$,

entonces, la bifurcación desde $(\sigma_1(m), \infty)$ de soluciones positivas de (2.2) es subcrítica.

- b) si existen $M > 0$, $\alpha < 2 - 1/r$ y $\overline{B} \in L^r(\Omega)$ tales que

1. $g(\lambda, x, s)s^\alpha \leq \overline{B}(x)$ para todo $s > M$, y para λ en un entorno de $\sigma_1(m)$
y

$$2. \int_{\Omega} \bar{A}_{\alpha} \psi_1^{1-\alpha} < 0,$$

entonces, la bifurcación desde $(\sigma_1(m), \infty)$ de soluciones positivas de (2.2) es supercrítica.

Comentario 2.8 La demostración de los Teoremas 2.5, 2.6 y 2.7 es similar a la demostración del Teorema 2.3. Para ver más detalles se puede consultar [11].

El siguiente corolario expresa los resultados contenidos en los teoremas anteriores en términos de velocidad de convergencia de $\sigma_1(m) - \lambda_n$:

Corolario 2.9 Se asumen las hipótesis (H) y (B_{∞}) . Se supone que $\exists \alpha \in [0, 2)$ tal que $\exists A_{\alpha}(x) \neq 0$. Entonces, si (λ_n, u_n) es una sucesión de soluciones positivas de (2.2) bifurcando desde $(\sigma_1(m), \infty)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sigma_1(m) - \lambda_n) \|u_n\|^{1+\alpha} = \sigma_1(m) \int_{\Omega} A_{\alpha}(x) \psi_1^{1-\alpha}.$$

En el caso en que el límite $A_{\alpha}(x) \equiv 0$ para cualquier $\alpha < 2$ no se puede aplicar ninguno de los teoremas anteriores para determinar hacia dónde se produce la bifurcación. Se podría pensar que, siguiendo los razonamientos previos del caso Neumann, tomando un valor de α adecuado para que $A_{\alpha}(x) \neq 0$, éste determinará el lado de la bifurcación. Sin embargo no es cierto. Para $\alpha \geq 2$ el siguiente ejemplo muestra que el signo de $\int_{\Omega} A_{\alpha} \psi_1^{1-\alpha}$ no coincide con el signo de $\sigma_1(m) - \lambda_n$. Esto además pone de manifiesto las diferencias entre las distintas condiciones de frontera, ya que para el caso Dirichlet se probará que la bifurcación es supercrítica, mientras que para Neumann se verá que es subcrítica.

Ejemplo 2.10 ([11]) Tomando $N = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $m \equiv 1$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(s) = \begin{cases} -K, & -\infty < s \leq 1, \\ K(s-2), & 1 < s \leq 2, \\ \frac{s-2}{s^{\alpha+1}}, & 2 < s < +\infty. \end{cases}$$

Esta g cumple (B_∞) y además $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s)s^\alpha = 1 > 0$, y usando el Teorema 2.7 se concluiría que la bifurcación es subcrítica. Pero, en contra de la hipótesis de dicho teorema, se elige $\alpha > 2$.

Tomando (λ_n, u_n) una sucesión bifurcando desde $(\sigma_1(m), +\infty)$, $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(\cdot)$ en $C^1([0, \pi])$. Si n es suficientemente grande, $\|u_n\| > 1$ y

$$\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq \frac{u_n(x)}{\|u_n\|} \leq 2x\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \forall x \in [0, \pi]. \quad (2.11)$$

Usando (2.4) y la simetría de las soluciones positivas con respecto a $\pi/2$,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi g(u_n)\psi_1 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u_n)\psi_1 \\ &= 2 \left[\left(\int_{\substack{x \in [0, \pi/2] \\ u_n \in [0, 1]}} + \int_{\substack{x \in [0, \pi/2] \\ u_n \in [1, 2]}} + \int_{\substack{x \in [0, \pi/2] \\ u_n \geq 2}} \right) g(u_n)\psi_1 \right] \\ &< \left[-K \int_{\substack{x \in [0, \pi/2] \\ u_n \in [1, 2]}} \psi_1 + \int_{\substack{x \in [0, \pi/2] \\ u_n \geq 2}} g(u_n)\psi_1 \right] \\ &= 2[-KI_1^n + I_2^n]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Teniendo en cuenta (2.11),

$$\left\{ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : 0 \leq u_n(x) \leq 1 \right\} \supset \left[0, \frac{1}{2\|u_n\|} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right],$$

y se tiene:

$$\begin{aligned} I_1^n &= \int_{\substack{x \in [0, \pi/2] \\ u_n \in [0, 1]}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(x) \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{2\|u_n\|} \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[1 - \cos \left(\frac{1}{2\|u_n\|} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

De la misma forma, (2.11) junto con $g(s) < 1/s^\alpha$, $\forall s \geq 2$ y la inclusión:

$$\left\{ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : u_n(x) \geq 2 \right\} \subset \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2\|u_n\|}, \frac{\pi}{2} \right],$$

se estima I_2 de la forma:

$$\begin{aligned} I_2^n &= \int_{\substack{x \in [0, \pi/2] \\ u_n \geq 2}} g(u_n) \psi_1 \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{2\pi}}{2\|u_n\|}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u_n(x)^\alpha} \operatorname{sen}(x) dx \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{2}{\|u_n\|} \right)^\alpha \int_{\frac{\sqrt{2\pi}}{2\|u_n\|}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{\alpha-1}} \\ &= \frac{1}{\|u_n\|^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2^{2\alpha-2}}{\alpha-2} \left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{\alpha-2}} - \frac{1}{\pi^{\alpha-2} \|u_n\|^{\alpha-2}} \right]. \end{aligned}$$

Para n suficientemente grande, se deduce de (2.12),

$$\begin{aligned} \int_0^\pi g(u_n) \psi_1 &< \frac{2}{\|u_n\|^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-K \left\{ 1 - \cos \left(\frac{1}{2\|u_n\|} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \right\} \|u_n\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2^{2\alpha-2}}{\alpha-2} \left\{ \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{\alpha-2}} - \frac{1}{\pi^{\alpha-2} \|u_n\|^{\alpha-2}} \right\} \right]. \end{aligned}$$

El interior del corchete tiende a

$$-\frac{K\pi}{16} + \frac{2^{2\alpha-2}}{(\alpha-2)(\sqrt{2\pi})^{\alpha-2}}$$

cuando n tiende a infinito. Por tanto, el límite será negativo para

$$K > \frac{2^{2\alpha+2}}{\pi(\alpha-2)(\sqrt{2\pi})^{\alpha-2}}.$$

Tomando K apropiadamente y usando (2.4) para n grande,

$$\operatorname{signo}(\sigma_1 - \lambda_n) = \operatorname{signo} \left[\int_0^\pi g(u_n) \psi_1 \right] < 0,$$

y la bifurcación es supercrítica, en contra de lo esperado.

Para concluir, si se aplica el Teorema 2.3 se comprueba inmediatamente que la bifurcación, cuando las condiciones de frontera son Neumann, es supercrítica ya que $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) s^\alpha = 1 > 0$.

2.3. Aportaciones a la lateralidad desde infinito con condiciones de frontera Dirichlet

2.3.1. No linealidades pequeñas

El análisis detenido del ejemplo 2.10 pone de manifiesto que si la no linealidad g es “pequeña”, el límite en infinito no basta para determinar el signo de la integral (2.10), sino que viene determinado por todos los valores tomados por g . Esto significa que si se pretende obtener un resultado para no linealidades pequeñas será necesario recurrir a la forma global de la función g . El siguiente teorema no sólo recurre a esta forma global sino que en él se calcula exactamente el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) \psi_1,$$

que determinará exactamente el orden de convergencia de $\sigma_1(m) - \lambda_n$ cuando (λ_n, u_n) es una sucesión de soluciones de (2.2).

Tomando la igualdad (2.8) con $\alpha = 2$, ésta adquiere la forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^3 (\sigma_1(m) - \lambda_n) \int_{\Omega} m \frac{u_n}{\|u_n\|} \psi_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) \psi_1, \quad (2.13)$$

y ya que

$$\int_{\Omega} m \frac{u_n}{\|u_n\|} \psi_1 \rightarrow \int_{\Omega} m \psi_1^2 = \frac{1}{\sigma_1(m)},$$

la condición que determina hacia qué lado se produce la bifurcación estará dada por el límite de la integral

$$\|u_n\|^2 \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) \psi_1. \quad (2.14)$$

Se asumen a continuación unas hipótesis que, por un lado, aseguran que g es pequeña y, por otro, dan las condiciones idóneas para poder utilizar argumentos

que permitan realizar los cálculos:

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{|s| \rightarrow +\infty} g(\lambda, x, s)s^2 = 0 \text{ uniformemente en } x \in \Omega, \text{ y} \\ \lambda \text{ en conjuntos acotados,} \\ \bullet \text{ existe } f \in L^1([0, +\infty)) \text{ tal que } |g(\lambda, x, s)s| < f(s), \text{ para } x \\ \text{en un entorno de } \partial\Omega, \text{ y } \lambda \text{ en un entorno de } \sigma_1(m), \\ \bullet g(\sigma_1(m), x, s) \text{ es continua en } x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Esta hipótesis da sentido a la expresión integral

$$I = I(g) := \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left(\int_0^{+\infty} g(\sigma_1(m), y, s)s ds \right) dy. \quad (2.15)$$

Este valor I será el que caracterice el lado de la bifurcación, ya que si I tiene signo, el límite de (2.14) lo tendrá y, por consiguiente, también lo tendrá $\sigma_1(m) - \lambda_n$.

Teorema 2.11 *Asumiendo (H), (B_∞) y (G), si (λ_n, u_n) es una sucesión de soluciones de (2.2) bifurcando desde $(\sigma_1(m), +\infty)$, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_1(m) - \lambda_n) \|u_n\|^3 = \sigma_1(m)I.$$

Como consecuencia, si $I > 0$ la bifurcación es subcrítica y si $I < 0$ la bifurcación es supercrítica.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.11

Para demostrar el teorema se dedica el resto de la sección. Esta demostración es consecuencia de dos lemas cuya finalidad es restringir el cálculo de (2.14) a un entorno de la frontera de Ω . Para ello, usando notación de [45, Apéndice 14.6], se describe el siguiente entorno de la frontera. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado con frontera C^2 y ν_y es el vector normal interior en $y \in \partial\Omega$, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\varphi : \partial\Omega \times (0, t_0] \rightarrow \Omega, \quad \varphi(y, t) = y + \nu_y t$$

es un difeomorfismo sobre $\Gamma_0 = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq t_0\}$ y el determinante jacobiano de φ converge a 1 si t tiende a 0 uniformemente en $y \in \partial\Omega$, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow 0} |J_\varphi(y + \nu_y t)| = 1, \text{ uniformemente en } \partial\Omega.$$

Además, usando (G), dicho t_0 puede ser elegido tal que

$$|g(\lambda, x, s)s| < f(s), \quad \forall (\lambda, x, s) \in (\sigma_1(m) - \varepsilon, \sigma_1(m) + \varepsilon) \times \overline{\Gamma_0} \times \mathbb{R}$$

y

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t) > 0, \quad \forall (y, t) \in \partial\Omega \times (0, t_0). \quad (2.16)$$

Los dos siguientes lemas son parte de la demostración y resuelven aspectos técnicos de la misma.

Lema 2.12

Sea $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$ una sucesión cumpliendo que $\|u_n\| \rightarrow \infty$ y que $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$ (convergencia C^1). Entonces,

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|u_n\| \psi_1(x)}{u_n(x)} \right) = 1$ uniformemente en $x \in \Gamma_0$. En otras palabras,
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|u_n\| \psi_1(y + \nu_y t)}{u_n(y + \nu_y t)} \right) = 1 \text{ uniformemente en } (y, t) \in \partial\Omega \times (0, t_0].$$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_n\|}{\frac{\partial u_n}{\partial \nu_y}(x)} = \frac{1}{\frac{\partial \psi_1}{\partial \nu_y}(x)}$ uniformemente en $x = y + \nu_y t \in \Gamma_0$.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA.

- i) Se deduce de que $\nabla u_n/\|u_n\| \rightarrow \nabla \psi_1$ en $\overline{\Omega}$ uniformemente. De hecho, para cada $y \in \partial\Omega$, usando el Teorema del Valor Medio y (2.16), para cada $n \geq 1$ y $\forall t \in (0, t_0]$, existe $c_{n,t,y} \in (0, t_0)$ tal que

$$\frac{\|u_n\| \psi_1(y + \nu_y t)}{u_n(y + \nu_y t)} = \frac{\|u_n\| \frac{\partial}{\partial t} \psi_1(y + \nu_y c_{n,t,y})}{\frac{\partial}{\partial t} u_n(y + \nu_y c_{n,t,y})} = \frac{\|u_n\| \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu_y}(y + \nu_y c_{n,t,y})}{\frac{\partial u_n}{\partial \nu_y}(y + \nu_y c_{n,t,y})},$$

lo cual converge a 1 uniformemente en $(y, t) \in \partial\Omega \times (0, t_0)$.

- ii) El producto escalar $\frac{\nabla u_n(x)}{\|u_n\|} \cdot \nu_y$ converge a $\nabla \psi_1(x) \cdot \nu_y$ para todo $x = y + \nu_y t \in \Gamma_0$, es decir,

$$\frac{1}{\|u_n\|} \frac{\partial u_n}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t) \rightarrow \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t) \text{ uniformemente en } y + \nu_y t \in \Gamma_0.$$

Teniendo en cuenta el lema de Hopf, $\nabla\psi_1(y)$ está lejos de cero uniformemente en $\overline{\Gamma_0}$ (expresión (2.16)) y, entonces

$$\frac{\|u_n\|}{\frac{\partial u_n}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t)} \rightarrow \frac{1}{\frac{\partial \psi_1}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t)} \text{ uniformemente en } y + \nu_y t \in \Gamma_0.$$

De esta forma queda demostrado el Lema 2.12. \square

Lema 2.13 *Asumiendo las hipótesis (H), (B_∞) y (G), sea (λ_n, u_n) una sucesión que cumple $\lambda_n \rightarrow \sigma_1(m)$, $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$, $\|u_n\| \rightarrow \infty$ y que $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$ (convergencia C^1). Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) \psi_1 = I.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA.

Se divide el límite en dos partes que se denominarán I_1 e I_2 .

$$\begin{aligned} \|u_n\|^2 \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n(x)) \psi_1(x) dx &= \|u_n\|^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma_0} g(\lambda_n, x, u_n(x)) \psi_1(x) dx \\ &\quad + \|u_n\|^2 \int_{\Gamma_0} g(\lambda_n, x, u_n(x)) \psi_1(x) dx \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Puesto que existe c_0 tal que $\psi_1 \geq c_0 > 0$ en $\Omega \setminus \Gamma_0$, $u_n(x) \rightarrow \infty$ uniformemente en $\Omega \setminus \Gamma_0$ y

$$I_1 = \|u_n\|^2 \int_{\Omega \setminus \Gamma_0} g(\lambda_n, x, u_n(x)) \psi_1(x) dx = \int_{\Omega \setminus \Gamma_0} g(\lambda_n, x, u_n(x)) u_n^2 \frac{\|u_n\|^2 \psi_1(x)}{u_n^2} dx,$$

con $\frac{\|u_n\|^2 \psi_1}{u_n^2} \rightarrow 1/\psi_1$ (convergencia uniforme a un límite acotado), y con la hipótesis (G), $g(\lambda_n, x, u_n) u_n^2 \rightarrow 0$ uniformemente. Por tanto, $I_1 \rightarrow 0$.

Para I_2 se usa la parametrización $x = \varphi(y, t) = y + \nu_y t$, para $x \in \Gamma_0$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \|u_n\|^2 \int_{\Gamma_0} g(\lambda_n, x, u_n(x)) \psi_1(x) dx \\ &= \|u_n\|^2 \int_{\partial\Omega \times (0, t_0)} g(\lambda_n, y + \nu_y t, u_n(y + \nu_y t)) \psi_1(y + \nu_y t) |J_\varphi(y + \nu_y t)| dt dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \int_0^{t_0} \|u_n\|^2 g(\lambda_n, y + \nu_y t, u_n(y + \nu_y t)) \psi_1(y + \nu_y t) |J_\varphi(y + \nu_y t)| dt dy. \end{aligned}$$

Fijando $y \in \partial\Omega$, se hace el cambio de variable unidimensional $t \mapsto s = u_n(y + \nu_y t)$, el cual es invertible para n grande (expresión (2.16)), con inverso $s \mapsto t_n(s)$ y con $dt = \frac{ds}{\frac{\partial u_n}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t_n(s))}$. Así,

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} \|u_n\|^2 g(\lambda_n, y + \nu_y t, u_n(y + \nu_y t)) \psi_1(y + \nu_y t) |J_\varphi(y + \nu_y t)| dt \\ &= \int_0^{u_n(y + \nu_y t_0)} \left[g(\lambda_n, y + \nu_y t_n(s), s) s \frac{\|u_n\| \psi_1(y + \nu_y t_n(s))}{u_n(y + \nu_y t_n(s))} \right. \\ & \quad \left. |J_\varphi(y + \nu_y t_n(s))| \frac{\|u_n\|}{\frac{\partial u_n}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t_n(s))} \right] ds \\ &= \int_0^{+\infty} \chi_{[0, u_n(y + \nu_y t_0)]} \left[g(\lambda_n, y + \nu_y t_n(s), s) s \frac{\|u_n\| \psi_1(y + \nu_y t_n(s))}{u_n(y + \nu_y t_n(s))} \right. \\ & \quad \left. |J_\varphi(y + \nu_y t_n(s))| \frac{\|u_n\|}{\frac{\partial u_n}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t_n(s))} \right] ds. \end{aligned}$$

Para $y \in \partial\Omega$, $s > 0$ y λ_n en un entorno de $\sigma_1(m)$, entonces $s \in (0, u_n(y + \nu_y t_0))$ para n suficientemente grande y

- $t_n(s) \in (0, t_0)$ y converge a 0 cuando n tiende a infinito.
- Usando (G), $g(\lambda_n, y + \nu_y t_n(s), s) s \rightarrow g(\sigma_1(m), y, s) s$ donde $|g(\sigma_1(m), y + \nu_y t_n(s), s) s| < f(s)$.
- $|J_\varphi(y + \nu_y t_n(s))|$ es acotado y converge uniformemente a 1.
- $\frac{\|u_n\| \psi_1(y + \nu_y t_n(s))}{u_n(y + \nu_y t_n(s))}$ está acotado y converge uniformemente a 1 (ver ítem *i*) del lema anterior).
- $\frac{\|u_n\|}{\frac{\partial u_n}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t_n(s))}$ converge uniformemente a $\frac{1}{\frac{\partial \psi_1}{\partial \nu_y}(y)} = \frac{1}{|\nabla \psi_1(y)|}$ y en consecuencia está acotado (usando el epígrafe *ii*) del lema anterior y la continuidad de $\nabla \psi_1$ en $\partial\Omega$).

Por lo tanto, existe $K > 0$ tal que para cada $y \in \partial\Omega$, $s > 0$ y λ_n en un entorno de $\sigma_1(m)$,

$$\left| g(\lambda_n, y + \nu_y t_n(s), s) s \frac{\|u_n\| \psi_1(y + \nu_y t_n(s))}{u_n(y + \nu_y t_n(s))} |J_\varphi(y + \nu_y t_n(s))| \frac{\|u_n\|}{\frac{\partial u_n}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t_n(s))} \right| < K f(s).$$

Se puede ahora aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue para obtener:

$$I_2 \rightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left(\int_0^{+\infty} g(\sigma_1(m), y, s) s ds \right) dy = I.$$

Y queda demostrado el Lema 2.13. \square

Usando de forma combinada la igualdad (2.13) y el Lema 2.13, se termina la demostración del Teorema 2.11. \blacksquare

2.3.2. Aportaciones para no linealidades grandes

Puede parecer que el interés de los resultados de la sección previa se reduce a los casos, no triviales, en los que la no linealidad g es pequeña en infinito y que los casos descritos en el apartado de resultados existentes son óptimos para no linealidades mayores.

A continuación se verá que usando criterios de comparación junto con el Teorema 2.11 se pueden mejorar los Teoremas 2.5 y 2.6. Para ello hay que recordar que estos teoremas aparecen originalmente con no linealidades autónomas, esto es, $g \equiv g(s)$. Con esta intención, en lugar de considerar la hipótesis (G), se supondrá la siguiente hipótesis

$$(\tilde{G}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe } \tilde{g} : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ satisfaciendo (G) que cumple una} \\ \text{de las dos siguientes condiciones:} \\ \text{ó } (\tilde{G}+) \quad I(\tilde{g}) > 0 \text{ y } g(\lambda, x, s) \geq \tilde{g}(\lambda, x, s), \forall (\lambda, x, s) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \\ \text{ó } (\tilde{G}-) \quad I(\tilde{g}) < 0 \text{ y } g(\lambda, x, s) \leq \tilde{g}(\lambda, x, s), \forall (\lambda, x, s) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Teorema 2.14 *Sea Ω un dominio de \mathbb{R}^N con frontera C^2 , se asume (H) y sea g una función satisfaciendo (B_∞) y (\tilde{G}) . Entonces:*

- Si ocurre $(\tilde{G}+)$, la bifurcación desde $(\sigma_1(m), +\infty)$ de soluciones de (2.2) es subcrítica.
- Si ocurre $(\tilde{G}-)$, la bifurcación desde $(\sigma_1(m), +\infty)$ de soluciones de (2.2) es supercrítica.

DEMOSTRACIÓN.

