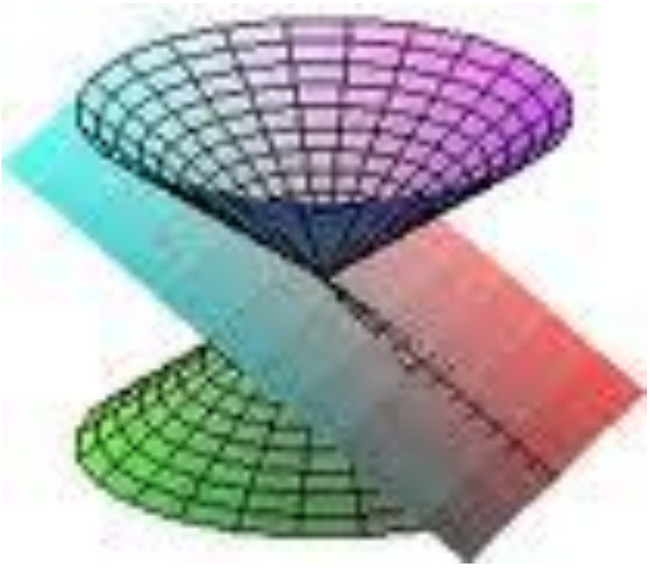
UNIDAD DIDÁCTICA:

<u>LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS</u>



TRABAJO FINAL DE MÁSTER

Especialidad: Matemáticas

Alumna: Ana Isabel Márquez García

Supervisor/ Tutor: Pablo Flores Martínez

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Este documento corresponde al trabajo final realizado para el *Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y enseñanza de Idiomas (especialidad Matemáticas)*, impartido en la Universidad de Granada durante el curso académico 2009/2010. Este trabajo consiste en una Unidad Didáctica de dicha especialidad, elección que se ha hecho a partir de las posibilidades ofrecidas en la guía para el trabajo final. La temática de esta unidad es lugares geométricos en el plano y cónicas. Comenzaremos con un breve introducción sobre este, justificando y fundamentando la información aquí reflejada con la legislación vigente de educación y con un análisis didáctico sobre este tema. Detallaremos las partes de la unidad: objetivos perseguidos, contenidos a tratar, diferenciando los conceptuales, los procedimentales y los actitudinales, la temporalización, principios generales de la metodología, recursos, formas/estrategias previstas para atender a la diversidad del alumnado, errores y dificultades previsibles y forma de abordarlos y aspectos relacionados con la evaluación. Posteriormente se detallan las actividades que se realizarán en las 8 sesiones previstas para esta unidad. Se completa el trabajo con una bibliografía utilizada para elaborar esta unidad didáctica y con el análisis didáctico anteriormente mencionado, que se adjunta en anexo.

A continuación, señalamos los datos de la alumna y del profesor supervisor universitario:

Alumna: Ana Isabel Márquez García DNI: 15473075D anaisbel_86@hotmail.com

Profesor Supervisor: Pablo Flores Martínez pflores@ugr.es

Dpto: Didáctica de la Matemática (Facultad de Ciencias de la Educación)

Fdo.: Pablo Flores Martínez

Fdo.: Ana Isabel Márquez García

INTRODUCCIÓN

Las cónicas constituyen uno de los conjuntos de curvas más importantes de la Geometría y que más se utilizan en distintas ramas de la Ciencia y la Ingeniería.

El primer estudio sobre las secciones cónicas se deriva de uno de los tres problemas clásicos: la duplicación del cubo. A mediados del siglo V a.C. Menecmo descubrió que este problema se resolvía con unas curvas obtenidas mediante la sección de un cono por un plano perpendicular a la directriz. Posteriormente, Apolonio de Perga las obtiene utilizando un cono circular cualquiera variando la inclinación del plano secante y, a partir de esto, descubre una propiedad plana que caracteriza a cada una de las secciones, es decir, una caracterización de estas curvas como lugares geométricos. Fue él también quien le dio el nombre que aún hoy conservamos e introdujo el estudio de tangencias, diámetros y rectas normales.

Pero, ¿cuál es el motivo principal de que las secciones cónicas ocupen un lugar tan importante entre todas las posibles curvas?

Muchos años más tarde, en los siglos XVI y XVII, se comprobó que las órbitas de los planetas y las trayectorias de los cuerpos pesados son curvas de este tipo. Pero esto no es todo. La importancia fundamental de las cónicas reside en el aparato sensitivo del hombre mismo. Su capacidad de percepción depende principalmente del ojo. El hombre es, ante todo, una criatura que mira, y los rayos luminosos que penetran en el ojo o que de él parten en dirección contraria para construir la visión forman un cono (según las leyes de refracción y convergencia de una lente biconvexa). Toda imagen de la realidad óptica, toda perspectiva, toda proyección, se presenta bajo forma de una sección cónica. Por tanto, no es exagerado calificar a nuestro mundo como "mundo de las secciones cónicas".

JUSTIFICACIÓN Y FUNDAMENTACIÓN

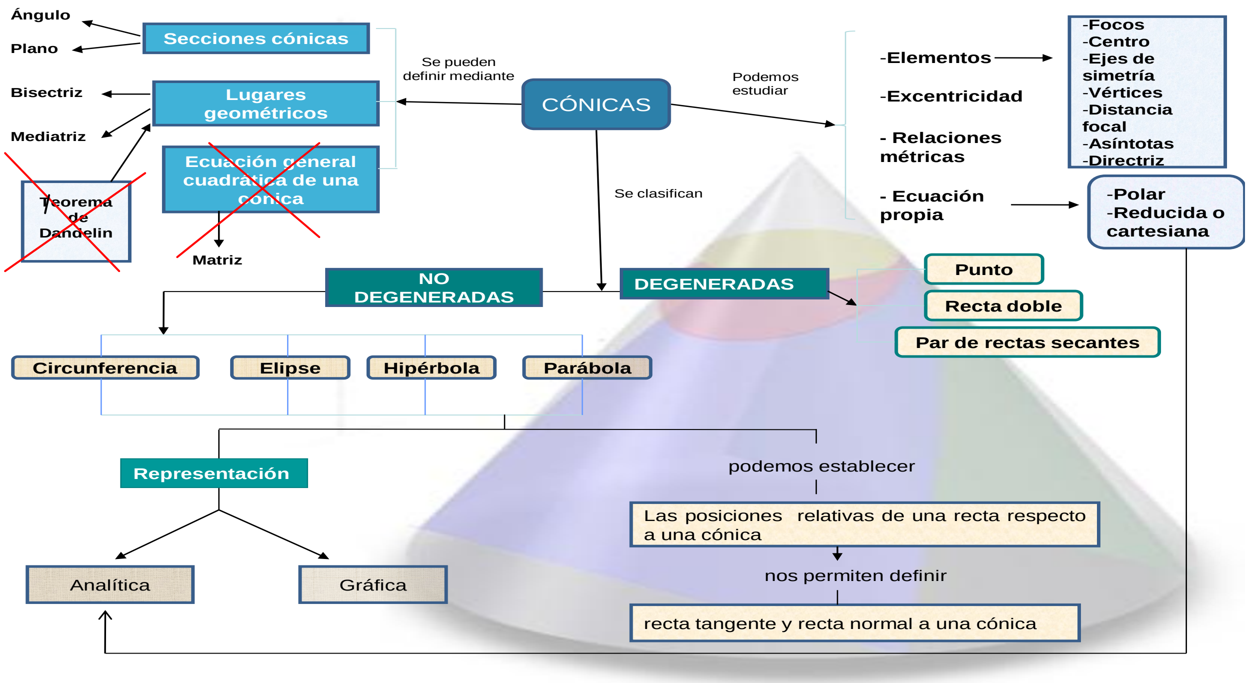
Esta unidad didáctica está programa para un curso de primero de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. Según el Real Decreto 1467/2007 de 2 de noviembre por el que se fija la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, un contenido para este curso es “Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas” correspondiente al Bloque II: Geometría. Teniendo en cuenta este documento y la Orden del 5 de agosto de 2008 por la que se desarrolla el currículo correspondiente al Bachillerato en Andalucía hemos programado esta unidad. Según estos documentos, el alumnado de Bachillerato debe aprender a apreciar la utilidad de las Matemáticas, utilizarlas para resolver problemas de la vida cotidiana y consolidar su formación. Con respecto a este tema en concreto, un alumno/a debe ser capaz de identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano, analizar sus propiedades métricas y construirlos a partir de ellas.

Según podemos interpretar el Real Decreto, podemos ver el tema como una aplicación de la geometría euclídea del plano vista en temas anteriores. A pesar de tener en cuenta esto, hemos decidido hacer una unidad completa con una doble finalidad. En primer lugar, que los alumnos/as adquieran los conocimientos básicos sobre cónicas (lo que encontramos en un criterio de evaluación) y, en segundo lugar, nos sirve para hacer un repaso de lo visto en temas anteriores, ya que es una parte importante de este curso y una base fundamental para el siguiente curso y la prueba de acceso a las universidades. Teniendo en cuenta también que estamos en un curso que sirve de acceso a estudios superiores, nos parece interesante darle una visión más práctica al tema, mostrando las propiedades y utilidad de las cónicas para resolver problemas a lo largo de la historia y cómo, hoy en día, los siguen resolviendo.

Para abordar este tema, hemos realizado un amplio análisis didáctico a partir del cual hemos planificado nuestra acción didáctica. Un balance de dicho análisis, lo pueden encontrar en el Anexo de este documento. A continuación, señalaremos los aspectos que consideraremos primordiales para el desarrollo de nuestra unidad.

En cuanto al contenido, presentaremos las cónicas como secciones del cono, ya que fue así como surgieron y, a veces lo problemas se entienden mejor si se tratan de sus orígenes. De aquí deduciremos sus propiedades como lugar geométrico, usando las propiedades del plano vistas en temas anteriores e intentando responder a los objetivos mínimos. Con estas mismas propiedades deduciremos sus ecuaciones y sus elementos.

