TRABAJO FIN DE MÁSTER: APLICACIÓN DE LA SEMEJANZA AL CÁLCULO DE DISTANCIAS INACCESIBLES

Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Laura Ariza Rodríguez

Curso 2010/2011

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El presente documento consiste en el Trabajo Fin de Máster que se realiza como síntesis de los distintos módulos formativos que se han llevado a cabo dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas en la Universidad de Granada, durante el curso académico 2010-2011.

De entre las posibles modalidades que oferta el citado máster para la realización de este trabajo, la opción elegida ha sido la elaboración de una Unidad Didáctica. Una Unidad Didáctica es una planificación por parte del docente de un proceso de enseñanza y aprendizaje. En ella se deben precisar los objetivos y contenidos, las actividades de enseñanza y aprendizaje y evaluación, los recursos materiales, la organización del espacio y el tiempo y todas las decisiones que se tomen para atender a la diversidad del alumnado.

El trabajo que se desarrolla a continuación trata del desarrollo de una Unidad Didáctica dirigida a los alumnos de 4º de ESO cuya modalidad de matemáticas es la opción A. Esta Unidad Didáctica está basada en el concepto de semejanza y en la aplicación de ella para el cálculo de distancias inaccesibles.

En la primera parte de este trabajo se hace una justificación de la Unidad Didáctica en base a la legislación vigente. En este caso, nos apoyaremos en la *ORDEN ECI/2220/*2007 por la que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 2007). A continuación, se hace un recorrido a través de la historia del concepto de semejanza, aparecen algunos problemas históricos que se han resuelto con esta teoría y vemos como el concepto de transformación ha sido importante para la evolución de la semejanza.

En el siguiente epígrafe del trabajo aparece el análisis didáctico del tema que se va a desarrollar en la Unidad Didáctica. En él aparecen los conceptos y procedimientos propios del tema, los diferentes sistemas de representación en los que pueden aparecer esos conceptos, los fenómenos que se resuelven con nuestro tema, los objetivos que se pretenden alcanzar y los errores que se esperan que surjan a lo largo del desarrollo del tema.

La parte central del trabajo consiste en el desarrollo de la Unidad Didáctica. En este apartado aparece una descripción detallada de las sesiones planificadas, las actividades propuestas, el sistema de evaluación que se llevará a cabo y las actuaciones para atender a la diversidad.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En la *ORDEN ECI/2220/*2007 se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 2007). En el Anexo II aparece la contribución al desarrollo de las competencias básicas y los objetivos de las diferentes materias, los contenidos y criterios de evaluación de cada una de ellas en los diferentes cursos y unas orientaciones metodológicas y para la evaluación de cada asignatura.

En esta ley se puede leer que los contenidos matemáticos que se seleccionan para la etapa obligatoria pretenden conseguir que todos los alumnos alcancen los objetivos propuestos y que estén preparados para incorporarse a la vida adulta. Además, nos dice que para que los nuevos conocimientos sean efectivos deben apoyarse en lo que los alumnos ya conocen, presentarse en un contexto de resolución de problemas y estar relacionados con su propia experiencia.

En lo que respecta a la geometría podemos leer que debe centrarse en describir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. Además, también se recoge en dicha ley que el estudio de este bloque matemático nos permite establecer relaciones con diversos ámbitos como puede ser la naturaleza o el mundo del arte. También se hace referencia al uso de programas de geometría dinámica para que los alumnos interactúen sobre figuras y sus elementos característicos, pudiendo así analizar sus propiedades, explorar sus relaciones y formular y validar conjeturas.

En este anexo aparecen los contenidos y criterios de evaluación de cada materia organizados por cursos. Si nos fijamos en aquellos que están relacionados con la semejanza podemos ver que ésta aparece en todos los cursos de la educación secundaria obligatoria, salvo en el primero. Así, los contenidos y criterios de evaluación según el curso son los siguientes:

<u>2º ESO</u>

Contenidos

- Proporcionalidad de segmentos y teorema de Thales.
- Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Identificación de relaciones de semejanza.
- Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Interpretación y obtención de valores en planos, mapas y maquetas.
- Utilización del los teoremas de Thales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.

Criterios de evaluación

- Utilizar el teorema de Thales y los criterios de semejanza para determinar medidas de segmentos y figuras planas e interpretar relaciones de proporcionalidad geométrica.
  Este criterio va dirigido a valorar la capacidad para:

- Reconocer la proporcionalidad entre las medidas de los lados homólogos y la igualdad de los ángulos entre triángulos o cuadriláteros semejantes.
- Reconocer figuras semejantes y obtener la razón de semejanza entre algunos de sus elementos.
- Resolver problemas sencillos que conlleven la necesidad de obtener medidas de forma indirecta.
- Obtener medidas reales a partir de mapas y planos de los que se conoce el factor de escala.

<u>3º ESO</u>

Contenidos

– Aplicación de los teoremas de Thales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.

Criterios de evaluación

En esta orden no aparecen criterios de evaluación específicos del tema de *Semejanza*.

<u>4º ESO Opción A</u>

Contenidos

– Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas.

Criterios de evaluación

– Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales.
  Se pretende valorar la capacidad para:
  - Desarrollar estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas aplicando las fórmulas apropiadas.
  - Utilizar los instrumentos de medida disponibles.
  - Desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.

<u>4º ESO Opción B</u>

Contenidos

– Aplicación de los contenidos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
– Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación para esta opción de matemáticas coinciden, en lo relacionado con la semejanza de figuras, con los que se establecen en la opción A de la misma.

La unidad didáctica que se presentará a continuación va dirigida a alumnos de 4º de ESO de la opción A de Matemáticas. Estas matemáticas tienen un carácter terminal por lo que se caracterizan por su enfoque práctico y por aplicar los contenidos a la vida cotidiana. En ella no se fomenta tanto el razonamiento abstracto, el formalismo matemático y rigor lógico como se hace en la otra opción de esta asignatura.

Los alumnos usarán la semejanza como una herramienta para calcular medidas indirectas. En el transcurso del tema aparece el teorema de Thales pero lo hará únicamente como un resultado ya que esta opción no se caracteriza por el formalismo matemático.

HISTORIA

Se puede decir que dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados correspondientes son proporcionales. Pero esta no es la única definición que podemos dar de este concepto matemático. También podemos definir que dos triángulos son semejantes si existe una transformación del plano que lleva uno en el otro, de forma que ésta sea composición de un movimiento y una homotecia.

Estas dos definiciones que hemos mencionado de un mismo concepto tienen características muy distintas: en la primera de ellas se establece una relación entre los elementos de una figura y los correspondientes de su semejante y, la segunda está caracterizada por la búsqueda de la transformación resultante de dos o más transformaciones. De hecho, estas dos definiciones han tenido un mayor peso en épocas distintas de las matemáticas: la enseñanza tradicional y la época de la matemática moderna, respectivamente.

Por lo dicho anteriormente, puede verse que la idea de transformación es determinante para la evolución del concepto de semejanza y, así podemos considerar tres periodos importantes en la historia de este concepto:

<u>Antecedentes de la idea de transformación</u>:

El origen de la geometría es anterior al arte de la escritura, por ello, cualquier afirmación sobre ésta puede no ser cierta. Herodoto y Aristóteles situaban el origen de la geometría en la civilización egipcia, aunque ese origen era mucho anterior de lo que ellos pensaban (Boyer, 1986). Para Herodoto, la geometría había surgido en **Egipto** debido a la necesidad práctica de volver a trazar las lindes de las tierras después de las inundaciones que se producían cada año en el valle del río Nilo. Según Aristóteles, la geometría se había desarrollado en Egipto por la existencia de una gran clase sacerdotal ociosa. Estas teorías defienden un origen distinto de la geometría: la primera cree que ese origen se debe a una necesidad práctica y la segunda apuesta por un origen basado en el ocio.

Se puede decir que el desarrollo de la geometría ha estado estimulado por las necesidades prácticas de la construcción y de la agrimensura y por el sentimiento estético de diseño y orden.

El papiro de Rhind representa la mejor fuente de información sobre matemática egipcia que se conoce. Fue escrito por el escriba Ahmes aproximadamente en el año 1650 a.C a partir de escritos de 200 años de antigüedad, según reivindica el propio Ahmes al principio del texto y consta de 87 problemas y su resolución.

De todos los problemas podemos destacar el 56 ya que contiene aspectos de trigonometría y una cierta teoría de semejanza de triángulos. En este problema se propone mantener una pendiente uniforme en cada cara de una pirámide y la misma en las cuatro caras. El enunciado exacto de dicho problema es: *¿Cuál es el seqt (pendiente de una superficie inclinada) de una pirámide de 250 cubits (codos) de altura y 360 cubits de lado en la base?*

A continuación, aparece la resolución presentada por Ahmes. Hay que tener en cuenta que en mediciones verticales se utilizaba como unidad de medida el codo y en horizontales la mano o palmo, que equivalía a 1/7 del codo.

1. *Calcula 1/2 de 360 que da 180.*
2. *Multiplica 250 hasta obtener 180, que da 1/2 + 1/5 + 1/50.*
3. *Un cubit son 7 palmos. Multiplica ahora 7 por 1/2 + 1/5 + 1/50 que da 5 + 1/25.*
4. *Luego el seqt es **5+1/25 palmos por codo***

Podemos representar (figura 1) los datos del problema:

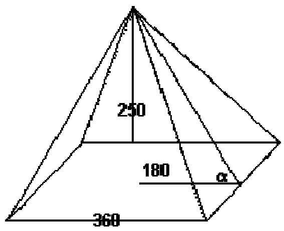


Figura 1

El seqt, efectivamente, coincide con la cotangente del ángulo, es decir es la pendiente de las caras laterales de la pirámide.

En **Mesopotamia** podemos encontrar mayores progresos en lo que respecta a la geometría. Aunque algunas opiniones afirman que el concepto de semejanza de figuras no era conocido por los babilónicos, parece muy probable que sí fuera conocido por ellos.

La semejanza entre todas las circunferencias sí que es algo que se conocía en Mesopotamia, al igual que en Egipto. Pero además de esto, en las tablillas cuneiformes se recogen problemas sobre medidas de triángulos que parecen que involucran el concepto de semejanza.

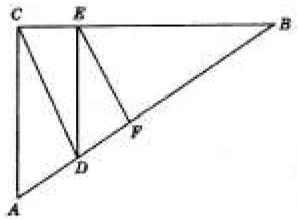


Figura 2

En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado el siguiente triángulo rectángulo de lados $a = 60, b = 45$ y $c = 75$ (figura 2), subdividido en cuatro triángulos rectángulos. Conociendo el área de dichos triángulos, el escriba calcula la longitud *AD*, haciendo uso de que las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de lados correspondientes. También se calculan las longitudes de los lados *CD* y *BD*, y aplicando el resultado anterior a los triángulos *BCD* y *DCE* se obtiene la longitud de *CE*. Cuando se está calculando el lado *DE* se interrumpe el textos bruscamente.

Las **culturas china e india** no desarrollaron mucho la geometría. Se limitaron principalmente a la resolución de problemas sobre distancias y semejanzas de cuerpos. Algunos historiadores creen que enunciaron el teorema de Pitágoras para algunos casos particulares y que desarrollaron algunas ideas sobre su demostración.

Para los antiguos matemáticos **griegos**, la geometría era una parte importante dentro de sus ciencias, llegando a una exhaustividad y una perfección de metodología que ninguna otra rama de su conocimiento había antes alcanzado.

Entre los pensadores de Grecia encontramos a uno que ha tenido un papel importante dentro del tema de semejanza de triángulos. Nos referimos a Thales de Mileto (624-546 a.C.) Aunque no se sabe mucho de su vida ni de su obra, Thales ha sido considerado a lo largo de la historia un hombre excepcionalmente inteligente y el primero de los Siete Sabios griegos.

Una de las características de este autor es que con sus trabajos, la geometría pasa de ser algo puramente empírico a algo teórico. Por otro lado, inicia la idea de demostración haciéndose ésta más rigurosa, pues lo que se hacía hasta entonces era algo experimental basado en simetrías, visualizaciones, superposición, etc. Así, la geometría se convierte en una auténtica ciencia, tal como hoy la conocemos y se comienzan a formular teoremas y enunciados de manera inmaterial y abstracta y a demostrarlos.

Se dice que viajó por Egipto, donde aprendió geometría. Allí, midió la altura de la pirámide de Keops a partir de su sombra. Para ello se ayudó de una estaca que clavó en el suelo. Esperó a que la sombra que proyectaba dicha estaca midiera lo mismo que ella. En ese preciso instante midió la sombra de la pirámide y así dedujo la altura de ésta (figura 3). A Thales se le atribuyen, además, algunos descubrimientos matemáticos como el teorema que lleva su nombre. Algunos autores piensan que no es él su autor, pero se le atribuye a él por utilizarlo al medir distancias.

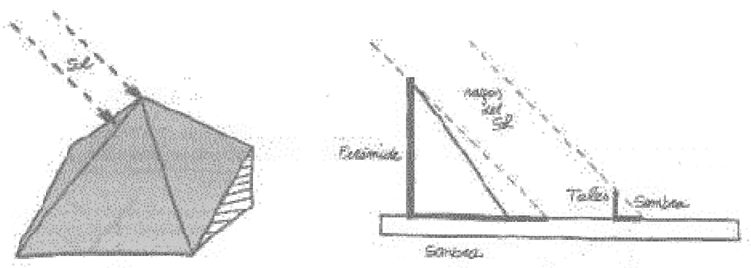


Figura 3

Pero además de para calcular la altura de las pirámides, Thales usó la semejanza de triángulos para calcular la distancia de un barco a la playa. Aunque existen varias hipótesis sobre el procedimiento empleado por Thales para calcular esa distancia, lo más probable es que siguiera el siguiente método:

Si el barco se encontraba en la posición N, Thales se habría subido a una torre AB en la costa, a la orilla del mar (figura 4). Utilizaría un aparato formado por dos listones en ángulo recto: un listón lo colocaría vertical, CD, en línea recta con AB, y el otro horizontal hacia el mar. Luego, lanzaría una visual desde D hacia el barco. Así se determinaría el punto E, que es la intersección de esta visual con el listón horizontal. Si conocemos las longitudes AC, CD y CE podemos aplicar la semejanza de triángulos y calcular la distancia AN buscada.

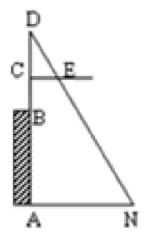


Figura 4

Otro autor que ha sido importante en esta rama de las matemáticas es Euclides (325 - 265 a. C.). En la geometría del mundo antiguo que aparece en el libro de los

Elementos de Euclides no se recoge la idea de transformación geométrica. En el libro V de esta obra aparece la noción de semejanza, en él se trata en abstracto de relaciones y proporciones y se define el concepto de razón. En el libro VI se aplica lo anterior a la geometría plana. Se habla de semejanza de triángulos, del teorema de Thales, de los ángulos en el círculo y de la resolución de una ecuación de segundo grado por procedimientos geométricos.

Hacia la consideración de las transformaciones como objetos matemáticos:

Durante los siglos XVI, XVII y XVIII la noción de transformación se va desarrollando lentamente. En esta época no se utiliza de forma consciente las transformaciones.

Gerard Desargues (1591-1661) ha sido un precursor de la idea de transformación en geometría y de la utilización de propiedades invariantes. Sus trabajos están centrados en la teoría de las cónicas que se consideran secciones planas de un cono de revolución con un plano que lo interseca. Éstas, gracias a las perspectivas pueden interpretarse como proyecciones perspectivas de un círculo sobre un plano no paralelo al plano que contiene al círculo. La transformación permite demostrar que una relación verdadera en el círculo lo es en una cónica cualquiera.

En este período histórico las transformaciones geométricas aparecen como instrumentos implícitos de transferencia de propiedades. Las únicas transformaciones utilizadas son las proyecciones, aunque en un contexto limitado a las cónicas, y no son consideradas como objetos de estudio en sí mismas, sino como simples relaciones entre dos figuras donde prevalece la noción de invariante.

Del siglo XVIII son importantes algunas aportaciones de Euler (1707-1783) como son: uso de algunas ecuaciones analíticas de distintas transformaciones, introducción de la noción de transformación afín y definición del centro de semejanza.

La transformación como objeto matemático:

La homotecia y la semejanza comienzan a considerarse como objetos matemáticos en el siglo XIX. Esto se debe al desarrollo que se produce en la geometría entre la publicación de “Geometría descriptiva” (en 1795) y “el programa de Erlangen” de Felix Klein (en 1872).

