

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

Máster Universitario de Profesorado de Educación
Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación
Profesional y Enseñanza de Idiomas
Especialidad en Matemáticas

CURSO 2010/2011
Universidad de Granada

Autora: **Rosa M^a Gómez Torrente**

Supervisora: María Victoria Velasco
Tutor TFM: Pablo Flores Martínez

INDICE

0	INTRODUCCIÓN:	4
0.1	INTRODUCCIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	5
0.2	FUNDAMENTACIÓN	7
0.2.1	FUNDAMENTACIÓN TEÓRICO-DIDÁCTICA	7
0.2.2	FUNDAMENTACIÓN LEGAL	8
0.2.3	FUNDAMENTACIÓN HISTÓRICA	8
1	ANÁLISIS DEL CONTENIDO	12
1.1	ESTRUCTURA CONCEPTUAL. CONCEPTOS	12
1.1.1	HECHOS	13
1.1.2	CONCEPTOS	14
1.1.3	ESTRUCTURAS	14
1.2	ESTRUCTURA CONCEPTUAL. PROCEDIMIENTOS	15
1.2.1	DESTREZAS	15
1.2.2	RAZONAMIENTOS	15
1.2.3	ESTRATEGIAS	16
1.3	MAPA CONCEPTUAL	17
1.4	SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN	18
1.4.1	REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA	18
1.4.2	REPRESENTACIÓN VERBAL	18
1.4.3	REPRESENTACIÓN CON TIC	18
1.4.4	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	19
1.4.5	REPRESENTACIÓN NUMÉRICA	19
1.4.6	REPRESENTACIÓN MANIPULATIVA	19
1.4.7	REPRESENTACIÓN POR TABLAS	19
1.5	FENOMENOLOGÍA	20
2	ANÁLISIS COGNITIVO	23
2.1	EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE	23
2.1.1	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	23
2.1.2	COMPETENCIAS	24
2.2	LIMITACIONES DE APRENDIZAJE.	26
2.3	OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE.	28
3	DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA	29
3.1	MATERIALES Y RECURSOS	29
3.2	ORGANIZACIÓN DE LA CLASE	29
3.3	SECUENCIA DEL TRABAJO	31
3.3.1	Sesión 1	31
3.3.2	Sesión 2	32
3.3.3	Sesión 3	33
3.3.4	Sesión 4	34
3.3.5	Sesión 5	35
3.3.6	Sesión 6	37
3.3.7	Sesión 7	39
3.3.8	Sesión 8	41

3.3.9	Sesión 9	43
4	<i>EVALUCIÓN DE APRENDIZAJES DE LA UNIDAD DIDÁCTICA</i>	44
5	<i>ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD</i>	46
6	<i>TEMAS TRANSVERSALES. EDUCACIÓN EN VALORES.</i>	50
7	<i>CONCLUSIONES</i>	53
8	<i>BIBLIOGRAFIA</i>	56
9	<i>ANEXO I: PROPUESTA DE PRUEBAS ESCRITAS: PREVIA Y FINAL</i>	58

..Yo vivo de preguntar, saber no puede ser lujo... Silvio Rodríguez

0 INTRODUCCIÓN:

El presente Trabajo Fin de Máster (TFM) supone la fase final dentro de aquellas que componen el Master Universitario de Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. e Idiomas. Se realiza una vez superado el periodo de formación teórica, y realizadas las prácticas docentes.

Este Master difiere en su naturaleza con respecto del resto de masters de investigación. Está orientado al desarrollo académico y profesional de futuros profesores, con todo lo que ello conlleva, pues un profesor de secundaria no solo debe transmitir conocimientos sino que además forma parte activa en el crecimiento personal, social y ético del alumnado.

El TFM está orientado a la evaluación de las competencias profesionales, generales y específicas asociadas a la especialidad, en este caso Matemáticas. Para ello, he escogido como trabajo a desarrollar una Unidad Didáctica, tomando como tema la Introducción al Álgebra de Ecuaciones, que coincide con el tema del que impartí clases en las prácticas docentes.

Se inicia así una labor que mantendrá su continuidad a lo largo de la vida laboral del futuro profesor/a, pues de ahí arranca la metodología a seguir en la enseñanza, de la elaboración concienzuda de Unidades Didácticas para el aprendizaje de cada tema.



Así pues, mientras que la titulación con que accedemos a cursar el master garantiza los conocimientos necesarios en la materia, en este caso Matemáticas, el propio master garantiza los conocimientos y habilidades necesarias para la enseñanza de dicha materia.

Comprender las cosas que nos rodean es la mejor preparación para comprender las cosas que hay más allá. Hipatia (aprox. 370-aprox. 415)

0.1 INTRODUCCIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

En los procesos de enseñanza se suelen dar situaciones de improvisación frente a dudas o desconocimiento del alumnado. Es por ello que se necesita de una planificación previa, que permita reducir el nivel de incertidumbre y anticipar lo que sucederá en el desarrollo de las sesiones; lo que otorga rigurosidad y coherencia a la tarea pedagógica.

El tema que se aborda en esta Unidad Didáctica es la resolución de ecuaciones de primer grado, y una iniciación a las ecuaciones de segundo grado y a la resolución de sistemas de ecuaciones.

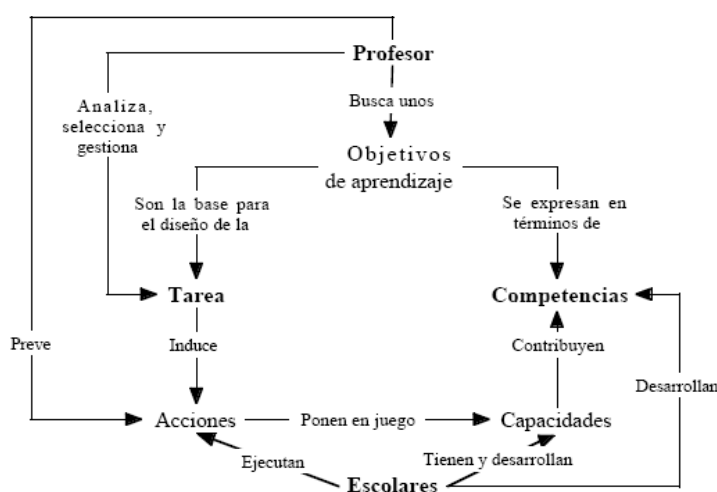
Es un tema de iniciación, pues se da en 2º de E.S.O.

La estructura de la Unidad Didáctica se basa en la teoría del Análisis Didáctico, entendiéndolo como tal el concepto que de este término que dan Gómez (2007) y Lupiáñez (2009), que consiste en:

1. Análisis del Contenido (Estructura Conceptual, Desarrollo Histórico, Sistemas de Representación y Fenomenología).
2. Análisis Cognitivo (Objetivos, Errores y Dificultades, Oportunidades de Aprendizaje).
3. Análisis de Instrucción (Diseño y Secuenciación de Tareas, Materiales y Recursos).
4. Análisis de la Evaluación (Instrumentos y Criterios de Evaluación).

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe como el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. Se puede articular en cuatro fases: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación (Gómez, 2007).

La relación entre competencias, capacidades y tareas se describe en la siguiente figura:



Centrándonos en el tema de la presente Unidad Didáctica, para llevar a cabo el planteamiento y la resolución de la ecuación de primer grado se necesitan unos conceptos previos como son el concepto de identidad e igualdad entre números.

Los alumnos conocen también el significado de incógnita y dominan algunas operaciones con monomios, tales como la suma, la resta, la multiplicación y la división. Algunas de estas operaciones requieren utilizar el mínimo común múltiplo, tanto de números enteros como de polinomios.

Nótese que todos estos conocimientos previos también son aplicables a ecuaciones de mayor grado y tienen igual importancia.

La finalidad principal de esta unidad didáctica es preparar al alumnado para afrontar problemas que pueden resolverse mediante la resolución de ecuaciones, encaminándolos a seguir los esquemas de razonamiento que permiten la traducción de los problemas enunciados en lenguaje ordinario al lenguaje algebraico.

Al comienzo de la unidad se tratan los conceptos referidos a los polinomios y se enseña cómo calcular el valor numérico de un polinomio.

Las operaciones con polinomios y la deducción de las igualdades notables aparecen a continuación. Los conceptos de identidad, ecuación, grado y solución de una ecuación son estudiados más tarde, junto con la noción de ecuaciones equivalentes y los procedimientos de la suma y el producto.

Seguidamente se estudian las técnicas de resolución de ecuaciones con paréntesis y denominadores y se aplica la resolución de problemas de la vida real mediante ecuaciones de primer grado.

En la parte final de la unidad se puede efectuar una introducción a la resolución de ecuaciones de segundo grado y al concepto de sistemas de ecuaciones lineales, con sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

El tema de ecuaciones algebraicas abarca numerosas cuestiones. En esta Unidad Didáctica nos centramos en una primera parte, para luego introducir lo que sería la continuación del álgebra.

0.2 FUNDAMENTACIÓN

0.2.1 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICO-DIDÁCTICA

Dentro de la programación didáctica de 2º E.S.O., las Ecuaciones y Sistemas de ecuaciones ocupan la parte final del *Bloque I 'Aritmética y Álgebra'*. Estos temas se imparten en el segundo trimestre del curso.

El planteamiento de una ecuación, así como su resolución, son conceptos básicos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, sobre todo en el ámbito algebraico. Las ecuaciones de primer grado permiten resolver problemas cotidianos que, en la mayoría de ocasiones, se resuelven por inercia.

La Unidad Didáctica está enfocada para 2º de ESO en el que los alumnos tienen 13-14 años.

Esta Unidad Didáctica se ocupa de las Expresiones Algebraicas, las Ecuaciones. Se hace también una introducción a los sistemas de ecuaciones, que es el tema siguiente, sin profundizar en ello.

Los contenidos de la Unidad Didáctica son los siguientes:

Ecuaciones

- Identificación de ecuaciones de primer grado.
- Elementos: términos, miembros, incógnitas y soluciones.
- Ecuaciones inmediatas. Transposición de términos en una ecuación.
- Ecuaciones con expresiones polinómicas de primer grado.
- Ecuaciones con denominadores. Eliminación de denominadores.
- Resolución de ecuaciones de primer grado.
- Ecuaciones de segundo grado incompletas.

Problemas algebraicos

- Traducción de enunciados a lenguaje algebraico.
- Resolución de problemas con ayuda del álgebra.
- Asignación de la incógnita.
- Codificación de los elementos del problema en función de la incógnita elegida.
- Construcción de la ecuación.
- Resolución. Interpretación y crítica de la solución.
- Valoración de las ecuaciones como herramienta para la resolución de problemas.
- Interés por la presentación clara y ordenada de planteamientos, procesos y resultados.
- Tenacidad y constancia de cara a la resolución de problemas.
- Interés por la investigación de distintos caminos de resolución de un mismo problema.

- Actitud crítica en el análisis de soluciones y resultados.

Para su impartición se requiere un total de 9 sesiones (3 semanas), dedicando la primera a realizar una prueba de nivel breve y una introducción, y la última a la realización de una prueba objetiva. En el resto de sesiones se mezclarán alternativamente teoría y práctica, todo esto según la secuenciación que más adelante se incluye.

0.2.2 FUNDAMENTACIÓN LEGAL

Para la realización de esta Unidad Didáctica se ha tenido en cuenta la legislación vigente. Como ya se ha dicho, está dirigida a alumnos de 2º curso de la E.S.O.

La organización del curso está compuesta por 15 Unidades Didácticas. Esta corresponde al número 6, en el segundo trimestre, correspondiente al núcleo temático 4 (Orden 10 de agosto 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la ESO en Andalucía). Además se corresponde con los bloques 2 (Números) y 3 (Álgebra) del Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. Enseñanzas mínimas en la Educación Secundaria Obligatoria.

Así pues, resumiendo, nos basamos en primer lugar en la Ley Orgánica 2/2006, de Educación (LOE). A esta ley se le suman las disposiciones en cuanto a contenido que refleja el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, (rectificado por el Real Decreto 1146/2011, de 29 de julio), y lo dispuesto según la Orden de 10 de Agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. Finalmente, a nivel autonómico, nos encontramos con la Ley 17/2007, de 10 de diciembre de 2007, de Educación en Andalucía (LEA).