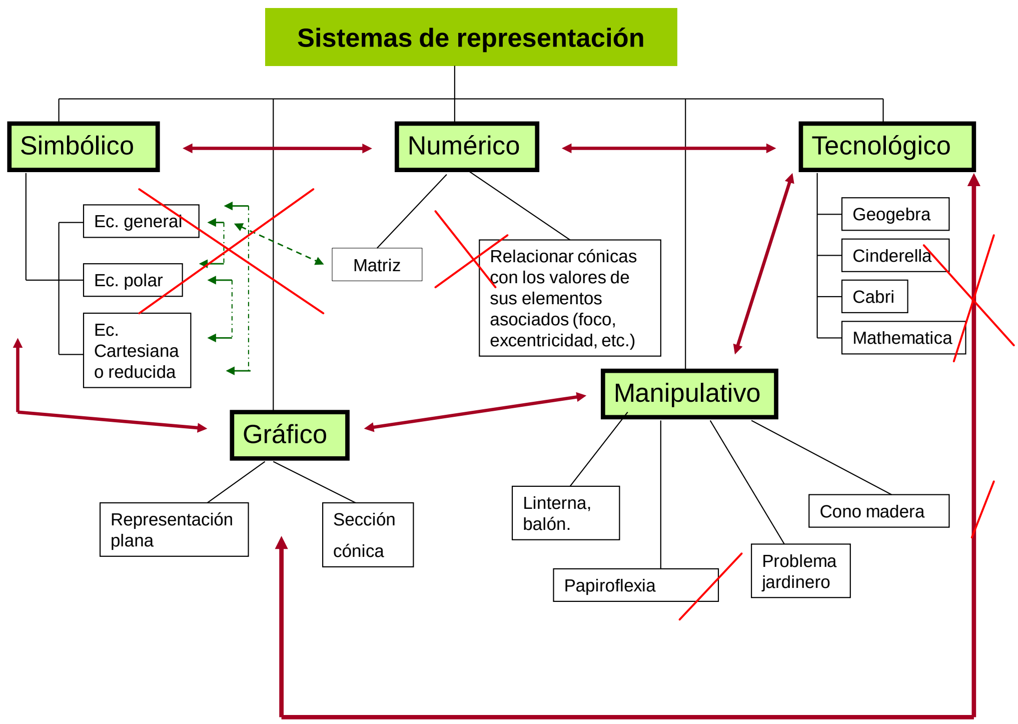
No entraremos en las cónicas como ecuaciones de segundo grado, ya que para estudiarlas en profundidad necesitaríamos matrices, que se estudiarán en el siguiente curso. En cuanto a posiciones relativas, veremos algo sobre ellas, ya que para su resolución también se necesitan contenidos vistos en temas anteriores.



(Este mapa conceptual se encuentra detallado en el Anexo)

Además, en el desarrollo del tema iremos viendo notas históricas importantes en el estudio de estas curvas. (Más información en el Anexo)

Nos parece interesante para afrontar este tema usar diversos sistemas de representación, ya que es un tema muy visual y se comprenderá así mejor. Intentaremos conectar lo máximo posible estos sistemas, para justificar que estamos hablando de una misma cosa pero desde diferentes puntos de vista. Los sistemas de representación simbólico y numérico los reduciremos al estudio de la ecuación reducida y su relación con los elementos, ya que pretendemos dar una visión principalmente geométrica. En cuanto a las herramientas tecnológicas, usaremos Geogebra por sus propiedades (ver apartado de recursos) y otros medios no especificados aquí. A continuación, mostramos algunos de estos sistemas, aunque trabajaremos algunos recursos manipulativos distintos a los incluidos aquí, por parecernos más adecuados para esta etapa educativa:



(Este esquema se encuentra detallado en el Anexo)

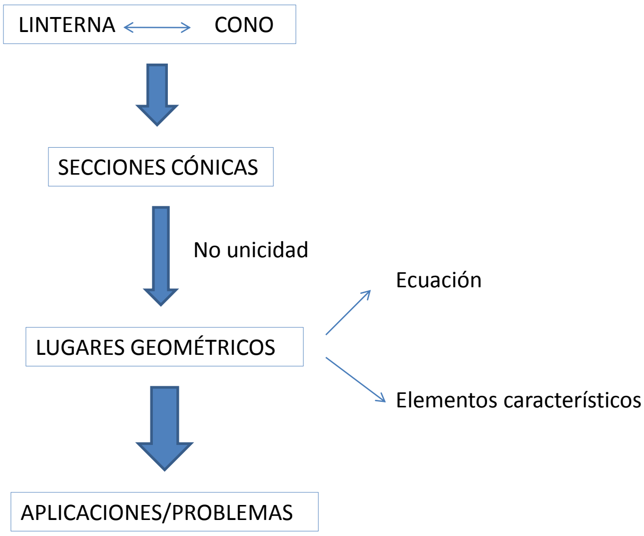
Como pretendemos que esta unidad sirva para mostrar la utilidad de las cónicas en la ciencia y en la vida cotidiana, intentaremos mostrar la mayor cantidad posible de sus aplicaciones ya que resulta imposible barrerlas todas. Además, pretendemos que nuestro alumnado continúe investigando sobre ellas y encontrando más aparte de las que trabajemos en clase. (En el Anexo, podemos encontrar una amplia gama de dichas aplicaciones). Nosotros trataremos principalmente los siguientes campos:

-Aplicaciones de las propiedades reflectoras de las cónicas.

-Trayectorias de planetas y cometas.

-Cálculo de distancias y posiciones.

A la hora de seleccionar los distintos tipos de tareas y actividades hemos tenido en cuentas sus características tras analizarlas (de forma semejante al Anexo), que sean lo más motivantes posible y usar distintos recursos didácticos. Básicamente, la estructura de nuestras tareas es:



En definitiva, hemos programado una unidad didáctica que permita conocer diferentes ejemplos de lugares didácticos, obtener sus propiedades y valorar sus aplicaciones.

UNIDAD DIDÁCTICA:
LUGARES GEOMÉTRICOS. CÓNICAS

Esta unidad didáctica va dirigida a un curso de **primero de Bachillerato** de la modalidad de **Ciencias y Tecnología** con la principal finalidad de que el alumnado identifique formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano, analicen sus propiedades métricas y los construyan a partir de ellas. Esta finalidad se especifica en los siguientes objetivos y contenidos:

OBJETIVOS

El alumno/a ha de ser capaz de:

-Identificar la mediatriz y la bisectriz como lugares geométricos.

-Deducir la ecuación de un lugar geométrico a partir de su definición.

-Distinguir las diferentes secciones del cono que dan lugar a las distintas cónicas.

-Definir las diferentes cónicas como lugares geométricos y describir los elementos característicos de cada una de ellas.

-Relacionar cónica, representación gráfica y elementos característicos de cada una.

-Determinar la excentricidad de una cónica e interpretar su significado geométrico.

-Analizar las posiciones relativas de rectas y circunferencias.

-Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y de la ciencia.

-Construir gráficamente lugares geométricos usando programas de geometría dinámica.

CONTENIDOS

Conceptos:

-Concepto de lugar geométrico.

-Cono. Secciones cónicas.

-Circunferencia: centro y radio.

-Parábola: eje, parámetro, foco, directriz y vértice.

-Elipse: semiejes, focos, distancia focal, centro y excentricidad.

-Hipérbola: semiejes, focos, distancia focal, centro y excentricidad.
-Posiciones relativas.

Procedimientos:

-Recuerdo del concepto de lugar geométrico, con la mediatriz y la bisectriz como ejemplos.
-Determinación de las ecuaciones de las cónicas a partir de su definición como lugares geométricos.
-Reconocimiento de las cónicas como secciones del cono.
-Descripción de los elementos de cada una de las cónicas e identificación de los mismos en las diferentes representaciones.
-Estudio de la posición relativa de una circunferencia y una recta.
-Cálculo de la excentricidad de una cónica y su interpretación geométrica.
-Identificación de cada cónica, con su ecuación, con su sección cónica, su representación gráfica y su uso en la vida real.
-Construcción gráfica de lugares geométricos usando programas de geometría dinámica.
-Resolución de problemas utilizando las cónicas y sus propiedades.

Actitudes:

-Valoración de la utilidad de las nuevas tecnologías para realizar representaciones geométricas.
-Apreciación del uso de las cónicas en la vida real y en la ciencia.

TEMPORALIZACIÓN

Esta unidad de “Idea de lugar geométrico en el plano. Cónicas” pertenece al segundo bloque de contenidos de Matemáticas para el curso de primero de Bachillerato: Geometría. Concretamente es el último tema de dicho bloque.
En nuestra programación para esta unidad hemos desarrollado ocho sesiones, incluyendo una primera de introducción y detección de conocimientos previos y una última de repaso. Está programada para finales del primer cuatrimestre, tras haber visto lo referente al bloque de Álgebra y la Geometría del plano, ya que en el desarrollo de esta unidad utilizaremos contenidos y procedimientos vistos en estos temas.

METODOLOGÍA

Según el Currículo Oficial, participar en la adquisición del conocimiento matemático consiste en el dominio de su “forma de hacer”. No se trata de que los estudiantes posean muchas herramientas matemáticas, sino de las estrictamente necesarias y que las manejen con destreza y oportunidad. Nada hay más alejado que “pensar matemático” que una memorización de igualdades cuyo significado se desconoce, incluso aunque se apliquen adecuadamente en ejercicios de cálculo. También nos indica, que las herramientas tecnológicas nos pueden servir de ayuda tanto para la comprensión de conceptos como para el procesamiento de cálculos pesados. Además, resalta que es importante presentar la Matemática como una ciencia viva y no como una colección de reglas fijas e inmutables.

Basándonos en estas directrices generales hemos programado el desarrollo de nuestra unidad didáctica. Tradicionalmente, el estudio de las cónicas en el Bachillerato es un estudio de tipo analítico, destinado a obtener sus ecuaciones en un determinado sistema de referencia, partiendo de unas definiciones que, en algunos casos, parecen sacadas de una chistera y deducir de ellas sus propiedades.

Nuestro enfoque realiza la presentación de las cónicas desde un punto de vista principalmente geométrico, usando definiciones básicas para obtener sus ecuaciones analíticas. Se muestran cada una de estas curvas como intersección de un plano con un cono de revolución y, posteriormente, se demuestran sus propiedades utilizando las demostraciones basadas en las esferas de Dandelin, desarrollando solo el caso de la elipse, ya que no queremos mucha carga analítica. Para estas demostraciones y las de algunas propiedades usaremos herramientas tecnológicas que nos ayudarán a visualizarlas.

Por otra parte, la deducción de estas definiciones y propiedades las haremos mediante un proceso de descubrimiento por parte del alumnado, partiendo de sus conocimientos previos sobre el tema (en 3º ESO se tratan estos contenidos) y de nociones básicas de Geometría vistas en unidades anteriores.

Por último, para justificar el estudio de las cónicas, veremos algunas aplicaciones que han tenido a lo largo de la historia y cómo han influido en ésta, mostrando también su uso en la actualidad en situaciones que vivimos cotidianamente y fomentando que ellos continúen investigando sobre estos usos.

RECURSOS

Hemos incluido la utilización de varios recursos con la intención de facilitar tanto el aprendizaje del alumnado como nuestra labor de enseñar. A continuación pasamos a presentar y describir los diferentes recursos que utilizaremos:

-Internet. La evaluación de nuestros alumnos/as es, en parte, por un trabajo de investigación, por lo que podrán usar esta gran base de datos para buscar información, entre otros medios. Así mismo, usaremos recursos de la web para deducir las propiedades como lugares geométricos de las cónicas a partir de su definición como secciones cónicas, que podemos encontrar en:

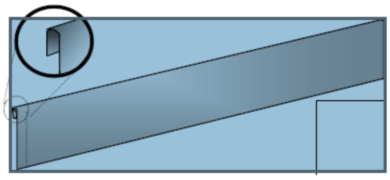
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Conicas_dandelin_d3/index.html.

