UGR

JUAN LUIS REY LÓPEZ

TRABAJO FIN DE MÁSTER

UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN 2º DE E.S.O.

MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA Y BACHILLERATO - ESPECIALIDAD MATEMÁTICAS

UGR

UNIDAD DIDÁCTICA SOBRE ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN 2º DE E.S.O.

Memoria de TRABAJO FIN DE MÁSTER realizada bajo la tutela del Doctor José Luis Lupiáñez Gómez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Juan Luis Rey López, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo.: Juan Luis Rey López

VºBº del Tutor

Fdo.: José Luis Lupiáñez

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

El presente documento recoge una planificación educativa de ocho sesiones para un grupo de alumnos del segundo curso de educación secundaria obligatoria acerca de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Nos encontramos ante un tema crucial en el avance y desarrollo matemático de los alumnos pues se están sentando las bases para la matemática que van a estudiar en los años siguientes, luego será fundamental profundizar en el estudio y en los recursos disponibles para lograr una comprensión, una aproximación y planteamiento de la unidad ideal para conseguir un aprendizaje óptimo por parte de los alumnos.

Para ello, en el punto dos, se presenta la fundamentación del trabajo donde se asientan las bases del documento en lo que a referencias e investigaciones previas se refiere lo que respalda el análisis presentado. También su ser recoge concordancia con la legislación vigente a nivel autonómico y nacional.

El diseño de una unidad de este tipo, tal y como presentará la fundamentación, no es algo trivial y se basa en un análisis didáctico adecuado y realizado concienzudamente. En el punto tres se presenta dicho análisis que se subdivide en los apartados de análisis de contenido, análisis cognitivo y análisis de instrucción.

En el análisis de contenido extraeremos los elementos característicos del tema desde la perspectiva conceptual y procedimental, y las conexiones entre ambos campos. Se describirán también las distintas opciones de representación de esos elementos.

En cuanto al análisis cognitivo, recogerá tres epigrafes esenciales para el trabajo como son el desarrollo de unas expectativas y objetivos a alcanzar con el trabajo planificado, unas limitaciones identificadas y que tratarán de ser subsanadas y, por último, el apartado de oportunidades de aprendizaje para superar limitaciones y/o conseguir avances de aprendizaje. Aquí se integra también el apartado de fenomenología para observar a qué fenómenos responde nuestro tema.

Para finalizar el análisis didáctico se presentará el análisis de instrucción donde se atienden las bases para el diseño de las tareas y se explicita el esquema seguido para su selección.

Un completo informe sobre el sistema de evaluación considerado integra el punto cuatro del trabajo y presenta las ideas manejadas para dicho proceso.

Tras esto se presenta la programación de sesiones que culmina todo ese trabajo previo y que se nutre de los elementos reflejados para cumplir los objetivos marcados. Se complementa con un apartado número seis de atención a la diversidad que recoge la filosofía considerada de cara a satisfacer la posible variedad de necesidades.

Finalmente las conclusiones recogen la reflexión sobre todo aquello que implica la realización de una tarea de este tipo como son las dificultades encontradas o el poso final que deja.

2. FUNDAMENTACIÓN

En este punto del trabajo procedo a presentar la base teórica y legal que cimenta la unidad didáctica y le da estructura, así como el enfoque con el que he abordado su realización.

Para la realización de esta unidad didáctica parto de la noción de currículo que nos da la LOE (Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación), el cual se define como el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en ella.

La finalidad del currículo es relacionar la organización y legislación educativa con la actividad docente del profesor. En nuestro caso, las leyes españolas siempre apuestan por un modelo descentralizado que permite cierta flexibilidad y que nos permite, con la elaboración de unidades didácticas como esta, determinarlo en el conocido como tercer nivel de concreción.

Previamente, en el primer nivel de concreción, la Ley Orgánica 3/2006 de Educación (LOE) fija su contenido reflejado en el Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria y se fijan sus enseñanzas mínimas, y que aparece recogido en B.O.E. número 174 de 21/07/2007.

Según la Orden ECI/2220/2007, de 21 de Julio de 2007, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del segundo curso de ESO en España, podemos situar esta unidad didáctica dentro del bloque de Álgebra, donde se encuadra el tema "Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes". Cabe mencionar que los criterios de evaluación de cada bloque proporcionan información importante sobre las metas que se deben conseguir, lo que abordaremos en el apartado dedicado a la evaluación.

A nivel autonómico, está basada en la Orden de 10 de Agosto de 2007, de Educación en Andalucía (LEA) y su contenido queda reflejado en el Decreto 331/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes al segundo curso en Andalucía. (BOJA 252 del 26/12/2007.).

Como he mencionado anteriormente la división que hemos aprendido en la asignatura de "Procesos y Contextos" del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la UGR nos indica que en este proceso de elaboración de la unidad didáctica, nos encontramos en el tercer nivel de concreción correspondiente al profesor. Por tanto, creo adecuado tener en cuenta las consideraciones que pueda hacer dicho profesional y establecería que la más importante de ellas es la de valorar y contar con el conocimiento previo que tienen los alumnos sobre la materia. En el caso de las ecuaciones de primer grado, su presencia clave en el currículo del primer curso de ESO hace que su enfoque en el segundo curso venga determinado precisamente por eso. Recurrimos a dicho temario para conocerlo y es el siguiente (Orden 2220/2007):

Bloque 3. Álgebra.

Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar.

Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos.

Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa.

Búsqueda de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas. Obtención de expresiones algebraicas en procesos sencillos de generalización.

Obtención de valores numéricos en fórmulas y expresiones algebraicas sencillas.

Introducción a las operaciones con expresiones algebraicas: suma, resta, producto y cociente de monomios.

Resolución de ecuaciones del tipo $ax + b = cx + d$ utilizando métodos numéricos y algebraicos. Planteamiento de problemas que utilizan este tipo de ecuaciones para obtener la solución.

Valoración de la precisión y simplicidad del lenguaje algebraico para representar y comunicar diferentes situaciones de la vida cotidiana. (p. 31792)

Por tanto vemos que en primer curso de ESO tiene una gran importancia la ecuación de primer grado la cual en segundo disminuirá para dejar espacio a metas más complejas. Por todo esto será necesaria una aproximación analítica y concienzuda al temario sin caer en la facilidad de plegarse al contenido y para ello utilizaré en este trabajo los elementos que expongo a continuación.

Recurro en primer lugar a los organizadores del currículo planteados por Rico (1997) que son los siguientes:

- Errores y dificultades usualmente detectados.
- la diversidad de representaciones utilizadas para cada sistema conceptual
- Fenomenología de los conceptos implicados.
- Diversidad de materiales de tipo manipulativo y recursos que pueden ser utilizados.
- Evolución histórica de cada campo.

También se tienen en cuenta otros organizadores (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009) que, junto con los anteriores, ya han sido utilizados y trabajados en la asignatura "Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas". Éstos nos han permitido aprender y trabajar con el esquema que utilizo en la elaboración de esta unidad didáctica y que los autores anteriores denominan *análisis didáctico* para estructurar y secuenciar los organizadores del currículo. El análisis didáctico incluye varios procedimientos, cada uno de los cuales incluye el trabajo con algunos organizadores. La estructura básica del análisis didáctico es la siguiente:

- Análisis de contenido:

    - Estructura conceptual.

    - Sistemas de representación.

    - Fenomenología.

- Análisis histórico (ANEXO 1).

- Análisis cognitivo:
    - Expectativas de aprendizaje.
    - Limitaciones de aprendizaje.
    - Oportunidades de aprendizaje.

- Análisis de instrucción:
    - Complejidad de las tareas
    - Secuenciación, según la funcionalidad de las tareas.

Con este esquema organizativo abordamos la realización de un análisis didáctico de nuestro tema, con la intención de explorar con tanto detalle como sea posible, la variedad de significados y relaciones que incluye. Este tipo de análisis nos permite tener un mejor conocimiento del mismo, lo que nos facilitará fundamentar y justificar nuestra propuesta de unidad didáctica.

3. ANÁLISIS DIDÁCTICO

3.1. ANÁLISIS DE CONTENIDO

3.1.1. ANÁLISIS DE LA ESTRUCTURA CONCEPTUAL

En esta primera parte del análisis de contenido el grupo comenzó determinando la estructura que, acorde a la bibliografía consultada, sería apropiada para el estudio y presentación de los distintos elementos de nuestro tema. Dicha estructura constaría de dos cabeceras principales: campo conceptual y campo procedimental.

Dentro del conceptual encontramos a su vez una serie de subcategorías. En primer lugar están los hechos compuestos por términos donde nuestro grupo enumeró los siguientes: ecuación, monomio, valores, miembro, coeficiente, solución, término, parte literal, igualdad algebraica, incógnita, grado, identidad y fracción algebraica. Junto con términos también son hechos las notaciones (+, -, ·, / , =, las letras a, b, c... x, y, z... usadas como coeficientes y/o incógnitas, ~ y los paréntesis ( )) y los convenios necesarios para el correcto tratamiento de los elementos involucrados en el tema. A saber:

- Los monomios semejantes se suman, dejando la misma parte literal sumando los coeficientes.
- Jerarquía de operaciones.
- Exclusión del signo de multiplicación (x), debido a la confusión con la incógnita x.
- La expresión “ax” se lee “a equis” y no “ a por equis”.

Otra subcategoría que encontramos en el campo conceptual fue la titulada “conceptos” donde se presentaban las nociones de incógnita, expresión algebraica, identidad, solución, operaciones con expresiones algebraicas, ecuación y la noción de equivalencia.

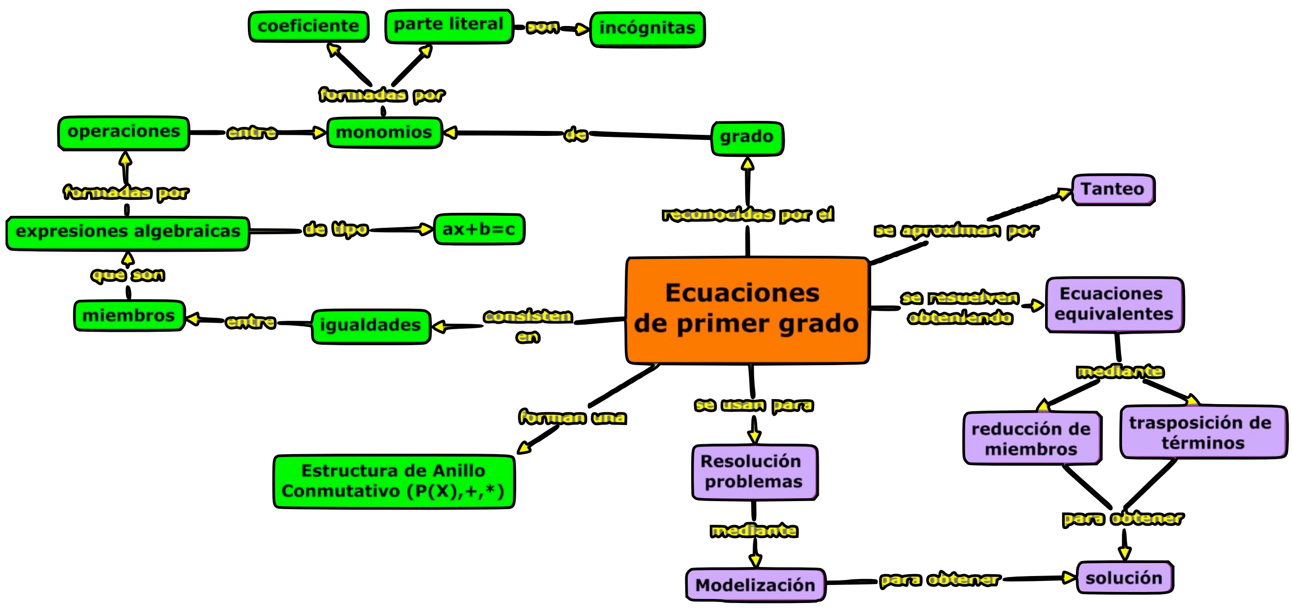
Entrando ya en el campo procedimental tenemos en primer lugar la categoría “destrezas” indicando aquellas que los alumnos deberán adquirir durante el proceso de aprendizaje donde identificamos las siguientes:

- Escribir y leer expresiones algebraicas y ecuaciones.
- Operar con monomios.
- Resolver ecuaciones sencillas por tanteo.
- Obtener ecuaciones equivalentes.
- Simplificar en operaciones con expresiones algebraicas.
- Traducir al lenguaje algebraico enunciados sencillos e, inversamente, inventar un enunciado dada una expresión algebraica.