Sea (λ_n, u_n) una sucesión de soluciones de (2.2) bifurcando desde $(\sigma_1(m), +\infty)$. Puesto que $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$ (convergencia C^1) y \tilde{g} satisface (G), se puede aplicar el lema 2.13 para obtener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \int_{\Omega} \tilde{g}(\lambda_n, x, u_n) \psi_1 = I(\tilde{g}).$$

Así, el signo de $\int_{\Omega} \tilde{g}(\lambda_n, x, u_n) \psi_1$ coincide con el de $I(\tilde{g})$ para n suficientemente grande. Teniendo en cuenta la fórmula (2.4), si $(\tilde{G}+)$, para n grande,

$$(\sigma_1(m) - \lambda_n) \int_{\Omega} m u_n \psi_1 = \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) \psi_1 \geq \int_{\Omega} \tilde{g}(\lambda_n, x, u_n) \psi_1 > 0.$$

Análogamente, si $(\tilde{G}-)$, para n grande,

$$(\sigma_1(m) - \lambda_n) \int_{\Omega} m u_n \psi_1 = \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) \psi_1 \leq \int_{\Omega} \tilde{g}(\lambda_n, x, u_n) \psi_1 < 0.$$

Puesto que $\int_{\Omega} m u_n \psi_1 > 0$ para n grande, se concluye la demostración. ■

Comentario 2.15 Obsérvese que el Teorema 2.14 extiende algunos de los resultados anteriormente comentados y también al Teorema 2.11 pues incluso cuando

$$g(\sigma_1(m), y, s) s \notin L^1([0, \infty)),$$

las hipótesis consideradas dan sentido a la expresión

$$0 < \int_0^{+\infty} g(\sigma_1(m), y, s) s ds \leq +\infty \quad \text{ó} \quad 0 > \int_0^{+\infty} g(\sigma_1(m), y, s) s ds \geq -\infty$$

Comentario 2.16 En los casos en los que la función g no es autónoma, sino que depende de otras variables, como en los Teoremas 2.5, 2.6 y 2.7, es A_α , dado por (2.5), y, concretamente, el signo de $\int_\Omega A_\alpha \psi^{1-\alpha}$ el que fija el lado de la bifurcación. En estos casos el Teorema 2.14 no generaliza los resultados puesto que no es posible, en general, construir funciones $\tilde{g}(\lambda, x, s)$ menores (o mayores) que $g(\lambda, x, s)$ que cumplan las condiciones $(\tilde{G}+)$ (o $(\tilde{G}-)$).

Comentario 2.17 Todos los argumentos utilizados en el capítulo se pueden aplicar también en el caso de que $g(\sigma_1(m), x, +\infty) \perp \psi_1$, es decir,

$$\int_\Omega g(\sigma_1(m), x, +\infty) \psi_1 = 0,$$

en lugar de $g(\sigma_1(m), x, +\infty) = 0$. Para considerar tales casos, se debe añadir un término a la no linealidad y observar que la fórmula (2.4) y las demostraciones continúan vigentes para el problema

$$\left. \begin{array}{l} -\mathcal{L}u(x) = \lambda m(x)u(x) + h(x) + g(\lambda, x, u(x)), \quad x \in \Omega \\ B(u) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

donde $h \in L^2(\Omega)$ es ortogonal a ψ_1 , es decir, $\int_\Omega h \psi_1 = 0$.

Comentario 2.18 (Bifurcación desde $-\infty$)

Todos los resultados de bifurcación desde infinito se pueden adaptar para cualquier sucesión (λ_n, u_n) de soluciones de (2.17) bifurcando desde $(\sigma_1(m), -\infty)$, es decir, $u_n/\|u_n\| \rightarrow -\psi_1$. De hecho tomando $k(\lambda, x, s) = -g(\lambda, x, -s)$, cada par $(\lambda_n, v_n) = (\lambda_n, -u_n)$ es solución de

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta v(x) = \lambda m(x)v(x) - h(x) + k(\lambda, x, v(x)), \quad x \in \Omega \\ v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

De esta forma, el lado de la bifurcación desde menos infinito dependerá del signo de la integral

$$\begin{aligned} I^- = I(k) &:= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left(\int_0^{+\infty} k(\sigma_1(m), y, s) s ds \right) dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left(\int_{-\infty}^0 g(\sigma_1(m), y, s) s ds \right) dy. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Comentario 2.19 *Todos los resultados se pueden reescribir, con ligeras modificaciones, cuando en lugar del primer valor positivo $\sigma_1(m)$ se estudian las bifurcaciones desde $\sigma_{-1}(m)$, el primer valor propio negativo.*

2.4. Aplicación de la lateralidad a la resolución de problemas resonantes

Se considera el problema resonante en el primer valor propio $\sigma_1(m)$,

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \sigma_1(m)m(x)u(x) + h(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

donde $h \in L^2(\Omega)$ cumple $\int_{\Omega} h\psi_1 = 0$.

Este problema con la condición $g(\cdot, \cdot, s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$, se denomina “strongly resonant problem” (problema en resonancia fuerte) desde que Bartolo, Benci y Fortunato lo bautizaran con ese nombre en [14]. Ha sido extensamente estudiado y entre los artículos dedicados a él se pueden destacar cronológicamente a Dancer [26], Solimini [65], Ward [69], Mawhin y Schmitt [57], Schaaf y Schmitt [61], [62], [63], Habets, Manásevich y Zanolin [46], Habets, Serra y Tarallo [47] o Cañada y Ruiz [20]. En todos ellos el objetivo final es demostrar que problemas similares a (2.20) tienen solución, para lo cual utilizan diferentes técnicas. Así, en [26] se usan métodos asintóticos parecidos a los usados en el Capítulo 2 pero aplicados de diferente forma para demostrar la existencia de solución de un problema auxiliar en dimensión uno. Una generalización de este resultado a dimensiones mayores se describe en [63]. Los artículos [65] y [69], que se consideran clásicos en la determinación de solución de problemas resonantes, están dedicados a los casos en los que la no linealidad g es periódica y en ellos se utilizan, esencialmente, técnicas variacionales.

Muy interesantes, por la relativa similitud entre las técnicas de bifurcación usadas por los autores y las presentadas en la presente memoria, son los artículos [61] y [62]. En el primero de ellos, hecho en dimensión 1, considerando g periódica se resuelve el problema (2.20) bajo ciertas hipótesis de periodicidad de la no linealidad. En el segundo, se generaliza a dimensión N y se obtienen resultados de multiplicidad de soluciones de (2.20) asumiendo que g es periódica y calculando

explícitamente el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u\|_{\infty} (\sigma_1 - \lambda_n) \int_{\Omega} u_n \psi_1,$$

para sucesiones (λ_n, u_n) bifurcando desde (σ_1, ∞) , del cual se obtendrá la conclusión de que la rama de soluciones debe cortar infinitas veces a σ_1 . Es de destacar también que en las demostraciones se usa la fórmula de la coárea (ver [21]).

Finalmente en [20], mediante técnicas variacionales se demuestra que si la función g es par o si es del tipo $g(s) = \text{sen}(s + \delta)$, para $\delta \in (0, 2\pi)$, el problema (2.20) tiene solución.

A continuación se usarán métodos diferentes a los utilizados en los artículos citados. En concreto, se siguen las ideas desarrolladas en [48], en [57] y en [11]. Así, mediante cotas a priori de las normas de las soluciones, recurriendo a la definiciones de bifurcación subcrítica y supercrítica, aplicando los Teoremas 2.11 y 2.14, usando diversos resultados clásicos y la lateralidad local de las bifurcaciones desde $+\infty$ y desde $-\infty$ (ver comentario 2.18) en el primer valor propio se obtienen soluciones de (2.20).

En este punto, se considerarán los problemas (2.2) y (2.20) y en el próximo teorema se generalizan, entre otros, algunos resultados incluidos en [26], [63], [14] o [11] gracias a que las hipótesis sobre g son más generales.

Teorema 2.20 *Bajo las hipótesis (H), (B_{∞}) , (G) y $h \in L^2(\Omega)$, $\int_{\Omega} h \psi_1 = 0$. Si*

$$\text{signo}(I) = \text{signo}(I^-),$$

entonces el problema resonante (2.20) tiene, al menos, una solución (ver Figura 2.1).

DEMOSTRACIÓN.

Se considera el caso $I > 0$, es decir, el caso de bifurcación subcrítica desde $+\infty$ y desde $-\infty$. Usando la Definición 1.24 dada en el capítulo 1, existen $\varepsilon > 0$ y $M > 0$ tales que, si (λ, u) es una solución de (2.2) y $\sigma_1(m) \leq \lambda \leq \sigma_1(m) + \varepsilon$, se

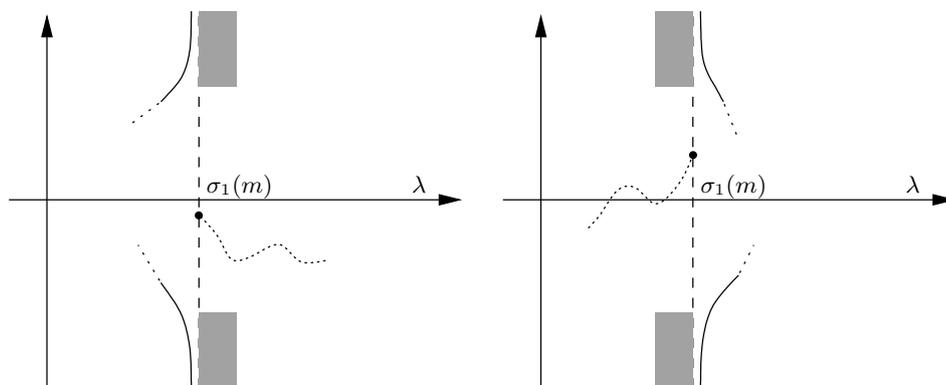


Figura 2.1: Solución del problema (2.20) $\text{signo}(I) = \text{signo}(I^-) > 0$ (< 0).

cumple que

$$\|u\| \leq M.$$

Usando resultados clásicos (ver, por ejemplo, [34] o [29]) para cada $\lambda \neq \sigma_k(m)$ existe, al menos, una solución (λ, u) de (2.2). Por tanto, si se toma una sucesión (λ_n, u_n) con $\lambda_n \rightarrow \sigma_1(m)$, $\lambda_n > \sigma_1(m)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\|u_n\| \leq M$ para valores de n suficientemente grandes. De esta forma, usando argumentos estándar de compacidad, una subsucesión de u_n debe converger a una solución del problema resonante (2.20). ■

Para terminar el capítulo, se presenta un ejemplo que ilustra la potencia del Teorema 2.20, donde hay una no linealidad a la que no se le pueden aplicar resultados anteriores como los contenidos en [14] o [11].

Ejemplo 2.21 Se considera una no linealidad autónoma $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(s) = \frac{1-s}{1+s^4},$$

la cual satisface (H) y (B_∞) . Además

$$I = \int_{\partial\Omega} \frac{dy}{|\nabla\psi_1(y)|} \int_0^{+\infty} g(s)s ds = \frac{1-\sqrt{2}}{4}\pi \int_{\partial\Omega} \frac{dy}{|\nabla\psi_1(y)|} < 0,$$

$$I^- = \int_{\partial\Omega} \frac{dy}{|\nabla\psi_1(y)|} \int_{-\infty}^0 g(s)s ds = \frac{-2 - \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\pi \int_{\partial\Omega} \frac{dy}{|\nabla\psi_1(y)|} < 0,$$

lo que implica, usando el corolario anterior, que el problema (2.20) tiene, al menos, una solución. Sin embargo, no se pueden aplicar ni los métodos de [14] puesto que el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(s) ds = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi \neq 0,$$

ni tampoco los de [11] porque g se aproxima a cero en infinito demasiado rápido.

Comentario 2.22 El Teorema 2.20 se puede ver como una generalización del resultado clásico de Landesman y Lazer [53] en el que se encuentra solución del problema resonante

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta u(x) = \sigma_1 u(x) + h(x) + g(x, u(x)), \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

bajo una de las hipótesis:

$$\int_{\Omega} g(x, +\infty)\psi_1 < \int_{\Omega} h\psi_1 < \int_{\Omega} g(x, -\infty)\psi_1$$

o

$$\int_{\Omega} g(x, +\infty)\psi_1 > \int_{\Omega} h\psi_1 > \int_{\Omega} g(x, -\infty)\psi_1,$$

donde $g(x, \pm\infty) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} g(x, s)$ (límites puntuales). Obsérvese que, a la vista del Teorema 2.20, de las condiciones de Landesman-Lazer se deduce que ambas bifurcaciones son hacia el mismo lado, lo cual garantiza que existe solución del problema resonante. Sin embargo, bajo la hipótesis (G) el resultado expuesto en [53] no es aplicable. Es más, como se ve en el Ejemplo 2.21, las generalizaciones hechas en [11] tampoco se pueden aplicar.

CAPÍTULO

3

Lateralidad en la bifurcación desde
infinito para algunos operadores
cuasilineales

Introducción

El capítulo previo presenta resultados de bifurcación desde infinito en el primer valor propio que pueden parecer sorprendentes por el hecho de que el comportamiento local de las ramas de bifurcación está determinado por las propiedades globales de la no linealidad. Con estos antecedentes se puede llegar a pensar que estos mismos resultados se pueden hacer genéricos para otros operadores, diferentes del Laplaciano, a los que también se les pueden aplicar las técnicas de bifurcación. Ése es exactamente el objetivo del capítulo, estudiar la lateralidad de las bifurcaciones desde infinito para los operadores p -Laplaciano y $-\operatorname{div}(A(x, u))\nabla u$, salvando los escollos que van surgiendo al enfrentarse a los problemas concretos.

Para ello, y siendo más precisos, el capítulo se divide en dos secciones. La primera dedicada al operador p -Laplaciano, en la que primero se comprueba que es susceptible de ser tratado mediante bifurcación, después se enuncian los resultados de lateralidad existentes y, para terminar se aportan dos teoremas (ver Teoremas 3.5 y 3.7) que mejoran muchos de los resultados existentes relacionados con este operador. La dificultad más importante de esta parte radica en el hecho de que el operador p -Laplaciano no es autoadjunto y, por ello, no se pueden adaptar las demostraciones del capítulo anterior de forma inmediata.

La segunda sección está dedicada al operador $-\operatorname{div}(A(x, u))\nabla u$ y tiene una estructura similar a la anterior. Sin embargo, hay diferencias entre ambas que no se pueden pasar por alto, como el hecho de que para tomar el primer valor propio haya que recurrir a un problema auxiliar o que el uso de bifurcación para atacar este problema sea bastante reciente. A pesar de todo, los resultados obtenidos (ver Teoremas 3.15 o 3.18) son, adaptados a las circunstancias, similares a los del p -Laplaciano y a los del Laplaciano del capítulo anterior y también mejoran muchos de los que existen sobre este operador. Además de las diferencias comentadas, la fundamental dificultad para trabajar la bifurcación con este operador está en que no es homogéneo, lo cual era esencial en los resultados clásicos de bifurcación.

3.1. El operador p-Laplaciano

En esta sección se estudia la lateralidad en la bifurcación desde infinito en el primer valor propio del operador p-Laplaciano definido por

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad \text{para } p > 1.$$

En primer lugar se revisan algunos resultados que aseguran la bifurcación ([32], [5]) para, posteriormente, centrarse en el estudio local de la bifurcación desde infinito. Con la intención de deducir resultados semejantes a los obtenidos en el capítulo dedicado al operador Laplaciano, se necesita recurrir a algún mecanismo que solvete el problema de que el operador p-Laplaciano no es autoadjunto ya que, en estas condiciones, no se puede utilizar una igualdad similar a (2.4). El mecanismo usado es una desigualdad dada por Arcoya y Gámez en [11] que jugará el papel de la igualdad anteriormente citada, pero que provocará que las demostraciones deban cambiar ligeramente.

Dado un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con frontera C^2 , se considera el problema:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta_p u(x) &= \lambda m(x) |u(x)|^{p-2} u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

satisfaciendo las hipótesis (H)

$$(H) \left\{ \begin{aligned} &\bullet \quad g : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ es una función Carathéodory} \\ &\quad \text{(es decir medible en } x \in \Omega \text{ para todo } (\lambda, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ &\quad \text{y continua respecto de } (\lambda, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ p.c.t. } x \in \Omega), \\ &\bullet \quad \exists r \in (N, +\infty] \text{ tal que } m \in L^r(\Omega) \\ &\quad \text{con } m^+ = \max\{m, 0\} \neq 0 \text{ y} \\ &\bullet \quad \text{existen } h \in L^r(\Omega) \text{ y dos funciones continuas} \\ &\quad \Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad \mathcal{U} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ cumpliendo} \\ &\quad |g(\lambda, x, s)| \leq \Lambda(\lambda) h(x) \mathcal{U}(s), \quad \forall (\lambda, x, s) \in \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R}, \end{aligned} \right.$$

con $r = \infty$, es decir, la función $m \in L^\infty(\Omega)$.

Por una solución débil de (3.1) se entenderá un par $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times W_0^{1,p}(\Omega)$ que cumpla

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v = \int_{\Omega} (\lambda m |u|^{p-2} u + g(\lambda, x, u)) v, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para transformar el problema (3.1) en un problema topológico del tipo (1.2) se siguen las ideas que Del Pino y Manásevich desarrollan en [32] donde se define $K_p : W^{-1,p'} \rightarrow W_0^{1,p}$, con $p' = p/(1-p)$, como el inverso del operador p -Laplaciano, es decir, $K_p(v) = w$ es la única solución de

$$\left. \begin{array}{l} -\Delta_p w = v, \quad x \in \Omega \\ w = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\}$$

Con el fin obtener la regularidad adecuada y dado que $W_0^{1,p}$ está compactamente embebido en $L^q(\Omega)$ para $q \in (1, p^*)$ con

$$p^* = \begin{cases} Np/(N-p), & \text{si } p < N \\ +\infty, & \text{si } p \geq N. \end{cases}$$

Se recuerda que si $f \in L^\infty(\Omega)$ entonces (ver [52, Capítulo 7, Teorema 7.1]) $K_p f \in L^\infty(\Omega)$ y $K_p f \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ para algún $\beta \in (0, 1)$ (ver [67, Proposición 3.7]). Además, $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ está compactamente embebido en $X = C^1(\overline{\Omega})$, de donde el operador $K_p : L^\infty(\Omega) \rightarrow X$ es compacto y

$$\begin{aligned} F(\lambda, \cdot) : L^\infty(\Omega) &\rightarrow C^1(\overline{\Omega}) \\ u &\mapsto F(\lambda, u) = u - K_p(\lambda m |u|^{p-2} u + g(\lambda, x, u)), \end{aligned}$$

está bien definido y se puede escribir en la forma (1.2)

$$F(\lambda, u) = u - \lambda K_p(m |u|^{p-2} u) - N(\lambda, x, u),$$

siendo $N(\lambda, x, u) = K_p(\lambda m |u|^{p-2} u + g(\lambda, x, u)) - \lambda K_p(m |u|^{p-2} u)$ que cumple la hipótesis (A') del Capítulo 1.

Sustituyendo la hipótesis (B₀) por

$$(BP_0) \quad \lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{\mathcal{U}(s)}{s^{p-1}} = 0,$$

se demuestra (ver [32]) que el primer valor propio, $\sigma_1(m)$, del problema de autovalores asociado (1.7) es un punto de bifurcación desde cero para el problema (3.1) y que se puede aplicar el Teorema de Bifurcación Global de Rabinowitz (Teorema 1.12). Esta hipótesis se satisface cuando

$$\lim_{|s| \rightarrow 0} \frac{g(\lambda, x, s)}{s^{p-1}} = 0, \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ y } \lambda \text{ en acotados.}$$

Cambiando (B_∞) por

$$(BP_\infty) \quad \lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(s)}{s^{p-1}} = 0,$$

$\sigma_1(m)$ es un punto de bifurcación desde infinito ([5]) y, consecuentemente, también se cumplen las alternativas de la bifurcación global (Teorema 1.18). Esta hipótesis se satisface cuando

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{g(\lambda, x, s)}{s^{p-1}} = 0, \text{ uniformemente para } x \in \Omega \text{ y } \lambda \text{ en acotados.}$$

El hecho de que $\sigma_1(m)$ sea punto de bifurcación significa que existe una sucesión (λ_n, u_n) de soluciones de (3.1) con $\lambda_n \rightarrow \sigma_1(m)$, $\|u_n\| \rightarrow \infty$ y $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$ (convergencia en $C^1(\overline{\Omega})$). Además, puesto que ψ_1 pertenece al interior del cono de las funciones positivas de $C^1(\overline{\Omega})$, a partir de un n en adelante las soluciones de la sucesión también serán positivas, lo cual permitirá hablar de bifurcación desde $+\infty$ para este caso y desde $-\infty$ cuando $u_n/\|u_n\| \rightarrow -\psi_1$. Para homogeneizar la notación $\|\cdot\|$ continuará siendo la norma en $H_0^1(\Omega)$.

Una vez se ha comprobado que se pueden aplicar las técnicas de bifurcación al operador p -Laplaciano, se puede conjeturar que es posible determinar el lado de la bifurcación desde infinito de la misma forma que se ha hecho en el capítulo anterior para el operador Laplaciano usual. Es más, se podría pensar que un estudio análogo, dependiendo, en ciertos casos, del comportamiento asintótico de la no linealidad g o, en otros, del comportamiento global sería posible. Incluso que los resultados serían muy parecidos a los anteriores. Sin embargo, puesto que el operador p -Laplaciano no es autoadjunto y que esta propiedad se ha usado de forma esencial en la obtención de la fórmula (2.4), no es posible realizar un estudio similar.

Con el razonamiento adecuado, sí es posible estudiar la lateralidad de la bifurcación desde infinito y obtener resultados muy parecidos a los anteriores. Este estudio de lateralidad fue iniciado por Ambrosetti, García Azorero y Peral en [5], por Ambrosetti y Arcoya en [4] y continuado posteriormente por Arcoya y Gámez [11]. Más recientemente Drabek, Girg y Takác en [36] analizan la lateralidad de la bifurcación desde infinito con intención de adaptar las condiciones de Landesman-Lazer al operador p -Laplaciano, obteniendo resultados que dependen del valor p .

3.1.1. Algunos resultados existentes que condicionan la lateralidad

Reutilizando, para $\alpha \in \mathbb{R}$, la definición (2.5),

$$A_\alpha(x) = \lim_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1(m), +\infty)} g(\lambda, x, s) s^\alpha$$

y la de sus respectivos límite inferior, (2.6)

$$\underline{A}_\alpha(x) = \liminf_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1(m), +\infty)} g(\lambda, x, s) s^\alpha$$

y límite superior, (2.7)

$$\overline{A}_\alpha(x) = \limsup_{(\lambda, s) \rightarrow (\sigma_1(m), +\infty)} g(\lambda, x, s) s^\alpha,$$

los siguientes teoremas recopilan algunos de los resultados existentes al respecto. El primero de ellos dado por Ambrosetti, García Azorero y Peral es una adaptación de las condiciones del Teorema 2.5 para el p -Laplaciano, donde la no linealidad ha de estar alejada de cero en infinito. El segundo, de Ambrosetti y Arcoya, y el tercero, de Arcoya y Gámez, presentan resultados análogos a los de los Teoremas 2.6 y 2.7, respectivamente, adaptados al p -Laplaciano. Hay que resaltar que los dos primeros teoremas están reescritos con mayor generalidad con la que originalmente fueron redactados, añadiendo dependencias espaciales o del parámetro λ y que las demostraciones de los dos primeros son diferentes a la que aquí se presenta.