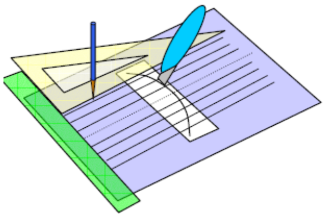
-**Programa de geometría dinámica:** Geogebra. Éste es un programa interactivo especialmente diseñado para la enseñanza y aprendizaje de Álgebra y Geometría a nivel escolar medio. Por un lado, GeoGebra es un sistema de geometría dinámica. Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que a posteriori pueden modificarse dinámicamente. Por otra parte, se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente. Así, GeoGebra tiene la potencia de manejar con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como Raíces o Extremos. Estas dos perspectivas caracterizan a GeoGebra: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa. Aprovechando todas esta propiedades, lo usaremos para observar propiedades de las cónicas como para construirlas, tanto usando las herramientas del programa como por construcciones manuales a partir de sus definiciones. Hay que destacar también que es un programa de software libre, por lo que nuestros alumnos/as podrán disponer de él fácilmente para trabajar en sus casas. (Se puede descargar en http://geogebra.softonic.com/)

-Recursos manipulativos. Podemos aprovechar algunas propiedades de los objetos que tenemos a nuestro alrededor para que se comprendan mejor los conceptos. Por ejemplo, con ayuda de una linterna que tenga el foco circular y una pared, podemos visualizar las diferentes secciones del cono que darán lugar a las cónicas y estudiar los diferentes ángulos por los que seccionar. Con materiales accesibles también podemos construir un espejo parabólico, hiperbólico o con forma de elipse (si no disponemos de ellos) mediante el siguiente proceso:

Materiales: Lata (puede obtenerse de cualquier lata de conserva). Cartón, una hoja de papel tamaño carta para fotocopias. Un puntero láser tipo llavero.

1) Corte un rectángulo de lata de unos 4 x 25 cm. Con el alicate doble uno de sus bordes largos de la lata sobre sí mismos 1 o 2 mm, y haga lo mismo con sus borde cortos. Esto es para prevenir cortadas.

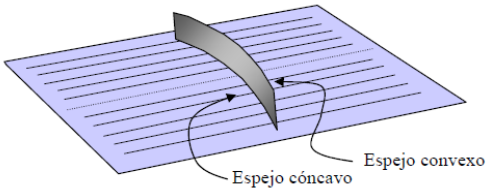




2) Recorte o copie una parábola y péguela en la zona central de un cartón de unos 30 x 60 cm. Con un cuchillo perfore el cartón sólo en la zona de la parábola.

3) La línea de puntos que se ve en la parábola será el eje óptico de nuestro espejo. Prolónguelo en el cartón y haga líneas paralelas a él del lado en que está la concavidad. Trace estas líneas en forma cuidadosa haciendo uso de la regla y la escuadra, de modo que entre ellas exista una distancia de 1 cm.

4) Pase ahora la lata por la ranura y doble el lado que faltaba por completar. Tenemos aquí un espejo parabólico cóncavo (por un lado) y convexo (por el otro).



(De forma análoga para la elipse y la hipérbola)

-Medios audiovisuales. Usaremos también un video de "Más por menos" titulado "Del baloncesto a los cometas" presentado y guión de Antonio Pérez. En este video se describen la cuatro cónicas, desde sus secciones del cono hasta sus múltiples aplicaciones. Este video lo usaremos como repaso, como veremos en el desarrollo de las sesiones. En la red lo podemos encontrar en:

http://www.youtube.com/watch?v=3kuIUKtEPhU

http://www.youtube.com/watch?v=IGp3GMT24LQ

Otro medio audiovisual que usaremos con frecuencia es el proyector. Éste será de gran utilidad para ir mostrando los pasos en las demostraciones que visualizaremos en internet o para las construcciones en Geogebra, ya que de este modo, los alumnos/as que estén despistados o se queden atrás, podrán retomar fácilmente la clase.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

El principio de atención a la diversidad debemos considerarlo en el Bachillerato como un modelo de enseñanza que trata de atender la heterogeneidad del alumnado, haciendo de éste un modelo de enseñanza adaptativo.

En nuestra aula podemos tomar las siguientes medidas generales:

-Si contamos entre nuestro alumnado con algunos con ritmo de aprendizaje más rápido, podemos ampliar en campo de contenidos. Por ejemplo, podemos introducir la potencia de un punto respecto de una circunferencia, el eje radical o el centro radical de varias circunferencias, útiles para resolver diversos problemas geométricos. O también, otro punto de vista de las cónicas, viéndolas como ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas y clasificándolas a partir de ésta. Podemos también proponerle ejercicios usando el programa Geogebra de hallar lugares geométricos con más dificultad.

-Por otro lado, podemos contar con algunos alumnos/as un ritmo de aprendizaje y asimilación más lento. Para estos alumnos/as podemos diseñar actividades más sencillas con el fin de que asimilen lo básico: identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano, analizar sus propiedades métricas y construirlos a partir de ellas.

CORRECCIÓN DE ERRORES Y DIFICULTADES

A la hora de abordar la unidad, podemos prever algunos de los errores y dificultades que se pueden presentar en el proceso de enseñanza- aprendizaje. De este modo, si los consideramos a priori podemos programar la unidad didáctica teniéndolos en cuenta y poder así solventarlos en el momento en que vayan apareciendo. Estos errores y dificultades se podrán mejorar tras aplicar la unidad a grupos de alumnos/as. Creemos que algunos errores posibles pueden ser:

-Desconexión entre los diferentes sistemas de representación.

-Deficiencia de conceptos geométricos básicos (distancias, perpendicularidad, etc.)

-Incapacidad de identificar problemas relacionados con las cónicas y resolverlos.

-No percibir la presencia de las cónicas en la ciencia y la naturaleza.

-Dificultad para identificar los elementos característicos de cada una a partir de su representación algebraica y gráfica.

Para intentar solventar estos errores y dificultades tomaremos las siguientes medidas en el proceso de enseñanza, que se pondrán de manifiesto en la descripción del desarrollo de las sesiones:

-Realizar tareas muy visuales y con poco carga de cálculos.

-Usar diferentes recursos para representar las cónicas y relacionar sus elementos característicos.

-Mostrar un amplio abanico de aplicaciones de las cónicas y animar al alumnado a continuar investigando sobre ellas.

-Recordar conceptos geométricos básicos que se han visto en unidades anteriores.

-Deducir razonadamente las ecuaciones y propiedades de las cónicas para evitar el uso único de la memoria.

CRITERIOS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Criterios de evaluación

-Define correctamente el concepto de lugar geométrico y da ejemplos del mismo.

-Deduce las ecuaciones de lugares geométricos partiendo de su definición.

-Reconoce las cuatro cónicas como lugares geométricos y como secciones del cono y describe sus elementos más característicos.

-Relaciona razonadamente cónica, representación gráfica y elementos característicos de cada una.

-Calcula la excentricidad de una cónica e interpreta su significado gráficamente.

-Estudia correctamente las posiciones relativas de rectas y circunferencias.

-Identifica justificadamente el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y de la ciencia.

-Utiliza adecuadamente programas de geometría dinámica para representar lugares geométricos.

Instrumentos de evaluación

Para evaluar nuestra unidad didáctica, tendremos en cuenta lo siguiente con los valores indicados, valorando sobre 10:

-Observación directa y sistemática. 5%

-Asistencia. 5%

-Ejercicios de clase: valoraremos que los realicen, así como la voluntad de salir a exponerlos a sus compañeros. 10%

-Tareas para entregar. Con estas tareas valoraremos cómo los alumnos/as van asimilando los conceptos paulatinamente, ya que la mayoría son de aplicación de lo visto en clase o pasar de algo concreto a algo general. También deberán realizar un esquema final del tema, estableciendo las relaciones entre los contenidos. 50%

-Trabajo final escrito. Este trabajo lo realizarán en grupos de dos o tres alumnos/as. Consiste en elegir una de las cónicas y buscar fenómenos y situaciones en las que aparezca dicha cónica, identificando las propiedades que la hacen idónea para ello en la medida de lo posible. 30%

Tanto los trabajos para entregar como el trabajo final son esenciales para la evaluación, si no se entregan, tendrán una evaluación negativa.

DESARROLLO COMPLETO DE LAS SESIONES

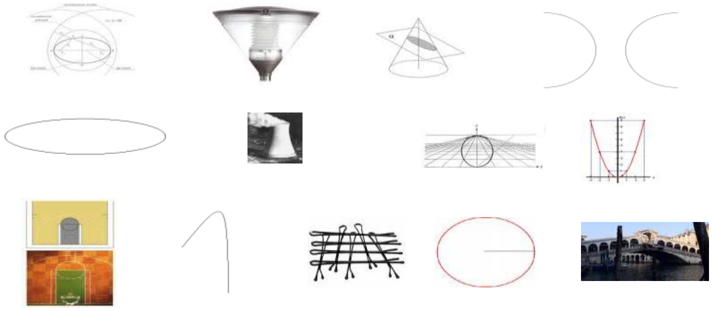
A continuación detallamos las sesiones que llevaremos a cabo. Hemos incluido el tipo de actividades que realizaremos, intentando el máximo detalle posible. Las sesiones se llevarán a cabo en un aula TIC, ya que usaremos reiteradamente las variadas y sugerentes posibilidades que las nuevas tecnologías nos ofrecen. El esquema general que seguiremos es el siguiente:

1. Presentación. Cónicas como secciones del cono y como lugares geométricos
2. Circunferencia
3. Rectas en circunferencia, aplicaciones, problemas
4. Elipse, elementos, definición
5. Aplicaciones de la elipse
6. Parábola, elementos, definición, aplicaciones
7. Hipérbola, elementos, definición, aplicaciones
8. Repaso y cierre del tema.

Veamos el desarrollo detallado de cada una de las sesiones:

SESIÓN 1:

Presentaremos varias curvas de diversas formas: representadas en el plano, escogidas del arte, de la naturaleza, etc., algunas serán cónicas y otras no. Pediremos a los alumnos/as que nos digan qué curvas son y que justifiquen por qué. Para poder hacer mejor esta justificación vamos a estudiar en profundidad estas cónicas. Algunas de esas imágenes pueden ser:

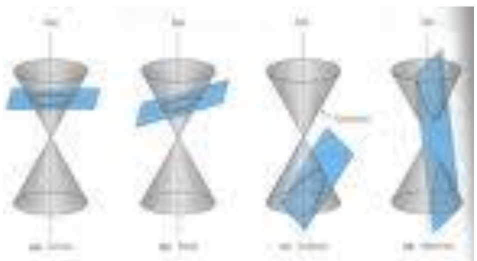


Estas curvas fueron descubiertas alrededor del siglo V a.C. como secciones de un cono. Nosotros comenzaremos igual, para ello realizaremos la siguiente actividad en grupos de tres o cuatro alumnos/as:

Con linternas redondas de diferentes tamaños y bajando las luces del aula, les pediremos que averigüen qué curvas pueden obtener, cómo las pueden clasificar, cuántas diferentes hay, cómo las han obtenido, etc.

La luz de una linterna redonda simulará el cono y una pared el plano con el que lo seccionamos. También podrán usar un cartón para ver qué ocurre cuando seccionamos por un punto que pasa por el vértice del cono.