A continuación el grupo identificó los razonamientos deductivo para las propiedades de las operaciones y la resolución de problemas, el figurativo en el uso de gráficos para encontrar la solución de los problemas y la búsqueda de argumentos para justificar lo realizado. Se dedujo que la estructura de nuestro tema era “Anillo conmutativo” (P(x),+,·) y se obtuvieron las estrategias necesarias siguientes:

- Cálculo mental.
- Reconocimiento de identidades.
- Reducción de los miembros de una ecuación y transposición de términos de un miembro a otro.
- Resolución de ecuaciones complejas (incluyendo paréntesis y denominadores).
- Resolución de problemas (modelización).

Para concluir con esta parte se elaboró un mapa conceptual que mostrase cada uno de estos elementos del tema las relaciones entre ellos.



Este es el mapa conceptual de las ecuaciones de primer grado, en donde se muestran y relacionan los elementos que organizan la estructura conceptual. Las principales relaciones son las siguientes:

En base a este mapa podemos determinar los focos principales de nuestro tema:

· Manejo del lenguaje algebraico (Foco 1) (en el mapa podemos observar los distintos elementos que aparecen en este foco monomios, igualdades,   miembros, etc.)
· Identificar y caracterizar ecuaciones de primer grado (Foco 2) (en el mapa quedan reflejadas como las expresiones del tipo ax + b = c)

Si nos fijamos en el mapa estos focos corresponden a la parte en verde, mientras que los dos siguientes atañen a la parte en morado con lo que reunimos todo en 4 focos:

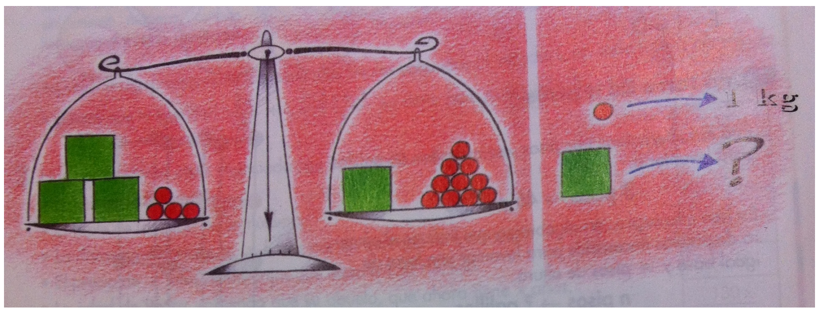
· Resolver ecuaciones de primer grado (Foco 3) (en el mapa se representan los procesos para la resolución)
· Resolución de problemas (Foco 4) (también reflejado en el mapa)

3.1.2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Los sistemas de representación son las distintas formas mediante las cuales podemos representar un concepto y sus relaciones con otros. En esta fase tratamos de identificar aquellos presentes en nuestro tema, en el cual la simbólica tiene mucho peso al tratarse de combinaciones de letras, números y signos. Las más habituales son:

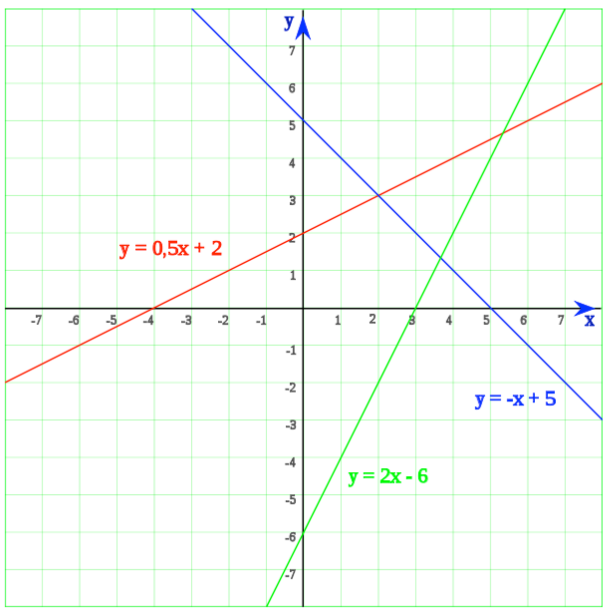
$ax + b = c$,	a,b,c como coeficientes
	x,y,z como incógnitas
	(+, −, ×, /, =, ( ), [ ], { }) como signos de operación y relación

En cuanto a la representación manipulativa encontramos dos ejemplos como son el ábaco y la balanza. Estos dos ejemplos tienen mayor importancia en el primer curso de educación secundaria pues sirven para introducir y mostrar cómo las ecuaciones están presentes en el mundo real y la vida, aunque también pueden usarse en el segundo curso en la(s) primera(s) sesión(es) introductoras y/o motivadoras.

Respecto a la representación verbal identificamos la terminología asociada al tema y el uso de expresiones como “el triple de un número más su mitad es igual a siete”.

También está presente la representación gráfica con la representación de funciones en los ejes cartesianos, la cual podemos considerar más importante pues será necesario que entiendan y manejen adecuadamente dicho sistema de representación en el devenir de su aprendizaje. Este sistema de representación les permitirá aprender que las ecuaciones de primer grado determinan rectas en el plano.



3.2. ANÁLISIS COGNITIVO

El análisis cognitivo hace referencia tanto a qué hacen y qué pueden hacer los alumnos con los contenidos que se les ofrecen (expectativas), como a los errores que ellos mismos cometen y cómo podría promoverse el aprendizaje en base a las expectativas fijadas (limitaciones y oportunidades en el aprendizaje). A continuación presento el análisis que como grupo desarrollamos en la asignatura "Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas" del Master.

3.2.1. EXPECTATIVAS

Dentro de cada foco de los presentados existen ciertos objetivos específicos que se deben perseguir. Los mostramos a continuación en una tabla puestos en relación con las competencias matemáticas propuestas en el proyecto PISA [1] (OCDE, 2005):

PR: Pensar y razonar	AJ: Argumentar y justificar
C: Comunicar	M: Modelizar
RP: Plantear y resolver problemas	R: Representar
LS: Uso del lenguaje y operaciones	
HT: Emplear soportes y herramientas tecnológicas	

[1] PISA: *Program for International Student Assessment*

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1.1	Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.				X		X	X	
1.2	Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas.	X				X		X	
1.3	Identificar polinomios de primer grado.		X					X	
2.1	Distinguir los miembros, términos o incógnitas de una ecuación de primer grado.		X					X	
2.2	Reconocer diferentes tipos de ecuaciones de primer grado.	X	X					X	
2.3	Diferenciar entre ecuaciones e identidades.		X					X	
2.4	Leer y escribir ecuaciones de primer grado.			X				X	

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
3.1	Encontrar la solución de una ecuación de primer grado	X	X					X	
3.2	Aproximar una solución por tanteo usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas.	X	X				X		X
3.3	Construir ecuaciones equivalentes a una dada	X	X					X	
3.4	Conocer los diferentes métodos de resolución.	X	X						
3.5	Comprobar la validez de una solución.		X					X	
4.1	Modelar enunciados de problemas.			X	X	X	X	X	
4.2	Interpretar una ecuación.			X	X	X		X	
4.3	Interpretar y discriminar soluciones.	X	X						

La división en colores de los objetivos hace referencia a cada uno de los cuatro focos señalados anteriormente. Recordemos que los alumnos están sólo en su segundo año de trabajo con este campo de las matemáticas y, por tanto, es necesario desarrollar la competencia de uso del lenguaje simbólico (LS). De ahí que aparezca señalada en la mayoría de objetivos.

Por otro lado, se aprecia que hay un gran número de objetivos dentro de los tres primeros focos que intentan cubrir la competencia de argumentar y justificar (AJ). ¿Por qué? Es importante que el alumno justifique y analice sus respuestas ya que de este modo el profesor podrá observar qué errores se cometen y qué dificultades existen al principio de la lección con el fin de subsanarlos en el momento adecuado antes de profundizar en cuestiones más complejas dentro del tema.

Por último, vemos que dentro del cuarto foco, la resolución de problemas, son importantes las competencias de:

- Comunicar, pues el alumno debe ser capaz de comprender e interpretar correctamente enunciados orales y escritos
- Modelizar, porque deben ser capaces de estructurar y analizar la situación que se les plantea, y
- Resolver problemas, ya que buscamos la capacidad para plantear y formular problemas.

3.2.2. LIMITACIONES

Dentro de las limitaciones en el aprendizaje, que surgen de la conjunción de los contenidos con el conocimiento y las habilidades de los escolares, nuestro estudio de los contenidos y procedimientos del tema así como el análisis de tareas nos permitió identificar una serie de errores asociados a cada foco anteriormente mencionado. Los presentamos a continuación en forma de tablas:

MANEJO DEL LENGUAJE ALGEBRAICO	OBJETIVOS
E1.- Mal manejo de símbolos. Ej.: $2x+3=5x$	1.1 1.2
E2.- Operar erróneamente con monomios.	1.2
E3.- Incorrecto uso de las propiedades numéricas. Ej.: $2(x-1)=2x-1$	1.2
E4.- No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. Ej.: $5*x*y=5xy$	1.2
E5.- No distinguir entre fracción algebraica y monomio. Ej.: $(a+b)/b$	1.2
E6.- Confundir grado de un polinomio. Ej.: $3xy+2$	1.3

Vemos que dentro del primer foco se cometen mayoritariamente errores asociados al objetivo 1.2, que hace referencia a la identificación de expresiones algebraicas y saber operar con ellas. Esto es algo normal y razonable pues no todos alcanzarían un nivel excelente en su primer contacto con el álgebra en el curso anterior. Son niveles de abstracción que el alumno puede tener problemas de alcanzar teniendo en cuenta que a esta edad (13~14 años) si bien ya todos están en el estadio de las operaciones formales no todos tienen el mismo desarrollo y por tanto deben ir asimilando estos conceptos y procedimientos mediante tareas.

IDENTIFICAR Y CARACTERIZAR ECUACIONES DE PRIMER GRADO	OBJETIVOS
E7.- Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado.	2.1
E8.- Consideración errónea del grado de una ecuación. Ej.: $3x+x^2=12+x^2$	2.2
E9.- No reconocer los distintos tipos de igualdades algebraicas.	2.3

Dentro del segundo foco encontramos también ciertas dificultades que se traducen en los siguientes errores cometidos con relativa frecuencia:

La falta de asimilación y manejo de términos como la de grado, parte literal, miembro etc. pueden inducir a confusiones y facilitar la aparición de dificultades.

También esas carencias aparecen en el trabajo con polinomios, en el cual pueden confundir (E7) ecuación con polinomio, o polinomio con monomio, miembro con término, etc. En ocasiones, la simple ocurrencia de una incógnita elevada a cierto grado, lleva a los alumnos a atribuir dicho grado a la ecuación en la que aparece (E8), pasando por alto el hecho de que ese grado de la incógnita termina desapareciendo al agrupar términos. Al mismo tiempo, es muy común en este contexto que los alumnos no tengan clara la diferencia entre identidad y ecuación (E9) y se hará necesaria la realización de ciertas tareas a fin de asentar dichos conceptos.

Pasamos ahora a analizar los errores más comunes cometidos dentro del tercer foco: resolución de ecuaciones de primer grado.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO	OBJETIVOS
E10.- Uso inadecuado de materiales.	3.2
E11.- Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.	3.1 3.3 3.4
E12.- Obtener igualdades a través de fracciones: Ej.: De (x+2)/(x+5)=6/7, deducir que x+2=6 y x+5=7	3.3

Cuando se le pide al alumno que aproxime por tanteo la solución de una ecuación, el poco manejo que tienen de los materiales propuestos (ábaco, calculadora, software, etc.) les hace llegar a soluciones erróneas (E10).

También ocurre que los alumnos encuentran dificultades a la hora de equilibrar la balanza, de ahí que obtengan ecuaciones equivalentes de manera errónea. Esto es debido a que no aplican correctamente las técnicas básicas de resolución, es decir, no saben trasponer términos ni reducir miembros (E11), o directamente acaban haciendo deducciones erróneas, llegando a obtener ecuaciones que en realidad no son equivalentes (E12).

Por último, en el cuarto foco distinguimos los siguientes errores:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	OBJETIVOS
E13.- Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico.	4.1
E14.- Determinar soluciones carentes de sentido. Ej.: una longitud nunca puede ser negativa.	4.3

El primer error tiene que ver con el hecho de tener poca práctica en este tipo de contexto, ya que es la primera vez que se relaciona el lenguaje natural con el simbolismo matemático. Al mismo tiempo, es difícil que el alumno se dé cuenta de que no siempre la solución obtenida es la correcta, ya que se necesita un análisis a posteriori para reflexionar acerca de la validez de la solución analítica de la ecuación en consonancia con el contexto del problema.

3.2.3. OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

A continuación muestro una serie de tareas que como grupo seleccionamos por su validez para permitirnos alcanzar algunas de las expectativas antes mencionadas y para superar algunas limitaciones de las previamente presentadas. El enfoque que establecimos fue considerar que no existen tareas que solamente cumplan una de estas pretensiones sino que engloban ambas.