En la segunda mitad del siglo XIX la geometría se caracteriza por el empeño que mostraron los matemáticos de la época en el estudio de una gran variedad de transformaciones. Podemos destacar aquellas que forman el grupo de transformaciones que define la geometría proyectiva. Los orígenes de esta geometría ya estaban en obras de Pascal y Desargues, pero hasta comienzos del siglo XIX no se produjo su desarrollo de forma precisa. Este desarrollo se debe principalmente a Poncelet (1788-1867), quien podemos decir que fue el que desarrolló y difundió el método de las transformaciones con el que se pretende dar a la geometría la misma generalidad y fecundidad que había tenido la geometría analítica durante su desarrollo en el siglo XVIII.

A fines del siglo XIX, aparece la necesidad de clasificar las propiedades invariantes y la familia de transformaciones asociadas a esas propiedades. Klein (1849-1925) en sus visitas a París donde se habían desarrollado ya las sugerencias de Lagrange (1736-1813) sobre la teoría de grupos, se dedicó durante la mayor parte de su vida a desarrollar, aplicar y profundizar este concepto ya que poseía unas importantes propiedades unificadoras.

Cabe destacar el programa de Erlangen, que es un programa de investigación en el que Klein propuso un nuevo tipo de solución para los problemas geométricos. Lo que pretende Klein con este programa es dar una definición formal de geometría y así, dejar a un lado la idea intuitiva que tenemos de ella. Debido a las nuevas geometrías no euclídeas era lógico preguntarse qué es la geometría.

Klein comprobó que hay ciertas propiedades de los objetos geométricos que pueden ser invariantes a ciertas transformaciones y esas propiedades que permanecen invariantes serán las que definan un determinado tipo de geometría. Así, describía una *geometría* como el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones. Por tanto, cualquier clasificación de los grupos de transformaciones da lugar a una clasificación de las geometrías. De esta forma:

- La geometría euclídea es el estudio de los invariantes mediante el grupo de los movimientos rígidos.
- La geometría afín es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las translaciones.
- La geometría proyectiva es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las proyectividades.
- La Topología es el estudio de los invariantes mediante el grupo de las funciones continuas y de inversa continua.

Con este programa es la primera vez que una ciencia, en este caso la Geometría, es capaz de autodefinirse rigurosamente y así, se elimina toda intuición que pudiera existir en el pensamiento geométrico, enriqueciendo de esta forma a la geometría abstracta. Además, se dio una visión unificada de la geometría que es hoy comúnmente aceptada.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

El análisis didáctico es un procedimiento para el diseño, desarrollo y evaluación de un tema de las matemáticas escolares. Está fundamentado en la noción de currículo y se estructura en torno a organizadores del mismo. Está compuesto de cuatro análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y evaluación.

El **análisis de contenido** es la parte del análisis didáctico en la que se hace una descripción de los diferentes significados de los conceptos y procedimientos de un tema, desde distintas perspectivas: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

El **análisis cognitivo** aborda la problemática del aprendizaje de un tema por parte de los alumnos. Se articula en torno a tres organizadores: expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje.

En el **análisis de instrucción** se divide en dos partes: diseño, análisis y selección de tareas y elaboración de una unidad didáctica.

Para analizar una tarea es necesario asumir el papel de los alumnos, establecer las posibles estrategias que emplearán al resolver la tarea e identificar los puntos donde pueden surgir las dificultades. Debemos tener claro que esto no significa mostrar la solución ideal a la tarea desde el punto de vista del profesor de matemáticas. Se debe establecer el contenido que cubre la actividad propuesta, tanto conceptual como procedimental; los objetivos que se alcanza con la misma y los errores que se detectan o superan. Además, también deben establecerse las competencias a las que se contribuye con la actividad y el nivel de complejidad de las mismas.

Estos niveles de complejidad surgen del estudio PISA, pues considera que cada problema matemático requiere distintos niveles de conocimiento (OECD, 2004). Así, establece que existen tres tipos de complejidad de una tarea. Estos son: reproducción, conexión y reflexión. Son tareas con una complejidad de *reproducción* aquellas que son familiares para los alumnos y que requieren de la aplicación de algoritmos estandarizados, donde se manejan expresiones simbólicas familiares y se realizan operaciones sencillas. Nos encontramos con tareas de *conexión* cuando se trata de problemas que no son rutinarios pero que aparecen en contextos familiares y que requieren establecer relaciones entre distintas representaciones. Por último, en las tareas de *reflexión* los alumnos deben identificar conceptos matemáticos importantes y establecer vínculos con los conocimientos adecuados.

Para el análisis de una tarea también será importante señalar los recursos que son necesarios para llevar a cabo la actividad, el agrupamiento de los alumnos a la hora de la resolución de la misma y la finalidad con la que se propone la tarea.

La segunda parte del análisis de instrucción trata sobre la elaboración de una unidad didáctica. Esta parte consiste en la secuenciación de las sesiones. Tendremos que señalar cómo se organiza cada sesión, la relación que existe entre ellas y la temporalidad de las actuaciones.

El **análisis de evaluación** nos permite valorar los logros de los alumnos. Además, también se evalúa la planificación realizada y la puesta en práctica de la unidad didáctica.

A continuación, nos centraremos en los dos primeros análisis.

ANÁLISIS DE CONTENIDO

Como se ha dicho anteriormente, el análisis de contenido consta de tres organizadores.

- Estructura conceptual: aparece los diferentes conceptos y procedimientos de un tema y sus relaciones.
- Sistemas de representación: se presentan las diferentes formas en las que pueden representarse conceptos y procedimientos y sus relaciones.
- Análisis fenomenológico: se consideran los contextos, situaciones y problemas que dan sentido al contenido considerado.

A continuación, aparecen cada una esas perspectivas con un mayor detalle.

Estructura conceptual

En la estructura conceptual deben aparecer los conceptos que caracterizan el tema en el que nos hemos centrado, los procedimientos que se pueden establecer entre esos conceptos y las relaciones que existen entre los distintos conceptos, entre los distintos procedimientos y entre conceptos y procedimientos.

Dentro del campo conceptual podemos destacar en esta Unidad Didáctica los conceptos de semejanza, triángulos semejantes, triángulos en posición de Thales, los criterios de semejanza entre triángulos y el teorema de Thales.

En lo que respecta a lo procedimental destacamos los razonamientos siguientes: colocar y reconocer triángulos que se encuentran en posición de Thales, utilizar los criterios de semejanza y el teorema de Thales para determinar triángulos semejantes y calcular medidas desconocidas gracias a la semejanza de triángulos.

Las relaciones entre los diferentes conceptos y procedimientos que caracterizan esta Unidad Didáctica aparecen en un mapa conceptual que se encuentra al final del análisis de contenido, ya que en él aparecen también relaciones con los sistemas de representación y la fenomenología.

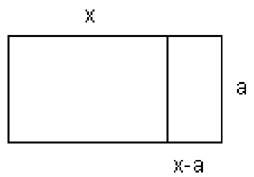
Sistemas de representación

Podemos definir las representaciones matemáticas como todas aquellas herramientas (signos, gráficos, material concreto, etc.) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y que permiten interactuar con el conocimiento matemático (Rico 2000, citado en Escudero 2006). Para Duval es necesario utilizar distintas representaciones de un mismo objeto matemático ya que estos objetos no son directamente accesibles por la percepción. Además, es necesario que exista una coordinación entre estos sistemas de representación.

En este apartado haremos referencia a los sistemas de representación que aparecen en el tema que estamos estudiando. Estos sistemas pueden ser de los siguientes tipos: simbólico, verbal, tabular, conjuntista, gráfico y tecnológico. Pasamos a describir cada uno de ellos:

<u>Simbólico</u>: es aquel en el que se utilizan escrituras matemáticas en las que aparecen números, letras, signos y operaciones. Dentro de tema podemos encontrar los siguientes casos particulares:

- Para representar la razón: a/b
- Para representar la proporcionalidad de segmentos: a/b = c/d
- Para representar la semejanza existente entre dos figuras:~
- Algebraico: en la traducción de un problema geométrico a una ecuación. Por ejemplo:



$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}$$

$$a^2 - ax - x^2 = 0$$

- Numérico:
  - Para representar la razón: K= 1,6
  - Para representar la proporcionalidad se segmentos: 2/4 = 6/12

<u>Verbal</u>: son las manifestaciones que hacemos de cualquier concepto matemático a través de nuestro lenguaje natural:

- Para representar la semejanza entre dos figuras: "*Figuras semejantes*"
- Para representar la proporcionalidad entre segmentos: " *a es a b como c es a d*"
- Para representar la razón: "*a sobre b*"

<u>Tabular</u>: este sistema nos permite comparar medidas en distintas figuras.

- Para representar la proporcionalidad entre lados:

Lados polígono 1	Lados polígono 2	Lados polígono 3
2 cm	4 cm	6 cm
1'3 cm	2'6 cm	3'9 cm

Conjuntista: nos permite establecer relaciones entre distintas figuras.

- Para representar la proporcionalidad entre lados:

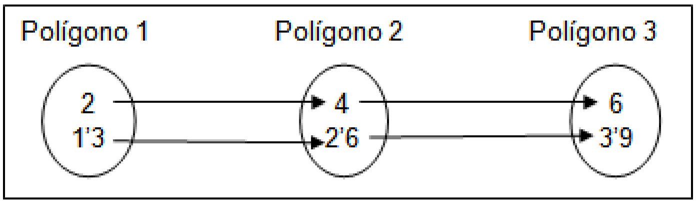
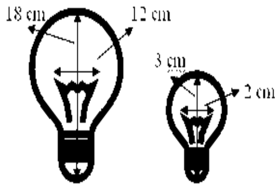
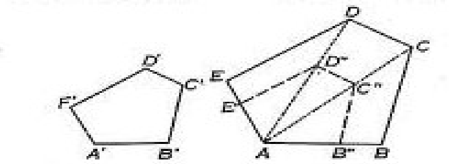


Gráfico: este sistema de representación se centra en la imagen visual.

- Para representar figuras semejantes:





- Para representar el Teorema de Thales:

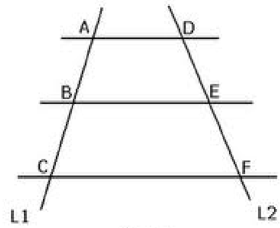
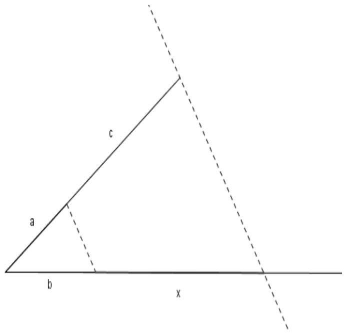
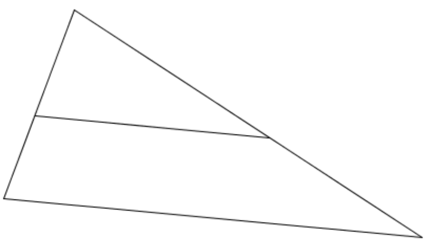
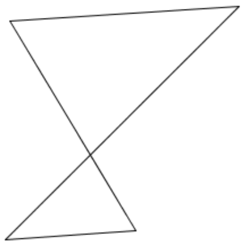


figura 1

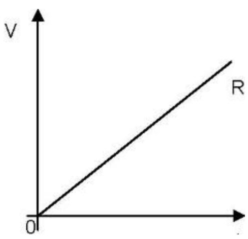


- Para representar triángulos en posición de Thales:



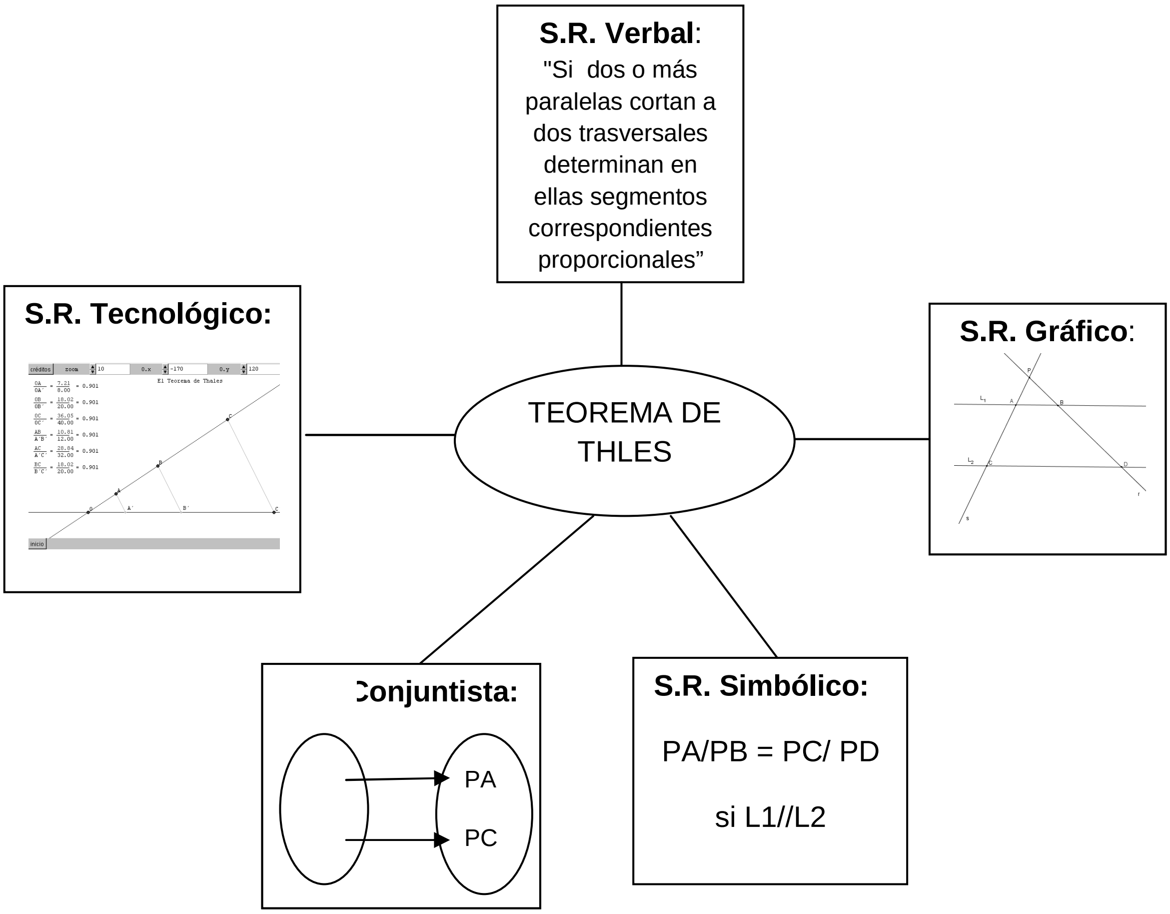


- Para representar la proporcionalidad como función:



Tecnológico: podemos usar distintos programas dinámicos que además de usar un sistema de representación gráfico nos permiten cambiar las condiciones de la figura y así comprobar que se mantienen ciertas propiedades.

Como un mismo concepto matemático puede admitir distintas representaciones, pasamos a establecer una relación entre las diversas representaciones de un concepto que será central en nuestra Unidad Didáctica como es el teorema de Thales:

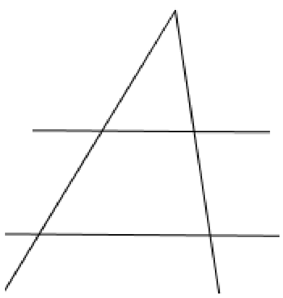


El gráfico anterior recoge distintas representaciones del teorema de Thales: en la primera de ellas el teorema aparece representado mediante el lenguaje natural, en la segunda encontramos una imagen visual de las hipótesis que establece el teorema, en la tercera aparece la proporción que se obtiene como tesis del teorema, a continuación se establece la relación entre distintos segmentos mediante la notación conjuntista y por último aparece el teorema de Thales representado en un programa dinámico que permite cambiar las posiciones de las rectas y comprobar que el resultado sigue siendo cierto.

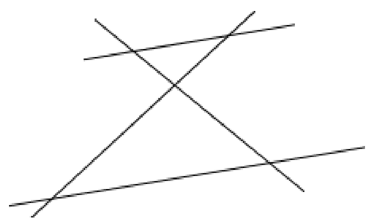
El uso de distintos sistemas de representación para un mismo concepto y la relación entre ellos es algo fundamental en matemáticas para así poder construir un conocimiento mucho más rico. Pero, en ocasiones, el uso del sistema de representación gráfico puede provocar que se produzcan errores en el aprendizaje de los alumnos. Esto se debe a que generalmente usamos representaciones en las que se privilegia una posición determinada de las figuras. Por ejemplo, polígonos que tienen un lado paralelo al borde del papel, triángulos con una altura vertical e incluida en él, etc. Esto hace que los alumnos no reconozcan el concepto representado cuando la representación no esté dispuesta de esa forma privilegiada que suele utilizarse.

