TRABAJO FIN DE MÁSTER

UNIDAD DIDÁCTICA:

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.
Especialidad: Matemáticas.

Elaborado por: Antonio Manuel Ortega Torres
Dirigido por: José Luis Lupiáñez Gómez
Universidad de Granada
Curso: 2011/2012

Universidad de Granada

Memoria de TRABAJO FIN DE MÁSTER realizada bajo la dirección y tutela del Doctor José Luis Lupiáñez Gómez, profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, que presenta Antonio Manuel Ortega Torres, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, impartido en la Universidad de Granada durante el curso académico 2011/2012.

Fdo.: Antonio Manuel Ortega Torres

VºBº del Tutor

Fdo.: José Luis Lupiáñez

ÍNDICE:

1. INTRODUCCIÓN

Este proyecto se presenta como Trabajo Fin de Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Especialidad: Matemáticas), impartido en la Universidad de Granada durante el curso académico 2011/2012.

Dicho proyecto consiste, por una parte, en la fundamentación y el diseño de una Unidad Didáctica del tema Ecuaciones de Primer Grado con una incógnita para el Segundo Curso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Asimismo, incluye un estudio empírico relacionado con el aprendizaje de escolares de ese nivel y sobre ese tema. La estructura del documento es la siguiente:

En el punto 2, se hace una fundamentación teórica de la unidad didáctica, haciendo referencia a las leyes, decretos y órdenes vigentes que regulan la educación, tanto a nivel estatal como autonómico, y justifica la estructuración y desarrollo de la unidad didáctica. La estructuración se basa en un análisis didáctico del tema, apoyado en trabajos de autores como Rico, Lupiáñez o Gómez, desarrollado en la asignatura “Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas” a lo largo del curso. Este análisis didáctico se compone de un análisis de contenido, un análisis cognitivo, un análisis de instrucción y por último un análisis de actuación.

Por lo tanto en el punto 3, se hace el análisis de contenido, para intentar adecuarlo al nivel de los alumnos y al curso al que va dirigido. Se hace una estructura conceptual, en la que se trata los contenidos del tema desde un punto de vista conceptual y procedimental, así como las relaciones principales que existen entre ellos, para decidir cuáles de estos contenidos son los que se van a desarrollar dentro de la unidad didáctica. A continuación, se ven cuáles son las principales formas de representación de los contenidos que hemos estudiado anteriormente. Y finalmente, se estudia la fenomenología, donde se analizan los fenómenos a los que dichos contenidos dan respuesta en situaciones de la vida cotidiana.

Se continúa en el punto 4 con el análisis cognitivo, con el que se fijan las expectativas que se pretenden superar con esta unidad, así como las principales dificultades y limitaciones que pueden darse cuando los estudiantes se enfrenten a los contenidos previamente expuestos en el análisis anterior. Además, se exponen algunos ejemplos de tareas que ayudarán a superar o detectar los errores y a alcanzar algunas de las expectativas propuestas.

En el punto 5, se hace el análisis de instrucción, donde se verá cómo diseñar y organizar las tareas, de forma que se adapten mejor a las necesidades de los alumnos, y con ellas lograr los objetivos y detectar los errores expuestos en el análisis cognitivo.

En el punto 6, se desarrolla la Unidad Didáctica, que se compone de los contenidos y objetivos específicos, la temporalización, la metodología utilizada y la secuenciación de las diferentes sesiones que compone esta unidad.

En el punto 7, se describen los criterios e instrumentos de evaluación, que se utilizarán para determinar si los alumnos han conseguido los objetivos que se pretendían con esta unidad y también para evaluar nuestra propia docencia.

En el punto 8, se aborda la atención a la diversidad, para actuar en caso de tener alumnos con dificultades o con altas capacidades. En el Anexo IV, se muestra una relación de ejercicios destinados a atender a la diversidad, tanto de refuerzo como de ampliación.

En el punto 9 se explica una investigación empírica realizada con alumnos de 1º de ESO en el IES Montevives durante el periodo de prácticas sobre el uso de herramientas manipulativas y gráficas para la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado.

Finalmente el aparatado 10, es una reflexión personal a modo de conclusión, que recoge mi opinión sobre la realización de este trabajo, así como del Máster, tanto su parte teórica como práctica.

Posteriormente, encontramos la bibliografía dónde aparecen recogidos todos los documentos y recursos utilizados para la realización de este trabajo.

Para finalizar, hay cuatro Anexos, en los que cuáles se detallan algunos aspectos de la unidad.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Esta Unidad Didáctica se fundamenta en torno a dos dimensiones: por un lado la legislación vigente tanto a nivel nacional como autonómico para la educación, y por otro lado, en la investigación realizada por diferentes autores en enseñanza de las matemáticas, basado en un análisis didáctico de la unidad.

De esta manera, se parte de la definición de currículo que aparece en la **L.O.E.** (Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación) como el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en ella.

Existen dos niveles de responsabilidad en la planificación del currículo escolar: el primero a nivel político y administrativo, que le corresponde al Estado y a la Comunidad Autónoma, en nuestro caso, Andalucía; y un segundo nivel que le corresponde a la administración educativa y al profesorado.

Para planificar una unidad didáctica es fundamental revisar la ubicación y tratamiento de cada uno de los tópicos que se consideran en el Currículo del Ministerio y en el de la Comunidad Autónoma correspondiente (L. Rico, 1997).

Por lo tanto, a nivel nacional la normativa se basa en la Ley Orgánica 2/2006, de Educación (LOE) y su contenido queda reflejado en el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes la Educación Secundaria Obligatoria. A nivel autonómico está el DECRETO 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.

Los contenidos y criterios de evaluación relacionados con este tema están recogidos en el actual documento curricular BOE número 174, Orden ECI/2220/2007, de 12 de Julio. Se encuentran en el área de Matemáticas, dentro de los contenidos del segundo curso en el **Bloque 3. Álgebra**.

Dichos contenidos son los siguientes:

- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.
-Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.
- Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones elementales con expresiones algebraicas sencillas, transformación y equivalencia. Suma, resta y producto de polinomios en casos sencillos.
- Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación.
- Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes.
- Comprobación e interpretación de la solución.
- Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.

Los **elementos básicos** que integran el currículo sobre los que hay que tomar decisiones previas en una programación de la enseñanza son los siguientes:

1. **Objetivos y competencias básicas:** Metas de progresiva dificultad que se marca a los alumnos en función de su nivel de competencia y en función de los resultados del aprendizaje que se debe esperar de ellos.
2. **Contenidos:** Elementos conceptuales y culturales que se van a enseñar: conceptos, procedimientos y actitudes.
3. **Metodología:** Modelos de enseñanza, enfoques prácticos, actividades y tareas concretas que se van a realizar.
4. **Evaluación:** Proceso, criterios e instrumentos previstos para la valoración de los resultados obtenidos, en relación con la consecución de los objetivos y de la adquisición de las competencias básicas.

Un currículo, como plan formativo y como elemento que relaciona la organización y legislación educativas con la actividad docente del profesor, ha de atender a cuatro cuestiones centrales (L. Rico, 1997):

1. ¿Qué formación? ¿Con cuál conocimiento?
2. Esa formación, ¿para qué? ¿Qué aprendizaje persigue?
3. ¿Cómo llevar a cabo la formación?
4. ¿Cuánta fue la formación? ¿Qué resultados se obtuvieron?

Estas cuestiones dan lugar a una diferenciación en cuatro dimensiones que están interconectadas entre sí: dimensión cultural/ conceptual (contenidos), dimensión cognitiva (objetivos y competencias), dimensión ética/ formativa (metodología) y dimensión social (evaluación). Y de aquí se obtienen los diferentes análisis didácticos que se desarrollan en este trabajo: **análisis de contenido** (dimensión conceptual), **análisis cognitivo** (dimensión cognitiva), **análisis de instrucción** (dimensión formativa) y **análisis de actuación** (dimensión social).

Lupiáñez (2009) explica que el análisis didáctico es un procedimiento para diseñar, llevar a cabo y evaluar unidades didácticas sobre un tema concreto de las matemáticas escolares. Este análisis se apoya en los trabajos de Gómez (2007) y Lupiáñez (2009), y se compone de los cuatro análisis referidos en el párrafo anterior. Por lo tanto es lo que se desarrollará en esta Unidad Didáctica.

3. ANÁLISIS DE CONTENIDO

Antes de empezar con el análisis de contenido, hay que decir que se ha realizado un desarrollo histórico sobre las ecuaciones de primer grado con una incógnita. Dicho desarrollo va a servir como introducción del tema, para que los alumnos conozcan la presencia e importancia de las ecuaciones de primer grado a lo largo de la historia. Hay que destacar a los estudiantes que es un tema que ha sido estudiado por diversas civilizaciones a lo largo de la historia, que el estudio de las matemáticas y más concretamente de las ecuaciones de primer grado se está haciendo desde hace miles de años. Dicha evolución histórica se encuentra en el Anexo I.

3.1. Estructura conceptual

Para comenzar con el análisis de contenido de las ecuaciones de primer grado, se hace una estructura conceptual del tema, es decir la descripción de la estructura matemática, a nivel de conceptos y sus relaciones. Esta estructura se compone de un campo conceptual y otro procedimental. Por último se realizará un mapa conceptual de esta estructura.

A continuación, se expondrá un resumen de los conceptos y procedimientos relacionados con las ecuaciones de primer grado. Dentro del campo conceptual distinguimos entre hechos (términos, notaciones, convenios y resultados), conceptos y estructuras. En el campo procedimental, los tres niveles considerados son destrezas, razonamientos y estrategias.

- **Campo conceptual**:

Hechos	Términos	- Variable - Igualdad algebraica - Ecuación - Monomio - Polinomio - Valores - Miembro - Coeficiente - Solución - Equivalencia - Término - Término independiente - Parte literal - Incógnita - Grado - Identidad - Fracción algebraica

	Notaciones	- Operaciones aritméticas {+, -, ·, / , =} - Coeficientes y/o incógnitas {a, b, c, .., x, y, z} - Equivalencia ~ - Los paréntesis ( )
	Convenios	- Los monomios semejantes se suman, dejando la misma parte literal sumando los coeficientes. - La suma de monomios no semejantes se deja indicada y se obtienen polinomios. - Jerarquía de operaciones. - Se excluye el signo del producto aritmético debido a la confusión con la incógnita x. (a x b = a b) - La expresión “ax” se lee “a equis” y no “a por equis”.
	Resultados	a) Regla de la suma: “Si en una ecuación o sistema sumamos o restamos el mismo número a los dos miembros la ecuación o sistema resultante es equivalente al original”. b) Regla del producto: “Si en una ecuación o sistema multiplicamos o dividimos por el mismo número distinto de cero la ecuación o sistema resultante es equivalente al original”. c) Los resultados de los que se deducen el método de igualación, sustitución y reducción. d) Las fórmulas para el cuadrado de la suma, el de la diferencia y el producto de suma por diferencia (Identidades notables).
Conceptos	- Noción de variable. - Noción de dependencia entre variables. - Noción de expresión algebraica, en particular de monomios y polinomios. -Concepto de igualdad, e identidad algebraica. -Operaciones con expresiones algebraicas, monomios y polinomios (suma, producto). Igualdades notables. -Noción de ecuación. Significados de la ecuación. -Noción de solución de una ecuación. -Noción de equivalencia de ecuaciones.	
Estructuras	- (P(X), +, ·) anillo conmutativo.	

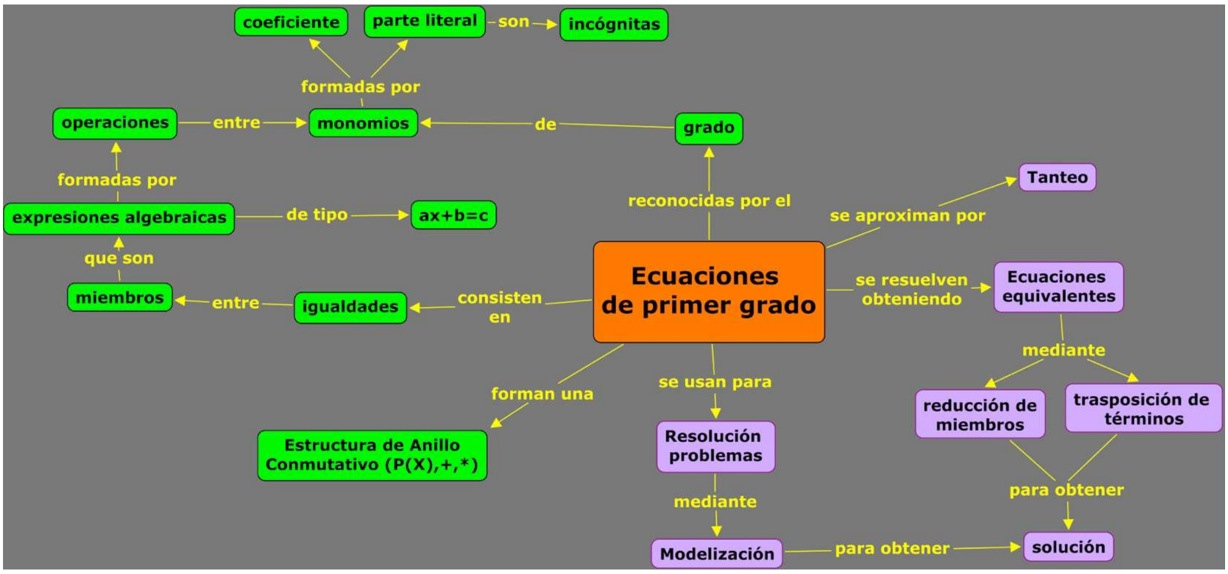
- **Campo procedimental.**

Destrezas	- Escribir y leer expresiones algebraicas y ecuaciones. - Resolución de ecuaciones sencillas por tanteo. - Realizar operaciones combinadas con monomios y polinomios. - Obtener ecuaciones equivalentes. - Representar gráficamente una ecuación. - Simplificar en operaciones con expresiones algebraicas. - Traducir al lenguaje algebraico de enunciados sencillos, así como, de forma inversa, inventar un enunciado dada una expresión algebraica.	
	Deductivo	- Propiedades de las operaciones con monomios y polinomios. Resolución de ecuaciones.

Razonamientos	Inductivo	- Generalizar conjeturas numéricas
	Figurativo	- Uso de representaciones gráficas. - Argumentos para justificar propiedades algebraicas de ecuaciones y sistemas.
Estrategias	- Cálculo mental. - Reconocimiento de identidades. - Reducción de los miembros de una ecuación y transposición de términos de un miembro a otro. - Resolución de ecuaciones complejas (incluyendo paréntesis y denominadores). - Resolución de problemas (modelización). - Resolución de problemas aritméticos y numéricos. - Reconocimiento de patrones numéricos.	

- **Mapa conceptual.**

A continuación se muestra una representación gráfica de la estructura conceptual a modo de mapa conceptual.



En dicho mapa se ha establecido en color verde el campo conceptual de las ecuaciones, donde se ven los términos, conceptos y la estructura que forman los polinomios. De esta manera se ve en que consisten las ecuaciones y todos sus elementos relacionados. En morado se entra en el campo procedimental, estableciendo para que se usan y como se resuelven las ecuaciones de primer grado. Se aplican las estrategias para llegar a la solución de ecuaciones y problemas.

Este mapa será completado posteriormente con los sistemas de representación y la fenomenología.

3.2. <u>Sistemas de representación</u>

En este apartado se van a describir los distintos sistemas que utilizaremos para representar las ecuaciones. Abordaremos cuatro tipos de representaciones, en los cuales destacaremos las características más importantes, así como su modo de uso y el fin de cada uno. Estos tipos de representaciones son los siguientes: representación simbólica, representación manipulativa, representación gráfica y representación verbal.

- **Representación simbólica:**

Este tipo de representación trata de expresar una ecuación por medio de una combinación de letras y números y de una igualdad entre ellos como se muestra a continuación:

$$ax + b = cx + d$$

En esta igualdad, las letras a, b, c y d son valores conocidos y la letra x es la incógnita de la cual queremos averiguar el valor para el que se cumple la igualdad. Podemos distinguir varias partes a las que nombraremos de la siguiente manera: a la parte que está a la izquierda de la igualdad la nombraremos primer miembro ***(ax +b)*** de la ecuación, a la de la derecha segundo miembro ***(cx + d)***. A ***ax***, ***b***, ***cx*** y ***d***, los llamaremos términos y a ***x*** incógnita; a los valores de ***x*** para los que se cumple la igualdad los llamaremos solución.

- **Representación manipulativa:**

Se trata de representar una ecuación por medio de objetos en los cuales podamos representar los términos de cada uno de los miembros de la ecuación.

Dos objetos útiles para nuestro tema son el ábaco y la balanza.

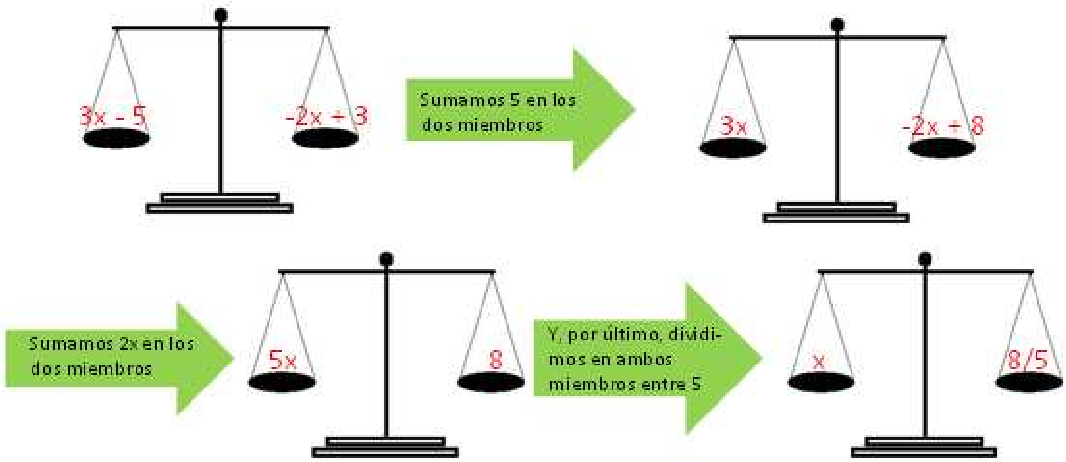
- **EL ÁBACO :**

Con este instrumento podemos representar y solucionar una ecuación de primer grado de la manera siguiente:

La primera fila del ábaco será el número de veces que se repita la incógnita en el primer miembro. La segunda fila será el número de escalares que haya en el primer miembro. La penúltima fila simboliza el número de veces que se repite la incógnita en el segundo miembro. La última fila simboliza el número de escalares en el segundo miembro. Tendríamos que verlo como 4 cuadrantes; superior izquierdo e inferior izquierdo para el primer miembro, superior derecho e inferior derecho para el segundo miembro; superiores positivos e inferiores negativos. En caso de hacer falta mas bolitas se cogerían dos filas para el miembro e incógnita o escalar que hiciese falta. En este caso se desplazarían los demás de la manera oportuna.

- **LA BALANZA:**

Es de gran ayuda para comprender el concepto de equivalencia entre dos ecuaciones, por ejemplo, dada la ecuación 3x-5 = -2x+3, podemos representar cada uno de los miembros en un platillo de la balanza, e introducir las reglas de suma y producto, como las transformaciones que debemos hacer para simplificar la ecuación de manera que la balanza no se desequilibre:

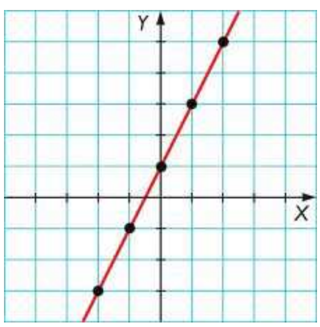


De esta manera, llegamos a la solución, manipulando ambos miembros para simplificar la ecuación, pero manteniendo siempre el equilibrio, es decir, realizando las mismas operaciones en ambas partes de la igualdad.

- **Representación gráfica:**

También está presente la representación gráfica con la representación de funciones en los ejes cartesianos, la cual podemos considerar más importante pues será necesario que entiendan y manejen adecuadamente dicho sistema de representación en el devenir de su aprendizaje. Este sistema de representación les permitirá aprender que las ecuaciones de primer grado determinan rectas en el plano.

Podemos hacer uso de software como por ejemplo el G**eogebra**.



