Curso

2011-12

ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN 2º ESO

Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesinal y Enseñanza de Idiomas. Universidad de Granada.

Alumno: Raúl Borja Expósito.

Supervisores: D. José Luis Lupiáñez y D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo.

Universidad de Granada

UNIDAD DIDÁCTICA:
ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN 2º ESO

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela de los doctores D. José Luis Lupiáñez Gómez y D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Raúl Borja Expósito, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo.: Raúl Borja Expósito

VºBº de los tutores

Fdo: Jose Luis Lupiáñez Gómez Fdo: Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Tabla de contenido

Introducción

El estudio de las matemáticas es necesario básicamente por dos motivos: para la plena formación académica de nuestros escolares y, principalmente, para poder interaccionar con el medio o entorno. Hacemos uso de ellas constantemente casi sin darnos cuenta ya que ayudan a recoger información, estructurarla y tomar decisiones. Aparecen por doquier y son útiles para otras ramas científicas como la física, la informática, la biología…Así por ejemplo, a través de las matemáticas se puede dar sentido a ciertos fenómenos como las leyes de Newton (en física), el sistema binario (en informática) y la reproducción de los conejos (en biología).

Ante la incidencia abrumadora del fracaso y abandono escolar en la sociedad española (Calero, Gil y Fernández, 2011, p. 11; Consejo Económico y Social, 2011) sobre todo en el campo de las matemáticas, las autoridades competentes exigen un mayor rigor en la metodología docente aplicada.

Con esta propuesta didáctica se pretende optimizar los momentos de incertidumbre e improvisación dentro del aula, que sabemos serán necesarios atendiendo a una metodología formativa, y solventar las dificultades que presentan los estudiantes en la traducción al lenguaje algebraico y resolución de problemas. Para alcanzar un aprendizaje significativo de los procesos algebraicos es necesario encuadrar la actividad en un contexto cercano al alumno. Es importante organizar los contenidos, conectarlos con el entorno físico del estudiante y diseñar y seleccionar las tareas que nos ayuden a construir el aprendizaje.

El texto, en su primera parte, se centra en el Análisis Didáctico del tema abordado. Para ello se han tenido en cuenta los tres documentos siguientes: Rico (1997), Gómez (2007) y Lupiáñez (2009).

En la segunda parte se explica detalladamente las sesiones programadas y los instrumentos de evaluación para dicha unidad. Por último, en los anexos encontraremos un apartado dedicado a la historia de las ecuaciones y otro en el que se hace un exhaustivo análisis de las tareas propuestas que se ejecutarán en el desarrollo de las sesiones.

Fundamentación

Al planificar una clase en cualquier área del conocimiento, debemos de tener en cuenta la normativa vigente. En este caso, la Ley Orgánica 2/2006 de 3 de mayo, de Educación, define el currículo como "el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas" (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006, p. 31681).

Atendiendo a la orden ECI 2220/2007 en su sección dedicada al área de las matemáticas, encontramos unos *objetivos generales* que se espera que los alumnos cumplan a través de la enseñanza de unos *contenidos* clasificados por bloques (contenidos comunes, números, álgebra, geometría, funciones y gráficas, probabilidad y estadística) y por cursos. También expone unos *criterios de evaluación* mediante los cuales se pretenden valorar el nivel de adquisición de ciertas capacidades por parte los alumnos (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007).

En lo que nos concierne, nos centraremos en los contenidos de Matemáticas pertenecientes al bloque 3 (álgebra) del segundo curso de la ESO. Ellos son:

- *Utilización de lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.*
- *Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades en tablas y en series numéricas.*
- *Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.*
- *Operaciones elementales con expresiones algebraicas sencillas, transformación y equivalencia. Suma, resta y producto de polinomios en casos sencillos.*
- *Propiedades de las igualdades. Identidades.*
- *Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación.*
- *Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes.*
- *Comprobación e interpretación de la solución.*
- *Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.*

En cuanto a los criterios de evaluación se refiere, nos centraremos únicamente en los que están relacionados con nuestro tema, a saber:

ECI 1. Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.

ECI 2. Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la comprobación de la coherencia de la solución obtenida, y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.

ECI 3. Identificar elementos matemáticos presentes en la realidad; aplicar los conocimientos adquiridos o los razonamientos desarrollados para interpretar y tomar decisiones acerca de situaciones reales que exigen herramientas matemáticas en su tratamiento y, en su caso, para su resolución.

ECI 4. Emplear de forma adecuada y con sentido crítico los recursos tecnológicos, calculadoras y programas informáticos adecuados, habituales en el trabajo matemático.

El currículo es diseñado a nivel autonómico pues corresponde a la mayoría de las autonomías la competencia en educación, en nuestro caso a la Junta de Andalucía. Revisando la orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía (Junta de Andalucía, 2007), apreciamos que se hace un especial hincapié en una serie de "Núcleos Temáticos", tales como la *resolución de problemas, la dimensión social, histórica y cultural de las matemáticas, y el uso de herramientas TIC,* entre otros. En cuanto al Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, podríamos decir que tiene bastantes similitudes, en cuanto a estructura y contenido se refiere, con la orden ECI 2220/2007 anteriormente mencionada.

En última instancia, corresponde a los departamentos de los centros educativos la elaboración de las programaciones didácticas como siguiente nivel de concreción curricular. Se deberán seleccionar los contenidos y metodologías más apropiados adaptándose a lo anteriormente expuesto y es por ello que se ha diseñado esta Unidad Didáctica (Artículo 17 del Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre).

La normativa antes citada proporciona una base para comenzar una planificación curricular a nivel de aula. Sin embargo, parece insuficiente para poder diseñar con eficacia un documento tan detallado como una Unidad Didáctica. Como complemento a la legislación, en este documento se tendrán en cuenta los trabajos realizados en Didáctica de la Matemática por los doctores L. Rico, P. Gómez y J.L. Lupiáñez. En estos trabajos, realizados tanto conjuntamente como por separado, se desarrolla y se expone con detalle el Análisis Didáctico, una herramienta diseñada específicamente para este fin. Durante las siguientes secciones se utiliza el Análisis Didáctico y se describen levemente cada uno de los pasos a seguir.

Análisis Didáctico

La estructura del Análisis Didáctico seleccionada responde a las nociones teóricas recibidas en el Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas durante el curso 2011-2012 y se describe con detalle en Gómez (2007), Lupiáñez (2009) y Rico (1997). Como se señala en Gómez (2007), el Análisis Didáctico *es un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje* (p.19).

El Análisis Didáctico es una herramienta que permite analizar un tema en matemáticas para poder identificar y organizar tanto los conocimientos que se desean enseñar como las técnicas que se emplearán para transmitirlos. Abordaremos las diferentes fases del Análisis Didáctico *(análisis de contenido, cognitivo y de instrucción)* y desde esta perspectiva analizaremos el tema elegido con el fin de conseguir una planificación fundamentada dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Análisis de contenido

La línea seguida en este apartado se corresponde con la propuesta de los documentos *Matemáticas Escolares y Análisis de Contenido con Profesores de Secundaria en Formación* (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2007) y *Consideraciones sobre el Currículo de Matemáticas para Educación Secundaria* (Rico, 1997). El análisis de contenido es el procedimiento que permite identificar y organizar la multiplicidad de significados de un concepto matemático. Así, recopilamos y organizamos los diferentes significados de un concepto bajo las tres dimensiones siguientes:

- **Estructura conceptual:** identificaremos los principales conceptos y procedimientos del tema que nos atañe y la relación que guardan entre ellos.

- **Sistemas de representación:** analizaremos las diferentes maneras con las que podemos representar las ecuaciones de primer grado y la relación que guardan con otros conceptos.
- **Fenomenología:** se incluirán aquellos contextos, situaciones o problemas que pueden dar sentido a los conceptos con los que estamos trabajando.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL:

En Rico, L. (1997), se desgrana en dos grandes campos la organización del conocimiento matemático: por un lado el *campo conceptual* (en el cual nos referiremos al conjunto de información que caracteriza a las ecuaciones de primer grado y sus relaciones) y por otro el *campo procedimental* (en el que se analizan las principales destrezas, razonamientos y estrategias ligadas al tema o, dicho de otro modo, "los modos de ejecución de una tarea").

1. ***Campo conceptual:***

A. HECHOS: son las unidades de información. Distinguimos cuatro tipos:

- *Términos:* Se corresponde con los vocablos que aluden a conceptos. En nuestro tema, podemos encontrar los siguientes: parte literal, término, grado, monomio, polinomio, miembro, coeficiente, solución, ecuación, identidad, fracción algebraica, incógnita…
- *Notaciones:* hace referencia a los símbolos usados en matemática. En nuestro caso identificamos: símbolos de suma, resta, multiplicación, línea de quebrado; uso de letras (*x, y, z,…, a, b, c,…*) para representar incógnitas y coeficientes.
- *Convenios:* son los acuerdos consensuados para comunicar información sin ambigüedad.

  - El orden de los sumandos no altera la suma (propiedad conmutativa): $a + b = b + a$
  - Propiedad asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$
  - El múltiplo de un número "*a*" se obtiene al multiplicar "*a*" por cualquier número "*n*", es decir, *an*.
  - El signo de la multiplicación se elimina y se opera por yuxtaposición (o mediante el uso del punto "·").

- Multiplicar un número por una suma equivale a multiplicar por cada sumando y sumar los productos parciales (propiedad distributiva): $a \cdot (b + c) = ab + ac$
- Respeto por la jerarquía de operaciones.
- Cuando las letras expresen números, las trataremos como tales en cuanto a las operaciones y sus propiedades.

• *Resultados*: son las consecuencias de uno o varios hechos.

- Los *monomios* son el resultado de multiplicar un número conocido *(coeficiente)* por una o varias letras *(parte literal)*
- El *grado de un monomio* es la suma de los grados de las letras que lo conforman.
- Los monomios sólo se pueden sumar o restar cuando tienen la misma parte literal.
- El producto de monomios es siempre otro monomio.
- Al dividir dos monomios se puede obtener o bien un número, o bien una fracción algebraica, o bien otro monomio.
- Una ecuación está formada por dos miembros (primero y segundo) separados por un signo "=". Cada miembro se conforma de una serie de términos.
- Las incógnitas son las letras que aparecen en la ecuación.
- Las soluciones de una ecuación son los valores que han de tomar las letras para que se cumpla la igualdad.
- Dos ecuaciones son equivalentes si poseen las mismas soluciones.
- Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por un mismo número (distinto de cero), la ecuación resultante es equivalente a la original.
- Si sumamos o restamos un número cualquiera a los dos miembros de una ecuación, entonces la ecuación resultante es equivalente a la anterior.

B. CONCEPTOS: Describen las relaciones que guardan un grupo de hechos. En el tema que estamos tratando, podemos encontrar las nociones de: incógnita, igualdad, primer y segundo miembro, ecuación, ecuación equivalente, solución, identidad, polinomio, expresión algebraica y su valor numérico, nuevo significado del signo igual…

C. ESTRUCTURAS: Sirven para unir conceptos. Podríamos decir que únicamente nos encontramos con una estructura, la del anillo de polinomios. Esta estructura se concreta en el conocimiento de los aspectos anteriores y sus relaciones.

2. *Campo procedimental:*

A. DESTREZAS:

- Escritura y lectura de expresiones algebraicas y ecuaciones.
- Operaciones con monomios.
- Resolución de ecuaciones sencillas por tanteo.
- Generar ecuaciones equivalentes.
- Uso de las operaciones aritméticas en desarrollo de ecuaciones.
- Eliminación de paréntesis y denominadores.
- Técnicas básicas de trasposición de términos.
- Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos.
- Generalización de situaciones.
- Resolución de problemas.

B. RAZONAMIENTOS:

- De tipo deductivo: argumentaciones lógicas en la manipulación de propiedades algebraicas durante el desarrollo de expresiones.
- De tipo inductivo (a partir de la observación de determinados hechos, extraer conclusiones generales). Ej.: si el doble de un número se representa por 2x, el triple será 3x, el cuádruple 4x, etc.
- De tipo figurativo: representaciones pictóricas de las ecuaciones.

.

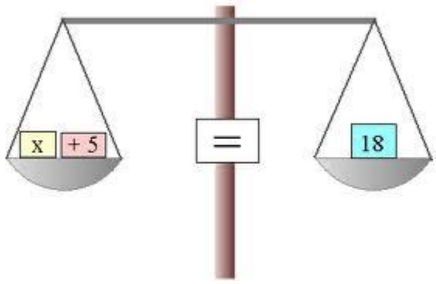
C. ESTRATEGIAS:

- Cálculo mental.
- Ordenar adecuadamente expresiones.
- Trasposición de términos.
- Modelización.
- Discriminación de soluciones.

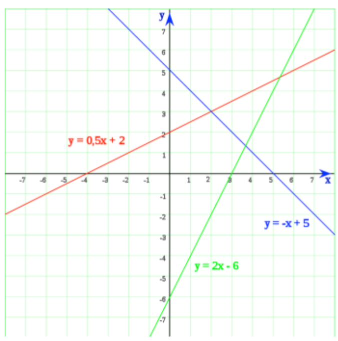
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN:

Las ecuaciones, así como cualquier concepto en matemáticas, admiten varios sistemas de representación que aportan significados distintos. Así, podemos hablar de:

- ***Representación simbólica:*** hace referencia al uso de letras, números y símbolos matemáticos. Así, podemos representarlas mediante el uso de expresiones del tipo $ax + b = cx + d$, siendo $a,b,c,d,x \in \mathbb{R}$.
- ***Representación manipulativa:*** se trata de representar una ecuación por medio de objetos en los cuales podamos proyectar los términos de cada uno de los miembros de la ecuación. Por ejemplo, el uso de la balanza, que podemos encontrar en la siguiente web: http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_324_g_3_t_2.html?open=instructions&from=topic_t_2.html



- ***Representación gráfica:*** quizás sea el menos conveniente de usar, pues está más relacionado con el tema de funciones. Aún así, puede ser útil en determinadas condiciones. Les permitirá relacionar las ecuaciones de primer grado con las rectas en el plano. Podemos utilizar para ello software libre como es Geogebra, o aplicaciones web como: http://www.analyzemath.com/Slope_Intercept_Line/Slope_Intercept_Line.html



- ***Representación verbal:*** de manera natural aparecen en el uso del lenguaje expresiones como *el doble, el triple, etc.* que se pueden representar mediante las ecuaciones de primer grado.

FENOMENOLOGÍA:

El análisis fenomenológico en las matemáticas trata de describir los fenómenos que nos encontramos en la vida cotidiana y su relación con los conceptos, procedimientos y propiedades de un tema matemático. Se trata de establecer una relación entre una estructura matemática y los grupos de fenómenos asociados a ella. También posibilita determinar los contextos en los cuales se utiliza el concepto, con el fin de formular las tareas que se esperan que los alumnos desarrollen.

Podríamos decir que todas las ecuaciones de primer grado provienen del intento de averiguar un dato desconocido a partir de una combinación lineal de dicho dato junto con otros datos sí conocidos. El uso de las ecuaciones resuelve diversos problemas que se dan en multitud de ramas o áreas científicas tales como la biología, la física, la economía, la geometría, la trigonometría, la estadística, etc. y responden a un sinfín de fenómenos, como por ejemplo a problemas de *proporcionalidad, porcentajes, rebajas comerciales, compras, elongaciones de muelles, movimientos uniformemente acelerados, etc.*

Así pues, enmarcados dentro de un mismo contexto (el de hallar un dato desconocido), encontramos las diferentes situaciones en las que podemos apreciar los fenómenos que dan sentido a nuestro tema y que ofrecerán la posibilidad al alumno de conectar sus conocimientos con el mundo físico:

- ***Situaciones personales:*** hace referencia a las actividades diarias con las que el alumno puede tratar. Ejemplo:

  Si al cántaro que tiene tu madre le añadieras trece litros de agua, tendría el triple que si le sacaras dos. ¿Cuántos litros de agua hay en el cántaro?

- ***Situaciones educativas o laborales:*** provienen del centro escolar o del entorno de trabajo del alumno en el cual se proponen tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta. Ejemplo:

El triple de un número es 27. ¿De qué número hablamos?