TAREA 1:

Busca por tanteo, usando la calculadora, una solución para la ecuación

$13x - 8 = 83$

Analizando esta tarea, que trabaja los conceptos de noción de ecuación, de solución y de incógnita y la destreza de buscar soluciones por tanteo, descubrimos que contribuye al desarrollo de los objetivos 3.1 (Encontrar la solución de una ecuación de primer grado) y 3.2 (Aproximar una solución por tanteo, usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas.)

Por otro lado, al mismo tiempo, contribuiremos al desarrollo de las competencias Representar (R), Uso de lenguaje simbólico (LS), Pensar y Razonar (PR), Argumentar y Justificar (AJ) y Uso de herramientas tecnológicas (HT).

Respecto a las limitaciones contribuye a superar el error E10 (Uso inadecuado de materiales).

TAREA 2:

a) Resuelve siguiendo las indicaciones:

$$8 - x = 2$$

Primero, suma "x" a ambos miembros.
Segundo, resta 2 a ambos miembros.

b) ¿Cómo resolverías $3x = 6 + x$?

En esta tarea se trabajan los conceptos de noción de miembro y de equivalencia, la destreza de obtención de ecuaciones equivalentes y las estrategias de reducción de miembros y de transposición de términos.

Los objetivos a desarrollar son el 2.1 (Distinguir los miembros, términos e incógnitas de una ecuación de primer grado), el 3.1 (Encontrar las soluciones de una ecuación de primer grado) y el 3.3 (Construir ecuaciones equivalentes a una dada). En este caso las competencias desarrolladas son PR (Pensar y Razonar), AJ (Argumentar y justificar) y LS (Uso del lenguaje simbólico).

En cuanto a las limitaciones favorece la superación del error E11 (Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado).

TAREA 3:

Escribe una expresión para cada enunciado:

a) el doble de x
b) el siguiente de x
c) la mitad de x más seis

En esta ocasión se trabajaría el concepto de noción de expresión algebraica y las destrezas de escritura de las mismas y la de traducción de enunciados.

Los objetivos abordados son el 1.1 (Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números) y el 4.1 (Modelar enunciados de problemas). Por ello las competencias relacionadas serían M (Modelar), R (Representar), C (Comunicar), RP (Plantear y resolver problemas).

Las limitaciones trabaja la superación del error E13 (Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico).

TAREA 4:

Explica, en cada caso, las diferencias entre las dos resoluciones de cada ecuación, elige la que prefieras y justifica por qué.

a) $3(x + 1) = 15$	$3(x + 1) = 15$	b) $7(x - 2) = 3(x - 2) + 16$	$7(x - 2) = 3(x - 2) + 16$
$3x + 3 = 15$	$x + 1 = 5$	$7x - 14 = 3x - 6 + 16$	$4(x - 2) = 16$
$3x = 12$	$x = 4$	$7x - 14 = 3x + 10$	$x - 2 = 4$
$x = 4$		$4x - 14 = 10$	$x = 6$
		$4x = 24$	
		$x = 6$	

Este tipo de tarea, basada en el trabajo de J. Star (2007), permite al alumno profundizar en las nociones de ecuación, miembro y solución y en las destrezas “obtener ecuaciones equivalentes” y “Simplificar en operaciones con expresiones algebraicas”.

Es una tarea que abarca una destacable cantidad de objetivos como son el 1.2 (Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas), 2.1 (Distinguir los miembros, términos o incógnitas de una ecuación de primer grado), 2.2 (Reconocer diferentes tipos de ecuaciones de primer grado), 3.1 (Encontrar la solución de una ecuación de primer grado), 3.3 (Construir ecuaciones equivalentes a una dada) y 3.4 (Conocer los diferentes métodos de resolución). Las competencias trabajadas serían PR (Pensar y razonar), C (Comunicar), AJ (Argumentar y justificar) y LS (Uso del lenguaje y operaciones).

Las limitaciones afrontadas son E3 (Incorrecto uso de las propiedades numéricas), E4 (No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación), E7 (Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado) y E11 (Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado).

3.2.4. FENOMENOLOGÍA

El análisis fenomenológico en las matemáticas trata de describir los fenómenos que nos encontramos en la vida cotidiana y su relación con los conceptos, procedimientos y propiedades de un tema de matemáticas. Se trata de establecer una relación entre una estructura matemática y los grupos de fenómenos asociados a ella.

Podemos agrupar los fenómenos en función de las características comunes que encontramos en ellos, y que son modeladas por un concepto. Este modelo puede no implicar a todo el concepto, sino ser una subestructura de la estructura matemática que lo configura.

El conjunto de fenómenos que comparten las mismas características estructurales se agrupan en contextos.

En el caso de las ecuaciones de primer grado el **contexto es único**, ya que sirven para encontrar el valor (si lo hay) de un dato desconocido, conocida la igualdad entre dos combinaciones afines de ese dato. En todos los fenómenos de la vida cotidiana donde encontramos ecuaciones de primer grado ocurre esto.

La **estructura** es ax+b=c. Se pueden tener subestructuras en función del tipo de ecuación que se obtiene a partir de estos fenómenos y de los valores que tomen a, b y c, (ax + b = c, ax - b = c, ax = c), pero matemáticamente es la misma estructura, que cambia dependiendo de las condiciones de un mismo fenómeno. Las soluciones de estas ecuaciones pueden ser una (x+2 = 5, 3x = 9), ninguna (2x + 2 = 2x + 4) o infinitas (x + 2 = x + 2).

A continuación se realiza un análisis de los fenómenos que se pueden modelar mediante ecuaciones de primer grado:

- En la **Física**, aparecen ecuaciones de la velocidad, la densidad o la elongación de los muelles. Todas ellas son del tipo ax = b
- En **Trigonometría**, se puede establecer una ecuación a partir de las razones trigonométricas, calculando algún dato desconocido. También son del tipo ax = b.
- En **Semejanza de figuras**, entre magnitudes que son directamente proporcionales, se resuelve mediante una ecuación del tipo ax = b.
- En problemas cotidianos donde usamos **Porcentajes**, vuelven a aparecer magnitudes directamente proporcionales, resolviéndolas mediante ecuaciones de primer grado del tipo ax = b

Todos los fenómenos anteriores se pueden agrupar en un grupo, en el que la solución se obtiene mediante el uso de la ecuación de primer grado del tipo **ax = b**, donde solo hay **proporcionalidad** entre las magnitudes conocidas y desconocidas.

- En fenómenos donde hay que averiguar **precios** desconocidos, dependiendo de las condiciones del mismo, aparece la estructura ax + b = c en algunas de sus expresiones.

- En situaciones cotidianas donde hay que **repartir** algo, también se modela mediante ecuaciones del tipo ax + b = c, también con diferentes condiciones iniciales.
- En **Geometría,** resolveremos diferentes perímetros o áreas mediante ecuaciones de primer grado ax + b = c, dependiendo de los datos conocidos, aunque puede ser más común encontrarnos con ax = b.
- Los problemas para averiguar la **edad** de una persona son muy comunes en el uso de ecuaciones de primer grado.
- Otro tipo son los **numéricos**, encontrar un número desconocido a partir de relaciones entre otros.
- En **Estadística,** se usa la ecuación para calcular por ejemplo la media o uno de los valores que la integra.

En estos últimos fenómenos, además de ecuaciones con relación de proporcionalidad, aparece además la **afinidad**, y podemos encontrar la estructura ax+ b = c, o la simplificada ax = c.

Todos estos fenómenos en los que hay problemas que se resuelven con ecuaciones de primer grado pueden aparecer en diferentes **situaciones:** personales, laborales o educativas, públicas y científicas.

Las **situaciones personales** son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. Como ejemplos se pueden encontrar:

- *Comprando dos kilos de naranjas más una berenjena he gastado lo mismo que ayer al comprar un kilo de naranjas más una calabaza. Si la berenjena vale 1€ y la calabaza 1.5€. ¿Cuánto vale el kilo de naranjas? (***Precios)**
- *Un padre reparte mensualmente 980 euros entre sus cuatro hijos. Juan recibe 70 euros más que Pedro; éste 80 euros más que Agustín, y éste 50 euros más que Borja. ¿Cuánto recibe cada uno? (***Repartos)**
- *Antonio tiene 15 años, su hermano Roberto 13 y su padre 43. ¿Cuántos años han de transcurrir para que, entre los dos hijos, igualen la edad del padre?* **(Edades)**

Las **situaciones laborales o educativas** son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo proponen tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta. Como ejemplos se pueden encontrar:

- *Halla un número tal que su mitad más su cuarta parte más 1, sea igual al número pedido.* **(Numéricos)**
- *El perímetro de un triángulo isósceles mide 15cm. El lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados iguales. Con estos datos halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo*. **(Geometría)**
- *Halla el cateto de un triángulo rectángulo, sabiendo que su ángulo opuesto es de 50º y la hipotenusa mide 10 cm.* **(Trigonometría)**

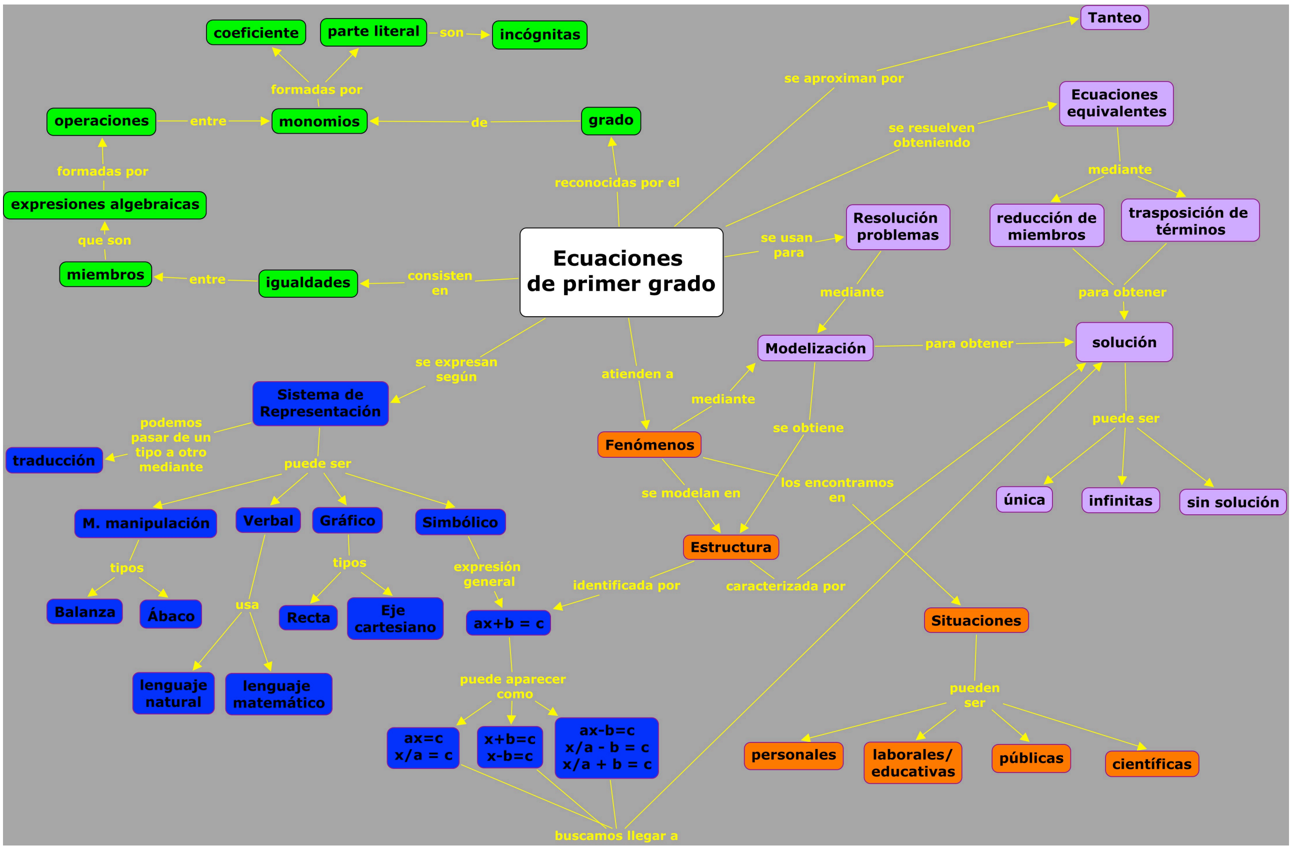
Las **situaciones públicas** se refieren a la comunidad local o a otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación. Como ejemplos se pueden encontrar:

- *En la primera prueba de una oposición queda eliminado el 53% de los participantes. En la segunda prueba, se elimina al 25% de los restantes. Si el número total de personas suspendidas es de 512, ¿cuántas personas se presentaron a la oposición?* **(Porcentajes)**
- *Una empresa de videojuegos va a vender 1.000 videoconsolas y 3.000 juegos a un precio rebajado. Con la venta espera recaudar 130.000 euros. Sabiendo que el juego cuesta 10 euros, ¿cuánto cuesta cada videoconsola?* **(Precios)**
- *El Ayuntamiento quiere edificar en un solar rectangular cuyo perímetro es de 500 metros. Sabiendo que un lado mide la cuarta parte del otro, calcula las dimensiones del solar a construir.* **(Geometría)**

Las **situaciones científicas** son más abstractas e implican la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. Como ejemplos se pueden encontrar:

- *Un grifo tarda 4 días en llenar una piscina y otro tarda 6 días. Si se abren a la vez, ¿cuánto tardarán en llenarla? (***Física)**
- *Un camión sale de una ciudad a una velocidad de 40 km/h. Una hora más tarde sale de la misma ciudad y en la misma dirección y sentido un coche a 60 km/h. Halla el tiempo que tardará en alcanzarle.* **(Física)**

Queda patente la fuerte relación entre el mundo real y este tema, cuestión que se tendrá en cuenta en la planificación de las sesiones para una correcta consecución de los objetivos y un desarrollo apropiado de las competencias. De esta manera se completa el mapa conceptual con el análisis didáctico completo de las ecuaciones de primer grado, y la relación de la fenomenología con la estructura conceptual y los sistemas de representación:



Este mapa conceptual muestra el estudio que llevamos a cabo sobre este tema en un trabajo tanto de identificación como de relación y conexión entre elementos. En verde y morado vemos la estructura conceptual, en azul los sistemas de representación y en naranja la fenomenología

Las relaciones que hay entre ellas son las siguientes:

En la parte de arriba: Observamos como la idea de ecuación se relaciona con todos los elementos que la integran y se ponen de manifiesto sus procesos de resolución.