- **Representación verbal:**

La representación verbal es la que en la vida real tiene más importancia, aunque sin las demás ella no tendría sentido. Su importancia radica en que el lenguaje es el método por el cual se expresan todas las ecuaciones en la vida cotidiana. Como el nombre indica se trata de dar una expresión de una ecuación por medio del lenguaje escrito como muestran el siguiente ejemplo:

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

$$x/6+x/12+x/7+5+x/2+4=x$$

3.3. Fenomenología

El análisis fenomenológico en las matemáticas trata de describir los fenómenos que nos encontramos en la vida cotidiana y su relación con los conceptos, procedimientos y propiedades de un tema de matemáticas. Se trata de establecer una relación entre una estructura matemática y los grupos de fenómenos asociados a ella.

Podemos agrupar los fenómenos en función de las características comunes que encontramos en ellos, y que son modeladas por un concepto. Este modelo puede no implicar a todo el concepto, sino ser una subestructura de la estructura matemática que lo configura.

El conjunto de fenómenos que comparten las mismas características estructurales se agrupan en contextos.

En el caso de las ecuaciones de primer grado el **contexto es único**, ya que sirven para encontrar el valor (si lo hay) de un dato desconocido, conocida la igualdad entre dos combinaciones afines de ese dato. En todos los fenómenos de la vida cotidiana donde encontramos ecuaciones de primer grado ocurre esto.

La **estructura** es $ax+b=c$. Se pueden tener subestructuras en función del tipo de ecuación que se obtiene a partir de estos fenómenos y de los valores que tomen a, b y c, ($ax+b=c$, $ax-b=c$, $ax=c$), pero matemáticamente es la misma estructura, que cambia dependiendo de las condiciones de un mismo fenómeno. Las soluciones de estas ecuaciones pueden ser una ($x+2=5$, $3x=9$), ninguna ($2x+2=2x+4$) o infinitas ($x+2=x+2$).

A continuación se realiza un análisis de los fenómenos que se pueden modelar mediante ecuaciones de primer grado:

- En la **Física**, aparecen ecuaciones de la velocidad, la densidad o la elongación de los muelles. Todas ellas son del tipo $ax=b$

- En **Trigonometría**, se puede establecer una ecuación a partir de las razones trigonométricas, calculando algún dato desconocido. También son del tipo ax=b.
- En **Semejanza de figuras**, entre magnitudes que son directamente proporcionales, se resuelve mediante una ecuación del tipo ax=b.
- En problemas cotidianos donde usamos **Porcentajes**, vuelven a aparecer magnitudes directamente proporcionales, resolviéndolas mediante ecuaciones de primer grado del tipo ax=b

Todos los fenómenos anteriores se pueden agrupar en un grupo, en el que la solución se obtiene mediante el uso de la ecuación de primer grado del tipo **ax=b**, donde solo hay **proporcionalidad** entre las magnitudes conocidas y desconocidas.

- En fenómenos donde hay que averiguar **precios** desconocidos, dependiendo de las condiciones del mismo, aparece la estructura ax+b=c en algunas de sus expresiones.
- En situaciones cotidianas donde hay que **repartir** algo, también se modela mediante ecuaciones del tipo ax+b=c, también con diferentes condiciones iniciales.
- En **Geometría,** resolveremos diferentes perímetros o áreas mediante ecuaciones de primer grado ax+b=c, dependiendo de los datos conocidos, aunque puede ser más común encontrarnos con ax=b.
- Los problemas para averiguar la **edad** de una persona son muy comunes en el uso de ecuaciones de primer grado.
- Otro tipo son los **numéricos**, encontrar un número desconocido a partir de relaciones entre otros.
- En **Estadística,** se usa la ecuación para calcular por ejemplo la media o uno de los valores que la integra.

En estos últimos fenómenos, además de ecuaciones con relación de proporcionalidad, aparece además la **afinidad**, y podemos encontrar la estructura ax+b=c, o la simplificada ax=c.

Todos estos fenómenos en los que hay problemas que se resuelven con ecuaciones de primer grado pueden aparecer en diferentes **situaciones:** personales, laborales o educativas, públicas y científicas.

Las **situaciones personales** son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. Como ejemplos se pueden encontrar:

- *Comprando dos kilos de naranjas más una berenjena he gastado lo mismo que ayer al comprar un kilo de naranjas más una calabaza. Si la berenjena vale 1€ y la calabaza 1.5€. ¿Cuánto vale el kilo de naranjas?(***Precios)**
- *Un padre reparte mensualmente 980 euros entre sus cuatro hijos. Juan recibe 70 euros más que Pedro; éste 80 euros más que Agustín, y éste 50 euros más que Borja. ¿Cuánto recibe cada uno? (***Repartos)**
- *Antonio tiene 15 años, su hermano Roberto 13 y su padre 43. ¿Cuántos años han de transcurrir para que, entre los dos hijos, igualen la edad del padre?* **(Edades)**

Las **situaciones laborales o educativas** son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo proponen tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta. Como ejemplos se pueden encontrar:

- *Halla un número tal que su mitad más su cuarta parte más 1, sea igual al número pedido.* **(Numéricos)**
- *El perímetro de un triángulo isósceles mide 15cm. El lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados iguales. Con estos datos halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo.* **(Geometría)**
- *Halla el cateto de un triángulo rectángulo, sabiendo que su ángulo opuesto es de 50º y la hipotenusa mide 10 cm.* **(Trigonometría)**

Las **situaciones públicas** se refieren a la comunidad local o a otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación. Como ejemplos se pueden encontrar:

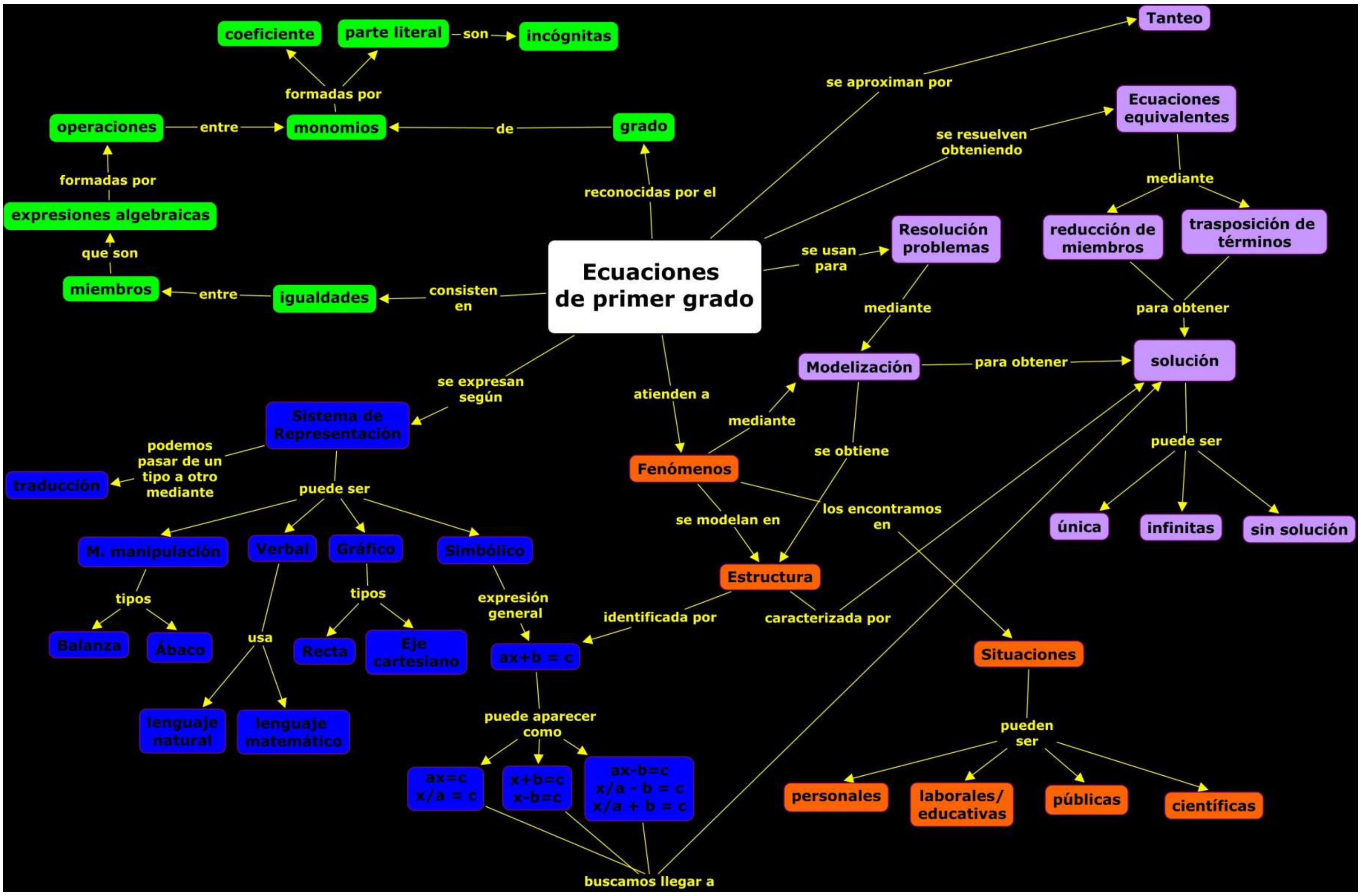
- *En la primera prueba de una oposición queda eliminado el 53% de los participantes. En la segunda prueba, se elimina al 25% de los restantes. Si el número total de personas suspendidas es de 512, ¿cuántas personas se presentaron a la oposición?* **(Porcentajes)**
- *Una empresa de videojuegos va a vender 1.000 videoconsolas y 3.000 juegos a un precio rebajado. Con la venta espera recaudar 130.000 euros. Sabiendo que el juego cuesta 10 euro, ¿cuánto cuesta cada videoconsola?* **(Precios)**
- *El Ayuntamiento quiere edificar en un solar rectangular cuyo perímetro es de 500 metros. Sabiendo que un lado mide la cuarta parte del otro, calcula las dimensiones del solar a construir.* **(Geometría)**

Las **situaciones científicas** son más abstractas e implican la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. Como ejemplos se pueden encontrar:

- *Un grifo tarda 4 días en llenar una piscina y otro tarda 6 días. Si se abren a la vez, ¿cuánto tardarán en llenarla?* **(Física)**
- *Un camión sale de una ciudad a una velocidad de 40 km/h. Una hora más tarde sale de la misma ciudad y en la misma dirección y sentido un coche a 60 km/h. Halla el tiempo que tardará en alcanzarle.* **(Física)**

Con esto se ve la importante relación existente entre las situaciones reales y este tema, por lo que se tendrá en cuenta en la planificación de las sesiones para una correcta consecución de los objetivos y un desarrollo apropiado de las competencias.

De esta manera se completa el mapa conceptual con el análisis didáctico completo de las ecuaciones de primer grado, y la relación de la fenomenología con la estructura conceptual y los sistemas de representación:



En verde y morado se ve la estructura conceptual, en azul los sistemas de representación y en naranja la fenomenología.

Existen relaciones entre todos estos campos: la idea de ecuación se relaciona con todos los elementos que la integran y con los diferentes métodos para llegar a la solución; los distintos sistemas de representación están interrelacionados pues se puede pasar de uno a otro mediante traducción; las representaciones simbólicas son las expresiones algebraicas de la estructura conceptual; los fenómenos los identificamos por las diferentes representaciones simbólicas para llegar a la solución; la estructura de estos fenómenos está caracterizada por el número de soluciones; también los fenómenos se modelizan y se traducen a problemas, a los que le encontramos la solución por diferentes métodos.

En base a este mapa se establecerán los focos principales de nuestro tema.

4. ANÁLISIS COGNITIVO

A continuación se va a realizar el análisis cognitivo, cuáles son las expectativas de aprendizaje de los alumnos, es decir, qué se espera que el alumno aprenda; las limitaciones, dificultades que se pueden encontrar o errores que pueden cometer; y las oportunidades de aprendizaje, cómo se puede facilitar el aprendizaje basándonos en las expectativas fijadas.

4.1. Expectativas de aprendizaje

Con este organizador se quiere delimitar y ordenar lo que el profesor espera que los alumnos aprendan sobre este tema matemático.

Para ello se establecen en primer lugar los diferentes focos conceptuales de interés para el aprendizaje, que consistirán en agrupaciones específicas de conceptos, estrategias y estructuras, cuya principal finalidad será la de establecer prioridades sobre las expectativas y sobre los cuales se agruparán los objetivos.

Podemos agrupar en **cuatro focos** las expectativas que esperamos desarrollar:

- **Foco 1:** Lenguaje algebraico.
- **Foco 2:** Características de las ecuaciones de primer grado.
- **Foco 3:** Resolución de ecuaciones.
- **Foco 4:** Resolución de problemas.

Los focos 1 y 2 quedan reflejados en el mapa conceptual representados en color verde y los focos 3 y 4 están representados en morado.

Más concretamente, los **objetivos** específicos que queremos desarrollar son los siguientes:

1.1. Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.
1.2. Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas.
1.3. Identificar polinomios de primer grado.

2.1. Distinguir los miembros, términos o incógnitas de una ecuación de primer grado.
2.2. Reconocer diferentes tipos de ecuaciones de primer grado.
2.3. Diferenciar entre ecuaciones e identidades.
2.4. Leer y escribir ecuaciones de primer grado.

3.1. Encontrar la solución de una ecuación de primer grado.
3.2. Aproximar una solución por tanteo usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas.
3.3. Construir ecuaciones equivalentes a una dada.
3.4. Conocer los diferentes métodos de resolución.
3.5. Comprobar la validez de una solución.

4.1. Modelar enunciados de problemas.
4.2. Interpretar una ecuación.
4.3. Interpretar y discriminar soluciones.

En las siguientes tablas se muestran los objetivos anteriormente especificados agrupados en los distintos focos nombrados al comienzo de este apartado. En las tablas se puede observar también la vinculación de estos objetivos con las **competencias matemáticas PISA**, donde (OCDE, 2005):

PR = Pensar y razonar.
AJ = Argumentar y justificar.
C = Comunicar.
M = Modelizar.
RP = Plantear y resolver problemas.
R = Representar.
LS = Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
HT = Usar herramientas tecnológicas.

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1.1	Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.				X		X	X	
1.2	Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas.	X				X		X	
1.3	Identificar polinomios de primer grado.		X					X	
2.1	Distinguir los miembros, términos o incógnitas de una ecuación de primer grado.		X					X	
2.2	Reconocer diferentes tipos de ecuaciones de primer grado.	X	X					X	
2.3	Diferenciar entre ecuaciones e identidades.		X					X	
2.4	Leer y escribir ecuaciones de primer grado.			X				X	
3.1	Encontrar la solución de una ecuación de primer grado.	X	X					X	
3.2	Aproximar una solución por tanteo usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas.	X	X				X		X
3.3	Construir ecuaciones equivalentes a una dada.	X	X					X	
3.4	Conocer los diferentes métodos de resolución.	X	X						
3.5	Comprobar la validez de una solución.		X					X	
4.1	Modelar enunciados de problemas.			X	X	X	X	X	
4.2	Interpretar una ecuación.			X	X	X		X	
4.3	Interpretar y discriminar soluciones.	X	X						

La siguiente tabla muestra un recuento de las competencias que se intentará cubrir en cada foco:

	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Lenguaje algebraico.	1	1	0	1	1	1	3	0
Características de las ecuaciones de primer grado.	1	3	1	0	0	0	4	0
Resolución de ecuaciones.	4	5	0	0	0	1	3	1
Resolución de problemas.	1	1	2	2	2	1	2	0
Total	7	10	3	3	3	3	12	1

Vemos en esta última tabla un gran desequilibrio hacia algunas competencias, como por ejemplo, AJ y LS, y vemos que otras como HT, C, M, RP, R, tienen poco peso. Esto puede resultar engañoso, ya que no es que se le dé poca importancia al uso de Herramientas Tecnológicas, por ejemplo, es que, tenemos pocos objetivos relacionados directamente, pero esto no quiere decir que en el desarrollo de las sesiones de clase no se dedique el suficiente tiempo para desarrollar estas competencias.

4.2. Limitaciones

En este apartado nos vamos a centrar en los posibles errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje.

Creemos que es importante tener en cuenta estos errores, ya que pueden deberse a que un alumno tenga problemas a la hora de asimilar un concepto, o que arrastre algún error de cursos o temas anteriores. También es posible que el profesor haya cometido un error a la hora de transmitir el concepto o por equivocación dando un resultado falso, o bien, que esté enseñando algún concepto de forma que éste no llega al alumno.

En este caso, el error será un indicativo para el profesor de que debe intentar enseñar este resultado o concepto de otra manera, con otro método, otros ejemplos. Esto hace que se depure el proceso de enseñanza.

La propia dificultad de un contenido puede originar errores, lo que, como antes, será seña para el profesor de qué parte del contenido necesita más esfuerzos a la hora de ser transmitido al alumno.

A continuación, se muestran las principales **limitaciones** en las que puede un alumno incurrir durante el aprendizaje del tema que nos ocupa, así como los objetivos a las que están asociadas. Los dividiremos en cuatro partes determinadas por los cuatro focos en los que se divide el tema.

- **Foco 1:** Lenguaje algebraico.

MANEJO DEL LENGUAJE ALGEBRAICO	OBJETIVOS
E1.- Mal manejo de símbolos. Ej.: 2x+3=5x	1.1 1.2
E2.- Operar erróneamente con monomios.	1.2
E3.- Incorrecto uso de las propiedades numéricas. Ej.: 2(x-1)=2x-1	1.2
E4.- No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. Ej.: 5*x*y=5xy	1.2
E5.- No distinguir entre fracción algebraica y monomio. Ej.: (a+b)/b	1.2
E6.- Confundir grado de un polinomio. Ej.: 3xy+2	1.3

- **Foco 2:** Características de las ecuaciones de primer grado.

IDENTIFICAR Y CARACTERIZAR ECUACIONES DE PRIMER GRADO	OBJETIVOS
E7.- Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado.	2.1
E8.- Consideración errónea del grado de una ecuación. Ej.: $3x+x^2=12+x^2$	2.2
E9.- No reconocer los distintos tipos de igualdades algebraicas.	2.3

- **Foco 3:** Resolución de ecuaciones.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO	OBJETIVOS
E10.- Uso inadecuado de materiales.	3.2
E11.- Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.	3.1 3.3 3.4
E12.- Obtener igualdades a través de fracciones: Ej.: De (x+2)/(x+5)=6/7, deducir que x+2=6 y x +5=7	3.3

- **Foco 4:** Resolución de problemas.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	OBJETIVOS
E13.- Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico.	4.1
E14.- Determinar soluciones carentes de sentido. Ej.: una longitud nunca puede ser negativa.	4.3

En el primer foco es donde prevemos que habrá un mayor número de limitaciones, la mayoría de ellas asociadas al objetivo 1.2. Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas. Esto se puede deber a la abstracción que conlleva el aprendizaje del Álgebra y a que los alumnos todavía están en un período de transición entre las operaciones formales y las no-formales.

Dentro del segundo foco, las limitaciones que se nos presentan son más errores que pueden proceder de la falta de práctica y familiaridad con el tema.

También esas carencias pueden aparecer a la hora de trabajar con polinomios, pudiendo confundir ecuación con polinomio, polinomio con monomio o identidad con ecuación.

Para el tercer foco, tenemos asociadas tres limitaciones, relacionadas con el mal uso del material manipulativo, obteniendo resultados erróneos al utilizar el ábaco o la balanza.

Por último, en el cuarto foco distinguimos dos limitaciones, la primera vinculada a la modelización del enunciado del problema, haciendo una traducción al lenguaje matemático errónea, que lleva a la resolución equivocada de la tarea. La segunda limitación, viene determinada por la falta de argumentación y justificación del alumno, no tienen en cuenta, ya sea por ellos mismos o por no habérselo inculcado el profesor, que las soluciones tienen que ser lógicas y estar relacionadas con lo que el problema nos pide.

4.3. Oportunidades de Aprendizaje

A continuación, se exponen algunos ejemplos de tareas por medio de las cuales pretendemos conseguir alguno de los objetivos planteados y/o subsanar algunas de las limitaciones previstas.

Tarea 1:

Busca por tanteo, haciendo uso de la calculadora, una solución para la ecuación

$$13x - 8 = 83$$

Con esta tarea pretendemos alcanzar los objetivos 3.1 y 3.2, encontrar la solución de una ecuación de primer grado y aproximar una solución por tanteo, usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas. Por otra parte, también contribuiremos a subsanar las limitaciones E10 y E11, uso inadecuado de materiales y aplicación errónea de las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.