Teorema 3.1 (Lateralidad de la bifurcación desde infinito, [5])

Bajo las hipótesis (H) y (BP_∞) ,

- a) Si $A_0(x) \geq \varepsilon > 0$, entonces la bifurcación desde $(\sigma_1(m), +\infty)$ de (3.1) es subcrítica.
- b) Si $A_0(x) \leq -\varepsilon < 0$, entonces la bifurcación desde $(\sigma_1(m), +\infty)$ de (3.1) es supercrítica.

Teorema 3.2 (Lateralidad de la bifurcación desde infinito, [4])

Bajo las hipótesis (H) y (BP_∞) y siendo $\alpha \leq 1$

- a) Si $A_\alpha(x) \geq \varepsilon > 0$, entonces la bifurcación desde $(\sigma_1(m), +\infty)$ de (3.1) es subcrítica.
- b) Si $A_\alpha(x) \leq -\varepsilon < 0$, entonces la bifurcación desde $(\sigma_1(m), +\infty)$ de (3.1) es supercrítica.

Teorema 3.3 (Lateralidad de la bifurcación desde infinito, [11])

Bajo las hipótesis (H) y (BP_∞) , si existen $M > 0$, $\alpha < 2$ y $\underline{B} \in L^\infty(\Omega)$ (respectivamente $\overline{B} \in L^\infty(\Omega)$) tales que

1. $g(\lambda, x, s)s^\alpha \geq \underline{B}(x)$ (respectivamente $g(\lambda, x, s)s^\alpha \leq \overline{B}(x)$) para todo $s > M$, y para λ en un entorno de $\sigma_1(m)$,
2. $\int_\Omega \underline{A}_\alpha \psi_1^{1-\alpha} > 0$ (respectivamente $\int_\Omega \overline{A}_\alpha \psi_1^{1-\alpha} < 0$).

Entonces, la bifurcación desde $(\sigma_1(m), +\infty)$ de (3.1) es subcrítica (respectivamente supercrítica).

DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS 3.1, 3.2 Y 3.3.

La demostración se hace aplicando el Lema de Fatou de forma similar que en la demostración del Teorema 2.3. La diferencia no trivial de las demostraciones está en el uso de la igualdad (2.4) que en este caso se sustituye por las desigualdades del siguiente lema:

Lema 3.4 ([11]) *Sea u una función perteneciente al cono de las funciones positivas de $C^1(\Omega)$ solución de (3.1) con $\int_{\Omega} mu^p > 0$. Entonces:*

$$\frac{\int_{\Omega} g(\lambda, x, u) \frac{\psi_1^p}{u^{p-1}}}{\int_{\Omega} m\psi_1^p} \leq \sigma_1(m) - \lambda \leq \frac{\int_{\Omega} g(\lambda, x, u)u}{\int_{\Omega} mu^p}. \quad (3.2)$$

Además, si u/ψ_1 no es constante, las desigualdades son estrictas.

DEMOSTRACIÓN.

Usando la caracterización variacional de $\sigma_1(m)$, tomando u como función test:

$$\int_{\Omega} g(\lambda, x, u)u = \int_{\Omega} |\nabla u|^p - \lambda \int_{\Omega} mu^p \geq (\sigma_1(m) - \lambda) \int_{\Omega} mu^p$$

y la desigualdad es estricta si u/ψ_1 no es constante.

Por otro lado, puesto el Lema de Hopf ([68]) implica que u es una función perteneciente al interior del cono de las funciones positivas de $C^1(\overline{\Omega})$, se tiene que $w = \psi_1^p/u^{p-1} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Utilizando w como función test en la definición de solución débil de (3.1):

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \left(\frac{\psi_1^p}{u^{p-1}} \right) = \lambda \int_{\Omega} m\psi_1^p + \int_{\Omega} g(\lambda, x, u) \frac{\psi_1^p}{u^{p-1}}.$$

Usando la desigualdad $pt^{p-1}s - (p-1)t^p - s^p \leq 0 \forall t, s \geq 0$, y tomando $t = \psi_1/u|\nabla u|$, $s = |\psi_1|$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} g(\lambda, x, u) \frac{\psi_1^p}{u^{p-1}} - (\sigma_1(m) - \lambda) \int_{\Omega} m\psi_1^p \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \left(\frac{\psi_1^p}{u^{p-1}} \right) - \int_{\Omega} |\nabla \psi_1|^p \\ &= \int_{\Omega} \left[p \frac{\psi_1^{p-1}}{u^{p-1}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \psi_1 - (p-1) \frac{\psi_1^p}{u^p} |\nabla u|^p - |\nabla \psi_1|^p \right] \\ &\leq \int_{\Omega} \left[p \frac{\psi_1^{p-1}}{u^{p-1}} |\nabla u|^{p-1} |\nabla \psi_1| - (p-1) \frac{\psi_1^p}{u^p} |\nabla u|^p - |\nabla \psi_1|^p \right] \leq 0. \end{aligned}$$

Las desigualdades anteriores son igualdades sólo en el caso $\nabla u = \xi \nabla \psi_1$ (para algún $\xi \in \mathbb{R}$) y $t/s = \psi_1 |\nabla u| / (u |\nabla \psi_1|)$ constante, es decir, sólo si u/ψ_1 es constante. Por tanto,

$$\int_{\Omega} g(\lambda, x, u) \frac{\psi_1^p}{u^{p-1}} \leq (\sigma_1(m) - \lambda) \int_{\Omega} m\psi_1^p$$

y las desigualdades son estrictas si u/ψ_1 es no constante.

Notando que tanto $\int_{\Omega} m\psi_1 > 0$ (por la caracterización de $\sigma_1(m)$), como $\int_{\Omega} mu^p > 0$ (por hipótesis) concluye la prueba del Lema. \square

Para terminar la demostración de los teoremas basta darse cuenta de que la bifurcación subcrítica se obtendrá aplicando el lema de Fatou de la misma manera que en la demostración de los Teoremas 2.5, 2.6 y 2.7. Así, aplicándolo a la parte izquierda de la desigualdad (3.2) se obtendrá, usando la hipótesis, que la bifurcación es subcrítica y aplicándolo a la parte derecha de (3.2), junto con las hipótesis respectivas, que la bifurcación es supercrítica. \blacksquare

3.1.2. Aportaciones a la bifurcación desde infinito para el operador p -Laplaciano

Este epígrafe aporta nuevos resultados referentes a la lateralidad de la bifurcación desde infinito en el primer valor propio para el problema (3.1). Aquí se

adaptan las aportaciones realizadas para el operador Laplaciano con condiciones de frontera de tipo Dirichlet al operador p -Laplaciano. Los resultados se presentan de forma similar, pero las demostraciones están revisadas para ajustarlas a las características de este operador.

El primer teorema, que equivaldría al Teorema 2.11, determina el lado de la bifurcación cuando la no linealidad es “pequeña” y requiere para su demostración la adaptación tanto del Lema 2.12 como del Lema 2.13. Antes de enunciarlo se reescriben la hipótesis (G) y la integral I dada por (2.15):

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{|s| \rightarrow +\infty} g(\lambda, x, s)s^2 = 0 \text{ uniformemente en } x \in \Omega, \text{ y} \\ \lambda \text{ en conjuntos acotados,} \\ \bullet \text{ existe } f \in L^1([0, +\infty)) \text{ tal que } |g(\lambda, x, s)s| < f(s), \text{ para } x \\ \text{en un entorno de } \partial\Omega, \text{ y } \lambda \text{ en un entorno de } \sigma_1(m), \\ \bullet g(\sigma_1(m), x, s) \text{ es continua } x \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

$$I := I(g) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left(\int_0^{+\infty} g(\sigma_1(m), y, s)s \, ds \right) dy.$$

Teorema 3.5 *Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con frontera C^2 , se asumen las hipótesis (H) con $r = +\infty$, (G) y (BP_∞) . Dada una sucesión (λ_n, u_n) de soluciones de (3.1) bifurcando desde $(\sigma_1(m), +\infty)$, se cumple que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^{p+1} (\sigma_1(m) - \lambda_n) = \sigma_1(m) I.$$

Como consecuencia, si $I > 0$ la bifurcación es subcrítica y si $I < 0$ es supercrítica.

DEMOSTRACIÓN.

En líneas generales la demostración de este teorema es similar a la del Teorema 2.11, pero aquí en lugar de usar la igualdad (2.4) se usará la desigualdad (3.2).

Se enuncia un lema a partir del cual la demostración del teorema es evidente y en su demostración se vuelve a usar el Lema 2.12, se considera cada uno de los extremos de la desigualdad (3.2) y se demuestra que convergen al mismo valor, un múltiplo de I .

Lema 3.6 *Bajo las hipótesis (H), (BP_∞) y (G). Si (λ_n, u_n) es una sucesión que cumple que $u_n \in C^1(\bar{\Omega})$, $\lambda_n \rightarrow \sigma_1(m)$, $\|u_n\| \rightarrow \infty$ y $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$ (convergencia C^1). Entonces:*

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^{p+1} \frac{\int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) \frac{\psi_1^p}{u_n^{p-1}}}{\int_{\Omega} m \psi_1^p} &= \sigma_1(m)I. \\ \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^{p+1} \frac{\int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) u_n}{\int_{\Omega} m u_n^p} &= \sigma_1(m)I. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN.

Cada ítem ha de probarse independientemente, pero en ambos casos, se usa la misma técnica que en el Lema 2.13, es decir, primero se demuestra que las integrales se pueden restringir a entornos de la frontera, y después, en esos entornos, se realizan los cambios de variable adecuados para demostrar que los límites convergen a I y queda probado el lema. \square

La demostración del teorema concluye al combinar el lema con la desigualdad (3.2). \blacksquare

Al igual que en el capítulo anterior ocurría con el Teorema 2.11 para el Laplaciano, en el Teorema 3.5, las no linealidades consideradas son “pequeñas” en infinito, es decir, se comportan asintóticamente en infinito de forma similar a una potencia $s^{-\alpha}$ con $\alpha > 2$. Para poder considerar funciones más “grandes” que permitan generalizar los resultados existentes (dados en la sección anterior) se debe, de nuevo, sustituir la hipótesis (G) por (\tilde{G}) . Con esta nueva hipótesis, el siguiente resultado mejora los Teoremas 3.1, 3.2 y la mayoría de los casos del Teorema 3.3.

$$(\tilde{G}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe } \tilde{g} : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ satisfaciendo (G), que cumple una} \\ \text{de las dos siguientes condiciones:} \\ \quad \text{ó } (\tilde{G}+) \quad I(\tilde{g}) > 0 \text{ y } g(\lambda, x, s) \geq \tilde{g}(\lambda, x, s), \forall (\lambda, x, s) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}, \\ \quad \text{ó } (\tilde{G}-) \quad I(\tilde{g}) < 0 \text{ y } g(\lambda, x, s) \leq \tilde{g}(\lambda, x, s), \forall (\lambda, x, s) \in \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Teorema 3.7 Sea Ω un dominio de \mathbb{R}^N con frontera C^2 , se asume (H) con $r = +\infty$ y sea g una función satisfaciendo (BP_∞) y (\tilde{G}) . Entonces,

- Si ocurre $(\tilde{G}+)$, la bifurcación desde $(\sigma_1(m), +\infty)$ de soluciones de (3.1) es subcrítica.
- Si ocurre $(\tilde{G}-)$, la bifurcación desde $(\sigma_1(m), +\infty)$ de soluciones de (3.1) es supercrítica.

DEMOSTRACIÓN.

La demostración de este teorema es similar a la del Teorema 2.14. ■

Comentario 3.8 Dado el carácter de positividad de ψ_1 y de las soluciones bifurcando desde infinito en el valor propio $\sigma_1(m)$, es razonable definir la bifurcación desde $(\sigma_1(m), -\infty)$ de la misma forma que se hacía en el Comentario 2.18 para el Laplaciano, es decir, una sucesión de soluciones de (3.1), (λ_n, u_n) , bifurcando desde infinito en el primer valor propio $\sigma_1(m)$, se dirá que bifurca desde $(\sigma_1(m), -\infty)$ si $u_n/\|u_n\| \rightarrow -\psi_1$. Así, tomando $k(\lambda, x, s) = -g(\lambda, x, -s)$, cada par $(\lambda_n, v_n) = (\lambda, -u_n)$ es solución de

$$\left. \begin{aligned} -\Delta_p v(x) &= \lambda m(x)|v(x)|^{p-2}v(x) + k(\lambda, x, v(x)), & x \in \Omega \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

y el lado de la bifurcación desde menos infinito dependerá del signo de la integral I^- definida en (2.19) como

$$\begin{aligned} I^- = I(k) &:= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left(\int_0^{+\infty} k(\sigma_1(m), y, s)s ds \right) dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left(\int_{-\infty}^0 g(\sigma_1(m), y, s)s ds \right) dy. \end{aligned}$$

3.1.3. Aplicación a la resolución del problema resonante

La adaptación de las mismas ideas usadas en el Teorema 2.20 sirven para probar un resultado similar para el operador p-Laplaciano. Se buscan soluciones

del siguiente problema, estudiado entre otros en [16], [12] o [37].

$$\left. \begin{aligned} -\Delta_p u(x) &= \sigma_1(m)m(x)|u(x)|^{p-2}u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta el Comentario 3.8 y las definiciones de I e I^- , dadas por (2.15) y (2.19) respectivamente:

Teorema 3.9 *Bajo las hipótesis (H), (BP_∞) y (G). Si*

$$\text{signo}(I) = \text{signo}(I^-),$$

entonces el problema resonante (3.4) tiene, al menos, una solución.

DEMOSTRACIÓN.

La demostración es similar a la del Teorema 2.20, teniendo en cuenta que existe solución para el problema (3.1) para cualquier $\lambda < \sigma_1(m)$ (ver [15]) y para cualquier λ cumpliendo $\sigma_1(m) < \lambda < \sigma_2(m)$ (ver [12, Teorema 1.2]). ■

3.2. El operador $-\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u)$

El tercer operador que se estudia en esta memoria es $-\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u)$ incluido dentro del problema

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u(x)) &= \lambda m(x)u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

bajo la hipótesis (H), donde $A(x, s) := (a_{ij}(x, s)), i, j = 1, \dots, N$ es una matriz simétrica con coeficientes Carathéodory $a_{ij} : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existen constantes positivas α y β satisfaciendo, para cada $\xi \in \mathbb{R}^N$, $s \in \mathbb{R}$ y para casi todo $x \in \Omega$,

$$(A1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\bullet |A(x, s)| \leq \beta, \\ &\bullet A(x, s)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \\ &\bullet |A(x, s) - A(x, t)| \leq w(|s - t|), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \right.$$

$A\xi \cdot \zeta$ significa $\xi^T A \zeta$ y $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Osgood, es decir,

$$w \text{ es no decreciente, } w(0) = 0, \quad \int_{0^+} \frac{ds}{w(s)} = +\infty.$$

Comentario 3.10 *Es suficiente que A sea Lipschitz en $s \in \mathbb{R}$ para satisfacer la existencia de una función de Osgood, $w(s) = Ls$ (donde L es la constante de Lipschitz).*

La primera parte de esta sección está dedicada, como en la anterior, a la justificación del uso de técnicas de bifurcación con el problema (3.5) a pesar de que no es homogéneo. Una vez se haya justificado que hay bifurcación se repasará el resultado de la lateralidad de la bifurcación desde infinito (en [10] y [19]) en el primer valor propio del operador lineal apropiado. Esa será la segunda parte. Para terminar se presentarán nuevos resultados, que son parcialmente similares a los obtenidos para los otros operadores, y que mejoran y completan el estudio existente de la lateralidad para este tipo de problemas.

3.2.1. Bifurcación para el operador $-\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u)$

Bajo la hipótesis (A1), para cada $h \in H^{-1}(\Omega)$, existe ([54]) una única ([13]) $u \in H_0^1(\Omega)$ cumpliendo:

$$\int_{\Omega} A(x, u)\nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_{\Omega} hv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por ello se puede definir el inverso del operador $-\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u)$, como

$$\begin{aligned} K_Q : H^{-1}(\Omega) &\rightarrow H_0^1(\Omega) \\ h &\mapsto u, \end{aligned}$$

el cual es compacto ([10, Nota 2.2]) en $L^2(\Omega)$. Así, es correcto definir una solución débil de (3.5) como una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisface:

$$u = K_Q[\lambda mu + g(\lambda, x, u)],$$

o equivalentemente

$$\int_{\Omega} A(x, u)\nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_{\Omega} muv + \int_{\Omega} g(x, u)v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Gracias a las hipótesis (H) y (A1), usando [45, Teorema 8.29] (o también [66, Teorema 7.3] y [30, Teorema II]), si $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución de (3.5) y $h \in L^r(\Omega)$ ($r > N/2$), entonces $u \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$, para algún $\gamma \in (0, 1)$. Además, si los coeficientes de la matriz A satisfacen

$$a_{ij} \in C^{1,\gamma'}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}), \quad \text{para algún } \gamma' \in (0, 1),$$

entonces, usando [45, Teorema 15.17], se tiene que para cada $h \in C_0^\alpha(\bar{\Omega})$, $u \in C_0^{2,\gamma'}(\bar{\Omega})$.

Comentario 3.11 *Para la correcta definición del concepto de solución de (3.5) no es necesaria la condición de existencia de función de Osgood en (A1).*

Para transformar el problema (3.5) en un problema del tipo (1.2) y poder aplicar técnicas de bifurcación es necesario asumir la siguiente hipótesis:

$$(A2) \left\{ \begin{array}{l} \bullet \exists \lim_{s \rightarrow +\infty} A(x, s) = A(x, +\infty), \text{ uniformemente en } x \in \bar{\Omega}, \\ \bullet A \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}), \\ \bullet A(\cdot, +\infty) \in C^1(\bar{\Omega}), \\ \bullet g(\lambda, \cdot, \cdot) \in C^1(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}), \text{ para cada } \lambda \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

De esta manera, se define $F : \mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega}) \rightarrow C_0(\overline{\Omega})$ de la forma:

$$F(\lambda, u) = u - K_Q(\lambda mu + g(\lambda, x, u)),$$

y recurriendo al inverso K del operador auxiliar

$$-\operatorname{div}(A(x, +\infty)\nabla u) = h,$$

donde $A(x, +\infty)$ es una matriz elíptica y acotada, se puede escribir F de la forma:

$$F(\lambda, u) = u - \lambda K(mu) - N(\lambda, x, u),$$

donde $N(\lambda, x, u) = K_Q(\lambda mu + g(\lambda, x, u)) - \lambda K(mu)$ cumple la hipótesis (A') del Capítulo 1.

En estas condiciones se puede encontrar en [18] o [10, Lema 3.1, Lema 3.3 y Teorema 3.4] que para $\lambda > 0$ existe bifurcación desde infinito de soluciones positivas exclusivamente desde el primer valor propio del problema

$$\left. \begin{array}{l} -\operatorname{div}(A(x, +\infty)\nabla u(x)) = \lambda m(x)u(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0. \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

que se denotará por $\mu_1 = \sigma_1(m, A(x, +\infty))$.

3.2.2. Resultados existentes sobre lateralidad en infinito

Para comenzar se presenta un resultado intermedio, realizado por Carmona y Suárez en [19], que aunque es caso particular del posterior, conviene destacar porque pone de manifiesto el papel de las matrices $A(x, s)$ en la lateralidad de la bifurcación desde infinito. Para ello se considera $g \equiv 0$, es decir, el problema se convierte en

$$\left. \begin{array}{l} -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u(x)) = \lambda m(x)u(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0, \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

Teorema 3.12 ([19], Teorema 2.2)

Asumiendo las hipótesis (H) con $g \equiv 0$, (A1) y (A2), entonces,

- a) Si $A(x, s) < A(x, +\infty)$, $\forall s \in \mathbb{R}^+$, la bifurcación desde $(\mu_1, +\infty)$ de soluciones de (3.7) es subcrítica.
- b) Si $A(x, s) > A(x, +\infty)$, $\forall s \in \mathbb{R}^+$, la bifurcación desde $(\mu_1, +\infty)$ de soluciones de (3.7) es supercrítica.

Como resultado complementario, si $g \not\equiv 0$, se presenta el siguiente teorema que es una ampliación de los resultados de los Teoremas 2.7 y 3.3 para este tipo de operador.

Teorema 3.13 ([10], Teorema 3.4)

Asumiendo las hipótesis (H), (B_∞) , (A1) y (A2). Entonces,

- a) Si existen $\varepsilon_0 > 0$, $\rho \in (0, 3 - 1/r)$ y $\underline{C}(x) \in L^r(\Omega)$ tales que denotando

$$\underline{a}(x) = \liminf_{(\lambda, s) \rightarrow (\mu_1, +\infty)} g(\lambda, x, s)s^{\rho-1},$$

p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo $s > 0$ y $\lambda \in (\mu_1 - \varepsilon_0, \mu_1 + \varepsilon_0)$ se tiene que

$$\left. \begin{aligned} [A(x, s) - A(x, +\infty)] &\leq 0, \\ g(\lambda, x, s)s^{\rho-1} &\geq \underline{C}(x), \\ \int_{\Omega} \underline{a}(x)\psi^{2-\rho}(x) &> 0, \end{aligned} \right\}$$

entonces la bifurcación desde infinito de soluciones positivas desde μ_1 es subcrítica.

- b) Si existen $\varepsilon_1 > 0$, $\rho \in (0, 3 - 1/r)$ y $\overline{C}(x) \in L^r(\Omega)$ tales que denotando

$$\overline{a}(x) = \limsup_{(\lambda, s) \rightarrow (\mu_1, +\infty)} g(\lambda, x, s)s^{\rho-1},$$

p.c.t. $x \in \Omega$ y para todo $s > 0$ y $\lambda \in (\mu_1 - \varepsilon_1, \mu_1 + \varepsilon_1)$ se tiene que

$$\left. \begin{aligned} [A(x, s) - A(x, +\infty)] &\geq 0, \\ g(\lambda, x, s)s^{\rho-1} &\leq \overline{C}(x), \\ \int_{\Omega} \overline{a}(x)\psi^{2-\rho}(x) &< 0, \end{aligned} \right\}$$

entonces la bifurcación de soluciones positivas desde $(\mu_1, +\infty)$ es supercrítica.