En la izquierda: se encuentran los distintos sistemas de representación, que están interrelacionados pues se puede pasar de uno a otro mediante traducción.

Parte inferior: Los fenómenos se modelan en subestructuras, caracterizadas por el número de soluciones y se muestra su relación con los sistemas simbólicos de representación. Vemos una línea de fenómenos y situaciones, cuya relación es que los fenómenos se modelizan y se traducen a problemas, a los que le encontramos la solución por diferentes métodos.

3.3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

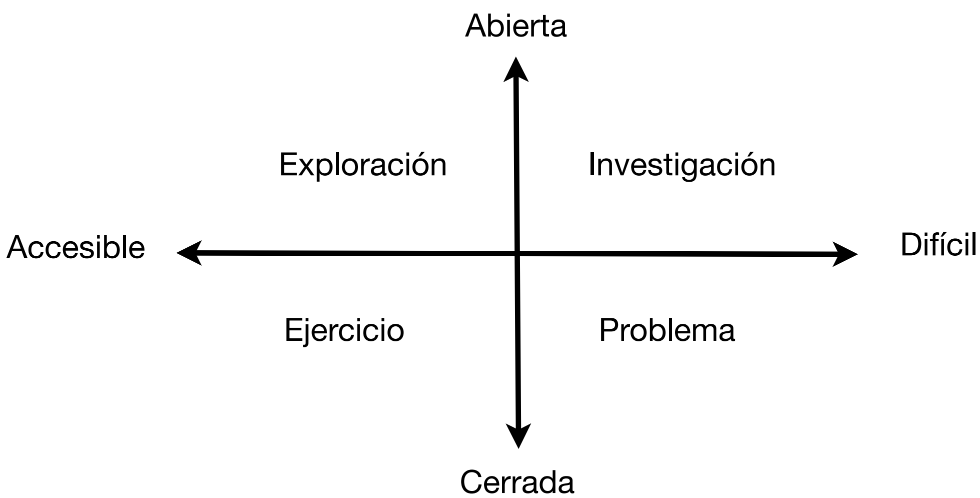
“El análisis de instrucción se centra, en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad didáctica que se está planificando. También recoge aspectos relativos a la gestión del aula, al empleo de materiales y recursos y a los criterios y métodos de evaluación.” (Lupiáñez, 2009, p. 59).

Según este autor, este análisis se articula en torno a siete componentes claves: la adecuación, la complejidad, la resolución de problemas y la modelización, el empleo de materiales y recursos, la secuenciación, la evaluación y la gestión del aula de matemáticas.

Como ya planteé en el punto 2, fundamentación, nosotros nos centramos en la complejidad y la secuenciación a la hora de seleccionar las tareas, si bien es cierto que tras este análisis dedicaré un apartado a la evaluación y que estarán presentes en las sesiones elementos del resto de componentes.

A la hora de plantear este estudio definimos tres fases conocidas como fase inicial, fase de desarrollo y fase de cierre como ejes de nuestra secuenciación, durante las cuales las tareas propuestas abarcarían los distintos tipos definidos según el nivel de complejidad demandado y que de acuerdo con PISA determinan tres categorías: de reproducción, de conexión y de reflexión (OCDE, 2005).

Además, en lo que a complejidad se refiere, combinamos esta idea con el diagrama de Ponte (2004) para el tipo de tarea:



Por tanto, y en base a todo esto, nuestro patrón para la extracción de las características de una tarea es el siguiente:

- Elementos de la tarea:
    - Meta
    - Recursos/Operaciones
    - Contenido
    - Situación de aprendizaje
    - Complejidad
- Condiciones
    - Presentación
    - Comunicación
    - Agrupamiento
- Observaciones
- Análisis de Contenido
    - Conceptos
    - Destrezas
- Análisis Cognitivo
    - Objetivos y Focos
    - Competencias PISA
    - Errores
- Función
- Variables PISA
    - Contenido
    - Contexto
    - Nivel de Complejidad

En el ANEXO 4 se pueden consultar algunas tareas analizadas a través de todos estos organizadores.

4. EVALUACIÓN

En esta sección presento una propuesta para gestionar la evaluación en esta unidad didáctica.

El enfoque que considero óptimo y en el que se basa este apartado es aquel que plantea la evaluación como un elemento global presente durante todo el proceso de enseñanza y no sólo al final concediendo una calificación. Es un planteamiento en el que, cómo afirma Rico (1997), la evaluación en la educación obligatoria cumple la función de "detectar situaciones anómalas y proceder a un tratamiento específico que permita superarlas (diagnóstico y remedio)" (P.19). Además esto va en línea con las orientaciones para la evaluación de la Orden 2220/2007.

Por tanto, y atendiendo a la obra de Scriven (1967), podríamos decir que si bien la evaluación va a tener un carácter sumativo, pues al final bajo la ponderación elegida se otorgará una nota atendiendo a los méritos del alumno, va a predominar una visión formativa que actúe de forma continua y diagnostique e informe sobre los problemas del alumnado para que como profesor se pueda intervenir, atajarlos y recuperarlos en la medida de lo posible.

Otro elemento de suma importancia en el proceso de evaluación será la reflexión y valoración de los resultados lo que nos permitirá analizar el sistema empleado, detectando debilidades y nos indicará en qué aspectos debemos introducir cambios para mejorar. Luego podríamos concluir que la evaluación va a ser elemento fundamental en todo el proceso de enseñanza/aprendizaje tanto para el avance y desarrollo del alumno como para el profesor a la hora de llevar a cabo la fase número cuatro en la formalización del currículo ("currículo en acción").

1. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

A continuación presento y enumero los criterios de evaluación que diseñamos y utilizamos como grupo en la asignatura de "Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas". Este proceso se llevó a cabo en base a los focos anteriormente presentados.

Estos criterios nos servirán como indicadores de la evolución del aprendizaje del alumno/a, nos informarán de las deficiencias y necesidades detectadas y nos permitirán mejorar las estrategias menos exitosas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En primer lugar seleccionamos aquellos que nos parecieron apropiados para nuestro tema de la Orden ECI 2220/2007:

- ECI2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.

- ECI3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.

- ECI8. Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la comprobación de la coherencia de la solución obtenida, y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.

- ECI9. Identificar elementos matemáticos presentes en la realidad; aplicar los conocimientos adquiridos o los razonamientos desarrollados para interpretar y tomar decisiones acerca de situaciones reales que exigen herramientas matemáticas en su tratamiento y, en su caso, para su resolución.

- ECI10. Emplear de forma adecuada y con sentido crítico los recursos tecnológicos, calculadoras y programas informáticos adecuados, habituales en el trabajo matemático.

Puede observarse que los criterios de la Orden ECI 2220/2007 son algo genéricos y siempre enfocados a la resolución de problemas. Por tanto creímos conveniente que para la correcta evaluación durante todo el proceso de enseñanza era necesario y adecuado diseñar unos criterios propio (como se hace en los departamentos de los centros) que fuesen más en consonancia con los focos previamente presentados. Seguidamente los presento:

- UD1. Identificar una igualdad como identidad o ecuación.

- UD2. Obtener ecuaciones equivalentes a una dada.

- UD3. Comprobar si un valor es solución de una ecuación.

- UD4. Resolver ecuaciones de primer grado, incluyendo ecuaciones con denominadores y paréntesis.

- UD5. Conocer los lenguajes natural y algebraico, sabiendo pasar del uno al otro.

- UD6. Resolver problemas de la vida real planteando ecuaciones de primer grado.

Donde UD1 corresponde al Foco 2, UD2, UD3 y UD4 corresponden al Foco 3 y UD5 y UD6 corresponden al Foco 4. El Foco 1 (Manejo del lenguaje algebraico) va implícito en todos ellos.

2. INSTRUMENTOS

En base al planteamiento anteriormente presentado he diseñado un plan de evaluación que permita esa interacción deseada entre el proceso de enseñanza/aprendizaje y la propia evaluación. La propuesta consta de varias herramientas para la recogida de información que proporcionen información sobre el avance y las dificultades de los alumnos y sobre el éxito de nuestro proceso de enseñanza. Como una de las finalidades de la evaluación es también calificar, presentaré una ponderación para obtenerla después de presentar los instrumentos:

· Ronda inicial de preguntas:

Este recurso viene inspirado por su utilización por parte de mi profesor de matemáticas durante mi primer ciclo de educación secundaria obligatoria. Considero que transmitir al alumnado que a diario se juegan un porcentaje de la nota (y que lo pueden conseguir fácilmente con trabajar un poco en casa) contribuye a que avancen y no se estanquen, e incentiva tanto a los que aspiran al aprobado como a aquellos que desean la máxima calificación. Consistirá en una rápida sucesión de preguntas al comienzo de la clase sobre los contenidos vistos en la última sesión.

Para su puesta en práctica he diseñado una parrilla de observación en la que aparezcan reflejados los alumnos y el número de sesiones del tema para poder tomar nota de lo que acontezca. (ANEXO 2)

· Sistema de positivos/negativos: Aquí se tendrá en cuenta la participación en clase, el cuaderno, la realización de ejercicios en la pizarra, la realización de un mapa conceptual al final del tema y el comportamiento y la actitud en clase.

El sistema busca conseguir un buen ambiente de clase y un correcto avance en el trabajo del tema por lo que se establece el doble valor de los negativos con el objetivo de que los alumnos intenten evitarlos. Para la puesta en práctica se tendrá una lista del alumnado durante las clases para realizar las anotaciones.

La revisión del cuaderno y la realización de ejercicios por parte de los alumnos en pizarra en las sesiones de correcciones permitirán detectar los errores y dificultades que tienen los alumnos y así poder atajarlos para evitar que lleguen con ellos a la prueba final.

· Examen: En esta prueba escrita se evaluarán los conocimientos y capacidades adquiridas por los alumnos durante las sesiones en las que se ha impartido el tema. En el ANEXO 3 adjunto una propuesta de examen para esta unidad didáctica.

PONDERACIÓN

· Ronda de preguntas: 1 punto de la nota en caso de contestar siempre correctamente. Es exigente pues precisamente ese es el espíritu de esta idea.

· Positivos/Negativos: (A falta de definir las sesiones supondré 10) Se podrá obtener un máximo de un positivo por sesión. No hay límite para los negativos. Cada positivo suma 0.1, por tanto la suma total sería 1 punto de la nota.

· Examen: 8 puntos de la nota.

5. PROGRAMACIÓN

- RESUMEN DE LAS SESIONES:

Como ya he mencionado anteriormente las ecuaciones de primer grado son introducidas y trabajadas con más dedicación en el primer curso de ESO mientras que en el segundo curso están integradas en un sólo tema junto con las ecuaciones de segundo grado. Debido a esto he decidido que la cantidad adecuada de sesiones será ocho, en las que serán trabajadas para afianzar el conocimiento y manejo de ellas y como paso previo a la introducción de las ecuaciones de segundo grado.

Tal y como he presentado en el análisis de instrucción dividiré las sesiones en las fases inicial, de desarrollo y de cierre con el objetivo de abarcar y cumplir todos los objetivos y competencias pretendidos.