Tarea 2:

a) Resuelve la siguiente ecuación, teniendo en cuenta las indicaciones

$$\boldsymbol{8 - x = 2}$$

1. Suma ***x*** a ambos miembros.
2. Resta ***2*** a ambos miembros.

b) Resuelve la ecuación ***3x = 6 + x***. Explica el proceso que has realizado para obtener la solución.

Con esta tarea se pretenden alcanzar los objetivos 2.1, 3.1 y 3.3, distinguir los miembros, términos e incógnitas de una ecuación de primer grado, encontrar las soluciones de una ecuación de primer grado y construir ecuaciones equivalentes a una dada. En cuanto a las limitaciones favorece la superación de E7 y E11, confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado y aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.

Tarea 3:

Expresa de forma simbólica cada uno de los siguientes enunciados:

a) El doble de ***x***.
b) El siguiente de ***x***.
c) La mitad de ***x*** más seis.

Con esta tarea se pretenden trabajar los objetivos 1.1 y 4.1, representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números y modelizar enunciados de problemas. Las limitaciones que se esperan superar son E1 y E13, mal manejo de símbolos y traducción incorrecta de enunciados verbales al lenguaje simbólico.

Tarea 4:

Dada las siguientes igualdades decidir justificadamente cuales son identidades y cuáles no.

a) ***3x – 4 = -1***
b) ***2x + 5x = 7x***
c) ***4x + 5 – 3x +2 = x + 7***
d) ***3x – 6 + 15 = 2x + 25***

Con la tarea 4, queremos que el alumno alcance los objetivos 2.1 y 2.3, distinguir los miembros, términos o incógnitas de una ecuación de primer grado y diferenciar entre ecuaciones e identidades. Las limitaciones asociadas a estos objetivos y que se alcanzan con esta tarea son E7 y E9, confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado y no reconocer los distintos tipos de igualdades algebraicas.

5. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

El análisis de instrucción se centra, en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad didáctica que se está planificando. También recoge aspectos relativos a la gestión del aula, al empleo de materiales y recursos y a los criterios y métodos de evaluación. (Lupiáñez, 2009).

5.1. Grados de complejidad de las tareas

En este análisis veremos una pequeña selección de tareas acorde con los contenidos que se quieren impartir, que ayuden al logro de objetivos y competencias, y como no, a la superación de las dificultades. También relacionaremos estas tareas con las competencias PISA. Presentaremos una tarea por cada uno de los 3 niveles de dificultad:

Reproducción: Nivel inferior de dificultad. El escolar se enfrenta a un problema en el que tiene simplemente que aplicar conceptos o procedimientos ya manejados.
Conexión: Nivel medio de dificultad. El alumno o la alumna debe relacionar conceptos y afrontar problemas en contextos ligeramente diferentes de aquellos en los que se introdujeron dichos conceptos por primera vez.
Reflexión: Nivel superior de dificultad. El escolar debe relacionar conceptos y procedimientos para resolver problemas originales que suponen una novedad para él.

A continuación se muestran 3 tareas organizadas según el nivel de complejidad. Para cada una de ellas se adjunta un cuadro en el que se hace un análisis y una descripción detallada de la tarea, en la que se incluye el foco al que pertenece, los objetivos, contenidos y competencias que se pretenden lograr con ella, las limitaciones y los elementos de la tarea.

Tarea 1: Reproducción

Comprueba si $x = 1$ es solución de la ecuación $2x + 8 = 10$.
Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $18x = 36$
b) $x + 1 = 3$
c) $-x + 3 = 5$

Comprueba si es solución el resultado obtenido.

Elementos de la tarea.	
Foco	Resolución de ecuaciones.
Objetivo	3.1. Encontrar la solución de una ecuación. 3.5. Comprobar la validez de una solución.

Limitaciones	E11. Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.	
Competencias	PR, AJ, LS	
Elementos de la tarea	Meta	Determinar la solución de una ecuación de primer grado.
	Recursos/operaciones	Papel y lápiz.
	Contenido	Cambio y relaciones.
	Situación de aprendizaje	Contexto educativo. Orden 0.
	Complejidad	Reproducción. Respuesta cerrada, accesible. Ejercicio.
Condiciones	Presentación	Lectura del enunciado, lenguaje simple.
	Comunicación	El profesor explica el enunciado, los alumnos de forma individual responden a las preguntas, luego, por parejas comentan y justifican sus respuestas y por último, se pone en común con toda la clase.
	Agrupamiento alumnos	Individual, por parejas y gran grupo.
Observaciones	El alumno se habitúa a comprobar las soluciones obtenidas y practica la resolución de ecuaciones de primer grado.	

<u>Tarea 2:</u> Conexión

Traduce al lenguaje simbólico las siguientes expresiones:

a) Número de ruedas necesarias para fabricar x coches.
b) Número de días de x semanas.
c) Número de patas de un corral de x gallinas.
d) Un número x menos 2 unidades.
e) El doble de un número x menos 2 unidades.
f) La mitad de un número x menos su doble.

Elementos de la tarea.		
Foco	Lenguaje algebraico.	
Objetivo	1.1. Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. 1.2. Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas.	
Limitaciones	E4. No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación.	
Competencias	PR, LS	
Elementos de la tarea	Meta	Determinar la expresión algebraica de una ecuación de primer grado, a partir de su expresión verbal.
	Recursos/operaciones	Papel y lápiz.
	Contenido	Cambio y relaciones.
	Situación de aprendizaje	Contexto educativo. Orden 2.
	Complejidad	Conexión. Respuesta cerrada, accesible. Ejercicio.
Condiciones	Presentación	Lectura del enunciado, lenguaje simple.

	Comunicación	El profesor explica el enunciado, los alumnos de forma individual responden a las preguntas, luego, por parejas comentan y justifican sus respuestas y por último, se pone en común con toda la clase.
	Agrupamiento alumnos	Individual, por parejas y gran grupo.
Observaciones	Esta actividad nos permite saber si el alumno es capaz de pasar de representación verbal a representación simbólica, a partir de enunciados sencillos. El alumno comienza trabajando enunciados sencillos para posteriormente, trabajar con enunciados verbales más complejos.	

Tarea 3: Reflexión

Antonio tiene triple de edad que su hija Lucía. Si Antonio tuviese 30 años menos y Lucía 8 años más, los dos tendrían la misma edad ¿Cuántos años tiene cada uno?

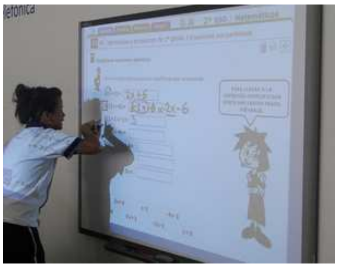
Elementos de la tarea.		
Foco	Resolución de problemas.	
Objetivo	4.1. Modelizar enunciados de problemas. 4.2. Interpretar una ecuación. 4.3. Interpretar y discriminar soluciones.	
Limitaciones	E13.Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico. E14. Determinar soluciones carentes de sentido.	
Competencias	M, RP, LS	
Elementos de la tarea	Meta	Resolver problemas relacionados con un contexto real.
	Recursos/operaciones	Papel y lápiz.
	Contenido	Cambio y relaciones. Cantidad.
	Situación de aprendizaje	Contexto personal. Orden 2.
	Complejidad	Reflexión. Respuesta cerrada, difícil. Problema.
Condiciones	Presentación	Lectura del enunciado, lenguaje simple.
	Comunicación	El profesor explica el enunciado, los alumnos de forma individual responden.
	Agrupamiento alumnos	Individual
Observaciones	El alumno se habitúa a resolver problemas asociados a la vida real y ha relacionar el tema con situaciones que puedan presentárseles en su vida diaria.	

5.2. Recursos y materiales didácticos

Actualmente contamos con numerosos recursos y herramientas manipulativas que nos ayudan a diseñar tareas matemáticas que ponen en juego capacidades de los alumnos que de otro modo sería complicado lograr (Lupiáñez, 2009).

Los materiales y recursos que se pretenden utilizar, siempre que sea posible, son los siguientes: pizarra, tiza, pizarra digital interactiva, proyector, ordenadores, calculadora, presentaciones gráficas (PowerPoint), software libre (Geogebra), recursos de Internet, etc.

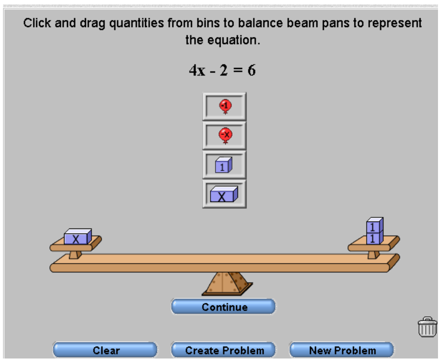
- **Pizarra digital interactiva:** El uso de pizarras digitales interactivas es beneficioso para la docencia ya que se trata de un recurso flexible y adaptable a diferentes estrategias docentes, favorece el interés de los docentes por la innovación y el desarrollo profesional y ahorra tiempo ya que ofrece la posibilidad de grabación, impresión y reutilización de material. También estos medios son beneficiosos para los alumnos, ya que, aumentan la motivación y el aprendizaje, los estudiantes con dificultades visuales se benefician de la posibilidad del aumento del tamaño de los textos e imágenes, así como de las posibilidades de manipular objetos y símbolos, los alumnos con problemas de audición se verán favorecidos gracias a la posibilidad de utilización de presentaciones visuales.

- **Recursos web:** Podemos encontrar diferentes enlaces con los que trabajar de forma interactiva este tema, veamos una serie de ejemplos que utilizaremos con esta unidad:

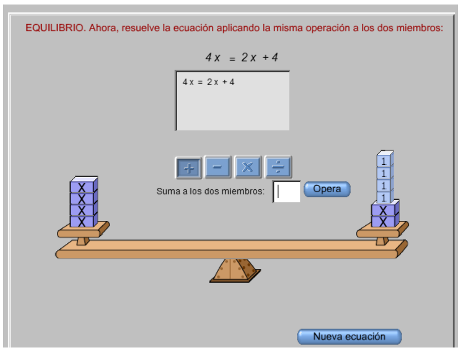
    - En el programa se propone una ecuación y se debe colocar en los platillos cada miembro de la ecuación, representando las incógnitas y enteros positivos como pequeños bloques, y las incógnitas y enteros negativos como globos que hacen fuerza opuesta a los bloques. Estas piezas se colocan en los platillos hasta que se represente la ecuación propuesta, momento en el que balanza alcanza el equilibrio. Este material es interesante para entender el concepto de ecuación, como dos expresiones en equilibrio.

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_324_g_4_t_2.html?open=instructions



Si queremos empezar trabajando sólo con números positivos y de una forma más básica, podemos utilizar el siguiente enlace, donde también se explica en cada caso la operación que se está realizando:

http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/recursos_2005/interactivos/balanza/balanza1.htm



- Otras direcciones donde podemos encontrar ejercicios de ampliación y refuerzo son las siguientes:

http://www.amolasmates.es/algebraconpapas/recurso/tests/lenguajealgebraico/lengalgebraico01.htm

http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/10/unidad_10.htm

http://www.amolasmates.es/algebraconpapas/recurso/tests/primerbasico/prbas0101.htm

- **Software libre:** Un ejemplo de software libre sería el Geogebra, este programa nos permite relacionar los diferentes sistemas de representación, ya que podemos tener la representación gráfica, simbólica y verbal utilizando un sistema manipulativo. Además, nos permite relacionarlo con el tema de funciones que se da en el mismo curso. Este programa es gratuito y también si tenemos conexión a Internet, podemos usarlo de forma online sin necesidad de descargarlo, en el siguiente enlace:

  http://matematicapro.jimdo.com/inicio/geogebra-online/

6. DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Esta unidad didáctica va dirigida a alumnos de 2º de E.S.O. y está encuadrada en el Bloque 3: Álgebra. Dicha unidad continúa el trabajo comenzado en el curso anterior sobre el empleo de letras y símbolos para representar números desconocidos en el ámbito matemático o en la simulación de situaciones reales, así como sus propiedades, relaciones y regularidades numéricas.

El trabajo realizado en unidades anteriores, como pueden ser el estudio de las propiedades de las potencias y de las raíces, los números enteros y racionales, tanto en forma de fracción como en forma decimal, y las operaciones básicas que se pueden realizar con ellos, supone un paso más en el importante proceso de la construcción del lenguaje algebraico.

El concepto de *expresión algebraica* ya se ha estudiado en el curso anterior. En esta unidad se pretende que el alumno consolide y refuerce este concepto. Es importante que los alumnos relacionen las expresiones algebraicas con las fórmulas y sean capaces de calcular el *valor numérico de una expresión algebraica*. Además, dentro del proceso de abstracción que supone el estudio del Álgebra, es fundamental que los alumnos sean capaces de traducir enunciados del lenguaje usual al algebraico y viceversa, como paso previo a la resolución de problemas. También es importante que los alumnos estudien el concepto de *monomio* como un caso particular de expresión algebraica.

Al finalizar la unidad, los alumnos han de ser capaces de reconocer el coeficiente y la parte literal de un monomio, distinguir monomios semejantes y operar con monomios cuando sea necesario. Además, en la resolución de ecuaciones de primer grado, los alumnos tienen que sumar y restar monomios semejantes.

Después de presentar las expresiones algebraicas en general y los monomios como un caso particular de estas, se procederá a trabajar la *resolución de ecuaciones*. Se retoman las reglas de la suma y del producto, estudiadas el curso pasado, como procedimientos de resolución de ecuaciones, y se resuelven para este curso dos nuevos tipos de ecuaciones: con paréntesis y denominadores.

Por último, la *resolución de problemas*, donde los alumnos han de ser capaces de poner en práctica competencias básicas como la lectura comprensiva, la reflexión sobre situaciones susceptibles de ser formuladas en lenguaje matemático, el establecimiento de un plan de trabajo, la valoración de las soluciones obtenidas y el desarrollo de la confianza en las propias capacidades para usar y disfrutar de las matemáticas.

La unidad didáctica se fundamenta en el análisis didáctico anterior, la descripción de los objetivos y contenidos, y la estructuración de las sesiones que se van a trabajar en el aula.

6.1. Contenidos

CONTENIDOS		
Conceptos	**Procedimientos**	**Actitudes**
- El lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas. - Valor numérico de una expresión algebraica. - Monomios: elementos y valor numérico. - Monomios semejantes. - Operaciones con monomios. - Polinomios de primer grado. - Operaciones con polinomios de primer grado. - Ecuaciones de primer grado. - Problemas algebraicos.	- Traducción de enunciados del lenguaje usual al lenguaje algebraico y viceversa. - Cálculo del valor numérico de una expresión algebraica. - Identificación de los monomios y de sus elementos: coeficiente y parte literal. - Identificación de monomios semejantes. - Suma y resta de monomios semejantes. - Producto de monomios. - Resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores. - Resolución de problemas mediante el uso de ecuaciones de primer grado.	- Valorar la importancia del lenguaje algebraico como una herramienta para expresar relaciones y propiedades generales. - Desarrollo del gusto por el uso del lenguaje algebraico para resolver problemas que incorporan relaciones numéricas y medidas. - Interés por realizar aprendizajes nuevos como un medio para desarrollar las capacidades personales. - Desarrollar la perseverancia y las estrategias personales de aprendizaje para fomentar el desarrollo personal. - Mantener el espíritu crítico ante las soluciones propias obtenidas en la resolución de ejercicios y problemas, y valorar positivamente las soluciones aportadas por el resto del alumnado de la clase.

6.2. Secuenciación y organización de las tareas. Gestión del aula

Como paso previo a la puesta en práctica de estas sesiones se realizarán unas actividades iniciales para poder comprobar si los escolares manejan los conceptos previos necesarios para el correcto desarrollo de la unidad didáctica y que será la base de la que partamos para aplicar la unidad.

Se empleará una metodología activa y participativa, involucrando al alumnado en el proceso de aprendizaje. Se utilizarán ejemplos de la vida real durante la unidad, de forma que el alumno entienda la importancia de los contenidos que se imparten y, al mismo tiempo, consigamos captar su atención mediante la motivación. A lo largo de las sesiones, los alumnos serán preguntados para detectar aquellos que tienen problemas de aprendizaje con los contenidos impartidos hasta ese momento y se realizarán actividades de refuerzo o ampliación en caso de que sea necesario. Se fomentará el uso de las TIC para captar la atención del alumnado, así como para que los alumnos vean internet como herramienta útil para la búsqueda de información y como para reforzar y ampliar los contenidos impartidos. De igual manera, en determinadas actividades se organizarán grupos de diferentes niveles de manera que fomentemos también el aprendizaje cooperativo.

Se desarrollarán 8 sesiones de trabajo en clase, con las que se pretenden cubrir los contenidos y objetivos específicos de la unidad. Son los siguientes:

Sesión 1: Evaluación de conocimientos previos. Expresiones algebraicas.
Sesión 2: Valor numérico de una expresión algebraica.
Sesión 3: Monomios y polinomios.
Sesión 4: Ecuación de primer grado I.
Sesión 5: Ecuación de primer grado II.
Sesión 6: Problemas algebraicos I.
Sesión 7: Problemas algebraicos II.
Sesión 8: Evaluación.

6.3. Desarrollo de las sesiones

Esta unidad didáctica se desarrollará en 8 sesiones, una sesión inicial, cinco sesiones de desarrollo y dos sesiones de cierre, de la que la última se realizará la evaluación final de la unidad. La metodología a seguir en las diferentes sesiones será: en la primera sesión, empezaremos evaluando si los alumnos tienen los conceptos que deberían haber adquirido en cursos anteriores, haremos un breve desarrollo histórico de las ecuaciones de primer grado, para después explicar las expresiones algebraicas, utilizando alguna tarea de motivación. En las cinco sesiones de desarrollo, en algunos casos el profesor explicará los conceptos y se harán tareas para ejemplificar estos conceptos, y en otros se pretenderá que los alumnos por medio de una actividad intenten llegar al concepto que se les pretende enseñar; luego, el profesor lo explicará con un mayor rigor y también se harán tareas para que se fijen estos conceptos. Dichas tareas serán realizadas por los alumnos y corregidas por éstos en la pizarra. En general, el profesor será un guía, por lo que se fomentará la participación del alumno con la ayuda del profesor. En la primera sesión de cierre, se completará lo aprendido con tareas de síntesis, además de dedicar un tiempo a resolver problemas geométricos de ecuaciones de primer grado mediante el uso de palillos. Por último en la sesión de cierre final se realizará una prueba escrita, que cuenta el 60% de la nota.

TEMPORALIZACIÓN		
Sesión inicial	**Sesiones de desarrollo**	**Sesión de cierre**
1	2, 3, 4, 5, 6	7, 8

- **Sesión 1: Evaluación de conocimientos previos. Expresiones algebraicas.**

SESIÓN 1		
Contenidos	**Objetivos**	**Limitaciones**
- El lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas.	1.1. Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.	- E1. Mal manejo de símbolos. Problemas a la hora de interpretar el valor desconocido.

Empezaremos esta sesión realizando unas tareas de repaso en el ordenador, dichas tareas aparecen en el enlace:

http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/10/unidad_10.htm

Los alumnos empezarán resolviéndolas de forma individual y después por parejas argumentarán los resultados obtenidos. Por último, los alumnos irán saliendo a la pizarra a resolver los ejercicios. (30 min.).

Posteriormente realizaremos una breve introducción histórica, para que los alumnos conozcan la presencia e importancia de las ecuaciones de primer grado a lo largo de la historia, destacando que es un tema que ha sido estudiado por diversas civilizaciones (Anexo 1). (5 min.).

Para motivar a los alumnos, se les plantea las tareas 1 y 2. Se escuchan todas las opiniones de los alumnos, y se plantean las ecuaciones de primer grado para resolverlas. De esta manera los estudiantes empiezan a ver la aplicación de esta unidad en la vida cotidiana. (10 min).

Tarea 1:

Un buen día, Ana y Jorge pasan frente a una tienda de discos.
Jorge: Oye Ana, ¿guardas todavía aquellos discos de rock?
Ana: Pues no. Le regalé la mitad a mi amiga Sonia. Y después, presté cinco discos a nuestro amigo David. Así que ahora sólo me queda un disco. Y estoy dispuesta a regalártelo si averiguas cuántos discos tenía al principio.
¿Cómo podemos ayudar a Jorge a ganarse el disco?