- ***Situaciones públicas:*** son las que provienen de la mera interacción del alumno con la sociedad. Ejemplo:

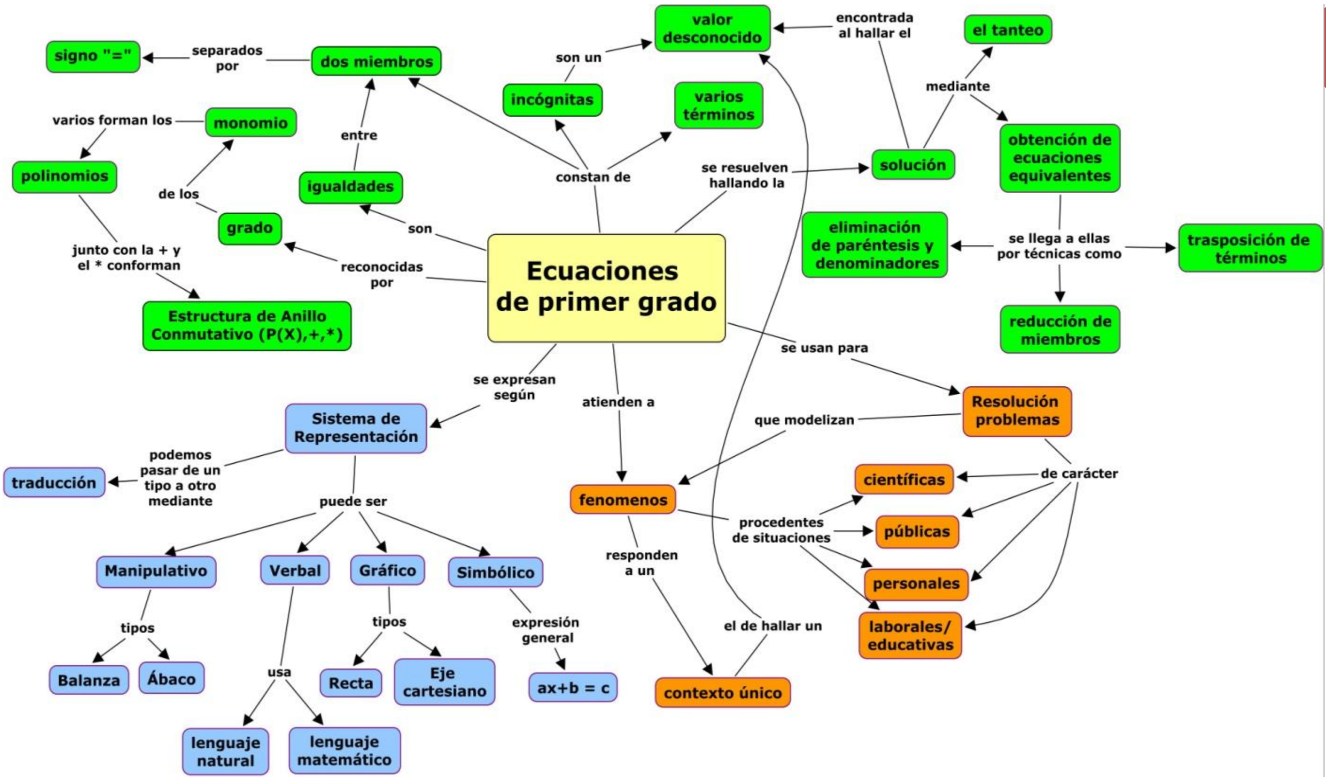
¿Cuántas vacas tiene un granjero sabiendo que entre cuernos y patas contamos 222?

- ***Situaciones científicas:*** requieren un mayor nivel de abstracción por parte del alumno y suelen provenir, amén de las matemáticas, de otras ramas científicas. Ejemplo:

> *Si cuando aplicamos a un determinado muelle una fuerza de 20N le provocamos un alargamiento de 30 cm., calcula:*
>
> *a) La fuerza que producirá un alargamiento de 20cm.*
> *b) El alargamiento producido por una fuerza de 100N.*

Puesto que las subestructuras del tema que estamos tratando son los diferentes tipos de ecuaciones de primer grado que nos podemos encontrar, éstos son: $Ax=b$; $Ax+b=c$; $Ax+b=Cx+d$, *etc.*, no hemos querido hacer distinción entre ellas pues es bien sabido que podemos pasar de unas a otras mediante transformaciones de equivalencia.

Presentamos a continuación el mapa conceptual de nuestro tema, en el cual se puede apreciar en color verde la *estructura conceptual,* siendo los colores naranja y azul la *fenomenología* y los *sistemas de representación* (respectivamente) relacionados con las ecuaciones de primer grado:



Grosso modo, este mapa conceptual nos ayudará a ubicarnos en el tema de las ecuaciones de primer grado. En él se puede apreciar qué es una ecuación, de qué elementos se compone y cómo se reconocen, lo que podríamos agrupar en términos de *identificar y caracterizar las ecuaciones de primer grado.* También podemos ver qué es resolver una ecuación y los procedimientos básicos para su resolución, lo que nos conduciría a otra línea de pensamiento: *resolver ecuaciones de primer grado.* Por último, podemos observar que también queda reflejado la utilidad de esta potentísima herramienta de las matemáticas, que no es otra que la *resolución de problemas.* Estas tres prioridades o focos nos permiten organizar el enunciado de objetivos que aparece en el apartado siguiente.

Análisis cognitivo

Esta sección está diseñada según el trabajo de Lupiáñez (2009) y en él se analiza la problemática del proceso enseñanza y aprendizaje. Partiremos del análisis de contenido realizado en el apartado anterior para concretar expectativas, limitaciones y oportunidades en el aprendizaje.

El análisis cognitivo de cualquier tema en matemáticas hace referencia tanto a qué hacen y qué pueden hacer los alumnos con los contenidos que se les ofrece (expectativas) como a los errores que ellos mismos cometen y cómo podrían solucionarse (limitaciones y oportunidades en el aprendizaje).

Expectativas de aprendizaje

Para detallar las expectativas hemos seleccionado cuatro grandes focos en los que canalizar los contenidos del tema abordado. Ellos son:

1. Manejo del lenguaje algebraico
2. Identificar y caracterizar ecuaciones de primer grado
3. Resolver ecuaciones de primer grado
4. La resolución de problemas

Dentro de cada foco se proponen ciertos objetivos específicos que se deben perseguir. Los mostramos a continuación en una tabla puestos en relación con las competencias PISA (pensar y razonar –PR–, argumentar y justificar –AJ–, comunicar –C–, modelizar –M–, plantear y resolver problemas –RP–, representar –R–, usar el lenguaje simbólico –LS–, emplear herramientas tecnológicas –HT–):

OBJETIVOS	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1.1. Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.				X		X	X	
1.2. Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas.	X				X		X	
1.3. Identificar polinomios de primer grado.		X					X	
OBJETIVOS	**PR**	**AJ**	**C**	**M**	**RP**	**R**	**LS**	**HT**
2.1. Distinguir los miembros, términos e incógnitas de una ecuación de primer grado.		X						
2.2. Reconocer diferentes tipos de ecuaciones de primer grado.	X	X						
2.3. Diferenciar entre ecuaciones e identidades.		X						

2.4. Leer y escribir ecuaciones de primer grado			X				X	
OBJETIVOS	**PR**	**AJ**	**C**	**M**	**RP**	**R**	**LS**	**HT**
3.1. Encontrar la solución de una ecuación de primer gado	X	X					X	
3.2. Aproximar una solución por tanteo usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas	X	X				X		X
3.3. Construir ecuaciones equivalentes a una dada.	X	X					X	
3.4. Conocer diferentes métodos de resolución de ecuaciones.	X	X						
3.5. Comprobar la validez de una solución		X					X	
OBJETIVOS	**PR**	**AJ**	**C**	**M**	**RP**	**R**	**LS**	**HT**
4.1. Modelar enunciados de problemas			X	X	X	X	X	
4.2. Interpretar ecuaciones.			X	X	X		X	
4.3. Interpretar y discriminar soluciones.	X	X						

La división en colores de los objetivos hace referencia a cada uno de los cuatro focos señalados anteriormente. Recordemos que los alumnos a esta edad comienzan a tomar un primer contacto con esta área de las matemáticas y, por tanto, es necesario desarrollar el uso del lenguaje simbólico. De ahí que dicha competencia aparezca señalada en la mayoría de objetivos.

Por otro lado, se aprecia que hay un gran número de objetivos dentro de los tres primeros focos que intentan cubrir la competencia de argumentar y justificar. Es importante que el alumno justifique y analice sus respuestas, ya que de este modo el profesor podrá observar qué errores se cometen y qué dificultades existen al principio de la lección con el fin de subsanarlos antes de profundizar en cuestiones más complejas dentro del tema.

Por último, vemos que dentro del cuarto foco, la resolución de problemas, son importantes las competencias de:

- Comunicar, pues el alumno debe ser capaz de comprender e interpretar correctamente enunciados orales y escritos,
- modelizar, porque deben ser capaces de estructurar y analizar la situación que se les plantea, y
- resolver problemas.

Limitaciones en el aprendizaje

Dentro de las limitaciones en el aprendizaje, que surgen de la conjunción de la complejidad de las nociones matemáticas y el conocimiento y las habilidades de los escolares, encontramos una serie de errores asociados a cada uno de los focos anteriormente mencionados. Los presentamos a continuación en forma de tablas:

MANEJO DEL LENGUAJE ALGEBRAICO	OBJETIVOS
E1.- Mal manejo de símbolos. Ej.: 2x+3=5x	1.1 1.2
E2.- Operar erróneamente con monomios.	1.2
E3.- Incorrecto uso de las propiedades numéricas. Ej.: 2(x-1)=2x-1	1.2
E4.- No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. Ej.: 5*x*y=5xy	1.2
E5.- No distinguir entre fracción algebraica y monomio. Ej.: (a+b)/b	1.2
E6.- Confundir grado de un polinomio. Ej.: 3xy+2	1.3

Vemos que dentro del primer foco se cometen mayoritariamente errores asociados al objetivo 1.2, que hace referencia a la identificación de expresiones algebraicas y saber operar con ellas. Esto parece razonable pues se les está introduciendo en un nuevo mundo dentro de las matemáticas, el álgebra. Ello supone un mayor nivel de la abstracción que el alumno debe ir interiorizando mediante tareas propuestas a tal fin que se detallarán más adelante en el análisis de instrucción.

Dentro del segundo foco encontramos también ciertas dificultades que se traducen en los siguientes errores cometidos con relativa frecuencia:

IDENTIFICAR Y CARACTERIZAR ECUACIONES DE PRIMER GRADO	OBJETIVOS
E7.- Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado.	2.1
E8.- Consideración errónea del grado de una ecuación. Ej.: $3x+x^2=12+x^2$	2.2
E9.- No reconocer los distintos tipos de igualdades algebraicas.	2.3

No es de extrañar que surjan dificultades a la hora de identificar las ecuaciones de primer grado. Los alumnos dan sus primeros pasos manejando los monomios, en donde intervienen, por ejemplo, las nociones de grado, parte literal, coeficiente, etc. Son una cantidad numerosa de conceptos que deberán manejar con soltura para evitar confundirlos entre ellos estableciendo relaciones erróneas. También toman un primer contacto con polinomios, lo cual puede llevarlos a confundir (E7) ecuación con polinomio, o polinomio con monomio, miembro con término, etc. En ocasiones, la simple ocurrencia de una incógnita elevada a cierto grado, hace a los alumnos atribuir dicho grado a la ecuación en la que aparece (E8), pasando por alto el hecho de que ese grado de la incógnita termina desapareciendo al agrupar términos. Al mismo tiempo, es muy común en este primer contacto con el mundo del álgebra que los alumnos no tengan clara la diferencia entre identidad y ecuación (E9) y se hará necesaria la realización de ciertas tareas a fin de asentar dichos conceptos.

Pasamos ahora a analizar los errores más comunes cometidos dentro del tercer foco: resolución de ecuaciones de primer grado.

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO	OBJETIVOS
E10.- Uso inadecuado de materiales.	3.2
E11.- Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.	3.1 3.3 3.4
E12.- Obtener igualdades a través de fracciones: Ej.: De $(x+2)/(x+5)=6/7$, deducir que $x+2=6$ y $x+5=7$	3.3

Cuando se le pide al alumno que aproxime por tanteo la solución de una ecuación, el poco manejo que tienen de los materiales propuestos (ábaco, calculadora, software, etc.) les hace llegar a soluciones erróneas (E10).

A veces, los alumnos encuentran dificultades a la hora de equilibrar la balanza, de ahí que obtengan ecuaciones equivalentes de manera errónea. Esto es debido a que no aplican correctamente las técnicas básicas de resolución, es decir, no saben trasponer términos ni reducir miembros (E11), o directamente acaban haciendo deducciones erróneas, llegando a obtener ecuaciones que en realidad no son equivalentes (E12).

Por último, en el cuarto foco distinguimos los siguientes errores:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	OBJETIVOS
E13.- Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.	4.1
E14.- Determinar soluciones carentes de sentido. Ej.: una longitud nunca puede ser negativa.	4.3

El primer error tiene que ver con el hecho de tener poca práctica en este tipo de contexto, ya que es la primera vez que se relaciona el lenguaje natural con el simbolismo matemático. Al mismo tiempo, es difícil que el alumno se dé cuenta de que no siempre la solución obtenida es la correcta, ya que se necesita un análisis a posteriori para reflexionar acerca de la validez de la solución analítica de la ecuación en consonancia con el contexto del problema.

Oportunidades de aprendizaje

En el apartado de oportunidades para el aprendizaje se ofrece una selección de tareas a fin de alcanzar ciertos objetivos específicos y detectar y subsanar ciertos errores cometidos en el proceso de aprendizaje de los alumnos. Mostramos a continuación una tabla en la cual se recogen tres tareas relacionas con sus contenidos, los objetivos que persigue y los errores que se pueden solventar:

ENUNCIADO	*CONTENIDOS*	*OBJETIVOS*	*ERRORES*
Busca por tanteo, usando la calculadora, una solución para las siguientes ecuaciones: a) $13x + 5 = 83$ b) $7x + 3 = 17$ c) $25 – 3x = 1$ d) $x/3 – 2 = 2$	Conceptos: Nociones de ecuación, solución e incógnita. Destrezas: Resolución de ecuaciones sencillas por tanteo.	3.1 Encontrar las soluciones de una ecuación de primer grado. 3.2 Aproximar una solución por tanteo, usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas.	E10 Uso inadecuado de materiales.

a) Resuelve siguiendo las indicaciones: *8-x=2* *1º Suma "x" a ambos miembros.* *2º Resta "2" a ambos miembros.* *b) ¿Cómo resolverías 3x=6+x ?*	Conceptos: Nociones de miembro y equivalencia. Destrezas: Obtención de ecuaciones equivalentes. Uso de las operaciones aritméticas en desarrollo de ecuaciones. Técnicas básicas de trasposición de términos.	2.1 Distinguir los miembros, términos e incógnitas de una ecuación de primer grado. 3.1 Encontrar la solución de una ecuación de primer grado. 3.3 Construir ecuaciones equivalentes a una dada.	E7 Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado. E11 Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado
Escribe para cada enunciado la ecuación que lo representa algebraicamente: *a) la tercera parte de un número es igual a su cuarta parte más una unidad.* *b) Un rectángulo es tres metros más largo que ancho y su perímetro mide 26 metros.*	Conceptos: Nociones de expresión algebraica y ecuación. Destrezas: Escritura y lectura de expresiones algebraicas y ecuaciones. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos.	1.1 Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. 4.1 Modelar enunciados de problemas.	E13 Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.

Con la primera de las tareas se pretende ayudar al alumno a entender qué es la solución de una ecuación. A veces es difícil que el alumno entienda que cuando se sustituye la incógnita por el número adecuado (la solución de la ecuación), la ecuación se transforma en una igualdad. También ocurre con frecuencia que los alumnos encuentran dificultades a la hora de manejar los símbolos y trasponer términos de un miembro a otro. Con el fin de subsanar tales deficiencias se propone la segunda tarea, con un objetivo muy distinto al de la tercera, en la que se pretende que el alumno relacione el lenguaje natural con el algebraico y adquiera habilidades para pasar del uno al otro.

Análisis de instrucción

En esta sección diseñaremos y secuenciaremos las tareas que conformarán nuestra unidad didáctica. Algunos de los aspectos que tuvimos en cuenta para ello fueron el agrupamiento (dependiendo de las características y finalidad), la complejidad, su función y el tiempo empleado. Para ello propondremos tres fases durante el desarrollo de las ecuaciones de primer grado: *fase inicial, fase de desarrollo y fase de cierre*. En la *fase inicial* se expondrán tareas con la finalidad de captar el interés y participación del alumno, es decir, tareas motivadoras. También se plantearán tareas para que el profesor pueda hacer una valoración sobre los conocimientos con los que parte el alumno. En la *fase de desarrollo* se buscarán tareas más enfocadas al asentamiento de nuevos conocimientos que se irán transmitiendo de manera gradual, es decir, tareas que ayuden a la construcción del aprendizaje y a la gestión de errores. Por último, en la *fase de cierre* se pretende que el alumno desarrolle plenamente sus capacidades cognitivas y reorganice sus conocimientos mediante la propuesta de tareas de mayor complejidad. Las tareas seleccionadas deben ayudarnos a conquistar las expectativas marcadas de manera que los alumnos tengan suficientes oportunidades de superar los errores que vayan cometiendo a lo largo del desarrollo de la unidad. Se hará un exhaustivo análisis de cada tarea en el anexo 2.

- *Fase inicial:* atendiendo a nuestro primer foco, *manejo del lenguaje algebraico,* se trabajarán cuatro tareas. La primera de ellas es una adivinanza y con ella se pretende acercar el mundo del álgebra al alumno mediante una propuesta divertida. El interés de esta tarea reside en que el alumno sea capaz de indagar sobre el por qué siempre obtenemos el mismo valor.