DEMOSTRACIÓN.

Se demostrará el apartado *a*) por contradicción. Si (λ_n, u_n) es una sucesión de soluciones de (3.5) bifurcando desde $(\mu_1, +\infty)$, con $\lambda_n \geq \mu_1$ y $u_n \neq 0$, como $u_n \in \operatorname{int}(\mathcal{P})$, el interior del cono de las funciones positivas, se puede tomar $v = \psi_1^2/u_n$ como función test en la definición de solución de (3.5),

$$\int_{\Omega} A(x, u_n) \nabla u_n \cdot \nabla v = \lambda_n \int_{\Omega} m u_n v + \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) v,$$

obteniendo

$$\int_{\Omega} A(x, u_n) \nabla u_n \cdot \left[2 \frac{\psi_1}{u_n} \nabla \psi_1 - \left(\frac{\psi_1}{u_n} \right)^2 \nabla u_n \right] = \lambda_n \int_{\Omega} m u_n \frac{\psi_1^2}{u_n} + \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) \frac{\psi_1^2}{u_n}.$$

Operando se obtiene,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) u_n^{\rho-1} \frac{\psi_1^2}{u_n^{\rho}} &= \int_{\Omega} \left[A(x, u_n) - \frac{\lambda_n}{\mu_1} A(x, +\infty) \right] \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1 \\ &\quad - \int_{\Omega} A(x, u_n) \left(\nabla \psi_1 - \frac{\psi_1}{u_n} \nabla u_n \right) \cdot \left(\nabla \psi_1 - \frac{\psi_1}{u_n} \nabla u_n \right). \end{aligned}$$

Como $\lambda_n \geq \mu_1$, aplicando las hipótesis (A1) y las condiciones del apartado *a*) del teorema, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\Omega} \left[A(x, u_n) - \frac{\lambda_n}{\sigma_1} A(x, +\infty) \right] \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1 \\ &\quad - \int_{\Omega} A(x, u_n) \left(\nabla \psi_1 - \frac{\psi_1}{u_n} \nabla \psi_1 \right) \cdot \left(\nabla \psi_1 - \frac{\psi_1}{u_n} \nabla \psi_1 \right). \end{aligned}$$

En particular,

$$0 \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) u_n^{\rho-1} \frac{\psi_1^2}{z_n^{\rho}},$$

siendo $z_n = u_n/\|u_n\|$. Puesto que z_n converge uniformemente a ψ_1 , aplicando el lema de Fatou y usando las hipótesis del teorema (apartado *a*)),

$$0 \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g(\lambda_n, x, u_n) u_n^{\rho-1} \frac{\psi_1^2}{z_n^{\rho}} \geq \int_{\Omega} \underline{a}(x) \psi_1^{2-\rho} > 0,$$

lo cual es una contradicción. ■

Comentario 3.14 *El hecho de que en el teorema anterior la convergencia de las matrices $A(x, s)$ a $A(x, +\infty)$ se haga sólo “por un lado”, es decir, la forma cuadrática $A(x, s) - A(x, +\infty)$ sea definida $\forall s \in \mathbb{R}^+$, hace que la determinación de la lateralidad corresponda exclusivamente a la no linealidad g . A la vista de ello parece interesante preguntarse qué pasaría si dicha forma cuadrática no fuese necesariamente definida, si influiría en la determinación de la lateralidad y, en caso positivo, qué relación tendría con g .*

3.2.3. Aportaciones y estudio pormenorizado

El primer paso de este apartado es calcular una expresión que se pueda utilizar en los cálculos de la misma forma que la igualdad (2.4). Hay que tener en cuenta que, en este caso, la matriz A debe ocupar un lugar importante en esa expresión. Tomando (λ, u) una solución de (3.5), tomando ψ_1 como función test en la definición de solución débil de (3.6):

$$\int_{\Omega} A(x, u)\nabla u \cdot \nabla \psi_1 = \lambda \int_{\Omega} mu\psi_1 + \int_{\Omega} g(\lambda, x, u)\psi_1.$$

Por otro lado, para la solución (μ_1, ψ_1) del problema de valores propios (3.6):

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}(A(x, +\infty)\nabla \psi_1(x)) &= \mu_1 m(x)\psi_1(x), & x \in \Omega \\ \psi_1(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

tomando u como función test:

$$\int_{\Omega} A(x, +\infty)\nabla \psi_1 \cdot \nabla u = \lambda \int_{\Omega} \psi_1 mu.$$

Usando la simetría de las matrices $A(x, +\infty)$ y $A(x, u)$ se obtiene la igualdad que servirá para estudiar el signo de $\mu_1 - \lambda$:

$$(\mu_1 - \lambda) \int_{\Omega} mu\psi_1 = \int_{\Omega} [A(x, +\infty) - A(x, u)]\nabla u \cdot \nabla \psi_1 + \int_{\Omega} g(\lambda, x, u)\psi_1. \quad (3.8)$$

En este caso, al contrario que pasaba con otros operadores, el signo de $\mu_1 - \lambda$ no vendrá determinado sólo por el signo de $\int_{\Omega} g(\lambda, x, u)\psi_1$, sino que, como se

observa en la igualdad anterior, hay que tener en cuenta otro signo, el de la forma de “acercarse” a $A(x, +\infty)$ que tenga la matriz $A(x, s)$.

A continuación se enuncia el resultado que determina la lateralidad para este operador. En concreto, si (λ_n, u_n) es una sucesión de soluciones de (3.5) convergiendo a $(\mu_1, +\infty)$, en el Lema 3.16 se calcula el límite, bajo determinadas hipótesis, de

$$\int_{\Omega} [A(x, +\infty) - A(x, u_n)] \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1.$$

Para ello se define J como

$$J := J(A) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla \psi_1(y)|} \left[\int_0^{+\infty} [A(y, +\infty) - A(y, s)] ds \right] \nabla \psi_1(y) \cdot \nabla \psi_1(y) dy. \quad (3.9)$$

Las siguientes hipótesis permitirán utilizar los teoremas de convergencia integral apropiados para realizar los cálculos:

$$(A3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet \lim_{s \rightarrow +\infty} s[A(x, +\infty) - A(x, s)] = 0, \quad \text{uniformemente en } x \in \bar{\Omega}, \\ \bullet \text{ existe una función } b \in L^1([0, +\infty)) \text{ tal que} \\ \quad |a_{ij}(x, +\infty) - a_{ij}(x, s)| < b(s), \quad \forall x \in \Gamma_0, \forall s \in \mathbb{R}^+ \forall i, j = 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

Teorema 3.15

Bajo las hipótesis (H), (B_∞) , (A1), (A2), (A3) y suponiendo que existe una función $G(x) \in L^1(\Omega)$ tal que $|g(\lambda, x, s)| < G(x)$, $\forall s \in [0, \infty)$ y λ en un entorno de μ_1 y que existe

$$g(\mu_1, x, +\infty) := \lim_{(\lambda, s) \rightarrow (\mu_1, +\infty)} g(\lambda, x, s) \text{ para casi todo } x \in \Omega.$$

Si (λ_n, u_n) es una sucesión de soluciones de (3.5) bifurcando desde $(\mu_1, +\infty)$, entonces,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_1 - \lambda_n) \|u_n\| = \mu_1 \left[J + \int_{\Omega} g(\mu_1, x, +\infty) \psi_1 \right]. \quad (3.10)$$

Consecuentemente, si $J + \int_{\Omega} g(\mu_1, x, +\infty) \psi_1 > 0$ (respectivamente < 0) la bifurcación desde $(\mu_1, +\infty)$ es subcrítica (respectivamente supercrítica).

DEMOSTRACIÓN.

El estudio de la influencia en la lateralidad de la función g se ha realizado previamente en el Capítulo 2 y en la Sección 3.1, por lo que, con intención de simplificar la demostración, se centra la atención exclusivamente en el primer sumando de la igualdad (3.8), es decir, en la forma cuadrática $A(x, +\infty) - A(x, u)$. Para obtener las conclusiones basta unir los resultados referidos a la no linealidad g con los del siguiente lema:

Lema 3.16 *Bajo las hipótesis (H), (B_∞) , (A1), (A2) y (A3). Si u_n es una sucesión tal que $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$ en $C^1(\bar{\Omega})$, entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} [A(x, +\infty) - A(x, u_n)] \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1 = J.$$

DEMOSTRACIÓN.

Al igual que en la prueba del Lema 2.13, se divide el dominio en dos partes Γ_0 y $\Omega \setminus \Gamma_0$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [A(x, +\infty) - A(x, u_n)] \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1 &= \\ &= \int_{\Omega \setminus \Gamma_0} [A(x, +\infty) - A(x, u_n)] \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1 \\ &\quad + \int_{\Gamma_0} [A(x, +\infty) - A(x, u_n)] \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1 \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Se verá a continuación que $I_1 \rightarrow 0$. Puesto que $u_n(x) > 0$, $\forall x \in \Omega \setminus \Gamma_0$,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega \setminus \Gamma_0} [A(x, +\infty) - A(x, u_n)] \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1 \\ &= \int_{\Omega \setminus \Gamma_0} u_n [A(x, +\infty) - A(x, u_n)] \frac{\nabla u_n}{\|u_n\|} \cdot \nabla \psi_1 \frac{\|u_n\|}{u_n} \end{aligned}$$

y usando la convergencia puntual de los diferentes términos y usando la hipótesis (A3), se obtiene $I_1 \rightarrow 0$.

El siguiente paso será probar que $I_2 = \int_{\Gamma_0} [A(x, +\infty) - A(x, u_n)] \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1$ converge a J . Parametrizando Γ_0 por $\varphi(y, t) = y + \nu_y t$,

$$I_2 = \int_{\partial\Omega} \int_0^{t_0} [A(y + \nu_y t, +\infty) - A(y + \nu_y t, u_n(y + \nu_y t))] \nabla u_n(y + \nu_y t) \cdot \nabla \psi_1(y + \nu_y t) |J_\varphi(y + \nu_y t)| dt dy,$$

y para cada punto fijo de la frontera $y \in \partial\Omega$, usando el cambio de variable $t \mapsto s = u_n(y + \nu_y t)$ invertible con inverso $s \mapsto t_n(s)$ y $dt = \frac{1}{\frac{\partial u_n}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t_n(s))} ds$,

$$I_2 = \int_{\partial\Omega} \int_0^{t_0} \left[[A(y + \nu_y t_n(s), +\infty) - A(y + \nu_y t_n(s), s)) \frac{\nabla u_n(y + \nu_y t_n(s))}{\|u_n\|} \cdot \nabla \psi_1(y + \nu_y t_n(s)) |J_\varphi(y + \nu_y t_n(s))| \frac{\|u_n\|}{\frac{\partial u_n}{\partial \nu_y}(y + \nu_y t_n(s))} \right] dt dy.$$

Como en el Teorema 2.11, las hipótesis (A2) y (A3) y el Lema 2.12 se aplican para comprobar la convergencia y la acotación de las diferentes funciones y comprobar así que se puede usar el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para obtener,

$$I_2 \rightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla \psi_1(y)|} \left[\int_0^{+\infty} [A(y, +\infty) - A(y, s)] ds \right] \nabla \psi_1(y) \cdot \nabla \psi_1(y) dy = J,$$

quedando probados el lema y el teorema □ ■

Comentario 3.17 Una cuestión interesante es cuál de las dos no linealidades $[A(x, +\infty) - A(x, s)]$ o $g(\mu_1, x, +\infty)$ influye más en la determinación de la lateralidad. Es evidente, a la vista del Teorema 3.15 que las hipótesis sobre el grado de convergencia a cero impuestas sobre las matrices son más restrictivas que las impuestas sobre la función g . Esto puede hacer pensar que es la forma cuadrática la que, en general, decide el lado hacia el que se produce la bifurcación desde infinito. Sin embargo, se pueden imponer diferentes hipótesis para que en unos casos g y en otros J determinen el lado de la bifurcación.

Como ocurría con los teoremas de lateralidad para los operadores Laplaciano (Teorema 2.11) y p-Laplaciano (Teorema 3.5) que se generalizaban a no linealidades “grandes” (Teoremas 2.14 y 3.7), en este caso también se puede enunciar un resultado en el que la convergencia de la forma cuadrática $A(x, s) - A(x, +\infty)$ no sea tan fina como determina la hipótesis (A3), sino que se puede cambiar por

$$(\widetilde{\text{A3}}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Existe las matrices } \widetilde{A}(x, s) \text{ y } \widetilde{A}(x, +\infty) \text{ cumpliendo (A2) y (A3) ,} \\ \text{y se satisface una de las dos siguientes condiciones:} \\ \text{o bien } (\widetilde{\text{A3+}}) \quad J(\widetilde{A}) > 0 \text{ y} \\ \int_0^{+\infty} [A(y, +\infty) - A(y, s)] \geq \int_0^{+\infty} [\widetilde{A}(y, +\infty) - \widetilde{A}(y, s)], \forall y \in \partial\Omega, \\ \text{o bien } (\widetilde{\text{A3-}}) \quad J(\widetilde{A}) < 0 \text{ y} \\ \int_0^{+\infty} [A(y, +\infty) - A(y, s)] \leq \int_0^{+\infty} [\widetilde{A}(y, +\infty) - \widetilde{A}(y, s)], \forall y \in \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Teorema 3.18

Bajo las hipótesis (H), (B_∞) , (A1), (A2), $(\widetilde{\text{A3}})$, que existe una función $G(x) \in L^1(\Omega)$ tal que $|g(\lambda, x, s)| < G(x)$, $\forall s \in [0, \infty)$, que λ está en un entorno de μ_1 y que existe $g(\mu_1, x, +\infty)$ para casi todo $x \in \Omega$. Entonces,

- Si ocurre $(\widetilde{\text{A3+}})$ y $\int_\Omega g(\mu_1, x, +\infty)\psi_1 > 0$, la bifurcación de soluciones de (3.5) desde $(\mu_1, +\infty)$ es subcrítica.
- Si ocurre $(\widetilde{\text{A3-}})$ y $\int_\Omega g(\mu_1, x, +\infty)\psi_1 < 0$, la bifurcación de soluciones de (3.5) desde $(\mu_1, +\infty)$ es supercrítica.

Comentario 3.19 El teorema anterior permite obtener la lateralidad incluso en el caso en que

$$-\infty \leq J + \int_\Omega g(\mu_1, x, +\infty)\psi_1 \leq +\infty.$$

Este resultado aún deja sin cubrir los casos, no descritos en la literatura, en los que no se puedan encontrar matrices $\widetilde{A}(x, s)$ y $\widetilde{A}(x, +\infty)$ cumpliendo las hipótesis $(\widetilde{\text{A3}})$ a causa de la dependencia espacial. En esta situación, se puede enunciar un teorema de lateralidad con condiciones sobre la forma cuadrática

$A(x, +\infty) - A(x, s)$ que asegure que la bifurcación desde infinito en μ_1 es subcrítica o supercrítica. Para enunciar tal resultado se prescindirá, para simplificar la notación y la presentación, de la no linealidad g . Por ello, se considera el problema (3.7)

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u(x)) &= \lambda m(x)u(x), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

Teorema 3.20 *Bajo las hipótesis (H) con $g \equiv 0$, (B_∞) , (A1) y (A2), se supone que existe $s_0 > 0$, $\alpha < 1 - 1/r$ y $M(x) = (m_{ij}(x))$, $i, j = 1, \dots, N$ una matriz acotada y elíptica (cumpliendo las dos primeras condiciones de (A1)) cumpliendo que $m_{ij} \in L^r(\Omega)$, $\forall i, j = 1, \dots, N$ y que*

$$|s^\alpha[a_{ij}(x, +\infty) - a_{ij}(x, s)]| \leq m_{ij}(x), \quad \forall i, j = 1, \dots, N \text{ y para todo } s \geq s_0.$$

Definiendo $B_\alpha(x) := \lim_{s \rightarrow +\infty} s^\alpha[A(x, +\infty) - A(x, s)]$, se tiene que si (λ_n, u_n) es una sucesión de soluciones de (3.7) entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_1 - \lambda_n) \|u_n\|^\alpha = \mu_1 \int_{\Omega} \psi_1^{-\alpha} B_\alpha(x) \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1. \quad (3.11)$$

En consecuencia, si

$$\int_{\Omega} \psi_1^{-\alpha} B_\alpha(x) \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1 > 0 \quad (\text{respectivamente } < 0)$$

la bifurcación de soluciones de (3.7) desde $(\sigma_1, +\infty)$ es subcrítica (respectivamente supercrítica).

DEMOSTRACIÓN.

Como en la demostración de los demás teoremas bastará probar que para cada sucesión de soluciones positivas (λ_n, u_n) de (3.7) convergiendo al punto de bifurcación (μ_1, ∞) , se satisface que $\lambda_n < \mu_1$, para n suficientemente grande. Con esta finalidad se volverá a usar la igualdad (3.8) (con $g \equiv 0$) para determinar el signo de $\mu_1 - \lambda_n$ y se tendrá en cuenta que

$$\begin{aligned} \|u_n\|^{\alpha-1} \int_{\Omega} [A(x, +\infty) - A(x, u_n)] \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1 \\ = \int_{\Omega} \left(\frac{1 + u_n}{\|u_n\|} \right)^{-\alpha} (1 + u_n)^\alpha [A(x, +\infty) - A(x, u_n)] \frac{\nabla u_n}{\|u_n\|} \cdot \nabla \psi_1. \end{aligned}$$

Usando las hipótesis, el integrando se puede acotar por funciones medibles en Ω , por lo que se está en condiciones de aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada obteniendo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left(\frac{1 + u_n}{\|u_n\|} \right)^{-\alpha} (1 + u_n)^\alpha [A(x, +\infty) - A(x, u_n)] \frac{\nabla u_n}{\|u_n\|} \cdot \nabla \psi_1 \\ = \int_{\Omega} \psi_1^{-\alpha} B_\alpha(x) \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1. \end{aligned}$$

■

Comentario 3.21 *El teorema anterior podría ser enunciado de forma más general usando los límites inferior y superior en la definición de B_α y así expresarlo en los términos de los Teoremas 2.7 y 3.3. Hay que destacar que en la demostración habría que utilizar el Lema de Fatou en lugar del Teorema de la Convergencia Dominada, tal y como se hace en los resultados anteriormente citados.*

Comentario 3.22 *Los Comentarios 2.18 y 3.8 hechos para definir y estudiar la bifurcación desde menos infinito para el Laplaciano y el p -Laplaciano deben ser muy matizados en este caso puesto que aunque se puede definir tal bifurcación, la participación de las matrices $A(x, s)$ influye de manera fundamental.*

Para comenzar se impone que $A(x, -\infty) = A(x, +\infty)$ para poder usar el mismo valor propio en la bifurcación desde menos infinito. Así, se amplía (A2) de la forma

$$(A2+) \left\{ \begin{array}{l} \bullet \exists \lim_{|s| \rightarrow +\infty} A(x, s) = A(x, \infty), \text{ uniformemente en } x \in \overline{\Omega}, \\ \bullet A \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}), \\ \bullet A(\cdot, \infty) \in C^1(\overline{\Omega}), \\ \bullet g(\lambda, \cdot, \cdot) \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}), \text{ para cada } \lambda \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

En estas condiciones la bifurcación desde infinito ocurre (ver [9]) en los valores propios de

$$\left. \begin{array}{l} -\operatorname{div}(A(x, \infty)\nabla u(x)) = \lambda m(x)u(x), \quad x \in \Omega \\ u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

Si se denota el primer valor propio positivo μ_1 y ψ_1 su primera función propia positiva, dada una sucesión de soluciones de (3.5) bifurcando desde infinito en μ_1 ,

se dice que bifurca desde $(\mu_1, +\infty)$ si $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$ y que bifurca desde $(\mu_1, -\infty)$ si $u_n/\|u_n\| \rightarrow -\psi_1$.

Si (λ_n, u_n) bifurca desde $(\mu_1, -\infty)$, tomando $k(\lambda, x, s) = -g(\lambda, x, -s)$ y las matrices $B(x, s) = A(x, -s)$, cada par $(\lambda_n, v_n) = (\lambda_n, -u_n)$ es solución de

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}(B(x, v)\nabla v(x)) &= \lambda m(x)v(x) + k(\lambda, x, v(x)), & x \in \Omega \\ v(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Definiendo

$$\begin{aligned} J^- &:= J(B) & (3.14) \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left[\int_0^{+\infty} [B(y, \infty) - B(y, s)] ds \right] \nabla\psi_1(y) \cdot \nabla\psi_1(y) dy \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left[\int_{-\infty}^0 [A(y, \infty) - A(y, s)] ds \right] \nabla\psi_1(y) \cdot \nabla\psi_1(y) dy, \end{aligned}$$

el lado de la bifurcación desde menos infinito vendrá dado por el signo de

$$J^- - \int_{\Omega} g(\mu_1, x, -\infty)\psi_1.$$

3.2.4. Aplicación a la resolución del problema resonante

Para este tercer operador tratado en la memoria también se le pueden adaptar los resultados presentados para problemas resonantes (Teoremas 2.20 y 3.9) para que, combinándolos con los desarrollados en la sección anterior se obtenga alguna solución de

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{div}(A(x, u)\nabla u(x)) &= \mu_1 m(x)u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Ya en [9] se presenta un resultado de existencia de solución de (3.15) similar a los obtenidos para los operadores Laplaciano y p-Laplaciano que utiliza los resultados del Teorema 3.13 y que mejora los resultados de Chabrowski en [22]. El teorema que a continuación se enuncia no exige que la forma cuadrática $A(x, s) - A(x, \infty)$ tenga que estar definida, lo que hace que sus hipótesis sean menos restrictivas que las de los citados anteriormente. Considerando el Teorema 3.15, el Comentario 3.22 y las definiciones de J y J^- dadas en (3.9) y (3.14) respectivamente,

Teorema 3.23 *Bajo las hipótesis (H), (B_∞) , (A1), (A2+) y (A3). Si*

$$\operatorname{signo} \left[J + \int_{\Omega} g(\mu_1, x, +\infty)\psi_1 \right] = \operatorname{signo} \left[J^- - \int_{\Omega} g(\mu_1, x, -\infty)\psi_1 \right]$$

entonces el problema resonante (3.15) tiene, al menos, una solución.