Tarea 2:

Intenta descubrir por tus medios el peso de una caja en una balanza con tres cajas y cuatro bolas de 1 kg en un lado, y una caja y 10 bolas de un kilo en el otro lado.

Por último, se realizará la tarea 3. Los alumnos lo harán de forma individual, el profesor resolverá las dudas que vayan surgiendo. Luego, los alumnos resolverán cada apartado en la pizarra, resolviendo ellos mismos las dudas que puedan tener sus compañeros, contando siempre con la ayuda del profesor. (10 min.)

Tarea 3:

Traduce al lenguaje simbólico las siguientes expresiones:

a) Número de ruedas necesarias para fabricar x coches.
b) Número de días de x semanas.
c) Número de patas de un corral de x gallinas.
d) Un número x menos 2 unidades.
e) El doble de un número x menos 2 unidades.
f) La mitad de un número x menos su doble.

Se marca la tarea 4 como tarea para casa.

Tarea 4:

Traduce al lenguaje simbólico las siguientes expresiones:

a) Número de ruedas necesarias para fabricar x motos.
b) Número de semanas de x años.
c) Número de piernas de x personas.
d) El doble del cuadrado de un número.
e) El cuadrado del doble de un número.
f) 7 veces la suma de dos números consecutivos.

- **Sesión 2: Valor numérico de una expresión algebraica.**

SESIÓN 2		
Contenidos	**Objetivos**	**Limitaciones**
- El lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas. - Valor numérico de una expresión algebraica.	1.2. Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas.	E1.- Mal manejo de símbolos. E3.- Incorrecto uso de las propiedades numéricas. E4.- No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación.

Empezaremos la sesión repasando la sesión anterior y corrigiendo la tarea marcada (10 min.). Repasaremos el concepto de expresión algebraica y valor numérico de una expresión algebraica (10 min.). Se realizarán las tareas 5, 6, 7 y 8, una a una y siguiendo siempre el mismo proceso, el alumno por si mismo lo resuelve, un alumno lo resuelve en la pizarra y entre todos (alumnos y profesor) responden a las dudas que hayan surgido (35 min.). Se marcará como tarea para casa, las tareas 9 y 10.

<u>Tarea 5:</u>

Inventa un enunciado para el cual la siguiente ecuación sea su expresión algebraica:

$$2x + 4 = 18$$

Con esta tarea pretendemos que el alumno aprenda a obtener a partir de la representación simbólica, la verbal, fomentando también la imaginación del alumno y su capacidad para relacionar el álgebra con sucesos reales. En la corrección de esta tarea se intentará tener el mayor número de respuestas posibles, para que vean la variabilidad de enunciados que pueden dar lugar a una misma expresión algebraica.

<u>Tarea 6:</u>

Comprueba que el valor asignado a x es solución de la ecuación correspondiente:

a) $2x + 5 = x - 15$; $x = -20$
b) $(x - 10)/3 = 2 - x$; $x = 4$
c) $10 + 3(x - 2) = x - 2$; $x = -1$
d) $3 - 2x + 8 = x + 7/2$; $x = 5/2$

<u>Tarea 7:</u>

Sustituye las incógnitas por números de modo que se verifiquen las ecuaciones.

a) $2x - 8 = 0$
b) $3x + 5 = 20$
c) $x = 12 - 3x$
d) $2a + 6 = 0$

<u>Tarea 8:</u>

Inventa dos ecuaciones distintas las cuales tengan como solución $x = 5$ y $x = 3$ respectivamente.

<u>Tarea 9:</u>

Inventa un enunciado y escribe su correspondiente expresión algebraica.

Tarea 10:

Comprueba que el valor asignado a x es solución de la ecuación correspondiente:

a) $2x + 5 = x - 15$; $x = -20$
b) $(x - 10)/3 = 2 - x$; $x = 4$

- **Sesión 3: Monomios y polinomios.**

SESIÓN 3		
Contenidos	**Objetivos**	**Limitaciones**
- Monomios: elementos y valor numérico. - Monomios semejantes. - Operaciones con monomios. - Polinomios de primer grado. - Operaciones con polinomios de primer grado.	1.2. Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas. Identificar monomios. Operar con monomios. 1.3.Identificar polinomios de primer grado. Operar con polinomios de primer grado. Diferenciar entre monomio y polinomio.	E1.- Mal manejo de símbolos. E2.- Operar erróneamente con monomios. E3.- Incorrecto uso de las propiedades numéricas. E4.- No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. E5.- No distinguir entre fracción algebraica y monomio. E6.- Confundir grado de un polinomio

Empezamos la sesión corrigiendo las tareas marcadas en la sesión anterior (10 min.). A continuación, se explica el concepto de monomio y sus partes y se realiza la tarea 11 (10 min.). Posteriormente, se explica el concepto de monomios semejantes, sus operaciones y se realiza la tarea 12 (15 min.). Luego, se explican los polinomios de primer grado, se realiza la tarea 13 y por último como operar con ellos. Se practica con la tarea 14 y 15 (20 min.). Al final, se marcan las tareas 16 y 17 para casa. La dinámica a la hora de resolver los ejercicios sigue siendo la misma que en sesiones anteriores.

Tarea 11:

Identifica en cada uno de los siguientes monomios su parte literal y su coeficiente:

a) $2xy$ b) $3xy^2$
c) $-6y$ d) $-2x^2y^2$
e) $-x^3y$ f) $4x^3y^3$

Tarea 12:

Agrupa los siguientes monomios en grupos de monomios semejantes:
$2xy, 3xy^2, -6y, -5xy, -2x^2y^2, -x^3y, 4x^3y^3, -8xy^2, 3xy, x^2y^2, 4x^3y, -6x^3y^3, -xy^2, 2y, xy, 2x^2y^2, \frac{1}{4}x^3y^3, -9xy^2$

Tarea 13:

Dados los siguientes monomios identifica sus elementos, a saber, coeficiente, parte literal y grado y decide cuáles se pueden sumar y realiza su suma.

$x^2, x^2 y$ $\quad x^3z, 2x^3z$ $\quad 2x, 2y$ $\quad 6x, 5x$

Tarea 14:

Señala las expresiones algebraicas que representen un polinomio de grado 1.

a) $8x - 2$
b) $x^2 + x + 2$
c) $3 - 4x$
d) $- x - 4 - x^2$
e) x
f) $x^3 + x^2 + x + 1$
g) $x - 1 - x^2$

Tarea 15:

Realiza las operaciones con los siguientes polinomios:

a) $8x - 2 + 6 - 2x$
b) $2x - (3x + 1)$
c) $- 6x + 2 - (- x + 2)$
d) $- (1 - 4x) + 2x - 2$
e) $2 (-3 + x) - 3(2x - 1)$
f) $- 4 (-x + 12) + 3$

Tarea 16:

a) Suma, en los casos en que sea posible, los monomios de la tarea 12.

b) Identifica su parte literal y su coeficiente.

Tarea 17:

Realiza las operaciones con los siguientes polinomios:

a) $x - 3 + 2x$
b) $x - \frac{1}{4}\,(3x + 1)$
c) $-6x + 2 - x + 2$
d) $-1 - 4x - (2x - 2)$
e) $3(-x) + (-2)(x + 1)$
f) $4x - (-2x - 3)$

- **Sesión 4: Ecuación de primer grado I.**

SESIÓN 4		
Contenidos	**Objetivos**	**Limitaciones**
- Ecuaciones de primer grado.	2.1.Distinguir los miembros, términos o incógnitas de una ecuación de primer grado. 2.2. Reconocer los diferentes tipos de ecuaciones de primer grado. 2.3. Diferenciar entre ecuación e identidades. 2.4. Leer y escribir ecuaciones de primer grado. 3.1. Encontrar la solución de una ecuación de primer grado. 3.2. Aproximar una solución por tanteo usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas.	E1.- Mal manejo de símbolos. E3.- Incorrecto uso de las propiedades numéricas. E4.- No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. E7.- Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado. E8.- Consideración errónea del grado de una ecuación. E9.- No reconocer los distintos tipos de igualdades algebraicas. E10.- Uso inadecuado de materiales.

La sesión 4 empieza con la corrección y respuesta de dudas de las tareas de la sesión anterior (10 min.). Se explica el concepto de ecuación de primer grado y los alumnos realizan la tarea 18, se explica cuáles son las partes de una ecuación de primer grado y realizan la tarea 19 (10 min.). Definimos el concepto de ecuaciones equivalentes, resolvemos la tarea 20, luego, la diferencia entre ecuación e igualdad y resuelven la tarea 21 (10 min.). Los 25 minutos restantes de la sesión serán destinados a trabajar con la balanza interactiva, como se explica en la tarea 22. Al finalizar la sesión, se marcará la tarea 23, como actividad para casa.

Tarea 18:

Di cuáles de las siguientes ecuaciones son de primer grado y cuáles no, justifica tu respuesta:

a) $8x - 2 = 6x$
b) $x^2 + x + 2 = 2$
c) $3 - 4x = 0$
d) $- x - 4 - x^2 = 1 + 2x$
e) $x = 2$
f) $x = x^3 + x^2 + x + 1$
g) $x - 1 - x^2$

Tarea 19:

Identifica los diferentes miembros de las ecuaciones de primer grado de la tarea 18.

Tarea 20:

Identifica las ecuaciones que son equivalentes, justifica tu respuesta:

a) $4x = 4$
b) $6x - 2 = 10$
c) $4x + 6 = x + 9$

Tarea 21:

Decidir justificadamente si las siguientes igualdades son o no son identidades:

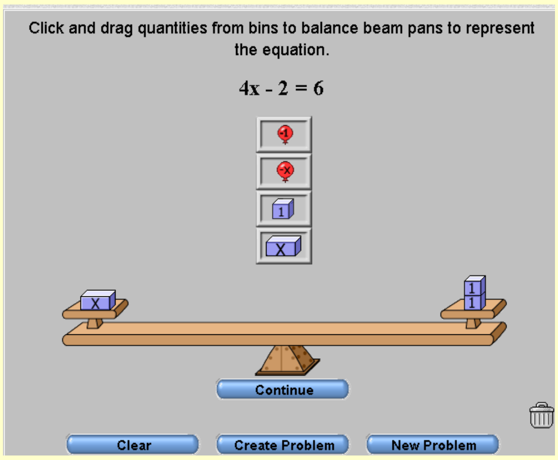
a) $12x - 3x = 9x$
b) $4x + 5 - 3x + 2 = x + 7$
c) $3x - 6 + 15 = 2x + 25$

La siguiente tarea está pensada para que los alumnos refuercen el concepto de ecuación, lo entiendan como una situación de equilibrio en la que si agregamos o quitamos uno o varios elementos de un platillo de la balanza, entonces debemos realizar la misma operación en el otro platillo para que ésta no se desnivele. También nos puede servir para que el alumno vea de una manera visual por qué se realizan determinadas operaciones para obtener la solución. De esta manera se explica los diferentes pasos para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

Tarea 22:

De forma individual y con el ordenador los alumnos entrarán en el enlace:

http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_324_g_4_t_2.html?open=instructions



Cada alumno dispondrá (en la medida que sea posible) de un ordenador para trabajar y estarán sentados por parejas. Los alumnos deberán "jugar" con la balanza resolviendo diferentes ecuaciones y comentar con su compañero lo que observa: cuándo se pierde el equilibrio, cuándo no, qué operaciones cree que se están realizando, etc. El profesor irá indicando en cada momento lo que deben hacer de forma general para que los alumnos tengan una guía y se pueda aprovechar al máximo esta actividad. A continuación, escriben en su cuaderno el procedimiento que ellos consideran que se debe hacer para resolver una ecuación. Por último, se ponen en común las ideas y el profesor explica el procedimiento.

Tarea 23:

Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2x - 6 = 8$ ***b)*** $8x + 36 = 2x$
c) $x - 8 = 6 + 21$ ***d)*** $5 + x = 2x + 1$
e) $x - 5 + 6 = 0$ ***f)*** $5x - 2 = 3x - 16$
g) $x - 8 = 6 + 21$ ***h)*** $5 + x = 2x + 1$
i) $x - 5 + 6 = 0$ ***j)*** $5x - 2 = 3x - 16$

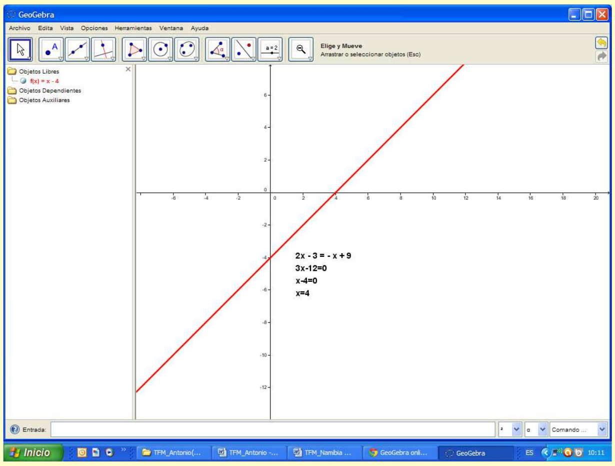
- **Sesión 5: Ecuación de primer grado II.**

SESIÓN 5		
Contenidos	**Objetivos**	**Limitaciones**
- El lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas. - Valor numérico de una expresión algebraica. - Ecuaciones de primer grado.	1.1 Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. 1.2 Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas. 2.5. Leer y escribir ecuaciones de primer grado. 3.1. Encontrar la solución de una ecuación de primer grado. 3.3.Construir ecuaciones equivalentes a una dada. 3.4. Conocer los diferentes métodos de resolución. 3.5. Comprobar la validez de una solución.	E1.- Mal manejo de símbolos. E3.- Incorrecto uso de las propiedades numéricas. E4.- No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. E11.- Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado. E12.- Obtener igualdades a través de fracciones.

Los 10 primeros minutos de esta sesión, serán dedicados a la corrección de la tarea marcada. Continuaremos la clase realizando una actividad con el programa Geogebra. Posteriormente realizaremos tareas de resolución de ecuaciones de primer grado en las que aparecen paréntesis, luego denominadores y por último, ambas cosas. (40 min.) En los 10 minutos finales de la sesión se resolverán dudas y se marcará tarea para casa (actividad 30).

Tarea 24:

Empezamos la tarea explicando al alumno cómo escribir la expresión algebraica para poder dibujarla con el programa, a continuación le damos una serie de ejemplos para que el alumno los escriba de forma correcta, los dibuje en el geogebra y en su cuaderno lo resuelva, después los alumnos deberán argumentar qué relación creen que tiene la representación gráfica con la solución o qué patrones se repiten en dicha representación.



Con la tarea 24 pretendemos que el alumno asocie el concepto de ecuación con función, que relacione solución de una ecuación con punto de corte en el eje de abscisas o con el punto de corte de dos rectas, y que vean que la representación gráfica de una ecuación de primer grado siempre es una recta.

Tarea 25:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) ***14 + x + 10 = 5 + 30***
b) ***18 + 2x - 8 = -25 + x***
c) ***12 - x = 3 - 2x + 9***
d) ***7 - 5x = 13 - 4x -17***

Tarea 26

Aplica la regla del producto para resolver las ecuaciones siguientes:

a) $3x = 18$

b) $-2x = 1/3$

c) $5 = 7x$

d) $(1/2)x = 8$

Tarea 27

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 4 = 2x + 8 - 6 - x$

b) $x - 15 + x + 4 = 3(2x - 1)$

c) $4(6 + 2x) + 5(2 - x) = -3(x + 6) - 8$

Tarea 28

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$$

$$\frac{5}{x-7} = \frac{3}{x-2}$$

$$\frac{x-1}{4} - \frac{x-5}{36} = \frac{x+5}{9}$$

$$\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3} = \frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}$$

Tarea 29:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\frac{3}{4}(2x+4) = x+19$$

$$2(x+1) - 3(x-2) = x+6$$

$$\frac{4}{x-3} = \frac{5}{x-2}$$

$$6\left(\frac{x+1}{8} - \frac{2x-3}{16}\right) = 3\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}(3x-2)$$

Tarea 30:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

$$\frac{2}{3}\left[x-\left(1-\frac{x-2}{3}\right)\right]+1=x$$

$$2-\left[-2\cdot(x+1)-\frac{x-3}{2}\right]=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

- **Sesión 6: Problemas algebraicos I.**

SESIÓN 6		
Contenidos	**Objetivos**	**Limitaciones**
- El lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas. - Valor numérico de una expresión algebraica. - Ecuaciones de primer grado. - Problemas algebraicos.	1.1. Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. 1.2. Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas. 3.1. Encontrar la solución de una ecuación de primer grado. 3.3. Construir ecuaciones equivalentes a una dada. 3.4. Conocer los diferentes métodos de resolución. 3.5. Comprobar la validez de una solución. 4.1. Modelizar enunciados de problemas. 4.2. Interpretar una ecuación. 4.3. Interpretar y discriminar soluciones.	E1.- Mal manejo de símbolos. E3.- Incorrecto uso de las propiedades numéricas. E4.- No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. E7.- Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado. E11.- Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado. E13.- Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico. E14.- Determinar soluciones carentes de sentido.

Esta sesión será dedicada a la resolución de problemas. Se empezará corrigiendo la tarea marcada y las dudas que puedan tener los alumnos con la resolución de ecuaciones de primer grado con paréntesis y denominadores (15 min.). Se les explicará el proceso que tienen que seguir para la resolución de problemas. El resto de la clase se empleará en la resolución de problemas y se harán las tareas 31, 32, 33, 34, 35, y 36, por último se marcarán para casa las tareas 37, 38, 39 y 40.

Tarea 31:

Las edades de dos hermanos suman 49 años. Calcularlas sabiendo que la edad de uno es superior en 5 años a la del otro.

Tarea 32:

Tres niños tienen en total 90 euros. Calcular cuánto tiene cada uno, sabiendo que uno de ellos tiene 5 euros más que el otro, y éste doble que el tercero.

Tarea 33:

Trece lapiceros y siete bolígrafos de marca se han vendido por 108 euros. Calcular el precio de cada uno de los elementos, sabiendo que el valor de un bolígrafo es doble del de un lapicero.

Tarea 34:

Repartir 4.040 euros entre cuatro personas, sabiendo que la segundo recibe la mitad de la primera, la tercera un tercio de la segunda, y la cuarta la décima parte de la tercera.

Tarea 35:

La base de un rectángulo es 3 cm más larga que su altura. Si el perímetro es 26 cm. ¿cuál es su altura?

Tarea 36:

Un matrimonio tiene tres hijos. Cada uno le lleva al siguiente dos años. Si entre los tres suman 27, ¿cuál es la edad de cada uno?

Tarea 37:

El perímetro de un triángulo equilátero es de 72 cm. ¿Cuánto mide el lado?

Tarea 38:

Por un videojuego, un cómic y un helado, Andrés ha pagado 19'5 euros. El videojuego es cinco veces más caro que el cómic, y éste cuesta el doble que el helado. ¿Cuánto pagó Andrés por cada artículo?

Tarea 39:

Antonio tiene 15 años, su hermano Roberto 13 y su padre 43. ¿Cuántos años han de transcurrir para que, entre los dos hijos, igualen la edad del padre?

Tarea 40:

En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. Si en la reunión hay un total de 96 personas, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay en la reunión?

- **Sesión 7: Problemas algebraicos II.**

SESIÓN 7		
Contenidos	**Objetivos**	**Limitaciones**
- El lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas. - Ecuaciones de primer grado. - Problemas algebraicos.	1.1. Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. 1.2. Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas. 3.1. Encontrar la solución de una ecuación de primer grado. 3.2. Aproximar una solución por tanteo usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas. 3.3. Construir ecuaciones equivalentes a una dada. 3.4. Conocer los diferentes métodos de resolución. 3.5. Comprobar la validez de una solución. 4.1. Modelizar enunciados de problemas. 4.2. Interpretar una ecuación. 4.3. Interpretar y discriminar soluciones.	E1.- Mal manejo de símbolos. E3.- Incorrecto uso de las propiedades numéricas. E4.- No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. E7.- Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado. E11.- Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado. E13.- Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico. E14.- Determinar soluciones carentes de sentido.

La primera parte de esta sesión será dedicada a la resolución de problemas y repaso de la unidad. Se empezará corrigiendo los problemas marcados y las dudas que puedan tener los alumnos con ellos (15 min.). Si no hay muchas dudas se resolverá por parte de los alumnos en la pizarra las tareas 41, 42, 43, 44 y 45. Se les entregará una hoja con una relación de problemas para que realicen más problemas en casa (Anexo III). (15 min)

Tarea 41:

Una empresa de informática reparte unos beneficios de 8.200 euros entre 14 empleadas de las cuales 10 son fijas y 4 contratadas. Si las fijas cobran 55 euros más que las contratadas, ¿cuánto recibe cada una?