Si nos centramos nuevamente en el teorema de Thales, podemos distinguir dos posiciones fundamentales:

a) Triángulos encajados:
los triángulos están contenidos uno en otro.



b) Triángulos en forma de mariposa:
los triángulos están separados y unidos por un vértice.



Gracias al trabajo de Cordier y Cordier (Escudero, 2006) podemos considerar como representaciones prototípicas del teorema de Thales aquellas en las que las rectas paralelas están al mismo lado del punto de intersección de las secantes y en las que la dirección de las paralelas es la posición “cuasi-horizontal”.

Por tanto, para evitar que las representaciones gráficas de un concepto produzcan errores en el aprendizaje de los alumnos habrá que tener muy en cuenta no utilizar únicamente aquellas que sean prototípicas.

Análisis fenomenológico

Freudenthal define la *fenomenología didáctica de un dominio* como el conjunto de situaciones en el que las ideas matemáticas importantes tienen sus raíces en los fenómenos reales (Escudero, 2006).

En el anexo de este trabajo se recoge un estudio completo de los contextos en los que aparece el tema de semejanza: longitudes inaccesibles, tratamiento de imágenes, representación de la realidad y patrones numéricos.

La Unidad Didáctica que se desarrollará se centra en una parte muy concreta de la semejanza de figuras, esto es, el cálculo de medidas indirectas. Por lo tanto, a continuación nos centraremos en los problemas de cálculo de medidas inaccesibles que se basan en la semejanza:

– Profundidad: el medidor deberá alejarse del pozo hasta que consiga que su visual una el borde de este con la línea del fondo (figura 5). De esta forma se forman dos triángulos semejantes. Conociendo su altura hasta los ojos, la anchura del pozo y la distancia que lo separa del borde, el medidor podrá calcular la profundidad buscada.

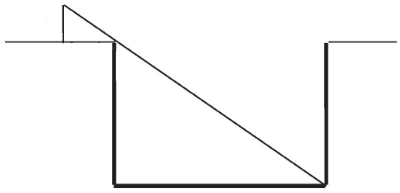


Figura 5

– Altura: existen diversos métodos para determinar la altura de un objeto:

  - <u>Mediante la sombra del objeto</u>: ayudándonos de un objeto cuya altura conocemos y de las sombras de ambos podemos calcular la altura desconocida gracias a la semejanza de los triángulos que se forman (figura 6).

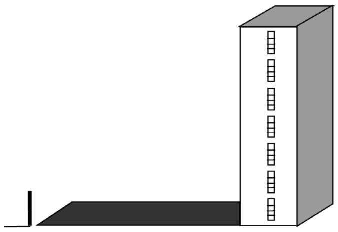


Figura 6

  - <u>Método de Euclides</u>: este método se usará cuando queramos calcular la altura de un objeto cuyo pie es accesible. Para ello usaremos un espejo que debemos colocar en el suelo y situarnos en una posición que nos permita ver el extremo superior del objeto reflejada en el espejo (figura 7).

Conociendo la distancia que hay, en esa posición, del espejo al pie del objeto y al medidor y la altura de éste hasta los ojos podemos calcular la altura del objeto usando la semejanza de triángulos.

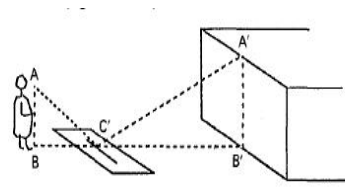


Figura 7

- o <u>Método de Gerberto de Aurillac</u>: este método lo usaremos cuando el pie del objeto del cual queremos calcular su altura no es accesible. Consiste en aplicar el método de Euclides colocando el espejo en dos posiciones C y C' (figura 8). Así, conseguimos dos pares de triángulos semejantes. Conociendo la distancia entre los dos espejos, la distancia del medidor a cada uno de los espejos en la situación requerida y la altura del medidor podemos calcular la altura que se pretende medir.

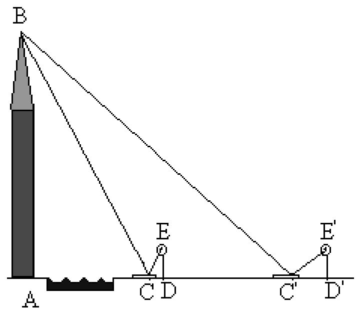


Figura 8

- o <u>Mediante el uso de escuadra o cartabón</u>: en este caso nos ayudamos de una escuadra o un cartabón para que el medidor observe el punto más alto del objeto ayudándose de un triángulo rectángulo. Así se forman dos triángulos que se encuentran en posición de Thales (figura 9). Aplicando el teorema podemos calcular la altura buscada si conocemos las dimensiones de la escuadra o el cartabón, la distancia del medidor al objeto y la altura de éste hasta los ojos.

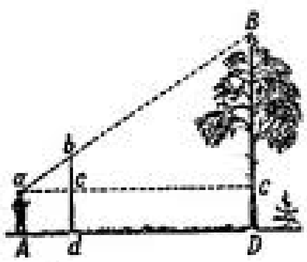


Figura 9

- Distancia:

  - o <u>Distancia de un barco a un puerto</u>: subiéndonos a una torre en la orilla de la playa y ayudándonos de una escuadra o cartabón podemos medir esta distancia. Sólo hay que lanzar la visual hacia el barco (figura 10). Conociendo la altura del medidor, el punto donde la visual interseca al cartabón y las dimensiones de este podemos calcular la distancia deseada (método empleado por Thales)

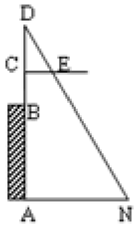


Figura 10

- o [Anchura de un rio]: tomando como referencia un punto de la orilla opuesta a la que nos encontramos y marcando los puntos B, C, D y E que aparecen en el dibujo (figura 11) de forma que en la posición E lancemos una visual hasta el punto de la otra orilla, podemos calcular la anchura de un rio aplicando la semejanza de triángulos (ya que las distancias en la orilla que nos encontramos son fácilmente medibles)

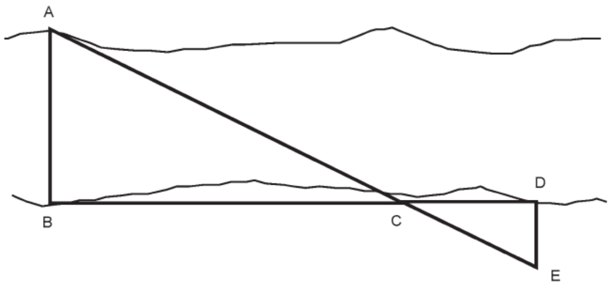


Figura 11

- o Distancia entre dos puntos separados por una montaña o lago: elegimos un punto O desde el cual se puedan ver los dos puntos. Podemos formar los triángulos que aparecen en el dibujo de forma que DE es paralela a AB (figura 12). Estos dos triángulos son semejantes y éste hecho nos permite calcular la distancia buscada.

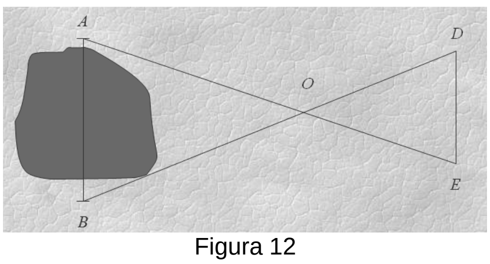


Figura 12

- o Sombra de la Tierra: podemos medir la sombra que ésta determina usando el teorema de Thales. Basta mirar el dibujo que aparece abajo y se pueden observar dos triángulos en posición de Thales (figura 13). Conociendo el radio del Sol (R_S), de la Tierra (R_T) y la distancia entre ambos (D) podemos calcular cuando mide esa sombra (H).

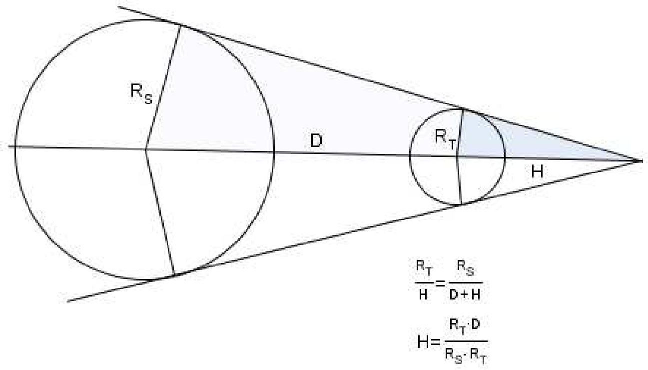
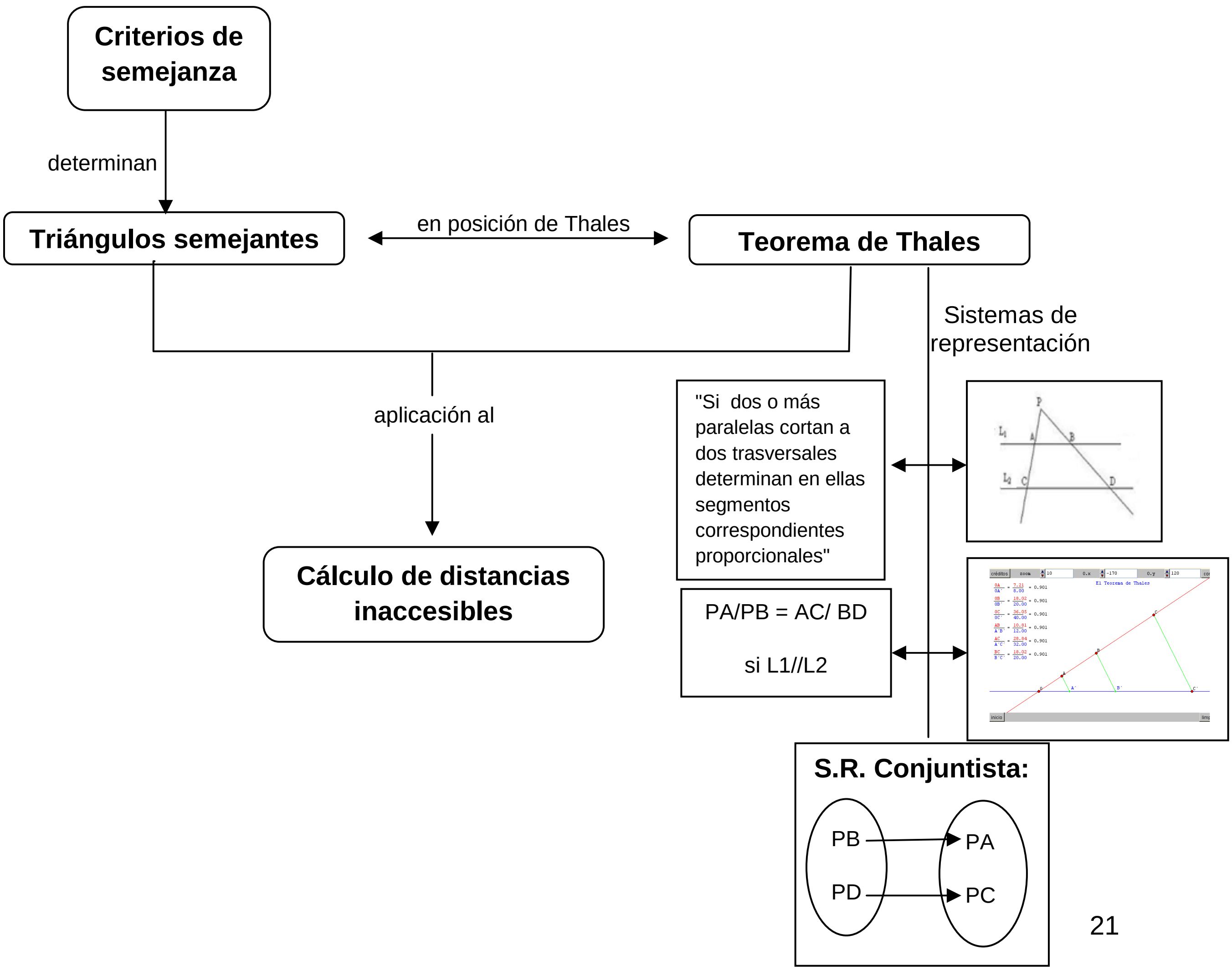


Figura 13

Los fenómenos que se han descrito anteriormente nos ayudan a calcular distancias de forma indirecta haciendo uso de la semejanza de triángulos. Estos cálculos pueden ser requeridos por diversas situaciones. Proviene de una situación científica la necesidad de medir la sombra de la Tierra. La necesidad de calcular el resto de distancias que aparecen descritas en el análisis fenomenológico viene determinada por situaciones laborales, esto es, son tareas propuestas por el centro de trabajo que implican conocimientos matemáticos para encontrar la respuesta buscada.

Mapa conceptual

A continuación se incluye un mapa conceptual donde se relacionan lo distintos conceptos del tema:



ANÁLISIS COGNITIVO

A continuación pasamos a describir cada uno de los organizadores en torno a los cuales se articula el análisis cognitivo:

Expectativas de aprendizaje: en esta parte se recoge las matemáticas que esperamos que aprendan los escolares acerca de un tema específico. Nos centraremos en dos niveles de las mismas:

- Objetivos específicos: son aquellos conceptos y destrezas que los alumnos deben conocer y manejar en relación a un tema concreto de matemáticas. Estos se desarrollan y observan mediante la actuación de los escolares al resolver tareas.

- Competencias matemáticas: el término competencia aparece en la definición que se da de currículo en los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas de Primaria y Secundaria el año 2006. Así, podemos leer el siguiente artículo:

  "Artículo 6. 1: A los efectos de lo dispuesto en esta Ley, se entiende por currículo el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente Ley." (MEC, 2006)

  Posteriormente, en el Real Decreto que establecen las enseñanzas mínimas de Enseñanza Secundaria (MEC, 2007) se ha definido la competencia matemática como la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

  La llegada de las competencias permite el paso de un modelo instrumental para el aprendizaje de las matemáticas a uno funcional. En el primer caso, los conceptos y procedimientos son herramientas que deben conocerse. En el segundo caso, el aprendizaje ocurre dentro de contextos y no sólo hay que conocer los instrumentos sino también su uso. En este caso, el sujeto utiliza las herramientas matemáticas ante tareas y problemas contextualizados.

  Cuando hablamos de competencias nos referimos a expectativas a medio y largo plazo que implican un desarrollo intelectual y social de los alumnos en diversos campos disciplinares. Esto permite que los escolares sean capaces de abordar tareas en situaciones abiertas y problemas no convencionales. Los objetivos específicos de cada tema ayudarán al desarrollo de estas competencias.

  El estudio PISA divide la competencia matemática en ocho componentes, o competencias PISA: Pensar y Razonar (PR), Argumentar y Justificar (AJ), Comunicar (C), Plantear y Resolver Problemas (RP), Representar (R), Utilizar Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico y las Operaciones (LS), Modelizar (M) y Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas (HT).

Si nos centramos en los contenidos que establece la *ORDEN ECI/2220/2007* relacionados con el tema de semejanza podemos leer que los alumnos de la opción A de matemáticas deben aplicar la semejanza de triángulos para obtener medidas indirectas (MEC, 2007).

Basándonos en esto, podemos establecer unos objetivos que son los que se esperan alcanzar a lo largo del transcurso del tema a estudiar. Además, como se ha dicho anteriormente, los objetivos de cada tema contribuyen al desarrollo de unas competencias matemáticas. Esa contribución se recoge en la siguiente tabla:

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
O1	Identificar triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza	X	X	X					
O2	Identificar triángulos semejantes utilizando el teorema de Thales	X	X	X					
O3	Calcular distancias inaccesibles en situaciones reales usando la semejanza de triángulos	X		X		X			

<u>Limitaciones del aprendizaje</u>: en esta parte se estudia aquello que puede ralentizar o frenar el aprendizaje de los alumnos. Así, se analizan los posibles errores y dificultades que pueden surgir durante el proceso de aprendizaje de los escolares. Las dificultades que presentan los alumnos se manifiestan en forma de errores en la realización de ciertas tareas.

En la siguiente tabla se relacionan los errores que pueden cometer los alumnos mientras realizan tareas y los objetivos específicos con los que están relacionados.