> *Piensa un número. Súmale 5. Multiplícalo por 2. Al resultado réstale 4. Divide lo que te salga entre 2. Si le restas el número que pensaste, ¿obtienes el número 3? ¿Sabrías decir por qué?*

La segunda actividad será trabajar con un dominó que conste de enunciados verbales y expresiones algebraicas. La idea es repartir por un lado los enunciados y por otro sus expresiones algebraicas de manera que los alumnos intenten emparejarlas. Supuesto que ya trataron por encima este tema en el curso anterior, es de imaginar que no habrá muchas dificultades en realizar la tarea. También ayudará al profesor a hacer una valoración de qué nivel tienen los alumnos en cuanto al manejo del lenguaje algebraico se refiere. A continuación se muestran ejemplos de las fichas del dominó:

El triple de un número más seis unidades	3x + 6
Un número menos su tercera parte	x – x/3

Las dos siguientes tareas ayudarán al profesor a hacer una valoración sobre los conocimientos que poseen los alumnos en este área:

¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones representa un número de tres cifras ABC? Explica tu respuesta.

- $A + B + C$
- $A \cdot B \cdot C$
- $A + 10 \cdot B + 100 \cdot C$
- $100 \cdot A + 10 \cdot B + C$

En un garaje hay un número indeterminado de coches (C) y un número indeterminado de motos (M). ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el número total de ruedas? Explica tu respuesta.

- $R = C + M$
- $R = 4 \cdot C + 2 \cdot M$
- $R = 5 \cdot C + 2 \cdot M$
- $R = 4 \cdot (C + M) - 2$

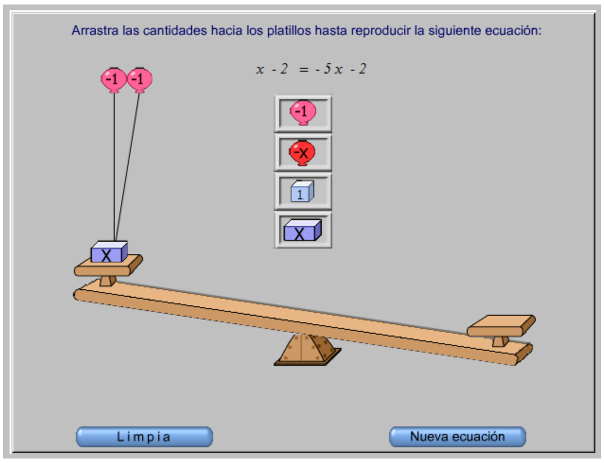
- *Fase de desarrollo:* tras las explicaciones por parte del profesor sobre las nociones de ecuación, identidad, ecuaciones equivalentes, concepto de solución, miembros de una ecuación, trasposición de términos, etc., se recomienda poner en práctica las siguientes tareas con el fin de encuadrarnos dentro de los focos *identificar y caracterizar ecuaciones de primer grado* y *resolver ecuaciones de primer grado*.

Para resolver las siguientes ecuaciones, responde a las preguntas sugeridas en cada caso y resuelve por tanteo ayudándote de la calculadora si es preciso:

- $3x = 24$ → *¿qué número multiplicado por 3 da 24?*
- $x - 20 = 0$ → *¿a qué número hay que restarle 20 para que el resultado sea 0?*
- $\frac{4x+3}{5} = 1$ → *¿qué número dividido entre 5 te da exactamente 1? Entonces, ¿cuánto ha de valer* $4x + 3$*? ¿Cuánto vale x?*

Con esta tarea se pretende poner en práctica el cálculo mental del alumno y asentar los conceptos de ecuación y solución, fundamentalmente. Deben ser capaces de resolver las ecuaciones sin practicar ninguna operación por escrito.

También trabajaremos con la balanza. Es un buen recurso que hace reflexionar al alumno sobre la noción que posee del signo =, ya que en muchos casos se piensa en él como una invitación al cálculo y no como en una relación de equivalencia, que es en realidad lo que representa en las ecuaciones de primer grado. Este recurso nos permitirá resolver ecuaciones lineales simples. Los bloques de unidades (que representan una unidad) y los bloques con una *x* (que representan las cantidades desconocidas) deben ser arrastrados hacia las bandejas de la balanza. Cuando las bandejas estén en equilibrio representando la ecuación lineal dada, se podrá realizar cualquier operación aritmética, siempre y cuando se haga lo mismo en ambos lados, manteniendo así las bandejas en equilibrio. El objetivo es obtener una sola *x* en una de las bandejas y, en la otra, cualquier cantidad de bloques de unidades necesarios para mantener el equilibrio. De esta manera obtenemos el valor de *x*. Hay que hacer especial hincapié en que la balanza debe mantenerse siempre en equilibrio y, por tanto, las operaciones que se realicen en un mimbro se deberán llevar a cabo también en el otro miembro. Para ello nos remitiremos a la siguiente página web:
http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_324_g_3_t_2.html?open=instructions&from=topic_t_2.html



Resulta muy útil para que los alumnos aprendan un orden a seguir para la resolución de ecuaciones sencillas, por ejemplo:

1. Eliminar paréntesis:
2. Eliminar denominadores.
3. Trasponer términos y reducir.
4. Despejar la incógnita.
5. Comprobar la solución

Aprender una sencilla serie de pasos para resolver ecuaciones sencillas proporcionará al alumno una dosis de confianza y, además, quedará bien definida la base para resolución de otro tipo de ecuaciones.

La siguiente tarea se inspira en la investigación de los profesores Bethany Rittle-Johnson (Universidad de Vanderbilt) y Jon R. Star (Universidad de Harvard). Se trata de un estudio experimental acerca de cómo comparar diferentes métodos de resolución puede facilitar la adquisición del conocimiento conceptual y procedimental:

Aquí se resuelve la misma ecuación siguiendo distintos pasos. ¿Son ambos procedimientos correctos? ¿Por qué? Comprueba la solución.

$$\begin{gathered} 4\cdot(x-2)+2x+10=2\cdot(3x+1)+4x+8 \\ 4x-8+2x+10=6x+2+4x+8 \\ 6x+2=10x+10 \\ -8=4x \\ -2=x \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 4\cdot(x-2)+2x+10=2\cdot(3x+1)+4x+8 \\ 4\cdot(x-2)+2x+2=2\cdot(3x+1)+4x \\ 4x-8+2x+2=6x+2+4x \\ -8=4x \\ -2=x \end{gathered}$$

Se trata de una tarea grupal que nos ayudará a comprobar si los alumnos han asimilado bien los conceptos explicados durante las sesiones. Deberán justificar su respuesta dando argumentaciones lógicas sobre los pasos que se siguen en la resolución. El propósito es que el profesor observe la precisión del alumno en el manejo de expresiones algebraicas y la trasposición de términos a la vez que corrige los posibles errores.

- *Fase de cierre:* atendiendo a nuestro último foco, *la resolución de problemas,* pretendemos que los alumnos recopilen toda la información dada a lo largo de las sesiones y sean capaces de modelizar enunciados de problemas para su posterior resolución. Algunos ejemplos a seguir pueden ser:

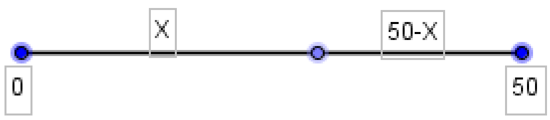
El perímetro de un triángulo isósceles mide 15 cm. Sabemos que el lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados iguales. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo y dibújalo en tu cuaderno.

Se aprecia en la tarea una mayor complejidad ya que el alumno debe ser capaz de hacer una traducción del lenguaje natural al matemático. Además, está relacionada con figuras geométricas, algo que ya conocen y no les vendrá mal recordar.

Otro ejemplo podría ser:

En un concurso de cincuenta preguntas, dan tres puntos por cada acierto y quitan dos por cada fallo. ¿Cuántas preguntas ha acertado un concursante que ha obtenido 85 puntos?

Aquí al alumno no le basta con asignar a la incógnita *x* el número de preguntas que se han acertado. Debe ir un poquito más allá y darse cuenta, para poder plantear correctamente la ecuación, que el número de fallos es justo el número de preguntas menos el número de preguntas acertadas, es decir, *50-x.* Podríamos ayudarnos de la recta real para hacerlo más intuitivo al alumno.



Por último, proponemos la siguiente tarea:

Un grifo llena un depósito en tres horas y otro grifo lo hace en seis horas. ¿Cuánto tardarían en llenarlo ambos grifos a la vez?

Quizás sea la tarea de mayor complejidad propuesta, pues el alumno deberá hacer una reflexión sobre la tasa de llenado que realiza cada grifo, algo que no es trivial. Así, el primer grifo llenará justo un tercio del depósito transcurrida una hora y el segundo grifo llenará un sexto de dicho depósito en el mismo tiempo.

Junto con el resto de tareas diseñadas para la unidad didáctica y que se pueden consultar en el anexo 2 y en las sesiones programadas, mostramos a continuación una tabla en la que se relacionan las tareas con las expectativas y limitaciones en el proceso de aprendizaje, para comprobar la coherencia de dicha selección:

	OBJETIVOS														
TAREAS	1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	2.4	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	4.1	4.2	4.3
1	X					X								X	
2	X		X										X		
3	X												X		
4	X												X		
5		X	X												
6		X	X												
7		X	X												
8		X	X												
9				X			X		X						
10		X	X												
11		X	X			X									
12				X	X		X	X			X	X			
13					X		X	X			X	X			
14					X						X	X			
15						X	X	X		X	X	X			
16	X														
17	X							X		X	X	X	X		
18	X							X		X		X	X		
19														X	
20	X												X		X
21	X												X		X
22	X												X		X
23	X												X		X
24	X												X		X
25	X												X		X
26	X												X		X
27	X												X		X

		ERRORES													
TAREAS		E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14
	1									X				X	
	2						X							X	
	3													X	
	4													X	
	5					X	X								
	6	X	X	X			X								
	7		X		X		X								
	8	X	X	X	X	X	X								
	9							X			X				
	10		X			X	X								
	11	X	X	X	X					X					
	12							X				X	X		
	13							X	X			X	X		
	14		X	X				X				X			
	15								X	X		X	X		
	16													X	
	17			X								X		X	
	18											X		X	X
	19													X	
	20											X		X	X
	21											X		X	X
	22											X		X	X
	23											X		X	X
	24											X		X	X
	25											X		X	X
	26											X		X	X
	27											X		X	X

Analizando la primera tabla, podemos concluir que la selección de las tareas es coherente con los objetivos marcados al principio del análisis cognitivo de nuestro tema, pues se observa que todos ellos quedan cubiertos por alguna tarea, destacando la modelización de problemas y las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado. Haciendo un pequeño balance, podríamos decir que al principio de la unidad se buscará valorar qué conocimientos poseen los alumnos en el manejo del lenguaje algebraico para después entrar en la resolución de ecuaciones. Las últimas tareas seleccionadas tienen como fin trabajar la modelización de problemas, en donde los alumnos tendrán que traducir enunciados al lenguaje algebraico (algo que se trabaja con insistencia durante el desarrollo de la unidad).

En cuanto a las limitaciones, vemos en la segunda tabla que todas ellas quedan cubiertas con nuestra propuesta de tareas. Con la primera colección de tareas se pretende corregir los errores más comunes durante el uso del lenguaje algebraico, algo que será necesario para poder trabajar a posteriori con la resolución de ecuaciones. Ya en este punto, podríamos decir que, con dicha selección de tareas, se persigue corregir errores comunes en la aplicación de las técnicas básicas de resolución de ecuaciones (trasposición de términos). Por último, también se puede observar que se pretenden atajar errores durante la traducción de enunciados, algo que será necesario para que el alumno sea capaz de trabajar, de manera efectiva, en la resolución de problemas.

Sesiones

Teniendo en cuenta que el tiempo empleado en una clase no siempre se dedica exclusivamente a la consecución de objetivos y a mostrar los contenidos de la unidad, como bien hemos podido comprobar en el periodo de prácticas, las sesiones han sido programadas para una duración máxima de 50 minutos.

Además, habrá que tener en cuenta el nivel de abstracción de los contenidos que estamos tratando. El alumno deberá realizar un esfuerzo cognitivo extra para su asimilación, con lo cual, no es aconsejable cargar las sesiones con numerosas tareas si no que, conviene más introducir los conceptos de manera pausada y manejando numerosos ejemplos en las explicaciones. También incidiremos con asiduidad en instar al alumno a releer los enunciados para una mejor comprensión de los mismos y en aplicar la lógica ante todo.

Se han programado un total de 8 sesiones repartidas de la siguiente manera:

- sesiones 1 y 2 para la fase de inicio (se realizarán tareas motivadoras para introducir el tema y de conocimientos previos).
- sesiones 3, 4 y 5 para la fase de desarrollo (en ellas se trabajan los contenidos principales del tema y se realizarán tareas para la construcción de significados).
- sesiones 6 y 7 para la fase de cierre (pretendemos consolidar los conocimientos impartidos durante las sesiones anteriores mediante la ejecución de diversas tareas).
- sesión 8 para prueba escrita.

Sesión 1.

Finalidad: introducir el tema abordado. Hacer una valoración sobre qué contenidos manejan los alumnos. Hacer un breve repaso a lo visto en el curso anterior (monomios, polinomios y expresiones algebraicas).

Objetivos:

- Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.
- Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas.
- Identificar polinomios de primer grado.
- Diferenciar entre ecuaciones e identidades.

Contenidos:

Monomios, polinomios, representación verbal y simbólica, nociones de ecuación e identidad, coeficiente, parte literal, incógnita, nuevo significado del signo igual, suma y resta de monomios, multiplicación y división de monomios.

Secuenciación: hay que tener en cuenta que durante la ejecución de las siguientes tareas se irán incorporando los contenidos y repasando lo visto en el curso anterior. Es por ello que el tiempo estimado para su realización sea elevado.

- *Piensa un número. Súmale 5. Multiplícalo por 2. Al resultado réstale 4. Divide lo que te salga entre 2. Si le restas el número que pensaste, ¿obtienes el número 3? ¿Sabrías decir por qué?*

  Con ella se pretende captar la atención del alumno e introducirles el lenguaje simbólico. Se trata de una actividad grupal en la cual se espera la participación del alumno. Es un buen momento para transmitir el concepto de identidad algebraica y explicarles que de ahí se obtiene la adivinanza. A partir de ello, se recordarán conceptos del curso anterior y el profesor explicará la gran utilidad que poseen las ecuaciones proponiendo, por ejemplo, la traducción de enunciados cortos (el doble un número, su mitad, etc.).

  Duración aproximada 20 minutos.

- *Dominó Algebraico.* Es un juego con el cual podremos comprobar si los alumnos dominan el uso del lenguaje simbólico. Su utilidad reside en que dará pie a corregir errores comunes cometidos por los alumnos durante la traducción entre ambos lenguajes. También es buen momento para introducir los conceptos de coeficiente, parte literal, monomio, polinomio y grado.

Duración aproximada 20 minutos.

- *Prueba de conocimientos previos.* Se dictarán las tareas para que el alumno las entregue para un posterior análisis por parte del profesor. Es de esperar que, con las explicaciones dadas durante la sesión y los conocimientos previos del alumno, sean capaces de ejecutarlas exitosamente.
  Duración estimada 10 minutos.

a) ¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones representa un número de tres cifras ABC? Explica tu respuesta.

- $A + B + C$
- $A \cdot B \cdot C$
- $A + 10 \cdot B + 100 \cdot C$
- $100 \cdot A + 10 \cdot B + C$

b) En un garaje hay un número indeterminado de coches (C) y un número indeterminado de motos (M). ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el número total de ruedas? Explica tu respuesta.

- $R = C + M$
- $R = 4 \cdot C + 2 \cdot M$
- $R = 5 \cdot C + 2 \cdot M$
- $R = 4 \cdot (C + M) - 2$

También es recomendable encomendar al alumno unas cuantas tareas a realizar en casa:

- *Copia y completa:*

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$\boldsymbol{2a}$			
$\boldsymbol{x^2}$			
$\boldsymbol{-3ab}$			

$\frac{1}{2}xy^3$			

- *Multiplica y expresa sin paréntesis:*

$2 \cdot (x-1)$ $\quad$ $5 \cdot (a-b)$ $\quad$ $a \cdot (3-a^2)$

$3x \cdot (x-5)$ $\quad$ $x^2 \cdot (x^2+x)$ $\quad$ $5a \cdot (2a-3)$

Sesión 2

Finalidad: Hacer un repaso a los contenidos vistos en el curso anterior sobre monomios y polinomios e introducir las ecuaciones.

Objetivos:

- Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas.
- Identificar polinomios de primer grado.
- Distinguir los miembros, términos e incógnitas de una ecuación de primer grado.
- Diferenciar entre ecuaciones e identidades.
- Leer y escribir ecuaciones de primer grado.
- Aproximar una solución por tanteo usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas.

Contenidos:

Nociones de ecuación, identidad, solución, grado, parte literal, coeficiente, monomio, polinomio, fracción algebraica, valor numérico de una expresión algebraica. Sistema de representación verbal y simbólico.

Secuenciación:

- la clase se comenzará resolviendo en pizarra las tareas propuestas para realizar en casa. Es conveniente que sean los alumnos quienes aporten las soluciones a fin de ir observando el grado de implicación de los mismos, ya que será un elemento a tener en cuenta en la evaluación. Además, teniendo en cuenta la evaluación formativa que se pretende llevar a cabo del proceso enseñanza-

aprendizaje, este tipo de acciones ayudará al profesor a recoger datos sobre las dificultades que van presentando los alumnos durante la asimilación de los conceptos, lo cual ayudará a la replanificación docente.
Duración estimada 10 minutos.