Tarea 42:

En un taller de metal se fabrica una pieza rectangular cuya base es el triple de la altura. Si su perímetro es 40 cm., ¿cuál es su área?

Tarea 43:

Un albañil cobra un trabajo del la siguiente forma: la sexta parte al iniciarlo, la cuarta parte al cabo de un mes, la quinta parte al finalizar el segundo mes y la tercera parte más 75 euros al finalizar la obra. ¿Cuánto cobra por el trabajo?

Tarea 44:

El perímetro de un triángulo isósceles mide 15cm. El lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados iguales. Con estos datos halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo.

Tarea 45:

Un grifo llena un depósito en 3 horas, otro lo hace en 6 horas. ¿Cuánto tardarían en llenarlo entre ambos?

Aprovechando esta última tarea, para transformarla de tarea cerrada a abierta, les propongo que en grupos de seis reflexionen sobre el siguiente problema y obtengan una solución coherente, planteando una situación hipotética que responda a estas condiciones, con estimaciones sobre capacidad de la piscina, caudal de los grifos, o tiempo de llenado (15 min).

Tarea 46:

El año pasado, la piscina municipal se llenó con el grifo de la plaza de al lado. Este año, se instaló un nuevo grifo, para no tener que usar el de la plaza, y se tardó en llenarla la mitad de tiempo que el año anterior, ¿qué pasaría si el próximo año se usasen sendos grifos para llenarla?

Para finalizar la sesión, reparto palillos a los alumnos para que resuelvan problemas geométricos con ecuaciones de primer grado con una incógnita, representado previamente al planteamiento de la ecuación, la figura geométrica. De esta manera, el uso de esta herramienta manipulativa ayudará a los estudiantes en la resolución de este tipo de problemas. (15 min).

Tarea 47:

El perímetro de un rectángulo es de 30 cm. Sabiendo que la altura es la mitad que su base, ¿cuáles serían las dimensiones?

Tarea 48:

En un triángulo isósceles, se sabe que los lados iguales son el triple del desigual. Si el perímetro es de 21 centímetros, ¿cuánto mide cada lado?

- **Sesión 8: Evaluación.**

SESIÓN 8		
Contenidos	**Objetivos**	**Limitaciones**
- El lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas. - Valor numérico de una expresión algebraica. - Monomios: elementos y valor numérico. - Monomios semejantes. - Operaciones con monomios. - Ecuaciones de primer grado. - Problemas algebraicos.	1.1. Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. 1.2. Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas. 1.3. Identificar polinomios de primer grado. 2.1.Distinguir los miembros, términos o incógnitas de una ecuación de primer grado. 2.2. Reconocer los diferentes tipos de ecuaciones de primer grado. 2.3. Diferenciar entre ecuación e identidades. 2.4. Leer y escribir ecuaciones de primer grado. 3.1. Encontrar la solución de una ecuación de primer grado. 3.2. Aproximar una solución por tanteo usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas. 3.3. Construir ecuaciones	E1.- Mal manejo de símbolos. E2.- Operar erróneamente con monomios. E3.- Incorrecto uso de las propiedades numéricas. E4.- No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. E5.- No distinguir entre fracción algebraica y monomio. E6.- Confundir grado de un polinomio. E7.- Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado. E8.- Consideración errónea del grado de una ecuación. E9.- No reconocer los distintos tipos de igualdades algebraicas. E10.- Uso inadecuado de materiales. E11.- Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado. E12.- Obtener igualdades a través de fracciones.

	equivalentes a una dada. 3.4. Conocer los diferentes métodos de resolución. 3.5. Comprobar la validez de una solución. 4.1. Modelizar enunciados de problemas. 4.2. Interpretar una ecuación. 4.3. Interpretar y discriminar soluciones.	E13.- Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico. E14.- Determinar soluciones carentes de sentido.

Esta es la última sesión de la Unidad Didáctica, en dicha sesión se realizará una prueba final individual que durará toda la sesión, dicha prueba aparece en el Anexo II.

En el apartado siguiente se establecen los criterios de evaluación de la Orden ECI 2220/2007 de 21 de julio y los propios establecidos para la Unidad Didáctica. Con las tareas de la prueba final de evaluación se emplean los siguientes criterios:

		Criterios Orden ECI 2220/2007					**Criterios Unidad Didáctica**					
TAREA	**APARTADO**	ECI2	ECI3	ECI8	ECI9	ECI10	UD1	UD2	UD3	UD4	UD5	UD6
1			X								X	
2	**a**						X					
	b					X			X			
	c							X		X		
	d		X								X	
3			X								X	
4			X					X		X		
5			X					X		X		
6		X		X	X					X	X	X
7		X		X	X					X	X	X
8		X		X	X					X	X	X

7. EVALUACIÓN

7.1. Criterios de evaluación

Según indica el currículo oficial, los criterios de evaluación establecen el tipo y el grado de aprendizaje que se espera que los alumnos vayan alcanzando a lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria con respecto a las competencias básicas y a las capacidades indicadas en los objetivos generales. El nivel de cumplimiento de estos objetivos en relación con los criterios de evaluación fijados no ha de ser medido de forma mecánica, sino con flexibilidad, y teniendo en cuenta la situación del alumno, el curso que se encuentra, además de sus propias características y posibilidades. A su vez, la evaluación, cumple, fundamentalmente, una función formativa, porque ofrece el profesorado unos indicadores de la evolución de los sucesivos niveles de aprendizaje de sus alumnos, con la consiguiente posibilidad de aplicar mecanismos correctores de las insuficiencias advertidas. Por otra parte, esos indicadores constituyen una fuente de información sobre el mismo proceso de enseñanza. Por ello, los criterios de evaluación vienen a ser un referente fundamental de todo el proceso interactivo de enseñanza y aprendizaje.

En la orden ECI 2220/2007 de 12 de julio, aparecen los criterios de evaluación correspondientes al segundo curso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. Son diez criterios, pero para el tema de ecuaciones de primer grado tendremos en cuenta especialmente los cinco criterios de evaluación siguientes:

- ECI2. Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana.

- ECI3. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.

- ECI8. Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la comprobación de la coherencia de la solución obtenida, y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.

- ECI9. Identificar elementos matemáticos presentes en la realidad; aplicar los conocimientos adquiridos o los razonamientos desarrollados para interpretar y tomar decisiones acerca de situaciones reales que exigen herramientas matemáticas en su tratamiento y, en su caso, para su resolución.

- ECI10. Emplear de forma adecuada y con sentido crítico los recursos tecnológicos, calculadoras y programas informáticos adecuados, habituales en el trabajo matemático.

Para esta unidad didáctica utilizaremos, más concretamente, los siguientes criterios, en relación con los focos establecidos previamente:

- UD1. Identificar una igualdad como identidad o ecuación.
- UD2. Obtener ecuaciones equivalentes a una dada.
- UD3. Comprobar si un valor es solución de una ecuación.
- UD4. Resolver ecuaciones de primer grado, incluyendo ecuaciones con denominadores y paréntesis.
- UD5. Conocer los lenguajes natural y algebraico, sabiendo pasar del uno al otro.
- UD6. Resolver problemas de la vida real planteando ecuaciones de primer grado.

7.2. Instrumentos de evaluación

Los instrumentos de evaluación serán:

1. Anotaciones del cuaderno del profesor acerca del comportamiento, actitud, participación en clase y realización en la pizarra de las tareas.

2. El cuaderno del alumno que será revisado al inicio de la clase para comprobar si realiza las tareas diarias.

3. Entrega del cuaderno al final de la unidad con todas las tareas marcadas realizadas.

4. Prueba final de evaluación. Se realizará una prueba final en la que se intentará comprobar el grado de consecución de los objetivos y competencias.

Ponderación de los instrumentos de evaluación:
Instrumento 1: 10%
Instrumento 2: 10%
Instrumento 3: 20%
Instrumento 4: 60%

Se tendrá en cuenta de forma positiva una evolución favorable del rendimiento del alumno a lo largo del curso.

Todos estos instrumentos de evaluación del proceso de aprendizaje, deben ser a su vez instrumentos de evaluación del proceso de enseñanza. El profesor tendrá en cuenta todas las variables que pueden influir en los procesos de enseñanza, la programación de las sesiones, el papel del profesor, el clima en el aula, la atención a la diversidad, etc.

Esta herramienta de trabajo para el profesor no debe ser considerada cerrada, por lo que debe ser susceptible de ser modificada para mejorar estos procesos de enseñanza y de aprendizaje.

8. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Los procesos de enseñanza deben adaptarse a cada alumno, atendiendo en la mayor medida posible a sus capacidades individuales. Es por ello que el docente debe realizar un seguimiento lo más individualizado posible de cada alumno para detectar alumnos o alumnas que tengan problemas para seguir el normal desarrollo de la unidad, así como para detectar alumnos que tengan altas capacidades y quieran profundizar en la materia. Todas estas medidas de flexibilización están supeditadas a la adquisición de los contenidos mínimos, consecución de los objetivos y al logro de las competencias.

Una de las herramientas que he visto durante el periodo de prácticas para atender esta diversidad, es la separación de los cursos en grupos flexibles según el nivel en matemáticas a principio de curso. Los alumnos con un nivel inferior estaban en grupos más reducidos, de esta manera se le podía atender de manera más personalizada. Mientras que el grupo de nivel superior iba a un ritmo más rápido y se podía realizar otro tipo de tareas.

Pero a pesar de esta herramienta, seguía habiendo diversidad de niveles dentro de estos grupos flexibles, por lo que se hace imprescindible tener preparadas una serie de actividades de refuerzo y de ampliación con las que poder atender los alumnos que lo requieran. Más concretamente:

- Tareas de refuerzo:

Las tareas de refuerzo no deben sustituir en ningún caso a las tareas propias del normal desarrollo de la unidad. Serán en todo caso actividades complementarias que ayuden al alumno que tiene dificultades a conseguir alcanzar el ritmo de clase. Estas tareas deberían ir enfocadas a reforzar los contenidos mínimos.

- Tareas de ampliación:

En el caso en el que hubiera algún alumno que mostrara excesiva facilidad en el desarrollo de la unidad, se le podría sugerir trabajar con unas tareas de dificultad mayor o que traten contenidos no considerados en esta unidad pero que se relacionen fácilmente con los contenidos propios de dicha unidad. Estas tareas estarían orientadas a intentar desarrollar las capacidades del alumno al máximo, pero sin que esto pudiera ocasionar perjuicio alguno al mismo. En esta unidad además se puede ir introduciendo a los alumnos en las ecuaciones de segundo grado.

En todo caso, las medidas de apoyo a la diversidad deben ser consensuadas por todos los interesados, contando en primer lugar con el deseo de participación del mismo alumno y hasta de su familia, que siempre debe estar informada de este tipo de medidas. Aparte de la familia y el interesado, los equipos de orientación pedagógica ayudarán a tomar las medidas oportunas en cada caso.

Dichas tareas aparecen en el Anexo IV.

9. ESTUDIO EMPÍRICO CON ALUMNOS DE 1º ESO TRADUCCIÓN DEL LENGUAJE NATURAL AL ALGEBRAICO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

9.1. Identificación del problema

La primera toma de contacto del alumno con las ecuaciones, en donde se le informa de que la letra representa un valor desconocido que hay que averiguar, se realiza en 1º ESO. El alumno se enfrenta a signos vacíos de su significado literal habitual y cuya nueva significación se encuentra descontextualizada de la realidad.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita son igualdades algebraicas que se verifican para un determinado valor numérico desconocido. En esencia las ecuaciones son problemas que nos presentan relaciones entre cantidades que se conocen, con otra desconocida llamada incógnita. Esta característica convierte a las ecuaciones en valiosas herramientas matemáticas, para solucionar problemas de diversas disciplinas.

La traducción efectiva de enunciados del lenguaje natural al lenguaje algebraico es de suma relevancia en la resolución de problemas. Por lo tanto, las deficiencias en la enseñanza de este tema deben causar el desarrollo de métodos y recursos que produzcan en el estudiante la abstracción algebraica necesaria para su correcta comprensión y resolución.

Como hemos visto en el Análisis Cognitivo, una de las limitaciones de los alumnos en el foco 4, resolución de problemas, es traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico.

En mi experiencia personal como docente he detectado cómo los escolares presentan dificultades en la traducción de enunciados en lenguaje natural al lenguaje algebraico y por consiguiente plantear la ecuación que la represente.

Por lo tanto me surge el interés de elaborar una metodología como recurso didáctico para la enseñanza de resolución de problemas mediante ecuaciones de primer grado.

Ana María Esquinas Sancho presenta una memoria de tesis doctoral realizada en junio de 2008, sobre “Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica docente”.

Se puede hablar de distintos tipos de procedimientos para la traducción observados en varios estudios realizados con alumnos que se inician en el lenguaje algebraico:

- *La traducción sintáctica (Clement et al., 1981) se realiza sustituyendo palabras claves por símbolos matemáticos secuencialmente de izquierda a derecha y es usada, frecuentemente, por los estudiantes para escribir ecuaciones desde expresiones del lenguaje natural. Es una causa importante de errores, particularmente de inversión.*

- *En la llamada comparación estática (Clement et al., 1981) o traducción semántica (Herscovics, 1989) se intenta representar en la ecuación la relación entre términos de una forma global y no como traducción literal desde el lenguaje natural. MacGregor y Stacey (1993) sugirieron que la mayoría de las traducciones incorrectas son consecuencia de modelos cognoscitivos que procuran representar cantidades desiguales comparadas.*

Ambos procedimientos son fuente de errores para el alumno que comienza su andadura en el lenguaje algebraico, ya sean por la traducción literal o por la incapacidad de representación de relaciones numéricas a través de una expresión matemática. (Esquinas, 2008, p. 150).

El método que más utilizo para escribir ecuaciones desde expresiones del lenguaje natural es el de traducción sintáctica, sustituyendo palabras claves por símbolos matemáticos de manera directa sin presentar de intermedio algún tipo de representación gráfica para su mayor comprensión. Los pasos seguidos son:

1º paso: Expresar el enunciado en el lenguaje algebraico.
2º paso: Escribir la ecuación.
3º paso: Resolver la ecuación.
4º paso: Interpretar el resultado.
5º paso: Comprobar el resultado obtenido.

Explico a los alumnos de manera escrita, mediante pasos concretos y detallados, pero que no les permiten comprender de forma clara lo que ocurre en cada paso, así los alumnos que consiguen entender estos pasos lo hacen de una manera repetitiva y memorística, a base de repetirlos una y otra vez, con lo que al final en lugar de entender el proceso, lo hacen de una manera automática.

Se puede pensar que a través de una interpretación primeramente grafica o visual se puede llegar mas fácil a una interpretación algebraica. La visualización mejora enormemente nuestra habilidad para resolver problemas de matemáticas, y permite además conectar diferentes aspectos, como por ejemplo la interpretación geométrica de fórmulas algebraicas.

En este punto es donde voy a introducir la resolución de problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita de forma diferente, de manera que puedan entender como realizar el proceso de traducción al lenguaje algebraico mediante la utilización de materiales manipulables o gráficos que les permitan llevar algo más abstracto a algo más visible y comprensible.

En la propuesta utilizarán recursos para ayudarles a realizar la traducción de enunciados verbales a lenguaje algebraico, basados en el uso de herramientas manipulativas y gráficas, que el alumno sea capaz de representar mediante el uso de dichas herramientas para posteriormente transformar en una expresión algebraica.

Se añade un paso al proceso anterior: representar e interpretar de manera gráfica la relación existente entre los datos de un problema.

Esta investigación tiene como objetivo estudiar si con la introducción de este paso los alumnos tienen menos dificultad en la traducción de problemas del lenguaje natural al lenguaje algebraico en ecuaciones de primer grado con una incógnita.

9.2. Fundamentación

Esta investigación se fundamenta en lo expresado en el apartado anterior y en el análisis de contenido y cognitivo que se ha realizado en esta unidad didáctica. Como ya hemos visto, el foco 4 es Resolución de Problemas, y dentro de este foco encontramos la limitación E13, traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico. Por lo tanto no me voy a extender más en ellos.

Por otro lado, hay muchos materiales manipulables o elementos gráficos que son un recurso sumamente eficaz para el aprendizaje de las matemáticas, además de que ayuda a la motivación de los alumnos en el proceso de aprendizaje.

Así se pueden ver algunos materiales que permiten trabajar la traducción de enunciados verbales al lenguaje simbólico: la lotería algebraica, el dominó algebraico o el juego "lo tuyo y lo mío", donde los alumnos reciben enunciados verbales a través de unas tarjetas, y deben lanzar dos dados a su disposición. Mediante el número obtenido en su tirada y el enunciado de la tarjeta, deben obtener una ecuación, la cual deben resolver. El primer jugador que resuelva correctamente diez de estas ecuaciones, obteniendo soluciones que no hayan obtenido ninguno de sus compañeros, gana la partida.

Con esto se ve que los diferentes tipos de materiales ya existentes relacionados con la traducción de enunciados verbales, tienen como finalidad practicar con la traducción de éstos.

9.3. Descripción del estudio

Se van a proponer dos métodos, los palillos para problemas geométricos y la balanza algebraica, que van a ayudar al alumno a realizar la traducción de enunciados verbales a lenguaje algebraico. Se basan en el uso de herramientas manipulativas y gráficas, con objeto de alcanzar una traducción intermedia, a partir de la cual, la escritura de la ecuación es más directa. Es decir, dado un enunciado, se pretende que el alumno sea capaz de representarlo mediante el uso de dichas herramientas (traducción primera), para después transformarlo en una expresión algebraica (traducción segunda).

Método "de los palillos" para problemas geométricos
Se usa este método para problemas en los que se traten longitudes y perímetros de figuras planas. Se trata de que el alumno construya dicha figura haciendo uso de "palillos" o cualquier otra estructura semejante, de manera que la relación entre los datos conocidos y desconocidos del problema pueda ser más visible para éste, una vez construida la figura. Así, la ecuación podrá obtenerse de manera casi instantánea.

Balanza Algebraica
Esta representación gráfica permite resolver ecuaciones lineales simples a través del uso de una balanza. Hay que poner bloques de unidades y bloques con una x (representando las cantidades desconocidas). Cuando las bandejas estén en equilibrio representando la

ecuación lineal dada, podrán realizar cualquier operación aritmética, siempre y cuando se haga lo mismo en ambos lados, manteniendo así las bandejas en equilibrio. La meta es obtener una sola x en una bandeja y cualquier cantidad de bloques de unidades necesarios para estar en equilibrio en la otra bandeja, de esta manera se obtiene el valor de x. Esta balanza se puede trabajar a través de la página web: http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html

Lo que se pretende con el estudio es, una vez que los alumnos ya saben resolver problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita, comprobar si el uso de una herramienta manipulativa, como son palillos para representar figuras geométricas, y otra herramienta gráfica, como es la balanza algebraica para otros problemas, les ayuda a traducir correctamente el lenguaje natural del problema a lenguaje algebraico, y resolverlo.

Debido a que no hay tiempo para hacer muchos problemas ya que estamos a final de curso y hay que terminar el temario a impartir, la prueba consistirá de dos partes con tres problemas cada una. Los dos primeros problemas de cada prueba serán geométricos para que puedan resolverlos representado la figura mediante palillos que se van a repartir. El otro problema será de cálculo de pesos para que puedan representarlos mediante la balanza algebraica.

Estas dos herramientas ya se han explicado en una clase anterior. En la primera parte se reparte los tres problemas a cada alumno sólo con el enunciado, para que ellos los resuelvan como se les ha explicado en clase. Pero no se dirá nada de que usen dichas herramientas para su resolución.

Posteriormente se pasará otros tres problemas del mismo tipo, pero ahora se le indicará que utilicen los palillos y la balanza como paso previo a su resolución.

A continuación se presenta los problemas a resolver por los alumnos

9.4. Pruebas a realizar

MATEMÁTICAS 1º ESO		04/06/2012
Nombre ____		Grupo 1º D/E
Tema 10	*ÁLGEBRA*	1º PARTE

Resuelve los siguientes problemas:

1º- La base de un rectángulo es el triple de la altura, y el perímetro mide 40 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

2º- Los dos lados iguales de un triángulo isósceles son el doble de largos que el desigual, y su perímetro es de 25 cm. ¿Cuánto mide cada lado?