0.2.3 FUNDAMENTACIÓN HISTÓRICA

La historia del álgebra comienza en el antiguo Egipto y Babilonia, con la resolución de ecuaciones lineales ($ax = b$) y cuadráticas ($ax^2 + bx = c$), así como ecuaciones indeterminadas como $x^2 + y^2 = z^2$, con varias incógnitas. Los antiguos babilonios (el mayor número de documentos corresponde al periodo 600 a. de C. a 300 d. de C.) resolvían cualquier ecuación cuadrática empleando esencialmente los mismos métodos que hoy se imparten. Casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizás por considerarlas demasiado elementales, y trabajaron más los sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado. Los egipcios nos dejaron en sus papiros (sobre todo en el de Rhind -1.650 a. de C- y el de Moscú -1.850 a. de C-) multitud de problemas

matemáticos resueltos. La mayoría de ellos son de tipo aritmético y respondían a situaciones concretas de la vida diaria; sin embargo, encontramos algunos que podemos clasificar como algebraicos, pues no se refieren a ningún objeto concreto. En éstos, de una forma retórica, obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones.

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a Diophante (250 d. de C.), no se dedicaron mucho al álgebra, pues su preocupación era mayor por la geometría. Sobre la vida de Diophante aparece en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal y dice:

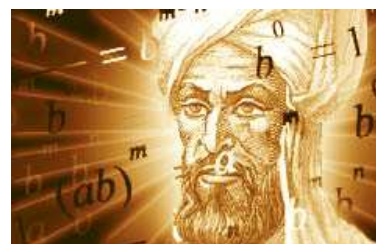
" Transeúnte, ésta es la tumba de Diophante: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años.

De todo esto, deduce su edad. "



Los matemáticos alejandrinos Herón y Diophante continuaron con la tradición de Egipto y Babilonia, aunque el libro La aritmética de Diophante es de bastante más nivel y presenta muchas soluciones sorprendentes para ecuaciones indeterminadas difíciles. Esta antigua sabiduría sobre resolución de ecuaciones encontró, a su vez, acogida en el mundo islámico, en donde se la llamó "ciencia de reducción y equilibrio". (La palabra árabe al-jabr que significa 'reducción', es el origen de la palabra álgebra).

En el siglo IX, el matemático al-Jwarizmi escribió uno de los primeros libros árabes de álgebra, una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas.



A finales del siglo IX, el matemático egipcio Abu Kamil enunció y demostró las leyes fundamentales e identidades del álgebra, y resolvió problemas tan complicados como encontrar las x, y, z que cumplen $x + y + z = 10, x^2 + y^2 = z^2,$ y $xz = y^2$.

En las civilizaciones antiguas se escribían las expresiones algebraicas utilizando abreviaturas sólo ocasionalmente; sin embargo, en la edad media, los matemáticos árabes fueron capaces de describir cualquier potencia de la incógnita x , y desarrollaron el álgebra fundamental de los

polinomios, aunque sin usar los símbolos modernos. Esta álgebra incluía multiplicar, dividir y extraer raíces cuadradas de polinomios, así como el conocimiento del teorema del binomio. El matemático, poeta y astrónomo persa Omar Khayyam mostró cómo expresar las raíces de ecuaciones cúbicas utilizando los segmentos obtenidos por intersección de secciones cónicas, aunque no fue capaz de encontrar una fórmula para las raíces. La traducción al latín del Álgebra de al-Jwarizmi fue publicada en el siglo XII. A principios del siglo XIII, el matemático italiano Leonardo Fibonacci consiguió encontrar una aproximación cercana a la solución de la ecuación cúbica $x^3 + 2x^2 + cx = d$. Fibonacci había viajado a países árabes, por lo que con seguridad utilizó el método arábigo de aproximaciones sucesivas.

A principios del siglo XVI los matemáticos italianos Scipione del Ferro, Tartaglia y Gerolamo Cardano resolvieron la ecuación cúbica general en función de las constantes que aparecen en la ecuación. Ludovico Ferrari, alumno de Cardano, pronto encontró la solución exacta para la ecuación de cuarto grado y, como consecuencia, ciertos matemáticos de los siglos posteriores intentaron encontrar la fórmula de las raíces de las ecuaciones de quinto grado y superior. Sin embargo, a principios del siglo XIX el matemático noruego Niels Abel y el francés Évariste Galois demostraron la inexistencia de dicha fórmula.

Un avance importante en el álgebra fue la introducción, en el siglo XVI, de símbolos para las incógnitas y para las operaciones y potencias algebraicas. Debido a este avance, el Libro III de la Geometría (1637), escrito por el matemático y filósofo francés René Descartes se parece bastante a un texto moderno de álgebra. Sin embargo, la contribución más importante de Descartes a las matemáticas fue el descubrimiento de la geometría analítica, que reduce la resolución de problemas geométricos a la resolución de problemas algebraicos. Su libro de geometría contiene también los fundamentos de un curso de teoría de ecuaciones, incluyendo lo que el propio Descartes llamó la regla de los signos para contar el número de raíces verdaderas (positivas) y falsas (negativas) de una ecuación. Durante el siglo XVIII se continuó trabajando en la teoría de ecuaciones y en 1799 el matemático alemán Carl Friedrich Gauss publicó la demostración de que toda ecuación polinómica tiene al menos una raíz en el plano complejo.

En los tiempos de Gauss, el álgebra había entrado en su etapa moderna. El foco de atención se trasladó de las ecuaciones polinómicas al estudio de la estructura de sistemas matemáticos abstractos, cuyos axiomas estaban basados en el comportamiento de objetos matemáticos, como los números complejos, que los matemáticos habían encontrado al estudiar las ecuaciones

polinómicas. Dos ejemplos de dichos sistemas son los grupos y las cuaternas, que comparten algunas de las propiedades de los sistemas numéricos, aunque también difieren de ellos de manera sustancial. Los grupos comenzaron como sistemas de permutaciones y combinaciones (véase Combinatoria) de las raíces de polinomios, pero evolucionaron para llegar a ser uno de los más importantes conceptos unificadores de las matemáticas en el siglo XIX. Los matemáticos franceses Galois y Augustin Cauchy, el británico Arthur Cayley y los noruegos Niels Abel y Sophus Lie hicieron importantes contribuciones a su estudio. Las cuaternas fueron descubiertas por el matemático y astrónomo irlandés William Rowan Hamilton, quien desarrolló la aritmética de los números complejos para las cuaternas; mientras que los números complejos son de la forma $a + bi$, las cuaternas son de la forma $a + bi + cj + dk$.

Después del descubrimiento de Hamilton, el matemático alemán Hermann Grassmann empezó a investigar los vectores. A pesar de su carácter abstracto, el físico estadounidense J. W. Gibbs encontró en el álgebra vectorial un sistema de gran utilidad para los físicos, del mismo modo que Hamilton había hecho con las cuaternas. La amplia influencia de este enfoque abstracto llevó a George Boole a escribir 'Investigación sobre las leyes del pensamiento' (1854), un tratamiento algebraico de la lógica básica. Desde entonces, el álgebra moderna —también llamada álgebra abstracta— ha seguido evolucionando; se han obtenido resultados importantes y se le han encontrado aplicaciones en todas las ramas de las matemáticas y en muchas otras ciencias

1 ANÁLISIS DEL CONTENIDO

En este apartado se realiza una descripción estructurada de los diferentes significados de los conceptos y procedimientos del tema que nos ocupa, desde la perspectiva de su estructura conceptual, sus sistemas de representación, y su análisis fenomenológico.

Se tendrá en cuenta lo establecido en la ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. Referente al tema de Ecuaciones a nivel de 2º E.S.O., indica el aprendizaje a alcanzar, en el *Bloque 3. Álgebra*.

Utilización de lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.

Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades en tablas y en series numéricas.

Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.

Operaciones elementales con expresiones algebraicas sencillas, transformación y equivalencia.

Suma, resta y producto de polinomios en casos sencillos.

Propiedades de las igualdades. Identidades. Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación.

Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes.

Comprobación e interpretación de la solución.

Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.

1.1 ESTRUCTURA CONCEPTUAL. CONCEPTOS

La estructura conceptual es el primer organizador a desarrollar en el tema objeto de la presente Unidad Didáctica. Cabe diferenciar dos campos de conocimiento matemático: el conceptual y el procedimental; con tres niveles de complejidad: básico, medio y superior. Queda así un esquema organizativo de la información que se manejará, de la siguiente forma:

		NIVEL		
		BÁSICO	MEDIO	SUPERIOR
CAMPO	CONCEPTUAL	Hechos	Conceptos	Estructuras Conceptuales
	PROCEDIMENTAL	Destrezas	Razonamientos	Estrategias

Se estudiarán cuales son los conceptos característicos del tema, qué procedimientos se pueden establecer entre estos conceptos y cómo se relacionan conceptos y procedimientos entre sí, tanto individualmente como de manera combinada.

1.1.1 HECHOS

Consisten en las unidades de información.

Términos

Ecuación, Igualdad, Identidad, Inecuación, Miembro, Dato, Incógnita, Número, Coeficiente, Constante, Variable, Solución, Grado, Polinomio, Monomio, Sistema, Transposición, Simplificación, Despeje.

Notaciones

$$2x - 1 = 3x - 5$$

$$x = 6$$

$$a x + b = 0$$

$$x = -b / a$$

$$a < b ; a > b$$

$$xm + xn = x(m + n)$$

$$P(x) = 2x^2 + 3x + 2$$

$$5x^3$$

$$x + 2y = 5$$

$$3x - y = 1$$

Convenios

- ✓ Todo problema matemático puede expresarse en forma de una o más ecuaciones.
- ✓ Una ecuación puede tener una, ninguna o varias soluciones.
- ✓ La incógnita en una ecuación de primer grado se designa por 'x'; en una sistema de ecuaciones serían 'x' e 'y'.
- ✓ Los coeficientes se designan de forma general con las primeras letras del alfabeto: a, b, c, o bien de forma concreta, con números.
- ✓ Se denomina grado de una ecuación polinómica al mayor exponente al que se encuentran elevadas las incógnitas.
- ✓ Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución.
- ✓ Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

Resultados

- ✓ Las ecuaciones polinómicas de primer grado se resuelven en tres pasos: transposición, simplificación y despeje.
 - Transposición: se agrupan todos los monomios que incluyen la incógnita x en uno de los miembros de la ecuación, normalmente en el izquierdo; y todos los términos independientes (los que no tienen x) en el otro miembro. Si sumamos o restamos un mismo monomio en los dos miembros, la igualdad no varía.
 - Simplificación: convertir la ecuación en otra equivalente más simple y corta.
 - Despeje: aislar la incógnita en un miembro de la igualdad. Si multiplicamos o dividimos ambos miembros por un mismo número, la igualdad no varía.
- ✓ Las ecuaciones polinómicas de segundo grado tienen la forma canónica $ax^2 + bx + c = 0$
- ✓ Las ecuaciones de segundo grado tienen dos soluciones, que en algunos casos se reducen a una (coinciden).
- ✓ Las ecuaciones de segundo grado, en general, se resuelven con la fórmula:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- ✓ Los sistemas de ecuaciones de 2 ecuaciones con 2 incógnitas se resuelven por sustitución, igualación o reducción.

1.1.2 CONCEPTOS

Trata sobre la organización de hechos.

- ✓ Definición de monomio y polinomio.
- ✓ Definición de ecuación.
- ✓ Elementos de una ecuación.
- ✓ Tipos de ecuaciones. Grado.
- ✓ Formas de resolver una ecuación.
- ✓ Definición de sistema de ecuaciones.
- ✓ Formas de resolver un sistema de ecuaciones.
- ✓ Representación simbólica, verbal y algebraica de una ecuación

1.1.3 ESTRUCTURAS

Trata sobre la organización de conceptos.

- ✓ Deducción de una ecuación.

- ✓ Sistema de ecuaciones compatible determinados.
- ✓ Sistema de ecuaciones compatible indeterminado.
- ✓ Sistema de ecuaciones incompatible.

1.2 ESTRUCTURA CONCEPTUAL. PROCEDIMIENTOS

Este segundo campo de conocimiento se centra en la forma de proceder ante el planteamiento de actividades matemáticas.

Como ya se ha indicado en el cuadro resumen introductorio, en función del nivel de complejidad encontramos destrezas, razonamientos y estrategias.

1.2.1 DESTREZAS

Las destrezas se encargan del procesamiento de los hechos.