	Errores y dificultades	Objetivos asociados
E1	Mezclar los criterios de semejanza	O1
E2	Establecer de manera errónea la proporción que determina el teorema de Thales o la semejanza de triángulos	O3
E3	Aplicar el teorema de Thales cuando no se cumplen las hipótesis (por ejemplo, paralelismo)	O2, O3
E4	Dificultad para representar gráficamente una situación que se resolverá mediante semejanza	O1, O2, O3
E5	No seleccionar correctamente los datos para resolver un problema o utilizar datos innecesarios	O3
E6	Mala utilización o ausencia de las unidades de medida	O3

El análisis didáctico presentado se refiere a la parcela de la semejanza en la que se va a centrar la Unidad Didáctica que se desarrolla a continuación. En el anexo de este trabajo podemos encontrar un análisis didáctico completo del tema de *Semejanza de figuras* en el que se puede observar que la estructura conceptual, los sistemas de representación, la fenomenología, el mapa conceptual, los objetivos propuestos y los errores esperados que hemos mencionado anteriormente son sólo una parte del análisis didáctico completo del tema.

DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

Nos adentramos en la parte central de este trabajo fin de máster, esto es, en el desarrollo de la Unidad Didáctica. Podemos decir que una unidad didáctica es una unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos (Rico y Segovia, 2001).

Para la elaboración de la Unidad Didáctica es necesario realizar un estudio del tema (análisis de contenido) y de los alumnos a los que irá destinada (análisis cognitivo). Además, dicha elaboración requiere de una búsqueda de actividades de enseñanza (análisis de instrucción).

Como ya se ha comentado en otras ocasiones a lo largo de este trabajo, la unidad didáctica de *Semejanza* que ahora presentamos va destinada a los alumnos del cuarto curso de la educación secundaria obligatoria que cursen la opción A de matemáticas.

A continuación, estableceremos cuántas sesiones de clase serán destinadas al tema de estudio, junto con un breve resumen de las mismas. Se emplearán siete sesiones distribuidas como se detalla a continuación. La primera de ellas estará destinada a conocer los conocimientos previos que tienen los alumnos sobre el tema a estudiar. Hay que recordar, que la teoría matemática que se necesitará para seguir con aprovechamiento las sesiones propuestas debería ser conocida por los alumnos de cursos anteriores. Lo que haremos en la sesión inicial será recordar aquellos conceptos o términos que se vayan a utilizar. En las siguientes cinco sesiones nos dedicaremos al objetivo específico de nuestra unidad: *calcular distancias inaccesibles en situaciones reales usando la semejanza de triángulos*. Lo que haremos a lo largo de estas sesiones será introducir a los alumnos diferentes métodos que han sido usados a lo largo de la historia para calcular medidas de forma indirecta. Además de que los alumnos aprendan a usar estos métodos para el cálculo de distancias inaccesibles, pretenderemos que comprendan la utilidad de los mismos y la necesidad de disponer de distintos métodos según las circunstancias reales. De estas sesiones destacaría la última de todas, pues en ella los alumnos calculan las medidas de forma práctica, usando diferentes instrumentos y realizando todas las mediciones que sean necesarias. La última sesión del tema estará dedicada a la evaluación de los conocimientos adquiridos por los alumnos. Esta evaluación se completa con la observación diaria que haremos de ellos a lo largo de las diferentes sesiones.

Durante las sesiones de clase se intercalarán explicaciones del profesor, actividades o coloquios que se realizarán conjuntamente entre el profesor y los alumnos, actividades que realizarán los alumnos en clase y actividades que serán propuestas para que los alumnos las realicen en casa.

Las actividades que se proponen a lo largo de las sesiones tendrán una dificultad graduada. En un principio, proporcionaremos a los alumnos el esquema de la situación que se describe en el enunciado de la tarea y posteriormente se pretenderá que sean los alumnos los que esquematicen esa situación.

Cuando nos encontremos con actividades que se realicen conjuntamente entre los alumnos y el profesor, lo que se pretenderá es que los alumnos participen aportando una lluvia de ideas y que el profesor vaya guiando esas ideas hasta llegar a la solución buscada.

En el caso de las actividades que son propuestas para que las realicen los alumnos en clase se seguirá una dinámica de trabajo siempre similar. El profesor propondrá la actividad ante toda la clase y resolverá las dudas que puedan surgir en un primer momento. Después, los alumnos dispondrán de un tiempo para trabajar la actividad, que pueden hacerlo de forma individual o por parejas dependiendo del caso. Durante este tiempo, el profesor paseará por la clase resolviendo las dudas que surjan y guiando los razonamientos de los alumnos. Por último, será un alumno el que resuelva la actividad en la pizarra ante sus compañeros. En dicha resolución, se crearán debates entre el alumno que expone y sus compañeros para llegar conjuntamente a la solución más adecuada del problema. Además, el alumno deberá explicar el proceso que ha seguido en la resolución de la tarea y el uso que hace de la semejanza.

Las actividades que son propuestas para realizar en casa serán corregidas en la siguiente sesión por un alumno, quien explicará a sus compañeros los razonamientos seguidos hasta llegar a la solución.

Antes de comenzar con una descripción más detallada de cada una de las sesiones, presentamos un esquema general de ellas:

Sesión I:

- Introducimos el concepto de semejanza.
- Definimos la semejanza entre triángulos.
- Identificamos triángulos semejantes (mediante los criterios de semejanza o el teorema de Thales).
- Calculamos distancias desconocidas en triángulos ayudándonos de la semejanza.

Sesiones II, III y IV:

- Introducimos y describimos un método para calcular medidas de forma indirecta.
- Justificamos la validez del método.
- Aplicamos el método a datos concretos que vienen dados.

(Nota: este esquema se repite con los distintos métodos que se empleen en estas sesiones)

Sesión V:

- Describimos dos métodos para calcular distancias inaccesibles ayudándonos de dos instrumentos que han construido los alumnos.
- Justificamos la validez de esos métodos.
- Utilizamos esos instrumentos de forma práctica para calcular distancias inaccesibles.

Sesión VI:

- Llevamos a la práctica algunos de los métodos que se han descrito en las sesiones anteriores de clase.

En la unidad didáctica que proponemos a continuación, aparecen una serie de métodos para determinar distancias inaccesibles. El objetivo del principal del tema no es que los alumnos aprendan todos estos métodos, sino que sean capaces de resolver problemas prácticos aplicando razonamientos de semejanza. Por tanto, dependiendo del ritmo de aprendizaje que presenten los alumnos puede que la cantidad de métodos previstos resulte excesiva para las sesiones planificadas. En tal caso, optaremos por reducir el número de ellos.

A continuación, pasamos a describir cada una de las sesiones.

Sesión I: Introducción y recuerdo del concepto de semejanza

La primera sesión, correspondiente a la fase inicial, estará destinada a recordar todos los conceptos que se utilizarán a lo largo de estas sesiones para calcular medidas indirectas. Lo principal será identificar triángulos semejantes (ya sea con los criterios de semejanza o con el teorema de Thales) y calcular medidas en triángulos semejantes ayudándonos de la proporcionalidad de sus lados.

Para comenzar mostraremos a los alumnos un conjunto de figuras entre las cuales aparecen algunas que son semejantes entre sí y otras que aparecen deformadas. Se realizará un coloquio en el que los alumnos irán aportando ideas sobre que caracteriza a esas figuras, que cosas tienen en común y en que cosas se diferencian. Esto nos permitirá introducir el tema al que vamos a dedicar las siguientes sesiones y para comprobar los conocimientos que tienen los alumnos sobre el mismo.

Posteriormente, nos centraremos en los triángulos semejantes, que es la figura que usaremos para el cálculo de distancias inaccesibles. Comenzaremos con la definición de triángulos semejantes en la que se establece una relación entre los elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, esto es, diremos que dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos homólogos iguales y sus lados homólogos proporcionales.

Una vez recordada la definición de triángulos semejantes, los alumnos trabajarán por grupos una serie de actividades que se basarán en lo siguiente:

1. Identificar triángulos semejantes usando los criterios de semejanza.
2. Identificar triángulos semejantes que se encuentren en posición de Thales.
3. Calcular medidas desconocidas de triángulos semejantes.

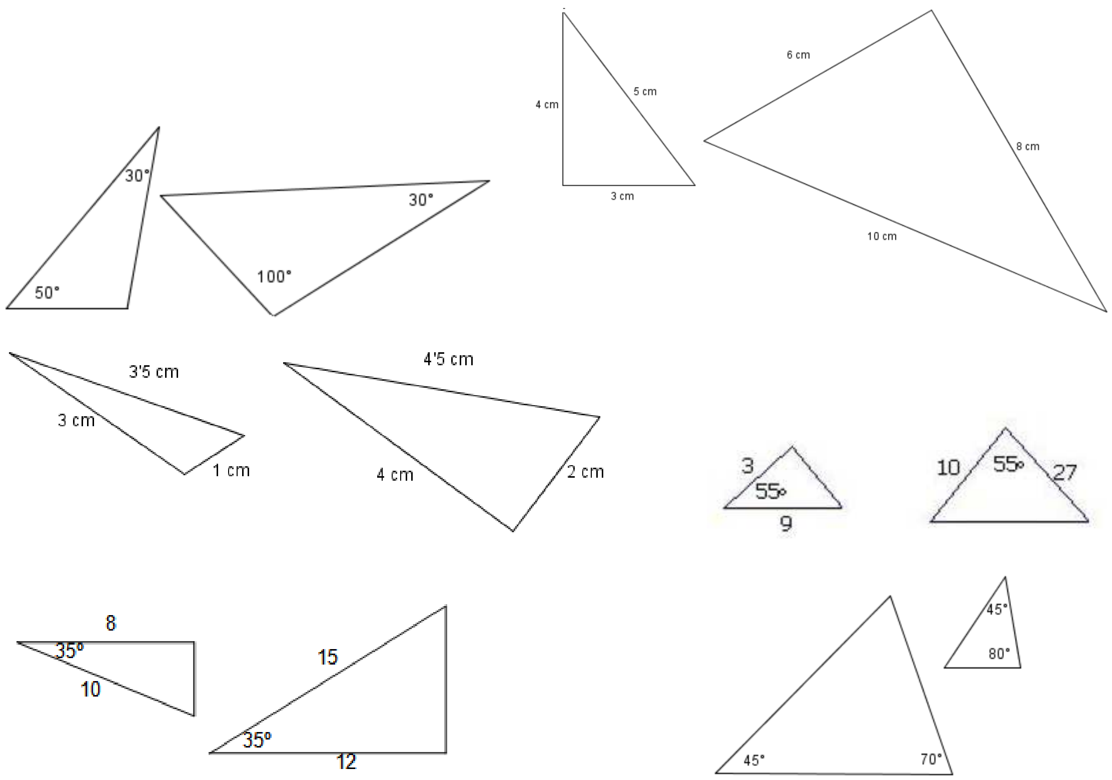
Cabe señalar, que el desarrollo de esta sesión será flexible ya que dependerá de la respuesta de los alumnos ante el tema a estudiar. Así, iremos planteando una serie de actividades que deben resolver los alumnos y que nos permitirán conocer de cerca lo que recuerdan de cursos anteriores.

Esta observación nos ayudará a decidir si tenemos que introducir de forma más o menos detallada los criterios de semejanza de triángulos y el teorema de Thales. Además, según los errores y dificultades que vayamos observando en los alumnos, también podemos hacer más hincapié en un tipo de actividad u otro e ir modificando la complejidad de las mismas.

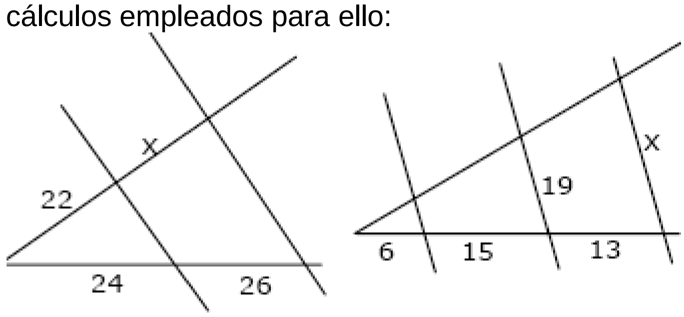
El trabajo en grupo permitirá que se produzca un aprendizaje entre pares, además de poder establecer diferentes ritmos de trabajo según los conocimientos previos que tengan los alumnos.

A continuación, se muestra unos ejemplos de las actividades que se propondrían en esta sesión:

Actividad 0.1: Identifica cuáles de las siguientes parejas está formada por triángulos semejantes:



Actividad 0.2: Halla el valor desconocido en cada uno de los siguientes casos justificando los cálculos empleados para ello:



Sesión II: Cálculo de distancias indirectas mediante la semejanza

En las siguientes sesiones, que corresponden a la fase de desarrollo, nos centraremos en la parte específica del tema, esto es, en el cálculo de medidas de forma indirecta. En cada sesión se describirán unos métodos que nos permitirán hacer los cálculos que deseamos, posteriormente pasaremos a justificar la validez de estos y por último nos dedicaremos a aplicarlos con datos concretos.

La segunda sesión la comenzaremos con la realización de la siguiente actividad, que consta de dos partes: en la primera los alumnos conocerán el método que Thales usó para medir la altura de la pirámide de Keops y se justificará dicho método, y en la segunda parte se usará este método para calcular una altura concreta.

Se planteará a los alumnos la pregunta: *"¿Cómo podemos medir la altura de una pirámide (o cualquier otro objeto) si no podemos acceder a la parte más alta de ésta?"*. El objetivo es que los alumnos aporten sus ideas para medir esa altura que nos resulta inaccesible. Los alumnos deben meterse en la problemática que se plantea y ver la necesidad que tenemos de encontrar un método que nos permita determinar esa altura. Una vez aportadas algunas ideas por los alumnos se pasará a contar el método usado por Thales para conseguir esa altura.

"¿Cómo midió Thales la altura de la pirámide de Keops? Para determinar esta altura, Thales se ayudó de un palo. Tumbó éste en la arena para así dejar marcada su longitud, y lo clavó verticalmente en uno de los extremos de la marca realizada. Esperó a que la sombra del palo tuviera la misma longitud que éste, es decir, esperó a que el extremo de la sombra coincidiera con el otro extremo de la marca en la arena. En ese preciso instante midió la sombra que proyectaba la pirámide. Esa medida era la altura que Thales deseaba calcular."

Conocido lo anterior, propondremos a los alumnos que realicen un esquema de la situación que se ha narrado y posteriormente pasamos a realizar ese esquema en la pizarra, para comprobar la solución. Lo que pretendemos con la siguiente actividad es que los alumnos justifiquen que el método que Thales usó era correcto. Por lo tanto, la actividad que realizaremos tendrá el siguiente enunciado:

<u>Actividad 1.1</u>: Identifica triángulos semejantes en el esquema anterior para justificar que el método empleado por Thales para medir la altura de la pirámide fue correcto.

Esta actividad consiste en que los alumnos sean capaces de identificar que los triángulos que se forman con cada objeto y la sombra de estos son semejantes (objetivo **O1**). Los alumnos deberán usar para ello el criterio que nos dice que basta con que dos triángulos tengan dos ángulos homólogos iguales para que sean semejantes.

Pero dicho criterio no se puede aplicar directamente ni pueden medir esos ángulos. Los alumnos deberán determinar los ángulos que son iguales pero sin llegar a saber cuanto miden. Por esto, está actividad se plantea para que los alumnos trabajen en **parejas** y traten de llegar conjuntamente a la solución del problema. Este trabajo en parejas les permitirá también enriquecerse con las aportaciones de su compañero y poder rebatir aquellos argumentos que no consideren correctos.

Además, esta actividad nos ayudará a detectar el siguiente error: mezclar los criterios de semejanza (**E1**).

Con la actividad propuesta se contribuye a las competencias de *Argumentar y justificar* y a la de *Comunicar*, ya que los alumnos deberán expresar de forma oral los argumentos que justifican sus respuestas. Se puede considerar que ambas competencias aparecen con una complejidad de tipo de conexión.

La segunda parte de la actividad consiste en que los alumnos apliquen el método anterior a casos particulares. Propondremos dos actividades que se resolverán usando este método pero que tienen una dificultad graduada, pues en la primera los alumnos disponen del esquema de la situación que se presenta y en la segunda no. Los alumnos trabajarán de forma **individual** estas actividades:

<u>Actividad 1.2</u>: Un edificio proyecta una sombra de 14 metros y una persona que mide 1’60 metros proyecta una sombra de 0’80 metros:

1. Identifica triángulos semejantes ayudándote del esquema que se muestra.
2. Determina la altura del edificio.

<u>Actividad 1.3</u>: Queremos calcular la altura de un árbol del patio. Para ello nos ayudaremos de un palo de 1 m de longitud. Sabemos que éste proyecta una sombra de 0,8 m en el mismo momento que la sombra del árbol mide 9 m.