3º- Una caja de botellas de aceite pesa 4 kg. ¿Cuánto pesa un bote de azúcar si dos cajas de aceite y un bote de azúcar pesan igual que una caja de aceite y nueve botes de azúcar?

MATEMÁTICAS 1º ESO		04/06/2012
Nombre ____________________		Grupo 1º D/E
Tema 10	*ÁLGEBRA*	2º PARTE

Resuelve los siguientes problemas representando primero la figura con los palillos en los problemas 1 y 2, y con la balanza en el problema 3. A partir de estas representaciones, plantea la ecuación y encuentra la solución:

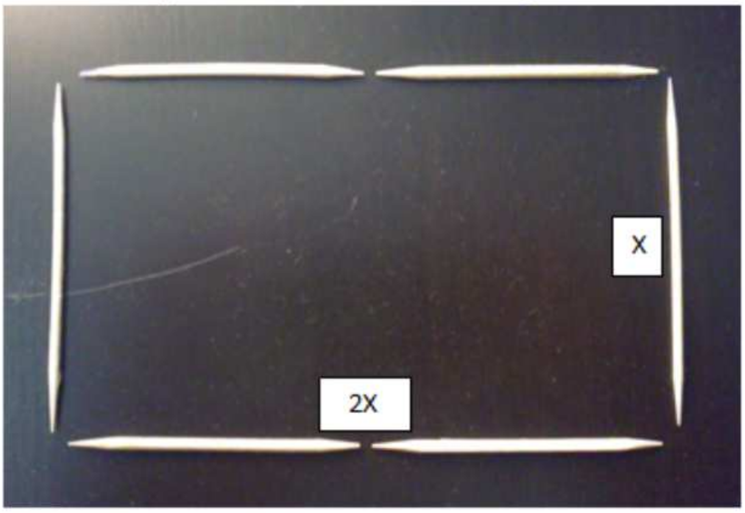
1º- El perímetro de un rectángulo es de 30 cm. Sabiendo que la altura es la mitad que su base, ¿cuáles serían las dimensiones?

2º- En un triángulo isósceles, se sabe que los lados iguales son el triple del desigual. Si el perímetro es de 21 centímetros, ¿cuánto mide cada lado?

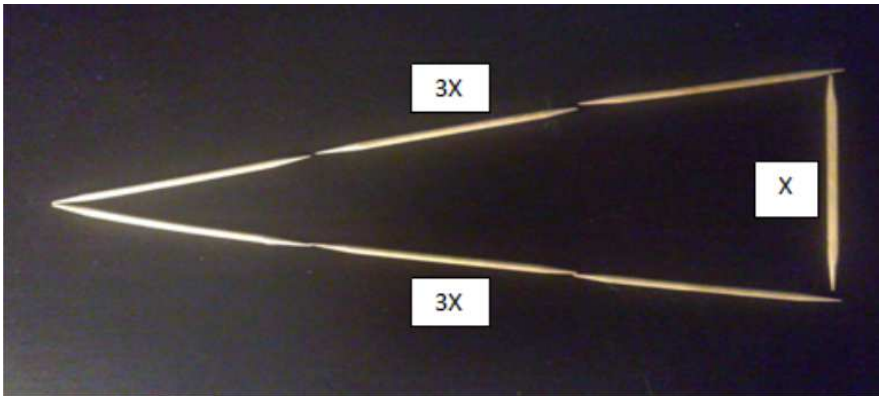
3º- Sabiendo que una botella de agua pesa 1 kg, y que tres cajas de galletas y dos botellas de agua pesan lo mismo que una caja de galletas y seis botellas de agua, ¿cuánto pesa cada caja de galletas?

Las representaciones que tienen que hacer los alumnos son las siguientes:

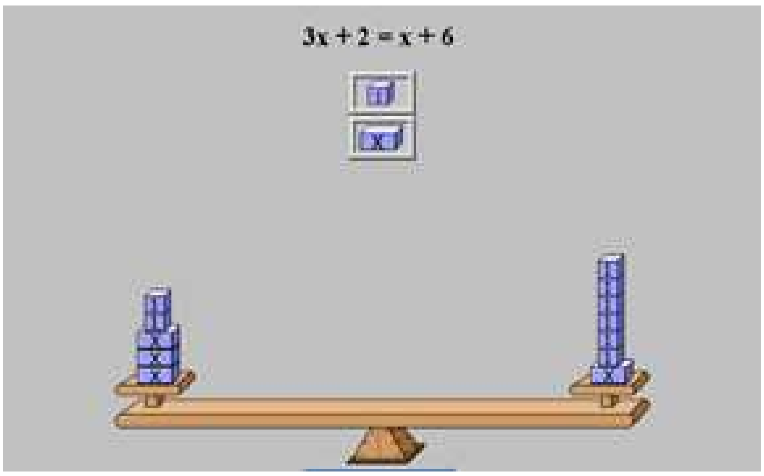
1º- El perímetro de un rectángulo es de 30 cm. Sabiendo que la altura es la mitad que su base, ¿cuáles serían las dimensiones?



2º- En un triángulo isósceles, se sabe que los lados iguales son el triple del desigual. Si el perímetro es de 21 centímetros, ¿cuánto mide cada lado?



3º- Sabiendo que una botella de agua pesa 1 kg, y que tres cajas de galletas y dos botellas de agua pesan lo mismo que una caja de galletas y seis botellas de agua, ¿cuánto pesa cada caja de galletas?



9.5. <u>Análisis de datos</u>

Una vez recogidas las pruebas y corregidas, se hará una comparativa entre los resultados de la primera parte con la segunda usando las herramientas indicadas.

Para ello se ha construido una tabla, donde cada ejercicio hecho correctamente por el alumno tiene un uno, y hecho mal tiene un cero. En cada una de las pruebas cada alumno tiene como máximo un tres y como mínimo un cero. También se compara cada ejercicio de las dos pruebas, ya que son similares, para ver como ha variado los resultados con la introducción de las herramientas manipulativas.

Por lo tanto, la tabla con los datos de los alumnos y los ejercicios es la siguiente:

	EJERCICIO 1		EJERCICIO 2		EJERCICIO 3		TOTAL		PORCENTAJE	
ALUMNO	1ª PARTE	2ª PARTE	1ª PARTE	2ª PARTE	1ª PARTE	2ª PARTE	1ª PARTE	2ª PARTE	1ª PARTE	2ª PARTE
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0%	0%
2	0	0	0	0	0	1	0	1	0%	33%
3	1	1	0	0	0	1	1	2	33%	67%
4	0	1	1	1	1	1	2	3	67%	100%
5	1	1	1	1	1	1	3	3	100%	100%
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0%	0%
7	1	1	0	1	0	1	1	3	33%	100%
8	0	0	0	0	0	1	0	1	0%	33%
9	1	1	1	1	0	1	2	3	67%	100%
10	1	1	1	1	0	1	2	3	67%	100%
11	1	1	1	1	1	1	3	3	100%	100%
12	1	1	1	1	0	1	2	3	67%	100%
13	1	1	0	0	0	0	1	1	33%	33%
14	1	1	1	1	1	1	3	3	100%	100%
15	1	1	1	1	0	1	2	3	67%	100%
16	0	0	0	0	0	1	0	1	0%	33%
17	1	1	1	1	1	0	3	2	100%	67%
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0%	0%
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0%	0%
TOTAL	11	12	9	10	5	13	25	35		
PORCENTAJE	58%	63%	47%	53%	26%	68%	44%	61%		

Como puede observarse, los resultados generales has sido mejores, ya que de 25 ejercicios resueltos correctamente en la primera prueba, se ha pasado a los 35 correctos, de un 44% a un 61 %.

Pero si lo observamos por ejercicios, los ejercicios 1 y 2, problemas geométricos para resolver con palillos, los resultados son prácticamente iguales, solo uno más bien en cada uno de ellos. El mayor incremento de ejercicios bien resueltos está en el ejercicio 3, a realizar con la balanza algebraica.

De todas maneras, los porcentajes de problemas resueltos bien es bajo en ambos casos.

Por último, comentar que solo ha habido un alumno que ha resuelto un ejercicio menos bien con las herramientas manipulativas que sin ellas. El resto se ha mantenido igual o ha resuelto más.

9.6. Conclusiones

Lo primero que me gustaría comentar y que me ha sorprendido más, es la poca motivación de los alumnos para participar en esta investigación. Solo preguntaban si eso entraba en el examen, porque si no, no le interesaba. Me sorprende porque creía que los alumnos se iban a divertir con el uso de los palillos y la balanza, pero no ha sido así.

Al analizar los datos obtenidos, se ve que el uso de herramientas manipulativas y gráficas como paso intermedio para resolver problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita mejora los resultados y ayuda a los alumnos a plantear correctamente la ecuación y comprender mejor lo que están haciendo.

Pero vamos a ver qué ha ocurrido en cada uno de los ejercicios:

En el problema geométrico 1º, en la primera parte sin el uso de palillos, cuatro alumnos no han llegado a plantear la ecuación, dos la han planteado mal, y otros dos planteándola bien, se han equivocado al resolver la ecuación. Once lo han hecho correctamente.

Comparándolo con el mismo problema usando palillos, tres no han planteado nada, cuatro han hecho la figura bien, pero se han equivocado en plantear la ecuación y doce lo han hecho correctamente. Por lo tanto los resultados son un poco mejores. Además, de los cuatro alumnos que han planteado la ecuación mal, tres han representado la figura correctamente, por lo que han entendido lo que le pedía el problema.

En el problema geométrico 2º, en la primera parte sin palillos, cinco alumnos no han planteado la ecuación, cuatro la han planteado mal y solo uno se ha equivocado al resolverla habiéndola planteado bien. Nueve han hecho el ejercicio bien.

El mismo problema con palillos, de nuevo cinco alumnos no han planteado nada, cuatro han hecho la figura correctamente, pero han planteado mal la ecuación, y diez han hecho el ejercicio bien. Volvemos a ver que los datos son un poco mejor, pero parecidos.

Por lo tanto, en los problemas geométricos, el uso de los palillos ha mejorado muy poco los resultados, aunque los alumnos si han sabido representar geométricamente lo que les pedían el enunciado, pero no han sabido traducirlo a lenguaje algebraico. Destacar que algunos alumnos en la primera parte han representado la figura sin el uso de los palillos para la resolución. Además la mayoría con los problemas bien, han interpretado y comprobado la solución. Por último destacar que han tenido más dificultad con el triángulo isósceles que con el rectángulo.

En el problema 3º, sin el uso de la balanza, sólo cinco alumnos han resuelto bien el problema, con ocho alumnos que no han planteado la ecuación, tres lo han hecho incorrectamente y otros tres se han equivocado en la resolución de la ecuación.

En comparación con el 3º de la segunda parte, trece alumnos han representado correctamente la balanza y han resuelto bien la ecuación, uno ha planteado mal la ecuación y de nuevo cinco alumnos que no han hecho nada.

Aquí si se ve una gran diferencia en los resultados. Los alumnos han interpretado el enunciado correctamente y han mantenido la balanza en equilibrio hasta resolver la ecuación. Parece que esta herramienta gráfica la comprenden mejor. También la mayoría ha puesto una solución escrita con palabras coherente.

Por lo tanto la mejora solo ha sido significativa con el uso de la balanza algebraica, ya que con los palillos, los alumnos han obtenido resultados casi iguales. Por lo tanto hay que seguir introduciendo en el proceso de enseñanza de las ecuaciones el uso de esta balanza para la resolución de problemas.

De todas maneras, habría que seguir realizando esta investigación en otras aulas para comparar resultados, ya que los ejercicios resueltos correctamente en ambas partes han sido bajos (un 44% y un 61%).

10. CONCLUSIONES

Para finalizar este Trabajo Fin de Máster, presento algunas conclusiones del trabajo realizado en él y la importancia que han tenido las asignaturas desarrolladas a lo largo de este Máster.

Los conocimientos aprendidos en todas las asignaturas han servido para desarrollar esta Unidad Didáctica. A destacar para la gestión del aula "Aprendizaje y desarrollo de la personalidad", para la realización del estudio empírico "Innovación docente e investigación educativa", y sobre todo, para desarrollar y estructurar este trabajo "Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas".

De esta manera se ha realizado el Análisis Didáctico del tema, que he visto resulta esencial para una correcta enseñanza de las matemáticas, y que es la base de esta Unidad Didáctica. Me ha ayudado a estudiar el tema en profundidad. Así he realizado el Análisis de Contenidos, base para el resto de los análisis; el Análisis Cognitivo, donde he establecido los objetivos didácticos de la Unidad, los conocimientos que se pretende que adquieran los alumnos. Se han identificado algunos errores o dificultades, de los que ha salido un estudio empírico posterior para remediarlos; el Análisis de Instrucción identificando y diseñando las actividades que vamos a llevar a cabo en el aula; y el Análisis de Actuación, estableciendo los criterios de evaluación para evaluar al alumnado, y así comprobar el grado de adquisición de los objetivos. Todo esto me ha permitido una mejor organización y estructuración de los conocimientos.

Además ha sido enriquecedor el periodo de prácticas, porque es ahí en realidad donde ponemos en práctica todo lo aprendido en el Máster. Esto te ayuda para la planificación de las sesiones, sabiendo que tienes que adaptar lo planificado a la realidad de los alumnos, y que si no gestionas correctamente el aula, es posible que no puedas impartir nada de lo programado para la sesión.

Un punto importante en el proceso de enseñanza es buscar una relación entre los fenómenos de la vida cotidiana de los alumnos con los problemas matemáticos, y así hacerles ver para qué sirven las matemáticas.

He intentado también alternar la enseñanza tradicional en la que se emplea la pizarra y las explicaciones de profesor, con el uso de herramientas tecnológicas y materiales manipulativos. De las prácticas he visto que la pizarra digital es una herramienta muy útil para la enseñanza de las matemáticas. Tiene muchas posibilidades. Además los alumnos parecen que se motivan más con el uso de distintos materiales y recursos a la hora de explicar las ecuaciones.

También fomentar las actividades en grupo, para que los alumnos se vayan acostumbrando al trabajo grupal, la toma de decisiones conjuntas y llegar a acuerdos.

He podido realizar una investigación empírica con los alumnos de 1º de la ESO del IES Montevives. De esta investigación destacar mi sorpresa porque yo creía que a los niños les iba a gustar utilizar los palillos, o representar la balanza algebraica con la pizarra digital. Pero solo quieren saber lo que entra en el examen, no tienen ninguna inquietud de aprender cosas nuevas.

Por todo esto, puedo decir que en el desarrollo de este Trabajo Fin de Máster han influido favorablemente tanto el periodo teórico como el práctico. Los conocimientos adquiridos durante el Máster, el periodo de prácticas y la realización de esta Unidad Didáctica han hecho que esté mejor preparado para enfrentarme en un futuro a la realidad de la docencia.

Con la elaboración de esta Unidad he sido consciente del gran trabajo y el tiempo que hay que llevar a cabo para el diseño de una Unidad Didáctica.

11. BIBLIOGRAFÍA

- Boyer, Carl B. (1968). Historia de la Matemática. Alianza Universidad, Madrid, 1986.

- Cólera, J.; Gaztelu, I (2011). Matemáticas 2. Educación Secundaria. Editorial: Anaya, Madrid.

- Consejería de Educación. Junta de Andalucía (2007). Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.

- Esquinas Sancho, Ana M. (2009). Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente. Memoria para optar al grado de doctor. Universidad Complutense de Madrid.

- Frías, V (2011). Esfera: Matemáticas 2: Educación Secundaria Obligatoria, Segundo curso [1er. Ciclo]. Editorial: Casals.

- Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Universidad de Granada.

- Klein, Morris (1972). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I. Alianza Universidad. Madrid, 1992.

- Lupiáñez, J. L. (2009). Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Universidad de Granada.

- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). RD 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE-A 2007-238.

- Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria obligatoria. BOE 174.

- OCDE (2005). Aprender para el mundo del mañana. Madrid: Santillana

- Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) Matemáticas para el siglo XXI (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I. 2006.

- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.

- Vizmanos Buelta, José R.; Peralta Coronado, Francisco J. (2008). Matemáticas, Ábaco. 2º E.S.O**.** Editores SM.

Páginas web:

- http://conteni2.educarex.es/mats/11802/contenido/
- http://conteni2.educarex.es/mats/11811/contenido/
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/index.htm
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuaciones_primer_grado_resolucion_problemas/index.htm
- http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/10/unidad_10.htm
- http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/recursos_2005/interactivos/balanza/balanza1.htm
- http://www.amolasmates.es/algebraconpapas/recurso/tests/lenguajealgebraico/lengalgebraico01.htm
- http://www.amolasmates.es/algebraconpapas/recurso/tests/primerbasico/prbas0101.htm
- http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html
- http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_324_g_4_t_2.html?open=instructions
- http://centroconcertadossantaisabeldehungria.blogspot.com.es/2009/03/actividades-de-refuerzo-2-eso-tema-4.html
- http://matematicapro.jimdo.com/inicio/geogebra-online/

ANEXO I. Historia de las ecuaciones de primer grado

A continuación, se describe un breve desarrollo histórico sobre el álgebra y las ecuaciones.

- **EGIPTO**

Los egipcios nos dejaron en sus ***papiros*** (sobre todo en el de Rhind -1.650 a.C.- y el de Moscú -1.850 a.C.-) multitud de problemas matemáticos, donde la mayoría de ellos eran de ***tipo aritmético*** y respondían a situaciones concretas de la vida cotidiana. En éstos obtenían una solución realizando operaciones con los datos de forma análoga a como hoy resolvemos dichas ecuaciones.

Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma:

$$x + ax = b$$
$$x + ax + bx = c$$

donde a y b eran números conocidos y x la ***incógnita*** a la que ellos denominaban ***aha o montón.***

En el Papiro de Rhind (su nombre se debe a un anticuario escocés Henry Rhind que lo compró en una ciudad comercial del Nilo en 1858), encontramos muchos de los cálculos de "aha". Dicho papiro fue escrito en el año 1650 a.C. por el escriba Ahmed, y contenía 87 problemas resueltos, los cuales eran ejercicios para que los jóvenes estudiantes practicasen. Los procesos seguidos en la resolución eran puramente aritméticos y para ellos no constituían un tema distinto como podía ser la resolución actual de ecuaciones.

Una ecuación lineal que aparece en el papiro de Rhind responde al problema siguiente:

"Un montón y un séptimo del mismo es igual a 24".

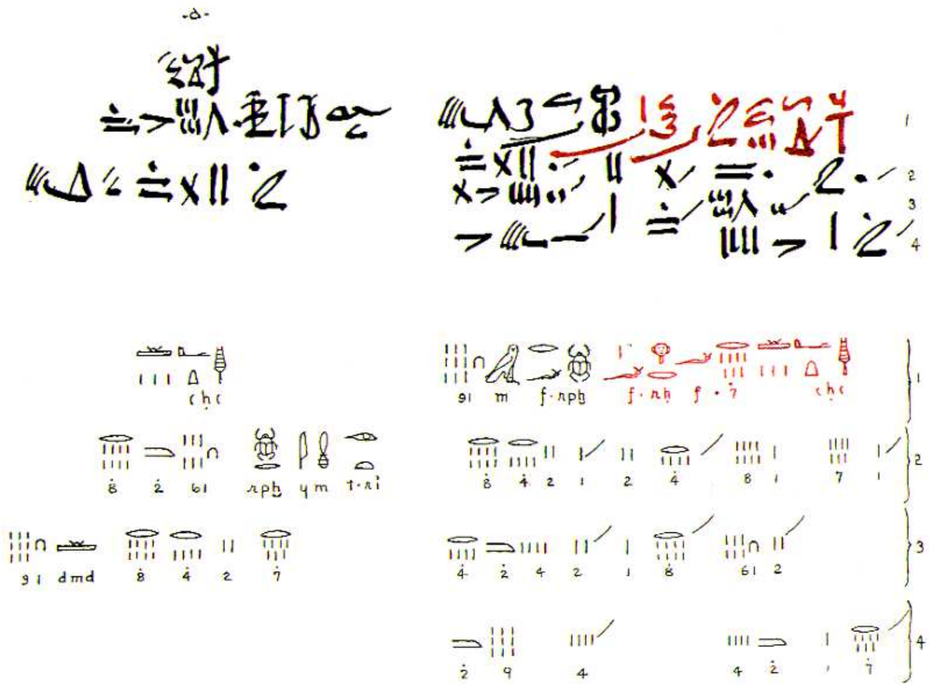
En notación moderna, la ecuación sería: $x + 1 / 7\, x = 24$

La solución era obtenida por un método que hoy conocemos como **"método de la falsa posición"** o **"regula falsi".** Dicho método consiste en tomar un valor concreto para la incógnita, probamos con él y si se verifica la igualdad ya tenemos la solución, si no, mediante cálculos se obtendría la solución exacta. Se trata de un procedimiento aritmético que permite resolver ecuaciones lineales. A partir de estas falsas posiciones se obtiene la solución de la ecuación por proporcionalidad.