DEMOSTRACIÓN.

Basta adaptar las demostraciones de los Teoremas 2.20 y 3.9. En [9, Teorema 1] se demuestra la existencia de solución de (3.5) para todo $\lambda \neq \sigma_k(m)$. Esto junto con la hipótesis del teorema que aseguran que las bifurcaciones en μ_1 desde $+\infty$ y $-\infty$ son ambas hacia el mismo lado implica que, usando resultados de compacidad estándar, exista solución de (3.15). ■

CAPÍTULO

4

Bifurcación global y aplicaciones a
problemas resonantes

Introducción

En este capítulo el centro de atención es el comportamiento global de los conjuntos conexos de soluciones bifurcando desde infinito en el primer valor propio, dejando de serlo la bifurcación local. Se usará el Teorema de Bifurcación Global de Rabinowitz (Teorema 1.12) y se describirá la forma que tienen los continuos de soluciones.

Los resultados de la primera sección están extraídos de [41] y en ellos se prueba que los continuos de soluciones que bifurcan desde $+\infty$ y desde $-\infty$, denominados Σ^+ y Σ^- respectivamente, son disjuntos bajo ciertas condiciones. La clave para determinar que no tienen soluciones comunes es la positividad de las soluciones que se conserva a lo largo de alguno de estos conjuntos conexos de soluciones.

La segunda sección extiende los resultados presentados en la primera a problemas con peso y se centra el estudio solamente en el conexo de soluciones positivas Σ^+ , para el cual se encuentran ciertas cotas que permiten su descripción global.

Para terminar, siguiendo la línea de los capítulos previos, en la última sección se aplican los resultados obtenidos para el estudio de un problema resonante. Combinando propiedades locales y globales se obtienen resultados de existencia para un problema resonante.

4.1. Bifurcación global

Se divide esta sección en dos apartados. El primero, tomado de [41], está dedicado a un problema sin peso y el segundo dedicado a su generalización en el caso en el que haya peso. Para que se puedan entender mejor los resultados se representan varios diagramas de bifurcación (ver figuras 4.1, 4.2 y 4.4) a modo ilustrativo.

4.1.1. Caso $m \equiv 1$

Se considera el problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ B(u) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

con Ω un dominio regular y $B(u)$ las condiciones de frontera que pueden ser de tipo Dirichlet o de tipo Neumann. Para asegurar la bifurcación desde infinito se asumirán (H) y (B_∞) , con $m \equiv 1$. Σ^+ corresponderá al conjunto conexo de soluciones de (4.1) bifurcando desde $(\sigma_1, +\infty)$ junto con el punto $(\sigma_1, +\infty)$ y Σ^- el correspondiente conexo bifurcando desde $(\sigma_1, -\infty)$ (ver comentario 2.18).

Se consideran las proyecciones

$$\begin{aligned} \text{Proy} : \mathbb{R} \times C^1(\bar{\Omega}) &\rightarrow C^1(\bar{\Omega}) \\ (\lambda, u) &\mapsto \text{Proy}(\lambda, u) = u. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} \times C^1(\bar{\Omega}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, u) &\mapsto \pi(\lambda, u) = \lambda. \end{aligned}$$

Se deben considerar, además:

- (G1) $g(\cdot, \cdot, s)$ es una función L -Lipschitz.
- (G2) $g(\lambda, x, 0)$ no cambia de signo y no es idénticamente 0 en Ω .

Las dos posibilidades para g son:

- (G2+) $g(\lambda, x, 0) \geq 0$, para todo $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ y $g(\lambda, x, 0) \not\equiv 0$.
- (G2-) $g(\lambda, x, 0) \leq 0$, para todo $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \Omega$ y $g(\lambda, x, 0) \not\equiv 0$.

Los siguientes teoremas describen que bajo las hipótesis precedentes los conjuntos conexos de soluciones Σ^+ y Σ^- son disjuntos. Para su demostración se usan métodos de sub y súper-soluciones y, en particular, un resultado dado por Gámez en [39], el cual se puede encontrar parcialmente descrito en la Sección 1.4 del Capítulo 1.

Teorema 4.1 *Se asumen (H), (B_∞) y (G1).*

a) *Si ocurre (G2+), entonces:*

$$i) \Sigma^+ \subset \mathbb{R} \times \text{int}(\mathcal{P}).$$

$$ii) \Sigma^- \cap (\mathbb{R} \times \mathcal{P}) = \emptyset.$$

b) *Si ocurre (G2-), entonces:*

$$i) \Sigma^- \subset \mathbb{R} \times \text{int}(-\mathcal{P}).$$

$$ii) \Sigma^+ \cap (\mathbb{R} \times (-\mathcal{P})) = \emptyset.$$

En consecuencia, si ocurre (G2), entonces $\Sigma^+ \cap \Sigma^- = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN.

Se demostrará sólo el epígrafe a). El b) se hace de forma similar. Usando lo comentado anteriormente y (G1), si \underline{u} es una subsolución que no es solución y $u \in C^1(\bar{\Omega})$ es solución de (4.1), entonces $u - \underline{u} \notin \partial\mathcal{P}$.

En este caso se puede tomar $\underline{u} \equiv 0$. Con la hipótesis (G2+) se sabe que \underline{u} es subsolución pero no solución, y por tanto $u \notin \partial\mathcal{P}$.

i) Puesto que Proy es continua, $\text{Proy}(\Sigma^+)$ es un conjunto conexo y $\text{Proy}(\Sigma^+) \cap \partial\mathcal{P} = \emptyset$. Se sabe que si $(\lambda, u) \in \Sigma^+$ y (λ, u) está cercano al punto de bifurcación $(\sigma_1, +\infty)$, entonces $u \in \mathcal{P}$ y, por tanto, $\text{Proy}(\Sigma^+) \subset \text{int}(\mathcal{P})$.

ii) De la misma forma, si $(\lambda, u) \in \Sigma^-$ y está cerca del punto de bifurcación $(\sigma_1, -\infty)$ entonces $u < 0$ ($u \notin \mathcal{P}$) y $\text{Proy}(\Sigma^-) \cap \partial\mathcal{P} = \emptyset$.

Consecuentemente, $\text{Proy}(\Sigma^-) \cap \mathcal{P} = \emptyset$. ■

Una vez que se ha probado que los continuos de bifurcación desde σ_1 son disjuntos, se intentará describir el comportamiento global de ellas.

Teorema 4.2 (Ver Figura 4.1) *Bajo las hipótesis (H), (B_∞) , (G1) y (G2+), entonces:*

- a) Σ^+ no contiene a ningún otro punto de bifurcación ya sea desde infinito o desde cero. Además, $\pi(\Sigma^+)$ está acotado superiormente y no acotado inferiormente. Explícitamente,

$$]-\infty, \sigma_1[\subset \pi(\Sigma^+) \subset]-\infty, \sigma_1 + L].$$

- b) $\pi(\Sigma^-)$ está acotado inferiormente y, o bien no está acotado superiormente, o bien Σ^- contiene a otro punto de bifurcación. Explícitamente,

$$] \sigma_1, \sigma_2[\subset \pi(\Sigma^-) \subset [-L, +\infty[.$$

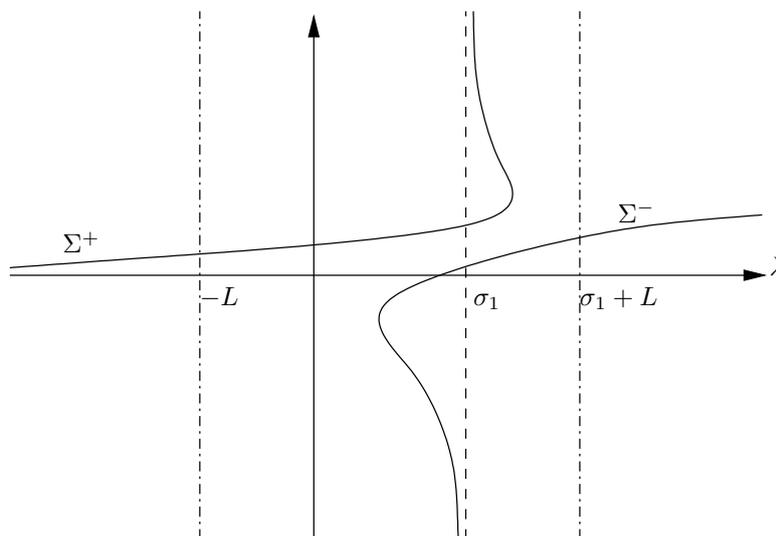


Figura 4.1: Bifurcación de (4.1) bajo las hipótesis (H), (G1), (G2+)

DEMOSTRACIÓN.

- a) Si Σ^+ tocara a otro punto de bifurcación desde infinito (σ_k, ∞) , $k \neq 1$, debería

existir una sucesión (λ_n, u_n) cumpliendo $\lambda_n \rightarrow \sigma_k$, $\|u_n\| \rightarrow \infty$ y $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_k$. Esto no es posible puesto que como es sabido ψ_k cambia de signo y por el teorema anterior $\Sigma^+ \subset \mathbb{R} \times \text{int}(\mathcal{P})$. Por tanto, Σ^+ no bifurca desde ningún (σ_k, ∞) , $k \neq 1$. Puesto que $g(\lambda, x, 0)$ no es idénticamente 0, la función $u \equiv 0$ no es solución de (4.1) para ningún valor de λ , y por tanto la bifurcación desde cero tampoco es posible.

De esta forma, Σ^+ no contiene puntos de bifurcación diferentes de (σ_1, ∞) .

Se considera, ahora $(\lambda, u) \in \Sigma^+$ una solución de (4.1). Usando la igualdad (2.4):

$$(\sigma_1 - \lambda) \int_{\Omega} u\psi_1 = \int_{\Omega} g(\lambda, x, u)\psi_1,$$

junto con las hipótesis (G1) y (G2+),

$$g(\lambda, x, s) \geq g(\lambda, x, 0) - Ls \geq -Ls, \quad \forall s > 0$$

y usando que $\Sigma^+ \subset \mathbb{R} \times \text{int}(\mathcal{P})$,

$$(\sigma_1 - \lambda) \int_{\Omega} u\psi_1 = \int_{\Omega} g(\lambda, x, u)\psi_1 \geq -L \int_{\Omega} u\psi_1, \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} u\psi_1 > 0$$

entonces,

$$\lambda \leq \sigma_1 + L. \tag{4.2}$$

Puesto que Σ^+ no toca a ningún otro punto de bifurcación diferente de σ_1 y teniendo en cuenta el Teorema de Bifurcación Global de Rabinowitz en su versión desde infinito (Teorema 1.18), se ha probado que no se satisfacen ni la opción *b*) ni la *c*) del Teorema 1.18. Por tanto, Σ^+ satisface la opción *a*) de dicho Teorema y, por (4.2) se deduce que $\pi(\Sigma^+)$ no está acotado inferiormente.

b) Si $\lambda < -L$ la función $s \mapsto \lambda s + g(\lambda, x, s)$ es decreciente. Luego, usando el principio del máximo, se tiene que la solución del problema (4.1) es única. Usando el apartado *a*) de este teorema, hay soluciones $(\lambda, u) \in \Sigma^+$ para cualquier $\lambda < -L$. Por tanto, $\pi(\Sigma^-) \subset [-L, +\infty[$.

Usando de nuevo el Teorema 1.18, o bien $\pi(\Sigma^-)$ es no acotado por arriba, o bien Σ^- toca a otro punto de bifurcación desde infinito diferente de σ_1 . En cualquier caso, $]\sigma_1, \sigma_2[\subset \pi(\Sigma^-)$. ■

Comentario 4.3 Usando la hipótesis $(G2-)$ en lugar de $(G2+)$ se obtienen resultados similares cambiando Σ^+ por Σ^- (ver figura 4.2).

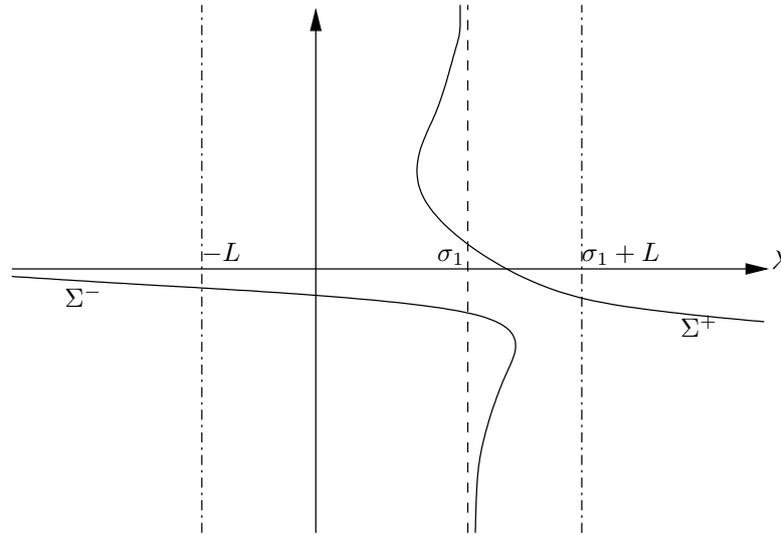


Figura 4.2: Bifurcación de (4.1) bajo las hipótesis (H), (G1), $(G2-)$

Comentario 4.4 De forma poco formal, bajo las hipótesis del teorema y globalmente, uno de los dos continuos de soluciones bifurcando desde (σ_1, ∞) se va hacia la derecha y el otro hacia la izquierda.

4.1.2. Bifurcación global con peso

Se incluye esta sección para el caso en que la función peso cambia de signo (y así $m \neq 1$). Es una generalización del apartado anterior en la que habrá que tener en cuenta que la bifurcación de soluciones positivas no sólo ocurre desde el primer valor propio positivo $\sigma_1(m)$ sino que además sucede también desde el primer valor propio negativo $\sigma_{-1}(m)$. El caso en el que la bifurcación ocurre desde cero se puede encontrar en [23].

Se considera de nuevo el problema (2.2):

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda m(x)u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Se sabe (ver Sección 1.3) que hay dos puntos de bifurcación desde infinito de soluciones positivas de (4.3), $\sigma_1(m)$ y $\sigma_{-1}(m)$. Se pretende generalizar los resultados dados para el conexo, Σ^+ , de soluciones positivas de (4.3) bifurcando desde $+\infty$ enunciados en los Teoremas 4.1 y 4.2. Para ello se recuperan las hipótesis (G1) y (G2+) y se supone que m es una función continua en Ω . Además, fijado $\delta_0 > 0$, se toma un dominio Ω^+ contenido en Ω cumpliendo

$$\Omega^+ \subseteq \{x \in \Omega : m(x) > \delta_0\}.$$

Considerando el problema (4.3) restringido a Ω^+

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda m(x)u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega^+ \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega^+ \end{aligned} \right\}$$

existe el primer valor propio $\sigma_1(m, \Omega^+) > \sigma_1(m)$ y la función propia $\psi_1(\Omega^+)$ positiva. En estas condiciones se puede enunciar el siguiente resultado:

Teorema 4.5 (Ver figura 4.3) *Bajo las hipótesis (H), (B_∞) , (G1), (G2+) y $m \in C(\Omega)$, si (λ, u) es una solución positiva ($u \in \mathcal{P}$) de (4.3) entonces existen dos números reales Λ^+ y Λ^- tales que:*

$$\Lambda^- \leq \lambda \leq \Lambda^+.$$

Además, la componente conexas de soluciones positivas Σ^+ de (4.3) bifurcando desde $(\sigma_1(m), +\infty)$ bifurca también desde $(\sigma_{-1}(m), +\infty)$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea (λ, u) una solución positiva de (4.3). Denotando por $\psi_1(\Omega^+)$ a la extensión por 0 a todo Ω de la función $\psi_1(\Omega^+)$, usándola como función test en la definición de solución débil de (4.3),

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_1(\Omega^+) = \lambda \int_{\Omega} m u \phi_1(\Omega^+) + \int_{\Omega} g(\lambda, x, u) \phi_1(\Omega^+).$$

usando la primera fórmula de Green, la parte izquierda de la ecuación anterior queda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla \phi_1(\Omega^+) &= \int_{\Omega^+} \nabla u \nabla \phi_1(\Omega^+) \\ &= \sigma_1(m, \Omega^+) \int_{\Omega^+} mu\psi_1(\Omega^+) + \int_{\partial\Omega^+} \frac{\partial\psi_1(\Omega^+)}{\partial n_e} u \\ &\leq \sigma_1(m, \Omega^+) \int_{\Omega^+} mu\psi_1(\Omega^+). \end{aligned}$$

Por otro lado, la parte de la derecha

$$\lambda \int_{\Omega} mu\phi_1(\Omega^+) + \int_{\Omega} g(\lambda, x, u)\phi_1(\Omega^+) = \lambda \int_{\Omega^+} mu\psi_1(\Omega^+) + \int_{\Omega^+} g(\lambda, x, u)\psi_1(\Omega^+),$$

por lo que

$$(\sigma_1(m, \Omega^+) - \lambda) \int_{\Omega^+} mu\psi_1(\Omega^+) \geq \int_{\Omega^+} g(\lambda, x, u)\psi_1(\Omega^+).$$

Sumando a los dos términos de la ecuación $\frac{L}{\delta_0} \int_{\Omega^+} mu\psi_1(\Omega^+)$,

$$(\sigma_1(m, \Omega^+) - \lambda + \frac{L}{\delta_0}) \int_{\Omega^+} mu\psi_1(\Omega^+) \geq \int_{\Omega^+} \left[g(\lambda, x, u) + \frac{L}{\delta_0} mu \right] \psi_1(\Omega^+).$$

Puesto que g es Lipschitz, $g(\lambda, x, 0) \geq 0$ y $m(x) > \delta_0$, para los puntos $x \in \Omega^+$, se obtiene

$$g(\lambda, x, u) + \frac{L}{\delta_0} m(x)u(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega^+,$$

concluyendo que

$$\sigma_1(m, \Omega^+) - \lambda + \frac{L}{\delta_0} > 0 \Rightarrow \lambda < \sigma_1(m, \Omega^+) + \frac{L}{\delta_0},$$

y basta tomar $\Lambda^+ = \sigma_1(m, \Omega^+) + \frac{L}{\delta_0}$.

La otra desigualdad se prueba de forma similar. Basta notar que si (λ, u) es una solución positiva de (4.3), entonces $(\mu, u) = (-\lambda, u)$ es una solución positiva de

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \mu(-m(x))u(x) + g(\mu, x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

y, razonando de forma análoga se puede probar que

$$\mu < -\sigma_1(-m, \Omega^+) - \frac{L}{\delta_0},$$

o lo que es lo mismo

$$\lambda > \sigma_1(-m, \Omega^+) - \frac{L}{\delta_0} = \Lambda^-.$$

■

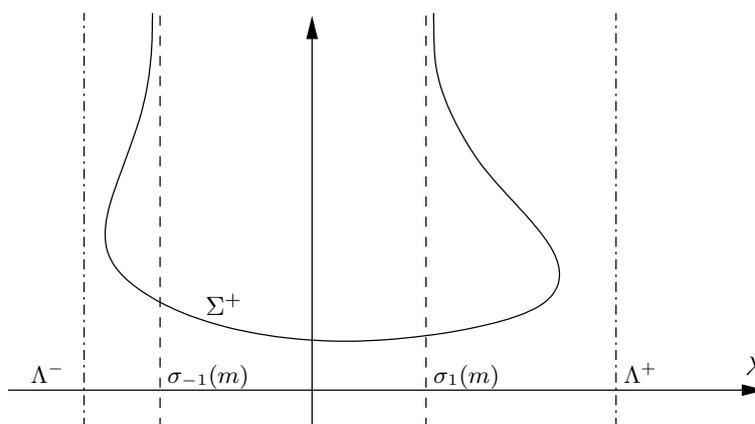


Figura 4.3: Bifurcación de soluciones positivas de (4.3) bajo (H), (G1) y (G2+)

4.2. Aplicación a la resolución de problemas resonantes

Tomado de [41], este apartado es una aplicación de la descripción global de los conjuntos Σ^+ y Σ^- dada en la Sección 4.1 a la búsqueda de soluciones del problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \sigma_1 u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ B(u) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

donde, como ya se ha expuesto, $B(u)$ representa las condiciones de frontera que pueden ser de tipo Dirichlet o de tipo Neumann.

Corolario 4.6 *Asumiendo las hipótesis (H), (B_∞) , (G1) y (G2+).*

- a) *Si las bifurcaciones desde $(\sigma_1, \pm\infty)$ de soluciones de (4.1) son ambas subcríticas o ambas supercríticas, entonces (4.4) admite, al menos, una solución. Además, $u \in P$ si ambas son supercríticas y $u \notin P$ si ambas son subcríticas (ver figuras 4.4 y 4.5).*
- b) *Si la bifurcación desde $(\sigma_1, +\infty)$ de soluciones de (4.1) es supercrítica y la bifurcación desde $(\sigma_1, -\infty)$ de soluciones de (4.1) es subcrítica, entonces (4.4) admite, al menos, dos soluciones $u_1 \in P$ y $u_2 \notin P$ (ver figura 4.6).*

El resultado anterior difiere del Teorema 2.20 en varios aspectos como puede ser que las técnicas empleadas para la demostración son diferentes. También difieren en la precisión, mientras que las soluciones obtenidas en el apartado a) de este teorema son positivas o no positivas, el Teorema 2.20 no es tan concreto en ese aspecto. Además, el apartado b) da dos soluciones, cosa que en ningún momento se podría inferir del Teorema 2.20. Sin embargo, también hay parecidos como el hecho de que en ambos teoremas lo que ocurre localmente cerca de infinito es fundamental para postular la existencia de solución, lo que hace compatibles las soluciones obtenidas en el apartado a) del teorema precedente y las obtenidas en el Teorema 2.20.