1. Dibuja un esquema de la situación que se narra.
2. Identifica triángulos semejantes.
3. Calcula la altura del árbol.

En estas actividades los alumnos tendrán que identificar triángulos semejantes ayudándose de los criterios de semejanza y calcular distancias inaccesibles en situaciones reales usando la semejanza de triángulos (objetivos **O1** y **O3**).

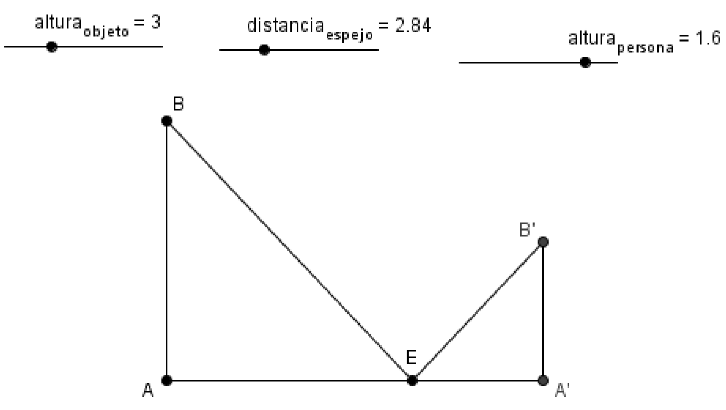
Se pondrán detectar los siguientes errores en los alumnos durante la resolución de las actividades: mezclar los criterios de semejanza, establecer de manera errónea la proporción que determina la semejanza de triángulos y mala utilización o ausencia de las unidades de medida (errores **E1**, **E2** y **E6**).

Además, con estas actividades se está contribuyendo a las competencias de *Pensar y razonar* (los alumnos deben identificar relaciones y aplicar procedimientos), *Comunicar* (los alumnos se expresan oralmente cuando se resuelve la actividad) y

Plantear y resolver problemas (los alumnos deben plantar y formular este problema matemático). Podemos decir que las dos primeras competencias aparecen a un nivel de conexión y la última aparece a un nivel de reproducción en la primera actividad y de conexión en la segunda.

En la segunda parte de esta sesión se estudiará el método de Euclides para el cálculo de alturas inaccesibles. Para que los alumnos comprendan la necesidad de poseer otro método distinto al de Thales comenzaremos con un pequeño coloquio en el que se planteará la siguiente pregunta*: "¿Qué pasa si intentamos calcular una altura inaccesible usando el método anterior y se nubla?".* Es obvio que en tal caso no se podrá aplicar el método visto en clase. Por lo tanto, enseñaremos a los alumnos otro método distinto que nos permita realizar ese cálculo.

Lo que haremos a continuación, será realizar a los alumnos la siguiente pregunta: "¿Cómo calcularíais una altura inaccesible ayudándoos de un espejo?" Tras escuchar las ideas que estos surgieran pasamos a explicar el método de Euclides. Para ello nos ayudaremos de un archivo del programa Geogebra en el que están definidos los triángulos que se forman al aplicar el método de Euclides. Estos triángulos están construidos con varios deslizadores que nos permiten cambiar la altura que resulta inaccesible, la distancia del espejo ese objeto y la altura del medidor.



	A	B	C
1	**3**	**1.6**	**1.88**
2	**2.84**	**1.51**	**1.88**
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			

Una vez conocido este método propondremos a los alumnos la siguiente actividad, que será trabajada por parejas:

<u>Actividad 2.1</u>: Identifica triángulos semejantes en el método de Euclides. Cambia los valores de la altura del objeto inaccesible y la distancia del espejo a éste y comprueba que se siguen manteniendo la semejanza.

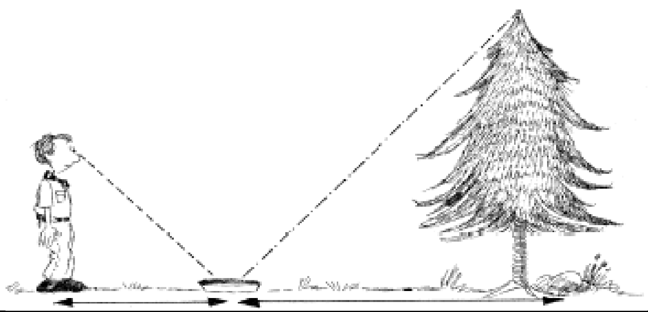
En esta parte, los alumnos deberán ser capaces de identificar triángulos semejantes (objetivo **O1**). Además, esta actividad nos ayudará a detectar los errores siguientes: mezclar los criterios de semejanza y dificultad para representar gráficamente una situación que se resolverá mediante semejanza (errores **E1** y **E4**).

Con esta actividad se contribuye a las competencias de *Argumentar y justificar* y a la de *Comunicar,* ya que los alumnos deberán expresar de forma oral los argumentos que justifican sus respuestas. Se puede considerar que ambas competencias aparecen con una complejidad de tipo de conexión.

A continuación, se propondrá dos actividades para aplicar este método. Al igual que ocurría en el caso anterior, propondremos una primera en la que daremos el esquema de la situación y otra en la que los alumnos deben ser capaces de dibujar ese esquema a partir del enunciado que se propone. Los alumnos deberán trabajarlas en casa de forma **individual**:

<u>Actividad 2.2</u>: Pabló usó un espejo para medir la altura de un árbol. Para ello colocó el espejo a 3 metros del árbol y se separó de éste 2 metros más hasta que pudo ver reflejado en el espejo la parte más alta del árbol. Además, sabemos que su altura hasta los ojos es de 1’60 metros.

1. Identifica triángulos semejantes en el esquema que se muestra.
2. Calcula la altura del árbol.
3. En el archivo de Geogebra, cambia el valor de los deslizadores para que se ajusten a los datos del problema y comprueba la solución obtenida.



<u>Actividad 2.3</u>: Necesitamos conocer la altura de nuestra casa. Para ello colocamos un espejo en el suelo a 15 metros de la base del edificio y tenemos que alejarnos 1,5 m hasta que vemos reflejado su punto más alto en el espejo. Representa la situación, identifica triángulos semejantes y calcula la altura buscada.

Aquí, los alumnos deberán determinar una altura inaccesible usando el método de Euclides y justificar la semejanza de triángulos que se usa en él (objetivos **O1** y **O3**).

Se pondrán detectar los siguientes errores en los alumnos durante la resolución de esta actividad: mezclar los criterios de semejanza, establecer de manera errónea la proporción que determina la semejanza de triángulos y mala utilización o ausencia de las unidades de medida (errores **E1**, **E2** y **E6**).

Esta parte de la actividad contribuye a las competencias de *Pensar y razonar* (los alumnos deben identificar relaciones y aplicar procedimientos), *Comunicar* (los alumnos se expresan oralmente cuando se resuelve la actividad) y *Plantear y resolver* *problemas* (los alumnos deben plantar y formular este problema matemático). Las dos primeras competencias aparecen a un nivel de conexión y la de *Plantear y resolver problemas* aparece a un nivel de reproducción en la primera actividad y de conexión en la segunda.

Así, la distribución temporal que se realiza en esta sesión será la que se recogen en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th colspan="2">Actuaciones</th><th>Tiempo estimado</th></tr>
<tr><td colspan="3">Método de Thales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ideas sugeridas por los alumnos para el cálculo de la altura</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">Método que empleó Thales para medir la altura buscada</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">Esquema de la situación que se produce</td><td>2 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad 1.1: Justificar el método</td><td rowspan="4">8 min</td></tr>
<tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>1 min</td></tr>
<tr><td>Los alumnos trabajan por parejas la actividad propuesta</td><td>4 min</td></tr>
<tr><td>Se comentan distintas respuestas de los alumnos</td><td>3 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad 1.2: Aplicación del método de Thales</td><td rowspan="4">7 min</td></tr>
<tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>1 min</td></tr>
<tr><td>Los alumnos trabajan individualmente la actividad propuesta</td><td>4 min</td></tr>
<tr><td>Se comentan distintas respuestas de los alumnos</td><td>2 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad 1.3: Aplicación del método de Thales</td><td rowspan="4">9 min</td></tr>
<tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>1 min</td></tr>
<tr><td>Los alumnos trabajan individualmente la actividad propuesta</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td>Se comentan distintas respuestas de los alumnos</td><td>3 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">Método de Euclides</td></tr>
<tr><td colspan="2">Coloquio inicial con los alumnos</td><td>3 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">Explicación del método de Euclides ayudándonos de Geogebra</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividad 2.1: Justificar el método</td><td rowspan="4">8 min</td></tr>
<tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>1 min</td></tr>
<tr><td>Los alumnos trabajan por parejas la actividad propuesta</td><td>4 min</td></tr>
<tr><td>Se comentan distintas respuestas de los alumnos</td><td>3 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">Actividades 2.2 y 2.3: Aplicación del método. Se proponen para casa</td><td>3 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">TOTAL:</td><td>55 min</td></tr>
</table>

Sesión III: Cálculo de distancias indirectas mediante la semejanza

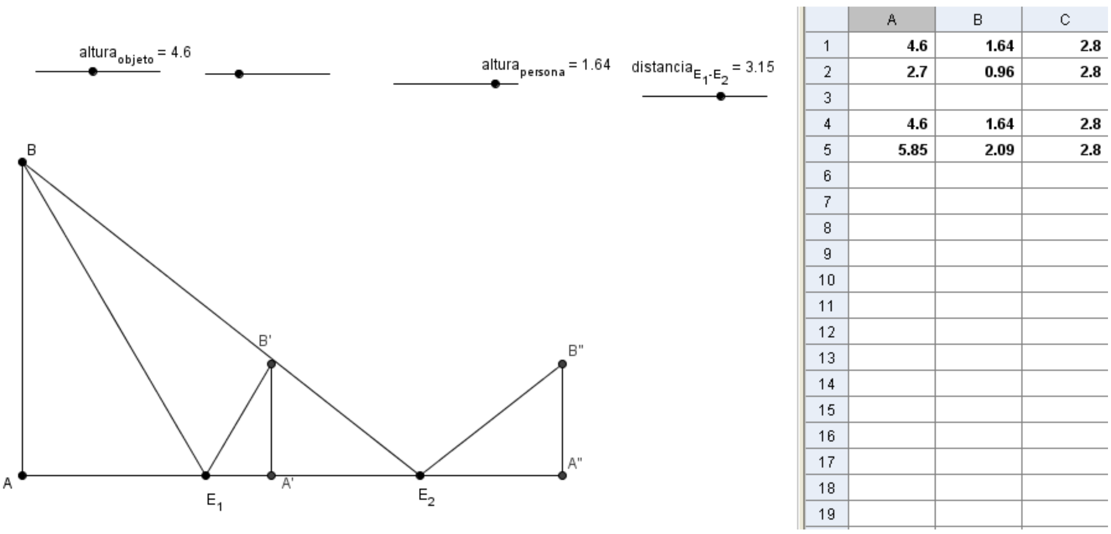
Esta sesión la comenzaremos recordando lo visto en la sesión anterior. Para ello haremos un esquema de los dos métodos con los que se trabajó, indicando las características de cada uno y la justificación que se hizo de su uso.

Una vez que se ha recordado lo visto anteriormente pasaremos a corregir las actividades propuestas en la sesión anterior. Serán algunos de los alumnos los que las realicen en la pizarra y sus compañeros los que los corrijan en caso necesario.

A continuación, pasaremos a describir el método de Gerberto de Aurillac. Lo que haremos en primer lugar será realizar un coloquio donde se plantearán las siguientes preguntas: *"¿Encuentras alguna limitación al método de Euclides? ¿Es mucho suponer que podemos medir la distancia que nos separa del objeto?"* Esta parte de la actividad es importante, pues los alumnos descubren la necesidad de conocer otro método para calcular alturas inaccesibles si las condiciones reales no nos permiten aplicar los conocidos.

Cuando los alumnos son conscientes de esa necesidad pasamos a plantearles la siguiente cuestión: *"Con la ayuda de dos espejos, ¿cómo podemos calcular la altura de un objeto cuyo pie es inaccesible?"*. Dejaremos un tiempo para que los alumnos busquen una posible solución y escucharemos las ideas que éstos aporten.

A continuación, se explicará en que consiste exactamente el método de Gerberto de Aurillac. Al igual que hicimos con el método de Euclides nos ayudaremos de un archivo de Geogebra donde aparecen representados los triángulos que se forman al aplicar este método. Además, estos triángulos estarán construidos con deslizadores que nos permiten cambiar la altura del objeto inaccesible, la altura del medidor, y la distancia entre los espejos.



Ayudándonos de esto, identificaremos triángulos semejantes en el esquema representado y comprobaremos que la semejanza se sigue mantenido si modificamos las condiciones iniciales del dibujo. Realizaremos conjuntamente un ejercicio con datos concretos y luego comprobaremos la solución con el Geogebra.

Cuando los alumnos ya conocen este método de medición se pasará a realizar un ejercicio donde se aplique el método descrito. Los alumnos trabajarán de forma **individual** los siguientes enunciados:

Actividad 3: Queremos calcular la altura de una iglesia que se encuentra al otro lado del río. Para ello nos ayudamos de dos espejos que colocaremos en el suelo a una distancia de 13 metros. Si nos colocamos ante el que está más cerca de la orilla tenemos que retirarnos 50 cm para poder ver reflejado en el espejo el punto más alto del campanario, en cambio, si nos colocamos ante el otro nos tenemos que separar 90 cm para ver ese mismo punto reflejado en él.
a) Representa la situación que se describe.
b) Identifica triángulos semejantes.
b) Calcula la altura del campanario sabiendo que la altura hasta los ojos del observador es de 1,6 m. Comprueba la solución obtenida con el archivo de Geogebra.

Al realizar esta actividad, los alumnos tendrán que identificar triángulos semejantes ayudándose de los criterios de semejanza y calcular distancias inaccesibles en situaciones reales usando la semejanza de triángulos (objetivos **O1** y **O3**).

Se pondrán detectar los siguientes errores en los alumnos durante la resolución de esta actividad: mezclar los criterios de semejanza, establecer de manera errónea la proporción que determina la semejanza de triángulos y mala utilización o ausencia de las unidades de medida (errores **E1**, **E2** y **E6**).

Con las actividades propuestas estamos contribuyendo a las competencias de *Pensar y razonar* (los alumnos deben identificar relaciones y aplicar procedimientos), *Comunicar* (los alumnos se expresan oralmente cuando se resuelve la actividad) y *Plantear y resolver problemas* (los alumnos deben plantar y formular este problema matemático). El nivel de complejidad al que aparecen dichas competencias es conexión.

La siguiente actividad consistirá en calcular la anchura de un rio. Los alumnos trabajarán en clase la siguiente actividad de forma **individual**:

Actividad 4: Queremos determinar la anchura de un río sin tener que cruzarlo. Para ello tomamos como referencia un punto (A) ubicado en la orilla contraria. Trazamos una línea imaginaria desde ese punto que sea perpendicular al cauce del río. Así determinaremos un punto en la orilla donde nos encontramos (B). Nos desplazamos de forma paralela al cauce del río 63 m (punto C). Desde esta posición caminamos 14 m de manera perpendicular al cauce del río, alejándonos de este. En ese punto (D) lanzamos la visual hasta el punto de referencia y comprobamos que ésta corta al camino que hemos andado paralelo al río a 43 m del punto B.
a) Representa la situación que se describe.
b) Calcula la anchura del río justificando el método usado.

En esta actividad los alumnos deben identificar triángulos semejantes utilizando el teorema de Thales y calcular distancias inaccesibles haciendo uso de la semejanza de triángulos (objetivos **O2** y **O3**).

Los errores que se pueden detectar con esta actividad son: establecer de manera errónea la proporción que determina el teorema de Thales, dificultad para representar gráficamente una situación que se resolverá mediante semejanza y mala utilización o ausencia de las unidades de medida (errores **E2**, **E4** y **E6**).

Hay que tener en cuenta que la correcta representación de la situación de esta actividad es muy importante para la resolución de la misma. Esta supone una complejidad mayor que en casos anteriores pues en estos se había representado un plano vertical de la misma y en esta actividad es necesario la representación de un plano horizontal para encontrar la solución.