- ✓ Saber operar con polinomios
- ✓ Plantear ecuaciones que resuelvan una cuestión
- ✓ Distinguir entre identidades y ecuaciones.
- ✓ Reconocer los elementos y el grado de una ecuación.
- ✓ Comprobar si un número es o no solución de una ecuación.
- ✓ Obtener ecuaciones equivalentes a una dada.
- ✓ Resolver ecuaciones de primer grado.
- ✓ Tomar conciencia de la relación existente entre los problemas de la vida cotidiana y las ecuaciones.
- ✓ Resolver problemas con ayuda de las ecuaciones de primer grado.
- ✓ Identificar y resolver ecuaciones de segundo grado sencillas (incompletas).
- ✓ Plantear y resolver sistemas de ecuaciones sencillos.

Estos contenidos procedimentales están escritos con un orden de secuenciación que sería recomendable seguir para un correcto aprendizaje del alumno.

1.2.2 RAZONAMIENTOS

Los razonamientos se encargan del procesamiento de los conceptos.

Deductivo: Consiste en razonar basándonos en demostraciones, lo que nos encamina a una conclusión final verdadera.



Lógica: Otra cosa en la que los pingüinos no son nada buenos

- ✓ Comprobar que los distintos métodos de resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones son válidos

Inductivo: Consiste en obtener conclusiones generales a partir de premisas que contienen datos particulares.

- ✓ Aplicar la lógica para plantear un problema mediante ecuaciones o sistemas de ecuaciones.

Analógico: Consiste en obtener una conclusión a partir de premisas en las que se establece una comparación o analogía entre elementos o conjuntos de elementos distintos.

- ✓ Plantear ecuaciones o sistemas de ecuaciones por semejanza con otros planteamientos conocidos.

Figurativo: es la capacidad para razonar con elementos gráficos no-verbales (gráficas, tablas, ...), de realizar razonamientos lógico-deductivos, con predominio de las funciones intelectuales de síntesis deductiva e inducción analógica.

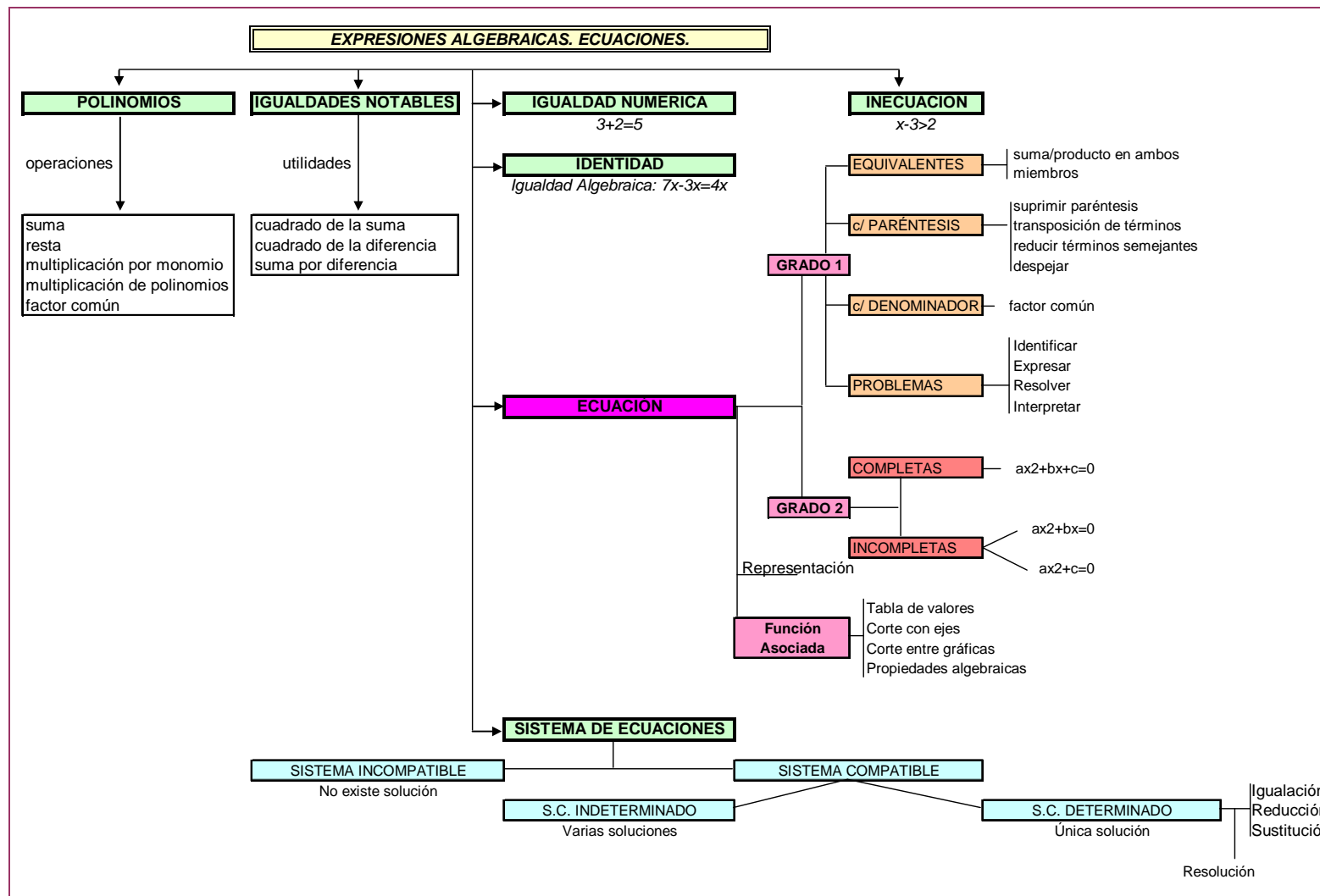
- ✓ Representar esquemáticamente, con dibujos y mediciones de los elementos de dichos dibujos, una ecuación que resuelva un planteamiento.

1.2.3 ESTRATEGIAS

Las estrategias se encargan del procesamiento de las estructuras.

- ✓ Reconocimiento del tipo de ecuación que se plantea.
- ✓ Interpretación gráfica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.
- ✓ Transcripción a ecuaciones y sistemas de ecuaciones de situaciones cotidianas.
- ✓ Resolución de sistemas empleando los métodos de reducción, igualación y sustitución.
- ✓ Interpretación de soluciones.

1.3 MAPA CONCEPTUAL



1.4 SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Los sistemas de representación nos sirven para expresar de diferentes formas los conceptos que se estudian y las relaciones entre ellos y con otros conceptos.

Un mismo concepto matemático admite diversas representaciones. Cada sistema de representación pone de manifiesto y destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa; también permite entender y trabajar algunas de sus propiedades.

Así pues, los sistemas de representación contribuyen a la comprensión de los conceptos matemáticos y constituyen un importante objeto de estudio en Educación Matemática.

1.4.1 REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

Consiste en la expresión a través del lenguaje algebraico puro. Por ejemplo:

$$-7x^3 + \frac{2}{3}x^2 - 5x + 3 = 0$$

1.4.2 REPRESENTACIÓN VERBAL

Consiste en la utilización del lenguaje para expresar un concepto o idea. Es la transcripción al lenguaje verbal de la expresión simbólica. Por ejemplo:

'Se trata de una ecuación de tercer grado', 'siete veces x al cubo más dos tercios de x cuadrado menos cinco x más tres es igual a cero'.



1.4.3 REPRESENTACIÓN CON TIC

Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC, TICs o bien NTIC para Nuevas Tecnologías de la Información y de la Comunicación o IT para «Information Technology») agrupan los elementos y las técnicas utilizadas en el tratamiento y la transmisión de las informaciones, principalmente de informática, internet y telecomunicaciones.

El uso de este sistema de representación requiere el manejo de diversos recursos por parte del alumnado en el desarrollo de una Unidad Didáctica. Así pues, podemos hablar del uso de la calculadora, plataformas de Internet, programas informáticos, etc.



1.4.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Mediante este sistema de representación, se identifica una ecuación con su representación gráfica sobre ejes cartesianos. Se requiere de una tabla de valores. Una vez representados, se pueden extraer diversas conclusiones, como puntos de corte con los ejes, pendientes, etc.

Otra variedad es plasmar sobre un croquis lo que las ecuaciones plantean, lo que sirve para clarificar ideas a la hora de resolver un problema.

1.4.5 REPRESENTACIÓN NUMÉRICA

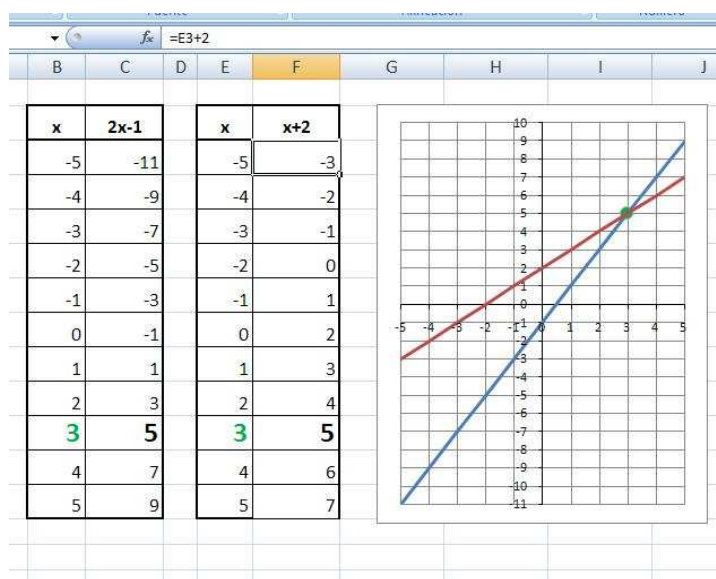
La representación numérica de los conceptos estudiados en el tema que desarrolla esta unidad, consiste en representar las condiciones que definen un problema como valores numéricos que conforman una ecuación o sistema de ecuaciones.

1.4.6 REPRESENTACIÓN MANIPULATIVA

En el aprendizaje del Álgebra de Ecuaciones, se pueden utilizar diversos materiales didácticos que ayuden a afianzar los conceptos adquiridos, así como que ayudan a lograr un clima distendido en la clase en el momento de utilización de dichos recursos. Aparte del propio material escolar (folios, lápiz, compás, etc.) se pueden utilizar figuras de madera, el ábaco, fichas de trabajo, etc.

1.4.7 REPRESENTACIÓN POR TABLAS

Consiste en reflejar los datos de que se disponen y que de cada problema se deducen, sobre tablas de valores. Por ejemplo:



O bien:

Andrea tiene 14 años, y su abuelo Julián, el quintuple. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad de Julián sea solo el triple de la de Andrea?

	HOY	DENTRO DE X AÑOS
ANDREA	14	14 + x
JULIÁN	70	70 + x

$$\rightarrow 70 + x = 3 \cdot (14 + x) \rightarrow x = 14$$

Solución: Deben transcurrir 14 años.

1.5 FENOMENOLOGÍA

Para el correcto entendimiento de las nociones matemáticas es útil e incluso necesario entender la aplicación de las mismas en cuestiones de la vida real y cotidiana. De esto trata la Fenomenología, de la relación directa entre lo abstracto y lo real. Es el último de los organizadores del análisis de contenido.

La Fenomenología, como su nombre indica, estudia los fenómenos. En nuestro ámbito, se trata la diversidad de sentidos o modos de referir que tienen los conceptos implicados en una estructura matemática, determinados mediante las familias de fenómenos de los que proceden.

La reflexión fenomenológica trata de establecer los diversos significados de los conceptos matemáticos mostrando cuáles son los sentidos en que estos conceptos se manejan cuando abordan distintas tareas y cuestiones, es decir, en el tratamiento de diversas familias de fenómenos.

En lo que se refiere a nuestro tema, al resolver una ecuación o un sistema de ecuaciones, obtenemos los valores de las incógnitas que satisfacen esas expresiones algebraicas. Por lo tanto,

un contexto primordial sería conocer datos desconocidos a partir de las relaciones lineales que se establecen entre ellos.

En todos los campos del saber (economía, biología, estadística,...) se utilizan modelos matemáticos basados en la aplicación de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Según el estudio PISA, las situaciones a la hora de clasificar las tareas matemáticas pueden ser de tipo personal, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2005a; pp.41-42).

Una situación es la parte del mundo real del individuo en la cuál se sitúa una tarea. Viene dada por una referencia al mundo (natural, cultural y social) en la cual se sitúan las tareas y cuestiones matemáticas que se proponen a los estudiantes y sobre las que se centra su trabajo. Las situaciones permiten establecer la localización de un problema y delimitar un campo de fenómenos de los que surge y en los que se ubica la situación problemática considerada.