- El profesor continuará explicando monomios (coeficiente, parte literal, grado, suma y resta, multiplicación y división), polinomios y ecuaciones de primer grado proponiendo ejemplos en pizarra.
  Duración estimada 20 minutos.

- Después se realizarán tres tareas a fin de asentar las nociones explicadas.
  Duración estimada 20 minutos.

a) *Copia y completa cada paréntesis con el monomio que falta:*

$$x \cdot (\dots) = x^3 \qquad 2x^2 \cdot (\dots) = 4x^2 \qquad 3a \cdot (\dots) = 6a^2$$
$$2a^2 \cdot (\dots) = -8a^5 \qquad (\dots) \cdot 2x = 6xy \qquad (\dots) \cdot xy = 6x^3y^2$$

b) *Multiplica y simplifica:*

$$6x \cdot (\frac{1}{6} + \frac{1}{x}) \qquad xy \cdot (\frac{1}{x} - \frac{1}{y})$$
$$\frac{1}{a} \cdot (a + a^2) \qquad \frac{2}{a^2} \cdot (\frac{a}{4} + a^2)$$

c) *Para resolver las siguientes ecuaciones, responde a las preguntas sugeridas en cada caso y resuelve por tanteo ayudándote de la calculadora si es preciso:*

$3x = 24$ → *¿qué número multiplicado por 3 da 24?*

$x - 20 = 0$ → *¿a qué número hay que restarle 20 para que el resultado sea 0?*

$\frac{4x+3}{5} = 1$ → *¿qué número dividido entre 5 te da exactamente 1? Entonces, ¿cuánto ha de valer* $4x + 3$*?*

- Se propondrán algunas tareas para que el alumno las realice en casa con la intención de que adquiera un manejo adecuado en trato de expresiones algebraicas.

a) Simplifica estas fracciones algebraicas:

$$\frac{4x^3}{8x} \qquad \frac{10x}{5x^3} \qquad \frac{6x^4}{2x^2}$$

$$\frac{3ab}{9a^2} \qquad \frac{4a^2b}{8ab^2} \qquad \frac{2ab}{10a^2b^2}$$

b) Completa para que se cumpla la igualdad algebraica e invéntate una adivinanza para una de ellas. ¿Son ecuaciones o identidades?:

$$\ldots \cdot (x+3) = 5x+15 \qquad \ldots \cdot (3+2x) = 9+6x$$

$$\ldots \cdot (a-1) = a^3+a^2 \qquad \ldots \cdot (a+a^2) = 2a^3b+2a^4b$$

Sesión 3

Finalidad: trabajar la trasposición de términos y resolver ecuaciones sencillas mediante el uso de la balanza siguiendo el orden preestablecido:

1. Eliminar paréntesis.
2. Eliminar denominadores.
3. Trasponer términos y reducir.
4. Despejar la incógnita.
5. Comprobar la solución.

Objetivos:

- Reconocer diferentes tipos de ecuaciones de primer grado.
- Leer y escribir ecuaciones de primer grado.
- Encontrar la solución de una ecuación de primer grado.
- Conocer los diferentes métodos de resolución.
- Comprobar la validez de una solución.

Contenidos:

Técnicas básicas de trasposición de términos. Ecuaciones equivalentes. Uso de operaciones aritméticas en desarrollo de ecuaciones. Nuevo significado del signo igual. Nociones de ecuación, identidad, solución y grado. Sistema de representación manipulativo, verbal y simbólico.

Secuenciación:

- Los alumnos saldrán a la pizarra a resolver las tareas propuestas.
  Duración estimada 10 minutos.

- El profesor explicará en pizarra los diferentes tipos de ecuaciones de primer grado que se pueden encontrar y cómo se resuelven. Un recurso útil para hacer ver a los alumnos el nuevo significado del signo "=" es el uso de la balanza que podremos encontrar en la siguiente web:
  http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_324_g_3_t_2.html?open=instructions &from=topic_t_2.html

  Resuelve usando la balanza algebraica:

  a) $2x + 2 = 8$
  b) $-4x - 2 = x - 8$
  c) $-3x - 1 = -2x - 2$
  d) $4x - 5 = 2x + 3$
  e) $3x + 6 = 7x - 2$

  Duración estimada 25 minutos.

- Tras los ejemplos vistos con la balanza, se propondrá la siguiente tarea:
  Aquí se resuelve la misma ecuación siguiendo distintos pasos. ¿Son ambos procedimientos correctos? ¿Por qué? Comprueba la solución.

$$\begin{gathered} 4 \cdot (x-2) + 2x + 10 = 2 \cdot (3x+1) + 4x + 8 \\ 4x - 8 + 2x + 10 = 6x + 2 + 4x + 8 \\ 6x + 2 = 10x + 10 \\ -8 = 4x \\ -2 = x \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 4 \cdot (x-2) + 2x + 10 = 2 \cdot (3x+1) + 4x + 8 \\ 4 \cdot (x-2) + 2x + 2 = 2 \cdot (3x+1) + 4x \\ 4x - 8 + 2x + 2 = 6x + 2 + 4x \\ -8 = 4x \\ -2 = x \end{gathered}$$

Duración estimada 15 minutos.

- También se encomendará otra tarea para que la realicen en casa con el fin de asentar el orden que se debe seguir en la resolución de ecuaciones y aprendan a trasponer términos.

  a) Indica en cada caso el grado de la ecuación. Resuelve las que sean de grado uno y comprueba su solución:

$3x+x^2 = 12 + x^2$	$x^2 + x - 4 = 6$	$\frac{x}{3} = 2$
$x + 4 = 3$	$6 - x = 7$	$5 - x - x^2 = 0$
$3x - 2 = 0$	$\frac{x}{2} + 4 = 7$	$8 - 3x = 2$

Sesión 4

Finalidad: trabajar la resolución de ecuaciones y la traducción de enunciados.

Objetivos:

- Encontrar la solución de una ecuación de primer grado.
- Diferenciar entre ecuaciones e identidades.
- Construir ecuaciones equivalentes a una dada.
- Conocer los diferentes métodos de resolución.
- Comprobar la validez de una solución.
- Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.

Contenidos:

Ecuaciones equivalentes. Trasposición de términos. Nociones de ecuación, identidad, solución y grado. Sistemas de representación simbólico y verbal.

Secuenciación:

- Los alumnos resolverán las tareas propuestas en la sesión anterior.
  Duración estimada 10 minutos.

- Tras ello, el profesor indicará a los alumnos que realicen la siguiente tarea a fin de asentar los conocimientos de la sesión anterior. Deberá observar si los alumnos son capaces de resolverla por ellos mismos, a la vez que ayudará a los que presenten mayores dificultades. Es importante que los alumnos aprendan correctamente el orden a seguir pues le puede otorgar confianza y una buena base para resolver cualquier tipo de ecuación:

a) Indica en cada caso si se trata de una ecuación o una identidad. Para las que sean ecuaciones, indica su grado, resuélvelas y comprueba su solución:

$$2 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{5}\right) - \frac{3x}{10} + 2x^2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2x}{5}\right) + 2x^2 - 1$$

$$\frac{1}{4} - x^3 - 2 \cdot \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{2}\right) = x - x^3 + 3 \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{x}{2}\right)$$

$$(x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 - 1$$

Duración estimada: 10 minutos.

- Tras ello, el profesor deberá valorar si continúa con las explicaciones allanando el terreno hacia la resolución de problemas o, por el contrario, considera que es necesario practicar un poco más la resolución de ecuaciones, para lo cual se realizará otra tarea de características similares a la anterior. Es de esperar que, a estas alturas de la unidad didáctica, el alumno haya refrescado su memoria con los conocimientos del curso pasado. Suponiendo esto último, el profesor trabajará con la traducción de enunciados sencillos. Para ello, el profesor dictará la siguiente tarea:

Escribe una expresión para cada enunciado:

- *El doble de un número*
- *El anterior a un número*
- *El siguiente de un número*
- *El doble del siguiente de un número*
- *La cuarta parte de un número aumentado en tres unidades*
- *La mitad de un número, más seis unidades*

Duración estimada 10 minutos.

- La última parte de la sesión se dedicará a introducir la resolución de problemas proponiendo unos ejemplos sencillos de cantidades que se resolverán entre todos los presentes.

a) *Si sumamos un número con su siguiente obtenemos 47. ¿De qué números se trata?*
b) *Si al triple de un número le restamos ocho unidades, obtenemos 25. ¿Qué número es?*
c) *Al sumar la tercera parte de un número con su mitad, se obtiene 20. ¿De qué números hablamos?*
d) *La suma de tres números consecutivos es 135. ¿De qué números hablamos?*

Duración estimada 20 minutos.

Sesión 5

Finalidad: trabajar la traducción de enunciados verbales al lenguaje simbólico y la resolución de problemas.

Objetivos:

- Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.
- Encontrar la solución de una ecuación de primer grado.
- Construir ecuaciones equivalentes a una dada.
- Conocer los diferentes métodos de resolución.
- Comprobar la validez de una solución.
- Modelar enunciados de problemas.
- Interpretar una ecuación.

Contenidos:

Traducción al lenguaje algebraico de enunciados. Técnicas de trasposición. Nociones de incógnita, solución, primer y segundo miembro, etc. Sistemas de representación simbólico, verbal y gráfico.

Secuenciación: se realizarán tres tareas a lo largo de la sesión. El profesor aprovechará cada una de ellas para ir asentado los conocimientos impartidos en las sesiones anteriores a la vez que irá introduciendo a los alumnos en la resolución de problemas.

- *Fátima es siete años mayor que su hermano Antonio y dos años menor que su hermana María. Calcula la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 34 años.*

  .El profesor irá observando y ayudando a los alumnos a superar la tarea. La resolverá en pizarra algún alumno que deberá explicar detalladamente el proceso de resolución. Es conveniente observar que hay "tres vías" para su resolución. Todo dependerá de a quién de los tres hermanos le asignamos la incógnita:

Fátima	Antonio	María
X	x-7	x+2
x+7	**X**	x+9
x-2	x-9	**X**

  También podríamos ayudarnos de la recta real para hacerlo más intuitivo. Duración aproximada 15 minutos.

- *Para cada ecuación, invéntate un enunciado:*

  a) $2x + 1 = 3x - 5$
  b) $2 \cdot (x - 1) = x + 17$
  c) $3 \cdot (x - 12) = 2x$

  Duración estimada 15 minutos.

  La tarea se realizará por parejas, de modo que los alumnos se puedan ayudar los unos a los otros.

- *Sabiendo que el perímetro de una figura plana se calcula sumando las longitudes de todos los lados que la conforman, calcula cuánto miden los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 24 cm. y sabiendo que:*

  a) Su base es el doble que su altura
  b) Que su base es 3cm. mayor que la altura

  Dibuja cada rectángulo para ayudarte.

  El profesor, nuevamente, observará y ayudará a los alumnos a resolver la tarea. Es importante que el alumno se ayude dibujando el rectángulo en la libreta. De este modo podrá obtener los datos y relacionarlos entre ellos. También es importante que el alumno concluya la tarea con una frase y no con la simple mención de uno o dos números, es decir, que esos datos que son solución los traslade al contexto del problema que está resolviendo.

Duración estimada 20 minutos.

- También se encomendará la siguiente tarea para realizar en casa para que los alumnos practiquen con la traducción de enunciados y la resolución de ecuaciones:

  El precio de las manzanas ha subido 0,25€ por kilo. Con el dinero que ayer pagabas por cuatro kilos, hoy sólo te dan tres. ¿A cuánto están hoy las manzanas?

Sesiones 6 y 7

Finalidad: da comienzo la fase de cierre y en ella trabajaremos la resolución de problemas.

Objetivos:

- Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.
- Modelar enunciados de problemas.
- Interpretar y discriminar soluciones.

Contenidos:

Traducción de enunciados, ecuaciones equivalentes, trasposición de términos, nociones de ecuación, solución, sistemas de representación verbal y simbólico.

Secuenciación: se comenzará la sesión con la corrección de la tarea propuesta. Dicha corrección la llevará a cabo el profesor dando las explicaciones oportunas. Por ejemplo, si ayer un kilo costaba "x", al comprar cuatro kilos estaría gastando "4x". Y si hoy un kilo cuesta "x+0,25", entonces tres kilos costarán "3(x+0,25)".

Tras ello, con la intención de motivar a los alumnos, han sido diseñadas tres tareas puntuables. La idea es agrupar por parejas a los alumnos, intentando hacer una mezcla heterogénea, de modo que se ayuden entre ellos. Cada pareja obtendrá medio punto por la resolución de cada problema, pudiendo obtener un máximo de dos puntos. El profesor dictará las tareas o, si hubiese posibilidad, las mostrará en la pizarra digital. Irá observando y dando indicaciones a quienes las soliciten. Los últimos quince minutos el profesor los dedicará a la corrección de dichas tareas. En la siguiente sesión se seguirá el mismo protocolo con el fin de que los alumnos tengan la opción de enfrentarse a seis tareas y obtener dos puntos para la evaluación (20%).

- *El perímetro de un triángulo isósceles mide 15 cm. Sabemos que el lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados iguales. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo y dibújalo en tu cuaderno.*
- *En un concurso de cincuenta preguntas, dan tres puntos por cada acierto y quitan dos por cada fallo. ¿Cuántas preguntas ha acertado un concursante que ha obtenido 85 puntos?*

- *Nada se conoce con seguridad sobre la vida de Diofanto, uno de los grandes sabios de antigua Grecia, salvo la edad a la que falleció, que fue facilitada por su epitafio, redactado en forma de problema y que fue conservado en la antología griega:*

  > *"¡Caminante! Aquí se sepultaron los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán de larga fue su vida, la sexta parte de la cual ocupó su infancia.*
  >
  > *Había transcurrido después una doceava parte de su vida cuando de pelo se cubrió su barba. Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.*
  >
  > *Pasó un quinquenio más y le hizo feliz el nacimiento de su precioso primogénito, cuya vida duró nada más que la mitad de la de su padre.*
  >
  > *Y con pregonada pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años a la muerte de su hijo."*

  ¿Cuántos años vivió este ilustre matemático?

Con la última tarea, el profesor puede aprovechar para ofrecer un recorrido histórico sobre los grandes personajes de las matemáticas como lo fueron Diofanto y Viéte. La gran innovación de Diofanto fue sustituir con abreviaturas una serie de magnitudes, conceptos y operadores frecuentes, es decir, inicia el "álgebra sincopada". No utilizó una notación algebraica muy sofisticada, pero sí introdujo un simbolismo algebraico para lo desconocido y para las potencias de lo desconocido. Esto le permitía expresar las ecuaciones con mayor facilidad, por lo tanto consigue dar un paso del álgebra verbal o retórica a la simbólica. Al poseer únicamente notación para una incógnita, cuando se presentaban problemas que involucraban a un número mayor de ellas las nombraba como "primera incógnita", "segunda incógnita", "tercera incógnita"… Tampoco tenía un símbolo para nombrar a un número n cualquiera, de modo que la expresión (6n+1) / (n2+n) se expresaba de la siguiente forma: "un número por un factor de seis aumentado en uno, el cual se divide por la suma entre el cuadrado y el mismo número". De este modo era mucho más difícil desarrollar expresiones complicadas. Se deberá esperar a Viète (s. XVI) para dar el gran salto entre la notación sincopada de Diofanto y la notación algebraica moderna.

El profesor, a lo largo de la sesión, instará a los alumnos a releer los enunciados de las tareas para una mayor comprensión de los mismos.

Como tarea para casa, el alumno deberá hacer un repaso de las tareas realizadas durante la sesión. Supondrá un cierto grado de motivación saber que dispondrá de otras tres nuevas tareas durante la siguiente sesión con el objetivo de conseguir dos puntos para la evaluación.

Las tareas propuestas para la siguiente sesión son las siguientes:

- *¿Cuántos litros de vino de 5€ el litro deben mezclarse con vino de 3€ el litro para obtener 50 litros de vino cuyo precio sea de 4€ el litro?*
- *Un grifo llena un depósito en tres horas y otro grifo lo hace en seis horas. ¿Cuánto tardarían en llenarlo ambos grifos a la vez?*
- *El importe del recibo de la luz se calcula según la fórmula siguiente:*

$$I = F + (L_{ac} - L_{ant}) \cdot P$$

  donde:

  $I \rightarrow$ *Importe (€)*

  $F \rightarrow$ *Gastos fijos según potencia contratada y alquiler de equipos de medida (€)*

  $L_{ac} \rightarrow$ *Lectura actual (kWh)*

  $L_{ant} \rightarrow$ *Lectura anterior (kWh)*

P → Precio del kWh (€/kWh)

Con esta información:

a) Escribe la fórmula en su versión actualizada, teniendo en cuenta que la compañía impone unos gastos fijos de 8,50 € y cobra 0,80 € por cada kilovatio hora consumido.

b) El empleado de la compañía eléctrica leyó el mes pasado, en el contador de la vivienda de la familia Muros, 2457 kWh, y este mes, 2516 kWh. ¿A cuánto asciende el importe total de la factura?

c) ¿Cuál de estas sería la fórmula actualizada de la factura, en el caso de que los gastos fijos y el precio del kWh subieran un 10%?:

- $I = 8{,}50 + (L_{ac} - L_{ant}) \cdot 0{,}80 + 10$
- $I = 9{,}35 + (L_{ac} - L_{ant}) \cdot 0{,}88$
- $I = 8{,}50 + (L_{ac} - L_{ant}) \cdot 0{,}80 \cdot 1{,}1$
- $I = \frac{8{,}50+(L\_ac-L\_ant)\cdot 0{,}80\cdot 10}{100}$

A continuación, presentamos una tabla que relaciona las sesiones con los objetivos establecidos durante el análisis cognitivo.