Las competencias a las que se contribuyen con esta actividad son *Argumentar y justificar* (los alumnos deben elaborar argumentos que justifican sus respuestas), *Comunicar* (los alumnos se expresan oralmente cuando se resuelve la actividad) y *Plantear y resolver problemas* (los alumnos deben plantar y formular este problema matemático). El nivel de complejidad al que aparecen las competencias es de conexión.

En la siguiente tabla mostramos la distribución temporal esperada a lo largo de esta sesión:

<table>
<tr><th>Actuaciones</th><th>Tiempo estimado</th></tr>
<tr><td>Esquema de la sesión anterior</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td>Corrección del ejercicio propuesto en la sesión anterior</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">Método de Gerberto de Aurillac</td></tr>
<tr><td>Coloquio inicial con los alumnos para presentar el método</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td>Descripción del método con Geogebra y justificación del mismo</td><td>15 min</td></tr>
<tr><td>Actividad 3: Aplicación del método de Gerberto de Aurillac.<table>
<tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>2 min</td></tr>
<tr><td>Los alumnos trabajan la actividad propuesta</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td>Se comentan distintas respuestas de los alumnos</td><td>3 min</td></tr>
</table></td><td>10 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">Otros ejemplos</td></tr>
<tr><td>Actividad 4: Anchura del río.<table>
<tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>2 min</td></tr>
<tr><td>Los alumnos trabajan la actividad propuesta</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td>Se comentan distintas respuestas de los alumnos</td><td>3 min</td></tr>
</table></td><td>15 min</td></tr>
<tr><td>TOTAL:</td><td>55 min</td></tr>
</table>

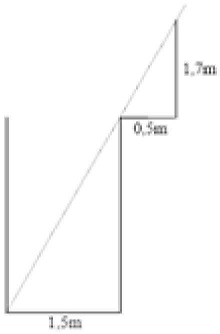
Sesión IV: Cálculo de distancias indirectas mediante la semejanza

La cuarta sesión quedará dividida en tres partes: en la primera de ellas se propondrán distintos ejercicios para calcular distancias inaccesibles que serán realizados por los alumnos y posteriormente corregidos en la pizarra, en la segunda parte los alumnos trabajarán por grupos un esquema que recopilará los métodos vistos en las sesiones anteriores y por último, los alumnos comenzarán con la construcción de dos instrumentos que nos ayudarán en la siguiente sesión para medir distancias inaccesibles en la realidad.

Las siguientes actividades serán planteadas para que los alumnos las trabajen en clase de forma **individual**:

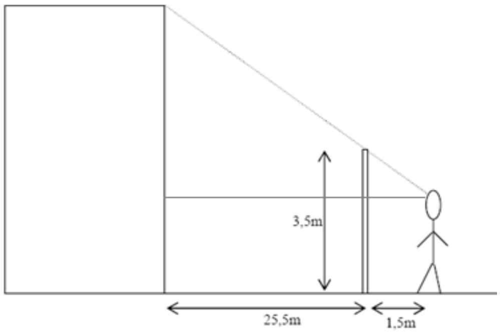
Actividad 5.1: El siguiente esquema representa la situación que se produce cuando queremos calcular la profundidad de un pozo. Se trata de un pozo de 1'5 metros de ancho del que tenemos que alejarnos 0'5 metros del borde para ver en la misma visual el borde del pozo y la esquina del fondo.

1. Identifica triángulos semejantes en la figura.
2. Calcula la profundidad del pozo.



Actividad 5.2: Una piscina tiene 2,25 m de ancho; situándonos a 150 cm del borde, desde una altura de 1,74 m, observamos que la visual une el borde de la piscina con la línea del fondo. Representa la situación que se describe en el problema, identifica triángulos semejantes y calcula la profundidad de la piscina.

Actividad 6.1: Para medir la altura de una casa Álvaro, cuya altura hasta los ojos es de 165 cm, se situó a 1'5 metros de la verja y tomó las medidas del dibujo. ¿Cuánto mide la casa? Identifica previamente triángulos semejantes.



Actividad 6.2: Quiero calcular la altura del árbol más alto del parque. A 22 m de él, hay otro árbol de 17,2 m. Si me coloco a 12 m de éste, puedo conseguir ver de manera alineada la copa de los dos árboles.

1. Representa esta situación en un esquema.
2. Identifica triángulos semejantes en ese esquema.
3. Calcula la altura del árbol, sabiendo que mi altura hasta los ojos es de 160 cm.

Lo que pretendemos con estas actividades es que los alumnos identifiquen triángulos semejantes, aplicando los criterios de semejanza o el teorema de Thales, y que posteriormente calculen una distancia que nos resulta inaccesible (objetivos **O1**, **O2** y **O3**).

Los errores que se pueden detectar con estas actividades son: mezclar los criterios de semejanza, establecer de manera errónea la proporción que determina el teorema de Thales o la semejanza de triángulos, dificultad para representar gráficamente una situación que se resolverá mediante semejanza y mala utilización o ausencia de las unidades de medida (errores **E1**, **E2**, **E4** y **E6**)

Las competencias a las que se contribuyen con esta actividad son *Argumentar y justificar* (los alumnos deben elaborar argumentos que justifican sus respuestas), *Comunicar* (los alumnos se expresan oralmente cuando se resuelve la actividad) y *Plantear y resolver problemas* (los alumnos deben plantar y formular este problema matemático). El nivel de complejidad al que aparecen las dos primeras competencias es de conexión. La competencia de *Plantear y resolver problemas* aparece a un nivel de reproducción en las actividades 5.1 y 6.1 y a un nivel de conexión en las otras dos.

A continuación, los alumnos trabajarán por **grupos** la siguiente actividad. El propósito de ella es que los escolares reúnan en una tabla los tres métodos vistos en las sesiones anteriores para el cálculo de alturas inaccesibles, las condiciones que deben cumplirse para poder aplicarlo, los instrumentos que son necesarios y un esquema de la situación que se produce. Para ello, cada alumno completará los datos de la siguiente tabla:

MÉTODO	INSTRUMENTOS	CONDICIONES PARA APLICARLO	ESQUEMA DE LA SITUACIÓN

Por último, los alumnos comenzarán con la construcción de dos instrumentos que se usarán en la siguiente sesión para medir alturas inaccesibles.

Instrumento 1: Este instrumento está formado por dos listones graduados que colocamos formando un ángulo recto. En el extremo libre del listón horizontal colocamos una varilla hueca. Esta estará articulada en este extremo y estará libre en el otro (figura 14). Además, debemos colocar un nivel en el brazo horizontal para garantizar la correcta posición del aparato durante su uso. Presentamos un esquema del instrumento que queremos construir:

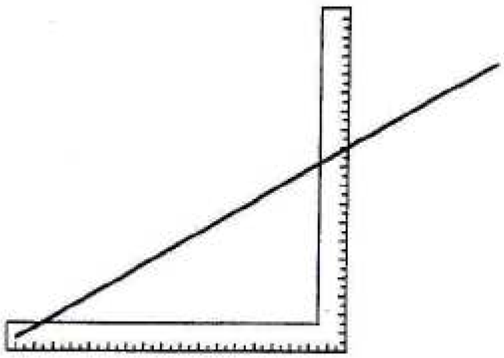


Figura 14

Instrumento 2: Para construir este instrumento tenemos que cortar un cuadrado de un material duro (por ejemplo, cartón duro o contrachapado), luego pegamos en uno de sus lados una pajita y, por último, pasamos un hilo por uno de los extremos de la pajita. En el extremo libre del hilo colocamos un objeto pesado (por ejemplo, una tuerca, botón o imperdible). Presentamos un esquema del instrumento que queremos construir (figura 15):

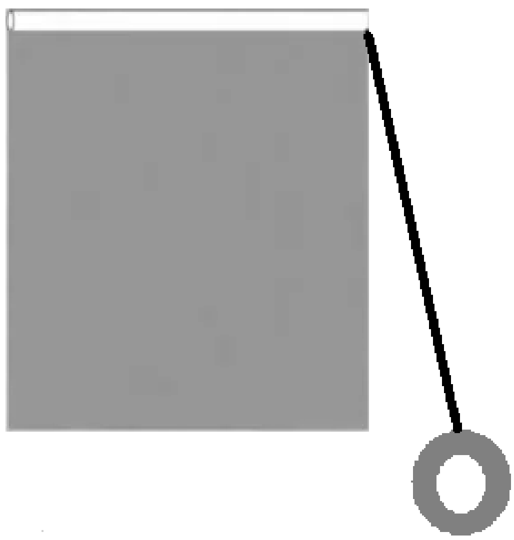


Figura 15

Los alumnos construirán estos instrumentos durante la sesión de clase, terminándolos en casa en caso de no tener suficiente tiempo para hacerlos. Resulta muy importante que los alumnos no olviden traer estos aparatos en la próxima sesión ya que toda ella va a estar dedicada a su uso.

La distribución temporal que se espera en esta sesión viene recogida en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>Actuaciones</th><th>Tiempo estimado</th></tr>
<tr><td>Actividad 5.1: Profundidad de un pozo
<table><tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>1 min</td></tr><tr><td>Los alumnos trabajan la actividad propuesta</td><td>4 min</td></tr><tr><td>Se resuelve el problema en la pizarra</td><td>2 min</td></tr></table></td><td>7 min</td></tr>
<tr><td>Actividad 5.2: Profundidad de una piscina
<table><tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>1 min</td></tr><tr><td>Los alumnos trabajan la actividad propuesta</td><td>6 min</td></tr><tr><td>Se resuelve el problema en la pizarra</td><td>3 min</td></tr></table></td><td>10 min</td></tr>
<tr><td>Actividad 6.1: Altura de una casa
<table><tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>1 min</td></tr><tr><td>Los alumnos trabajan la actividad propuesta</td><td>4 min</td></tr><tr><td>Se resuelve el problema en la pizarra</td><td>2 min</td></tr></table></td><td>7 min</td></tr>
<tr><td>Actividad 6.2: Altura de un árbol
<table><tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>1 min</td></tr><tr><td>Los alumnos trabajan la actividad propuesta</td><td>6 min</td></tr><tr><td>Se resuelve el problema en la pizarra</td><td>3 min</td></tr></table></td><td>10 min</td></tr>
<tr><td>Rellenar tabla resumen</td><td>11 min</td></tr>
<tr><td>Construcción de aparatos de medida</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td>TOTAL:</td><td>55 min</td></tr>
</table>

Sesión V: Construcción y uso de instrumentos para medir alturas inaccesibles.

El carácter práctico de este tema es muy importante debido a las características de los alumnos que cursan esta opción de las matemáticas. El objetivo del tema era calcular distancias indirectas haciendo uso de la semejanza. En sesiones anteriores hemos realizado distintos ejercicios en los que se calculaban alturas de edificios, profundidades de pozos, etc. usando los datos que nos proporciona el problema. De esta forma se han calculado, como se pretendía, medidas indirectas; pero sin duda, resultará mucho más significativo para los alumnos si son ellos mismos los que utilizan los instrumentos y toman las medidas necesarias para calcular lo que se pretende.

Por ello, en esta sesión de clase se usaran instrumentos que han sido construidos por los alumnos para calcular distancias inaccesibles. La actividad se realizará en la fase de cierre del tema para así poder utilizar distintos métodos de cálculo de alturas inaccesibles vistos durante todo el tema.

En esta sesión nos dedicaremos a que los alumnos conozcan la utilidad y el funcionamiento de los instrumentos que se construyeron en la sesión anterior. En primer lugar explicaremos cómo debemos usar estos aparatos para poder calcular distancias inaccesibles. Una vez que los alumnos saben como usarlos pasamos a describir la teoría matemática que nos permite realizar ese cálculo. Para ello, esquematizaremos en la pizarra la situación que se produce al realizar la medición.

La justificación del primer instrumento no debe resultar difícil para los alumnos ya que se trata de dos triángulos que se encuentran en la usual posición de Thales. Por tanto, esto se hará en común entre el profesor y todos los alumnos de la clase.

Para justificar el uso del segundo instrumento los alumnos trabajaran por **parejas**. En este caso, al usar este aparato se forman dos triángulos rectángulos semejantes. Estos no se encuentran en posición de Thales y los alumnos deberán identificar ángulos iguales para poder aplicar los criterios que nos permiten identificar triángulos semejantes.

<u>Actividad 7</u>: Dibuja el esquema de la situación que se produce cuando utilizamos el segundo instrumento para calcular alturas inaccesibles e identifica triángulos semejantes en ese esquema.

Con esta actividad los alumnos deberán identificar triángulos semejantes, aplicando los criterios de semejanza (objetivo **O1**). El principal error que se puede detectar con esta actividad es el siguiente: mezclar los criterios de semejanza y dificultad para representar gráficamente una situación que se resolverá mediante semejanza (errores **E1** y **E4**)

Con esta actividad se contribuye a las competencias de *Argumentar y justificar* y a la de *Comunicar*, ya que los alumnos deberán expresar de forma oral los argumentos que justifican sus respuestas. Se puede considerar que ambas competencias aparecen con una complejidad de tipo de conexión.

La finalidad de la siguiente parte de la sesión es que los alumnos se familiaricen con el uso de estos instrumentos. Para ello, los alumnos trabajarán por **parejas** la siguiente actividad:

Actividad 8: Una vez que ya sabemos cómo utilizar estos dos instrumentos para calcular alturas inaccesibles vamos a obtener alguna medida para familiarizarnos con su uso. Un alumno de cada pareja se encargará de tomar las medidas necesarias una vez que su compañero es capaz de ver el punto más alto de la pared de la clase ayudándose de estos instrumentos. Luego os cambiareis los papeles. Por último, debéis ayudaros de estas medidas para calcular cómo es de alta la clase y comparar los resultados que ha obtenido cada uno.

Con esta actividad se pretende contribuir al objetivo que: calcular distancias inaccesibles en situaciones reales usando la semejanza de triángulos (objetivo **O3**). Los principales errores que se pueden detectar con esta actividad son: establecer de manera errónea la proporción que determina el teorema de Thales o la semejanza de triángulos y mala utilización o ausencia de las unidades de medida (errores **E2** y **E6**)

Esta actividad contribuye a las competencias de *Pensar y razonar* (los alumnos deben identificar relaciones y aplicar procedimientos), *Comunicar* (los alumnos se expresan oralmente cuando se resuelve la actividad) y *Plantear y resolver problemas* (los alumnos deben plantar y formular este problema matemático). El nivel de complejidad al que aparecen dichas competencias es conexión.

De esta forma, la disposición temporal esperada es a lo largo de la sesión es la siguiente:

<table>
<tr><th>Actuaciones</th><th>Tiempo estimado</th></tr>
<tr><td>Uso de los instrumentos de medida construidos y esquema de la situación que se produce</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td>Justificación del uso del instrumento número 1</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td>Actividad 7: Justificación del uso del instrumento número 2
<table>
<tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>2 min</td></tr>
<tr><td>Los alumnos trabajan la actividad propuesta</td><td>5 min</td></tr>
<tr><td>Se resuelve el problema en la pizarra</td><td>3 min</td></tr>
</table></td><td>10 min</td></tr>
<tr><td>Actividad 8: Me familiarizo con los instrumentos construidos
<table>
<tr><td>Presentamos la actividad y resolvemos las posibles dudas</td><td>2 min</td></tr>
<tr><td>Los alumnos trabajan la actividad propuesta</td><td>20 min</td></tr>
<tr><td>Se comparan los resultados obtenidos</td><td>8 min</td></tr>
</table></td><td>30 min</td></tr>
<tr><td>TOTAL:</td><td>55 min</td></tr>
</table>

Sesión VI: Medición real de alturas inaccesibles.

Durante el transcurso de esta sesión los alumnos usarán los instrumentos con los que se ha estado trabajado en las sesiones anteriores para calcular alturas inaccesibles que se encuentren una plaza elegida de la ciudad donde acudiremos con los alumnos. Esta sesión corresponde a la fase de cierre, donde se sintetizan los principales métodos vistos durante las últimas sesiones para calcular alturas inaccesibles. Los alumnos trabajarán por **parejas** y cada una de ellas estará encargada de medir una altura concreta: ayuntamiento, árbol, campanario de la iglesia, etc.

<u>Actividad 9</u>: Utiliza los instrumentos construidos en clase para calcular la altura del objeto que corresponde a tu pareja. Utiliza otros métodos para calcular esa misma altura: método de Thales, método de Euclides y método de Gerberto de Aurillac.