Supongamos que fuera 7 la solución, al sustituir en la x nos daría: $7 + 1/7 \cdot 7 = 8$, y como nuestra solución es 24, es decir, $8 \cdot 3$, la solución es $21 = 3 \cdot 7$, ya que $3 \cdot (7 + 1/7 - 7) = 24$.

Generalmente, el cálculo de la solución correcta no era tan fácil e implicaba numerosas operaciones con **fracciones unitarias** cuyo uso dominaban los egipcios. En las escrituras egipcias las únicas fracciones que tienen una representación propia (un nombre) son las fracciones unitarias, los cuantavos. El resto de las fracciones han de expresarse mediante la yuxtaposición de los signos que representan las fracciones unitarias –yuxtaposición que indica adición, lo que es coherente con el hecho de que el sistema de numeración egipcio sea aditivo.

Esta figura está tomada del libro que en 1979 publicó el National Council of Teachers of Mathematics, la federación de asociaciones de profesores de matemáticas de los USA, con una selección de problemas del papiro Rhind en facsímil, transliterados, traducidos y comentados, y corresponde al problema 24 del papiro. Está escrito en escritura hierática, una de las escrituras existentes en el antiguo Egipto, que es la que aparece en la parte de arriba. Puede verse además una traducción a otra escritura también del antiguo Egipto, la escritura jeroglífica, y una segunda traducción al sistema de signos que usan los egiptólogos para transliterar ambas escrituras egipcias.



El enunciado del problema sería:
Un montón y su séptimo sumados juntos resulta 19. ¿Cuál es la cantidad?

La suposición en el caso de este problema es 7, y entonces el matemático egipcio calcula

7 + 1/7 de 7 es 8

Una vez hecho este cálculo con lo supuesto, el matemático egipcio dice:

Tantas veces haya de multiplicarse 8 para dar 19, esas veces habrá de multiplicarse 7 para dar la cantidad en cuestión. Esta frase expresa el fundamento del procedimiento con el que va a encontrar la cantidad buscada a partir de la cantidad que ha resultado del cálculo con la cantidad supuesta.

El matemático egipcio efectúa ahora los cálculos para ver cuántas veces ha de multiplicarse 8 para dar 19. La multiplicación egipcia se hace por duplicación y división por dos (o demediación), por lo que, se comienza duplicando 8, lo que resulta 16. Como si se volviera a duplicar el número resultante ya sería 32, que es superior a 19, y, por tanto, no serviría para completar lo que le falta a 16 para llegar a 19, se comienzan ahora las demediaciones sucesivas, 1/2, 1/4, 1/8, que se acaban al llegar a 1. Luego se marcan los resultados que sumados dan 19 y se lee el número resultante de yuxtaponer los marcados:

2 4 8

lo que en nuestra notación se escribe como suma de un número entero con fracciones unitarias

$$2 + 1/4 + 1/8$$

Ésas son las veces que hay que multiplicar 8 para obtener 19, de modo que ahora falta multiplicar 7 esas veces para obtener la cantidad buscada. El resultado que se obtiene está escrito algo más a la izquierda en la figura y es

16 2 8

lo que en nuestra notación se escribe

$$16 + 1/2 + 1/8$$

Podemos observar que este método de falsa posición, en su versión egipcia, está ligado a la manera en que están representadas las fracciones y a las dificultades del cálculo con esas fracciones.

En cuanto el simbolismo, solamente en algunas ocasiones utilizaban el dibujo de un par de piernas andando en dirección de la escritura o invertidas, para representar la suma y resta, respectivamente.

- **MESOPOTAMIA**

El mayor número de documentos babilónicos corresponden al periodo 600 a.C. a 300 d.C.

Los babilonios casi no le prestaron atención a las ecuaciones lineales, quizás porque las consideraban demasiado elementales, y trabajaron más los ***sistemas de ecuaciones lineales y las ecuaciones de segundo grado.***

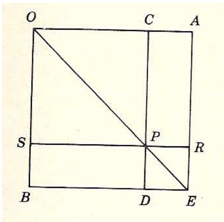
Entre las pocas que aparecen, tenemos la ecuación **$5x = 8$.**

Los problemas algebraicos aparecen formulados y resueltos de una manera completamente verbal, sin utilizar símbolos especiales. No utilizaban letras para representar las cantidades incógnitas porque no estaba inventado el alfabeto. A menudo aparecen las palabras ***us (longitud), sag (anchura) y as ˆa (área)*** las cuales eran utilizadas para representar las incógnitas, no era porque dichas incógnitas representaran tales cantidades geométricas, sino porque muchos problemas algebraicos surgieron de situaciones geométricas y esta terminología terminó por imponerse. Un indicio de que esto era así, es que los babilónicos no tenían ningún reparo en sumar una longitud con un área o un volumen.

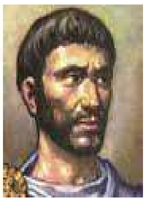
- **GRECIA**

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y no se dedicaron mucho al álgebra, ya que su preocupación era la **geometría.**

Así en la Época Heroica, siglo V y IV a.C., (llamada así por los problemas enfrentados con tan pocas herramientas), la ecuación lineal ax = bc, se consideraba como la expresión de la igualdad de áreas ax y bc, y en consecuencia lo que se hacía era construir un rectángulo de lados OB = b y OC = c, llevar sobre OC un segmento OA = a. Completando el rectángulo AOEB y trazando la diagonal OE que corta a CD en P, se ve que CP es el segmento x buscado, puesto que el rectángulo OARS tiene igual área al rectángulo OCDB:



Se debe nombrar a **Euclides** (325 a.C.), cuya obra "Los Elementos" está formada por trece libros, de los cuales el Libro II y el V son casi completamente algebraicos; a diferencia de nuestra álgebra simbólica actual, **el álgebra de Los Elementos es un álgebra geométrica.**



Después de una época de decadencia de la matemática griega aparece en el año 250 d.C. **Diofanto de Alejandría**, el más importante de los algebristas griegos, aunque prestó escasa atención a las ecuaciones de primer grado.

En los siglos V o VI aparece un epigrama algebraico sobre la vida de Diofanto que constituye una ecuación lineal y dice:

"Dios le concedió el ser un muchacho durante una sexta parte de su vida, y añadiendo a esto una doceava parte, el pobló de vello sus mejillas. Le iluminó con la luz del matrimonio después de una séptima parte, y cinco años después de su matrimonio le concedió un hijo. Después de alcanzar la mitad de la medida de la vida de su padre, el frío destino se lo llevó. Después de consolar sus penas con la ciencia de los números durante cuatro años más, finalizó su vida".

De todo esto, deduce su edad.

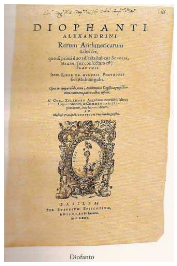
Podríamos inmediatamente traducir este problema a una ecuación de primer grado:

$$x/6 + x/12 + x/7 + + 5 + x/2 + 4 = x$$

La edad sería 84 años.

El libro más importante de Diofanto es ***Arithmética***, que se trata de una colección de trece libros de los que solo han sobrevivido los seis primeros, de unos 150 problemas sobre aplicaciones del álgebra. En el Libro I hay 25 problemas de ecuaciones de primer grado. Está dedicado a la resolución exacta de ecuaciones determinadas e indeterminadas.

La gran innovación de Diofanto está en que manteniendo aún en los enunciados algebraicos la forma retórica (todo se escribía con palabras del lenguaje ordinario) de la estructura de la frase sustituye con abreviaturas una serie de magnitudes, conceptos y operadores frecuentes, es decir, inicia el **"álgebra sincopada".** Un número desconocido o incógnita se representa por un símbolo que se parece a la letra griega s. Faltan los símbolos especiales para las operaciones y relaciones.

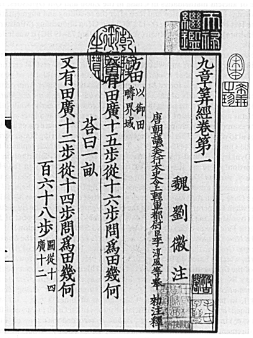


Diofanto

Diofanto pretende sugerir la resolución de problemas mediante un "método" general, en vez de manejar un sistema de dos ecuaciones simultáneas en dos incógnitas, opera con las condiciones sucesivas de manera que solo aparezca una única incógnita a lo largo de todo el proceso, transformándolo en una ecuación lineal**.** Sólo aceptaba las soluciones positivas, ya que lo que buscaba era resolver problemas y no ecuaciones.

- **<u>CHINA</u>**

Uno de los libros más importantes es ***Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático*** (200 a.C.- 220 a.C.): el cual incluye 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos. En la sección séptima se utiliza la regla de falsa posición para resolver ecuaciones lineales.



Página del libro

Los *Nueve Capítulos* nos recuerdan a la matemática egipcia por el uso del método de la ***"falsa posición",*** pero lo cierto es que la invención de este procedimiento, lo mismo que el origen de la matemática china en general, parece haber sido independiente de toda influencia occidental.

El *Su-yüan yü-Chien o* ***"Espejo Precioso de los Cuatro elementos"*** *escrito por Chu Shih*-Chieh en 1303 despierta mayor interés histórico y matemático. Los cuatro elementos a los que se refiere el título, son el cielo, la tierra el hombre y la materia y representan las cuatro incógnitas de una ecuación.

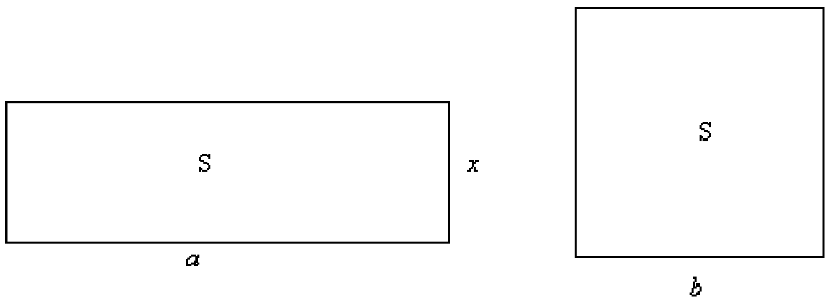
Este libro marca la cota más alta que alcanzó el desarrollo del álgebra china, y en él se estudian tanto sistemas de ecuaciones simultáneas como ecuaciones individuales de grados tan altos como catorce.

❖ **INDIA**

Los ***Sulvasütras*** son los primeros documentos matemáticos que existen (datan del siglo II d.C.), en los cuales se recogen todos los conocimientos necesarios para construir los templos. Se conservan tres versiones todas en verso. En éstos aparece el siguiente problema:

"Hallar el lado de un rectángulo, conociendo el otro lado y sabiendo que su área es igual al área de un cuadrado dado. "

Esto es:



Es decir, $a\ x = S$. Lo resolvían como los egipcios utilizando el ***método de la falsa posición.***

Posteriormente, ***Brahmagupta*** (598 d.C.) expresa, ya de forma sincopada, cómo resolver ecuaciones lineales. La incógnita la representaba por la abreviatura **-ya-**, la operación de multiplicación con la primera sílaba de la palabra, la suma por una simple yuxtaposición, la resta colocando un punto sobre el sustraendo y la división escribiendo el divisor debajo del dividendo como en nuestra notación para las fracciones, pero sin la barra separadora.

Este simbolismo, aunque no era exhaustivo, es suficiente para que se pueda clasificar el álgebra hindú como cuasi simbólica, y en realidad lo era más que el álgebra sincopada de Diofanto.

También cabe destacar a un matemático posterior, ***Bhaskara*** (1114-1185). Brahmagupta y Bhaskara, avanzaron en las ecuaciones indeterminadas más allá que Diofanto. Consideraban ***todas las soluciones enteras***, mientras que Diofanto tomaba una única solución particular de una ecuación indeterminada.

❖ LA CULTURA ÁRABE

Los árabes contribuyeron al álgebra antes que nada con el nombre. La palabra **álgebra** viene de un libro escrito en año 830 por el astrónomo Mohamed ibn Musa **Al-Khowârizmî**, titulado *Al-jabr wa´l muqâbalah,* que puede significar restauración o completación, puede referirse a la trasposición de términos que están restados al otro miembro de la ecuación; y reducción o compensación, cancelación de términos iguales en los dos miembros de la ecuación . De éste título ha derivado la palabra álgebra. Fue de este libro del que más tarde Europa aprendió esta rama de las matemáticas.

Al menos en dos aspectos la obra de Al-Khowârizmî representa un retroceso respecto a la de Diofanto: es de un nivel mucho más elemental y el álgebra de Al-Khowârizmî es completamente retórica, sin ninguna de las sincopaciones que se encuentran en la *Aritmética de Diofanto* o en la obra del matemático hindú Brahmagupta. Incluso los números están escritos con palabras.

No obstante *Al-jabr wa´l muqâbalah* está más próxima al álgebra elemental moderna que a las obras de Diofanto o de Brahmagupta, ya que el libro no trata de difíciles problemas de análisis indeterminado, sino de la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, en especial de las de segundo grado. Esto se debe a que en general, a los árabes les gustaba poder seguir una argumentación lógica, correcta y clara de las premisas a la conclusión, así como una organización sistemática.

Pero de lo que no hay duda es que ninguna rama de la matemática nace ya completamente crecida, y el álgebra árabe tiene claramente influencias babilónicas, hindúes y griegas.

El libro de Al-Khowârizmî contiene además de la resolución de ecuaciones, que ocupa aproximadamente la mitad del libro, reglas para operar con expresiones binómicas, incluyendo productos tales como (10+x)(10-x), demostraciones geométricas para la resolución de ecuaciones, y, por último una gran variedad de problemas que sirven para ilustrar los casos tratados.

Una expresión algebraica, en el libro de Al-Khowârizmî tiene este aspecto:

اربعة اتساع مال وتسعة دراهم الا اربعة اجذار يعدل جذرا

lo que literalmente significa “cuatro novenos de tesoro y nueve dirhams menos cuatro raíces, igual a una raíz”, y en ella todo escrito en lenguaje natural (incluso los números). Esta expresión equivale a nuestra expresión algebraica

$(4/9)x^2 + 9 - 4x = x$

Al-Khowârizmî va a hablar de cosas que están conceptualizadas en el contexto del cálculo mercantil y con palabras cargadas con los significados propios de ese contexto va a construir el conjunto de las posibilidades que nosotros construiríamos como los polinomios de grado menor o igual que dos.

Al algebrista **Abu-Kamil** (siglo IX y X) se le atribuye una obra donde trata la solución de ecuaciones lineales por simple y doble falsa posición.

El método de la **doble falsa posición** es el siguiente:
Sea la ecuación $ax + b = 0$ y supongamos dos valores para la x :

$$x = m \qquad am + b = p \quad (1)$$
$$x = n \qquad an + b = q$$

restando,

$$a (m - n) = p - q$$

Por otra parte, eliminando *a* en (1)

$$amn + bn = pn$$
$$amn + bm = qm$$

que restando,

$$b (n - m) = pn - qm$$

y dividiendo ambos resultados,

$$- a / b = (p - q) / (pn - qm)$$

o también

$$- b / a = (pn - qm) / (p - q)$$

siendo esto último el valor de x .

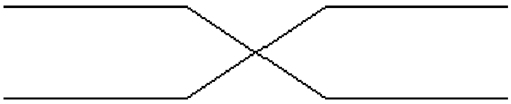
Veamos un ejemplo. Sea la ecuación $5x - 10 = 0$, si tomamos como valor de x: $x = 3$ y $x = 4$, y sustituyendo,

$$5 \cdot 4 - 10 = p$$
$$5 \cdot 3 - 10 = q$$

se tiene que

$$x = (10 \cdot 3 - 5 \cdot 4) / (10 - 5) = (30 - 20) / 5 = 10 / 5 = 2$$

Este principio fue posteriormente presentado en una forma ligeramente modificada por el **método de las escalas**. El nombre proviene de un diagrama que permitía escribir la solución rápidamente:

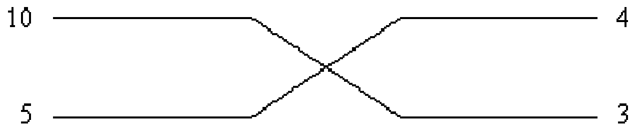


Las dos líneas de la izquierda representan *p* y *q* y las de la derecha *m* y *n* y la cruz del centro indica que hay que multiplicar.

El método puede ser sintetizado como sigue:

1. Consideran dos valores cualesquiera de la incógnita *m, n*.
2. Calculan los errores correspondientes a ellos *p, q*.
3. Hallan el valor de la incógnita en función de los valores dados y sus errores.

En nuestro ejemplo,



A partir de aquí se dedican al estudio de ecuaciones de grado superior.

❖ EUROPA MEDIEVAL

Tras la caída del imperio romano en el año 476, Europa comienza una nueva etapa, conocida como Edad Media que finalizaría a principios del siglo XIV. En esta época toman importancia las traducciones de las obras matemáticas en árabe. Uno de los traductores más importantes fue **Gerardo de Cremona** (1114 - 1187), quien tradujo del árabe los *Elementos* de Euclides, *el Almagesto de* Ptolomeo y el *Álgebra* de Al-Khowârizmî.

Uno de los matemáticos más importantes en esta época fue Leonardo de Pisa (1170 - 1250), más conocido como **Fibonacci** o “hijo de Bonaccio”. Fue educado en África y viajó extensamente por Europa y Asia Menor, gracias a lo que pudo aprender el sistema de numeración hindú-arábigo.

En 1202, Fibonacci escribió su ***Liber Abaci*** *(*el libro del ábaco), un tratado muy completo sobre métodos y problemas algebraicos en el que se recomienda con gran insistencia el uso de los numerales hindú-arábigos. Utiliza el termino *elchataym* (del arabe *hisab al-Khataayn*) para designar la regla de la doble falsa posición. En el capitulo 13 del *Liber Abaci* (Cap. 13: *Sobre el método Elchataym y como en él son resueltos fácilmente todos los problemas*) explica este método en detalle y lo usa para resolver problemas. Anteriormente, en el capitulo 12, había presentado la regla de simple falsa posición.

Tanto en el *Liber Abaci* como en su trabajo posterior*: Liber Quadratorum (1225),* Leonardo se ocupó del álgebra. Siguió a los árabes en usar palabras en lugar de símbolos y basar el álgebra en métodos aritméticos. Expuso la solución de ecuaciones determinadas e indeterminadas de primer grado.

❖ RENACIMIENTO

Hasta la aparición del *Ars Magna* de Cardano en 1545, no hubo en el Renacimiento desarrollos trascendentes en álgebra. Sin embargo, merecen ser mencionadas algunas obras que contribuyeron a que esta rama de las matemáticas no quedase en el olvido.

El trabajo de un fraile italiano llamado **Luca Pacioli** (1445-1514), su principal publicación es la ***Summa***, una recopilación de material de cuatro campos distintos: aritmética, álgebra, geometría euclídea y contabilidad de doble entrada. Fue escrita en lengua vernácula y la parte dedicada al álgebra incluye las soluciones de las ecuaciones lineales y algunas soluciones de las cuadráticas. Su álgebra es retórica; sigue a Leonardo y a los árabes al llamar a la incógnita la "cosa". Un ejemplo de ello es el siguiente problema propuesto por Luca Pacioli:

"Una persona compra una joya por una cierta cantidad desconocida de fiorino y la vende por 50. Una vez realizada la operación obtiene unos beneficios de 3 1/3 soldi por cada fiorino, que contiene 100 soldi. Pregunto el primer coste".

A parte de la innegable influencia de Italia durante el despegue cultural del siglo XV y XVI, en otros lugares Europeos no se quedaron rezagados. En Alemania los libros de álgebra publicados llegaron a ser tan numerosos que durante algún tiempo se impuso en casi toda Europa el uso de la palabra alemana "**coss**" para designar a la incógnita y el álgebra misma vino a llamarse "el arte cósico" o "arte de la cosa". Riese menciona también en su *Die Coss (1524)* el álgebra de Al-Khowârizmî *y* cita además a un cierto número de predecesores alemanes en este campo. Johann Widman utiliza los símbolos + y – para la suma y la resta en 1489.