		OBJETIVOS														
		1.1	1.2	1.3	2.1	2.2	2.3	2.4	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	4.1	4.2	4.3
SESIONES	1	X	X	X			X									
	2		X	X	X		X	X		X						
	3					X		X	X			X	X			
	4	X							X		X	X	X			
	5	X							X		X	X	X	X	X	
	6	X												X		X
	7	X												X		X

De este modo, queda reflejado que durante el desarrollo de la unidad se tratarán todos y cada uno de nuestros objetivos. Haciendo un pequeño balance, podríamos decir que durante las dos primeras sesiones se trabajarán los dos primeros focos seleccionados: *manejo del lenguaje algebraico e identificar y caracterizar ecuaciones de primer grado.* Es conveniente recordar que los alumnos ya traen del curso anterior algunos conceptos y, por tanto, durante estas dos primeras sesiones se trabajarán dichos conceptos. Ya en nuestra fase de desarrollo, nos centramos en el tercer foco: *resolución de ecuaciones de primer grado*, y también hacemos una aproximación a la *resolución de problemas,* que se tratará en profundidad durante la fase de cierre de nuestra unidad (últimas dos sesiones).

Evaluación

La evaluación que realiza el profesor en el aula se propone determinar, mediante la recopilación y el análisis sistemático de datos, hasta qué grado se han cumplido las expectativas de aprendizaje establecidas al inicio del proceso de enseñanza aprendizaje y cómo pueden mejorarse sus resultados (Caraballo, Lupiánez y Rico, 2011, p. 1).

En esta sección trataremos los procedimientos a seguir durante la evaluación del alumnado. Como señala Rico (1997, p. 21):

Las pruebas estandarizadas de papel y lápiz, bien en versión de un test de cuestiones y respuestas puntuales, bien mediante una prueba para el desarrollo más extenso de cuestiones y la resolución de problemas más complejos, se pueden considerar instrumentos insuficientes para emitir un juicio útil sobre la competencia matemáticas de los alumnos.

Por tanto, debemos considerar otros instrumentos que nos proporcionen y ayuden a recoger información acerca de los conocimientos adquiridos por parte del alumno. Por ello, consideraremos una evaluación formativa, en donde entrarán en juego otros instrumentos añadidos a la tradicional prueba escrita. Nuestra propuesta es la siguiente:

- Revisión de cuaderno: 10%. Se valorará una buena estructura y organización de los contenidos y el esfuerzo por parte del alumno en llevarla a cabo.
- Notas de clase: 10%. Se incluye la actitud del alumno, participación en clase, interés y la resolución de tareas en la pizarra.
- Ejecución de las tareas propuestas: 20% (las descritas para las sesiones 6 y 7).
- Prueba escrita: 60%.

Por otro lado, en la Orden ECI2220/2007 aparece reflejado lo siguiente: "*Los criterios de evaluación son una referencia fundamental respecto a qué se debe evaluar e indican aquellos aprendizajes que se consideran esenciales para que el alumnado pueda enfrentarse sin dificultades a su actividad posterior…*".

Tomando como base lo anterior, pasamos a detallar los criterios de evaluación que se tendrán en cuenta a la hora de hacer una valoración del proceso enseñanza-aprendizaje que planteamos en esta unidad. Partiremos de los criterios pertenecientes a la orden ECI2220/2007 (citados en el epígrafe fundamentación), para después seleccionar algunos propios, que son:

C1 → *Traducir de lenguaje verbal a lenguaje algebraico enunciados de índole matemática*. Con este criterio pretendemos comprobar la capacidad que posee el alumno de extraer información relevante de un enunciado.

C2 → *Resolver ecuaciones de primer grado*. A través de este criterio, se comprobará la madurez adquirida por parte del alumno en el manejo de los diferentes métodos de resolución de ecuaciones.

C3 → *Reconocer una igualdad algebraica como identidad o ecuación*. Con este criterio se valorará si el alumno ha asumido un nuevo significado del signo "=".

C4 → *Comprobar si un valor es solución de una ecuación de primer grado*. Nos ayudará a valorar si el alumno es coherente a la hora de juzgar los resultados obtenidos.

C5 → *Plantear y resolver problemas de la vida real mediante el uso de ecuaciones de primer grado*. Por último, con este criterio valoraremos la capacidad que posee el alumno para trasladar al lenguaje algebraico enunciados de problemas, aplicar las técnicas necesarias para la resolución del problema y traducir el resultado obtenido al contexto original del problema.

Dichos criterios, sumados a los redactados en la orden ECI 2220/2007, nos permitirán evaluar qué conocimientos adquirió el alumno y, por otro lado, que grado de eficiencia posee esta unidad didáctica.

Pasamos a continuación a describir la prueba escrita, que se realizará en la octava sesión y tendrá una duración estimada de 55 minutos:

TAREA 1. Jorge, Amalia y Lorena son aficionados a los videojuegos. Vamos a representar con x el número de videojuegos que tiene Amalia.[1]

a) Indica si son correctas o incorrectas las siguientes expresiones:

Lenguaje ordinario	Expresión algebraica
Disminuimos en cinco unidades el doble del número de videojuegos de Amalia.	$2x-5$
La suma del número de videojuegos de Amalia y su consecutivo.	$x+(x+1)$
El cuadrado del número de videojuegos de Amalia aumentado en una unidad.	$2x+1$
El producto del número de videojuegos de Amalia por su inmediato anterior.	$x\cdot(x-1)$
El cubo del número de videojuegos de Amalia, más el triple del mismo número.	$x^3+\frac{x}{3}$

b) Sabemos que Jorge tiene tres videojuegos más que Amalia y a Lorena le faltan dos para tener el doble que Jorge. Expresa matemáticamente, de la forma más sencilla posible, cuántos videojuegos tienen Jorge y cuántos Lorena.

TAREA 2. Indica, en cada caso, si se trata de una ecuación o una identidad. Para las que sean ecuaciones, resuélvelas comprobando su solución ayudándote con la calculadora.

a) $\frac{2x^2-x-1}{3}=\frac{2x+1}{3}\cdot(x-1)$

b) $2\cdot(x-7)=\frac{x-1}{3}+1$

c) $7x-3=6$

d) $(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)=x^3+x^2-x-1$

TAREA 3. Antonio tiene 4 € de paga semanal y se gasta 2,50 € cada semana. Si quiere comprarse un teléfono móvil que vale 54 €, ¿cuántas semanas tardará en ahorrar para poder comprar el teléfono?

[1] Esta tarea ha sido extraída de las Pruebas de Diagnóstico realizadas por la Junta de Andalucía en el curso 2011-2012.

TAREA 4. Pepe, Luis y Marisa han ganado 3.300 € que van a repartir de la siguiente forma: a Pepe la corresponden 200 € menos que a Manuel, y a Antonio 200 € menos que a Pepe. ¿Cuánto corresponde a cada uno?

TAREA 5. Un dicho popular cuenta que un grupo de palomas se encontró con un gavilán y que el gavilán le preguntó a una paloma que cuántas palomas iban. La paloma le contestó: con éstas, otras tantas como éstas, el doble de éstas, la mitad de éstas y usted señor gavilán, somos 100. Entonces, ¿cuántas palomas iban?

A continuación, presentamos una tabla que relaciona las tareas que conforman la prueba escrita y los criterios de evaluación seleccionados:

	ECI 1	ECI 2	ECI 3	ECI 4	C1	C2	C3	C4	C5
TAREA1		X	X		X				
TAREA2	X	X		X		X	X	X	
TAREA3	X	X	X		X	X			X
TAREA4	X	X	X		X	X			X
TAREA5	X	X	X		X	X			X

Analizando brevemente la prueba, se puede apreciar que aparecen tareas de diferentes niveles de complejidad (reproducción→tarea 2, conexión→tareas 1 y 3, reflexión→tareas 4 y 5) y enmarcadas en diferentes situaciones (personales, educativas y públicas). También incluye los sistemas de representación verbal y simbólico y todos los conceptos relacionados con nuestro tema.

A partir de la tabla y el análisis anterior, podemos concluir que la selección de tareas elegidas para la prueba escrita nos ayudará a discernir sobre qué contenidos maneja adecuadamente el alumno y cuáles no.

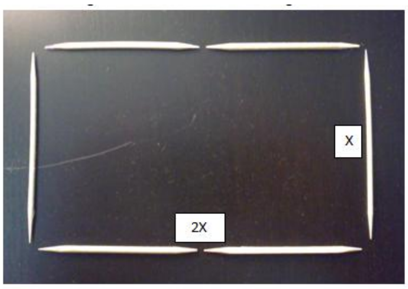
Atención a la diversidad

En el apartado *Orientaciones metodológicas* que se incluye en la Orden ECI 2220/2007 aparece reflejado: "*Al planificar la actividad en el aula habrá que tener en cuenta las características de cada grupo y adoptar las medidas oportunas para atender a los distintos ritmos de aprendizaje*". Cada alumno posee peculiaridades y necesidades educativas distintas y no todos asimilan los conceptos por igual. Es por ello que hemos querido incluir en este documento un apartado sobre Atención a la diversidad.

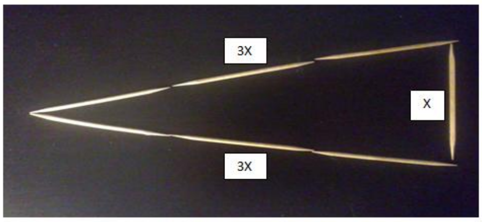
Las matemáticas poseen una estructura jerarquizada en la cual se hace necesaria la comprensión de ciertos conceptos para llegar a comprender y dominar otros más complejos. De modo que propondremos dos métodos que fueron diseñados por nuestro grupo en la asignatura "Innovación docente e investigación educativa en ciencia y tecnología" con la intención de ayudar al alumno a conseguir una mayor abstracción mediante el uso del sistema de representación manipulativo.

El primero de ellos lo llamaremos "método de los palillos". Con él podremos representar numerosos problemas que estén relacionados con longitudes. El alumno deberá construir la figura con los palillos estableciendo las relaciones entre datos conocidos y desconocidos. La traducción al lenguaje algebraico es casi inmediata a partir de la construcción. Pongamos algunos ejemplos:

- *El perímetro de un rectángulo es de 30 metros. Sabiendo que la altura es la mitad que su base, ¿cuáles serían las dimensiones?*

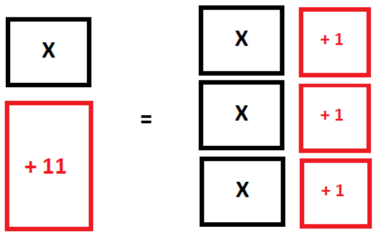


- *En un triángulo isósceles, se sabe que los lados iguales son el triple del desigual. Si el perímetro es de 21 centímetros, ¿cuánto mide cada lado?*

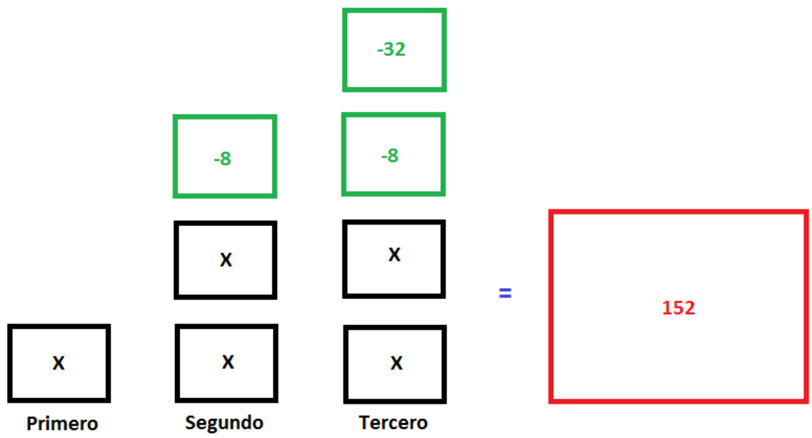


Otro recurso que ofrecemos es el "método de los cubos". Se trata de etiquetar al cubo con una letra si es incógnita o con un número si es una cantidad relacionada con la incógnita. Así, por ejemplo, podremos resolver problemas numéricos, de edades, repartos, etc. Algunos ejemplos ilustrativos son los siguientes:

- *Un número aumentado en once cifras, es el triple de su consecutivo ¿Qué número es?*



- *Quiero repartir 152 caramelos entre mis tres sobrinos, de manera que al segundo le voy a dar el doble que al primero menos 8 caramelos, y al tercero 32 menos que al segundo ¿Cuántos caramelos he de dar a cada uno?*



En el otro extremo podemos encontrarnos alumnos que han adquirido rápidamente los conocimientos y destrezas propias del tema. Dominan con soltura los conceptos y resuelven los problemas sin apenas presentar dificultades. Con el fin de continuar motivándolos y ampliar sus conocimientos, proponemos una tarea en la cual, a través de una aplicación web, podemos representar rectas y conectar nuestro tema de ecuaciones con el de funciones haciéndole ver al alumno que la solución de la

ecuación no es más que el punto de corte de la recta que representa con el eje X. En la siguiente dirección web se encuentra dicha aplicación:
http://www.analyzemath.com/Slope_Intercept_Line/Slope_Intercept_Line.html

También se pueden utilizar software libre como GeoGebra, que es bastante completo ya que trabaja tanto el sistema de representación simbólico como el gráfico.

Por otro lado, hemos querido incluir una serie de tareas que puedan ofrecer una alternativa a alguna de las seleccionadas para el desarrollo de la unidad.

- *Hace mucho tiempo cuando aun no se había creado la moneda se hacían negocios mediante el trueque. Por ejemplo, un collar y una lanza se cambiaban por un escudo; un escudo se cambiaba por un collar y un bulto de maíz; dos escudos se cambiaban por tres cuchillos; y un bulto de trigo se podía cambiar por dos cuchillos, un escudo y un collar.*[2]
    1. *Identifica los datos que intervienen en la situación, representándolos asociándolos con un símbolo o letra del abecedario.*
    2. *Establece las relaciones de igualdad entre los artículos utilizando los nombres de las variables del punto anterior.*
    3. *Establece otras equivalencias entre los artículos, escríbelos como expresiones matemáticas y asóciales un enunciado verbal.*

- *En esta tabla se muestran las edades de cuatro amigos*[3]*:*

	Eva	Sara	Carlos	Paula
Edad	2x	X	2x+7	2(2x+7)
Edad	y	y/2	y+7	2(y+7)

a) *Escribe un enunciado que represente la edad de cada amigo.*
b) *Expresa la edad de Paula de otra forma. Hazlo en forma de enunciado y también como una expresión algebraica.*
c) *Plantea enunciados diferentes que correspondan a la edad de cada uno de los cuatro amigos. Escríbelos en forma de expresión algebraica utilizando otro nombre para la variable.*

[2] Tarea extraída de Cifuentes, Dimaté, Rincón, Velásquez, Villegas, Flores. *Ecuaciones lineales con una incógnita.*
[3] Tarea extraída de Cifuentes, Dimaté, Rincón, Velásquez, Villegas, Flores. *Ecuaciones lineales con una incógnita.*

Conclusiones

La unidad didáctica fue diseñada con el propósito de dar solución a las dificultades que presentan los estudiantes para plantear y resolver problemas en los que se vean involucradas las ecuaciones lineales. En dicho diseño, han sido fundamentales la revisión sobre la legislación curricular vigente y las aportaciones del Análisis Didáctico para conseguir un documento detallado (trabajo que se llevo a cabo de manera grupal durante el desarrollo de la materia Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas).

Ha sido un camino largo el que hemos recorrido para llegar a este punto final. Durante el proceso de elaboración de esta unidad didáctica encontramos dificultades que tuvimos que ir superando. Quizás, la mayor de ellas fue diseñar tareas originales e innovadoras que ayuden a motivar al alumno y favorezcan un proceso constructivista del aprendizaje. Esto es algo en lo que se ha reiterado en numerosas ocasiones durante las clases teóricas recibidas en el máster, pero no es una labor sencilla confeccionar este tipo de tareas.

Salirse de la tradicionalidad que muestran los libros de texto es un requisito fundamental para elaborar una unidad didáctica "distinta" como lo pueda ser ésta. Hemos incluido actividades en la que se trabajan los distintos sistemas de representación y que, con toda seguridad, ayudarán al alumno a relacionar los conceptos y sus estructuras. Además, no debemos olvidar que uno de los principales objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria es promover el desarrollo de las competencias básicas, con lo cual, también se han incluido tareas como la de la balanza y el dominó algebraico, que favorecen la competencia lingüística y digital, y tareas grupales, que involucrarán un desarrollo de la competencia social y ciudadana.