A la hora de aplicar los métodos descritos durante las sesiones de clase tomaremos las siguientes medidas para que las condiciones reales sean lo más próximas posibles a las teóricas:

- Objeto a medir: se elegirá un objeto que se suponga vertical, por ejemplo una farola o un edificio. También trataremos que sea fácil de determinar el punto más alto del mismo.
- Método de Thales: para garantizar la verticalidad del objeto auxiliar usaremos un nivel.
- Métodos de Euclides y Gerberto de Aurillac: marcaremos un punto, mediante la intersección de dos rectas, en los espejos que es donde tendremos que ver reflejado el objeto a medir.

Con esta actividad los alumnos deben calcular una distancia que nos resulta inaccesible ayudándose de métodos que han sido descritos y justificados en clase (objetivo **O3**). Durante su desarrollo pueden detectarse los errores siguientes: establecer de manera errónea la proporción que determina el teorema de Thales o la semejanza de triángulos y mala utilización o ausencia de las unidades de medida (errores **E2** y **E6**)

Por último, los alumnos deberán comparar las medidas obtenidas con los distintos métodos y realizar esa misma comparación con otras parejas que hayan realizado la medición del mismo objeto.

Sesión VII: Comprobación de aprendizajes adquiridos.

La última sesión que dedicaremos al tema de *Semejanza* estará destinada a realizar una prueba escrita que nos servirá para comprobar los aprendizajes adquiridos por los alumnos a lo largo de las últimas sesiones.

A continuación, proponemos un modelo de examen para este tema:

Elige al menos dos de los siguientes ejercicios y resuélvelos:

<u>Ejercicio 1</u>: Analiza la situación que se describe a continuación y responde las preguntas que se plantean:

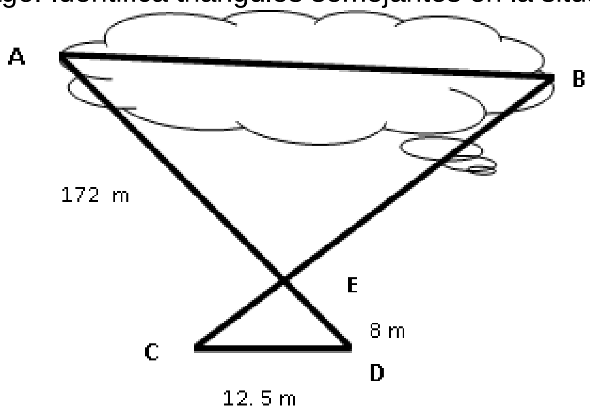
Pretendemos medir la altura de una torreta de electricidad. Para ello, tendremos que tener en cuenta que ésta se encuentra al otro lado de un río que no podemos cruzar.

a) Decide, ayudándote del esquema realizado en clase, cuál de los métodos vistos en clase para calcular distancias inaccesibles podemos utilizar para obtener la altura deseada y justifica tu respuesta.

b) Indica los materiales que necesitas para aplicar el método elegido.

c) Dibuja un esquema de la situación que se produce e identifica los triángulos semejantes que se forman.

<u>Ejercicio 2</u>: En el siguiente dibujo, el segmento AB representa la longitud mayor de un lago, que no podemos medir directamente. Nos colocamos en un punto E desde donde son visibles los extremos del segmento anterior y trazamos un segmento CD paralelo a AB. Ayudándote de la información que aparece en el dibujo, calcula la longitud mayor del lago. Identifica triángulos semejantes en la situación que se narra.



<u>Ejercicio 3</u>: Para calcular la altura de un edificio nos ayudamos de su sombra, que mide 49 m, y de la sombra de una estaca de 2 m que mide 1´25 m. Dibuja un esquema de la situación que se produce, identifica triángulos semejantes y calcula la altura de ese edificio.

<u>Ejercicio 4</u>: Para medir la altura de una montaña, Pedro, de 182 cm de altura, se sitúa a 2,3 m de un árbol de 3,32 m situado entre él y la montaña de forma que su copa, la cima de dicha montaña y los ojos de Pedro se encuentran en línea. Sabiendo que Pedro se encuentra a 138 m del pie de la montaña:

a) Haz un esquema de la situación que se describe.

b) Identifica triángulos semejantes.

c) Calcula la altura de la montaña.

Para la realización de la primera actividad que se ha propuesto, los alumnos podrán consultar el esquema realizado en clase en sesiones anteriores y que recoge un resumen con los métodos vistos en clase y las características de los mismos. El hecho de que los alumnos dispongan de ese esquema para la realización del ejercicio se debe a que el objetivo del tema no es que los alumnos memoricen una serie de métodos, sino que lo que se pretende es que **apliquen** la semejanza para el cálculo de distancias inaccesibles.

EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES ADQUIRIDOS

La evaluación comienza por la recogida de datos sobre el progreso que realizan los alumnos durante el estudio del tema. Para ello podemos aplicar diferentes técnicas como pueden ser tareas escritas, exámenes, observación de debates o trabajos en grupos, entre otras.

Una vez que disponemos de esta información, ésta nos debe ayudar a tomar posibles decisiones para mejorar el sistema, ya sea en su conjunto o en alguno de sus componentes. Así, se pueden tomar decisiones sobre el proceso, los individuos o el sistema educativo. Es decir, debemos decidir cuáles son los métodos que nos ayudan a mejorar los resultados, identificar las necesidades de los alumnos para así planificar la instrucción y juzgar la calidad del sistema, de los profesores, etc.

A lo largo de esta unidad didáctica emplearemos distintas técnicas que nos permitirán recoger datos sobre el proceso de aprendizaje de los alumnos y los conocimientos adquiridos por estos. Estas técnicas pasamos a describirlas a continuación:

- <u>Observación de la actitud del alumno en clase</u>: se valorará su comportamiento, participación y trabajo diario (10%)

- <u>Cuaderno de trabajo</u>: se realizará un seguimiento de las actividades que los alumnos realizan, así como de los razonamientos empleados en las mismas (15%)

- <u>Esquema de los métodos</u>: en la sesión IV los alumnos rellenarán una tabla donde se recogerán los distintos métodos vistos en clase (Thales, Euclides y Gerberto de Aurillac), los instrumentos que se emplean en cada uno de ellos, las condiciones que deben cumplirse para poder aplicarlos y un esquema de los mismos. Esta actividad será realizada por grupos y se tendrá en cuenta para la evaluación de los alumnos (15%)

- <u>Trabajo en parejas</u>: en la sesión VI los alumnos aplicarán, en la realidad, diferentes métodos vistos en clase. La observación de su trabajo junto con la entrega por escrito de los ejercicios nos servirá para obtener información importante para la evaluación (15%)

- <u>Prueba escrita</u>: la prueba realizada al final de la unidad nos ayudará a recoger información sobre los conocimientos adquiridos por los alumnos (45%)

La nota final del tema vendrá determinada por la ponderación que se indica entre paréntesis en cada una de las técnicas empleadas.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Para tener garantizado el derecho a la educación de todos los alumnos nos vemos obligados a planificar unas actuaciones que nos permitan atender a la diversidad. Aunque estas actuaciones dependerán en gran medida de la realidad que nos encontremos en cada caso, a continuación se describen unas posibles actuaciones según estas sean de refuerzo o de ampliación.

Para aquellos alumnos que presenten ciertas dificultades de aprendizaje podemos tomar diferentes medidas de actuación entre las que destacamos:

- Dedicar más tiempo a recordar los conceptos que serán necesarios para seguir con aprovechamiento el desarrollo del tema o aumentar el número de actividades propuestas en la sesión inicial. Esta parte es muy importante, pues si se crea una buena base en un principio podemos conseguir mayores logros en la parte práctica de la unidad.

- Reducir el número de métodos utilizados para determinar medidas indirectas. De esta forma, aunque se estudien menos métodos los alumnos dispondrán de mayor tiempo para asimilar los razonamientos seguidos en cada uno de ellos.

- Presentar las actividades con un esquema de la situación que se está describiendo. A la hora de aplicar los métodos vistos en clase proponíamos actividades con una dificultad graduada: en un primer momento los alumnos disponían del esquema que se describe en la actividad y en las tareas siguientes son los alumnos los que deben realizar este esquema. Por tanto, una medida que se puede tomar como refuerzo es facilitar ese esquema en todas las actividades.

Para atender a aquellos alumnos que presentan un ritmo de aprendizaje mayor que el resto de sus compañeros, propondremos algunas actividades relacionadas con el tema que sean de una complejidad mayor, como la siguiente:

<u>Actividad de ampliación</u>: En un texto antiguo de agrimensura se lee el siguiente método para medir la anchura de un río AB con bastones desiguales:

> *"Clávese bien a plomo el bastón menor (EB) en la orilla B, y el otro CD váyase separándose hasta que su parte superior D y el punto E del otro se vea el punto A, y mídase la distancia CB, que sea de 32 pies. Dígase luego la diferencia de las alturas de los dos bastones, que sea de 2 pies, es a la altura del menor EB, que sea de 4 pies, como la distancia CB, que son 32 pies, es a la anchura del río, es decir, 2/4 es igual a 32/AB, de donde AB tiene 64 pies."*

Explica el fundamento matemático del procedimiento, empleando un dibujo.

CONCLUSIONES

El presente trabajo supone el punto final del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Para la realización de este trabajo he tenido en cuenta la formación que las diferentes materias me han aportado, así como la experiencia conseguida en la realización de las prácticas en el centro educativo.

Las materias genéricas han proporcionado información sobre los alumnos y sus formas de aprender (Aprendizaje y desarrollo de la personalidad) y las específicas han sido útiles para la realización del estudio previo del tema, el establecimiento de los objetivos específicos y el diseño de las actividades de aprendizaje (Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas). Por último, también ha sido importante lo aportado por la asignatura *Atención a los estudiantes con necesidades especiales* (módulo de libre disposición) para comprender la necesidad de establecer actuaciones que nos permitan atender a la diversidad del alumnado.

Las prácticas realizadas en el centro educativo también han ayudado en la realización de este trabajo, principalmente la asistencia al grupo de la opción A del último curso de la educación secundaria, pues es a ese curso al que va dirigida la unidad didáctica. De esta asistencia podría destacar las siguientes características:

- Los alumnos de este curso no tienen mucha motivación por la asignatura de matemáticas. Esto se debe a que la mayoría de estos alumnos no seguirán con estudios superiores. Por ello, resulta importante que les mostremos la parte más práctica de la asignatura. Así, en esta unidad nos hemos centrado en la aplicación de la semejanza y hemos intentado relacionar este concepto matemático con situaciones reales donde nos es útil su aplicación.

- La participación de los alumnos es muy desigual y suelen ser siempre los mismos alumnos los que se muestran voluntarios para resolver actividades o los que preguntan sus dudas. La realización de algunas actividades en parejas o grupos ayuda a que esos alumnos menos participativos interactúen con sus pares y, así enriquezcan sus razonamientos.

- En cualquier grupo es usual que los alumnos presenten características diversas y con ello, distintos niveles de aprendizaje. Por tanto, es imprescindible tener en cuenta este hecho y contar con diferentes actuaciones que nos permitan atender a la diversidad.

Cada una de las partes que han aparecido a lo largo del documento, han sido importantes para la planificación de la Unidad Didáctica que se ha desarrollado anteriormente. La fundamentación teórica ha servido para establecer los contenidos mínimos que deben aparecer en el tema seleccionado y los criterios de evaluación a tener en cuenta; la historia del tema permite conocer más acerca del tema y su evolución a lo largo de los tiempos; y el análisis didáctico permite establecer la relación entre los conceptos del tema, así como los objetivos que se pretenden alcanzar y los errores que se esperan que surjan.

Pero debido al carácter práctico que tiene este tema en el curso que hemos seleccionado, la fenomenología ha sido un punto clave en la elaboración de las sesiones propuestas. Hemos pretendido que los alumnos de este curso (opción A de cuarto de educación secundaria obligatoria) utilicen la semejanza de triángulos para el cálculo de distancias inaccesibles. Por tanto, el estudio de la fenomenología nos ha permitido conocer distintos métodos que nos permiten calcular esas medidas de forma indirecta.

Como ya he mencionado antes, las materias teóricas que han formado parte del máster han sido de utilidad para la realización de la Unidad Didáctica, pero para hubiera sido interesante que hubiéramos podido llevar ésta a cabo. De ello obtendríamos información sobre los verdaderos errores que cometen los alumnos que se enfrentan a este tema o las dificultades que presentan. Esa práctica también hubiera permitido comprobar que los tiempos previstos para cada una de las actividades pueden respetarse.

BIBLIOGRAFÍA

Arese,M.C., Buendía, M.G., Cazenave, P., Escutía, P., Pereira, D. & Sánchez, M. (2003). Aprendo geometría con el Alcázar de Sevilla. *Epsilon*, 57, 21-34

Blanco, L. & Luengo, R. (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza*. Madrid: Síntesis

Boyer, C.B. (2001). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial, S.A.

Escudero, I. (2006). Algunos organizadores para analizar la semejanza como objeto de enseñanza/aprendizaje. *Epsilon 64*, 21-34

Esteban, M. & Ibañes, M. & Ortega, T. (1998). *Trigonometría.* Madrid: Síntesis

Segovia, I. & Rico, L. (2001). Unidades Didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.): *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis

http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_rhind.htm

http://www.antecedentes.net/antecedentes-geometria.html (Página sobre los antecedentes de la geometría)

http://divulgamat.ehu.es (Página de Divulgamat, blog de matemática divulgativa de la Real Sociedad Matemática Española)

http://www.soarem.org.ar/Documentos/31%20Moriena.pdf (Página de la Sociedad Argentina de Educación Matemática)

http://funes.uniandes.edu.co/529/1/RicoL07-2777.PDF (Repositorio funes, de la Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia)

MEC (2007) *ORDEN ECI/2220/*2007 se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.

OECD (2005) *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo de mañana*. Madrid. Santillana.

ANEXO: ANÁLISIS DIDÁCTICO

Análisis de contenido

Estructura conceptual

De un estudio detallado del tema *Semejanza de figuras* puede establecerse el conocimiento conceptual y el procedimental del tema de la siguiente forma:

Conocimiento conceptual

Hechos

Términos

- Magnitud, medida, cantidad, longitud
- Cociente
- Proporcionalidad numérica
- Vértice
- Ángulo
- Lado, segmento
- Lados y ángulos homólogos
- Polígono
- Perímetro, área, volumen
- Recta
- Paralelismo

Notación

- Unidades de medida: unidad cualquiera (u), unidades propias del sistema métrico decimal
- Cociente: a/b ó a:b
- Proporción: a/b = c/d ó a:b = c:d
- Vértices: A, B, C,...
- Ángulos: Â,...
- Lados: a, b, c,…, AB, BC,…
- Polígonos: ABC, ABCD,...
- Perímetro, área y volumen:
  P, A, V.
- Escala: 1:100
- Polígonos semejantes:
  ABC ~ A'B'C'
- Razón: k
- Rectas: r, s,…
- Paralelismo: ||

Convenios

- Los lados se denotan por: a, b, c…
- Los vértices se denotan por: A, B, C,…
- Los ángulo se denotan por: Â,…
- Los segmentos se denotan por: AB, AC…
- Los polígonos se denotan ABC, ABCD…
- En una razón el numerador se llama antecedente y el denominador consecuente.
- En una proporción hay cuatro términos a:b = c:d, a y d se llaman extremos y los otros medios.
- El perímetro se denota por P, el área por A y el volumen por V.
- a/b se lee como "*a* es a *b*".
- El símbolo ~ denota la semejanza de figuras.
- La razón de semejanza recibe el nombre de escala en planos, mapas y maquetas.
- 1:100 se lee "uno cien".

- Para una escala 1:100 la razón de semejanza es 1/100.

Resultados

- Los ángulos de un polígono convexo de n lados suman 180(n-2)º.
- Si la razón de semejanza entre figuras, k, es mayor que 1, la figura se amplía. Si es menor que 1, se reduce.
- Los segmentos homólogos de figuras semejantes son proporcionales.
- Los ángulos homólogos de figuras semejantes son iguales.
- Las semejanzas llevan puntos alineados en puntos alineados.
- Las semejanzas llevan segmentos en segmentos.
- Las semejanzas conservan los ángulos.
- El ángulo con el que corta una recta a dos paralelas es el mismo.
- La razón de la semejanza producto es igual al producto de las razones de las semejanzas.