1. Situaciones personales. Son aquellas que están relacionadas con las actividades de la vida diaria del alumno. Por ejemplo:

“Varios amigos y amigas se reparten un premio y les toca 32 euros a cada uno. Si hubieran sido 6 amigos más, hubieran tocado a 8 euros menos. ¿Cuántos eran a repartir?”

“ Un disco cuesta 5 euros más que una cinta. Dos cintas y un disco me han costado 29 euros. ¿Cuánto cuesta una cinta? ¿Y un disco?”

2. Situaciones educativas, ocupacionales o laborales. Son las que el alumno se encuentra dentro del centro escolar o entorno de trabajo, y que les son propuestas con el objetivo de que aplique sus conocimientos matemáticos. Por ejemplo:

“Trabajando juntos dos obreros hacen un trabajo en 17 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?”

“Un grifo tarda tres horas en llenar un depósito y otro tarda 2 horas en llenarlo. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarlo juntos?”

3. Situaciones públicas. Se refieren a la comunidad local u otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos de su entorno o situaciones que aparezcan en los medios de comunicación. Requieren que los alumnos activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones importantes en la vida pública. Por ejemplo:

“La República Popular de China, ganó los juegos olímpicos de Beijing 2008 al obtener el mayor número de medallas de oro, el segundo lugar lo ocupó Estados Unidos, entre los dos países

ganaron un total de 87 preseas doradas. Si los $\frac{2}{3}$ de las medallas ganadas por China, más dos fueron las medallas obtenidas por los Estados Unidos. ¿Cuál fue el número de medallas que obtuvo cada país?"

"La cancelación de un préstamo lleva consigo un recargo del 0,2% del importe pendiente. ¿Qué cantidad total se pagará para cancelar una deuda con el banco que asciende a 10.000€?"



4. Situaciones científicas. Son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. Muchas disciplinas científicas o técnicas, hacen cierto uso técnico específico, en ocasiones muy elaborado, de los conceptos y estructuras numéricas. Por ejemplo:

" El perímetro de un rectángulo mide 34 m. Calcula sus dimensiones sabiendo que la base mide 7 m más que la altura"

"Una figura se compone de un cuadrado y de dos semicírculos externos al cuadrado y que tienen como diámetro dos lados opuestos. Determina el área de la figura sabiendo que su perímetro mide 41,12"

2 ANÁLISIS COGNITIVO

2.1 EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

En las expectativas de aprendizaje, se analizan los objetivos específicos del tema, utilizando para ello la información recogida del análisis anterior.

El primer paso consiste en designar los focos de interés para el aprendizaje, sobre los cuales catalogaremos los objetivos específicos que se pretende alcance el alumnado.

FOCO 1: Identificar y Justificar ecuaciones

FOCO 2: Resolver y representar ecuaciones

FOCO 3: Plantear y resolver problemas

Una vez establecidos los focos prioritarios de interés, podemos distinguir entre dos niveles principales de expectativas importantes para el profesor: objetivos específicos y competencias matemáticas.

2.1.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Los objetivos específicos asociados a cada foco son los siguientes:

Foco 1: Identificar y Justificar ecuaciones	
OBJETIVOS	1 Reconocer ecuaciones e identidades y saber distinguir unas de otras.
	2 Reconocer los elementos y el grado de una ecuación.
	3 Conocer el significado de incógnita en este contexto y de solución.
	4 Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.

Foco 2: Resolver ecuaciones	
OBJETIVOS	5 Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita de forma algebraica.
	6 Trabajar el concepto de ecuaciones equivalentes.
	7 Resolución de problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.
	8 Comprobar si un número es o no solución de una ecuación.
	9 Identificar y resolver ecuaciones de segundo grado sencillas (incompletas).
	10 Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.

Foco 3: Plantear y Resolver Problemas	
OBJETIVOS	11 Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.
	12 Pasar un problema dado en representación verbal a lenguaje algebraico.
	13 Resolver un problema utilizando la resolución algebraica anterior.
	14 Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.

2.1.2 COMPETENCIAS

Según indica la OCDE / PISA, se define 'competencia matemática' como: 'la capacidad de un individuo para identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundamentados y utilizar las matemáticas en formas que le permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. "

Recordemos las competencias de Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (Informe PISA), que son:

- PENSAR Y RAZONAR (PR). Incluye plantear preguntas características de las matemáticas; reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
- ARGUMENTAR Y JUSTIFICAR (AJ). Se refiere a saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos matemáticos.
- COMUNICAR (C). Implica la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.
- MODELAR (M). Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la "realidad" a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.
- PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS (RP). Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.
- REPRESENTAR (R). Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.
- UTILIZAR LENGUAJE Y OPERACIONES SIMBÓLICAS FORMALES Y TÉCNICAS (LS). Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
- UTILIZAR AYUDAS Y HERRAMIENTAS (HT). Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

En tabla a continuación se muestran estos objetivos, desde los que se plantea la unidad didáctica, indicando las competencias PISA que satisfacen.

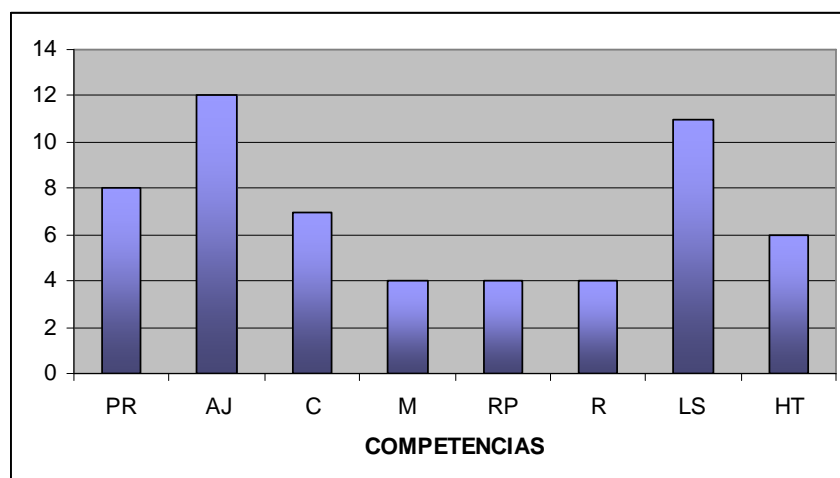
		COMPETENCIAS PISA								
		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT	
OBJETIVOS	Foco 1: Identificar y Justificar ecuaciones									
	1	Reconocer ecuaciones e identidades y saber distinguir unas de otras.		x	x				x	
	2	Reconocer los elementos y el grado de una ecuación.		x	x				x	
	3	Conocer el significado de incógnita en este contexto y de solución.			x				x	
4	Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar sus formas de expresión.	x	x				x	x	x	

		COMPETENCIAS PISA								
		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT	
OBJETIVOS	Foco 2: Resolver ecuaciones									
	5	Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita de forma algebraica.	x	x				x	x	x
	6	Trabajar el concepto de ecuaciones equivalentes.		x	x				x	
	7	Resolución de problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.	x	x		x	x		x	x
	8	Comprobar si un número es o no solución de una ecuación.		x	x					x
	9	Identificar y resolver ecuaciones de segundo grado sencillas (incompletas).	x	x				x	x	x
10	Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	x	x				x	x		

		COMPETENCIAS PISA								
		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT	
OBJETIVOS	Foco 3: Plantear y Resolver Problemas									
	11	Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.		x	x	x	x			
	12	Pasar un problema dado en representación verbal a lenguaje algebraico.	x			x	x		x	
	13	Resolver un problema utilizando la resolución algebraica anterior.	x	x		x	x		x	x
14	Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	x	x	x						

RECUESTO COMPETENCIAS	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
FOCO 1	1	3	3	0	0	1	4	1
FOCO 2	4	6	2	1	1	3	5	4
FOCO 3	3	3	2	3	3	0	2	1
TOTAL	8	12	7	4	4	4	11	6

En el gráfico de barras a continuación, se observa el balance de la contribución a cada una de las competencias por cada uno de los focos prioritarios que hemos indicado:



A la vista del gráfico podemos señalar que la competencia sobre la que más se enfatiza es la de Argumentar y Justificar.

2.2 LIMITACIONES DE APRENDIZAJE.

Una vez que se han determinado los objetivos del tema, se procede a localizar posibles errores cometidos por el alumnado.

“El estudio de los errores y dificultades también proporciona esquemas con los que organizar los contenidos, en cuanto que una determinada secuenciación facilita la superación de dificultades específicas; proporciona criterios para establecer objetivos, en cuanto marca los errores prioritarios que deben evitarse y los obstáculos que hay que superar; proporciona orientaciones metodológicas en cuanto permite diseñar situaciones que planteen conflictos cognitivos a los alumnos en las que sea necesario reestructurar los conocimientos previos para superar las dificultades conceptuales” (Rico, 1997).

En este apartado es útil lo dicho en la publicación *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*, (vv.aa.), que realiza un conjunto de reflexiones sobre los problemas que plantea la didáctica del álgebra al iniciar a los alumnos en sus métodos y técnicas. El artículo parte de las experiencias de la clase y escucha lo que dicen los alumnos, e intenta proporcionar ideas, actividades y recursos para abordarlos con una mayor conciencia de cada situación y tratando de hacer agradable lo rutinario.

Seguidamente se incluye un resumen de los posibles errores o dificultades que se dan en este tema, clasificados según el tipo de error:

A. DIFICULTADES DE LENGUAJE

- 1) No distinguir entre los distintos signos de desigualdad (\leq , \geq , $<$, $>$). Se relaciona con el objetivo 4.

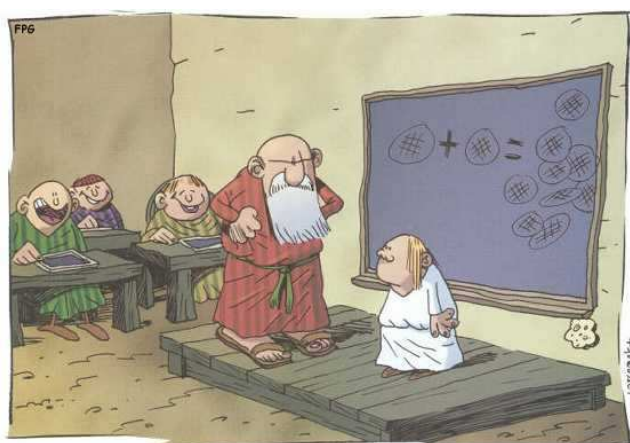
- 2) Dificultad para expresar algebraicamente un enunciado del lenguaje natural. Se relaciona con los objetivos 11 y 12.
- 3) No reconocer ecuaciones ni inecuaciones si la variable no es "x". Se relaciona con los objetivos 1, 2 y 3.

B. APRENDIZAJE DEFICIENTE DE CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS PREVIO

- 4) No aplicar bien el cambio de signos en ambos miembros de una ecuación cuando se multiplica por un número negativo. Se relaciona con los objetivos 5, 6 y 9.
- 5) No entender las soluciones numéricas de las ecuaciones. Se relaciona con los objetivos 4 y 8.
- 6) No entienden como solución un conjunto. Se relaciona con el objetivo 4.
- 7) No relacionan una ecuación con su representación gráfica. Se relaciona con el objetivo 10.

C. ASOCIACIONES INCORRECTAS O RIGIDEZ DE PENSAMIENTO

- 8) No diferenciar el tipo de método de resolución de ecuaciones de segundo grado. Se relaciona con el objetivo 9.
- 9) No saber resolver por métodos no algebraicos. Se relaciona con el objetivo 7.



JESUS A L'ÉCOLE Jesus at school

- 10) No reconocer ecuaciones equivalentes. Se relaciona con los objetivos 1, 2, 3 y 6.

D. APLICACIÓN DE REGLAS O ESTRATEGIAS IRRELEVANTES

- 11) No tener en cuenta los denominadores en ecuaciones con fracciones algebraicas. Se relaciona con los objetivos 5 y 9.
- 12) Confusión al interpretar la solución de un problema. Se relaciona con los objetivos 8 y 14.

Haciendo un balance, se observa el foco donde hay un mayor número de errores conceptuales, de asimilación y acomodación por parte del alumnado es el Foco 2.

	ERROR											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Foco 1: Identificar y Justificar ecuaciones	X		X		X	X				X		
Foco 2: Resolver ecuaciones				X	X		X	X	X	X	X	X
Foco 3: Plantear y Resolver Problemas		X										X

2.3 OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE.

Se proponen a continuación dos actividades modelo que cubren la mayor parte de objetivos y resuelve el mayor número de errores.