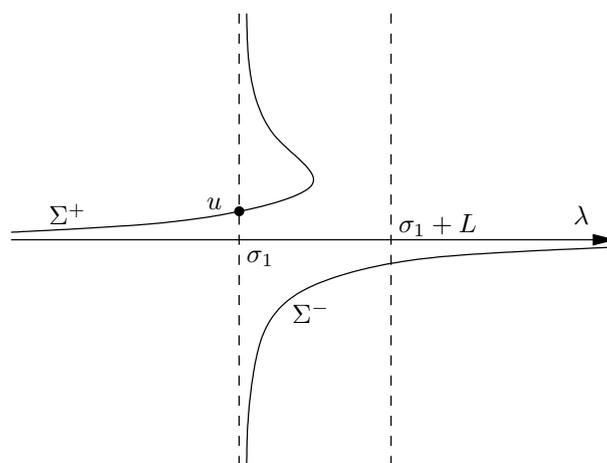


Figura 4.4: Solución del problema (4.4) $u \in P$

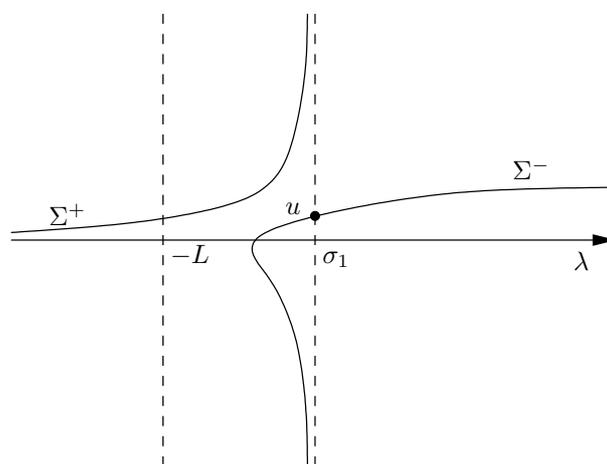


Figura 4.5: Solución del problema (4.4) $u \notin P$

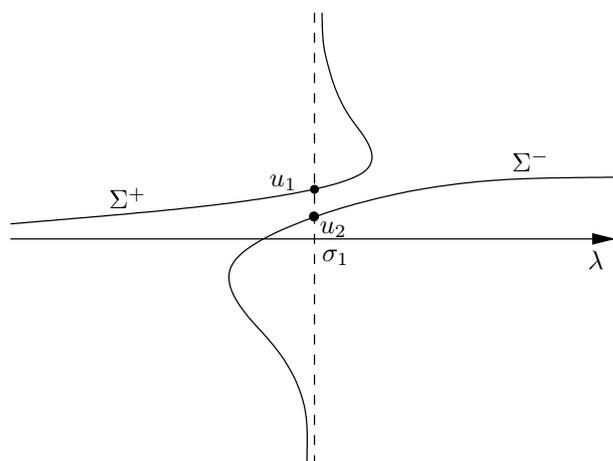


Figura 4.6: Soluciones del problema (4.4) $u_1 \in P$, $u_2 \notin P$

CAPÍTULO

5

Dimensión 1. Resonancia en valores
propios mayores

Introducción

Este capítulo final recoge el resultado (Teorema 5.2) que motivó los teoremas principales de esta memoria. En este resultado se considera el problema (2.1) en caso $N = 1$ con condiciones de frontera Dirichlet, tomando como dominio el intervalo $(0, \pi)$ y siendo la no linealidad g autónoma (es decir, no tiene dependencia espacial ni del parámetro λ). En esta situación se determina la lateralidad de la bifurcación desde infinito en el primer valor propio. La demostración no se hace detalladamente puesto que es una adaptación de la demostración del Teorema 2.11, pero sí que se esboza.

Las ideas contenidas en la demostración de dicho resultado servirán para extenderlo a la bifurcación que se produce en otros valores propios diferentes del primero. Además, se hace una generalización añadiendo dependencia espacial a la no linealidad g . Es interesante resaltar que las técnicas aquí usadas no permiten escribir estos resultados en dimensiones mayores que 1 tal y como ocurre en el caso del primer valor propio.

Por último, el capítulo incluye una serie de ejemplos que ilustran detalladamente cómo se pueden utilizar fácilmente los resultados de los teoremas dados tanto para determinar la lateralidad de la bifurcación desde infinito como para encontrar soluciones a los problemas resonantes.

5.1. Primer valor propio

El caso autónomo, es decir, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ha sido descrito en [42] y merece la pena ser presentado ya que, a pesar de ser una caso particular de los resultados del Capítulo 2, tiene interés por sí mismo, debido a que las demostraciones se simplifican y los cambios de variable que en varias dimensiones parecen artificiales aquí cobran un sentido gráfico. De hecho, las aportaciones del Capítulo 2 son cronológicamente posteriores y fueron motivadas por las realizadas en el caso de dimensión 1. Se considera el problema

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u(x) + g(u(x)), & x \in (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

donde la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la hipótesis $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \frac{g(s)}{s} = 0$, lo cual implica que se cumple (B_∞) .

Comentario 5.1 *En este caso el primer valor propio $\sigma_1 = 1$ y la primera función propia normalizada con la norma $\|\cdot\|$ es*

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(t),$$

con $\psi_1'(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Uno de los resultados principales del artículo [42], que ahora es caso particular del Teorema 2.11, es

Teorema 5.2 *Bajo las hipótesis (H), (B_∞) y (G), si (λ_n, u_n) es una sucesión de soluciones de (5.1) bifurcando desde $(\sigma_1, +\infty)$, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^3 (\sigma_1 - \lambda_n) = \frac{2}{\psi_1'(0)} \int_0^{+\infty} g(s)s \, ds. \quad (5.2)$$

Como consecuencia, si $\int_0^{+\infty} g(s)s \, ds > 0$ (respectivamente < 0), la bifurcación es subcrítica (respectivamente supercrítica).

ESQUEMA DE LA DEMOSTRACIÓN.

A pesar de que este teorema es caso particular del Teorema 2.11, se deben remarcar algunas diferencias que serán útiles para su generalización posterior a valores propios σ_k distintos de σ_1 .

El primer paso es utilizar la simetría de las soluciones para después darse cuenta tras usar ψ_1 como función test,

$$(\sigma_1 - \lambda_n) \int_0^\pi u_n(t) \psi_1(t) dt = \int_0^\pi g(u_n(t)) \psi_1(t) dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u_n(t)) \psi_1(t) dt.$$

De esta forma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^3 (\sigma_1 - \lambda_n) = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u_n) \psi_1,$$

luego basta con calcular el último límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(u_n) \psi_1. \quad (5.3)$$

En segundo lugar, se demuestra que tanto la sucesión de soluciones como la sucesión de sus derivadas, ambas normalizadas, se comportan, en un entorno $(0, t_0)$ de 0, como la primera función propia o como su derivada evaluadas en 0, esto es $\psi_1(0)$ o $\psi_1'(0)$ respectivamente. Este paso es un caso particular del Lema 2.12.

Posteriormente, se demuestra que en el interior del intervalo cerrado $[t_0, \pi/2]$ el valor de

$$\|u_n\|^2 \int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}} g(u_n) \psi_1 \rightarrow 0,$$

lo que es un caso particular del Lema 2.13.

Para terminar, se calcula el límite (5.3) y, tras realizar el cambio de variable $u_n(t) = s$, $dt = \frac{ds}{u_n'(u_n^{-1}(s))}$, y adaptar el Lema 2.12 a dimensión 1, se demuestra que el resto de la integral, es decir el valor en el entorno de cero, tiene el límite buscado. Explícitamente,

$$\|u_n\|^2 \int_0^{t_0} g(u_n) \psi_1 \rightarrow \frac{1}{\psi_1'(0)} \int_0^{+\infty} g(s) s ds.$$



Comentario 5.3 También en [42] se presentan resultados de comparación como los enunciados en esta memoria (ver, por ejemplo el Teorema 2.14) que permiten generalizar el teorema a otras no linealidades no tan pequeñas. Además, en este caso en el que no hay dependencia espacial, este resultado cobra valor ya que realmente se generalizan los resultados de artículos como [6] o [11].

Comentario 5.4 El teorema anterior se refiere a la bifurcación desde infinito de soluciones positivas, es decir, se consideran las sucesiones (λ_n, u_n) de soluciones de (5.1) que cumplen que $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_1$ (en C^1). Si, en lugar de éstas, se consideran las sucesiones que cumplen que $u_n/\|u_n\| \rightarrow -\psi_1$, es decir, la bifurcación desde menos infinito, como en el comentario 2.18, el lado de la bifurcación vendrá determinado por el signo de

$$\int_{-\infty}^0 g(s)s \, ds,$$

que, en caso de ser positivo (respectivamente negativo), implicará que la bifurcación desde $(\sigma_1, -\infty)$ es subcrítica (respectivamente supercrítica).

Como aplicación se puede encontrar solución del problema resonante asociado

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= \sigma_1 u(x) + g(u(x)), & x \in (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

se enuncia un resultado análogo al Teorema 2.20:

Corolario 5.5 Bajo las hipótesis (H), (B_∞) y (G), si

$$\text{signo} \left(\int_0^{+\infty} g(s)s \, ds \right) = \text{signo} \left(\int_{-\infty}^0 g(s)s \, ds \right)$$

entonces el problema resonante (5.4) tiene, al menos, una solución.

5.2. Autovalores mayores

En el Teorema 5.2 se estudia la lateralidad de la bifurcación desde infinito en el primer valor propio. Si se pretende obtener un resultado de lateralidad para bifurcación desde infinito en autovalores mayores se debe obtener una generalización del Teorema 5.2 y se debe tener en cuenta que el uso de la positividad de la función propia y , por extensión, de las soluciones cercanas a ésta, se pierde en el caso de autovalores σ_k , $k \neq 1$. A continuación se hace esta generalización superando la dificultad mencionada y se añade la dependencia espacial de la no linealidad. Concretamente, se estudia el problema

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u(x) + g(x, u(x)), & x \in (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

La clave de la generalización es que todos los valores propios σ_k son simples y que el número de ceros de las funciones propias asociadas ψ_k es finito, concretamente cada una de ellas tiene $k - 1$ ceros en el interior de $(0, \pi)$. Esto último hace que, tal y como se enuncian los próximos resultados, éstos no puedan ser extendidos a dimensiones mayores, puesto que para $N > 1$ los ceros de las funciones propias ψ_k forman lo que se denomina líneas nodales, consistentes en uniones de curvas C^∞ en el interior del dominio Ω (ver [51]).

Posteriormente, se extenderán los resultados del Corolario 5.5 al problema resonante

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= \sigma_k u(x) + g(x, u(x)), & x \in (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Comentario 5.6 *En las demostraciones de la existencia de solución para problemas resonantes en σ_1 (ver Teorema 2.20) se ha usado como herramienta fundamental que la bifurcación desde el primer valor propio sucede desde $+\infty$ y desde $-\infty$, entendiéndose esto como que la bifurcación desde infinito puede ser de soluciones positivas o de soluciones negativas.*

En el caso de valores propios mayores, las funciones propias cambian necesariamente de signo, lo que hace pensar que el razonamiento no funcionará en este

caso. Para superar esta dificultad se considerarán también dos tipos de bifurcaciones desde infinito (ver [58, Teorema 2.3]), la que se produce cuando las sucesiones de soluciones (λ_n, u_n) que cumplen $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_k$ (convergencia $C^1([0, \pi])$), siendo esta función propia la que tiene derivada positiva en 0, es decir $\psi'_k(0) > 0$ y la que se produce cuando $u_n/\|u_n\| \rightarrow -\psi_k$.

Abusando del lenguaje, se denominará bifurcación desde $(\sigma_k, +\infty)$ a la bifurcación cuyas sucesiones convergen normalizadas a ψ_k y bifurcación desde $(\sigma_k, -\infty)$ a la que se refiere a $-\psi_k$.

Comentario 5.7 Por simplicidad en las demostraciones de esta sección se harán evitando la dependencia espacial de g , pero los resultados se pueden adaptar como se muestra en el Teorema 5.10.

El hecho de que todos los valores propios σ_k de

$$\left. \begin{aligned} u''(t) &= \lambda u(t), & t \in (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

sean simples implica, siguiendo el resultado de Krasnoselskii (Teorema 1.11) y bajo las hipótesis (H) y (B_∞) , que son puntos de bifurcación desde infinito para (5.5).

El primer resultado que se pretende obtener se refiere a la lateralidad de las bifurcaciones en estos autovalores. Para ello se trabajará de la misma forma que en las secciones precedentes.

Comentario 5.8 Recuérdese que $\sigma_k = k^2$ y que la norma $\|\cdot\|$ es la norma en $H_0^1(0, \pi)$, que en este caso es $\|u\|^2 = \int_0^\pi (u'(t))^2 dt$. Puesto que las funciones propias que se consideran están normalizadas en esta norma, es fácil comprobar que

$$\psi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{k^2\pi}} \operatorname{sen}(kt),$$

y que $\psi'_k(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} > 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

En cualquiera de los dos casos anteriores, bifurcación desde $+\infty$ o desde $-\infty$, tomando ψ_k como función test se obtiene

$$(\sigma_k - \lambda_n) \int_0^\pi u_n \psi_k = \int_0^\pi g(u_n) \psi_k. \quad (5.8)$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^\pi \psi_k^2 = \frac{1}{\sigma_k} \int_0^\pi |\nabla \psi_k|^2 = \frac{1}{\sigma_k} = \frac{1}{k^2} > 0,$$

y que para n suficientemente grande

$$\int_0^\pi u_n \psi_k = \|u_n\| \int_0^\pi \frac{u_n}{\|u_n\|} \psi_k \begin{cases} > 0, & \text{si } u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_k, \\ < 0, & \text{si } u_n/\|u_n\| \rightarrow -\psi_k, \end{cases}$$

y, a la vista de la igualdad (5.8), será el signo de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(u_n) \psi_k,$$

el que decida el lado de la bifurcación una vez que se sepa si la bifurcación es desde $+\infty$ o desde $-\infty$.

Denotando por

$$\mathfrak{J}^+ := \mathfrak{J}^+(g) = \int_0^{+\infty} g(s)s \, ds \quad \text{y} \quad \mathfrak{J}^- := \mathfrak{J}^-(g) = \int_{-\infty}^0 g(s)s \, ds, \quad (5.9)$$

se definen:

- Para k par: $L_k^+ = L_k^- := k \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^-)$.

- Para k impar:

$$\begin{aligned} L_k^+ &:= \sqrt{\frac{\pi}{2}} [(k+1)\mathfrak{J}^+ + (k-1)\mathfrak{J}^-] \quad \text{y} \\ L_k^- &:= \sqrt{\frac{\pi}{2}} [(k-1)\mathfrak{J}^+ + (k+1)\mathfrak{J}^-]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Así, en el caso $n = 1$, las integrales I e I^- dadas por (2.15) y (2.19) son ahora L_1^+ y L_1^- respectivamente. Se puede enunciar el siguiente teorema que generaliza a cualquier valor propio del problema (5.7) el Teorema 5.2. Estas integrales \mathfrak{J} permitirán enunciar los resultados de forma más cómoda.

Teorema 5.9 *Bajo las hipótesis (H), (B_∞) y (G). Entonces, si (λ_n, u_n) es una sucesión de soluciones de (5.1) bifurcando desde $(\sigma_k, +\infty)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^3 (\sigma_k - \lambda_n) = \sigma_k L_k^+ = k^2 L_k^+.$$

Si (λ_n, u_n) es una sucesión de soluciones de (5.1) bifurcando desde $(\sigma_k, -\infty)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^3 (\sigma_k - \lambda_n) = \sigma_k L_k^- = k^2 L_k^-.$$

Consecuentemente,

- *Si k es par e $\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^- > 0$ (respectivamente < 0) la bifurcación desde $(\sigma_k, \pm\infty)$ de soluciones de (5.1) es subcrítica (respectivamente supercrítica).*
- *Si k es impar y $(k+1)\mathfrak{J}^+ + (k-1)\mathfrak{J}^- > 0$ (respectivamente < 0) la bifurcación desde $(\sigma_k, +\infty)$ de soluciones de (5.1) es subcrítica (respectivamente supercrítica).*
- *Si k es impar y $(k-1)\mathfrak{J}^+ + (k+1)\mathfrak{J}^- > 0$ (respectivamente < 0) la bifurcación desde $(\sigma_k, -\infty)$ de soluciones de (5.1) es subcrítica (respectivamente supercrítica).*

DEMOSTRACIÓN.

Se probará el caso de la bifurcación desde $(\sigma_k, +\infty)$. El caso de la bifurcación desde $(\sigma_k, -\infty)$ es similar. El teorema es consecuencia de multiplicar por $\|u_n\|^2$ la igualdad (5.8), observando que

$$\int_{\Omega} \frac{u_n}{\|u_n\|} \psi_k \rightarrow \int_{\Omega} \psi_k^2 = \frac{1}{\sigma_k} \|\psi_k\| = \frac{1}{\sigma_k}.$$

A continuación habrá que probar que

$$L_k^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \int_0^\pi g(u_n) \psi_k.$$

Para demostrar esto se dividirá la demostración en dos partes. La primera consistirá en detallar el caso $k = 2$ que servirá de guía para la segunda parte, consistente en el caso general k . Hay que recordar que el caso $k = 1$ se ha comentado anteriormente y está demostrado en [41].

- Caso $k = 2$.

Para este caso, el problema lineal (5.7) adquiere la forma:

$$\left. \begin{aligned} u''(t) &= \sigma_2 u(t), & t \in (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0. \end{aligned} \right\}$$

En este caso la función propia asociada $\psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2t)$ tiene un cero en el punto $\pi/2 \in (0, \pi)$. Además, $\sigma_2 = 2^2 = 4$. Así, si (λ_n, u_n) es una sucesión de soluciones de (5.1) bifurcando desde $(\sigma_2, +\infty) = (4, +\infty)$, se cumple que $\lambda_n \rightarrow \sigma_2$, $\|u_n\| \rightarrow \infty$ y $u_n/\|u_n\| \rightarrow \psi_2$ (convergencia en $C^1(\bar{\Omega})$). Esto significa que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $z_n \in (0, \pi)$ tal que $u_n(z_n) = 0$ y que cumple que $z_n \rightarrow \pi/2$. De esta forma, se divide la integral del límite L_2 en 6 integrales (ver figura 5.1) para usar el Lema 2.12 con t_0 adecuado:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi g(u_n) \psi_2 \\ &= \left[\int_0^{t_0} + \int_{t_0}^{z_n-t_0} + \int_{z_n-t_0}^{z_n} + \int_{z_n}^{z_n+t_0} + \int_{z_n+t_0}^{\pi-t_0} + \int_{\pi-t_0}^\pi \right] g(u_n(t)) \psi_2(t) dt \\ &= I_{1,0} + I_{2,0} + I_{3,0} + I_{1,1} + I_{2,1} + I_{3,1}. \end{aligned}$$

Usando la hipótesis (G), en particular que $g(s)s^2 \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$, se puede concluir, igual que en el Lema 2.13 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 I_{2,0} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 I_{2,1} = 0.$$

De nuevo se usa el mismo razonamiento que en el Lema 2.13, es decir, se realiza el cambio de variable $u_n(t) = s$, con $dt = \frac{ds}{u'_n(u_n^{-1}(s))}$, y se usan las convergencias del Lema 2.12 adaptadas para comprobar que:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in (0, t_0) \cup (\pi - t_0, \pi), & \quad \frac{\|u_n\|}{u'_n(u_n^{-1}(s))} \rightarrow \frac{1}{\psi'_2(0)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \\ \text{Si } t \in (z_n - t_0, z_n + t_0), & \quad \frac{\|u_n\|}{u'_n(u_n^{-1}(s))} \rightarrow \frac{-1}{\psi'_2(0)} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

De esta forma se comprueba que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 I_{1,0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 I_{3,0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} g(s)s ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{J}^+,$$

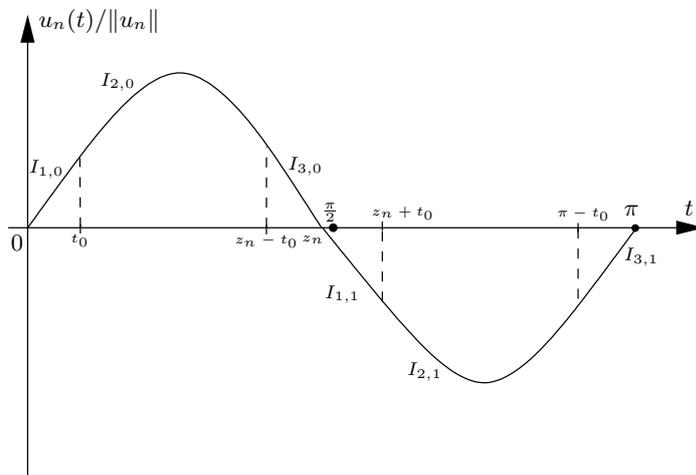


Figura 5.1: Solución de (5.1) cercana al punto de bifurcación $(\sigma_2, +\infty)$.

y que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 I_{1,1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 I_{3,1} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{-\infty} g(s) s \, ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{J}^-$$

de donde se deduce inmediatamente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \int_0^\pi g(u_n) \psi_2 = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) s \, ds = 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^-) = L_2^+.$$

• Caso general k .

En este caso la función propia asociada ψ_k tiene $k - 1$ ceros en el intervalo $(0, \pi)$, coincidentes con los puntos $i\pi/k$, $i = 1, \dots, k - 1$.

Al igual que antes, tomando una sucesión (λ_n, u_n) de soluciones de (5.1) bifurcando desde $(\sigma_k, +\infty)$, para cada valor $n \in \mathbb{N}$ existen $k + 1$ ceros de u_n que se identificarán con $z_{n,i}$, de forma que $u_n(z_{n,i}) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall i = 0, 1, \dots, k$ y tales que $z_{n,i} \rightarrow i\pi/k$. En los casos $i = 0$ e $i = k$, estos ceros coinciden con los extremos del intervalo $(0, \pi)$, es decir, $z_{n,0} = 0$ y $z_{n,k} = \pi$, para todos los valores de $n \in \mathbb{N}$.