La fase inicial constará de dos clases: la primera de introducción, recordatorio y motivación del tema y la segunda de trabajo de las nociones y conceptos más básicos del tema.

La fase de desarrollo constará de tres sesiones: en ellas se trabajará el núcleo del tema y se corregirán ejercicios, tratando siempre de afianzar conceptos.

Por último, la fase final constará de dos sesiones: se harán los ejercicios más complejos, se introducirán y explicarán problemas para que el alumno asocie la ecuación de primer grado con situaciones y fenómenos reales y en la segunda se corregirán estos ejercicios de cara al examen. Finalizaré la última sesión hablando un poco sobre las ecuaciones de segundo grado. La última sesión se dedicará al examen.

SESIÓN 1:

SECUENCIACIÓN:

En esta primera sesión comenzaré con una breve introducción histórica para que los alumnos conozcan la presencia e importancia de las ecuaciones de primer grado a lo largo de la historia, destacando su presencia incluso siglos antes de Cristo y la relevancia que le otorgaron estudiosos de diversas civilizaciones (como puede comprobarse en el ANEXO 1). (5 min)

A continuación le recordaré al alumnado que este tema ya lo trabajaron el año anterior y les refrescaré conceptos y nociones del tema inmediatamente anterior en el curso presente, que en el currículo de segundo curso de ESO es "Expresiones algebraicas", atendiendo así a las indicaciones recibidas en la asignatura de "Aprendizaje y desarrollo de la personalidad" (en adelante AyD) sobre cómo se construye el conocimiento y la necesidad de establecer conexiones. Dichos conceptos y nociones son algunos comunes con nuestro tema como los conceptos de monomio, parte literal etc. o las nociones de expresión algebraica o incógnita, entre otras ya previamente reflejadas en el análisis didáctico. (5 min)

Una ronda de preguntas sobre qué recuerdan de este tema en particular será lo siguiente (noción de ecuación, de solución, cómo resolverían una ecuación etc.). Esto permite que los alumnos participen y lancen ideas lo que permite entrar en contacto con el tema de una manera menos árida y más participativa. (5 min)

· Gestión del aula: En estos primeros minutos será importante controlar posibles alborotos, preguntas no procedentes etc. Para ello se pondrán en práctica las técnicas que se crean convenientes de las aprendidas en la asignatura AyD. Todo para intentar conseguir que la clase centre su atención en la explicación.

Una vez realizado el ejercicio se les propondrá la siguiente tarea:

TAREA 1:

✻ Sigue los pasos y reflexiona acerca del resultado:

Piensa un número.
Súmale 5.
Multiplícalo por 2.
Al resultado réstale 4.
Divide lo que te salga entre 2.
Si le restas el número que pensaste, ¿obtienes el número 3?

Reflexiona acerca de por qué siempre sale el mismo resultado.
¿Serías capaz de escribir un juego de adivinación basado en otra identidad?

* Encontrará un análisis completo de esta tarea en el ANEXO 4

Considerando que hay que dictar la tarea, se les concederá un tiempo de 8 minutos para realizarla. A continuación se les informa de que disponen de otros 5 minutos para compararla con la de su compañero (parejas de dos) y dialogar sobre sus conclusiones. Finalmente se destinan otros 5 minutos para que 2~3 voluntarios expongan en pizarra sus ideas y conocer las impresiones de la clase.

· Gestión del aula: Será labor del profesor conseguir que se mantenga la calma tanto en el momento del trabajo en pareja como cuando se encuentre un alumno en la pizarra. En el desarrollo de este ejercicio se superan los 20 minutos de clase, momento a partir del cual la atención se resiente como aprendimos en AyD, por lo que, aunque la sesión está siendo dinámica, el profesional tendrá que cuidar que todos mantengan el interés.

TAREA 2: (10 min)

* Un voluntario sale a la pizarra. En primer lugar la balanza está equilibrada y se le pide que represente en una expresión algebraica lo que ocurre en la balanza. Lo hará una vez todos sus compañeros lo hayan hecho en sus cuadernos.

* A continuación nombro alumnos para que le pidan modificaciones en la balanza en base a una ecuación como la escrita anteriormente.

Una vez terminada esta primera tarea de motivación procederé a presentarles el ábaco y la balanza.

TAREA 3: (10 min)

* Dibuja un ábaco como el que os presento dividiendo en dos partes cada fila. Escribe ecuaciones que representen cada fila.

Para terminar una última tarea relacionada con el ábaco. En caso de no dar tiempo lo harían para casa.

· Gestión del aula: En esta fase final habrá que cuidar que mantengan el orden pues hay más probabilidad de alteración al final de la sesión.

ANÁLISIS DE LA SESIÓN:

- Fase: inicial, sesión motivadora.

- Sistemas de representación: simbólico, manipulativo y verbal.

- Expectativas de aprendizaje: se encuentran presentes reminiscencias de los dos primeros focos pero sin profundizar del todo, esto se debe al carácter motivador de la sesión.

- Competencias PISA: Pensar y razonar (PR), modelizar (M), uso del lenguaje simbólico (LS).

- Materiales y recursos: ábaco y balanza.

SESIÓN 2:

SECUENCIACIÓN:

En esta segunda sesión comenzaré con la primera utilización de la parrilla diseñada en el apartado “Evaluación”. Preguntaré a una serie de alumnos seleccionados al azar sobre los términos trabajados en la sesión anterior. Les recordaré la importancia de trabajar a diario y de ganarse una porción de la nota cada día. (10 min).

Seguidamente, y será el eje central de la sesión, continuaré con el dictado de las definiciones correspondientes a aquellos que no se hayan visto en el tema previo de “Expresiones Algebraicas”. Se trata de las nociones de de incógnita, de expresión algebraica, de identidad, de solución, de ecuación (...).

Tras el dictado de cada una de ellas las plasmaré en la pizarra con ejemplos para buscar su correcto entendimiento por parte de toda la clase. (20 min)

Finalmente propondré las siguientes tareas para que comiencen a trabajar los elementos presentados. (30 min)

TAREA 1:

Comprueba que el valor asignado a x es solución de la ecuación correspondiente:

a) $2x + 5 = x - 15$ $\quad x = -20$ $\qquad$ b) $(x - 10)/3 = 2 - x$ $\quad x = 4$

c) $10 + 3(x - 2) = x - 2$ $\quad x = -1$ $\qquad$ d) $3 - 2x + 8 = x + 7/2$ $\quad x = 5/2$

TAREA 2:

1) Sustituye las incógnitas por números de modo que se verifiquen las ecuaciones.

a) $2x - 8 = 0$ b) $3x + 5 = 20$

c) $x + y = 12$ d) $2(a + b) = 0$

2) Inventa dos ecuaciones distintas las cuales tengan como solución $x = 5$ y $x = 3$ respectivamente.

TAREA 3:

Expresa en forma de ecuación:

a) La suma de dos números consecutivos es 99.

b) El producto de dos números pares consecutivos es igual a 360.

La intención con este tiempo de trabajo, y así se le transmitirá al alumnado al comienzo del mismo, es provocar la aproximación del alumno a la tarea en clase permitiéndoles y pidiéndoles que pregunten dudas. Esto generará situaciones en las que el profesor considerará que toda la clase puede beneficiarse de la explicación que necesita uno de ellos. También favorece el que puedan ayudarse entre ellos a la hora de recordar y fijar estos contenidos, lo cual es recomendable ya que, a veces, es más fácil que un compañero se ajuste a la zona de desarrollo próximo que planteaba Vigotsky.

ANÁLISIS DE LA SESIÓN:

- Fase: inicial.

- Sistemas de representación: simbólico y verbal.

- Expectativas de aprendizaje: Las tareas planteadas reflejan la intención de trabajar de lleno ya, tras la sesión motivadora, los dos primeros focos. Es una clase que tratará de recordar lo que trabajaron el curso anterior y asentar lo explicado a nivel teórico sobre el manejo de expresiones algebraicas y la identificación y caracterización de ecuaciones.

- Competencias PISA: Pensar y razonar (PR), modelizar (M), comunicar (C), uso del lenguaje simbólico (LS).

- Intenciones para la sesión: Con esta sesión se pretende que el alumno entre de lleno en las primeras cuestiones del tema y las ponga en práctica realizando tareas. La intención con el tiempo de trabajo propuesto, y así se le transmitirá al alumnado al comienzo del mismo, es provocar la aproximación del alumno a la tarea en clase permitiéndoles y pidiéndoles que pregunten dudas. Esto generará situaciones en las que el profesor considerará que toda la clase puede beneficiarse de la explicación que necesita uno de ellos. También favorece el que puedan ayudarse entre ellos a la hora de recordar y fijar estos contenidos, lo cual es recomendable ya que, a veces, es más fácil que un compañero se ajuste a la zona de desarrollo próximo que planteaba Vigotsky.

- Gestión del aula: Siempre teniendo en cuenta los momentos de la clase y el comportamiento a adoptar en cada uno de ellos (como se ha detallado en la sesión 1), cabe añadir que el profesor deberá manejar adecuadamente el proceso de dictado y el tiempo de trabajo de los alumnos para mantener controlado al grupo.

SESIÓN 3:

SECUENCIACIÓN:

Comenzaré con la parrilla pidiendo a algunos alumnos que reciten las definiciones facilitadas en la sesión 2 y sacaré un alumno para que realice en la pizarra una de las tres tareas trabajadas el día anterior. Esta situación puede ser beneficiosa en cualquier caso: tanto si el alumno los trabajó como si no y tanto si lo hizo bien como si no. El profesor aprovechará la situación siempre con el objetivo de maximizar el rendimiento y fortalecer la estructura cognitiva de los alumnos advirtiendo sobre errores, sobre actitudes o resaltando los aciertos. (10 min)

A continuación introduciré la teoría sobre ecuaciones equivalentes que hemos señalado como noción en nuestro análisis de contenido, la regla de la suma y del producto para dicha equivalencia y aprovecharé para recordar la regla de los signos tratando de anticipar posibles errores (E2 en este caso). El procedimiento será dictar las reglas y reflejarlas con un ejemplo. (20 min)

De nuevo en esta sesión se les propondrán las siguientes tareas al alumnado para que trabajen lo estudiado: (30 min)

TAREA 1:

Averigua qué ecuaciones son equivalentes:

a) $4x = 4$ b) $6x - 2 = 10$ c) $4x + 6 = x + 9$

TAREA 2:

Aplica la regla de la suma para resolver estas ecuaciones:

a) $14 + x + 10 = 5 + 30$ b) $18 + 2x - 8 = -25 + x$

c) $12 - x = 3 - 2x + 9$ d) $7 - 5x = 13 - 4x -17$

TAREA 3:

Aplica la regla del producto para resolver las ecuaciones siguientes:

a) $3x = 18$ b) $-2x = 1/3$

c) $5 = 7x$ d) $(1/2)x = 8$

ANÁLISIS DE LA SESIÓN:

- Fase: de desarrollo.
- Sistemas de representación: simbólico y verbal.
- Expectativas de aprendizaje: En esta sesión se continúan trabajando y desarrollando los focos 1 y 2 (lo que se mantendrá durante todo el tema) y se empieza a trabajar el foco 3.

- Competencias PISA: Pensar y razonar (PR), modelizar (M), comunicar (C), uso del lenguaje simbólico (LS).

- Intenciones para la sesión: afianzar los conocimientos ya adquiridos y preparar al alumno para las siguientes sesiones.

- Gestión del aula: Será importante que el profesor esté preparado para cualquier situación que pueda darse con un alumno en pizarra debido a sus errores, aciertos, interés o desidia.

SESIÓN 4:

SECUENCIACIÓN:

La parrilla vuelve a ocupar el lugar principal en el inicio de la sesión. Los alumnos contestarán preguntas sobre la teoría y realizarán alguno de los ejercicios planteados en la sesión anterior. (10 min)

En esta sesión, metidos de lleno en la fase de desarrollo, se impartirán los pasos para la resolución de ecuaciones. El proceso de nuevo será dictar y explicar los pasos y reflejarlo con ejemplos. (20 min)

Tras esto, comenzarán a resolver ecuaciones y se incluirá un primer problema para introducir la sesión 5 en la que se abordará la resolución de éstos: (30 min)

TAREA 1:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 4 = 2x + 8 - 6 - x$

b) $x - 15 + x + 4 = 3(2x - 1)$

c) $4(6 + 2x) + 5(2 - x) = -3(x + 6) - 8$

d) $3(5 - x) - (2x + 7) = x - 4 - 2(1 - x)$

e) $8 - 3x + 2(x - 9) = 10 - 7(3 - 2x)$

f) $-7 + 10(x - 5) - 3x = 4x - 3(18 - x)$

TAREA 2:

El perímetro de un triángulo isósceles mide 15cm. El lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados iguales. Con estos datos halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo y dibújalo usando regla y compás.