En España, en 1482, **Francesc Santcliment** presenta la regla de falsa posición, distinguiendo tres casos en la resolución de la ecuación $ax + b = c$:

1. que $x1$ y $x2$ sean ambos mayores que c (al calcular $ax1+b$ y $ax2 +b$). Santcliment dice que ambas posiciones dan más.
2. que $x1$ y $x2$ sean mas pequeñas que c. Santcliment dice que ambas posiciones dan menos.
3. que $x1$ y $x2$ sean alternos. Santcliment dice que una posición da más y otra menos.

Esta distinción en tres casos perdura todavía en el ***Tratado de Arithmetica Práctica y Speculativa*** **de** ***Pérez de Moya*** (1573). Sin embargo, aquí se introduce ya un tratado de la *cosa* o arte mayor. De esta forma, en la pagina 457, recurre a este método para resolver el siguiente problema:

"Dame dos números en proporción tripla que sumados hagan 36",

cuya solución es:

“Para hacer esta presupondrás que el numero es una cosa (que se figura así: 1 co.), el segundo, porque dice que ha de ser de tripla proporción, será 3 co., los cuales dos números sumados montaran 4 co. Estas 4 co. dirás que es igual a los 36 números que quisieras que vinieran,... Decir que 4 co. son iguales a 36 números no es otro sino que 4 co. valen 36 números, que partidos 36 a 4 viene 9, y este es el valor de una cosa.”

Es decir, esta resolviendo la ecuación lineal $x + 3x = 36$ mediante un procedimiento de tipo algebraico.

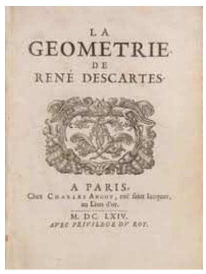
Parece que, debido a las dificultades que tienen para manejar expresiones algebraicas, todavía recurren a diferentes métodos aritméticos para resolver problemas de mayor dificultad.

Poco después empezaron a aparecer obras que revolucionarían el álgebra, tales como **Ars Magna** *de* Jerónimo **Cardano** (1501-1576) en el año 1545, o la obra de **François Viète** (1540-1603) un abogado francés cuyo interés por las matemáticas era puro entretenimiento y que en su *In Artem Analyticam Isagoge* traza la línea divisoria entre la aritmética y el álgebra y propone utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone en álgebra desconocida o indeterminada, y una consonante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado. Esta distinción entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita fue un paso previo a la matemática moderna.

El símbolo "=" fue utilizado por primera vez por el matemático galés Robert Recorde en su obra *The Whetstone of Witte* (1557).

❖ LA ÉPOCA DE DESCARTES

Rene Descartes (1596-1650) fue más sistemático que sus predecesores en su álgebra simbólica, que había seguido desde el Renacimiento un proceso más o menos continuo de avance.



Encuentra su culminación en **La géométrie** de Descartes, el primer texto matemático que un estudiante de álgebra actual puede leer sin encontrarse con dificultades de notación. El único símbolo arcaico que utiliza es para la igualdad. El uso de las primeras letras del alfabeto para los parámetros constantes (a, b, c…), y de las últimas para las incógnitas o variables (x, y, z), y la utilización de los símbolos germánicos + y – hacen que la notación algebraica de Descartes se parezca mucho a la nuestra. Obviamente ésta se deriva de aquella.

Hay una diferencia importante, donde nosotros consideramos a los parámetros y a las incógnitas como números, Descartes los considera como segmentos.

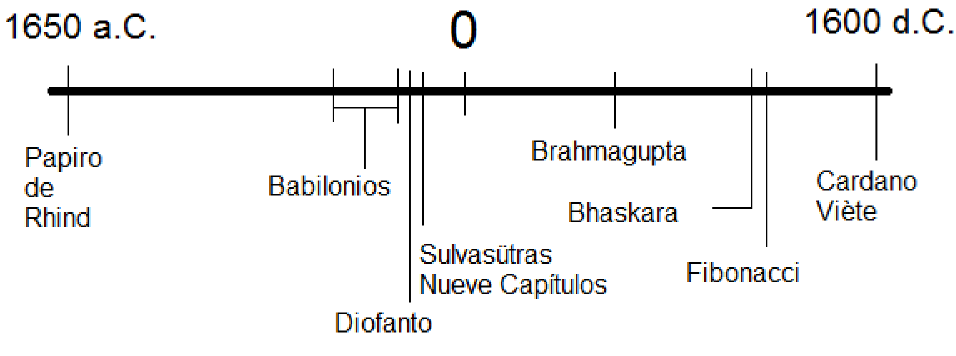
❖ LA ÉPOCA DE EULER

Posteriormente, podemos decir que quien dio forma al álgebra elemental tal y como la conocemos hoy, fue **Euler** (1707-1783). En su Introducción al análisis de los infinitos (1748), realizó el primer tratamiento analítico completo del álgebra, la teoría de ecuaciones, la trigonometría y la geometría analítica.

Euler define en su libro **Elementos del Álgebra** (1770) el álgebra como la teoría de los "cálculos con cantidades de distintas clases", desarrolla métodos de resolución de distintos tipos de ecuaciones y el aparato simbólico-literal del álgebra para la resolución de tales ecuaciones.

En 1715, **Andrés Puig** publica una *Arithmetica Especulativa y Practica*; y *Arte de Algebra* en el que también se exponen ambos métodos: el aritmético y el algebraico. Así, en el libro cuarto introduce la regla de una y dos falsas posiciones. En el libro quinto se establecen los principios del algebra. Sin embargo todavía persisten los problemas en el manejo de expresiones algebraicas. Por tanto, se destaca el método algebraico por su carácter de regla general pero, debida a las complicaciones reseñadas, no permite resolver problemas con la familiaridad con que lo hacen los métodos aritméticos, y en particular, la regla de dos falsas posiciones.

Con la universalización del álgebra, la regla de falsa posición es relegada a método de aproximación numérica y desaparece. El principal motivo es un cambio en el enfoque metodológico: el método algebraico resulta más natural, además de tener un carácter universal (permite resolver todo tipo de problemas), frente a la regla de falsa posición que únicamente es válida para problemas cuya solución viene dada al resolver una ecuación lineal.



ANEXO II. Evaluación final

<table>
<tr><td colspan="3">MATEMÁTICAS 2º ESO Fecha:
Nombre ______________________________ Grupo:</td></tr>
<tr><td>ECUACIONES PRIMER GRADO</td><td>CALIFICACIÓN</td><td></td></tr>
</table>

Ejercicio nº 1.- **(*1* punto*)***
Si “x” representa la edad de Pedro, escribe en lenguaje algebraico:
1. El doble de su edad.
2. El triple de su edad hace un año.
3. La edad de una persona dos años mayor.
4. La edad de una persona cinco años más joven.
5. La edad de Pedro hace 10 años.
6. La edad de Pedro dentro de 12 años.
7. El número de meses que ha vivido Pedro.

Ejercicio nº 2.- **(3 puntos)**
Para las siguientes ecuaciones:
5(x+2) = 5x + 10
3x + x + 1 = 101
3(x + 10) = 7(x - 2)
5x - 3 - 2x = x + 2x - 3
(x + 5)/3 = x/2 + 3/2
a) Razona cuáles de estas igualdades son ecuaciones y cuáles identidades. Justifica tu respuesta.
b) Comprueba si x=19 es solución de alguna de las ecuaciones que has encontrado en el apartado anterior. Puedes ayudarte de la calculadora.
c) Resuelve las ecuaciones para las que x=19 no era solución.
d) Para las ecuaciones del apartado anterior, inventa un enunciado que las modelice.

Ejercicio nº 3.- **(1 punto)**

Completa la tabla señalando los miembros y los términos de cada ecuación:

ECUACIÓN	PRIMER MIEMBRO	SEGUNDO MIEMBRO	TÉRMINOS
$3x-5=2x+4$			
$2x-3=5x$			
$x-6=2x+4$			

Ejercicio nº 4.- **(1 punto)**
Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(x-1)=4x-3$

b) $-5(x+3)+8(x+2)=10$

Ejercicio nº 5.- **(1 punto)**
Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)

$$\frac{3-(x+4)}{2}-\frac{4x}{3}=2x+5$$

b)

$$x-3\left(\frac{1-(x-2)}{2}\right)=2(x-2\frac{-x-3}{5})$$

Ejercicio nº 6.- **(1 punto)**
En un garaje hay 16 vehículos entre coches y motos. Sabiendo que el número total de ruedas es de 60, ¿cuántos coches y cuántas motos hay?

Ejercicio nº 7.- **(1 punto)**
Sabiendo que en un triángulo el segundo lado es 5 cm más largo que el primero, y que el tercer lado mide el doble que el primero, y su perímetro es de 25 cm, ¿cuánto mide cada lado?

Ejercicio nº 8.- **(1 punto)**
El triple de un número menos cinco es igual a su doble menos tres. ¿Cuál es ese número?

ANEXO III: Problemas de ecuaciones de primer grado.

1) Con los 30 euros que tengo podría ir dos días a la piscina, un día al cine y aún me sobrarían 8 euros. La entrada de la piscina cuesta 2 euros más que la del cine. ¿Cuánto cuesta la entrada del cine?

2) Un depósito está lleno el domingo. El lunes se vacían sus 2/3 partes, el martes se gastan 2/5de lo que quedaba y el miércoles 300 litros. Si aún queda 1/10, ¿cuál es su capacidad?

3) En el mes de agosto cierto embalse estaba a los 3/5 de su capacidad. En septiembre no llovió y se gastó 1/5 de su capacidad total. En octubre se recuperaron 700.000 m3, quedando lleno en sus tres cuartas partes. ¿Cuál es su capacidad?

4) Tres amigos juegan un décimo de lotería, que resulta premiado con 6.000.000 euros. Calcular cuánto corresponde a cada uno, sabiendo que el primero juega doble que el segundo y éste triple que el tercero.

5) ¿Cuánto te costó una calculadora si un quinto más un sexto más un séptimo del precio menos 2 euros, fue la mitad de todo?

6) De una cuba llena de agua se saca la mitad del contenido y después un tercio del resto, quedando en ella 200 litros. Calcula la capacidad de la cuba.

7) La edad de Juan es doble de la de José. Si Juan tuviera 10 años menos y José 5 años más, los dos tendrían la misma edad. ¿Qué edad tienen?

8) Calcular las dimensiones de un trapecio isósceles, sabiendo que su perímetro es 298 m y que la base mayor es doble de la base menor y triple de la altura.

9) Con 20 billetes de 20 y 10 euros se ha pagado una factura de 320 euros. Calcular el número de billetes de cada clase que se han entregado.

10) Ángel repartió fotos de tres álbumes. En el primer álbum puso la cuarta parte más ocho fotos. En el segundo puso la mitad menos dos fotos y en el tercero puso la quinta parte. ¿Cuántas fotos tenía Ángel?

11) La edad de Doña Puri es 6 veces la de su nieta Beatriz, pero dentro de 8 años sólo será el cuádruple. ¿Cuál es la edad de cada una?

12) En una familia trabajan el padre, la madre y el hijo mayor, ganando conjuntamente 3.600 euros al mes. La ganancia de la madre es igual a los 2/3 de la del padre y la del hijo es la mitad de la de su madre. ¿Cuánto gana cada uno?

13) Una finca rectangular mide 150 m de largo. Si fuera 30 m más larga y 20 m más ancha, su superficie sería 6.000 m2. ¿Cuáles son las dimensiones de la finca?

14) Mezclando vino de 20 €/l con vino de 35 €/l, se han obtenido 500 litros de vino, de calidad intermedia, que sale a 29 €/l. ¿Cuántos litros de cada clase se han mezclado?

15) ¿Cuántos litros de aceite de girasol a 1'50 €/l se deben mezclar con 14 litros de aceite de oliva a 7'50 €/l para que la mezcla salga a 6 €/l?

16) En mi bolsillo llevo 15 billetes de 10 y 5 euros. El valor total de lo que llevo es de 120 euros. ¿Cuántos llevo de cada clase?

17) He gastado 1/5 de mi paga en un cómic y ¼ en invitar a mis amigos. Ahora tomaré el autobús, que me cuesta 1'10 euros y aún me quedarán 4'40 euros. ¿Cuá era la paga completa?

18) Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubiera necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado 1 euros. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo?

19) En una granja de vacas entre cuernos y patas hay 72. ¿Cuántas vacas hay?

20) Dos personas disponen del mismo capital: la primera lo ha colocado en un banco al 10% de interés y la segunda en otro banco al 6%. La renta de la primera excede en 40.000 euros a la de la segunda. ¿Cuál es el capital?

21) Un estudiante se compromete a presentar a su padre la resolución de 5 problemas por día. El padre, por cada problema bien resuelto, le da 0'75 euros, y el hijo abona a su padre 0'60 euros por cada problema que no resuelva adecuadamente. Al cabo de 15 días el hijo ganó 22'50 euros. ¿Cuántos problemas resolvió bien?

22) En un juego de televisión se cobran 32 euros por cada acierto, pero se ha de pagar la mitad de ese dinero por cada fallo. ¿Cuántos aciertos tuvieron dos concursantes si al cabo de 60 preguntas no recibieron nada?

23) Se importan del extranjero un cierto número de toneladas de una mercancía que ha de venderse a 800 euros la tonelada. Por avería en el transporte se inutilizan 150 toneladas y con objeto de que la ganancia en la venta sea la misma se vende cada tonelada del resto a 1.000 euros. Hallar las toneladas que se importaron.

24) Ignacio tiene 12'40 euros más que Esteban, pero si le da la tercera parte de su dinero a Esteban, este tendrá sólo 0'80 euros menos que Ignacio. ¿Cuánto dinero tiene cada uno?

ANEXO IV: Actividades de refuerzo y ampliación.

➢ Actividades de Refuerzo:

- Si x es la edad de Inés, expresa en lenguaje algebraico:
  - a) La edad que tendrá dentro de 10 años →
  - b) la edad que tenía hace 4 años →
  - c) La edad que falta para que cumpla 18 años →
  - d) Los años que tendrá cuando pasen el triple de años de los que tiene ahora →

- Expresa en forma algebraica:
  - a) Un número par →
  - b) La suma de dos números cualesquiera →
  - c) La diferencia de 8 y un número cualquiera →
  - d) El doble de un número más 5 →
  - e) El cuadrado de un número →
  - f) Un número más 2, al cuadrado →
  - g) La mitad de un número menos 3 →

-Completa las columnas de la tabla como en el ejemplo:

	3 - 4x = 5x - 6	**3x - 5 = 2 - 4x**	**x + 2x = 6**
Primer miembro	3 - 4x		
2º miembro	5x - 6		
Término en x del primer miembro	-4x		
¿Es solución el número 2?	No, pues 3 - 8 =/= 10 - 6		

- Resuelve la ecuación 2x + 5 = 11 dando los pasos indicados a continuación: resta 5 en los dos miembros. Simplifica los términos. Divide entre 2 ambos miembros.

- Calcula el valor numérico de la expresión algebraica 2x - 4 para los valores:
a) x = 0 b) x = -1

- Escribe una ecuación equivalente a cada una de las siguientes:
a) x + 3 = 12 b) x - 1 = 4

- Indica en las siguientes ecuaciones sus miembros y los términos que la componen:

a) x + 3 = 10 b) 4x - x = x + 8 c) 2x - 10 = -5 d) $\frac{2}{3} \cdot$ x = -12

- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) x - 5 = 9 b) x - 1 = -3 c) 11 = x - 4 d) -6 = -x - 5

e) $\frac{x}{-2} = 6$ f) 8x = -24 g) $\frac{x}{8} = \frac{1}{2}$ h) 15 = -3x

- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) 2x + 4 = 16 b) 7x + 8 = 57 c) x + 2 = 16 - 6x d) x - 1 = 9 - x

e) 5x - 5 = 25 f) 3x + 4 = 2(x + 4) g) 3x - 7 = 25 - x h) 1 - 2x = x – 8

- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) 4x + 1 + 3x - 5 = 2(x - 2) + 30 b) 3(x + 8) = 6(x - 2) + 24

c) 3(x + 8) - (x - 4) = 12 d) 2(4 - x) + 3(4x + 16) = 3

e) 6(x + 8) - 2(x - 4) = 24 f) 6(x - 2) = 3(x + 8) - 24

- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2x}{5} + \frac{x}{10} = \frac{x}{15} + 13$ b) $\frac{x}{2} - x = \frac{x+4}{5} - 1$ c) $\frac{3x-4}{4} = x - 3$

d) $\frac{x}{3} - 7 = \frac{3x}{5} - 9$ e) $\frac{x+8}{2} = \frac{x-4}{6} + 2$ f) $\frac{x-5}{5} + \frac{8-x}{2} = 3 - \frac{2x-10}{2}$

g) $\frac{x-10}{2} - 5 = \frac{x-20}{4} + \frac{x-30}{3}$ h) $-\frac{3x-12}{4} = -1 - \frac{2x-10}{3}$ g) $x = 20 - \frac{2x-5}{5}$

- Calcula un número tal que si le sumamos 2 nos da 10.

- La base de un rectángulo mide el doble que la altura. Si el perímetro es 324 m, calcula la medida de cada lado

- Laura tiene 20 años menos que su padre, y éste tiene el triple de años que su hija. Halla la edad de cada uno.

- En una caja hay doble número de caramelos de menta que de limón, y el triple número de caramelos de naranja que de menta y de limón juntos. En total hay 312 caramelos. Halla cuántos caramelos hay de cada sabor.

También se pueden consultar las páginas siguientes:

- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuaciones_primer_grado_resolucion_problemas/index.htm

- http://conteni2.educarex.es/mats/11802/contenido/

- **Actividades de Ampliación:**

- Escribe la expresión algebraica correspondiente a las siguientes frases:

a) La suma de a y b $\rightarrow$

b) Cuadrado de la suma de a y b $\rightarrow$

c) Suma del cuadrado de a y del cuadrado de b $\rightarrow$

d) Doble del cuadrado de x $\rightarrow$

e) Cuadrado del doble de x $\rightarrow$

f) Producto de a, b y c $\rightarrow$

g) Diferencia del doble de a y del cuadrado de x $\rightarrow$

- El dueño de una tienda de frutos secos, contabiliza 10 cajas de bolsas de gusanitos, 7 de palomitas y 8 de quicos. El repartidor deja dos cajas de cada uno de los productos mencionados. A lo largo de la semana ha vendido 2 cajas de bolsas de quicos, 4 de gusanitos y 3 de palomitas. Expresa en lenguaje matemático las operaciones que debe hacer el dueño de la tienda para saber qué mercancía tiene cuando vuelva el repartidor.

- Se juntan dos amigos para compartir sus chucherías y bebidas. El primero trae dos botes de refrescos, una bolsa de patatas y dos de pipas. El segundo aporta un bote de refresco, dos bolsas de patatas y otra de pipas. Expresa en lenguaje matemático lo que trae cada amigo y lo que tienen entre los dos.

- Un profesor entrega las notas de la manera siguiente. Dice que Raúl tiene el doble de nota que Julio. María tiene el doble de nota que Raúl, Andrés dos puntos más que Raúl, Sergio la mitad que Andrés, Víctor lo mismo que María y Andrés juntos, y Alba tiene el triple que Raúl.
a) Construye la tabla de notas si dice que Julio tiene X
b) Si Julio sacó un 1, ¿qué notas sacaron sus compañeros?

- Un recipiente está lleno de agua. Se extrae la mitad del agua y después la mitad del resto, quedando en el recipiente 200 litros. Calcula su capacidad.

- Resuelve las siguientes ecuaciones con denominador:

a) $\frac{x-2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3x-1}{2}-\frac{3}{2}$ b) $\frac{-3x}{5}=-36+3x$ c) $\frac{x+4}{5}-\frac{x+3}{4}=1-\frac{x+1}{2}$

d) $\frac{-x}{2}+x=x-6$ e) $\frac{x}{2}+21=\frac{4x}{3}+24$ f) $\frac{3x-7}{12}=\frac{2x-3}{6}-\frac{x-1}{8}$

Además se pueden consultar las siguientes páginas, donde ya se introduce las ecuaciones de segundo grado:

- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Ecuacion_de_segundo_grado/index.htm
- http://conteni2.educarex.es/mats/11811/contenido/
- http://www.amolasmates.es/algebraconpapas/recurso/tests/lenguajealgebraico/lengalgebraico01.htm