Se han incluido una amplia gama de tareas en el epígrafe de Atención a la diversidad para intentar satisfacer las necesidades educativas y ritmos de aprendizaje de los distintos tipos de alumnos. Todas ellas son susceptibles de incluirse en el desarrollo de las sesiones en detrimento de alguna otra.

Por último, siendo autocríticos con nuestro trabajo, el hecho de que el presente documento se muestre como un trabajo fin de máster no significa que esté acabado. Más bien todo lo contrario. Debe servir como punto de partida y reflexión para una nueva reconstrucción y mejora ya que, por desgracia, no ha habido ocasión de llevarla a la práctica y no se ha podido concretar una valoración en cuanto a efectividad se refiere.

Referencias

- Calero, J., Gil, M. y Fernández, M. (2011). *Los costes del abandono escolar prematuro. Una aproximación a las pérdidas monetarias y no monetarias causadas por el abandono prematuro en España.* Descargado el 29/5/2012 de http://educacion.gob.es/dctm/?documentId=0901e72b81261710.
- Caraballo, R., Lupiánez, J. L., Rico, L. (2011). *Evaluación de la competencia matemática.* Documento no publicado: Universidad de Granada.
- Cifuentes, Dimaté, Rincón, Velásquez, Villegas, Flores. *Ecuaciones lineales con una incógnita.*
- Consejo Económico y Social (2011). *Fracaso y abandono escolar temprano.* Revista CAUCES 16, pp. 44-81. Descargado de: http://www.ces.es/servlet/noxml?id=CesColContenido%20M01302704638507~S4507809~Ncauces_16.pdf&mime=application/pdf
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Universidad de Granada.
- Junta de Andalucía, 2007. Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía. BOJA, 171. 51-56.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Universidad de Granada.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE, 106*, 17158-17207.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). *REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. *BOE, 174*, 31680-31828.

- Rico, L. (1997). *Consideraciones sobre el currículo de Matemáticas para la Educación Secundaria.* Universidad de Granada.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A. y Gómez, P. (2007*). Matemáticas escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación*. Comunicación presentada en VIII Seminario de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la SEIEM (2007).
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58*, 7-23.

Anexo I: Historia de las ecuaciones

INTRODUCCIÓN

¿Quién dijo que la historia de las matemáticas no es importante? En dicha historia encontramos las raíces de nuestro pensamiento, la evolución de las ideas y las claves del futuro. Para hablar del origen de las ecuaciones nos tendríamos que remontar a la época de los babilonios, hace más de 4000 años. Esta civilización constituía un imperio grande y poderoso no sólo por su fuerza militar, sino también por la de sus conocimientos.

MESOPOTAMIA

Los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya sabían resolver ecuaciones de primer y segundo grado usando completación de cuadrados o sustitución. También disponían de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, pero dado que ellos no conocían los números negativos, nunca consideraron las posibles raíces negativas. Tampoco descubrieron el cero, del cual se puede afirmar que es un invento indio que llegó a Europa a través de los árabes. Llegaron incluso a tratar con ecuaciones cúbicas, bicuadradas y con algunos sistemas de ecuaciones lineales y no lineales. Reducían problemas más complicados a otros más sencillos por medio de transformaciones. Eran unos auténticos genios.

Forman parte de su legado las tablas de barro en las cuales los babilonios escribían sus letras y signos con unos punzones que posteriormente cocían para que no se perdiera lo escrito (escritura cuneiforme). Algunas de esas tablas se han encontrado recientemente y nos han permitido ser conocedores de la inmensa sabiduría babilónica. Sabemos, por ejemplo, que usaban un sistema de numeración posicional (el primero del que se tiene constancia) en base 60, que dividían la circunferencia en 360º, cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Hoy día el sistema sexagesimal está presente en la medida del tiempo y las coordenadas geográficas, por ejemplo. No usaban letras para identificar incógnitas pero se referían a ellas con palabras como "longitud", "área",...

EGIPCIOS

Por otro lado, la otra gran civilización de la época, los egipcios, desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos relacionados con la repartición de víveres, cosechas y materiales. Hallaron un método para resolver ecuaciones de primer grado llamado el "método de la falsa posición", el cual consistía en tomar un valor concreto para la incógnita, comprobar la ecuación y, si se verificaba la igualdad ya tenían la solución, en caso contrario, mediante unos cálculos de mayor dificultad, obtenían la solución exacta.

Las ecuaciones más utilizadas por los egipcios eran de la forma:

$$x+ax=b$$

$$x + ax + bx = 0$$

donde a, b y c eran números conocidos y x la incógnita que ellos denominaban *montón*.

Los egipcios nos dejaron en sus papiros multitud de problemas matemáticos resueltos. La gran mayoría son de aritmética. Entre los papiros más famosos se encuentra uno llamado *Papiro Rhind*., que fue comprado en 1858 por Henry Rhind, de ahí su nombre y que en la actualidad se encuentra en el Museo Británico. Gracias a ellos sabemos que usaban un sistema no posicional en base diez.

CHINA

Los chinos fueron los inventores del ábaco, famoso instrumento utilizado en nuestras aulas de primaria, lo cual indica que utilizaban un sistema numérico posicional. Existe un libro llamado *Libro de las artes* aproximadamente escrito entre los siglos III y IV antes de Cristo. En él se plantean técnicas de fabricación de objetos, como por ejemplo la construcción de coches de caballos, embarcaciones y arcos y flechas. Por tanto contiene algunos datos sobre fracciones, ángulos y unidades de medidas. Otro de los libros más antiguos del que se tiene constancia de la cultura matemática china es el *Libro del maestro* o también llamado *Cuatro capítulos de Mozi,* el cual contiene problemas relacionados con las matemáticas, la lógica y la física. Pero el primer gran libro dedicado exclusivamente a las matemáticas es *Nueve capítulos sobre el arte matemático*. Fue confeccionado durante la dinastía Han (206 a.C. – 220 d.C.) y es de autor desconocido. Está escrito en forma de preguntas y respuestas y contiene un total de 246 problemas divididos entre sus nueve capítulos. Los principales conocimientos que transmite este libro son sobre la resolución de sistemas de ecuaciones, una introducción a los números negativos, diversos métodos para resolver ecuaciones y algunos algoritmos para calcular raíces cuadradas y cúbicas. Pero la contribución algebraica más importante es, sin duda, el perfeccionamiento alcanzado en la regla de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Para todos los sistemas se establece un método genérico de resolución muy similar al que hoy conocemos como método de Gauss, expresando incluso los coeficientes en forma matricial, transformándolos en ceros de manera escalonada.

Por último, cabe destacar el libro "Espejo Precioso de los cuatro elementos". Dichos elementos son la tierra, el cielo, el hombre y la materia, los cuales representan las cuatro incógnitas de una ecuación. En este libro se estudian ecuaciones de grado hasta catorce y sistemas de ecuaciones. Además, su autor utiliza un método de transformación para ecuaciones llamado *fan fa* que hoy día se conoce como el método Horner. Se trata de la obra cumbre del álgebra china y fue redactado a principios del s. XIV.

GRECIA

Casi en paralelo con los chinos, nos encontramos con la época de los griegos. Fueron muchos los hallazgos matemáticos a los que contribuyó esta civilización. Desde Tales de Mileto a Euclides, encontramos un sinfín de conocimientos aportados que hoy día perduran e incluso se enseñan en nuestras aulas.

Casi toda la matemática griega se recoge en *Los Elementos* de Euclides. Consta de trece libros que abarcan conocimientos geométricos, algebraicos y de aritmética principalmente. Pero sin duda alguna, el mayor algebrista de la época fue Diofanto de Alejandría, el cual se disputa el honorable título de Padre del Álgebra con otro personaje histórico de origen musulmán al que luego haremos alusión. Su libro *Aritmética* consta de una colección de 150 problemas sobre aplicaciones del álgebra. Al parecer la obra estaba formada por trece libros, pero sólo se conservan seis de ellos después del famoso y desgraciado incendio de la Biblioteca de Alejandría a manos de los cristianos. Fue capaz de desarrollar un método para hallar ternas pitagóricas, el cual presentamos a continuación de manera breve y extraído de la pagina web http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/cuerva/I-Egipto-Babilonia.pdf

Supongamos que tenemos una terna pitagórica (a, b, c). Es decir, $a, b, c \in \mathbb{N} \ni a^2 + b^2 = c^2$. Dividiendo por c^2 obtenemos $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, de forma que si $x = \frac{a}{c}$ e $y = \frac{b}{c}$, (x, y) es un punto del plano con coordenadas racionales que está sobre el círculo de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.
Recíprocamente, cualquier punto (x, y) del círculo unidad que tenga coordenadas racionales $x = \frac{p}{q}$, $y = \frac{r}{s}$, nos proporciona, no sólo una terna pitagórica, sino un conjunto infinito de ellas (psk, qrk, qsk).

De modo que para encontrar las soluciones enteras de $a^2+b^2=c^2$, Diofanto buscó las soluciones racionales de $x^2+y^2=1$.

La gran innovación de Diofanto está en que sustituye con abreviaturas una serie de magnitudes, conceptos y operadores frecuentes, es decir, inicia el "álgebra sincopada". No utilizó una notación algebraica muy sofisticada, pero sí introdujo un simbolismo algebraico para lo desconocido y para las potencias de lo desconocido. Esto le permitía expresar las ecuaciones con mayor facilidad, por lo tanto consigue dar un paso del álgebra verbal o retórica a la simbólica. Al poseer únicamente notación para una incógnita, cuando se presentaban problemas que involucraban a un número mayor de ellas las nombraba como "primera incógnita", "segunda incógnita", "tercera incógnita"... Tampoco tenía un símbolo para nombrar a un número *n* cualquiera, de modo que la expresión $(6n+1) / (n^2+n)$ se expresaba de la siguiente forma: "un número por un factor de seis aumentado en uno, el cual se divide por la suma entre el cuadrado y el mismo número". De este modo era mucho más difícil desarrollar expresiones complicadas. Se deberá esperar a Viète (s. XVI) para dar el gran salto entre la notación sincopada de Diofanto y la notación algebraica moderna.

INDIA

Tras el declive de la matemática griega, los nuevos centros de aprendizaje matemático se localizarían en la India y en el mundo Árabe. El periodo de contribución india a las matemáticas más relevante se produce a partir del año 500 de nuestra era. Existen algunos autores que han trascendido en la historia de la matemática hindú. Hablamos de Aryabhata (nacido el 476), Brahmagupta (nacido el 598), Mahavira (s. IX) y Bhaskara (1114-1185).

Son variadas las aportaciones de estos matemáticos. Podemos destacar sus conocimientos sobre series, permutaciones, ecuaciones lineales y cuadráticas, radicales… Brahmagupta, por ejemplo, publicó el *Brahmasphutasiddhanta* que no es más que el primer libro en el que aparece el sistema decimal completo, prácticamente igual que lo utilizamos en la actualidad. Casi nada.

Uno de los grandes progresos de la matemática hindú en la rama del álgebra fue el uso de abreviaturas de palabras y algunos símbolos para describir las operaciones. Pero el mayor logro quizás fuese el descubrimiento del concepto del número cero.

ÁRABES

Toda esta antigua sabiduría sobre resolución de ecuaciones encontró acogida en el mundo islámico. Hasta allí llegaron los manuscritos de personajes de la talla de Aristóteles, Apolonio, Arquímedes, Diofanto, Herón,… y los tradujeron al árabe. También recibieron la influencia de las matemáticas hindúes, de donde adquirieron su sistema posicional y sus símbolos, quizás por ello es común error pensar que nuestro sistema de numeración proviene de los árabes. El sistema de matemáticas que observaron en la India fue adaptado por ellos mejorándolo y le dieron el nombre de "*Al-Jabr* " que significa *"la unión de las partes sueltas"*. Introdujeron los números reales positivos en las ecuaciones y resolución de sistemas y el uso de la noción de monomio de cualquier orden (que permitía generalizar las ecuaciones canónicas) desarrollándose así un álgebra de polinomios. Llegaron a resolver algebraicamente algunas cúbicas e incluso dieron algunos razonamientos geométricos para ello (intersecciones de cónicas).

Al – Khwarizmi (s. IX) fue uno de los personajes de renombre en la época debido a sus conocimientos matemáticos y astrónomos. Nos legó una nueva rama, el álgebra, y de su nombre se deriva el vocablo algoritmo, que significa "método de cálculo". Es considerado como el verdadero Padre del álgebra, por encima de Diofanto, ya que mostraba una mayor rigurosidad en sus métodos exhibiendo una clara argumentación lógica desde las premisas hasta las conclusiones. Escribió uno de los primeros libros árabes de álgebra, el cual era una presentación sistemática de la teoría fundamental de ecuaciones, con ejemplos y demostraciones incluidas. Fue alrededor del año 830 y el título del libro es *Hisab-al-jabr-wa-al-muqabala*. Sólo presentaba un defecto serio que debía ser corregido: sustituir su notación retórica por una notación simbólica, más apropiada para el pensamiento matemático. Esto nunca lo llegaron a conseguir los árabes.

EDAD MEDIA

Los historiadores consideran que la Edad Media en Europa comienza con la caída de Roma en 476 y termina con la conquista de Constantinopla en 1453 por parte de los turcos. Gracias a los árabes llegó el álgebra a Europa. Principalmente fue por España donde comenzaron a expandirse, mediante traducciones de sus textos, sus conocimientos sobre la materia. El comercio que se producía en el Mediterráneo entre las diferentes ciudades fue otra fuente de propagación de los saberes árabes.

A comienzos del s. XIII aparecen los primeros textos de origen europeo, entre ellos el *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa (1170-1250). Este matemático, también llamado Fibonacci, consiguió varios enemigos con la publicación de dicha obra pues en ella trata de demostrar las ventajas de las cifras árabes para cálculos frente a los métodos habituales en la Italia de la época, donde los abacistas empleaban el ábaco y los viejos números romanos. Esta obra también aborda conocimientos sobre la Teoría de números, problemas de álgebra de primer grado y, por supuesto, habla de contabilidad mercantil. Puesto que mercader era la profesión de su padre, pudo viajar por todo el Mediterráneo y tomar contacto con la matemática árabe, dándose cuenta inmediatamente de las ventajas que presentaba la utilización del sistema de numeración indo-arábigo (su aplicación a las fracciones). Publicó otros textos, como

Floss y *Liber Quadratorum,* en los cuales se resuelven ecuaciones algebraicas determinadas e indeterminadas.

Debido a la gran originalidad de sus trabajos, podemos considerar a Fibonacci como el algebrista europeo más importante de la Edad Media. Pero hubo otros muchos matemáticos que contribuyeron enormemente al desarrollo del álgebra como, por ejemplo, Nicolás Chuquet (1445-1488). Su principal obra *Triparty en la science des nombres* trata sobre la aritmética de los números indo-arábigos, raíces de números (introduciendo un simbolismo abreviado para las expresiones) y problemas algebraicos. Desarrolla su propia notación usando exponentes negativos y además le queda claro que para cualquier número x, se tiene que $x^0 = 1$. Cabe mencionar, por último, a Luca Pacioli (1445-1517), quién destacó por mejorar considerablemente la notación de la época, ya que no presentó nuevos conocimientos.

RENACIMIENTO

Coincide en el tiempo el inicio de esta época con el maravilloso invento de la imprenta, lo cual propició de una manera inexorable una mayor difusión de textos científicos. Aunque las principales motivaciones matemáticas surgieron a causa de los avances tecno-científicos, hubo tiempo para un poquito de álgebra.

Comenzaron a surgir grandes figuras de las matemáticas y todos aportaban algo interesante a la empresa. Por ejemplo, el matemático alemán Johann Widmann introdujo los símbolos que hoy día utilizamos con tanta frecuencia: "+" y "-" . En 1525, Christoph Rudolff aportó el símbolo que usamos actualmente para denotar una raíz cuadrada. Scipione del Ferro (1465-1526) resuelve un caso especial para la cúbica $x^3 + px = q$ donde p y q son enteros positivos. Cardano (1501-1576) y Tartaglia (1500-1557) se disputan la autoría de la resolución de $x^3 + px = q$ (cubo y la cosa igual a un número -en el lenguaje retórico de la época-). Además, Cardano analizó otros trece casos de las cúbicas y fue el primero en tratar con números complejos como demuestra la solución que dio al siguiente problema: "*Divide 10 en dos partes, el producto de las cuales es 40* ", que no es más que plantear la ecuación $(10-x)x=40$ cuya solución es $5+\sqrt{-15}$ y $5-\sqrt{-15}$. Un discípulo suyo, Ludovico Ferrari (1522-1565) concretamente, descubrió que la ecuación de cuarto grado se podía resolver por un método que requería encontrar las soluciones de una ecuación cúbica auxiliar. Ya en 1557, Robert Recorde introdujo el símbolo de la igualdad que hoy día utilizamos tanto: "=", afirmando que no había dos cosas tan idénticas como dos rectas paralelas.