<u>Conceptos</u>

- Razón
- Semejanza
- Escala (gráfica y numérica)
- Cuarto, tercero y media proporcionalidad.
- Figuras y polígonos semejantes
- Triángulos en posición de Thales
- Criterios de semejanza entre triángulos
- Homotecia

<u>Estructura conceptual</u>

- Teorema de Thales
- Teorema del cateto
- Teorema de la altura
- Teorema de Pitágoras
- Las semejanzas son un grupo equiforme
- Las magnitudes escalares constituyen un semigrupo conmutativo con elemento neutro totalmente ordenado

Conocimiento procedimental

<u>Destrezas</u>

- Obtener relaciones de igualdad y desigualdad de segmentos.
- Medidas de longitudes, amplitudes y superficies.
- Operar con medidas de segmentos.
- Operar con medidas de ángulos.
- Construir ángulos.
- Identificar lados proporcionales en polígonos.
- Construcción de segmentos proporcionales.
- Dividir un polígono en triángulos.
- Reconocer dos magnitudes proporcionales.
- Reconocer series de números proporcionales.
- Pasar de una proporcionalidad de magnitudes a una proporcionalidad numérica.

Razonamientos

- Deductivo:
  - o Identificar polígonos semejantes.
  - o Aplicar los criterios de semejanza.
  - o Cálculo de la media, tercero y cuarto proporcional.
  - o Comprobar que en un triángulo rectángulo, la altura trazada sobre la hipotenusa es media proporcional entre las dos partes en que divide a ésta.

- Inductivo:
  - o Establecer la relación entre las razones de perímetro, área y volumen de polígonos en relación de semejanza.
  - o Establecer la relación entre las alturas de polígonos semejantes (triángulo, paralelogramo, trapecio).

- Figurativo:
  - o Representación a escala de un objeto de la realidad.
  - o Dibujar un polígono semejante a otro dada la razón.

- Cálculo de la razón de semejanza entre figuras.

- Obtener la escala.

- Cálculo de distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando el concepto de escala.

Estrategias

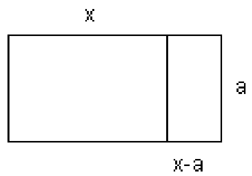
- Construcción de polígonos semejantes.
- Cálculo de la longitud de un segmento en triángulos en posición de Thales.
- Cálculo de distancias y alturas inaccesibles usando el teorema de Thales.
- Desarrollar la capacidad de construcción gráfica que se deriva del teorema de Thales.
  - o Cálculo gráfico de medio, tercero y cuarto proporcional.
  - o Representación en la recta real de números racionales.
  - o Dividir un segmento en partes iguales y en partes proporcionales.

Sistemas de representación

En este apartado haremos referencia a los sistemas de representación que aparecen en el tema que estamos estudiando. Estos sistemas pueden ser de los siguientes tipos: simbólico, verbal, tabular, gráfico y tecnológico. Pasamos a describir cada uno de ellos:

<u>Simbólico</u>: es aquel en el que se utilizan escrituras matemáticas en las que aparecen números, letras, signos y operaciones. Dentro de tema podemos encontrar los siguientes casos particulares:

- Para representar la razón: a/b
- Para representar la proporcionalidad de segmentos: a/b = c/d
- Para representar la semejanza existente entre dos figuras:
- Algebraico: en la traducción de un problema geométrico a una ecuación. Por ejemplo:



$$\frac{x}{a} = \frac{a}{x-a}$$

$$a^2 - ax - x^2 = 0$$

- Numérico:
    - Para representar la razón: K= 1,6
    - Para representar la proporcionalidad se segmentos: 2/4 = 6/12

Verbal: son las manifestaciones que hacemos de cualquier concepto matemático a través de nuestro lenguaje natural:

- Para representar la semejanza entre dos figuras: "*Figuras semejantes*"
- Para representar la escala: "*Una unidad de medida en el mapa corresponde a 100 unidades en la realidad*" o "*Uno cien*"
- Para representar la proporcionalidad entre segmentos: " *a es a b como c es a d*"
- Para representar la razón: "*a sobre b*"

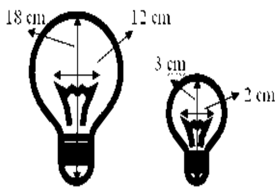
Tabular: este sistema nos permite comparar medidas en distintas figuras

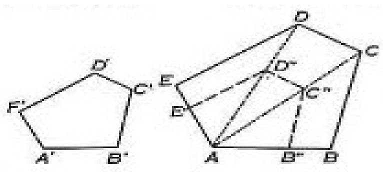
- Para representar la proporcionalidad entre lados:

Lados polígono 1	Lados polígono 2	Lados polígono 3
2 cm	4 cm	6 cm
1'3 cm	2'6 cm	3'9 cm

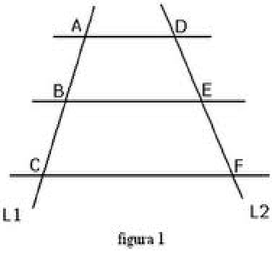
Gráfico: este sistema de representación se centra en la imagen visual.

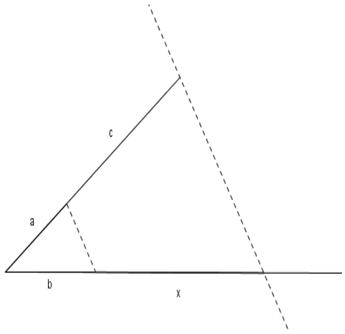
- Para representar figuras semejantes:



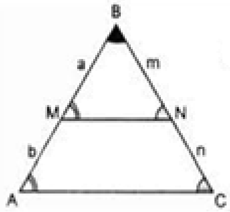


- Para representar el Teorema de Thales:

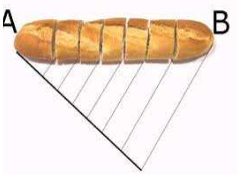




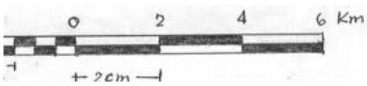
- Para representar triángulos en posición de Thales:



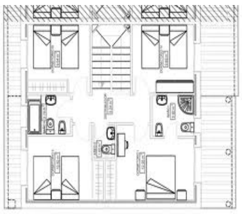
- Para representar la división de un segmento en partes iguales:



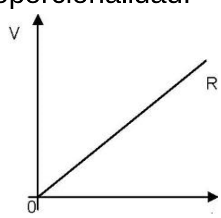
- Para representar la escala:



- Para representar planos, mapas y maquetas:



- Para representar la proporcionalidad:



Tecnológico: podemos usar distintos programas dinámicos que además de usar un sistema de representación gráfico nos permiten cambiar las condiciones de la figura y así comprobar que se mantienen ciertas propiedades.

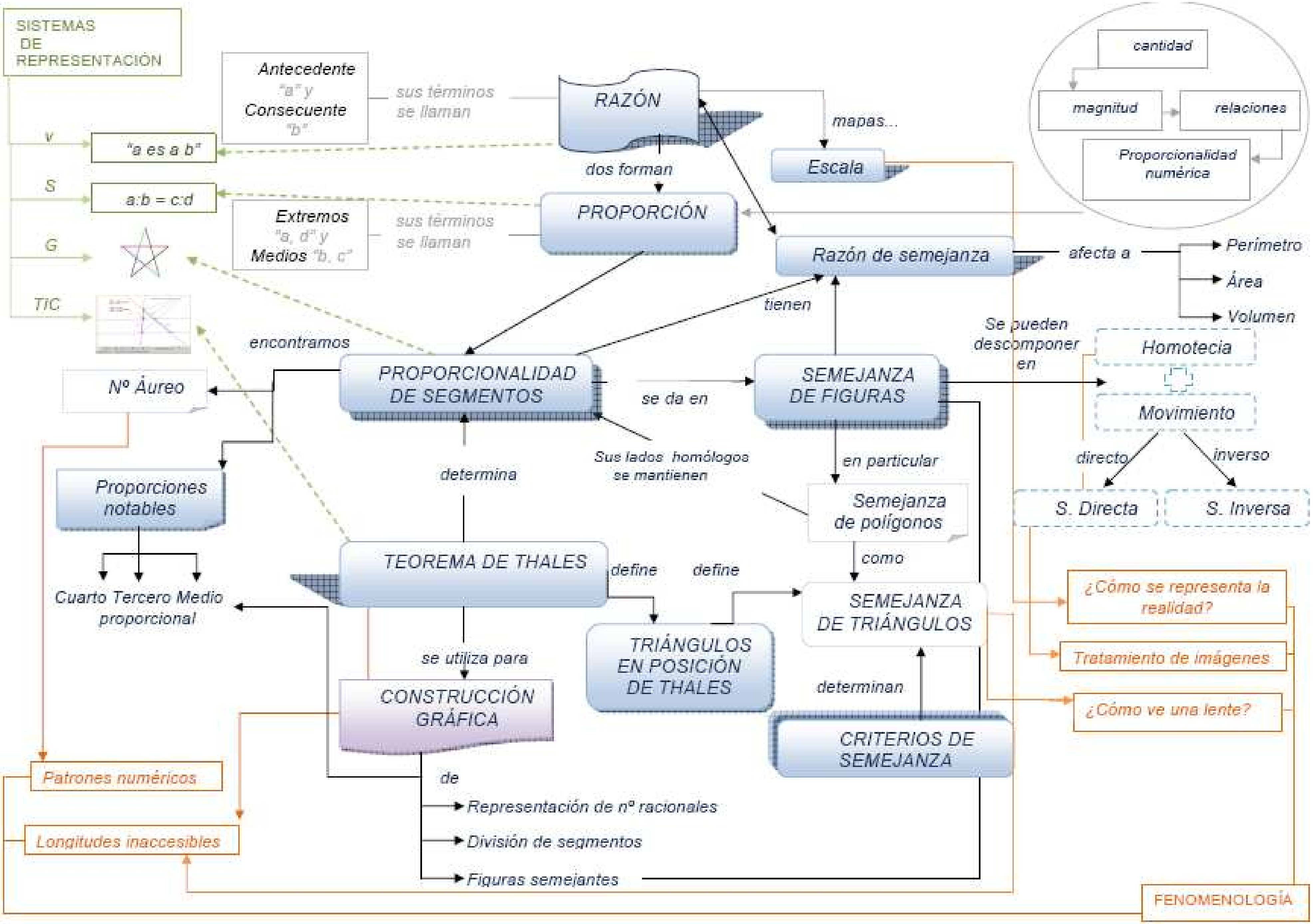
Análisis fenomenológico

La siguiente tabla recoge un resumen de los fenómenos que están relacionados con el tema de *Semejanza de figuras*:

<table>
<tr><th colspan="2">Contexto</th><th>Fenómenos</th><th>Situación</th><th>Concepto matemático</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Longitudes inaccesibles</td><td>Profundidad</td><td>Método de la profundad de un pozo</td><td>Laboral</td><td rowspan="5">Semejanza de triángulos</td></tr>
<tr><td>Altura</td><td>Método de Euclides
Método de la escuadra
Método de Gerberto de Aurillac</td><td>Laboral</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Distancias</td><td>Distancia de un barco a un puerto</td><td>Laboral</td></tr>
<tr><td>Medición del radio de la Tierra
Medición de la sombra de la Tierra</td><td>Científica</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td colspan="2">¿Cómo ve una lente?</td><td>El ojo humano
Cámara de fotos</td><td>Científica</td><td>Semejanza de triángulos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tratamiento de imágenes</td><td>Proyectores
Fotocopiadoras</td><td>Científica o personal</td><td>Homotecia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Representación de la realidad</td><td>Topografía: representación de mapas, planos y maquetas</td><td>Personal o científica</td><td>Escala</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">Identificación de patrones numéricos</td><td>Universo: dinámica de agujeros negros y galaxias</td><td rowspan="2">Científica</td><td rowspan="3">Número áureo</td></tr>
<tr><td>Naturaleza: cristales en minerales, caracolas, espirales de girasol, proporciones morfológicas de una abeja, etc.</td></tr>
<tr><td>Búsqueda de la belleza: pirámide de Keops, rostro de la Gioconda</td><td>Social</td></tr>
</table>

Mapa conceptual

El siguiente mapa establece la relación entre los diferentes conceptos del tema, sistemas de representación y fenómenos relacionados con el tema:



SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
V
"a es a b"
S
a:b = c:d
G
TIC
Antecedente "a" y Consecuente "b"
sus términos se llaman
RAZÓN
mapas...
Escala
dos forman
PROPORCIÓN
Extremos "a, d" y Medios "b, c"
sus términos se llaman
cantidad
magnitud
relaciones
Proporcionalidad numérica
Razón de semejanza
afecta a
Perímetro
Área
Volumen
tienen
encontramos
Nº Áureo
PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS
se da en
SEMEJANZA DE FIGURAS
Se pueden descomponer en
Homotecia
Movimiento
directo
inverso
S. Directa
S. Inversa
Sus lados homólogos se mantienen
en particular
Semejanza de polígonos
Proporciones notables
determina
Cuarto Tercero Medio proporcional
TEOREMA DE THALES
define
define
como
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS
TRIÁNGULOS EN POSICIÓN DE THALES
se utiliza para
CONSTRUCCIÓN GRÁFICA
determinan
CRITERIOS DE SEMEJANZA
¿Cómo se representa la realidad?
Tratamiento de imágenes
¿Cómo ve una lente?
Patrones numéricos
Longitudes inaccesibles
de
Representación de nº racionales
División de segmentos
Figuras semejantes
FENOMENOLOGÍA

ANÁLISIS COGNITIVO

En el tema de *Semejanza de figuras* podemos distinguir tres focos importantes. Estos son:

- Proporcionalidad de segmentos
- Figuras/cuerpos semejantes
- Teorema de Thales

Dentro de cada uno de estos focos podemos encontrar una serie de objetivos que se pretenden conseguir. En las siguientes tablas se recogen dichos objetivos, agrupados por focos, y la vinculación que existe entre ellos y las competencias PISA:

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS		3	1	2	0	2	1	2	0
O1	Reconocer series de segmentos proporcionales	X	X	X		X			
O2	Calcular la razón entre dos segmentos					X		X	
O3	Calcular numéricamente medio, tercero y cuarto proporcional	X						X	
O4	Construir segmentos proporcionales siendo la razón conocida	X		X			X		

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
FIGURAS/CUERPOS SEMEJANTES		6	2	4	1	3	1	2	1
O5	Identificar y describir invariantes entre dos figuras/cuerpos semejantes	X		X					
O6	Calcular la razón de semejanza entre dos figuras/cuerpos semejantes	X		X				X	
O7	Dibujar (con regla y compás, con Geogebra,…) una figura semejante a otra, dada la razón o algún lado de la segunda	X		X			X		X
O8	Identificar triángulos semejantes utilizando los criterios de semejanza	X	X			X			
O9	Establecer la relación entre las razones de perímetros, superficies y volúmenes de figuras/cuerpos semejantes	X	X		X	X		X	
O10	Calcular distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando la escala	X		X		X			

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
TEOREMA DE THALES		4	1	0	1	3	2	0	3
O11	Identificar y construir triángulos semejantes utilizando el teorema de Thales.	X	X			X			
O12	Construir gráficamente: medio, tercero y cuarto proporcional	X					X		X
O13	Dividir un segmento en partes iguales y/o proporcionales	X				X			X
O14	Representar números racionales en la recta real (regla y compás)						X		X
O15	Calcular distancias inaccesibles en situaciones reales usando la semejanza de triángulos	X			X	X			

Del estudio del tema de *"Semejanza de figuras"* se pueden enumerar una serie de errores y dificultades, los cuales se esperan que surjan en los alumnos que se enfrenten a dicho tema. En la siguiente tabla aparecen enumerados estos errores y su relación con los objetivos antes citados:

	Errores y dificultades	Objetivos asociados
E1	Confundir figuras parecidas con semejantes	O1, 05
E2	Identificar erróneamente polígonos semejantes (comprobar sólo algunas condiciones)	O1, O5
E3	Dificultades propias del lenguaje (doble, mitad,…)	O4, O7
E4	Interpretar la razón como parte de la unidad u operador fraccionario	O4, O7
E5	No verificar la solución apoyándose en la razón de semejanza	O4, 07
E6	Mezclar los criterios de semejanza	O8
E7	Dificultad con la notación de escala	O10
E8	Vincular la escala a una única unidad de medida	O10
E9	Generalizar la razón de semejanza en superficies y volúmenes	O9, O15
E10	Establecer de manera errónea la proporción que determina el teorema de Thales o la semejanza de figuras	O15
E11	Aplicar el teorema de Thales cuando no se cumplen las hipótesis (por ejemplo, paralelismo)	O15
E12	Dificultad para representar una situación gráficamente que se resolverá mediante semejanza	O15
E13	No seleccionar correctamente los datos para resolver un problema o utilizar datos innecesarios	O15