A partir de sus conclusiones, continuaremos recordando que es un cono, definiéndolo como la superficie de revolución que se obtiene al girar una recta y destacando sus principales elementos: generatriz, vértice y eje. Clasificaremos las cónicas en degeneradas y no degeneradas ejemplificándolas con imágenes y poniéndoles nombres a las diferentes cónicas.



Observaremos, usando diferentes tamaños de linternas, que podemos obtener la misma cónica, lo que nos hace pensar que cada cónica tiene propiedades que la caracterizan como una curva plana independiente de la sección cónica elegida, por lo que vamos a estudiar cada una de las cónicas.

Para esto, ***preguntaremos a los alumnos/as qué es un lugar geométrico y qué lugares geométricos conocen***. Haremos un ejemplo en la pizarra para calcular la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan a dos puntos dados: la mediatriz. El método que usaremos lo seguiremos para los demás, que consiste en:

-Se toma un punto genérico P(x,y) del plano.

-Se obliga a que dicho punto pertenezca al lugar geométrico buscado, es decir, que verifique la propiedad que determina ese lugar.

-Se simplifican las expresiones obtenidas.

Posteriormente, le pediremos a los alumnos/as que ***calculen la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan a dos rectas dadas y lo represente gráficamente***, para su posterior entrega.

Con estos ejemplos recordaremos también cómo se calcula la distancia entre dos puntos y de un punto a una recta, que se han visto en temas anteriores.

También les pediremos que realicen el siguiente ejercicio, que nos servirá para introducir la circunferencia:

Dados los puntos A(2,3) y B(6,1) halla la ecuación y describe el lugar geométrico de los puntos P(x,y) del plano tales que los vectores AP y BP son perpendiculares entre sí.

SESION 2:

Comenzaremos recordando lo visto en la clase anterior de forma oral y con la participación del alumnado. A continuación, corregiremos el ejercicio de la clase anterior, sacando un alumno/a a la pizarra. Posteriormente comprobaremos el resultado usando el programa de geometría dinámica Geogebra.

Seguidamente, ***harán el proceso con dos puntos genéricos A(a1,a2) y B(b1,b2)*** y obtendrán la ecuación desarrollada de la circunferencia, de donde deben deducir una propiedad de la circunferencia (esta propiedad más tarde la estudiaremos en las otras cónicas para ver cómo se reflejan las ondas). Entre todos daremos la definición de la circunferencia como lugar geométrico y la usarán para ***deducir***, usando el mismo método, ***la ecuación reducida de la circunferencia, destacando como elementos notables el centro y el radio***. Si desarrollamos esta ecuación, obtendremos una expresión del mismo tipo que la que hemos obtenido con A y B. Relacionaremos la ecuación con los elementos y representación gráfica y viceversa.

Propondremos un ejercicio para ***identificar cuándo una ecuación es de una circunferencia***. Dicho ejercicio consistirá en decidir cuáles de las ecuaciones dadas son de una circunferencia y hallar el centro y el radio en los casos en que lo sean. Para calcular estos no usaremos fórmulas, sino que completaremos cuadrados hasta obtener la ecuación reducida a partir de la cual es sencillo obtenerlos.

Volvemos a ejemplo con el que iniciamos la clase y nos preguntaremos: ¿Qué ocurre con los puntos A y B? ¿Pertenecen a la circunferencia? ¿Están en su interior? ¿Están fuera? ¿Cómo lo podemos determinar? En temas anteriores se ha visto la distancia entre dos puntos, y calculando la distancia entre el centro de la circunferencia y cualquier punto y comparando ésta con el radio, podremos determinar la posición del punto, por lo que esto no supone ningún aprendizaje nuevo. ¿Y si ahora queremos estudiar la posición relativa entre una recta y una circunferencia? Pues en este caso veremos que hay dos opciones, conocidas ya también; la primera es el mismo método que para los puntos, calcular la distancia de la recta al centro y compararla con el radio. La segunda consiste en formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: la ecuación de la circunferencia y la de la recta y estudiar sus soluciones. Éste método también es conocido por el alumnado, ya que se ha usado para estudiar posiciones relativas en el plano en temas anteriores, por lo que tampoco constituye un nuevo aprendizaje. Por este motivo no haremos ejemplos concretos y se los dejaremos a los alumnos/as.

Para trabajar esta parte, ***le daremos a los alumnos/as la ecuación de una circunferencia en forma desarrollada y les pediremos que nos calculen un punto interior, otro exterior, uno que pertenezca a la circunferencia, una recta exterior, una secante y otra tangente a la circunferencia y que lo representen todo usando el programa Geogebra***, ejercicio que entregarán para su posterior evaluación.

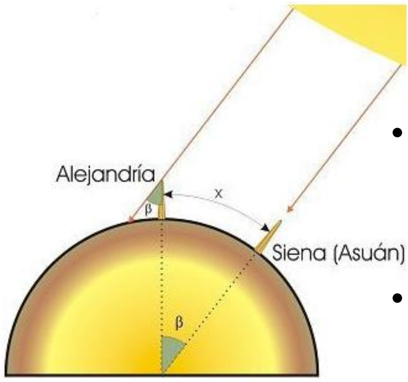
SESION 3:

Corregiremos los ejercicios de la sesión anterior con ayuda de los alumnos/as, recordando lo visto hasta ahora.

A continuación, ¿cuántas tangentes a una circunferencia pasan por un punto exterior a ésta? ¿Qué propiedades tienen? Con esto pretendemos ver que por un punto exterior P a una circunferencia hay dos tangentes en dos puntos T y T’ tales que PT = PT’. Ya que esta propiedad la usaremos más adelante.

Aplicaciones de la circunferencia hay muchas. ***Preguntaremos a los alumnos/as cuáles conocen ellos y por qué creen que se usa la circunferencia para eso.***

Destacaremos la rueda como un elemento muy importante en la historia, la construcción de arcos y la utilidad de la circunferencia para construir polígonos regulares.
Pero, por la curiosidad que puede despertar, simularemos el método de Eratótenes para la medición de la circunferencia de la Tierra:
Eratóstenes tenía noticia de un hecho que cada año se producía en una ciudad de Egipto llamada Siena (hoy Asuán). Sucedía que cierto día del año, al mediodía, los obeliscos no producían sombra alguna. El agua de los pozos reflejaba como un espejo la luz del Sol. Hoy sabemos que esto es debido a que Asuán se encuentra en el Trópico de Cáncer y ese día marca el solsticio de verano (este hecho era festivo y muy celebrado por los lugareños).
Sin embargo, Eratóstenes observó que en Alejandría, ese mismo día, los obeliscos sí producían sombra. Eso sólo es posible si La Tierra era redonda, pues el Sol está tan lejos como para considerar que sus rayos inciden paralelamente sobre La Tierra.



Observa el gráfico de la izquierda donde se muestra el razonamiento al que llegó Eratóstenes.

- ***Al ser curva la superficie terrestre, en Siena el obelisco no produce sombra alguna, mientras que en Alejandría sí.***
- ***Comprueba que los dos ángulos que se representan son idénticos.***

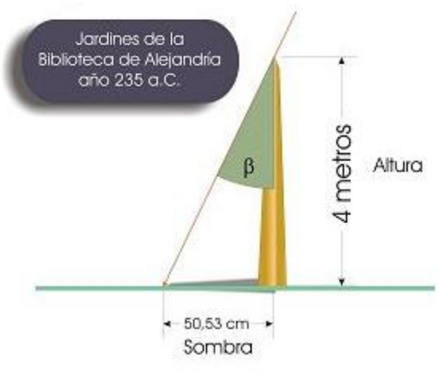
Eratóstenes pensó que midiendo la sombra de un obelisco en Alejandría, el mismo día y a la misma hora en que en Siena no proyectaba ninguna sombra, y sabiendo la distancia entre Alejandría y Siena, podría calcularse la circunferencia terrestre, pues da la casualidad de que Siena está al Sur de Alejandría (prácticamente en el mismo meridiano).
Sin embargo, se enfrentaba a *dos problemas****:***
1.- ¿Cómo diablos iba a averiguar la distancia exacta entre Siena y Alejandría?
2.- Si en esa época no había relojes (ni teléfono), ¿cuándo medir la sombra en Alejandría?, pues ha de ser en el preciso momento en que, en Siena, los obeliscos no producen sombra.

¿Se te ocurre alguna idea para ayudar a nuestro pobre Eratóstenes?

Veremos que respuestas se le ocurren a los alumnos y cómo las justifican. Posteriormente les presentaremos las soluciones que les dio Eratóstenes:

Paso 1: Distancia entre Siena y Alejandría Eratóstenes ordenó (y pagó de su propio bolsillo) a los jefes de caravanas que midieran la distancia entre las dos ciudades. Para ello debían poner esclavos a contar las vueltas de rueda que daban los carros, a extender largas cuerdas a lo largo del camino, a contar pasos, etc. La dificultad radica en que estamos hablando de dos localidades separadas por más de 700 km. Le salió una media de 5.000 estadios. Cada estadio equivalía a 157'5 metros, por lo que la distancia entre las ciudades la estimó en 787'5 km.

Paso 2: Medición de la sombra
Llegado el día, midió la sombra de un palo que de forma perfectamente vertical había colocado en los jardines de la biblioteca. ¿Cómo saber en qué momento medir la sombra? La respuesta es fácil, sobre el mediodía (cuando el sol está en su punto más alto) se mide la sombra varias veces. La menor sombra corresponderá al momento en que el Sol está en el cénit.
Una vez que tenía los datos, ¿qué cálculos hizo para averiguar la medida de la circunferencia?



Posteriormente les presentaremos los cálculos de Eratóstenes para ver las semejanzas y diferencias con los nuestros:
tg β = sombra / altura = 0,5053 / 4 = 0,126325
β = arctg 0,126325 = 7,2º

- Al dividir la sombra entre la altura del palo, obtuvo un ángulo de 7,2º.
- Después planteó una sencilla regla de tres. Al multiplicar 787,5 km. x 360º y dividir el resultado entre 7,2º, calculó que la circunferencia terrestre medía 39.375 km.

¡Qué maravilla! Si la medida real es de 39.942 km, el obtuvo una medida de 39.375 km. (sólo se equivocó en 567 km). ¡Qué resultado tan increíble!, teniendo en cuenta la tecnología con la que trabajó para medir distancias y ángulos.

Pero, ¿cuáles fueron sus errores?

Les propondremos que nos den sus ideas razonadas y, veremos si es necesario clarificarlos.

Los errores de Eratóstenes fueron muy sutiles y casi inevitables:

Error 1.- La distancia entre Asuán y Alejandría es de 729 km. (4.628 estadios); no de 787'5 km.

Error 2.- Las dos ciudades no están en el mismo meridiano, sino que difieren en unos 3º de longitud.

Error 3.- La medida exacta del ángulo de la sombra en Alejandría es: 7,08º (no 7,20º).

Cometió estas inexactitudes que a lo mejor hasta se compensaron, pero sin duda la labor de medición y el resultado obtenido hace más de 2.240 años fue impresionante.