Se divide la integral $\int_\Omega g(u_n) \psi_k$ en $3k$ integrales (ver figura 5.1), de las cuales $2k$ corresponden a los valores de u_n cercanos a cero, y las k restantes a los valores

donde u_n es grande, es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi g(u_n)\psi_k &= \sum_{i=0}^{k-1} \left[\int_{z_{n,i}}^{z_{n,i}+t_0} + \int_{z_{n,i}+t_0}^{z_{n,i+1}-t_0} + \int_{z_{n,i+1}-t_0}^{z_{n,i+1}} \right] g(u_n(t))\psi_k(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} [I_{1,i} + I_{2,i} + I_{3,i}]. \end{aligned}$$

De todas ellas, las k que corresponden con valores alejados de cero de u_n son las $I_{2,i}$, $\forall i = 0, \dots, k-1$. Estas integrales, usando la convergencia $g(s)s^2 \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$ y los argumentos del Lema 2.13, cumplen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 I_{2,i} = 0.$$

Las restantes han de ser consideradas dependiendo el valor de la derivada de u_n en el punto $z_{n,i}$, el cual depende, a su vez, de la paridad o imparidad de i . Así, realizando el cambio de variable $u_n(t) = s$, con $dt = \frac{ds}{u'_n(u_n^{-1}(s))}$, se deduce usando el Lema 2.12:

- Para i par, $\frac{\|u_n\|}{u'_n(u_n^{-1}(s))} \rightarrow \frac{-1}{\psi'_k(i\pi/k)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
- Para i impar, $\frac{\|u_n\|}{u'_n(u_n^{-1}(s))} \rightarrow \frac{1}{\psi'_k(i\pi/k)} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

De esta forma se comprueba, tras tomar los límites adecuados y usar los teoremas de convergencia como se hace en el Lema 2.13 que si $i = 0, \dots, k-1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 I_{3,i} + I_{1,i+1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^-) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)s ds$$

y que

$$I_{1,0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} g(s)s ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{J}^+,$$

y

$$I_{3,k} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^0 g(s)s ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{J}^-, & \text{si } k \text{ es par,} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} g(s)s ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{J}^+, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Todo esto hace que el valor de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \int_0^\pi g(u_n) \psi_k,$$

pase a depender de la paridad o imparidad de k . Concretamente, si k es par habrá tantas partes con \mathfrak{I}^+ como \mathfrak{I}^- y se conseguirá una situación similar al caso $k = 2$, es decir, si k es par

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \int_0^\pi g(u_n) \psi_k &= k \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} g(s) s ds + k \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^0 g(s) s ds \\ &= k \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) s ds = k \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\mathfrak{I}^+ + \mathfrak{I}^-). \end{aligned}$$

Y en el caso en el que k sea impar ocurrirá como en el caso 1, es decir, habrá dos partes \mathfrak{I}^+ más que partes \mathfrak{I}^- , esto es, si k es impar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^2 \int_0^\pi g(u_n) \psi_k = (k+1) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} g(s) s ds + (k-1) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^0 g(s) s ds. \quad \blacksquare$$

Como se expuso al principio de la sección, no se ha utilizado la dependencia espacial para realizar las demostraciones. Sin embargo, si se realizan los ajustes pertinentes en éstas, el resultado anterior puede ser escrito de la siguiente manera:

Teorema 5.10 *Bajo las hipótesis (H), (B_∞) y (G). Entonces:*

Si k es par,

$$L_k^+ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{k-1} \left[\int_0^{+\infty} g\left(\frac{i\pi}{k}, s\right) s ds + \int_{-\infty}^0 g\left(\frac{(i+1)\pi}{k}, s\right) s ds \right]$$

y

$$L_k^- = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{k-1} \left[\int_0^{+\infty} g\left(\frac{(i+1)\pi}{k}, s\right) s ds + \int_{-\infty}^0 g\left(\frac{i\pi}{k}, s\right) s ds \right].$$

Si k es impar,

$$L_k^+ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{i=0}^k \int_0^{+\infty} g\left(\frac{i\pi}{k}, s\right) s ds + \sum_{i=0}^{k-2} \int_{-\infty}^0 g\left(\frac{(i+1)\pi}{k}, s\right) s ds \right]$$

y

$$L_k^- = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{i=0}^{k-2} \int_0^{+\infty} g\left(\frac{(i+1)\pi}{k}, s\right) s ds + \sum_{i=0}^k \int_{-\infty}^0 g\left(\frac{i\pi}{k}, s\right) s ds \right].$$

A partir de este momento, una vez que se han dado condiciones suficientes para determinar si la lateralidad de la bifurcación es sub o supercrítica, se aplicarán los resultados a la resolución del problema resonante (5.6). Como antes, por simplicidad se prescinde de la dependencia de $x \in \Omega$ en la no linealidad aunque los resultados siguientes se podrían escribir en términos de $g(x, s)$. Así, el resto de la sección se dedica a la búsqueda de soluciones de (5.4):

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= \sigma_k u(x) + g(u(x)), & x \in (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Corolario 5.11 *Bajo las hipótesis del Teorema 5.9, (H), (B_∞) y (G).*

Si $\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^- > 0$, entonces:

a) Si k es par, las bifurcaciones desde $(\sigma_k, \pm\infty)$ son ambas subcríticas.

b) Si k es impar, y

b+) $k > \frac{\mathfrak{J}^- - \mathfrak{J}^+}{\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^-}$ (respectivamente $<$) la bifurcación desde $(\sigma_k, +\infty)$ de soluciones de (5.1) es subcrítica (respectivamente supercrítica).

b-) $k > \frac{\mathfrak{J}^+ - \mathfrak{J}^-}{\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^-}$ (respectivamente $<$) la bifurcación desde $(\sigma_k, -\infty)$ de soluciones de (5.1) es subcrítica (respectivamente supercrítica).

En consecuencia, para k par, el problema resonante (5.6) tiene, al menos, una solución.

Comentario 5.12 *Se puede obtener un resultado semejante cuando $\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^- < 0$.*

Corolario 5.13 *Si $\mathfrak{J}^+ = \mathfrak{J}^- \neq 0$, entonces*

$$L_k^+ = L_k^- = 2k \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{J}^+, \forall k \in \mathbb{N}.$$

En el caso de que $\mathfrak{J}^+ > 0$ (ver figura 5.2) (respectivamente $\mathfrak{J}^+ < 0$) todas las bifurcaciones son subcríticas (respectivamente supercríticas) y, por tanto, (5.6) tiene solución $\forall k \in \mathbb{N}$.

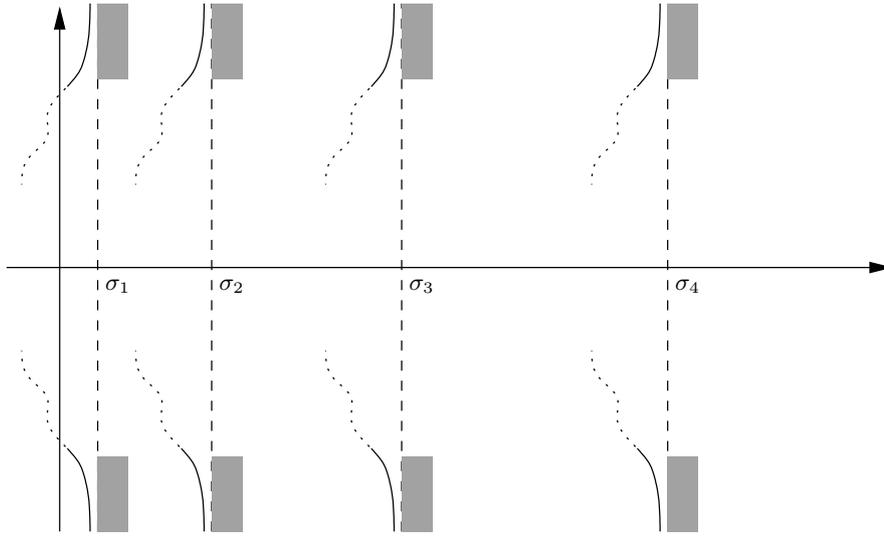


Figura 5.2: Bifurcaciones cuando $\mathfrak{J}^+ = \mathfrak{J}^- > 0$

5.3. Ejemplos

A continuación se describen algunos ejemplos que ponen en práctica los resultados de la sección previa. Se toma como dominio $\Omega = (0, \pi)$ y se trabaja primero con problemas del tipo (5.1) y posteriormente, añadiendo dependencia espacial, con problemas del tipo (5.5).

5.3.1. Ejemplos con g autónoma

En este apartado se considera el problema (5.1),

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u(x) + g(u(x)), & x \in (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0 \end{aligned} \right\}$$

y se irán presentando diferentes no linealidades g que generan diferentes diagramas de bifurcación.

Ejemplo 1.

Se retoma el ejemplo (2.10) donde

$$g(s) = \begin{cases} -K, & 0 \leq s \leq 1, \\ K(s-2), & 1 < s \leq 2, \\ \frac{s-2}{s^{\alpha+1}}, & 2 < s < +\infty. \end{cases}$$

con $\alpha > 2$. Para verificar las hipótesis (B_∞) y (G) se necesita redefinir la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en su parte negativa. Se extenderá de forma par. Se comprobó que para $K > \frac{2^{2\alpha+2}}{\pi(\alpha-2)(\sqrt{2\pi})^{\alpha-2}}$ la bifurcación desde $(\sigma_1, +\infty)$ era supercrítica en contra de lo que se esperaba.

Se aplicará el Teorema 5.1 para comprobar su veracidad en esta situación y además para estudiar la bifurcación en otros valores propios tanto desde $+\infty$ como desde $-\infty$.

Los límites L_k^+ y L_k^- definidos por (5.10) y calculados en el Teorema 5.1 requieren el cálculo de \mathfrak{J}^+ e \mathfrak{J}^- que son iguales pero de signo distinto por la

paridad de g :

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}^+ &= \int_0^{+\infty} g(s)s \, ds = \int_0^1 (-K)s \, ds + \int_1^2 K(s-2)s \, ds + \int_2^{+\infty} \frac{s-2}{s^{\alpha+1}} s \, ds \\ &= \frac{-K}{2} - \frac{2}{3}K + \frac{4}{2^\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{-7}{6}K + \frac{4}{2^\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}.\end{aligned}$$

De esta forma,

$$\mathfrak{J}^+ < 0 \iff K > \frac{24}{7 \cdot 2^\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)},$$

y, en particular, la bifurcación desde $(\sigma_1, +\infty)$ es supercrítica.

Así, tomando $K > \frac{24}{7 \cdot 2^\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}$,

- si k es par,

$$L_k^+ = L_k^- = k\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^-) = 0,$$

no pudiendo concluir nada con el Teorema 5.9 sobre las bifurcaciones desde $(\sigma_k, \pm\infty)$.

- Si k es impar

$$\begin{aligned}L_k^+ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} [(k+1)\mathfrak{J}^+ + (k-1)\mathfrak{J}^-] = \sqrt{2\pi}\mathfrak{J}^+ < 0, \\ L_k^- &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} [(k-1)\mathfrak{J}^+ + (k+1)\mathfrak{J}^-] = -\sqrt{2\pi}\mathfrak{J}^+ > 0,\end{aligned}$$

siendo las bifurcaciones desde $(\sigma_k, +\infty)$ supercríticas y siendo desde $(\sigma_k, -\infty)$ subcríticas.

En el caso de tomar $K < \frac{24}{7 \cdot 2^\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}$, cambian los signos y las bifurcaciones cambian de lado.

En este ejemplo no es posible aplicar ninguno de los resultados presentados para la resolución del problema resonante (5.6).

Ejemplo 2.

Se vuelve a tratar el ejemplo (2.21) considerándolo en dimensión 1, donde la no linealidad $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$g(s) = \frac{1-s}{1+s^4}.$$

Este ejemplo difiere del anterior, entre otras cosas, en que la función no es par y, por lo tanto, $\mathfrak{J}^+ \neq -\mathfrak{J}^-$. En concreto, como se calculó en (2.21),

$$\mathfrak{J}^+ = \int_0^{+\infty} g(s)s \, ds = \frac{1 - \sqrt{2}}{4}\pi \quad \text{y} \quad \mathfrak{J}^- = \int_{-\infty}^0 g(s)s \, ds = \frac{-1 - \sqrt{2}}{4}\pi.$$

Por lo tanto,

$$\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^- = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)s \, ds = \frac{-\sqrt{2}}{2}\pi,$$

de donde, usando el Teorema 5.2, se calculan L_k obteniendo que:

- Si k es par,

$$L_k^+ = L_k^- = k\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^-) = -k\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2} < 0.$$

- Si k es impar,

$$L_k^+ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [(k+1)\mathfrak{J}^+ + (k-1)\mathfrak{J}^-] = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} (1 - k\sqrt{2}) < 0$$

y

$$L_k^- = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [(k-1)\mathfrak{J}^+ + (k+1)\mathfrak{J}^-] = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} (-1 - k\sqrt{2}) < 0.$$

En cualquiera de los casos, las bifurcaciones desde $(\sigma_k, \pm\infty)$ son siempre supercríticas.

Consecuentemente, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe, al menos, una solución del problema resonante (5.6).

Ejemplo 3.

El último ejemplo con g autónoma sirve para ilustrar el caso en que dependiendo del valor propio, las bifurcaciones pueden ser diferentes (Corolario 5.11). Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(s) = e^{-(s-0,15)^2}.$$

Para esta función,

$$\mathfrak{J}^+ \approx 0,6441420033627894, \quad \mathfrak{J}^- \approx -0,378274051659659$$

y entonces, usando el Corolario 5.11,

- para k par $L_k^+ = L_k^- > 0$ y todas las bifurcaciones son subcríticas.
- Para k impar,

$$L_k^+ > 0,$$

$$L_1^- < 0, L_3^- < 0, L_k^- > 0, \text{ para } k \geq 5.$$

Luego, para k impar las bifurcaciones desde $(\sigma_k, +\infty)$ son subcríticas, desde $(\sigma_1, -\infty)$ y $(\sigma_3, -\infty)$ son supercríticas y desde $(\sigma_k, +\infty)$, $k \geq 5$ son subcríticas (ver figura 5.3).

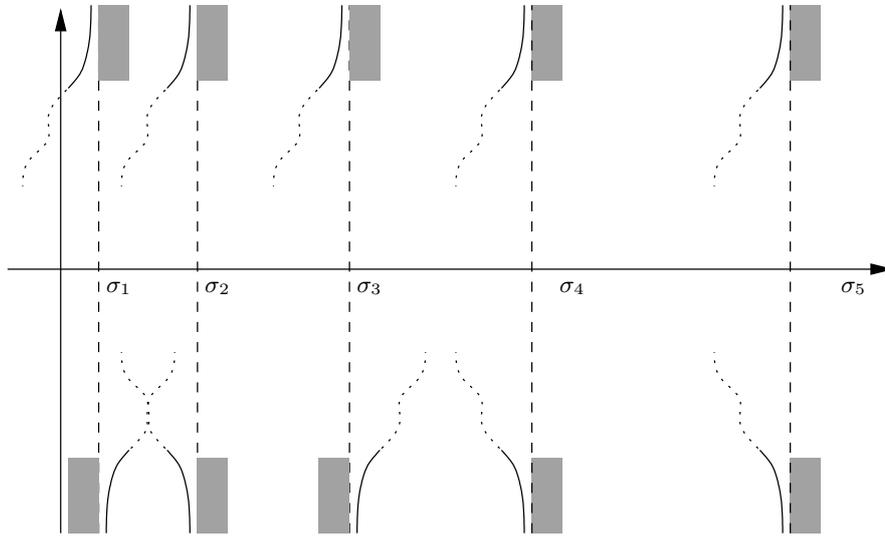


Figura 5.3: Diagrama de bifurcación para $g(s) = e^{-(s-0,15)^2}$

5.3.2. Ejemplos con dependencia espacial $g(x, s)$

Para estudiar el caso no autónomo se retoma el problema (5.5):

$$\left. \begin{aligned} -u''(x) &= \lambda u(x) + g(x, u(x)), & x \in (0, \pi) \\ u(0) &= u(\pi) = 0, \end{aligned} \right\}$$

con la intención de aplicar el Teorema 5.10 y comprobar que la variable espacial tiene relevancia en la lateralidad de la bifurcación. Para simplificar los cálculos se consideran funciones $g : (0, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g(x, s) = h(x)g_1(s)$.

Los valores $\mathfrak{J}^+ = \mathfrak{J}^+(g_1)$ e $\mathfrak{J}^- = \mathfrak{J}^-(g_1)$ son las integrales definidas en (5.9), los límites L_k del Teorema 5.10 adquieren la siguiente expresión.

- Si k es par,

$$L_k^+ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{k-1} \left[h\left(\frac{i\pi}{k}\right) \mathfrak{J}^+ + h\left(\frac{(i+1)\pi}{k}\right) \mathfrak{J}^- \right]$$

y

$$L_k^- = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{k-1} \left[h\left(\frac{(i+1)\pi}{k}\right) \mathfrak{J}^+ + h\left(\frac{i\pi}{k}\right) \mathfrak{J}^- \right].$$

- Si k es impar,

$$L_k^+ = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{i=0}^k h\left(\frac{i\pi}{k}\right) \mathfrak{J}^+ + \sum_{i=0}^{k-2} h\left(\frac{(i+1)\pi}{k}\right) \mathfrak{J}^- \right]$$

y

$$L_k^- = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{i=0}^{k-2} h\left(\frac{(i+1)\pi}{k}\right) \mathfrak{J}^+ + \sum_{i=0}^k h\left(\frac{i\pi}{k}\right) \mathfrak{J}^- \right].$$

Ejemplo 4.

Sea $h(x) = \text{sen}(x)$, $\forall x \in (0, \pi)$ ($g(x, s) = h(x)g_1(s)$).

Para evidenciar que la función h es quien determina la lateralidad de la bifurcación desde infinito, sea g_1 cumpliendo $\mathfrak{J}^+ = \mathfrak{J}^- = 1$. Entonces $L_k^+ = L_k^- > 0$, para todo natural $k \neq 1$ y todas las bifurcaciones son subcríticas, de donde se puede deducir que el problema (5.6) tiene solución para cualquier valor de $k \neq 1$. Para el primer autovalor $L_1^+ = 0 = L_1^-$ y no se puede decidir la lateralidad con los resultados contenidos en esta memoria.

Ejemplo 5.

Sea $h(x) = \text{cos}(x)$, $\forall x \in (0, \pi)$ ($g(x, s) = h(x)g_1(s)$).

Tomando g_1 que cumpla $\mathfrak{J}^+ = \mathfrak{J}^- = 1$, entonces:

- Para k par,

$$L_k^+ = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\mathfrak{J}^+ - \mathfrak{J}^-) = 0 \quad \text{y} \quad L_k^- = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(-\mathfrak{J}^+ + \mathfrak{J}^-) = 0.$$

- Por otra parte, si k es impar,

$$L_k^+ = 0 = L_k^-.$$

No se puede decidir sobre la lateralidad de la bifurcación en este caso.

Ejemplo 6.

Sea $h(x) = x^2 - 1'1\pi$, $\forall x \in (0, \pi)$ y g_1 cumpliendo $\mathfrak{J}^+ = \mathfrak{J}^- = 1$.

En este caso $L_k^+ = L_k^-$ (ver figura 5.4) viene dado por la tabla siguiente:

k	L_k^+ (valor aproximado)
1	3.707429255449241
2	1.2300011481001965
3	0.12698578803966254
4	-0.6324263851987512
5	-1.2543972837083035
6	-1.8076475448534406
7	-2.321628870361749
8	-2.8110671110970564
9	-3.284143295317013
10	-3.7457660399762576

De aquí, para $k = 1, 2, 3$ todas las bifurcaciones son subcríticas (ver figura 5.5), y a partir de $k \geq 4$ todas son supercríticas.

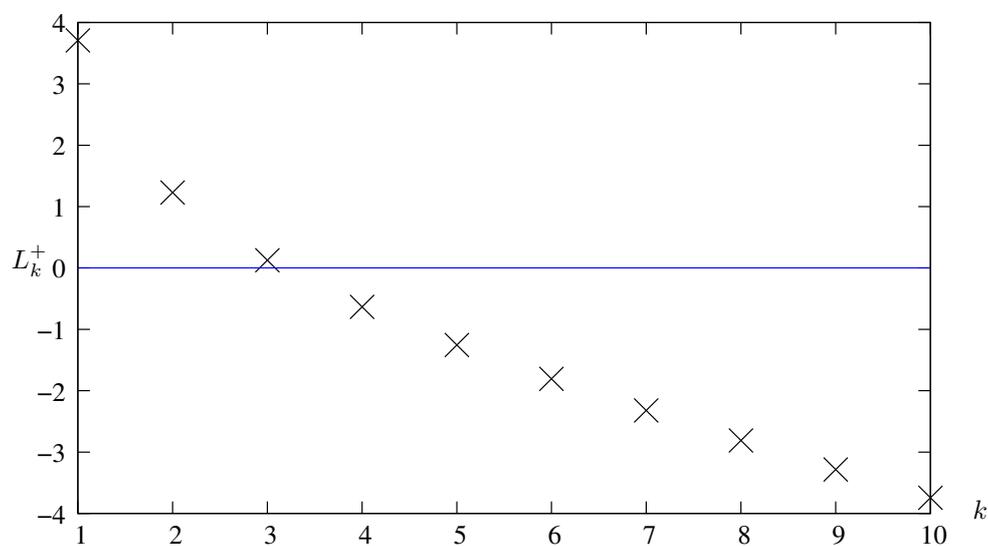


Figura 5.4: Límites $L_k^+ = L_k^-$ cuando $h(x) = x^2 - 1'1\pi$

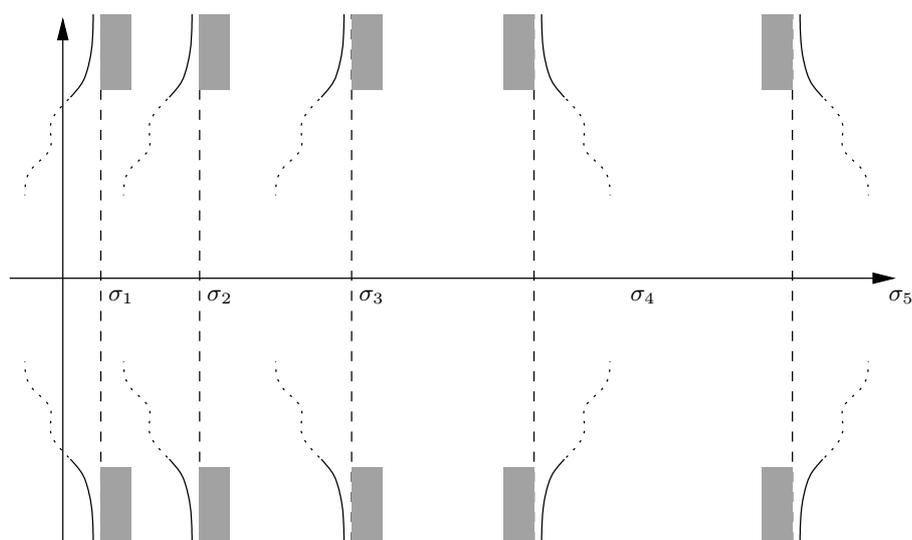


Figura 5.5: Diagrama de bifurcación con $h(x) = x^2 - 1'1\pi$

Ejemplo 7.