* Encontrará un análisis completo de esta tarea en el ANEXO 4

ANÁLISIS DE LA SESIÓN:

- Fase: de desarrollo.

- Sistemas de representación: simbólico y verbal.

- Expectativas de aprendizaje: En esta sesión se continúan trabajando y desarrollando los focos 1 y 2 (lo que se mantendrá durante todo el tema) y se empieza a trabajar el foco 3.

- Competencias PISA: Pensar y razonar (PR), modelizar (M), comunicar (C), uso del lenguaje simbólico (LS).

- Intenciones de la sesión: Esta sesión es fundamental en el tema y deberá plantearse como fundamental de cara al alumnado. Se tiene el propósito de inculcar el rigor necesario para la resolución de ecuaciones y así tratar de impedir que surjan errores en el futuro (E11). A su vez tiene un carácter preparador y motivador al introducir el problema de cara a la próxima sesión.

- Gestión del aula: Tratar de mantener la atención y transmitir lo importante de la sesión será trascendental para el desarrollo del tema. Por tanto, una actitud positiva, motivadora y colaborativa será esencial.

SESIÓN 5

SECUENCIACIÓN:

La sesión comienza con el uso de la parrilla como en las sesiones anteriores. Se trata con esto de que todos estudien, por tanto el profesor deberá repetir algún alumno de los primeros días para que nadie pueda relajarse porque ya intervino recientemente. En esta ocasión se preguntará quienes fueron capaces de resolver el problema y se hablará sobre su resolución aprovechando así esta primera parte de la sesión para introducir la segunda.

A continuación, y para cerrar la fase de desarrollo, se explicará el proceso para el planteamiento y resolución de problemas. El profesor dictará y pormenorizará los pasos a seguir y realizará un par de ejemplos.

Se propondrán las siguientes tareas para que comiencen a trabajar en clase y terminen en casa.

TAREA 1:

Los padres de Laura tienen 40 y 42 años. Si a la edad de Sonia se restan dos años, se obtiene la sexta parte de la suma de la edad de sus padres.

Calcula la edad de Laura.

TAREA 2:

José tiene la quinta parte de la edad de su madre, Lucía, y dentro de siete años tendrá la tercera parte.

¿Cuántos años tienen José y su madre?

TAREA 3:

Entre los pueblos de Villaarriba y Villaenmedio hay 16 kilómetros. A la misma hora salen de cada pueblo dos personas, la de Villaarriba a 4 km/h y la de Villaabajo a 6 km/h.

¿Qué distancia ha recorrido cada uno al cruzarse?

TAREA 4:

¿Cuántos kilogramos de café de 12€/kg hay que mezclar con 200 kilogramos de otro café de 17,40€/kg para vender la mezcla a 15€/kg?

TAREA 5:

Un grifo llena un depósito en 3 horas, otro lo hace en 6 horas. ¿Cuánto tardarían en llenarlo entre ambos?

* Encontrará un análisis completo de esta tarea en el ANEXO 4

ANÁLISIS DE LA SESIÓN:

- Fase: de desarrollo.

- Sistemas de representación: simbólico y verbal.

- Expectativas de aprendizaje: Esta es la primera sesión en la que se trabajan los cuatro focos al completo con especial énfasis en el foco 4.

- Competencias PISA: Pensar y razonar (PR), modelizar (M), comunicar (C), uso del lenguaje simbólico (LS), argumentar y justificar (AJ) y plantear y resolver problemas (RP).

- Intenciones de la sesión: Los alumnos deben ser capaces de aplicar todo lo que han aprendido y, junto con un proceso racional, poder resolver problemas. Será necesario transmitirles el rigor que se necesita para no cometer errores.

- Gestión del aula: El profesor mantendrá un ambiente propicio para el trabajo y motivará al alumnado dada la importancia de la sesión.

SESIÓN 6:

SECUENCIACIÓN:

Comenzamos con esta sesión la fase de cierre en la que se trata de asentar, conjugar y sintetizar lo aprendido durante las fases previas, además de introducir un enlace para la siguiente unidad didáctica.

Iniciaremos con un uso más amplio de la parrilla pues es conveniente corregir los problemas planteados en la sesión 5 y dedicaremos a esto buena parte de la sesión (20 min).

Tras esto, presentaré a los alumnos el software GeoGebra y les mostraré cómo resolver ecuaciones de primer grado con el mismo. Tras ello dispondrían de unos minutos para hacerlo ellos mismos. (25 min)

Finalmente propondré la siguiente tarea para que la trabajen: (10 min)

TAREA 1:

El año pasado, la piscina municipal se llenó con el grifo de la plaza de al lado. Este año, se instaló un nuevo grifo, para no tener que usar el de la plaza, y se tardó en llenarla la mitad de tiempo que el año anterior, ¿qué pasaría si el próximo año se usasen sendos grifos para llenarla?

Agrupaos en grupos de 5, para reflexionar esto y plantear una situación hipotética que responda a estas condiciones (añadir estimaciones sobre capacidad, caudal, tiempo, etc.)

* Encontrará un análisis completo de esta tarea en el ANEXO 4

ANÁLISIS DE LA SESIÓN:

- Fase: final.

- Sistemas de representación: simbólico, verbal y representación gráfica.

- Expectativas de aprendizaje: En esta sesión se engloban todos los focos y además se presenta por primera vez una herramienta informática a los alumnos. El deseo es que la sesión afiance sus conocimientos y motive su interés.

- Competencias PISA: Pensar y razonar (PR), modelizar (M), comunicar (C), uso del lenguaje simbólico (LS), argumentar y justificar (AJ), plantear y resolver problemas (RP), representar (R), emplear soportes y herramientas tecnológicas (HT).

- Intenciones de la sesión: Atajar posibles errores en la realización de problemas y fortalecer su estructura cognitiva en este tema.

- Gestión del aula: será especialmente importante emplear las técnicas apropiadas tanto en el proceso de corrección de ejercicios como en el trabajo con Geogebra para mantener el ambiente propicio para el buen devenir de la sesión.

SESIÓN 7:

SECUENCIACIÓN:

Comienzo la sesión con un diálogo sobre el examen para acordar con el alumnado la fecha de realización. Será conveniente tanto escuchar sus propuestas como dejar claro que el profesor tiene la última palabra y es quien decide. Continuamos con la parrilla incidiendo en el contenido teórico del tema y sacando un voluntario para la realización del problema de síntesis planteado en la sesión 6. (15 min)

Tras esto se finalizaría el trabajo con GeoGebra. En esta sesión les pediría la siguiente tarea: (30 min)

TAREA 1:

Escribe y resuelve tres ecuaciones con GeoGebra. ¿Qué mostraría el programa si una ecuación no tuviese solución?

Por último, y como se nos ha recomendado durante el Master, introduciría la ecuación de segundo grado con la intención de crear un enlace entre esta unidad y la siguiente. (15 min)

ANÁLISIS DE LA SESIÓN:

- Fase: final.

- Sistemas de representación: simbólico, verbal y representación gráfica.

- Expectativas de aprendizaje: De nuevo trabajamos todos los focos por ser una sesión de cierre y se espera limar dudas y errores en esta sesión. Hay una clara intención de llevar más allá su conocimiento con la tarea de Geogebra. Se trata de una tarea de investigación que el profesor deberá guiar para conseguir el objetivo de poder explicarles que cada recta tiene una ecuación asociada, que cuando son paralelas no tienen solución porque no se cortan e introducirles el concepto de sistemas de ecuaciones que estudiarán más adelante.

- Competencias PISA: Pensar y razonar (PR), modelizar (M), comunicar (C) uso del lenguaje simbólico (LS), argumentar y justificar (AJ), plantear y resolver problemas (RP), representar (R), emplear soportes y herramientas tecnológicas (HT).

- Intenciones de la sesión: Concluir el tema fortaleciendo lo aprendido.

- Gestión del aula: La sesión previa a un examen siempre necesita de una especial atención a la gestión del aula para procurar que se mantengan atentos. Será labor del profesor valorar cuándo debe concretar los detalles del examen con el alumnado. En este caso apuesto por realizarlo al inicio de la clase.

SESIÓN 8:

Realización del examen de la unidad. Se adjunta propuesta en el ANEXO III

6. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

La variedad de perfiles que se suele encontrar en las aulas es un elemento más a tener en cuenta y precisa de la atención del docente. Si bien la programación está planteada para satisfacer las distintas demandas que el grupo pueda presentar, se dispondrá adicionalmente de una serie de tareas para ayudar a alcanzar el nivel necesario a aquellos alumnos que encuentren dificultades y satisfacer las necesidades de otros que puedan aburrirse.

En primer lugar presento una pareja de tareas para el refuerzo:

Completa las columnas de la tabla como en el ejemplo:

	3 - 4x = 5x - 6	**3x - 5 = 2 - 4x**	**x + 2x = 6**
Primer miembro	3 - 4x		
2º miembro	5x - 6		
Término en x del primer miembro	-4x		
¿Es solución el número 2?	No, pues 3 - 8 =/= 10 - 6		

Resuelve la ecuación 2x + 5 = 11 dando los pasos indicados a continuación.

Resta 5 en los dos miembros (Regla de la suma)	
Simplifica los términos	
Divide entre 2 ambos miembros (Regla del producto)	

Estas tareas son dos ejemplos de cómo intentaríamos facilitar al alumnado la asimilación de los conocimientos tanto teóricos como prácticos y su interrelación. Son tareas que podrían enmarcarse en el inicio de la fase de desarrollo y que ayudan a alcanzar los objetivos 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 y 3.1, a desarrollar las competencias PR y LS y tienen la intención de evitar que los alumnos acumulen errores en su avance de aprendizaje.

En cuanto a los alumnos de altas capacidades, dado que sabemos que el conocimiento se construye de manera estructurada sobre lo que previamente se ha aprendido considero que lo más productivo en estos niveles es facilitarles tareas que pongan en liza contenidos aún por venir, en este caso se le podrían introducir tareas que inmiscuyan ecuaciones de segundo grado, como la siguiente:

> Sustituye las incógnitas por números de modo que se verifiquen las ecuaciones:
>
> a) $2x - 8 = 0$ b) $x^2 + 4 = 29$ c) $x + y = 12$
>
> d) $x^2 + 4 = 29$ e) $3x^2 = 27$ f) $a^2 - b^2 = 16$

7. CONCLUSIONES

Una vez llegados a este punto lo primero que cabe comentar es lo fundamental que se torna para este trabajo la realización de prácticamente todas las asignaturas del master pero, en especial, la de Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas para adquirir las herramientas y competencias para llevar a cabo el análisis didáctico que a la postre resulta imprescindible.

Como queda mencionado al comienzo, un porcentaje importante del trabajo se basa en la labor del grupo del que fui miembro y del que formé parte debido a que teníamos afinidad por este tema, lo cual repercutió en el aumento del interés por realizar un buen trabajo. Lo cierto es que fueron muy positivas y constructivas todas y cada una de las conversaciones que fueron necesarias para cada pequeño detalle del análisis didáctico y las respuestas e indicaciones que recibimos del profesorado sobre nuestras elaboraciones. Resaltar en este punto que la fenomenología fue lo que más esfuerzo nos supuso y que gracias a la ayuda de varios de nuestros profesores pudimos sacarla adelante.

Quiero destacar la sinergia que surgió entre nuestra intuición y experiencia como alumnos de matemáticas y los contenidos del master pues se puso rápidamente de manifiesto y supuso una ampliación de nuestras miras. Esto ayudó notablemente en la confección de cada apartado y en la identificación de los elementos clave de cada punto trabajado.

Ya de lleno en la elaboración de la unidad, a nivel individual, diría que lo más complicado resultó ser la elección de una filosofía para la propuesta y, consecuentemente, de las tareas adecuadas para plasmarla. En este caso, como se ha podido observar, he elegido una idea que reúne lo bueno del enfoque clásico, el análisis de los trabajos modernos y las oportunidades de las nuevas tecnologías.

Esa intención de hacer funcionar conjuntamente distintos enfoques para aunar lo mejor de cada uno, dificultó el diseño de las sesiones pues siempre te planteas si estás traspasando la frontera de tu ideario y se está diluyendo la concepción escogida. Sin embargo, creo que eso fue positivo pues finalmente dio lugar a una unidad en la que se tienen en cuenta muchos elementos y muy variados procedentes de la experiencia, las distintas asignaturas del Master, de recomendaciones educativas etc. lo que hace que estemos ante un diseño de sesiones rico en detalles y consideraciones, y cuidado en todos los aspectos.

Para terminar, expresaré mi satisfacción por las competencias y conocimientos que la realización del Master y de esta Unidad Didáctica me han ayudado a adquirir y, por tanto, por el hecho de estar preparado para una labor profesional tan valiosa como la docente.

8. BIBLIOGRAFÍA

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Junta de Andalucía (2007). Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía. *BOJA, 252*, 5-36.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos, y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

Rico, L. (1997). *Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.*

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria obligatoria. *BOE, 174*, 31680-31828.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.