Pero sin duda alguna, el matemático más importante del s.XVI fue François Viète (1540 – 1603). Para él las matemáticas eran una simple afición, un entretenimiento con el que matar el tiempo. Es considerado como el Padre del Álgebra Moderna ya que fue el primero en emplear letras para simbolizar lo desconocido. Es prácticamente la notación que utilizamos hoy día, salvando las distancias. Y su intención no fue otra que hacer más comprensible la obra de Diofanto. Pero lo que en realidad le hizo famoso fue su habilidad para descifrar los mensajes secretos que el rey Felipe II de España enviaba a sus tropas en Flandes. Rompió una clave de 500 símbolos que los matemáticos españoles consideraban inexpugnable. Al enterarse Felipe II de lo sucedido, mandó una queja ante el Papa Pío V acusando a Enrique IV de utilizar magia negra para vencer a sus ejércitos.

S. XVII – S.XVII – S.XIX

Durante la etapa final del Renacimiento, con la nomenclatura mejorada y la introducción de la notación exponencial, aparecen grandes figuras de las matemáticas. Entre ellos están Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665), a los cuales les separaba la delgada línea del amor-odio. Ambos mantuvieron correspondencia y discutían sobre los métodos empleados para la resolución de problemas. Las aportaciones de ambos son muy diversas: el primero simplificó la notación algebraica y creó la geometría analítica (que reduce la resolución de problemas geométricos a la resolución de problemas algebraicos). Optó por designar a las constantes con las primeras letras del alfabeto (a, b, c...) y a las incógnitas con las últimas (…x, y, z), tal y como las usamos en la actualidad. Resolvió ecuaciones cuadráticas a partir de procesos geométricos y llegó a la conclusión de que el número de soluciones de una ecuación coincide con el grado de la misma, resultado que no fue capaz de probar. También creó el sistema de coordenadas cartesiano. Por su parte, Fermat trabajó más en el campo de lo que hoy se conoce como Teoría de números (exclusivamente por su culpa) legándonos su famoso último teorema, el cual fue demostrado a finales del siglo XX, más de tres siglos después de ser enunciado. Nadie conocía la naturaleza de los números como él.

Mención aparte merece la de Isaac Newton (1642-1727), el cual es uno de los científicos más admirado de todos los tiempos gracias a sus leyes sobre la gravitación. En matemáticas aportó numerosos resultados, como por ejemplo un teorema que permite determinar el número de raíces reales de un polinomio y también ofreció resultados sobre la teoría general de ecuaciones y la resolución gráfica de éstas.

A lo largo del s. XVIII se continuó trabajando en la teoría de ecuaciones y en 1799 el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855) publicó la demostración de que toda ecuación polinómica tiene al menos una raíz en el plano complejo.

El primer intento serio por demostrar que era imposible resolver la ecuación general de grado n por medio de radicales, para $n \geq 5$, fue hecho por Paolo Ruffini (1765-1822). No se pudo demostrar este resultado hasta que no llegaron las aportaciones fundamentales de dos de los mejores matemáticos que ha dado el álgebra: Niels Henrik Abel (1802-1829) y Evariste Galois (1811-1832). Ambos ponían fin a una cuestión que había invadido el campo de la matemática durante más de dos siglos y medio.

Anexo II: Análisis de las tareas

TAREA 1: *Piensa un número. Súmale 5. Multiplícalo por 2. Al resultado réstale 4. Divide lo que te salga entre 2. Si le restas el número que pensaste, ¿obtienes el número 3? ¿Sabrías decir por qué?*

<table>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Nociones de expresión algebraica, ecuación, identidad. Lectura y escritura de expresiones algebraicas. Sistemas de representación verbal y simbólico.</td></tr>
<tr><th colspan="3">OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.
– Interpretar una ecuación.
– Diferenciar entre ecuaciones e identidades.</td></tr>
<tr><th colspan="3">ERRORES</th></tr>
<tr><td colspan="3">– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.
– No reconocer los distintos tipos de igualdades algebraicas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">FUNCIÓN</td><td>Motivadora. Exploratoria.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">VARIABLES PISA</td><td>CONTENIDO</td><td>Cambio y relaciones. Cantidad.</td></tr>
<tr><td>CONTEXTO</td><td>Personal.</td></tr>
<tr><td>COMPLEJIDAD</td><td>Reflexión.</td></tr>
<tr><td colspan="2">COMPETENCIAS</td><td>PR – M</td></tr>
<tr><td colspan="2">RECURSOS</td><td>Pizarra. Papel y bolígrafo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">AGRUPAMIENTO</td><td>Toda la clase.</td></tr>
</table>

TAREA 2: *Dominó algebraico.*

<table>
<tr><th>CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td>Nociones de expresión algebraica, monomio, polinomio. Lectura y escritura de expresiones algebraicas. Sistemas de representación verbal y simbólico.</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td>– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.
– Identificar polinomios de primer grado.</td></tr>
</table>

– Modelizar enunciados.		
ERRORES		
– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa. – Confundir el grado de un polinomio.		
FUNCIÓN		Motivadora. Exploratoria.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones. Cantidad.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Reproducción.
COMPETENCIAS		PR – M – C
RECURSOS		Las piezas del dominó.
AGRUPAMIENTO		Toda la clase.

TAREA 3: *¿Cuál o cuáles de las siguientes expresiones representa un número de tres cifras ABC? Explica tu respuesta.*

- $A + B + C$
- $A \cdot B \cdot C$
- $A + 10 \cdot B + 100 \cdot C$
- $100 \cdot A + 10 \cdot B + C$

CONTENIDOS		
Nociones de coeficiente, expresión algebraica. Lectura y escritura de expresiones algebraicas. Sistema de representación verbal y simbólico.		
OBJETIVOS		
– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. – Modelizar enunciados.		
ERRORES		
– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.		
FUNCIÓN		Conocimientos previos. Elaboración y construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Público.
	COMPLEJIDAD	Reproducción.
COMPETENCIAS		PR – AJ – C

RECURSOS	Papel y bolígrafo.
AGRUPAMIENTO	Individual.

TAREA 4: *En un garaje hay un número indeterminado de coches (C) y un número indeterminado de motos (M). ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el número total de ruedas? Explica tu respuesta.*

- $R = C + M$
- $R = 4 \cdot C + 2 \cdot M$
- $R = 5 \cdot C + 2 \cdot M$
- $R = 4 \cdot (C + M) - 2$

CONTENIDOS		
Nociones de expresión algebraica, coeficiente, parte literal, monomio. Escritura y lectura de expresiones algebraicas. Sistema de representación verbal y simbólico.		
OBJETIVOS		
– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. – Modelizar enunciados.		
ERRORES		
– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.		
FUNCIÓN		Conocimientos previos. Elaboración y construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones. Cantidad.
	CONTEXTO	Personal.
	COMPLEJIDAD	Reproducción.
COMPETENCIAS		PR – AJ – M – C
RECURSOS		Papel y bolígrafo.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 5: Copia y completa:

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO
$2a$			
x^2			
$-3ab$			
$\frac{1}{2}xy^3$			

<table>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Nociones de expresión algebraica, monomio, grado, coeficiente, parte literal. Escritura y lectura de expresiones algebraicas. Sistema de representación verbal y simbólico.</td></tr>
<tr><th colspan="3">OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">- Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas.
- Identificar polinomios de primer grado.</td></tr>
<tr><th colspan="3">ERRORES</th></tr>
<tr><td colspan="3">- Confundir el grado de un polinomio.
- No distinguir entre fracción algebraica y monomio.</td></tr>
<tr><th colspan="2">FUNCIÓN</th><td>Conocimientos previos.</td></tr>
<tr><th rowspan="3">VARIABLES PISA</th><th>CONTENIDO</th><td>Cambio y relaciones.</td></tr>
<tr><th>CONTEXTO</th><td>Educativo o laboral.</td></tr>
<tr><th>COMPLEJIDAD</th><td>Reproducción.</td></tr>
<tr><th colspan="2">COMPETENCIAS</th><td>LS</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th><td>Papel y lápiz.</td></tr>
<tr><th colspan="2">AGRUPAMIENTO</th><td>Individual.</td></tr>
</table>

TAREA 6: Multiplica y expresa sin paréntesis:

$2 \cdot (x-1)$ $\quad$ $5 \cdot (a-b)$ $\quad$ $a \cdot (3-a^2)$

$3x \cdot (x-5)$ $\quad$ $x^2 \cdot (x^2+x)$ $\quad$ $5a \cdot (2a-3)$

CONTENIDOS
Nociones de expresión algebraica, monomio, polinomio, grado, coeficiente, parte

literal. Operaciones con monomios. Escritura y lectura de expresiones algebraicas. Sistema de representación verbal y simbólico.		
OBJETIVOS		
– Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas. – Identificar polinomios de primer grado.		
ERRORES		
– Mal manejo de símbolos. – Operar erróneamente con monomios. – Uso incorrecto de las propiedades numéricas. – Confundir el grado de un polinomio.		
FUNCIÓN		Conocimientos previos. Construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Reproducción.
COMPETENCIAS		PR – LS
RECURSOS		Papel y lápiz.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 7: Copia y completa cada paréntesis con el monomio que falta:

$$x \cdot (\dots) = x^3 \qquad 2x^2 \cdot (\dots) = 4x^2 \qquad 3a \cdot (\dots) = 6a^2$$
$$2a^2 \cdot (\dots) = -8a^5 \qquad (\dots) \cdot 2x = 6xy \qquad (\dots) \cdot xy = 6x^3y^2$$

CONTENIDOS		
Nociones de monomio, coeficiente, parte literal, grado, expresión algebraica. Escritura y lectura de expresiones algebraicas. Operaciones con monomios. Sistema de representación verbal y simbólico.		
OBJETIVOS		
– Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas. – Identificar polinomios de primer grado.		
ERRORES		
– Operar erróneamente con monomios. – No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. – Confundir el grado de un polinomio.		
FUNCIÓN		Conocimientos previos. Construcción de significados.

VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Reproducción.
COMPETENCIAS		PR – LS
RECURSOS		Papel, bolígrafo y pizarra.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 8: Multiplica y simplifica:

$$6x \cdot (\frac{1}{6} + \frac{1}{x}) \qquad xy \cdot (\frac{1}{x} - \frac{1}{y})$$

$$\frac{1}{a} \cdot (a + a^2) \qquad \frac{2}{a^2} \cdot (\frac{a}{4} + a^2)$$

CONTENIDOS		
Nociones de expresión algebraica, monomio, polinomio, grado, fracción algebraica. Escritura y lectura de expresiones algebraicas. Eliminación de paréntesis y denominadores. Operar con monomios. Sistema de representación verbal y simbólico.		
OBJETIVOS		
– Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas. – Identificar polinomios de primer grado.		
ERRORES		
– Mal manejo de símbolos. – Operar erróneamente con monomios. – Uso incorrecto de las propiedades numéricas. – No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. – No distinguir entre fracción algebraica y monomio. – Confundir grado de un polinomio.		
FUNCIÓN		Conocimientos previos. Construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Reproducción.
COMPETENCIAS		PR – LS
RECURSOS		Papel, bolígrafo y pizarra.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 9: *Para resolver las siguientes ecuaciones, responde a las preguntas sugeridas en cada caso y resuelve por tanteo ayudándote de la calculadora si es preciso:*

$3x = 24$ → *¿qué número multiplicado por 3 da 24?*

$x - 20 = 0$ → *¿a qué número hay que restarle 20 para que el resultado sea 0?*

$\frac{4x+3}{5} = 1$ → *¿qué número dividido entre 5 te da exactamente 1? Entonces, ¿cuánto ha de valer* $4x + 3$*? ¿Cuánto vale x?*

CONTENIDOS		
Nociones de ecuación, solución, incógnita, primer y segundo miembro, grado, términos. Nuevo significado del signo igual. Sistemas de representación verbal y simbólico. Resolución de ecuaciones sencillas por tanteo.		
OBJETIVOS		
– Distinguir miembros, términos e incógnitas de una ecuación de primer grado. – Leer y escribir ecuaciones de primer grado. – Aproximar una solución por tanteo usando herramientas tecnológicas, manipulativas o gráficas.		
ERRORES		
– Confundir los elementos básicos de una ecuación de primer grado. – Uso inadecuado de materiales.		
FUNCIÓN		Conocimientos previos. Construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Reproducción.
COMPETENCIAS		PR – AJ – C – HT
RECURSOS		Papel, bolígrafo y pizarra.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 10: *Simplifica estas fracciones algebraicas:*

$$\frac{4x^3}{8x} \qquad \frac{10x}{5x^3} \qquad \frac{6x^4}{2x^2}$$

$$\frac{3ab}{9a^2} \qquad \frac{4a^2b}{8ab^2} \qquad \frac{2ab}{10a^2b^2}$$

CONTENIDOS		
Nociones de expresión algebraica, fracción algebraica, monomio, grado. Operaciones con monomios. Escritura y lectura de expresiones algebraicas. Sistema de representación verbal y simbólico.		
OBJETIVOS		
– Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas. – Identificar polinomios de primer grado.		
ERRORES		
– Operar erróneamente con monomios. – No distinguir entre fracción algebraica y monomio. – Confundir el grado de un polinomio.		
FUNCIÓN		Conocimientos previos. Construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Reproducción.
COMPETENCIAS		PR – AJ – LS
RECURSOS		Papel y lápiz.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 11: *Completa para que se cumpla la igualdad algebraica e invéntate una adivinanza para una de ellas. ¿Son ecuaciones o identidades?:*

$\ldots \cdot (x+3) = 5x + 15$ $\qquad$ $\ldots \cdot (3+2x) = 9 + 6x$

$\ldots \cdot (a-1) = a^3 + a^2$ $\qquad$ $\ldots \cdot (a+a^2) = 2a^3b + 2a^4b$

CONTENIDOS
Nociones de polinomio, monomio, identidad. Escritura y lectura de expresiones algebraicas. Operaciones con monomios. Sistemas de representación verbal y simbólico.
OBJETIVOS
– Identificar expresiones algebraicas y operar con ellas. – Identificar polinomios de primer grado. – Diferenciar entre ecuaciones e identidades.
ERRORES

– Mal manejo de símbolos. – Operar erróneamente con monomios. – Incorrecto uso de las propiedades numéricas. – No usar correctamente la nueva notación para la multiplicación. – No reconocer los distintos tipos de igualdades algebraicas.		
FUNCIÓN		Conocimientos previos. Construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Conexión.
COMPETENCIAS		PR – AJ – LS
RECURSOS		Papel y lápiz.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 12: Resuelve usando la balanza algebraica:

a) $2x + 2 = 8$

b) $-4x - 2 = x - 8$

c) $-3x - 1 = -2x - 2$

d) $4x - 5 = 2x + 3$

e) $3x + 6 = 7x - 2$

CONTENIDOS
Técnicas básicas de trasposición de términos, ecuaciones equivalentes, uso de operaciones aritméticas en desarrollo de ecuaciones. Nuevo significado del signo igual. Sistema de representación manipulativo, verbal y simbólico.
OBJETIVOS
– Reconocer diferentes tipos de ecuaciones de primer grado. – Leer y escribir ecuaciones de primer grado. – Distinguir los miembros, términos e incógnitas de una ecuación de primer grado. – Encontrar la solución de una ecuación de primer grado. – Conocer los diferentes métodos de resolución. – Comprobar la validez de una solución.
ERRORES
– Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer

grado. – Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado. – Obtener igualdades a través de fracciones.		
FUNCIÓN		Exploración. Construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Conexión.
COMPETENCIAS		PR – C – R – LS – HT
RECURSOS		Pizarra digital.
AGRUPAMIENTO		Toda la clase.

TAREA 13: *Indica en cada caso el grado de la ecuación. Resuelve las que sean de grado uno y comprueba su solución:*

$$3x + x^2 = 12 + x^2 \qquad x^2 + x - 4 = 6 \qquad \frac{x}{3} = 2$$

$$x + 4 = 3 \qquad 6 - x = 7 \qquad 5 - x - x^2 = 0$$

$$3x - 2 = 0 \qquad \frac{x}{2} + 4 = 7 \qquad 8 - 3x = 2$$

CONTENIDOS
Técnicas básicas de trasposición de términos, ecuaciones equivalentes, uso de operaciones aritméticas en desarrollo de ecuaciones. Sistema de representación verbal y simbólico.
OBJETIVOS
– Reconocer diferentes tipos de ecuaciones de primer grado. – Leer y escribir ecuaciones de primer grado. – Encontrar la solución de una ecuación de primer grado. – Conocer los diferentes métodos de resolución. – Comprobar la validez de una solución.
ERRORES
– Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado. – Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado. – Obtener igualdades a través de fracciones.