Sea $h(x) = \text{sen}(7x)$, $\forall x \in (0, \pi)$ y g_1 cumpliendo $\mathfrak{J}^+ = \mathfrak{J}^- = 1$.

En esta situación, $L_k^+ = L_k^-$ (representadas en la figura 5.6) hacen que:

Sobre la bifurcación desde $(\sigma_1, \pm\infty)$ no se puede decir nada.

Las bifurcaciones desde $(\sigma_2, \pm\infty)$ son supercríticas.

Las bifurcaciones desde $(\sigma_3, \pm\infty)$ son subcríticas.

Las bifurcaciones desde $(\sigma_k, \pm\infty)$ para $k = 4, 5, 6$ son supercríticas.

Sobre la bifurcación desde $(\sigma_7, \pm\infty)$ no se puede decir nada.

Las bifurcaciones desde $(\sigma_k, \pm\infty)$ con $k \geq 8$ son subcríticas.

En consecuencia, el problema resonante (5.6) tiene solución para $k \neq 1, 7$. Para los casos $k = 1, 7$ no se puede decir nada con las técnicas desarrolladas en el capítulo.

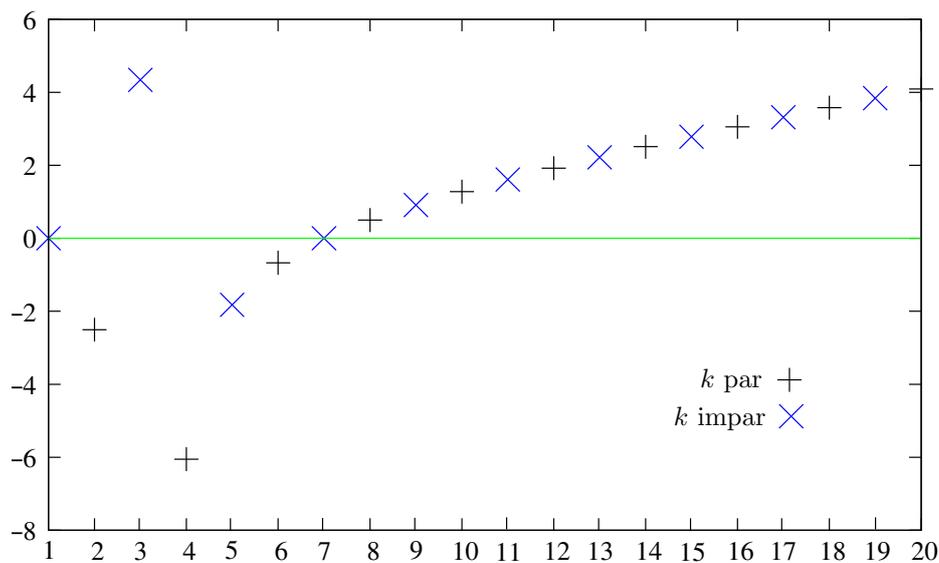


Figura 5.6: Valores de $L_k^+ = L_k^-$ para $h(x) = \text{sen}(7x)$

Notas finales

Para finalizar se recogen algunas cuestiones y problemas que pueden surgir a raíz de la lectura de la memoria. Se dedicarán algunas líneas a comentar lo que a juicio del autor es más interesante.

1. Durante toda la memoria las condiciones de contorno de tipo Dirichlet se han tomado homogéneas y la expresión de la integral I definida en (2.15) ha venido dada por

$$I = I(g) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left(\int_0^{+\infty} g(\sigma_1(m), y, s) s ds \right) dy.$$

En el caso en que las condiciones de contorno fuesen de tipo Dirichlet no homogéneo, más concretamente considerando el problema

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u(x) &= \lambda m(x)u(x) + g(\lambda, x, u(x)), & x \in \Omega \\ u(x) &= \eta, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \right\}$$

con $\eta \in \mathbb{R}$, realizando ligeras modificaciones en los cálculos, el valor de I vendría dado por

$$I = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi_1(y)|} \left(\int_{\eta}^{+\infty} g(\sigma_1(m), y, s) s ds \right) dy.$$

2. Muchos de los resultados que aparecen en el Capítulo 2 están escritos considerando condiciones de contorno que pueden ser de tipo Dirichlet o de tipo Neumann. Con un poco de cuidado se pueden adaptar los resultados escritos para el caso Neumann cuando las condiciones de contorno se toman de tipo Robin. Una cuestión más compleja es saber qué ocurre cuando las condiciones de frontera son mixtas en el sentido de que en un trozo de la frontera son de tipo Neumann y en otro de tipo Dirichlet, es decir,

$$B(u) = u\chi_{\Gamma_1} + \frac{\partial u}{\partial n_e}\chi_{\Gamma_2},$$

con $\Gamma_i \in \partial\Omega$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ y χ_X la función característica de un conjunto X . A pesar de que se pueden obtener autovalores (ver el trabajo de Colorado y Peral [24]) las técnicas utilizadas a lo largo de la memoria parecen no poder ser utilizadas.

3. El Capítulo 5 está íntegramente dedicado a la versión en dimensión 1 del operador Laplaciano. Los resultados contenidos en él se basan, entre otras cosas, en que los valores propios son simples y en que las funciones propias tienen un número finito de ceros. Estas dos propiedades también se satisfacen cuando se habla del operador p-Laplaciano en dimensión 1, de hecho, sus valores propios son simples, forman una sucesión creciente y tienen la forma

$$\sigma_k = \left(\frac{k\pi_p}{\pi}\right)^p, \quad k \in \mathbb{N},$$

donde π_p es un cierto valor dependiente de p . Denotando por $\psi_1(t) = \text{sen}_p(t)$ a la primera función propia, la cual sólo tiene un cero en $(0, \pi)$ el resto tienen la forma

$$\psi_k(t) = \sigma_k^{-1/p} \text{sen}_p(\sigma_k^{1/p}t), \quad \forall t \in (0, \pi),$$

las cuales tienen $k - 1$ ceros en $(0, \pi)$ (ver [31], [33], [35] o [64] para un estudio detallado).

El problema en este caso es que el operador p-Laplaciano no es autoadjunto. En la Sección 3.1, considerando sólo el primer autovalor, se superó esta

dificultad usando la desigualdad (3.2). Pero esta herramienta usa de forma fundamental la positividad de las funciones que sólo se puede conseguir cuando se está cerca de la primera función propia. Para poder adaptar los resultados del Capítulo 5 al p -Laplaciano de dimensión 1 sería necesario o bien encontrar una nueva herramienta, o bien conseguir una desigualdad del tipo (3.2) alternativa.

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Bifurcaciones subcrítica y supercrítica desde cero	20
1.2. Bifurcaciones subcrítica y supercrítica desde infinito	21
2.1. Solución del problema (2.20) $\text{signo}(I) = \text{signo}(I^-) > 0$ (< 0).	53
4.1. Bifurcación de (4.1) bajo las hipótesis (H), (G1), (G2+)	88
4.2. Bifurcación de (4.1) bajo las hipótesis (H), (G1), (G2-)	90
4.3. Bifurcación de soluciones positivas de (4.3) bajo (H), (G1) y (G2+)	93
4.4. Solución del problema (4.4) $u \in P$	95
4.5. Solución del problema (4.4) $u \notin P$	95
4.6. Soluciones del problema (4.4) $u_1 \in P, u_2 \notin P$	96
5.1. Solución de (5.1) cercana al punto de bifurcación $(\sigma_2, +\infty)$	108
5.2. Bifurcaciones cuando $\mathfrak{J}^+ = \mathfrak{J}^- > 0$	112
5.3. Diagrama de bifurcación para $g(s) = e^{-(s-0,15)^2}$	116
5.4. Límites $L_k^+ = L_k^-$ cuando $h(x) = x^2 - 1'1\pi$	119
5.5. Diagrama de bifurcación con $h(x) = x^2 - 1'1\pi$	119

5.6. Valores de $L_k^+ = L_k^-$ para $h(x) = \text{sen}(7x)$ 120

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G.A. Afrouzi y K.J. Brown, ON PRINCIPAL EIGENVALUES FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH INDEFINITE WEIGHT AND ROBIN BOUNDARY CONDITIONS, Proceedings of the American Mathematical Society, 127, 125-130. 1999.
- [2] H. Amann, ON THE EXISTENCE OF POSITIVE SOLUTIONS OF NONLINEAR ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS, Indiana University Mathematics Journal, 21, 125-146. 1971.
- [3] H. Amann, FIXED POINT EQUATIONS AND NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS IN ORDERED BANACH SPACES, SIAM Review 18, 620-709. 1976.
- [4] A. Ambrosetti y D. Arcoya, ON A QUASILINEAR PROBLEM AT STRONG RESONANCE, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 6, 255-264. 1995.
- [5] A. Ambrosetti, J. García Azorero e I. Peral, MULTIPLICITY RESULTS FOR SOME NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS, Journal of Functional Analysis, 137, 219-242. 1996.

- [6] A. Ambrosetti y P. Hess, POSITIVE SOLUTIONS OF ASYMPTOTICALLY LINEAR ELLIPTIC EIGENVALUE PROBLEMS, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 73, 411-422. 1980.
- [7] A. Ambrosetti y G. Prodi, A PRIMER OF NONLINEAR ANALYSIS. Cambridge University Press. 1993.
- [8] A. Anane, SIMPLICITÉ ET ISOLATION DE LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE DU P-LAPLACIEN AVEC POIDS, *C.R. Académie Science Paris*, 305, Série I, 725-728. 1987.
- [9] D. Arcoya y J. Carmona, QUASILINEAR ELLIPTIC PROBLEMS INTERACTING WITH ITS ASYMPTOTIC SPECTRUM. *Nonlinear Analysis*, 52, 1591-1616. 2003.
- [10] D. Arcoya, J. Carmona y B. Pellacci, BIFURCATION FOR SOME QUASILINEAR OPERATORS, *Proceedings of the Royal Society of Edinburg*, 131A, 733-765. 2001.
- [11] D. Arcoya y J.L. Gámez, BIFURCATION THEORY AND RELATED PROBLEMS: ANTI-MAXIMUM PRINCIPLE AND RESONANCE, *Communications in Partial Differential Equations*, 26 (9&10), 1879-1911. 2001.
- [12] D. Arcoya y L. Orsina, LANDESMAN-LAZER CONDITIONS AND QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, vol. 28, no. 10, 1623-1632. 1997.
- [13] M. Artola, SUR UNE CLASSE DE PROBLÈMES PARABOLIQUES QUASILINEAIRES. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana B*, 5, 51-70. 1986.
- [14] P. Bartolo, V. Benci y D. Fortunato, ABSTRACT CRITICAL POINT THEOREMS AND APPLICATIONS TO SOME NONLINEAR PROBLEMS WITH "STRONG" RESONANCE AT INFINITY, *Nonlinear Analysis, Theory and Applications*, vol. 7, no. 9, 981-1012. 1983.

- [15] L. Boccardo, P. Drábek, D. Giachetti y M. Kučera, GENERALIZATION OF FREDHOLM ALTERNATIVE FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL OPERATOR, *Nonlinear Analysis*, 10, 1083-1103. 1986.
- [16] L. Boccardo, P. Drábek y M. Kučera, LANDESMAN-LAZER CONDITIONS FOR STRONGLY NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 30, no. 3, 411-427. 1989.
- [17] H. Brézis, ANÁLISIS FUNCIONAL. Alianza Universidad Textos. 1984.
- [18] J. Carmona, TEOREMAS DE EXISTENCIA PARA OPERADORES ELÍPTICOS NO LINEALES. Tesis Doctoral. Almería, 2001.
- [19] J. Carmona y A. Suárez, AN EIGENVALUE PROBLEM FOR NON-BOUNDED QUASI-LINEAR OPERATOR, *Proceedings of the Edimburgh Mathematical Society*, 47 (2), 353-363. 2004.
- [20] A. Cañada y D. Ruiz, PERIODIC PERTURBATIONS OF A CLASS OF RESONANT PROBLEMS, *Calculus of Variations*, 23, 281-300. 2005.
- [21] I. Chavel, EIGENVALUES IN RIEMANNIAN GEOMETRY, Academic Press, New York. 1984.
- [22] J. Chabrowski, QUASILINEAR ELLIPTICITY AND THE DIRICHLET PROBLEM, *Israel Journal of Mathematics*, 63, 353-379. 1988.
- [23] S. Cingolani y J.L. Gámez, POSITIVE SOLUTIONS OF A SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATION ON \mathbb{R}^N WITH INDEFINITE NONLINEARITY, *Advances in Differential Equations*, vol. 1, no. 5, 773-791. 1996.
- [24] E. Colorado e I. Peral, EIGENVALUES AND BIFURCATION FOR ELLIPTIC EQUATIONS WITH MIXED DIRICHLET-NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS RELATED TO CAFFARELLI-KOHN-NIRENBERG INEQUALITIES, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, vol. 23, no. 2, 239-273. 2004.

- [25] E.N. Dancer, ON THE STRUCTURE OF SOLUTIONS OF NON-LINEAR EIGENVALUE PROBLEMS, *Indiana University Mathematics Journal*, 23, 1067-1076. 1974.
- [26] E.N. Dancer, ON THE USE OF ASYMPTOTICS IN NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 131, 167-185. 1982.
- [27] E.N. Dancer, BIFURCATION FROM SIMPLE EIGENVALUES AND EIGENVALUES OF GEOMETRIC MULTIPLICITY ONE, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 34, 533-538. 2002.
- [28] D.G. De Figueiredo, POSITIVE SOLUTIONS OF SEMILINEAR ELLIPTIC PROBLEMS, *Lecture notes in Mathematics*, no. 957. Springer-Verlag. 1982.
- [29] D.G. De Figueiredo, THE EKELAND VARIATIONAL PRINCIPLE WITH APPLICATIONS AND DETOURS. Springer-Verlag. 1989.
- [30] E. de Giorgi, SULLA DIFFERENZIABILITÀ E L'ANALITICITÀ DEGLI ESTREMI DEGLI INTEGRALI MULTIPLI REGOLARI. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 25-43. 1957.
- [31] M.A. Del Pino, M. Elgueta y R.F. Manásevich, A HOMOTOPIC DEFORMATION ALONG p OF A LERAY-SCHAUDER DEGREE RESULT AND EXISTENCE FOR $(|u'|^{p-2}u')' + f(t, u) = 0$, $u(0) = u(T) = 0$, *Journal of Differential Equations*, 80, 1-13. 1989.
- [32] M.A. Del Pino y R.F. Manásevich, GLOBAL BIFURCATION FROM THE EIGENVALUES OF THE P-LAPLACIAN, *Journal of Differential Equations*, 92, 226-251. 1991.
- [33] M.A. Del Pino y R.F. Manásevich, MULTIPLE SOLUTIONS FOR THE P-LAPLACIAN UNDER GLOBAL NONRESONANCE, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 112, 131-138. 1991.

- [34] C.L. Dolph, NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE HAMMERSTEIN TYPE, Transactions of the American Mathematical Society, 66, 289-307. 1949.
- [35] P. Drábek, SOLVABILITY AND BIFURCATIONS OF NONLINEAR EQUATIONS, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 264. Longman Scientific & Technical. 1992.
- [36] P. Drábek, P. Girg y P. Takác, BOUNDED PERTURBATIONS OF HOMOGENEOUS QUASILINEAR OPERATORS USING BIFURCATIONS FROM INFINITY, Journal of Differential Equations, 204, 265-291. 2004.
- [37] P. Drábek y S.B. Robinson, RESONANCE PROBLEMS FOR THE P-LAPLACIAN, Journal of Functional Analysis, 169, 189-200. 1999.
- [38] P. Drábek y S.B. Robinson, RESONANCE PROBLEMS FOR THE ONE-DIMENSIONAL P-LAPLACIAN, Proceedings of the American Mathematical Society, 128, 755-765. 1999.
- [39] J.L. Gámez, SUB- AND SUPER-SOLUTIONS IN BIFURCATION PROBLEMS, Nonlinear Analysis, 28, 625-632. 1997.
- [40] J.L. Gámez, LOCAL BIFURCATION FOR ELLIPTIC PROBLEMS; NEUMANN VERSUS DIRICHLET BOUNDARY CONDITIONS, The First 60 years of Nonlinear Analysis of Jean Mawhin. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.. Singapore. 2004.
- [41] J.L. Gámez y J.F. Ruiz, BIFURCATION OF SOLUTIONS OF ELLIPTIC PROBLEMS: LOCAL AND GLOBAL BEHAVIOR, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 23, 203-212. 2004.
- [42] J.L. Gámez y J.F. Ruiz-Hidalgo, SHARP ESTIMATES FOR THE AMBROSETTI-HESS PROBLEM AND CONSEQUENCES, Journal of European Mathematical Society, 8, 287-294. 2006.

- [43] J.L.Gómez y J.F. Ruiz-Hidalgo, A DETAILED ANALYSIS ON LOCAL BIFURCATION FROM INFINITY FOR NON-LINEAR ELLIPTIC PROBLEMS. Sometido a publicación.
- [44] J.L.Gómez y J.F. Ruiz-Hidalgo, BIFURCATION FROM INFINITY AND RESONANCE RESULTS AT HIGH EIGENVALUES IN DIMENSION ONE, en preparación.
- [45] D. Gilbarg y N.S. Trudinger, ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF SECOND ORDER, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [46] P. Habets, R. Manásevich y F. Zanolin, A NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH POTENTIAL OSCILLATING AROUND THE FIRST EIGENVALUE, *Journal of Differential Equations*, 117, 428-445. 1995.
- [47] P. Habets, E. Serra y M. Tarallo, MULTIPLICITY RESULTS FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH POTENTIALS OSCILLATING AROUND RESONANCE, *Journal of Differential Equations*, 138, 133-156. 1997.
- [48] P. Hess, ON A THEOREM BY LANDESMAN AND LAZER, *Indiana University Mathematics Journal*, 321, 731-734. 1974.
- [49] P. Hess y T. Kato, ON SOME LINEAR AND NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS WITH AN INDEFINITE WEIGHT FUNCTION, *Communications in Partial Differential Equations*, vol. 5, no. 10, 999-1030. 1980.
- [50] M.A. Krasnoselskii, TOPOLOGICAL METHODS IN THE THEORY OF NON-LINEAR INTEGRAL EQUATIONS, Pergamon, Oxford. 1965.
- [51] J.R. Kuttler y V. Sigillito, EIGENVALUES OF THE LAPLACIAN IN TWO DIMENSIONS, *SIAM Review*, vol. 26, no. 2, 163-193. 1984.
- [52] O.A. Ladyzhenskaya y N.N. Ural'tseva, LINEAR AND QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS, Academic Press. 1968.

- [53] E.M. Landesman y A.C. Lazer, NONLINEAR PERTURBATIONS OF LINEAR ELLIPTIC PROBLEMS AT RESONANCE, *Journal of Mathematics and Mechanics*, 19, 609-623. 1970.
- [54] J. Leray y J.L. Lions, QUELQUES RÉSULTATS DE VIŠIK SUR LES PRÒBLEMES ELLIPTIQUES NON LINÉAIRES PAR LES MÉTHODES DE MINTY-BROWDER. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 93, 97-107. 1965.
- [55] P. Lindqvist, ON THE EQUATION $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 109, 157-164. 1990.
- [56] J. López-Gómez, SPECTRAL THEORY AND NONLINEAR FUNCTIONAL ANALYSIS, *Research Notes in Mathematics Series*, 426. Chapman and Hall/CRC. 2001.
- [57] J. Mawhin y K. Schmitt, LANDESMAN-LAZER TYPE PROBLEMS AT AN EIGENVALUE OF ODD MULTIPLICITY, *Results in Mathematics*, 14, 138-146. 1988.
- [58] P.H. Rabinowitz, SOME GLOBAL RESULTS FOR NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS. *Journal of Functional Analysis*, 7, 487-513. 1971.
- [59] P.H. Rabinowitz, ON BIFURCATION FROM INFINITY. *Journal of Differential Equations*, 14, 462-475. 1973.
- [60] D.H. Sattinger, MONOTONE METHODS IN NONLINEAR ELLIPTIC AND PARABOLIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS, *Indiana University Mathematics Journal*, 21, 979-1000. 1972.
- [61] R. Schaaf y K. Schmitt, A CLASS OF NONLINEAR STURM-LIOUVILLE PROBLEMS WITH INFINITELY MANY SOLUTIONS. *Transactions of the American Mathematical Society*, vol 306, no. 2, 853-859. 1988.

- [62] R. Schaaf y K. Schmitt, PERIODIC PERTURBATION OF LINEAR PROBLEMS AT RESONANCE ON CONVEX DOMAINS, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 20, 1119-1131. 1990.
- [63] R. Schaaf y K. Schmitt, ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF POSITIVE BRANCHES OF ELLIPTIC PROBLEMS WITH LINEAR PART AT RESONANCE, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 43, 645-676. 1992.
- [64] J. Smoller, SHOCK WAVES AND REACTION-DIFFUSION EQUATIONS, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 258, Springer-Verlag. 1994.
- [65] Solimini, ON THE SOLVABILITY OF SOME ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE LINEAR PART AT RESONANCE, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 117, 138-152. 1986.
- [66] G. Stampacchia, LE PROBLÈME DE DIRICHLET POUR LES ÉQUATIONS ELLIPTIQUES DU SECOND ORDRE Á COEFFICIENTS DISCONTINUS. *Annales de L'Institut Fourier*, 17, 189-259. 1965.
- [67] P. Tolksdorf, ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR QUASILINEAR EQUATIONS IN DOMAINS WITH CONICAL BOUNDARY POINTS, *Communications in Partial Differential Equations*, 8, 773-817. 1983.
- [68] J.L. Vázquez, A STRONG MAXIMUM PRINCIPLE FOR SOME QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS, *Applied Mathematics & optimization*, 12, 191-202. 1984.
- [69] J. R. Ward, A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A PERIODIC NONLINEARITY, *Nonlinear Analysis*, 10, no. 2, 207-213. 1986.