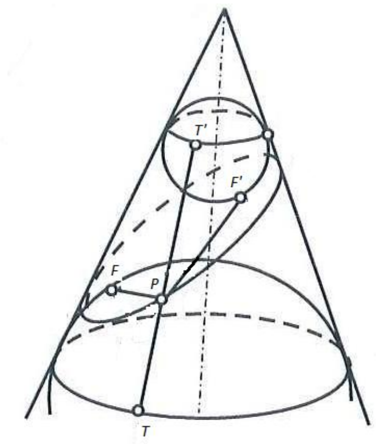
Como ejercicio para su evaluación, ***les propondremos que vuelvan a calcular la medida de la circunferencia terrestre teniendo en cuenta los errores de Eratóstenes y, por supuesto, intentando evitarlos, comparando sus resultados con los de hoy en día.***

(Con este problema estamos usando nociones de trigonometría que se han visto en unidades anteriores).

SESION 4:

Como vimos en la primera sesión del tema, podemos obtener una elipse a partir de diferentes superficies cónicas, lo que nos hace sospechar que debe existir una propiedad que caracterice a la elipse con una curva plana independiente de la superficie cónica, y vamos a intentar descubrirla. Para ello propondremos la siguiente actividad para que la trabajen individualmente o en grupos y que posteriormente comentraremos entre todos en clase:

En la superficie cónica donde tenemos la elipse introducimos dos esferas tangentes a dicha superficie y al plano de la elipse, una en la parte superior y otra en la inferior.



Razonando a partir de aquí vamos a descubrir una propiedad que cumple cualquier punto P de la elipse. Llamamos F y F' a los puntos en los que la esfera tocan al plano de la elipse. Unimos P con estos puntos y obtenemos los segmentos PF y PF'. Trazamos la recta que une P con el vértice de la superficie cónica. Esta recta toca a las esferas en los puntos T y T'. Se forman los segmentos PT y PT'. ¿Qué relación existe entre PF y PT? ¿Y entre PF' y PT'? ¿Por qué?

(Para razonar aquí solo será necesario trasladar a la esfera la siguiente propiedad de la circunferencia: si desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan dos rectas tangentes a la misma en dos puntos T y T', entonces PT = PT', que se ha visto en una sesión anterior)

De aquí se deduciremos que:

PF + PF' = PT + PT' = TT'

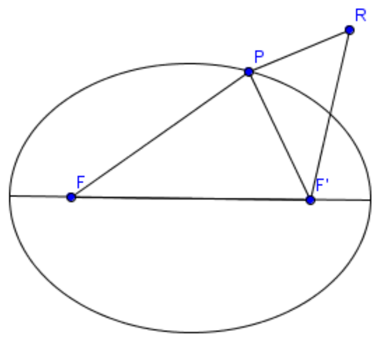
Ahora bien, la longitud del segmento TT' es igual para todos los puntos P de la elipse porque …

Con esto pretendemos que los alumnos/as razonen que no importa el punto P que elijamos.

Luego podemos concluir que, para todos los puntos P de la elipse, la suma PF y PF' tiene el mismo valor, es decir, es un número fijo que representamos por K:

K = PF +PF`

Pero nos preguntamos, ¿cuánto valdrá esa suma par puntos que no pertenezcan a la elipse? Veamos:

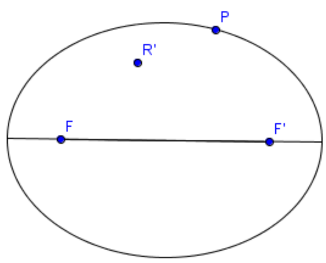


Sea R un punto exterior. Pediremos que completen y justifiquen la siguiente igualdad, donde de nuevo se usan propiedades de suma de segmentos vistas en unidades anteriores:

RF + RF' = RP+ + RF'= + (RP + RF') > PF + =K

De donde obtendrán que, en consecuencia, para los puntos exteriores, la suma de sus distancias a F y F' es mayor que K.

¿Y si el punto fuese interior? Si R' fuese un punto interior, razonando de forma parecida, obtendríamos que R'F + R'F'….



Por lo tanto, todos los puntos de la elipse y sólo ellos verifican que……..
De esta forma, habrán descubierto una propiedad (llamada propiedad focal) que caracteriza completamente a los puntos de una elipse. Esta demostración se basa en las esferas de Dandelin y les pediremos que comparen y comprueben sus resultados con: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Conicas_dandelin_d3/index.html.
Por lo que ya podemos dar una definición precisa de la elipse como lugar geométrico. A partir de aquí le pondremos nombres a los distintos elementos de la elipse: focos, distancia focal, semiejes, etc.
Al igual que estamos haciendo con todos los lugares geométricos, ***deducirán la ecuación de la elipse cuando el centro es el origen de coordenadas y los focos están situados en el eje de abscisas***, dejando como tarea para entregar ***generalizarla para cuando el centro no es el origen de coordenadas y cuando los focos están situados en el eje de ordenadas.*** Una vez obtenida la ecuación de la elipse, veremos cómo podemos obtener sus elementos característicos a partir de ella y viceversa. También veremos cómo identificar los elementos en una representación gráfica y viceversa.
Con ayuda del Geogebra, verán que hay diferentes tipos de elipses, más o menos achatadas. Les preguntaremos: ¿De qué depende esto? ¿Cómo podemos clasificarlas? Con esto pretendimos llegas a la definición de excentricidad de la elipse y

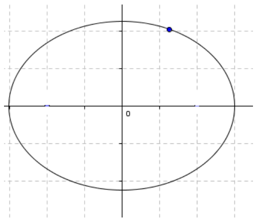
usando este programa de geometría dinámica, comprobarán cómo varia la excentricidad según sea el achatamiento de la elipse y viceversa, para obtener una relación.

Para consolidar estos conceptos y procedimientos propondremos ejercicios del tipo:

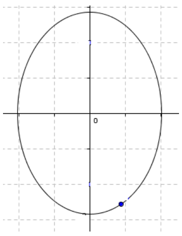
-Dada la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2$ = 36, calcula el valor de sus semiejes, su distancia focal, su excentricidad y las coordenadas de los focos y vértices. Represéntala gráficamente.

-Para cada una de las elipses de la figura, indica las medidas de sus semiejes y de su distancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos, y calcula el valor de la excentricidad. Escribe su ecuación.

a)



b)



SESION 5:

Comenzaremos recordando lo visto en la clase anterior y corrigiendo los ejercicios de la última sesión con los alumnos/as.

Uno de nuestros objetivos es que los alumnos/as identifiquen el uso de las diferentes cónicas, por lo que presentaremos algunas utilidades de las cónicas.

Para ello, recordaremos que las cónicas surgieron hacia el siglo IV a. C. como secciones de un cono al igual que las hemos visto nosotros. Pero no fue hasta el siglo XVI cuando su interés fue mayor. Dicho interés estuvo fomentado por los estudios de Johannes Kepler sobre el movimiento elíptico de los planetas, y un siglo más tarde comenzó su estudio analítico como lugares geométricos en el plano.

Con esto, les propondremos a los alumnos/as el siguiente problema, que deberán entregar:

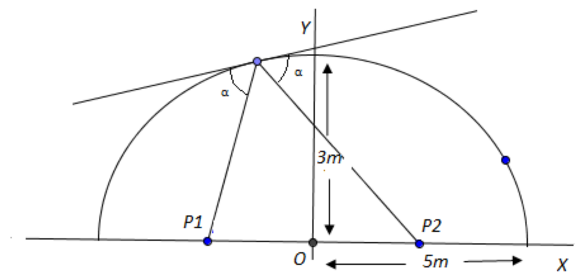
-Nuestro planeta gira alrededor del Sol describiendo una órbita elíptica en uno de cuyos focos se encuentra el Sol. El punto en que la distancia entre la tierra y el Sol es máxima (152 $\cdot 10^8$km) se denomina afelio, y el punto donde es mínima (147 $\cdot 10^8$km), perihelio. Con estos datos, calcula la excentricidad de la órbita de la Tierra e interprétala.

Destacaremos otra curiosidad de esta cónica. Lewis Carroll, el matemático autor de Alicia en el País de las Maravillas, se construyó una mesa de billar de forma elíptica. En ella, si una bola pasa por un foco, sin efecto, pasará necesariamente por el otro foco después de rebotar. Y así, sucesivamente, hasta que se pare***. ¿Por qué sucede esto? Les pediremos a los alumnos/as que nos expresen sus ideas.***

Seguidamente veremos la propiedad de reflectora de la elipse:

Una bola lanzada en una mesa de billar elíptica rebota como si se sustituyera la elipse por la recta tangente en ese punto. Si la lanzamos desde un foco, debido a esta propiedad, rebotará en la recta tangente dejando ángulos iguales y dirigiéndose, luego, al otro foco. No nos interesa la demostración formal de esta propiedad, pero la podrán visualizar fabricando el recurso descrito anteriormente. ***Lo fabricarán y les pediremos que experimenten y obtengan conclusiones, para obtener la propiedad reflectora de la elipse.*** Como aplicación de esta propiedad propondremos el siguiente problema que deberán entregar:

-La habitación de los secretos de la Alhambra tiene el techo en forma elíptica de la siguiente forma:



a) ***Suponiendo las distancias y el sistema de referencia indicado, halla la ecuación de la elipse del techo y calcula las coordenadas de los focos.***
b) ***Si te encuentras situado en el foco P1, ¿en qué punto se tendría que situar tu amigo para que escuche lo que digas sin necesidad de gritar? ¿Por qué?***
c) ***Comprueba la propiedad anterior suponiendo que la primera persona hable en dirección al punto (4, 9/5) de la elipse. Para ello calcula la ecuación de la recta correspondiente al sonido rebotado y estudia si pasa por el otro foco.***

(Este problema repasa todo lo visto sobre los elementos y la ecuación de la elipse, también la ecuación de una recta vista en otra unidad y una curiosa aplicación de la propiedad reflectora de la elipse)

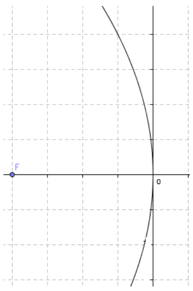
SESION 6:

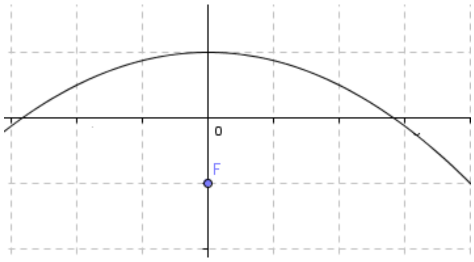
En esta sesión vamos a trabajar otra de las cónicas, la parábola. Recordaremos, al igual que con la elipse, que es una sección de cono y que habíamos intuido que debe de tener alguna propiedad que la caracterice como curva plana. Mediante el recurso en la web http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Conicas_dandelin_d3/index.html, ***verán como se deduce la definición de lugar geométrico de la parábola*** por un proceso análogo al de la elipse, destacando sus elementos. ***Obtendrán su ecuación*** siguiendo el mismo método de las anteriores poniendo el vértice en el origen y dejando como ejercicio para entregar los otros casos.