ACTIVIDAD 1.- Resolver por métodos algebraicos el siguiente problema: “La suma de las edades de los cuatro miembros de una familia es 104 años. El padre tiene 6 años más que la madre, que tuvo a los dos hijos gemelos a los 27 años. ¿Qué edad tiene cada uno?”

ACTIVIDAD 2.- Resolveremos el problema de la edad de Diofanto paso a paso para que los alumnos vean cómo plantear las ecuaciones que les acerquen a la resolución del problema.

Enunciado del problema	Lenguaje algebraico
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar cuán larga fue su vida.	x
Cuya sexta parte construyó su hermosa infancia	$x/6$
Había transcurrido una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla	$x/12$
Y la séptima parte de su vida transcurrió en un matrimonio estéril.	$x/7$
Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito	5
Que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan sólo la mitad de la de su padre.	$x/2$
Y con profunda pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo.	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$

3 DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

3.1 MATERIALES Y RECURSOS

Inicialmente, vamos a definir material didáctico y recurso, siguiendo las pautas de los autores Rico, Castro, Castro, Coriat, Marín, Puig, Sierra y Socas (1989), de la siguiente forma:

- Recurso: material que se utiliza para el proceso de enseñanza y aprendizaje de un concepto o procedimiento, no diseñado específicamente para este fin.
- Material didáctico: material diseñado específicamente para fines educativos.

En esta planificación utilizaremos los siguientes recursos y materiales didácticos:

RECURSOS	MATERIALES DIDÁCTICOS
Ordenador	Aplicación Descartes
Calculadora	Balanza Algebraica
Internet	Plataforma Moodle
Proyector	Hot Potatoes
Pizarra	Libro de texto
Cuaderno de clase	Material complementario impreso

Un material didáctico a destacar, no para el alumno sino para el profesor, para la elaboración de la secuenciación más adelante, es el libro *'Iniciación al álgebra'* Socas, M., el cual reflexiona sobre la enseñanza-aprendizaje del Álgebra en la Escuela Secundaria Obligatoria y sirve de orientación en este proceso. El libro trata los contenidos con un marcado carácter intuitivo, lo que hace posible su conocimiento incluso a aquellos lectores que se consideran alejados de los temas matemáticos y en especial del álgebra.

3.2 ORGANIZACIÓN DE LA CLASE

Para las nueve sesiones, la clase estará dotada de ordenadores e internet para todos los alumnos, que utilizaremos tanto para las explicaciones que realice el profesor, como para los ejercicios que realicen los alumnos.

También se dispondrá de un proyector en clase, para que los alumnos puedan seguir las explicaciones del profesor.

Para una de las sesiones, la clase se estructurará para que los alumnos puedan trabajar en grupo.

Algunas actividades están diseñadas para que el alumno trabaje individualmente y otras en grupo. La primera y la segunda sesión están destinadas a la comprensión del concepto de ecuación (incluye los conceptos de grado, igualdad, miembro, etc.).

En la tercera sesión se empieza a trabajar con la solución de una ecuación indicando así conceptos como el de ecuación equivalente. También se relaciona esto con la resolución algebraica de ecuaciones, comenzando con las ecuaciones de primer grado sencillas.

En las sesiones cuarta y quinta se enseñan destrezas de resolución de ecuaciones de primer grado (diferenciando en un principio las ecuaciones sencillas, las que contienen paréntesis y las que contienen denominadores), por tanto, es conveniente que los alumnos trabajen individualmente para que puedan practicar y adquirir dichas destrezas.

La sexta sesión está organizada mediante trabajo en grupo, en la que pondrán en práctica las destrezas y procedimientos aprendidos y tendrán la oportunidad de aprender unos de otros y resolver dudas.

En la séptima sesión se iniciará la resolución de problemas. La octava sesión se continuará con la resolución de problemas de forma algebraica. El trabajo está organizado de forma individual.

En la novena y última sesión se realizará una prueba de conocimientos sobre el tema.

3.3 SECUENCIA DEL TRABAJO

A continuación se realizará una temporalización de las sesiones que abarca la impartición de esta Unidad Didáctica. No obstante, las clases estarán abiertas a posibles cambios en función del desarrollo de las mismas.

Para ello ha sido de gran utilidad el libro de texto de J. Colera, I. Gaztelu (2008). Educación Secundaria. Matemáticas 2º ESO.



3.3.1 Sesión 1

En esta sesión se introducirá el tema y se trabajará el concepto de ecuación e igualdad.

Se comienza con una actividad de diagnóstico, siguiendo con diversas actividades de iniciación y motivación.

La sesión se puede desarrollar de la siguiente forma:

- ✓ (25 minutos) Comienza la clase con la realización de una Autoevaluación, para conocer el grado de conocimientos previos del alumnado. Se adjunta el ejercicio propuesto en el Anexo a este documento.
- ✓ (10 minutos) Se comienza introduciendo el tema indicando los puntos que se van a tratar y los objetivos que se pretenden alcanzar. Esto es muy importante ya que, de esta manera el alumno tiene desde el primer momento una idea general de los contenidos que va a aprender y podrá mantener una organización y estructuración, tanto en la toma de apuntes como en su mente.
- ✓ (15 minutos) A continuación se explicará el concepto de ecuación viéndolo como una igualdad. Para ello se utilizará una balanza algebraica como material didáctico. El profesor será la guía en esta actividad incitando la participación de los alumnos.
- ✓ (10 minutos) La última actividad que se realizará en esta sesión tiene como objetivo ver si el alumno ha entendido el concepto anterior. Para ello los alumnos jugarán a un juego que se encuentra online en Internet. En enlace web es el siguiente: <http://www.educaplus.org/play-13-Ecuaciones-visuales.html>

Las instrucciones están descritas una vez dentro del juego, pero el profesor puede comentarlas si lo ve conveniente. Se propone a los alumnos proseguir el juego en casa.

3.3.2 Sesión 2

Esta sesión está enfocada a cumplir los dos siguientes objetivos:

- Reconocer ecuaciones e identidades y saber distinguir unas de otras y en particular, saber distinguir las ecuaciones de primer grado.
- Conocer el significado de incógnita en este contexto y de solución.

Para ello se van a realizar una serie de actividades de iniciación y motivación, siendo esta su secuenciación:

- ✓ (30 minutos) Los alumnos tienen que contestar un cuestionario de diez preguntas realizado sobre la plataforma Moodle en la que se encuentra el curso creado por el profesor sobre ecuaciones de primer grado. Las preguntas están relacionadas con el número de incógnitas, el grado de una ecuación, el número de soluciones, etc. Cada pregunta tiene una respuesta correcta y si el alumno no selecciona la respuesta correcta se le penalizará con -0.1. De lo contrario sumará un punto a su puntuación final, pudiendo ser esta como máximo 10 puntos. Más importante aún que la realización del cuestionario es la corrección del mismo, comentándolo en clase y explicando las dificultades que tengan los alumnos.
- ✓ (20 minutos) Para seguir trabajando los objetivos señalados en esta sesión, los alumnos deberán resolver un crucigrama en el que las pistas son las definiciones de los distintos componentes de la ecuación.
- ✓ (10 minutos) Finalmente, el profesor propone los siguientes ejercicios para que los alumnos los realicen en casa.
 1. Escribe dos ecuaciones de grado 1 y dos ecuaciones de grado 2.
 2. Escribe dos ecuaciones con dos incógnitas.

3.3.3 Sesión 3

Esta sesión está centrada, primero, en trabajar el concepto de ecuación e igualdad a modo de ensayo y error. Con esto iniciamos la resolución de ecuaciones de primer grado, siendo el objetivo principal que los alumnos entiendan qué significa el concepto de solución. Después se iniciará la resolución algebraica de ecuaciones de primer grado sencillas. Se comienza pues con las actividades de desarrollo.

También se trabajará el concepto de ecuaciones equivalentes desde el punto de vista de la solución (misma solución). En las siguientes sesiones se trabajará este concepto desde el punto de vista de la igualdad (operaciones para que no cambie la igualdad). La temporalización es la siguiente:

- ✓ (10 minutos) En primer lugar se corregirán los ejercicios que los alumnos han realizado en casa y el profesor solucionará las dudas que puedan tener.
- ✓ (15 minutos) Los alumnos realizarán ejercicios en los que hay ecuaciones que tienen solución, no tienen solución o tienen infinitas soluciones. En este último caso se introducirá el concepto de identidad. Los ejercicios son los siguientes:
 1. Dada la ecuación $-x + 6 = -9 + 2x$ ¿Es 1 una solución de dicha ecuación? ¿Y 5? Explicar el significado de los resultados obtenidos.
 2. ¿Qué podemos decir de la siguiente ecuación $5x = 0$? ¿De la ecuación $0x = 2$? ¿Y de la ecuación $0x = 0$? ¿Qué nombre recibe esta última ecuación?
- ✓ (10 minutos) A continuación, nos centramos en la equivalencia de ecuaciones. Para ello se proponen los siguientes ejercicios:
 1. ¿Son equivalentes las ecuaciones $8 - x = 2x - 1$ y $x + 9 - 2x = 6$? ¿Por qué?
 2. Escribe una ecuación equivalente a $4x + 9 = -5 - 3x$
- ✓ (25 minutos) Finalmente se indica que el método anterior para encontrar la solución a una ecuación de primer grado no es óptimo, por eso, se procede a la resolución algebraica de ecuaciones de primer grado.

Haciendo uso de algunos materiales en la Página Web "Descartes", creada por el Ministerio de Educación y Ciencia, el profesor expone (utilizando proyector) varios ejemplos explicando los pasos a seguir para la resolución de una ecuación de primer grado sencilla. Si el profesor lo ve conveniente puede hacer uso de la pizarra. El enlace a la página es el siguiente:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/ecuaciones_primer_grado/ecua_sfp_ej.htm

3.3.4 Sesión 4

En esta sesión se continúa con la resolución algebraica de ecuaciones de primer grado sencillas.

La sesión se desarrollará de la siguiente forma:

- ✓ (15 minutos) Los alumnos practicarán de forma autónoma e individual la resolución de ecuaciones de primer grado con ejercicios propuestos por el profesor, utilizando como guía para dicha resolución los pasos dados anteriormente. Estos ejercicios pueden ser:

Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado, comprobando la solución. ¿Es única dicha solución?

$$-x + 6 = -9 + 2x$$

$$x + 9 - 2x = 6$$

$$-x + 6 = -9 + 2x$$

$$8 - x = 2x - 1$$

- ✓ (15 minutos) A continuación, el profesor explicará las transformaciones, mediante ejemplos, que pueden hacerse sobre la ecuación conservando la equivalencia (misma solución). Se puede apoyar para explicarlo en el libro de texto si lo ve conveniente. Estas son:

SUMA Y RESTA	MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN
Si se suma o se resta la misma expresión en los dos miembros ↓ La igualdad no cambia	Si se multiplica o se divide la misma expresión en los dos miembros ↓ La igualdad no cambia

- ✓ (25 minutos) Seguidamente, el profesor explica las ecuaciones que contienen paréntesis, valiéndose del mismo recurso que se ha utilizado anteriormente. En este caso, el enlace a la Página Web es el siguiente:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/ecuaciones_primer_grado/ecua_p_ej.htm

- ✓ (5 minutos) Para finalizar, el profesor propondrá el siguiente ejercicio para trabajarlo en casa:

Escribe dos ecuaciones equivalentes (misma solución) de cada una de las siguientes ecuaciones, explicando en cada caso el método que has utilizado para obtenerlas:

$$2 = 9(2x + 6) + 8x$$

$$-7 = 4x - 5x + 2 - 1 + 2x$$

3.3.5 Sesión 5

En esta sesión se trabajará, como novedad, la resolución de ecuaciones de primer grado con denominadores. A continuación los alumnos realizarán una serie de ejercicios relacionados con este tema y con resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis que se explicaron en la sesión anterior. Finalmente, los estudiantes realizarán un cuestionario elaborado con la herramienta “Hot Potatoes” y después se comentarán los resultados obtenidos. La temporalización y seguimiento de la sesión es el siguiente:

- ✓ (5 minutos) Inicialmente, el profesor resolverá las dudas que puedan tener los alumnos referentes a la sesión anterior y también en relación con la actividad que tenían para hacer en casa.
- ✓ (15 minutos) Haciendo uso de la Página Web “Descartes” usada anteriormente, el profesor expone varios ejemplos explicando los pasos a seguir para la resolución de una ecuación de primer grado con denominadores. Si el profesor lo ve conveniente puede hacer uso de la pizarra. El enlace a la página es el siguiente:

http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/ecuaciones_primer_grado/ecua_f_ej.htm

- ✓ (25 minutos) Los alumnos realizarán una serie de ejercicios en los que trabajarán todo lo dado hasta ahora en estas dos sesiones. Estos ejercicios pueden ser los siguientes:
 1. Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado, comprobando en cada caso la solución obtenida.

$$\begin{aligned}
 -9 - (-5 - x) - 2 &= 4x \\
 1 &= -8(8 + 5x) + 5x - 9(-4x - 8) \\
 7(-4x + 3) - 8 &= 4x - 2(-4x + 9) - 9x
 \end{aligned}$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones, comprobando en cada caso la solución obtenida:

$$\begin{aligned}
 \frac{9x}{5} + \frac{8}{5} - \frac{7x}{4} &= 0 \\
 \frac{x}{3} - \frac{4}{3} - x &= -\frac{4x}{9} \\
 \frac{3(x-2)}{2} &= \frac{x}{2} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

3. ¿Son las siguientes ecuaciones equivalentes?

$$2x = -2 + 2x + x \qquad \frac{2x}{2} = \frac{-2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{2x}{2}$$

En caso afirmativo, explica con palabras cuál es la transformación que se está aplicando.