– Consideración errónea del grado de una ecuación.		
FUNCIÓN		Construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Reproducción.
COMPETENCIAS		PR – AJ – LS
RECURSOS		Papel, bolígrafo y pizarra.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 14: *Aquí se resuelve la misma ecuación siguiendo distintos pasos. ¿Son ambos procedimientos correctos? ¿Por qué? Comprueba la solución.*

$$4\cdot(x-2)+2x+10=2\cdot(3x+1)+4x+8$$
$$4x-8+2x+10=6x+2+4x+8$$
$$6x+2=10x+10$$
$$-8=4x$$
$$-2=x$$

$$4\cdot(x-2)+2x+10=2\cdot(3x+1)+4x+8$$
$$4\cdot(x-2)+2x+2=2\cdot(3x+1)+4x$$
$$4x-8+2x+2=6x+2+4x$$
$$-8=4x$$
$$-2=x$$

CONTENIDOS		
Nociones de ecuación y solución. Trasposición de términos. Eliminación de paréntesis y denominadores. Generar ecuaciones equivalentes. Ordenar adecuadamente expresiones. Sistemas de representación verbal y simbólico.		
OBJETIVOS		
– Reconocer diferentes tipos de ecuaciones de primer grado. – Conocer los diferentes métodos de resolución. – Comprobar la validez de una solución.		
ERRORES		
– Incorrecto uso de las propiedades numéricas. – Operar erróneamente con monomios. – Confundir los elementos básicos en la estructura de una ecuación de primer grado. – Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.		
FUNCIÓN		Exploración. Construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Conexión.

COMPETENCIAS	PR – AJ – C
RECURSOS	Papel y lápiz.
AGRUPAMIENTO	Toda la clase.

TAREA 15: *Indica en cada caso si se trata de una ecuación o una identidad. Para las que sean ecuaciones, indica su grado, resuélvelas y comprueba su solución:*

$$2\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{x}{5}\right)-\frac{3x}{10}+2x^2=3\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2x}{5}\right)+2x^2-1$$

$$\frac{1}{4}-x^3-2\cdot\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{2}\right)=x-x^3+3\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{x}{2}\right)$$

$$(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1$$

CONTENIDOS		
Nociones de ecuación y solución, identidad, ecuaciones equivalentes. Trasposición de términos. Eliminación de paréntesis y denominadores. Sistemas de representación simbólico y verbal.		
OBJETIVOS		
– Encontrar la solución de una ecuación de primer grado. – Construir ecuaciones equivalentes a una dada. – Conocer los diferentes métodos de resolución. – Comprobar la validez de una solución. – Leer y escribir ecuaciones de primer grado. – Diferenciar entre ecuaciones e identidades.		
ERRORES		
– Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado. – Obtener igualdades a través de fracciones. – Consideración errónea del grado de una ecuación. – No reconocer los distintos tipos de igualdades algebraicas.		
FUNCIÓN		Ejercitación.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Reproducción.
COMPETENCIAS		AJ – LS
RECURSOS		Papel, bolígrafo y pizarra.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 16: *Escribe una expresión para cada enunciado:*

- *El doble de un número*
- *El anterior a un número*
- *El siguiente de un número*
- *El doble del siguiente de un número*
- *La cuarta parte de un número aumentado en tres unidades*
- *La mitad de un número, más seis unidades*

<table>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Escritura y lectura de expresiones algebraicas. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos.</td></tr>
<tr><th colspan="3">OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.</td></tr>
<tr><th colspan="3">ERRORES</th></tr>
<tr><td colspan="3">– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.</td></tr>
<tr><th colspan="2">FUNCIÓN</th><td>Elaboración y construcción de significados.</td></tr>
<tr><th rowspan="3">VARIABLES PISA</th><th>CONTENIDO</th><td>Cambio y relaciones.</td></tr>
<tr><th>CONTEXTO</th><td>Educativo o laboral.</td></tr>
<tr><th>COMPLEJIDAD</th><td>Reproducción.</td></tr>
<tr><th colspan="2">COMPETENCIAS</th><td>PR – M – R – LS</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th><td>Papel, bolígrafo y pizarra.</td></tr>
<tr><th colspan="2">AGRUPAMIENTO</th><td>Individual.</td></tr>
</table>

TAREA 17:

e) *Si sumamos un número con su siguiente obtenemos 47. ¿De qué números se trata?*

f) *Si al triple de un número le restamos ocho unidades, obtenemos 25. ¿Qué número es?*

g) *Al sumar la tercera parte de un número con su mitad, se obtiene 20. ¿De qué números hablamos?*

h) *La suma de tres números consecutivos es 135. ¿De qué números hablamos?*

CONTENIDOS		
Ecuaciones equivalentes. Trasposición de términos. Nociones de ecuación y solución. Modelización. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos. Sistemas de representación simbólico y verbal.		
OBJETIVOS		
– Encontrar la solución de una ecuación de primer grado. – Construir ecuaciones equivalentes a una dada. – Conocer los diferentes métodos de resolución. – Comprobar la validez de una solución. – Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. – Modelar enunciados de problemas.		
ERRORES		
– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa. – Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado. – Incorrecto uso de las propiedades numéricas.		
FUNCIÓN		Ejercitación.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Conexión.
COMPETENCIAS		PR – AJ – M – RP
RECURSOS		Papel, bolígrafo y pizarra.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 18: *Fátima es siete años mayor que su hermano Antonio y dos años menor que su hermana María. Calcula la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 34 años.*

CONTENIDOS
Traducción al lenguaje algebraico de enunciados. Técnicas de trasposición. Modelización. Sistemas de representación verbal, simbólico y gráfico.
OBJETIVOS
– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. – Encontrar la solución de una ecuación de primer grado.

– Construir ecuaciones equivalentes a una dada. – Comprobar la validez de una solución. – Modelar enunciados de problemas.		
ERRORES		
– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa. – Determinar soluciones carentes de sentido. – Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.		
FUNCIÓN		Elaboración y construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Personal.
	COMPLEJIDAD	Conexión
COMPETENCIAS		PR – AJ – M – RP – LS
RECURSOS		Papel, bolígrafo y pizarra.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 19: *Para cada ecuación, invéntate un enunciado:*

d) $2x + 1 = 3x - 5$
e) $2 \cdot (x - 1) = x + 17$
f) $3 \cdot (x - 12) = 2x$

CONTENIDOS		
Traducción del lenguaje algebraico al lenguaje natural, sistemas de representación simbólico y verbal.		
OBJETIVOS		
– Interpretar una ecuación.		
ERRORES		
– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.		
FUNCIÓN		Elaboración y construcción de significados.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Educativo o laboral
	COMPLEJIDAD	Conexión.
COMPETENCIAS		R – LS

RECURSOS	Papel y lápiz.
AGRUPAMIENTO	Parejas.

TAREA 20: *Sabiendo que el perímetro de una figura plana se calcula sumando las longitudes de todos los lados que la conforman, calcula cuánto miden los lados de un rectángulo cuyo perímetro es 24 cm. y sabiendo que:*

c) Su base es el doble que su altura

d) Que su base es 3cm. mayor que la altura

Dibuja cada rectángulo para ayudarte.

CONTENIDOS		
Modelizar. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos. Técnicas básicas de trasposición de términos. Sistemas de representación verbal y simbólico.		
OBJETIVOS		
– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. – Modelar enunciados de problemas. – Interpretar y discriminar soluciones.		
ERRORES		
– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa. – Determinar soluciones carentes de sentido. – Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.		
FUNCIÓN		Ejercitación.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones. Espacio y forma.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Conexión.
COMPETENCIAS		PR – AJ – C – M – RP – LS
RECURSOS		Papel y lápiz.
AGRUPAMIENTO		Individual.

TAREA 21: *El precio de las manzanas ha subido 0,25€ por kilo. Con el dinero que ayer pagabas por cuatro kilos, hoy sólo te dan tres. ¿A cuánto están hoy las manzanas?*

<table>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Modelizar. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos. Técnicas básicas de trasposición de términos. Sistemas de representación verbal y simbólico</td></tr>
<tr><th colspan="3">OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">- Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.
- Modelar enunciados de problemas.
- Interpretar y discriminar soluciones.</td></tr>
<tr><th colspan="3">ERRORES</th></tr>
<tr><td colspan="3">- Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.
- Determinar soluciones carentes de sentido.
- Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.</td></tr>
<tr><th colspan="2">FUNCIÓN</th><td>Aplicación.</td></tr>
<tr><th rowspan="3">VARIABLES PISA</th><th>CONTENIDO</th><td>Cambio y relaciones.</td></tr>
<tr><th>CONTEXTO</th><td>Personal.</td></tr>
<tr><th>COMPLEJIDAD</th><td>Reflexión.</td></tr>
<tr><th colspan="2">COMPETENCIAS</th><td>PR – AJ – M – RP – LS</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th><td>Papel y lápiz.</td></tr>
<tr><th colspan="2">AGRUPAMIENTO</th><td>Individual.</td></tr>
</table>

TAREA 22: El perímetro de un triángulo isósceles mide 15 cm. Sabemos que el lado desigual del triángulo es la mitad de cada uno de los lados iguales. Halla la longitud de cada uno de los lados del triángulo y dibújalo en tu cuaderno.

<table>
<tr><th>CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td>Modelizar. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos. Técnicas básicas de trasposición de términos. Sistemas de representación verbal y simbólico.</td></tr>
<tr><th>OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td>- Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.
- Modelar enunciados de problemas.
- Interpretar y discriminar soluciones.</td></tr>
<tr><th>ERRORES</th></tr>
<tr><td>- Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.</td></tr>
</table>

– Determinar soluciones carentes de sentido. – Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.		
FUNCIÓN		Aplicación.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones. Espacio y Forma.
	CONTEXTO	Educativo o laboral.
	COMPLEJIDAD	Conexión.
COMPETENCIAS		PR – AJ – M – RP – LS
RECURSOS		Papel y lápiz.
AGRUPAMIENTO		Parejas.

TAREA 23: En un concurso de cincuenta preguntas, dan tres puntos por cada acierto y quitan dos por cada fallo. ¿Cuántas preguntas ha acertado un concursante que ha obtenido 85 puntos?

CONTENIDOS		
Modelizar. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos. Técnicas básicas de trasposición de términos. Sistemas de representación verbal y simbólico.		
OBJETIVOS		
– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. – Modelar enunciados de problemas. – Interpretar y discriminar soluciones.		
ERRORES		
– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa. – Determinar soluciones carentes de sentido. – Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.		
FUNCIÓN		Síntesis.
VARIABLES PISA	**CONTENIDO**	Cambio y relaciones.
	CONTEXTO	Público.
	COMPLEJIDAD	Reflexión.
COMPETENCIAS		PR – AJ – M – RP – LS
RECURSOS		Papel y lápiz.
AGRUPAMIENTO		Parejas.

TAREA 24: *Nada se conoce con seguridad sobre la vida de Diofanto, uno de los grandes sabios de antigua Grecia, salvo la edad a la que falleció, que fue facilitada por su epitafio, redactado en forma de problema y que fue conservado en la antología griega:*

> *"¡Caminante! Aquí se sepultaron los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡oh, milagro!, cuán de larga fue su vida, la sexta parte de la cual ocupó su infancia.*
>
> *Había transcurrido después una doceava parte de su vida cuando de pelo se cubrió su barba. Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.*
>
> *Pasó un quinquenio más y le hizo feliz el nacimiento de su precioso primogénito, cuya vida duró nada más que la mitad de la de su padre.*
>
> *Y con pregonada pena descendió a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años a la muerte de su hijo."*

¿Cuántos años vivió este ilustre matemático?

<table>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Modelizar. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos. Técnicas básicas de trasposición de términos. Sistemas de representación verbal y simbólico.</td></tr>
<tr><th colspan="3">OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.
– Modelar enunciados de problemas.
– Interpretar y discriminar soluciones.</td></tr>
<tr><th colspan="3">ERRORES</th></tr>
<tr><td colspan="3">– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.
– Determinar soluciones carentes de sentido.
– Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.</td></tr>
<tr><th colspan="2">FUNCIÓN</th><td>Síntesis.</td></tr>
<tr><th rowspan="3">VARIABLES PISA</th><th>CONTENIDO</th><td>Cambio y relaciones.</td></tr>
<tr><th>CONTEXTO</th><td>Personal. Público.</td></tr>
<tr><th>COMPLEJIDAD</th><td>Reflexión.</td></tr>
<tr><th colspan="2">COMPETENCIAS</th><td>PR – AJ – M – RP – LS</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th><td>Papel y lápiz.</td></tr>
<tr><th colspan="2">AGRUPAMIENTO</th><td>Parejas.</td></tr>
</table>

TAREA 25: ¿Cuántos litros de vino de 5€ el litro deben mezclarse con vino de 3€ el litro para obtener 50 litros de vino cuyo precio sea de 4€ el litro?

<table>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Modelizar. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos. Técnicas básicas de trasposición de términos. Sistemas de representación verbal y simbólico.</td></tr>
<tr><th colspan="3">OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.
– Modelar enunciados de problemas.
– Interpretar y discriminar soluciones.</td></tr>
<tr><th colspan="3">ERRORES</th></tr>
<tr><td colspan="3">– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.
– Determinar soluciones carentes de sentido.
– Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.</td></tr>
<tr><th colspan="2">FUNCIÓN</th><td>Síntesis.</td></tr>
<tr><th rowspan="3">VARIABLES PISA</th><th>CONTENIDO</th><td>Cambio y relaciones.</td></tr>
<tr><th>CONTEXTO</th><td>Personal. Público.</td></tr>
<tr><th>COMPLEJIDAD</th><td>Reflexión.</td></tr>
<tr><th colspan="2">COMPETENCIAS</th><td>PR – AJ – M – RP – LS</td></tr>
<tr><th colspan="2">RECURSOS</th><td>Papel y lápiz.</td></tr>
<tr><th colspan="2">AGRUPAMIENTO</th><td>Parejas.</td></tr>
</table>

TAREA 26: Un grifo llena un depósito en tres horas y otro grifo lo hace en seis horas. ¿Cuánto tardarían en llenarlo ambos grifos a la vez?

CONTENIDOS
Modelizar. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos. Técnicas básicas de trasposición de términos. Sistemas de representación verbal y simbólico.
OBJETIVOS
– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números. – Modelar enunciados de problemas. – Interpretar y discriminar soluciones.

<table>
<tr><th colspan="3">ERRORES</th></tr>
<tr><td colspan="3">– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.
– Determinar soluciones carentes de sentido.
– Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.</td></tr>
<tr><td colspan="2">FUNCIÓN</td><td>Síntesis.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">VARIABLES PISA</td><td>CONTENIDO</td><td>Cambio y relaciones.</td></tr>
<tr><td>CONTEXTO</td><td>Personal. Público.</td></tr>
<tr><td>COMPLEJIDAD</td><td>Reflexión.</td></tr>
<tr><td colspan="2">COMPETENCIAS</td><td>PR – AJ – M – RP – LS</td></tr>
<tr><td colspan="2">RECURSOS</td><td>Papel y lápiz.</td></tr>
<tr><td colspan="2">AGRUPAMIENTO</td><td>Parejas.</td></tr>
</table>

TAREA 27: El importe del recibo de la luz se calcula según la fórmula siguiente:

$$I = F + (L_{ac} - L_{ant}) \cdot P$$

donde:

I → Importe (€)

F → Gastos fijos según potencia contratada y alquiler de equipos de medida (€)

L_{ac} → Lectura actual (kWh)

L_{ant} → Lectura anterior (kWh)

P → Precio del kWh (€/kWh)

Con esta información:

d) Escribe la fórmula en su versión actualizada, teniendo en cuenta que la compañía impone unos gastos fijos de 8,50 € y cobra 0,80 € por cada kilovatio hora consumido.

e) El empleado de la compañía eléctrica leyó el mes pasado, en el contador de la vivienda de la familia Muros, 2457 kWh, y este mes, 2516 kWh. ¿A cuánto asciende el importe total de la factura?

f) ¿Cuál de estas sería la fórmula actualizada de la factura, en el caso de que los gastos fijos y el precio del kWh subieran un 10%?:

- $I = 8{,}50 + (L_{ac} - L_{ant}) \cdot 0{,}80 + 10$
- $I = 9{,}35 + (L_{ac} - L_{ant}) \cdot 0{,}88$

- $I = 8{,}50 + (L_{ac} - L_{ant}) \cdot 0{,}80 \cdot 1{,}1$
- $I = \frac{8{,}50 + (L\_ac - L\_ant) \cdot 0{,}80 \cdot 10}{100}$

<table>
<tr><th colspan="3">CONTENIDOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">Modelizar. Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos. Técnicas básicas de trasposición de términos. Sistemas de representación verbal y simbólico.</td></tr>
<tr><th colspan="3">OBJETIVOS</th></tr>
<tr><td colspan="3">– Representar un número cuyo valor es desconocido, operar con él y relacionarlo con otros números.
– Modelar enunciados de problemas.
– Interpretar y discriminar soluciones.</td></tr>
<tr><th colspan="3">ERRORES</th></tr>
<tr><td colspan="3">– Traducir incorrectamente enunciados verbales al lenguaje simbólico y viceversa.
– Determinar soluciones carentes de sentido.
– Aplicar erróneamente las técnicas básicas para la resolución de una ecuación de primer grado.</td></tr>
<tr><td colspan="2">FUNCIÓN</td><td>Síntesis.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">VARIABLES PISA</td><td>CONTENIDO</td><td>Cambio y relaciones.</td></tr>
<tr><td>CONTEXTO</td><td>Personal. Público.</td></tr>
<tr><td>COMPLEJIDAD</td><td>Reflexión.</td></tr>
<tr><td colspan="2">COMPETENCIAS</td><td>PR – AJ – M – RP – LS</td></tr>
<tr><td colspan="2">RECURSOS</td><td>Papel y lápiz.</td></tr>
<tr><td colspan="2">AGRUPAMIENTO</td><td>Parejas.</td></tr>
</table>