ANEXOS

ANEXO I:
PRESENCIA Y DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN LA HISTORIA

En la actualidad se produce frecuentemente un fenómeno de desvalorización de ciertas realidades que nos rodean por resultarnos sencillas, fáciles y hasta triviales. Por eso resulta importante acompañar a un tema como éste de una contextualización histórica que ponga de manifiesto que el conocimiento del hombre moderno se asienta en el esfuerzo, dedicación y reflexión de muchos otros que, a lo largo de la historia, han aportado pequeños y grandes avances, empujando a la humanidad en su desarrollo. La ecuación de primer grado hoy nos parece sencilla, se imparte en los primeros años de nuestra educación secundaria y sólo ha necesitado, para llegar a ser lo que es hoy, la intervención de diversos genios a lo largo de casi 4000 años.

EGIPTO

La civilización del antiguo Egipto destacó por sus avances científicos y el campo que experimentó mayor avance fue el matemático. Utilizaban la matemática para usos prácticos y de aplicación cotidiana como el reparto de víveres, cosechas o materiales.

Conocemos fuentes que certifican este uso de la matemática como el papiro matemático de Rhind, la tablilla de madera de Ajmin y el EMLR.

El PMR se fecha a partir del Segundo periodo intermedio de Egipto (entorno al 1650 a. C.), pero podría ser una copia de un papiro del Imperio Medio (2050-1800 a. C.).

Es este PMR el que, aparte de contener fórmulas y métodos para cálculo de áreas, operaciones aritméticas para la adición, la substracción, la multiplicación y la división de las fracciones unitarias etc., muestra cómo solucionar ecuaciones lineales de primer orden. No habían desarrollado una notación simbólica pero utilizaban el jeroglífico “hau” (que quiere decir montón o pila) para designar la incógnita.

BABILONIA

Los documentos babilonios conocidos se enmarcan en el periodo que va del 600 a.C. al 300 d.C.

Los babilonios de la época manejaban ya adecuadamente la ecuación de primer grado y afrontaron también problemas más complejos, todos ellos formulados y resueltos de una forma totalmente verbal carente de notación simbólica.

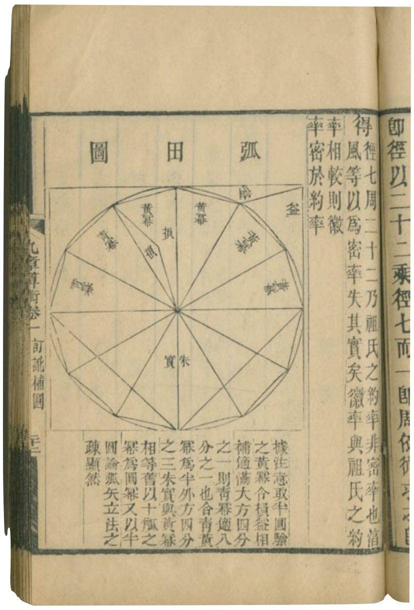
ANTIGUA CHINA

Distintos factores contribuyeron a que durante mucho tiempo el desarrollo de las matemáticas en China fuese independiente al de otras civilizaciones. Tener mares y montañas como fronteras naturales aislaba al país y le privaba de avances externos.

La matemática china era, al igual que su lengua, extremadamente concisa. Se centraba en problemas cotidianos: problemas en el calendario, en los negocios, en la medida de las tierras, en la arquitectura, en los archivos gubernamentales y en los impuestos. Hacia el siglo IV a.C. se empleaban los ábacos para calcular, lo que significa que se usaba un sistema numérico decimal. Merece la pena destacar que los ábacos son únicamente chinos y no parecen haber sido utilizados por ninguna otra civilización.

El libro chino sobre matemáticas más famoso es el Jiuzhang suanshu: Nueve capítulos del arte matemático. El libro contiene contribuciones matemáticas añadidas durante un largo período y queda poco del texto original como para poder identificar a que época pertenece cada una de ellas. Este importante trabajo dominó el desarrollo matemático y su estilo durante 1500 años. Esta obra incluye 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos.

Por lo tanto las ecuaciones de primer grado, e incluso de grados superiores, eran ya conocidas en la antigua china a pesar de su condición aislada.



Jiuzhang suanshu

CIVILIZACIÓN HINDÚ

La Matemática India tuvo una importancia capital en la cultura occidental con el legado de sus cifras, incluyendo la cifra cero como valor nulo.

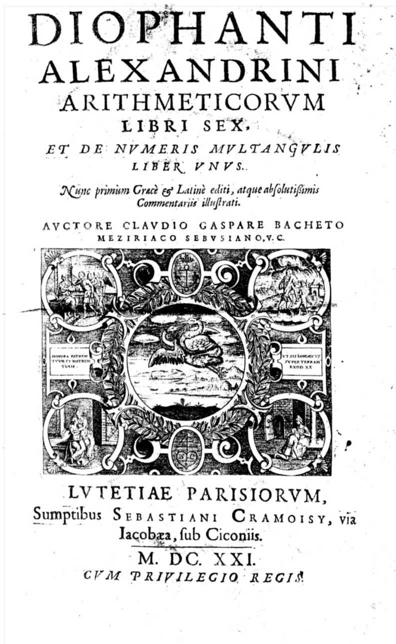
La expansión del budismo en China y la del mundo árabe multiplicaron los puntos de contacto de la India con el exterior. Sin embargo, las matemáticas hindúes se desenvolvieron en un plano original, apoyándose más en el cálculo numérico que en el rigor deductivo.

El mundo les debe el invento trascendental de la notación posicional empleando la cifra cero como valor nulo que sería transmitido a occidente por los árabes posteriormente. Utilizaron, como en occidente, un sistema de numeración de base 10 (con diez dígitos). Brahmagupta (nacido en el 598) expresa cómo resolver ecuaciones lineales. La incógnita la representaba por la abreviatura -ya- , y las operaciones con la primera sílaba de las palabras correspondientes. Este simbolismo, aunque no era exhaustivo, es suficiente para que se pueda clasificar el álgebra hindú como cuasi simbólica

Mucho más tarde (hacia 1150), Bhaskara II escribiría un tratado de aritmética en el que exponía el procedimiento de cálculo de las raíces cuadradas. Se trata de una teoría de las ecuaciones de primer y segundo grado, en una forma que se puede llamar "algebraica".

GRIEGOS

La matemática griega vivía más preocupada por la geometría y fue en el siglo III cuando el matemático Diofanto de Alejandría con su obra “Aritmética” trató por primera vez en la historia de las matemáticas griegas de una forma rigurosa no sólo las ecuaciones de primer grado, sino también las de segundo. Introdujo un simbolismo algebraico muy elemental al designar la incógnita con un signo que es la primera sílaba de la palabra griega arithmos, que significa número. Los problemas de álgebra que propuso prepararon el terreno de lo que siglos más tarde sería "la teoría de ecuaciones". A pesar de lo rudimentario de su notación simbólica y de lo poco elegantes que eran los métodos que usaba, se le puede considerar como uno de los precursores del álgebra moderna.



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX.
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.
LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

“Aritmética” de Diofanto

Se conserva en la antología griega su epitafio que reza así:

"Transeúnte, ésta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

El resultado es 84 años y es de los pocos datos sobre su vida que se conoce con certeza.

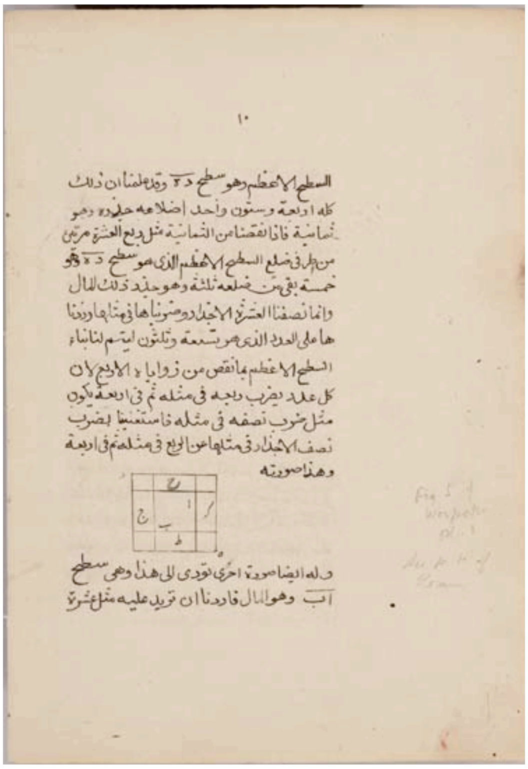
También se debe nombrar a Euclides, cuya obra está formada por trece libros, de los cuales el Libro II y el V son casi completamente algebraicos.

LOS ÁRABES

Abu Abdallah Muḥammad ibn Mūsā al-Jwārizmī, conocido generalmente como al-Juarismi, fue un matemático, astrónomo y geógrafo, que vivió aproximadamente entre 780 y 850. Poco se conoce de su biografía, a tal punto que existen discusiones no saldadas sobre su lugar de nacimiento. Algunos sostienen que nació en Bagdad. Otros sostienen que nació en la ciudad de Jiva, en el actual Uzbekistán.

al-Juarismi

Debemos a su nombre y al de su obra principal, "Hisāb al-ŷabr wa'l muqābala", nuestras palabras álgebra, guarismo y algoritmo. De hecho, es considerado como el padre del álgebra y como el introductor de nuestro sistema de numeración.



"Hisāb al-ŷabr wa'l muqābala"

En su tratado de álgebra, obra eminentemente didáctica, se pretende enseñar un álgebra aplicada a la resolución de problemas de la vida cotidiana del imperio islámico de entonces.

Traducido al latín por Gerardo de Carmona, se utilizó en las universidades europeas como libro de texto hasta el siglo XVI. Es posible que antes de él se hubiesen resuelto ecuaciones concretas, pero éste es el primer tratado conocido en el que se hace un estudio exhaustivo.

Luego de presentar los números naturales, al-Juarismi aborda la cuestión principal en la primera parte del libro: la solución de ecuaciones. Sus ecuaciones son lineales o cuadráticas y están compuestas de unidades, raíces y cuadrados; para él, por ejemplo, una unidad era un número, una raíz era x y un cuadrado x^2. al-Juarizmi no empleaba símbolos de ninguna clase, sino sólo palabras.

En el siglo X vivió el gran algebrista musulmán Abu Kamil, quien continuó los trabajos de Al-Jwarizmi y cuyos avances en el álgebra serían aprovechados en el siglo XIII por el matemático italiano Fibonacci.

Durante este mismo siglo, el matemático musulmán Abul Wafa al Bujzani, hizo comentarios sobre los trabajos de Diofanto y Al-Jwarizmi y gracias a ellos, los europeos conocieron la Aritmética de Diofanto.

EUROPA EN LA EDAD MEDIA

En esta época toman gran importancia las traducciones de las obras matemáticas en árabe.

Uno de los matemáticos más importantes en esta época fue Leonardo de Pisa (1170 - 1250), más conocido como Fibonacci. Se formó en África y realizó una ingente cantidad de viajes por Europa y Asia Menor, lo que le permitió aprender el sistema de numeración hindú-arábigo.

En 1202 vio la luz su obra Liber Abaci (el libro del ábaco), un tratado muy completo sobre métodos y problemas algebraicos en el que recomienda con gran insistencia el uso de los numerales hindú-arábigos.

En su trabajo posterior, Liber Quadratorum (1225), Fibonacci también se ocupó del álgebra. En esta obra expuso la solución de ecuaciones determinadas e indeterminadas de primer grado.

RENACIMIENTO

En esta época se da la consolidación de las notaciones y procesos que conocemos hoy día.

Un fraile italiano, Luca Pacioli (1445-1514) publica la Summa , una recopilación de material de cuatro campos distintos: aritmética, álgebra, geometría euclídea y contabilidad de doble entrada. La parte dedicada al álgebra de esta obra incluye soluciones para las ecuaciones lineales. Su álgebra es retórica y coincide con Fibonacci y los árabes al llamar a la incógnita la “cosa”.

Italia tuvo una profunda influencia en el despegue cultural europeo del renacimiento pero también destacan en este campo muchas publicaciones alemanas de la época cuya proliferación hizo que la palabra alemana “coss” se impusiera en Europa como nombre de la incógnita.

Poco después empezaron a aparecer obras que revolucionarían el álgebra, tales como Ars Magna de Jerónimo Cardano (1501-1576) en el año 1545.