- ✓ (15 minutos) Para finalizar la sesión se realizará un cuestionario en el que el objetivo principal es analizar la equivalencia entre ecuaciones, haciendo mención a las diferentes posibilidades que hay. El test está formado por cinco preguntas con un tiempo límite de 5 minutos para solucionarlo. Cada pregunta puede tener varias soluciones correctas, así como no tener ninguna correcta.

La parte fundamental de esta actividad es comentar los resultados obtenidos, aunque en todas las respuestas aparece una justificación de por qué es correcta o por qué no.

El cuestionario esta realizado con la herramienta “Hot Potatoes” y está diseñado para que los alumnos interactúen con las diferentes respuestas que pueden elegir viendo en todo momento si su elección es correcta o no. Por esto es fundamental que todos los alumnos dispongan de un ordenador e internet.

A continuación se adjunta, como ejemplo, la primera pregunta del cuestionario con el formato online en el que aparece:

3.3.6 Sesión 6

En esta sesión se realizará una actividad de trabajo cooperativo. Los alumnos han realizado previamente actividades de trabajo cooperativo, y por tanto, conocen como se deben actuar en ellas. El objetivo de la actividad consiste en rellenar un crucigrama creado con la herramienta "Hot Potatoes". Las soluciones de este crucigrama corresponden a las soluciones de distintas ecuaciones de primer grado que tendrán que resolver los alumnos por grupos.

Dicho crucigrama es el siguiente: Las pistas para conseguir cada solución se encuentran al seleccionar cada número dentro del crucigrama. Para comprobar si la respuesta introducida es correcta seleccionamos el botón "Comprobar".



La secuenciación de esta sesión es la siguiente:

- ✓ (5 minutos) Primero se organizará y se explicará la dinámica grupal, la cual es la siguiente:
 - El profesor formará grupos de 4 personas
 - Dentro de cada grupo, se adjudicarán un número del 1 al 4.
 - Después el profesor explicará la tarea y otorgará el siguiente trabajo a cada alumno dentro del grupo:

Número 1

$$6 \text{ Vertical: } \frac{3}{4}(2x + 4) = x + 69$$

$$2 \text{ Horizontal: } \frac{1}{2}x + 8 - \frac{3}{2}x = 88 - \frac{3}{2}(x - 2) - 3$$

Número 2

$$1 \text{ Vertical: } x - 8 + 2(2x - 8) = \frac{x}{2} + 4(x - 4)$$

$$7 \text{ Horizontal: } 2x - (x - (x - 50)) = x - (800 - 3x)$$

Número 3

$$2 \text{ Vertical: } \frac{3x+5}{2} - \frac{4x-5}{3} = \frac{7x+1}{6} - 996$$

$$3 \text{ Vertical: } \frac{6x+1}{5} = 410 + \frac{2x+1}{3}$$

Número 4

$$4 \text{ Horizontal: } \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{6}\right) + \frac{1}{3}x = 3067 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$5 \text{ Vertical: } 5(2x - 10) + 3x - 50 - 2(5x - 25) = -2x + 25$$

- ✓ (10 minutos) Cada alumno deberá resolver individualmente sus dos ecuaciones asignadas.
- ✓ (10 minutos) Después se reúnen los expertos de cada tema. Es decir, todos alumnos a los que se le ha asignado el número 1 juntos, todos los 2 por otro lado,...y comentan los resultados obtenidos.
- ✓ (15 minutos) Seguidamente los expertos vuelven a sus grupos de origen y tienen que explicar cómo han resuelto sus ejercicios para que el resto del grupo sepa resolverlos.
- ✓ (5 minutos) Estado en los grupos de origen, los alumnos deberán completar el crucigrama propuesto, comprobando cada una de las soluciones.
- ✓ (15 minutos) Finalmente, el profesor elegirá al azar un alumno de cada grupo y éste, deberá resolver una ecuación de las propuestas.

3.3.7 Sesión 7

Esta sesión se dedicará a la iniciación de resolución de problemas. Primero se resolverán por medio de métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido. Finalmente, se introducirá la resolución mediante lenguaje algebraico de estos mismos problemas. La sesión puede organizarse de la siguiente forma:

- ✓ (35 minutos) Usando el ordenador, los alumnos deberán introducir el enlace que se expone a continuación:

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/tests/primergrado/problemas/primprob01.htm

Una vez dentro, aparecen una serie de problemas, referentes a la realización de mezclas, en los que la metodología de resolución se realiza por medio de métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido. Se basa en interactuar con la página, escribiendo la cantidad correcta en el recuadro blanco, y así completar la tabla que describe los datos del problema. Ellos tienen que determinar qué valor numérico tiene sentido poner en cada hueco, para obtener una solución coherente, es decir, tienen que interpretar y criticar la solución del problema.

Pueden plantearse dos o tres problemas de este tipo, como por ejemplo:

Problema 1

Mezclando 15 kg de arroz de 0.60 €/kg con 25 kg de arroz de otra clase, se obtiene una mezcla que sale a 0.78 €/kg. ¿Cuál será el precio de la segunda clase de arroz?

Los problemas están elaborados con la herramienta Hot Potatoes y la vista en el ordenador es la que se observa a continuación:

PRIMER GRADO: PROBLEMAS_Test nº 1

Mezclas 1

Sigue la solución del problema y busca los números que faltan:
 "Mezclando 15 kg de arroz de 0.60 €/kg con 25 kg de arroz de otra clase, se obtiene una mezcla que sale a 0.78 €/kg. ¿Cuál será el precio de la segunda clase de arroz?"

Solución:

	Arroz 1	Arroz 2	Mezcla
Cantidad (Kg.)	15	25	0
Precio (€/Kg)	0.60	0	0.78
Coste (euros) (CxP)	9	0	31.2

El coste de los componentes es igual al coste de la mezcla:

$$9 + 0 = 31.2 \rightarrow$$

$$0.60 - 22.2 = x - 0 \text{ €}$$

1 / 9 =>

Cantidad de arroz en la mezcla (en Kg.):

Verificar

Problema 2

Se mezclan 30 Kg de café de 3.60 €/kg con cierta cantidad de café superior de 4.8 €/kg resultando la mezcla a 4.35 €/kg. ¿Qué cantidad de café superior se ha utilizado?

Problema 3

Un comerciante dispone de dos clases de té: té de Ceilán a 3.60 €/kg y té indio a 4.80 €/kg. ¿Cuántos kilos hay que mezclar de cada clase para obtener 300 kilos de una mezcla a 4.50 €/kg?

- ✓ (25 minutos) Finalmente, con la ayuda del profesor, los alumnos intentarán expresar uno de los problemas anteriores en lenguaje algebraico, resolviéndolo con los métodos de resolución vistos en las sesiones anteriores. Comparando además que las soluciones son iguales utilizando un método no algebraico como es el de ensayo y error dirigido, o un método algebraico como es la resolución de ecuaciones.

3.3.8 Sesión 8

Esta sesión está totalmente enfocada a la resolución de problemas de forma algebraica.

- ✓ (60 minutos) Los alumnos realizarán seis problemas variados relacionados con la vida cotidiana. Una sugerencia es utilizar la herramienta Hot Potatoes para que los propios alumnos introduzcan la solución y comprueben si han resuelto bien el problema. Desde luego el uso del ordenador es totalmente opcional.

Los problemas son los siguientes:

Problema 1

El dueño de un restaurante mezcla 3 litros de aceite a 4€ el litro con 2 litros de otro aceite de mejor calidad que cuesta a 7€ el litro. ¿A cómo le sale el litro de mezcla?

The screenshot shows a quiz interface with the following elements:

- Header: "Problemas" and "Quiz"
- Progress indicator: "1 / 6" with a right arrow.
- Question text: "El dueño de un restaurante mezcla 3 litros de aceite a 4€ el litro con 2 litros de otro aceite de mejor calidad que cuesta a 7€ el litro. ¿A cómo le sale el litro de mezcla?"
- Options:
 - A. 5,2 €
 - B. 11 €
 - C. 5,5 €
- Footer: "Index" with a right arrow.
- Top right: "Mostrar todas las preguntas" (partially visible).

Problema 2

Se mezclan 300 Kg. de pintura de 30€ el kilo con 200 Kg. de otra pintura más barata. De esta forma, la mezcla sale a 24 € el kilo. ¿Cuál es el precio de la pintura barata?

Problema 3

La base de un rectángulo es doble que la altura, y el perímetro mide 78 cm. Calcular las dimensiones del rectángulo.

Problema 4

Por un videojuego, un cómic y un helado, Andrés ha pagado 14,30 €. El videojuego es cinco veces más caro que el cómic, y éste cuesta el doble que el helado. ¿Cuál era el precio del videojuego?

Problema 5

Reparte 1000 € entre tres personas de forma que la primera reciba el doble de la segunda y ésta, el triple que la tercera.

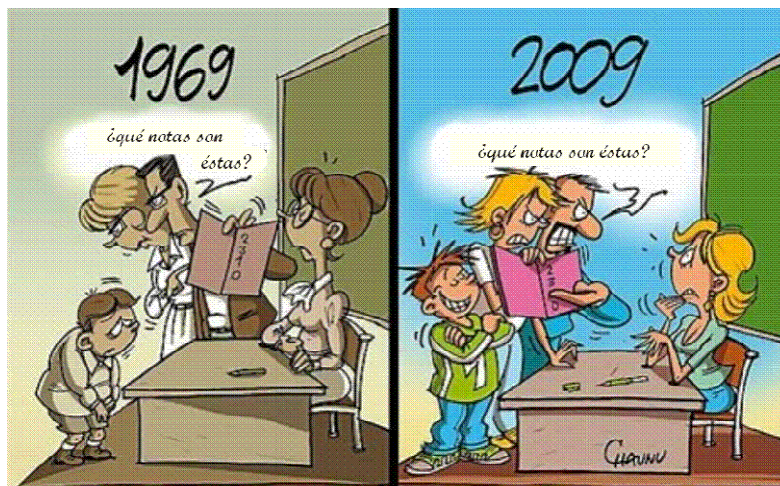
Problema 6

En un triángulo isósceles, cada uno de los lados iguales es 5 cm más largo que el lado desigual. El perímetro mide 55 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

3.3.9 Sesión 9

En esta sesión se realizará una prueba final del tema, como actividad de evaluación, en la que se pondrán de manifiesto los conocimientos de los alumnos. En ella se deberán evaluar todos los objetivos marcados en la unidad. En el Anexo a este documento se incluye el ejercicio propuesto.

4 EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES DE LA UNIDAD DIDÁCTICA



A continuación se describe la técnica e instrumentos de evaluación a utilizar.

A) EVALUACIÓN INICIAL.

Realización de actividades de iniciación para detectar los conocimientos mínimos que los alumnos/as poseen sobre el tema que se va a empezar: actividades de diagnóstico. Se realizará una Auto evaluación, que se incluye en el Anexo al documento.

B) LOS CRITERIOS DE EVALUACIÓN PARA ESTA UNIDAD SERÁN:

- Determinar si una igualdad algebraica es una identidad o una ecuación.
- Escribir una ecuación que tenga por solución un valor dado.
- Reconocer y construir ecuaciones equivalentes.
- Determinar si una ecuación es compatible o incompatible, obteniendo sus soluciones cuando sea posible.
- Comprobar si un número es solución de una ecuación de primer grado con una incógnita.
- Resolver de forma correcta ecuaciones de primer grado en primer lugar sencillas, y posteriormente con paréntesis y denominadores.
- Plantear y resolver problemas mediante ecuaciones de primer grado:
 - Resuelve problemas de relaciones numéricas
 - Resuelve problemas aritméticos sencillos (edades, presupuestos...).
 - Resuelve problemas aritméticos de dificultad media (móviles, mezclas...).