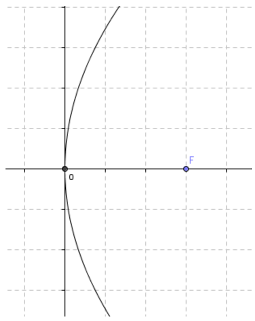
Relacionaremos la ecuación con sus elementos y su representación gráfica y viceversa, para lo que haremos ejercicios del tipo:

-Escribe la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto V(-2,4), su eje es paralelo al eje de ordenadas, y la distancia entre su foco y su directriz es de 3 unidades.

-Para cada una de las siguientes parábolas, indica su vértice, su foco y su directriz. Calcula el valor del parámetro p y la ecuación reducida de la curva:







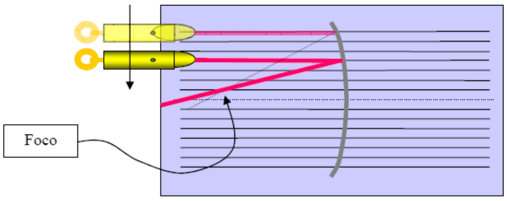
-Para las siguientes parábolas, calcula las coordenadas del foco y del vértice, las ecuaciones del eje y de la directriz y dibújalas.

$a)\ x = y^2 - 6y + 10$ $\qquad$ $c)\ x^2 + 6x + 13 = -4$

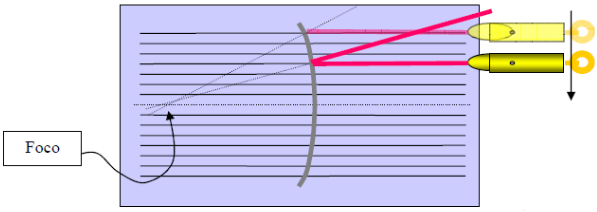
$b) y^2 + 4y = 2 - 3x$ $\qquad$ $d)\ x^2 - 4x = 6y - 28$

Al igual que en las otras cónica vamos a buscar aplicaciones. ***Preguntaremos, ¿tendrá la parábola alguna propiedad reflectora parecida a la de la elipse? Para ello le propondremos que realicen un proceso análogo al que han hecho con la elipse, con un espejo parabólico*** (si no se poseen el espejo es sencillo fabricarlo como lo han hecho antes). Experimentando con el puntero láser, obtendrán conclusiones. Si es necesario, podemos proporcionarles el siguiente guión:

-En primer lugar, vamos a poner el espejo sobre un papel. Vamos a apuntar hacia el espejo de forma paralela al eje de la parábola y vamos a ir dibujando las trayectorias. Veremos que todas concurren en un punto: el foco de la parábola.



-Ahora haremos el proceso contrario: apuntaremos desde el foco hacia la parábola y observaremos que todos los rayos se reflejan de forma paralela al eje de la parábola.
Ahora bien, podemos hacer el mismo experimento, pero considerando el espejo convexo en lugar de cóncavo:



Y podremos observar que los rayos que llegan paralelos al eje de la parábola divergen desde un punto: el foco.
Podrán ver también como se reflejan los diferentes objetos según dónde los situemos delante de un espejo parabólico.
http://www.youtube.com/watch?v=yljggIHHPgY
¿Para qué podemos usar estos espejos con estas propiedades?
Se usan en rampas de garajes, en tiendas, etc. ¿por qué? ¿Cómo influye esta propiedad?
Otra aplicación de esta propiedad está en los ***faros de los coches, que tienen forma de paraboide. ¿Por qué? ¿Dónde pondríamos el foco de luz?***
Los alumnos/as en Física han estudiando el movimiento parabólico, por lo que les propondremos el siguiente problema para su posterior entrega:
Cuando se chuta un balón, la trayectoria que describe el mismo es una parábola. El tipo de parábola depende del ángulo con el que se golpea el balón y de la velocidad inicial con que se lanza el mismo.

Un jugador A ha golpeado un balón hacia su compañero B y ha conseguido las siguientes distancias:

-Altura máxima alcanzada por el balón: 2,75 m.

-Distancia hasta el punto donde el balón ha botado: 12,5 m.

Con estos datos:

a) Escribe la ecuación de la trayectoria tomando una referencia adecuada.

b) Indica las coordenadas del foco y del vértice, y la ecuación de la directriz.

c) Si tu eres el jugador B y te encuentras a 5m del A, ¿podrías parar el balón cuando pase por tu vertical?

SESIÓN 7:

Para comenzar con el estudio de la hipérbola usaremos el siguiente problema:

Sistema de navegación LORAN (Long Range Navegation): Este sistema consta de dos pares de transmisores de radio F1 y F2, G1 y G2. Desde F1 y F2 se envían simultáneamente señales a un barco situado en un punto P. Este las recibe con una diferencia de tiempo que sirve para determinar la diferencia de distancias entre P y F1 y P y F2. Análogamente para los transmisores G1 y G2. ¿Cómo determinan la posición exacta del barco?

Les dejaremos que expresen sus ideas y posteriormente haremos una puesta en común. Comenzaremos razonando que al llegarle desde dos puntos distintos pueden calcular la diferencia de tiempo y como conocen la velocidad, pueden calcular la diferencia de distancias. A partir de aquí daremos la definición de hipérbola como lugar geométrico y concluiremos que el barco está en la intersección de dos hipérbolas.

Verán, al igual que con la elipse y la parábola, cómo se deduce esta definición de su sección del cono con ayuda de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Conicas_dandelin_d3/index.html.

Partiendo de la definición de hipérbola como lugar geométrico deducirán su ecuación reducida, en el caso en que el centro es el origen y los focos están situados en el eje de abscisas, dejando los otros casos como ejercicios para entregar. Veremos sus elementos más notables, relacionándolos con la ecuación y su representación gráfica y viceversa. Señalaremos como caso particular la hipérbola equilátera.

Al igual que con la elipse, verán que hay muchas hipérbolas con los mismos focos, pero unas más abierta y otras menos abiertas. Para clasificarlas, definiremos la excentricidad de la hipérbola y con ***ayuda de Geogebra, verán cómo varía la excentricidad en relación con la forma de la hipérbola.***

Para afianzar eso haremos ejercicios del tipo:

-Dada la hipérbola de ecuación $x^2 - 9y^2 = 9$ calcula sus elementos.

-Calcula las ecuaciones de estas hipérbolas:

a) Vértice en A(5,0) y foco en F(8,0).

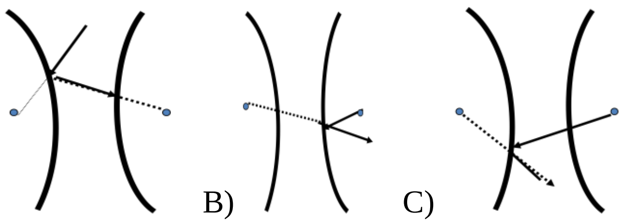
b) Foco en F(15/4,0) y pasa por P(5,3).

-Para cada una de las siguientes hipérbolas, indica las medidas de sus semiejes y de su semidistancia focal, escribe las coordenadas de los vértices y de los focos y calcula la excentricidad. Dibújala.

$$\boldsymbol{a)\ \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1} \qquad\qquad \boldsymbol{b)\ \frac{(x+1)^2}{8} - \frac{(y-2)^2}{6} = 1}$$

Aunque ya hemos visto una aplicación de la hipérbola, veremos alguna más. Hemos visto que la elipse y la parábola tienen propiedades reflectoras de las ondas, así que vamos a ver si la hipérbola también las tiene.

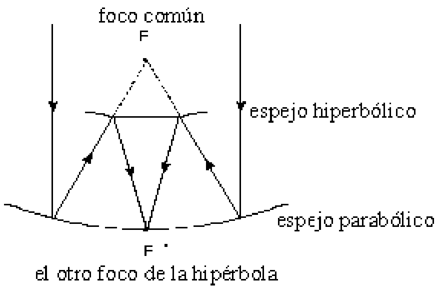
Para ver eso, ***construirán un "espejo hiperbólico" como lo hemos hecho con las otras cónica y verán como reflejan los rayos***:



A) B) C)

Un rayo de luz dirigido hacia un foco es reflejado hacia el otro foco por un espejo hiperbólico, ver figura A; un rayo que se aleja de un foco se refleja apartándose del otro, ver figura B y C.

Esta propiedad combinada con la de la parábola se usa para fabricar telescopios mediante el siguiente esquema:



¿Cómo ayudan las propiedades? ¿Harías otra construcción mejor? ¿Cómo?

Como aplicación, le propondremos el siguiente problema para entregar:

Dos estaciones LORAN están a una distancia de 400 Km entre sí a lo largo de un litoral recto. Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00086 segundos entre las dos señales LORAN.

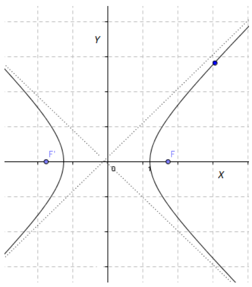
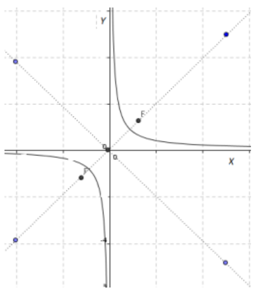
a) ¿En qué lugar tocaría tierra si siguiera la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo?

b) Si el barco quiere entrar a un puerto localizado entre las dos estaciones, a 25 Km de la estación maestra, ¿qué diferencia debe buscar?

(Para este ejercicio deben buscar la velocidad de la luz)

Y también el siguiente:

-Al girar una hipérbola equilátera, $x^2 - y^2 = a^2$ ***, 45º según lo mostrado en las figuras, las asíntotas de la hipérbola coinciden con los ejes coordenados. Demuestra, utilizando las nuevas coordenadas de los focos y la definición de hipérbola como lugar geométrico, que respecto de esto nuevo ejes la ecuación de la hipérbola se escribe de la forma*** $xy = \frac{a^2}{2}$.

(Nosotros no hemos trabajado las asíntotas en clase, pero las han visto para cualquier tipo de función, por lo que lo pueden aplicar en esta tarea)

<u>SESIÓN 8:</u>

Para terminar con la unidad, haremos una sesión de repaso. Para ello, en primer lugar, veremos un vídeo que resume todo lo que hemos visto en el tema y aporta nuevas aplicaciones de las cónicas, para aportar ideas para el trabajo final al alumnado. El video se titula “Del baloncesto a los cometas” (Más información en el apartado de recursos).

A continuación, construirán la elipse, la parábola y la hipérbola como lugares geométricos con ayuda del programa Geogebra:

Seguiremos los siguientes pasos razonando que la construcción es válida, aunque dando la oportunidad a los alumnos/as de que los vayan intuyendo y de que realicen otro proceso siempre que lo justifiquen.