La introducción en 1489 del matemático alemán Johann Widmann d´Eger de los símbolos "+" y "-", junto con el símbolo de la raíz (una forma estilizada de la letra "r" de radical o raíz) introducido en 1525 por el matemático alemán Christoph Rudolff y junto con el símbolo de la igualdad “=” en 1557 por el matemático inglés Robert Recorde así como una nueva notación muy cómoda desarrollada en 1591 por el matemático francés François Viéte, el cual representaba las incógnitas con vocales y las constantes con consonantes, permitió que finalmente René Descartes inventase la notación algebraica moderna, en la cual las constantes están representadas por las primeras letras del alfabeto, a, b, c, … y las variables o incógnitas por las últimas, x, y, z.

René Descartes

BIBLIOGRAFÍA DEL ANEXO

· Arnaldez, Roger y otros (1988). Las antiguas ciencias del Oriente.. Barcelona: Ediciones Orbis S.A.

· Klein, Morris (1972). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días,

I. Alianza Universidad. Madrid, 1992.

· Enciclopedia "Referencia Anaya".

· Boyer, Carl B. (1968). Historia de la Matemática, Alianza Universidad, Madrid, 1986.

ANEXO II: PARRILLA DE OBSERVACIÓN

Nº	ALUMNO/A	NÚMERO DE SESIÓN							
	Apellidos, Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									
19									
20									
21									
22									
23									
24									

ANEXO III: PROPUESTA DE EXAMEN

Examen de Matemáticas 2º E.S.O.
Alumno/a: _________________________ Grupo: ______ Calificación: ____

Ponderación: cada ejercicio vale 2 puntos.

---

1. Ejercicio: *

$5(x+2) = 5x + 10$

$3x + x + 1 = 101$

$3(x + 10) = 7(x - 2)$

$5x - 3 - 2x = x + 2x - 3$

$(x + 5)/3 = x/2 + 3/2$

a) Razona cuáles de estas igualdades son ecuaciones y cuáles identidades. Justifica tu respuesta.

b) Comprueba si $x=19$ es solución de alguna de las ecuaciones que has encontrado en el apartado anterior. Puedes ayudarte de la calculadora.

c) Resuelve las ecuaciones para las que $x=19$ no era solución.

d) Para las ecuaciones del apartado anterior, inventa un enunciado que las modelice.

* Encontrará un análisis completo de esta tarea desde el punto de vista de la evaluación al final de la propuesta.

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5 + (2x + 4)/3 = - (3x + 9)/4 + (5x + 7)/2$

b) $(2 - 3x)/2 - (x - 1)/16 + x/4 = (x - 4)/8$

3. Miguel sale en moto desde su pueblo hacia el sur a una velocidad de 60 km/h. Dos horas después, Inés sale en coche tras él a una velocidad de 90 km/h. ¿Cuánto tiempo tardará Inés en alcanzar a Miguel?

4. Ejercicio:*

a) Si “x” representa la edad de Pedro, escribe en lenguaje algebraico:

1. El doble de su edad.
2. El triple de su edad hace un año.
3. La edad de una persona dos años mayor.
4. La edad de una persona cinco años más joven.
5. La edad de Pedro hace 10 años.
6. La edad de Pedro dentro de 12 años.
7. El número de meses que ha vivido Pedro.

b) Resuelve el siguiente problema: Un padre tiene 45 años y su hijo 11. ¿Dentro de cuánto tiempo la edad del padre será el triple de la edad del hijo?

* Encontrará un análisis completo de esta tarea desde el punto de vista de la evaluación al final de la propuesta.

5. Define los siguientes conceptos: ecuación, identidad, solución, equivalencia de ecuaciones, regla del producto.

Objetivos Ejercicio 1:

APARTADO	OBJETIVOS
a)	2.3. Diferenciar entre ecuaciones e identidades
b)	3.5. Comprobar la validez de una solución
c)	3.1. Encontrar las soluciones de una ecuación de primer grado 3.3. Construir ecuaciones equivalentes a una dada
d)	4.2. Interpretar una ecuación.

Objetivos Ejercicio 4:

APARTADO	OBJETIVOS
a)	4.1. Modelar enunciados de problemas - Reconocer y nombrar incógnitas. - Relacionarlas con otros datos.
b)	3.1. Encontrar las soluciones de una ecuación de primer grado. 4.1. Modelar enunciados de problemas - Reconocer y nombrar incógnitas. - Relacionarlas con otros datos. 4.3. Interpretar y discriminar soluciones.

Criterios empleados en los ejercicios 1 y 4:

		Criterios Orden ECI 2220/2007					Criterios Unidad Didáctica					
TAREA	APARTADO	ECI 2	ECI 3	ECI 8	ECI 9	ECI 10	UD 1	UD 2	UD 3	UD 4	UD 5	UD 6
1	a)						X					
	b)					X			X			
	c)							X		X		
	d)		X								X	
2	a)		X								X	
	b)	X		X	X					X	X	X

ANEXO IV: TAREAS

TAREA 1:

✻ Sigue los pasos y reflexiona acerca del resultado:

Piensa un número.
Súmale 5.
Multiplícalo por 2.
Al resultado réstale 4.
Divide lo que te salga entre 2.
Si le restas el número que pensaste, ¿obtienes el número 3?

Reflexiona acerca de por qué siempre sale el mismo resultado.
¿Serías capaz de escribir un juego de adivinación basado en otra identidad?

ELEMENTOS DE LA TAREA	
META	Que el alumno invente una adivinanza similar
RECURSOS OPERACIONES	Cálculo mental, lápiz y papel. Analizar, modelizar y construir una nueva adivinanza a partir de una identidad.
CONTENIDO	Ecuaciones de primer grado y aritmética.
SITUACIÓN DE APRENDIZAJE	Discusión grupal guiada por el profesor y reflexión individual.
COMPLEJIDAD	Abierta y accesible Exploración

CONDICIONES	
PRESENTACIÓN	Instrucciones verbales.
COMUNICACIÓN	El profesor explica el juego, se les pide reflexionar a los alumnos y se organiza un debate con la intervención de toda la clase. Finalmente se les pide que inventen una nueva adivinanza.
AGRUPAMIENTO	Gran grupo al inicio. Individual al final.

OBSERVACIONES
Se busca motivar al alumno, al introducir el tema de ecuaciones y observar el manejo de sus conocimientos en aritmética.

ANÁLISIS DE CONTENIDO	
CONCEPTOS	Noción de expresión algebraica. Noción de identidad.
DESTREZAS	Escribir expresiones algebraicas.

ANÁLISIS COGNITIVO	
OBJETIVOS Y FOCOS	-
COMPETENCIAS PISA	PR, M
ERRORES	-

FUNCIÓN
MOTIVACIONAL

VARIABLES PISA	
CONTENIDO	Cambio y relaciones. Cantidad.
CONTEXTO	Personal. Orden1.
NIVEL DE COMPLEJIDAD	Reproducción.

TAREA 2:

El perímetro de un triángulo isósceles mide 15cm. El lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados iguales. Con estos datos halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo y dibújalo usando regla y compás.

ELEMENTOS DE LA TAREA	
META	Que el alumno dibuje el triángulo isósceles hallando primero la longitud de los lados.
RECURSOS/OPERACIONES	Lápiz y papel. Regla y compás. Relacionar los lados del triángulo. Construir la ecuación. Resolverla. Dibujar el triángulo resultante usando regla y compás.
CONTENIDO	Triángulos y ecuaciones de primer grado.
SITUACIÓN DE APRENDIZAJE	Los alumnos resuelven la tarea pudiéndose ayudar de una perspectiva geométrica.
COMPLEJIDAD	Cerrada y accesible Ejercicio

CONDICIONES	
PRESENTACIÓN	Instrucciones escritas.
COMUNICACIÓN	El profesor propone la tarea matemática, y los alumnos la resuelven en clase de forma individual. Una vez hallada la longitud de los lados se les pide que dibujen en el triángulo resultante.
AGRUPAMIENTO	Individual.

OBSERVACIONES
En problemas geométricos como éste es muy importante la discriminación de soluciones.

ANÁLISIS DE CONTENIDO	
CONCEPTOS	Noción de ecuación. Noción de solución.
DESTREZAS	Traducción al lenguaje algebraico de enunciados.
ESTRATEGIAS	Resolución de problemas (modelización)

ANÁLISIS COGNITIVO	
FOCOS Y OBJETIVOS	Foco 3. Resolver ecuaciones de primer grado Foco 4. Resolver problemas. 4.1. Modelar enunciados de problemas. 4.3. Interpretar y discriminar soluciones.
COMPETENCIAS PISA	PR, M, RP, R

ANÁLISIS COGNITIVO	
ERRORES	E14.- Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico E15.- Determinar soluciones carentes de sentido.

FUNCIÓN
APLICACIÓN

VARIABLES PISA	
CONTENIDO	Espacio y forma. Cambio y relaciones.
CONTEXTO	Educativa. Orden 2.
NIVEL DE COMPLEJIDAD	Conexión.

TAREA 5:

Un grifo llena un depósito en 3 horas, otro lo hace en 6 horas. ¿Cuánto tardarían en llenarlo entre ambos?

* Encontrará un análisis completo de esta tarea en el ANEXO 4

ELEMENTOS DE LA TAREA	
META	Obtener el número de horas con dos grifos.
RECURSOS/OPERACIONES	Papel y Lápiz. Hallar la tasa de llenado en una hora. Relacionar ambas tasas. Identificar la incógnita. Construir la ecuación. Resolverla. Discriminar soluciones e interpretarlas.
CONTENIDO	Ecuaciones de primer grado. Proporcionalidad.
SITUACIÓN DE APRENDIZAJE	Tarea propuesta en clase para reflexión individual.
COMPLEJIDAD	Cerrada y difícil Problema

CONDICIONES	
PRESENTACIÓN	Instrucciones escritas.
COMUNICACIÓN	El profesor propone la tarea. Deja 15 minutos en clase para su resolución individual. Finalmente elige a un alumno para que la resuelva en la
AGRUPAMIENTO	Individual.

OBSERVACIONES
Requiere que el alumno haga una relación entre el tiempo de llenado del depósito y su capacidad que no es trivial (tasa de llenado).

ANÁLISIS DE CONTENIDO	
CONCEPTOS	Noción de ecuación. Noción de solución.
DESTREZAS	Traducción al lenguaje algebraico de enunciados

ANÁLISIS DE CONTENIDO	
ESTRATEGIAS	Resolución de problemas (modelización)

ANÁLISIS COGNITIVO	
OBJETIVOS Y FOCOS	Foco 3. Resolver ecuaciones de primer grado Foco 4. Resolver problemas. 4.1. Modelar enunciados de problemas. 4.3. Interpretar y discriminar soluciones.
COMPETENCIAS PISA	M, RP, LS
ERRORES	E14.- Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico. E15.- Determinar soluciones carentes de sentido.

FUNCIÓN
SÍNTESIS

VARIABLES PISA	
CONTENIDO	Cambio y relaciones.
CONTEXTO	Personal. Orden 1.
NIVEL DE COMPLEJIDAD	Reflexión

TAREA 1:

El año pasado, la piscina municipal se llenó con el grifo de la plaza de al lado. Este año, se instaló un nuevo grifo, para no tener que usar el de la plaza, y se tardó en llenarla la mitad de tiempo que el año anterior, ¿qué pasaría si el próximo año se usasen sendos grifos para llenarla?

Agrupaos en grupos de 5, para reflexionar esto y plantear una situación hipotética que responda a estas condiciones (añadir estimaciones sobre capacidad, caudal, tiempo, etc.)

* Encontrará un análisis completo de esta tarea en el ANEXO 4

ELEMENTOS DE LA TAREA	
META	Que reflexionen y propongan situaciones
RECURSOS/OPERACIONES	Papel y Lápiz. Fuentes de información Añadir datos.
CONTENIDO	Ecuaciones de primer grado. Proporcionalidad. Medidas.
SITUACIÓN DE APRENDIZAJE	Tarea propuesta en clase para reflexión individual.
COMPLEJIDAD	Abierta y difícil Investigación

CONDICIONES	
PRESENTACIÓN	Instrucciones escritas.
COMUNICACIÓN	El profesor propone la tarea. Deja 15 minutos en clase para su resolución individual.
AGRUPAMIENTO	Grupos de 5.

ANÁLISIS DE CONTENIDO	
CONCEPTOS	Noción de ecuación. Noción de solución.
DESTREZAS	Traducción al lenguaje algebraico de enunciados
ESTRATEGIAS	Resolución de problemas (modelización)

ANÁLISIS COGNITIVO	
OBJETIVOS Y FOCOS	Foco 3. Resolver ecuaciones de primer grado Foco 4. Resolver problemas. 4.1. Modelar enunciados de problemas. 4.3. Interpretar y discriminar soluciones.
COMPETENCIAS PISA	M, RP, LS
ERRORES	E14.- Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico. E15.- Determinar soluciones carentes de sentido.

FUNCIÓN
SÍNTESIS

VARIABLES PISA	
CONTENIDO	Cambio y relaciones. Espacio y forma.
CONTEXTO	Público
NIVEL DE COMPLEJIDAD	Reflexión