- Resuelve problemas geométricos.

C) PARA VALORAR TODOS ESTOS OBJETIVOS REALIZAREMOS UNA EVALUACIÓN CONTINUA Y SUMATIVA, Y PARA ELLO TENDREMOS EN CUENTA:

- Trabajo realizado diariamente en clase.
- Trabajo realizado en casa.
- Cuaderno de clase.
- Entrega de trabajos voluntarios.
- Actitud respetuosa hacia los compañeros.
- Actitud participativa en clase.
- Prueba escrita.

Se valorará según un baremo que distribuye la calificación de la siguiente forma:

Trabajo diario, en casa y en clase	20%
Entrega de tareas voluntarias	5 %
Actitud en clase	5 %
Prueba escrita	70 %



5 ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Las actividades planteadas tienen distinto grado de dificultad, que aumenta progresivamente conforme se avanza en el desarrollo de la Unidad Didáctica.

Se preparará de entre ellas una selección de actividades de refuerzo, para alumnos con nivel de aprendizaje inferior a la media, y actividades de ampliación para alumnos con nivel de aprendizaje superior a la media, relativas a los contenidos planteados.

El REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, dice en su Artículo 12:

Artículo 12. Atención a la diversidad.

1. La Educación secundaria obligatoria se organiza de acuerdo con los principios de educación común y de atención a la diversidad del alumnado. Las medidas de atención a la diversidad en esta etapa estarán orientadas a responder a las necesidades educativas concretas del alumnado y a la consecución de las competencias básicas y los objetivos de la Educación secundaria obligatoria y no podrán, en ningún caso, suponer una discriminación que les impida alcanzar dichos objetivos y la titulación correspondiente.

2. Las administraciones educativas regularán las diferentes medidas de atención a la diversidad, organizativas y curriculares, que permitan a los centros, en el ejercicio de su autonomía, una organización de las enseñanzas adecuada a las características de su alumnado.

3. Entre estas medidas se contemplarán los agrupamientos flexibles, el apoyo en grupos ordinarios, los desdoblamientos de grupo, la oferta de materias optativas, las medidas de refuerzo, las adaptaciones del currículo, la integración de materias en ámbitos, los programas de diversificación curricular y otros programas de tratamiento personalizado para el alumnado con necesidad específica de apoyo educativo.

4. La integración de materias en ámbitos, destinada a disminuir el número de profesores y profesoras que intervienen en un mismo grupo, deberá respetar los objetivos, contenidos y criterios de evaluación de todas las materias que se integran, así como el horario asignado al conjunto de ellas. Esta integración tendrá efectos en la organización de las enseñanzas pero no así en las decisiones asociadas a la promoción.

5. Las administraciones educativas, con el fin de facilitar la accesibilidad al currículo, establecerán los procedimientos oportunos cuando sea necesario realizar adaptaciones que se aparten significativamente de los contenidos y criterios de evaluación del currículo, a fin de atender al alumnado con necesidades educativas especiales que las precisen, a los que se refiere el artículo 73 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. Dichas adaptaciones se realizarán buscando el máximo desarrollo posible de las competencias básicas; la evaluación y la promoción tomarán como referente los criterios de evaluación fijados en dichas adaptaciones. La escolarización de estos alumnos en la etapa de Educación secundaria obligatoria en centros ordinarios podrá prolongarse un año más, siempre que ello favorezca la obtención del título al que hace

referencia el artículo 15 y sin menoscabo de lo dispuesto en el artículo 28.6 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

6. La escolarización del alumnado que se incorpora tardíamente al sistema educativo se realizará atendiendo a sus circunstancias, conocimientos, edad e historial académico. Cuando presenten graves carencias en la lengua de escolarización del centro, recibirán una atención específica que será, en todo caso, simultánea a su escolarización en los grupos ordinarios, con los que compartirán el mayor tiempo posible del horario semanal. Quienes presenten un desfase en su nivel de competencia curricular de dos o más años, podrán ser escolarizados en uno o dos cursos inferiores al que les correspondería por edad, siempre que dicha escolarización les permita completar la etapa en los límites de edad establecidos con carácter general. Para este alumnado se adoptarán las medidas de refuerzo necesarias que faciliten su integración escolar y la recuperación de su desfase y les permitan continuar con aprovechamiento sus estudios.

7. La escolarización del alumnado con altas capacidades intelectuales, identificado como tal por el personal con la debida cualificación y en los términos que determinen las administraciones educativas, se flexibilizará, en los términos que determina la normativa vigente, de forma que pueda anticiparse su incorporación a la etapa o reducirse la duración de la misma, cuando se prevea que es lo más adecuado para el desarrollo de su equilibrio personal y su socialización.

8. Las medidas de atención a la diversidad que adopte cada centro formarán parte de su proyecto educativo, de conformidad con lo que establece el artículo 121.2 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

Por otra parte, la ORDEN ORDEN DE 10 DE AGOSTO DE 2007, POR LA QUE SE DESARROLLA EL CURRÍCULO CORRESPONDIENTE A LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA EN ANDALUCÍA., aborda este tema en varios de sus artículos, estableciendo lo siguiente:

...La educación secundaria obligatoria se organizará, de acuerdo con los principios de educación común y atención a la diversidad del alumnado, de modo que permita a éste alcanzar los objetivos de la etapa. A tales efectos, se pondrá especial énfasis en la adquisición de las competencias básicas, en la detección y tratamiento de las dificultades de aprendizaje tan pronto como se produzcan, en la tutoría y orientación educativa del alumnado y en la relación con las familias para apoyar el proceso educativo de sus hijos e hijas.

Artículo 4. Orientaciones metodológicas.

1. Los centros docentes elaborarán sus propuestas pedagógicas para esta etapa desde la consideración de la atención a la diversidad y del acceso de todo el alumnado a la educación común. Asimismo, arbitrarán métodos que tengan en cuenta los diferentes ritmos de aprendizaje del alumnado, favorezcan la capacidad de aprender por sí mismos y promuevan el trabajo en equipo.

Artículo 5. Autonomía de los centros

2. Los centros docentes establecerán en su proyecto educativo la concreción del currículo, al menos, en los siguientes aspectos: los objetivos generales, los acuerdos para la mejora de las competencias básicas, los criterios comunes para la evaluación, promoción y titulación del alumnado, la distribución del tiempo escolar, así como los objetivos y programas de intervención en el tiempo extraescolar, las medidas de atención a la diversidad, el plan de orientación y acción tutorial, el plan de convivencia y, en su caso, el plan de

compensación educativa, así como cualesquiera otras consideraciones que favorezcan la mejora de los resultados escolares del alumnado.

5. Los equipos docentes y departamentos didácticos programarán y acordarán las distintas medidas de atención a la diversidad que pudieran llevarse a cabo, de acuerdo con las necesidades del alumnado de su grupo y con las posibilidades de atención establecidas en el Capítulo V del Decreto 231/2007, de 31 de julio, y disposiciones que lo desarrollen.

Artículo 9. Horario.

2. Los centros docentes, en el ejercicio de su autonomía, podrán adoptar distintas formas de organización del horario escolar. Además, podrán ampliar el mismo para contribuir al desarrollo de las medidas de atención a la diversidad a las que se refiere el artículo 19.2 del Decreto 231/2007, de 31 de julio, sin que, en ningún caso, se impongan aportaciones a la familia ni exigencias para la Administración educativa, y para la realización de actividades complementarias y extraescolares.

El alumnado puede presentar distintos niveles de aprendizaje según los antecedentes educativos individuales de cada uno. Además, pueden existir alumnos con necesidades educativas especiales por razones físicas que les provoquen carencias. Por contra, se puede dar el caso de la existencia de alumnos con altas capacidades intelectuales, lo que también requiere un tratamiento especial.

Para atender los objetivos en diversidad, se realizará una prueba inicial previa a la Unidad Didáctica que pondrá de manifiesto los conocimientos previos del grupo en la materia, permitiendo así programar las actividades especiales para estos alumnos. Posteriormente se tomarán una serie de medidas para afrontar las posibles desigualdades que derivan de la diversidad:

MEDIDAS METODOLÓGICAS

- Potenciar técnicas que favorezcan la experiencia directa, la reflexión y la expresión.
- Introducir y potenciar la utilización de técnicas que favorezcan la participación activa:
 - Trabajo de grupo
 - Por parejas.
- Presentar los contenidos a través de canales variados siempre que sea posible:
 - Juegos
 - Visuales
 - Auditivos
 - Manipulativos
- Diseñar actividades con diferentes grados de dificultad y que permitan diferentes posibilidades de ejecución y expresión.

- Utilizar materiales y recursos variados según la diversidad de alumnos.

MEDIDAS CURRICULARES

- Adecuar la secuenciación y organización de contenidos a las peculiaridades del aula.
- Adecuar los criterios de evaluación a las necesidades del aula matizando el tipo y grado de aprendizaje.
- Aplicar las adaptaciones curriculares que se hayan establecido en el Proyecto Curricular en las programaciones de los Departamentos Didácticos.

MEDIDAS ORGANIZATIVAS

- Organizar la distribución de grupos, combinando agrupamientos homogéneos y heterogéneos según el tipo de actividad y aprovechando las actividades del grupo-aula para mejorar el clima, y la relación de los alumnos.
- Organizar los materiales, seleccionando materiales que puedan ser utilizados por los diversos alumnos, adaptando los de uso común y ubicándolos de forma que tengan acceso autónomo.
- Organizar los espacios y tiempos.
- Organizar la evaluación, usando varios procedimientos e instrumentos de evaluación.

6 TEMAS TRANSVERSALES. EDUCACIÓN EN VALORES.

El objetivo de la educación en valores como parte integrante del proceso de enseñanza y aprendizaje, es el desarrollo ético personal y social del alumnado, que le dote de la suficiente responsabilidad e independencia, así como de la capacidad de superación frente a adversidades, el civismo, etc. Los contenidos transversales se clasifican en:

CATEGORÍA	SIGNIFICADO
Educación para el consumo	Plantea: -Adquirir esquemas de decisión que consideren todas las alternativas y efectos individuales y sociales de consumo. -Desarrollar un conocimiento de los mecanismos de mercado, así como de los derechos del consumidor. -Crear una conciencia crítica ante el consumo.
Educación para la salud	Plantea dos tipos de objetivos: -Adquirir un conocimiento progresivo del cuerpo, de sus principales anomalías y enfermedades, y la forma de prevenirlas y curarlas. -Desarrollar hábitos de salud.
Educación para los derechos humanos y la paz	Persigue: -Generar posiciones de defensa de la paz mediante el conocimiento de personas e instituciones significativas. -Preferir la solución dialogada de conflictos.
Educación para la igualdad entre sexos	Tiene como objetivos: -Desarrollar la autoestima y percepción del propio cuerpo como expresión de la personalidad. -Analizar críticamente la realidad y corregir juicios sexistas. -Consolidar hábitos no discriminatorios.
Educación medioambiental	Pretende: -Comprender los principales problemas ambientales. -Adquirir responsabilidad ante el medio ambiente.
Educación multicultural	Pretende: -Despertar el interés por conocer culturas diferentes de la propia. -Desarrollar actitudes de respeto y colaboración con otras culturas.
Educación vial	Propone dos objetivos fundamentales: -Despertar la sensibilidad ante los accidentes de tráfico. -Adquirir conductas y hábitos de seguridad vial.
Educación para la convivencia	Pretende educar en el pluralismo, en dos direcciones: -Respetar la autonomía de los demás. -Dialogar como forma de soluciones diferencias.
Educación sexual	Sus objetivos son: -Adquirir información suficiente y científica de todos los aspectos relativos a la sexualidad. -Consolidar actitudes de naturalidad en el tratamiento de temas relacionados con la sexualidad.
Educación para Europa	Sus objetivos principales son: -Adquirir una cultura de referencia europea en geografía, historia, lenguas, instituciones, etc. -Desarrollar la conciencia de identidad europea.

Con la transversalidad educativa se pretenden dos fines:

1. En lo que se refiere a los contenidos de distintas áreas, se persigue informar al alumnado de manera que el conocimiento de todas las áreas le permita escoger aquella que más le gusta.
2. En lo que se refiere a la aplicación de los contenidos a materias que no constituyen objeto de estudio, se pretende relacionar al alumnado con su entorno.