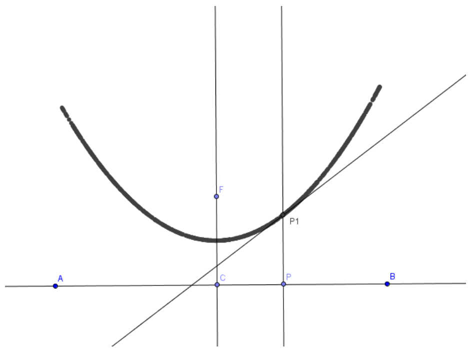
Comenzaremos con la parábola.

-Dibujamos una recta, que será la directriz, y en una perpendicular a ella marcamos el foco F.

-Señalamos otro punto P cualquiera de la recta directriz y trazamos una perpendicular a ésta por P.

-A continuación trazamos la mediatriz de PF obteniendo P1 en su intersección con la perpendicular anterior.

-La parábola será el lugar geométrico de P1 cuando P recorre la recta. En lugar de usar la herramienta lugar geométrico, activaremos el rastro de P1 y moveremos P por la recta para ver cómo se va construyendo. La construcción sería algo así:



Continuaremos con la elipse. Vamos a seguir el “método del jardinero” con Geogebra:

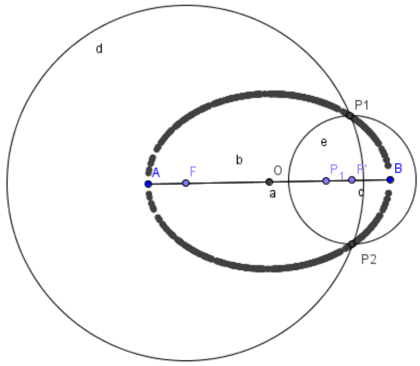
-Dibujamos un segmento AB correspondiente al eje mayor, definimos en él un punto P y dibujamos su punto medio que será el centro de la elipse O.

-Dibujamos un foco F y calculamos su simétrico respecto de O para obtener F’.

-Definimos los segmentos PA y PB, b y c respectivamente.

-Trazamos circunferencias en F y F’ con radio b y c respectivamente, obteniendo los puntos P1 y P2 como puntos de intersección de las dos circunferencias.

-El lugar geométrico descrito por P1 y P2 cuando P recorre el segmento AB es la elipse, así que activamos el rastro de P1 y P2 y movemos P por el segmento AB. El resultado sería algo así:



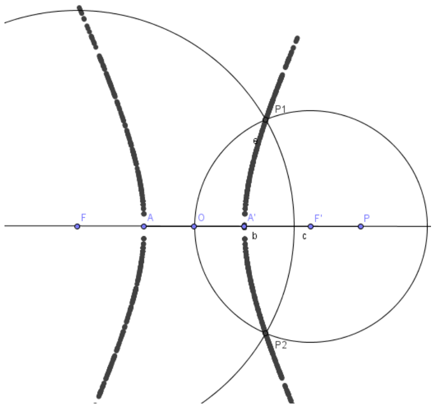
Y, por último, la hipérbola:

-Sobre una recta dibujamos tres puntos F, A y O y calculamos los simétricos de A y F respecto de O.

-Dibujamos un punto P en la recta y señalamos los segmentos PA y PA', b y c respectivamente.

-Trazamos circunferencias en F y F' con radio b y c respectivamente, obteniendo los puntos P1 y P2 como puntos de intersección de las dos circunferencias.

-El lugar geométrico descrito por P1 y P2 cuando P recorre la recta es la hipérbola, así que activamos el rastro de P1 y P2 y movemos P por la recta. El resultado sería algo así:



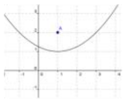
Como ejercicios para entregar usando este programa tendremos:

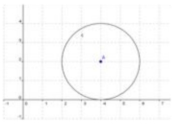
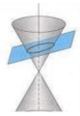
-Sea c la circunferencia de centro F y radio FB, A un punto de la circunferencia y F' un punto del radio FB. Sea P el punto de intersección del segmento AF y de la mediatriz del segmento AF'. Halla el lugar geométrico descrito por el punto P, cuando A recorre la circunferencia c. ¿Qué es? ¿Por qué? Usa el proceso de construcción para justificar tu respuesta.

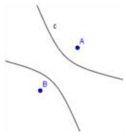
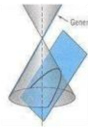
-Sea una recta r y un punto A que no pertenece a r. Halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el punto A y son tangentes a la recta r. ¿Cuál es? ¿Por qué?

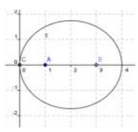
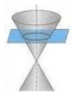
Y dos últimos ejercicios que engloban el tema. Será del tipo:

-Relaciona los siguientes elementos y justifica en qué te basas para establecer dicha relación:

Elipse $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$   

Parábola $x^2 - 2x - 4y = -5$   

Hipérbola $(x-4)^2 - 3y^2 = 1$   

Circunferencia $2x^2 + 3y^2 = 6$   

-Realizar un esquema, lo más completo posible, de los contenidos trabajados en el tema, estableciendo las relaciones que se pueden establecer entre ellos.

CONCLUSIONES

Este trabajo no está considerado como un trabajo fijo e inmóvil, sino más bien todo lo contrario. Todo trabajo en educación debe ser revisado y actualizado, por tanto, en esta unidad se podrán incluir mejoras tras su aplicación e inclusión de novedades.

Al realizar esta unidad, hemos tratado de que un tema con tantas aplicaciones como son los lugares geométricos y, en concreto las cónicas, que puede verse como un tema de aplicación de la geometría del plano, se haya trabajado con más profundidad y, al mismo tiempo, haya servido de repaso para contenidos que serán fundamentales para el aprendizaje en el próximo curso y, también, una ayuda para la superación de la futura prueba de acceso a la universidad. Al mismo tiempo, al mostrar la utilidad de los contenidos aquí estudiados, hemos intentado trasmitir la Matemática como una ciencia viva y útil, que ha evolucionado mucho a lo largo de la historia y lo continúa haciendo hoy en día.

BIBLIOGRAFÍA

DEL RÍO SANCHEZ, José. *Lugares Geométricos. Cónica.* Madrid: Síntesis, 1994.

DEL RÍO SANCHEZ, José. *Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento: estudio comparado de dos metodologías.* Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia: C.I.D.E., 1991.

PADILLA DÍAS, F., SANTOS HERNÁNDEZ, A., VELÁZQUEZ, F., FERNÁNDEZ REYES, M. *Circulando por el círculo*. Madrid: Síntesis, 1991.

Libro de texto: *Matemáticas I Bachillerato*. Sevilla: Guadiel-Grupo Edebé, 2001

Libro de texto: *Matemáticas 1 Bachillerato Ciencias y Tecnología*. España: Ediciones SM-FSM.

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Conicas_dandelin_d3/index.html

geogebra.softonic.com

http://centros5.pntic.mec.es/ies.victoria.kent/Rincon-C/Curiosid/rc-83/rc-83.html

ANEXO: ANÁLISIS DIDÁCTICO

A continuación mostramos un balance de un análisis didáctico sobre lugares geométricos y cónicas, dividido en tres análisis: de contenido, cognitivo y de instrucción

ANÁLISIS DE CONTENIDO

- **¿Cómo surgieron?**

Para llegar a entender completamente un concepto hay que conocer sus orígenes: cómo surgieron, cuándo, cómo, por qué, etc.

En primer lugar, podemos pensar que las formas del sol y de la luna debieron influir decisivamente en el temprano descubrimiento y consagración de la circunferencia como la forma geométrica plana más regular. Podemos encontrar construcciones arquitectónicas con esta forma a partir del siglo XIX a.C., lo que configura a la circunferencia, después de la recta, como el primer lugar geométrico conocido y utilizado por la humanidad.

Para encontrar otros nuevos, hay que esperar hasta la cultura griega de los siglos V y IV a.C. Por entonces empiezan a circular tres problemas clásicos: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo. El problema de la duplicación del cubo fue el más famoso en los tiempos de los antiguos griegos. Hay dos narraciones diferentes dadas por comentadores posteriores sobre los orígenes del problema.

La primera fue transmitida por Eratóstenes. Éste, es su obra titulada Platonicus relata que, cuando el dios anunció a los delianos (este problema también se llama problema de Delos) a través del oráculo que, para deshacerse de una plaga, debían construir un altar del doble del que había, sus artesanos quedaron desconcertados en sus esfuerzos por descubrir cómo podían hacer un sólido que fuera el doble de otro sólido similar; por ello fueron a preguntarle al respecto a Platón, quien respondió que el oráculo quería decir no que el dios quisiera un altar del doble del tamaño sino que deseaba, al imponerles la tarea, avergonzar a los griegos por su descuido de las matemáticas y su desprecio por la geometría.

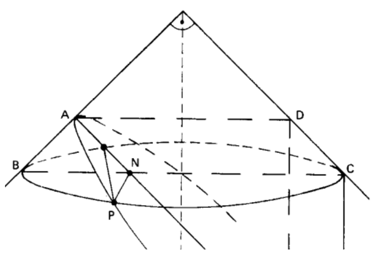
La plaga sin duda fue un evento importante en la historia de Atenas y aproximadamente un cuarto de la población murió por esta causa. Esto sucedió alrededor del 420 a.C. así que de haber algo de verdad en esta leyenda al menos podemos dar una fecha razonablemente exacta para la aparición del problema.

Esto también es consistente con una contribución anterior de Hipócrates al problema. Eutocio, en su comentario a *Sobre la esfera y el cilindro* de Arquímedes, dio una versión un tanto distinta. Esta se supone que es una carta escrita por Eratóstenes al Rey Tolomeo y, aunque la carta es una falsificación, el escritor sí cita algunos escritos genuinos de Eratóstenes :

Eratóstenes al Rey Tolomeo, saludos. La anécdota dice que uno de los poetas trágicos antiguos representaba a Minos haciendo construir una tumba para Glauco y que, cuando Minos descubrió que la tumba medía cien pies de cada lado, dijo 'Demasiado pequeña es la tumba que habéis señalado como el sitio real de descanso. Hacedla el doble de grande. Sin arruinar la forma, rápidamente duplicad cada lado de la tumba'. Esto claramente era un error. Ya que si los lados se duplican, la superficie se multiplica por cuatro y el volumen por ocho.

Muchos sabios y filósofos se ocuparon se ocuparon de la resolución de estos problemas y, aunque sin demostrarlo rigurosamente, pronto se dieron cuenta que la solución era imposible utilizando sólo la regla y el compás un número finito de veces.