La utilidad de las matemáticas va más allá de ser una herramienta de trabajo, ya que también participan en la formación del individuo, dotándole de capacidad de abstracción, de razonamiento, etc. Así, pues, contribuyen en mayor o menor grado según la materia, a la formación de los alumnos en las categorías señaladas en la tabla anterior.

Algunos aspectos del Álgebra relacionados con los temas transversales son, por ejemplo la utilización de herramientas algebraicas para la descripción de fenómenos cotidianos en Educación para el Consumo y de fenómenos naturales en Educación Ambiental.

Los contenidos de los temas transversales aunque no son propios del área de matemáticas, aparecen en algún momento en mayor o menor medida.

Para la Educación moral y cívica contribuyen buena parte de los contenidos actitudinales tales como los que se refieren al rigor, orden, precisión y cuidado en la elaboración de las tareas, así como en la presentación, el uso de los instrumentos, la curiosidad, el interés, la perseverancia en la búsqueda de soluciones a los problemas y la posición crítica ante las informaciones que utilizan las matemáticas.

También pueden estar presentes a través de la actuación cotidiana del profesor.

Un tema al que se le dará una mayor importancia será a la Educación del consumidor. La formación estará dirigida hacia una actitud crítica ante el consumo. Se incidirá en los siguientes aspectos:

- Publicidad. En particular interpretación y valoración de gráficos de estudios que constantemente aparecen en los medios de comunicación y las informaciones que de estas pueden extraer.
- Aspectos económicos (cuantitativos) presentes en el consumo de cualquier tipo de bienes o servicios.
- La medida. Todos los contenidos relacionados con la estimación de medidas están directamente relacionados con este tema transversal.

Otro tema transversal que estará presente desde el punto de vista metodológico será la Educación para la igualdad de oportunidades entre los sexos. Se fomentará el conocimiento y reconocimiento

de la capacidad de cada uno de los compañeros/as en el ámbito de las matemáticas, y por extensión de los hombres y las mujeres en general.

Tanto los temas transversales que se han nombrado, como los de Educación para la salud, Educación para la paz, estarán presentes a través de los contextos de los problemas y ejercicios.

7 CONCLUSIONES

Partimos de la idea de que planificar el trabajo y elaborarlo con atención, es tarea necesaria y útil en la labor del profesor, en aras de obtener los mejores resultados y de evitar situaciones indeseables en el desarrollo de su tarea educativa. Por ello, la elaboración de una Unidad Didáctica, como la que nos ocupa, es fundamental antes de abordar cada tema. Ciertamente es que una UD nunca nos parecerá lo suficientemente acabada o mejorada.

En esta Unidad Didáctica se ha perseguido desarrollar lo estipulado según el currículo que la normativa vigente establece. Partiendo del grado de conocimientos previos del alumnado, se ha confeccionado la UD teniendo en cuenta los organizadores del currículo estudiados a lo largo del master, en la asignatura de 'Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas', útiles en todas las etapas previstas en la realización de la unidad.

A través de tales organizadores se realiza el análisis didáctico, comenzando con las nociones históricas introductorias al tema, a lo que le sigue el análisis de contenido y el análisis cognitivo. Ambos análisis son imprescindibles y preceden al posterior desarrollo de lo que será la unidad en sí. Partiendo del conocimiento de los conceptos y procedimientos, se elabora el mapa conceptual, organizador de la estructura de la unidad.

Tras ello, se comentan los sistemas de representación aplicables a la didáctica del tema, muy útiles en el proceso de enseñanza-aprendizaje, sobre todo en este tema que para los alumnos, de 2º de ESO, es nuevo.

El estudio de la fenomenología es de gran importancia a la hora de elegir las actividades, que deben tener un marcado carácter motivador.

Tras el análisis de contenido se procede al análisis cognitivo, con el que se pretende identificar y seleccionar los objetivos de la unidad, vinculados con las competencias, clasificados por focos, estudiando las posibles limitaciones para evitarlas o subsanarlas, y ensayando actividades tipo que abarquen el logro de los objetivos y afronten los errores más frecuentes.

Una vez realizados estos análisis se elabora una secuenciación de jornadas para la enseñanza en el aula, que se encaminen a alcanzar los objetivos marcados. Se pretende conseguir que en las sesiones participe toda la clase, promover tanto el trabajo en grupo como el individual, invitando asiduamente al alumno a exponer sus dudas, resultados obtenidos y conclusiones deducidas, frente al resto de compañeros. Se les solicitará también que desarrollen actividades en casa para reforzar

los conocimientos adquiridos y para que, al enfrentarse solos a dichas actividades, les surjan dudas que resolver y que les incitarán a razonar.

Finalmente, se establecen las pautas de evaluación de aprendizajes adquiridos. Se utilizarán para ello diferentes instrumentos, para evitar dejar toda la responsabilidad a un único ejercicio, siendo así más justa la calificación final, pues se tendrá en cuenta todo el proceso seguido por el alumno desde el inicio de la unidad.

La finalidad de este master es la adquisición por los estudiantes de una formación avanzada, orientada a la especialización profesional, que les habilite para el ejercicio de las profesiones reguladas de Profesor de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, de conformidad con lo establecido en la Ley Orgánica 2/2006 de Educación y en la Resolución de 17 de diciembre de 2007 de la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación. Se persigue pues, adquirir las competencias necesarias para el ejercicio de la docencia, entendiendo como tales no solo las que se refieren a conocimientos en este caso matemáticos, sino también en referencia a la psicopedagogía necesaria para la educación y la formación del alumnado. El profesor no solo transmitirá conocimientos, sino que educará en valores y fomentará el desarrollo de otras habilidades distintas de la materia, como la comunicación lingüística, el conocimiento e interacción con el mundo físico, el tratamiento de la información y competencia digital, lo que denominamos 'aprender a aprender', la autonomía e iniciativa personal, etc.

Es por ello que el master se estructura en:

- módulo genérico, en el que se estudia el 'desarrollo de la personalidad', los 'procesos y contextos educativos' y la interacción en la terna 'sociedad, familia y educación'
- módulo específico, en el que se ahonda en el 'aprendizaje de la matemática', los 'complementos a la formación' y la 'innovación docente'
- libre disposición, donde el estudiante optará al desarrollo de las asignaturas que estime complementarias del resto de las que ya cursa
- prácticas, donde se ponen a prueba los aprendizajes obtenidos
- trabajo fin de master, que pretende garantizar el haber obtenido dicho aprendizaje.

Todas y cada una de estas fases son necesarias para lograr la consecución del objetivo marcado.

Para terminar voy a hacer un balance de mi paso por el master.

El trabajo en grupo me ha supuesto una experiencia enriquecedora a lo largo del curso, ya que compartir y discutir distintos puntos de vista ayudan a afianzar conocimientos y a lograr un aprendizaje más enriquecedor.

En mi formación como profesora, considero que todas las asignaturas cursadas a lo largo del master, han sido totalmente necesarias, cada una en su ámbito. Serán de aplicación en el día a día de la labor docente.

Con respecto a las prácticas, creo haber cubierto todos los objetivos marcados inicialmente en el 'Proyecto Individual de Prácticas'. Así pues, las prácticas me han aportado:

- soltura para desenvolverme en la labor docente,
- confianza en que puedo transmitir conocimientos,
- experiencia personal y con otros profesores, útil para adoptar roles y criterios,
- conocimientos en cuanto a la forma de dar una clase, preparación previa, elaboración de unidades didácticas, evaluación de alumnos, manejo de las relaciones alumno-profesor, manejo de la clase como conjunto, organización para lograr fines, conocer nuevos sistemas de enseñanza-aprendizaje, etc.

Además han servido para conocer un centro educativo 'por dentro', tratar la enseñanza actuando con grupos de alumnos y con alumnos concretos, observando estrategias para conocer a los alumnos y relacionarme con ellos.

A través de la observación de clases y de las conversaciones y consejos de los tutores y profesores del centro, se han cubierto las competencias que me marqué al inicio de las prácticas.

Ya para finalizar, un último apunte sobre este Trabajo fin de Master. Su realización me ha servido para poner en práctica todo lo aprendido en el master, pero también para entender que la formación como profesora no acaba aquí, es necesario el 'reciclaje', la adaptación al entorno y a los tiempos, el esfuerzo diario y la previsión.

8 BIBLIOGRAFIA

Referencias bibliográficas

- Colera, J. y Gaztelu, I. (2008). *Educación Secundaria. Matemáticas 2º ESO*. Madrid: Grupo Anaya.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.
- Grupo Azarquiel (1991). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.
- Rico, L., Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., Sierra, M., Socas, M. (1987). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona, Horsori.
- Socas, M. y otros (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

Páginas web

<http://thales.cica.es/>

<http://www.unizar.es/>

<http://www.uoc.edu/>

<http://roble.pntic.mec.es/>

<http://redesformacion.jccm.es/>

<http://html.rincondelvago.com/>

<http://www.amolasmates.es>

<http://www.educacionenvalores.org/>

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/>

<http://centros4.pntic.mec.es/>

<http://www.educaplus.org/>

<http://descartes.cnice.mec.es/>

Documentación oficial:

- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo de educación – LOE

- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. Enseñanzas mínimas en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO)
- Decreto 231/2007, de 31 de julio. Ordenación y enseñanzas en la ESO (Andalucía)
- Orden 10 de agosto de 2007, Desarrollo del currículo en la ESO (Andalucía)

9 ANEXO I: PROPUESTA DE PRUEBAS ESCRITAS: PREVA Y FINAL

AUTOEVALUACIÓN POLINOMIOS 2º E.S.O.

Nombre: _____

1.- (2 puntos) Expresa algebraicamente y simplifica si es posible

- a) Un número x más su triple más su doble
- b) La mitad de un número a menos su tercera parte
- c) El área de un cuadrado de lado x
- d) El perímetro de un rectángulo donde la altura es dos unidades más grandes que la base

2.- (2 puntos) Calcula el valor de un polinomio para los puntos $x=0$ y $x=-1$. $P(x) = x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}$.

$P(0) =$

$P(-1) =$

3.- (3 puntos) Si $P(x) = 2x^3 - x^2 + x + \frac{1}{2}$, $Q(x) = x - 1$ y $R(x) = 3x^2 + x$, calcula:

$$P(x) - Q(x)$$

$$3R(x) - 2Q(x)$$

$$(3x - 1) \cdot R(x)$$

$$Q(x) \cdot R(x)$$

4.- (3 puntos) Resuelve las igualdades siguientes.

a) $(x - 1)^2 =$

b) $(3x + 2)^2 =$

c) $(2 + 5x)^2 =$

d) $(3 - x) \cdot (3 + x) =$

e) $x^2 - 2x + 1 = (-)^2$

f) $4x^2 + 4x + 1 = (-)^2$

g) $x^2 - 4 = (x +) (x -)$

h) $x^2 - 25 = (x +) (x -)$

EXAMEN ECUACIONES 2º E.S.O.

Nombre: _____

1.- Rodea las ecuaciones y tacha las identidades.

$3x - x = 2x$ $3x - 1 = x$ $X/2 - X/5 = 3X/10$

$5x - 3 = x + 1$ $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ $x^2 - 5x + 6 = 0$

2.- Resuelve.

a) $2x + 3 = 1$ $x =$

b) $3x + 5 - x = 6 - 2x + 3$ $x =$

c) $3(x - 2) + 8 = x - 2(2x - 3)$ $x =$

3.- Resuelve.

a) $x/2 + 1/3 = x$ $x =$

b) $x/5 + 1 = 3/5 + x$ $x =$

c) $x - 3/8 = 5x/4 - x/2$ $x =$

4.- Resuelve con ayuda de una ecuación.

a) Un cuaderno cuesta el triple que un bolígrafo. Dos cuadernos y tres bolígrafos cuestan 5,4 €. ¿Cuánto cuesta un cuaderno? ¿Y un bolígrafo?

b) Si al doble de un número le restas quince unidades, obtienes la mitad del número. ¿De qué número se trata?

c) Francisco compra un rollo de sedal para pescar. Le da la mitad a su hermano y pone la tercera parte en el carrete de su caña. De esta forma, solo le quedan 30 m. ¿Cuál era la longitud del rollo?

d) Andrea tiene 14 años, y su abuelo Julián, el quintuplo. ¿Cuántos años han de transcurrir para que la edad de Julián sea solo el triple que la de Andrea?

	HOY	DENTRO DE X AÑOS
ANDREA		
JULIÁN		