En aquella época sólo se admitían dos maneras de definir curvas: con composiciones de movimiento uniformes y como intersección de superficies geométricas conocidas. Menecmo (IV a.C.) descubrió que las secciones planas de un cono servía para resolver la duplicación del cubo. Desde el siglo anterior, se conocía la cuadratura de un rectángulo. La resolución de este problema era equivalente a la resolución de la duplicación del cubo pues tomando a como la arista del cubo inicial y b=2 a, la expresión de la media geométrica () conduce a , es decir, y, por tanto, x sería la longitud del cubo cuyo volumen es el doble del dado. Menecmo trató de resolver este problema hallando curva cuyos puntos verificasen las dos ecuaciones anteriores, y esto lo consiguió seccionando un cono rectángulo con un plano perpendicular a una de sus generatrices, obteniendo la parábola:



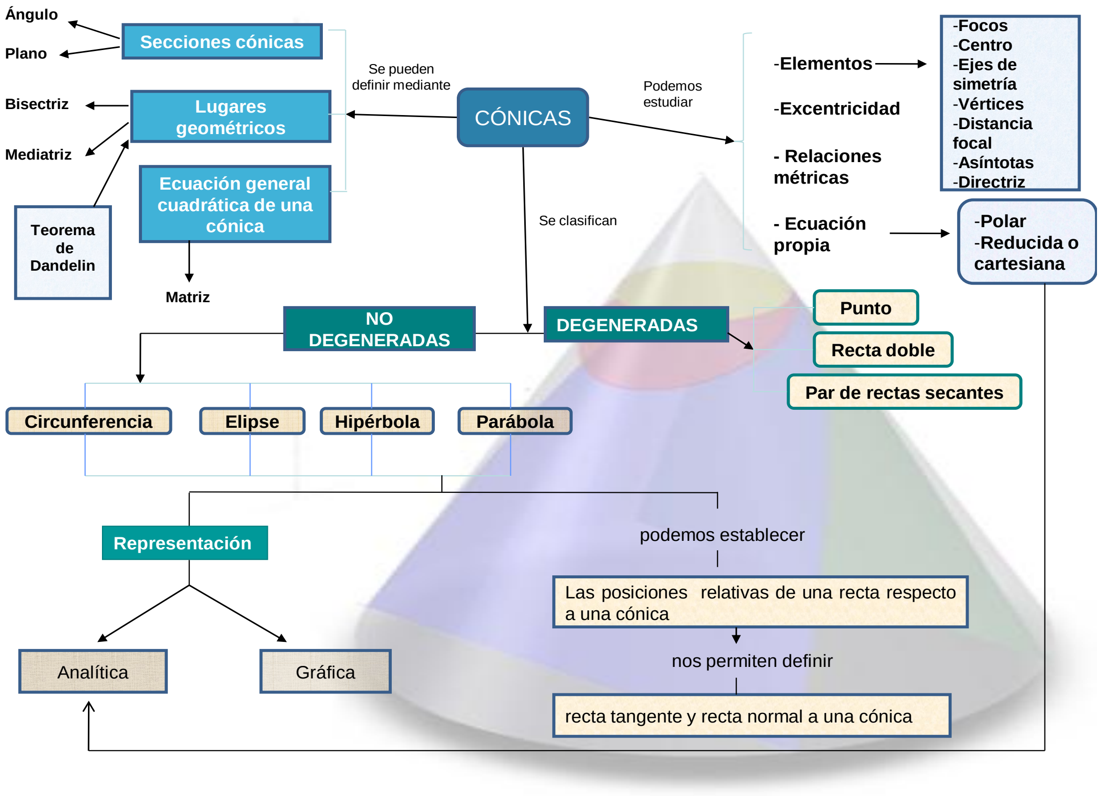
Menecmo descubrió también la elipse y la hipérbola, seccionando conos acutángulos y obtusángulos respectivamente con planos perpendiculares a una de sus generatrices.

Hemos señalado que Menecmo obtenía los tres tipos de curvas a partir de conos rectos de tres tipos distintos, según que el ángulo del vértice fuese agudo, recto u obtuso, y siempre tomando secciones perpendiculares a una generatriz. Años más tarde, Apolonio las obtiene utilizando un cono circular cualquiera variando la inclinación del plano secante y, a partir de esto, descubre una propiedad plana que caracteriza a cada una de las secciones, es decir, una caracterización de estas curvas como lugares geométricos. Fue él también quien le dio el nombre que aún hoy conservamos: **elipse** viene del término griego *elleipsis* que significa insuficiencia; **hipérbola** viene de *hiperbolé* que significa exceso y **parábola** viene de *parabole* que significa equiparación (estos nombres vienen del estudio de sus ecuaciones reducidas). Apolonio también introdujo el estudio de tangencias, diámetros y rectas normales.

- **¿Qué son?**

Tras haber estudiado el origen de las cónicas y de dónde proceden, nos aproximamos al concepto en sí a través de varias vías principales.

El estudio conceptual que hemos desarrollado sobre este tema se recoge en el siguiente esquema que recoge los contenidos fundamentales que se deben adquirir para aprender dicho tema, y que comentaremos seguidamente.



Como se recoge en el esquema, un primer modo de definir el concepto puede ser el con el cono, realizando las diferentes secciones posibles y estudiando el resultado obtenido. Esta forma de presentarlas nos permite hacer una clasificación de éstas, atendiendo a si la sección contiene el punto singular del cono o no, dividiéndolas así en degeneradas (sí lo contienen) y no degeneradas (no lo contienen). Nuestro estudio se centrará en estas últimas, ya que presentan propiedades más interesantes, nos permiten realizar una investigación más profunda y caracterizarlas y expresarlas de varias formas, y son: la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola.

Una segunda forma de definir las diferentes cónicas es como lugares geométricos del plano, basándonos en propiedades que caracterizan a cada uno de ellas, enriqueciendo esta presentación con la construcción gráfica de las diferentes cónicas.

Un tercer modo, y último, de definirlas es mediante sus ecuaciones cartesianas o su ecuación general, estableciendo propiedades sobre los parámetros que intervienen y que las caracterizan.

Una vez presentado y asimilado el concepto, pasamos al estudio de numerosos elementos que intervienen en cada una de las cónicas (Focos, centro, ejes, distancia focal, excentricidad, asíntotas,..), y de sus propiedades que nos ayudan recordar las diferentes cónicas y sus características.

Así mismo, estudiamos las distintas ecuaciones,(polar, cartesiana), por las que puede venir definida una misma cónica. Además completamos el estudio con las diferentes representaciones que se pueden realizar de las cónicas, desde su construcción con regla y compás, con papiroflexia, seccionando un cono, o su representación analítica, hasta ver la cantidad de ejemplos de la vida real en las que intervienen.

Sin duda, otro procedimiento interesante para llevar en el estudio de las cónicas es el estudio de posiciones relativas, tanto entre algunas cónicas como entre cónicas y rectas, que nos permitirá definir los conceptos de recta tangente y recta normal a una cónica.

A pesar de todo, el estudio recoge en rasgos generales todo un arsenal de conceptos relacionados que se comentarán a continuación.

- **¿Cómo nos relacionamos con ellas?**

  A la hora de interpretar, manipular y establecer relaciones con las cónicas llevamos a cabo diferentes procedimientos que podríamos agrupar en cuatro categorías generales:

Origen

Entender, interiorizar y abstraer el origen geométrico de las curvas cónicas como secciones del cono y como lugar geométrico a través de:

-Visualizaciones.

-Manipulación directa con el cono.

-Interpretar relaciones entre cada figura y ángulo de cada sección.

-Interpretación y relación de cada idea de lugar geométrico con la cónica

Asociada (construcción y manipulación con geogebra).

-Relacionar esta idea con fenómenos asociados (lámpara cónica, problema del jardinero).

Fórmula

Establecer relaciones y caminos entre las distintas representaciones da cada figura.

Resolución de problemas analítico-gráficos.

-Representar una cónica a partir de ecuación polar o analítica.

-Pasar de una representación simbólica a otra (polar-analítica y viceversa).

-Deducir ecuaciones a partir de la gráfica.

-Diferenciar el tipo de cónica desde su fórmula.

-Resolver problemas de construcción a partir de diferentes datos.

-Identificar puntos notables (centro, focos, vértice,..).

-Relacionar distintas figuras con sus propiedades (excentricidad, asíntotas).

Cónicas y rectas

Construir y relacionar rectas notables asociadas a las cónicas.

-Cálculo de recta tangente y normal a partir de la ecuación simbólica.

-Entender posiciones relativas entre recta y cónica.

-Entender en esta representación la idea de tangencia.

Resolución de problemas

Resolución de problemas métricos y geométricos.

-Construir una cónica a partir de información meramente verbal o textual (a través de la idea de lugar geométrico). Bien sea gráficamente o con el ordenador.

-Observar a través del cálculo y la resolución de problemas aquellas cuestiones que se simplifican a través del uso de las cónicas.

Como hemos visto hay diversos procedimientos implicados y de diverso tipo. Tiene un gran peso la parte analítica pues en el trabajo con cónicas una gran parte del trabajo se hace a través de su fórmula. La parte visual, geométrica e interpretativa es también un ingrediente fundamental y aquellos procedimientos que permitan relacionar unos conceptos con otros (resolución de problemas) y los que permitan relacionar los conceptos con situaciones reales y tangibles (aplicaciones).

- **¿Cómo se pueden reconocer?**

Una vez contestadas las preguntas anteriores cabe preguntarse cómo se pueden reconocer o representar las cónicas. Hay varias formas de representar a las cónicas y las que hemos seleccionado para el nivel que corresponde a este tema son: simbólica, numérica, tecnológica, manipulativa y gráfica. Los sistemas que se presentan a continuación no son aislados o independientes. Todos ellos están íntimamente relacionados.

<u>Simbólica</u>

Este sistema de representación se basa en la identificación de una cónica a través de su ecuación. Esta ecuación puede ser de tres tipos:

-Ecuación general

-Ecuación polar

-Ecuación cartesiana

Estos tres tipos de ecuaciones no son independientes, podemos pasar de una a otra haciendo unas simples transformaciones.

<u>Numérica</u>

Una cónica se puede representar de forma numérica a través de dos maneras distintas, mediante:

-Una matriz. Ésta forma está íntimamente ligada con la ecuación general de una cónica y por tanto con la forma simbólica.

-La relación que las cónicas tienen con sus elementos asociados (focos, centros, excentricidades,…)

<u>Gráfico</u>

La representación gráfica de la elipse se puede abordar desde dos perspectivas distintas:

-Como representación plana. Este tipo de representación está muy ligada a la representación numérica a través de sus elementos.

-Como sección de un cono. La cónica se representa a partir de la sección de un cono mediante un plano. Variando la inclinación de este podemos conseguir las cuatro cónicas.

Manipulativo

Una de las maneras con la que podemos abordar la representación de las cónicas es de forma manipulativa, esto es, utilizando las herramientas necesarias podemos representar cualquiera de las cuatro cónicas. Los métodos seleccionados en este caso son:

-El cono de madera. Este material manipulativo permite obtener las cónicas como secciones del cono. El cono tiene las secciones que dan lugar a las cuatro cónicas.

-Problema del jardinero. Utilizando dos palos y una cuerda de longitud fija, podemos representar a la elipse.

-Papiroflexia. Podemos representar a las cuatro cónicas utilizando únicamente papel. Las propiedades de simetría y reflexión de éstas, permiten obtener de forma aproximada sus representaciones mediante pliegues de un papel.

-Iluminación. El uso de una lámpara con tulipa circular o el uso de una linterna junto con una superficie esférica como puede ser un balón nos permite representar a las cónicas mediante sombras variando la posición de la luz con respecto al objeto.

Tecnológica

Los programas informáticos actuales son de gran utilidad para la representación de cónicas. Son muchas las formas en que podemos representar una cónica en estos soportes:

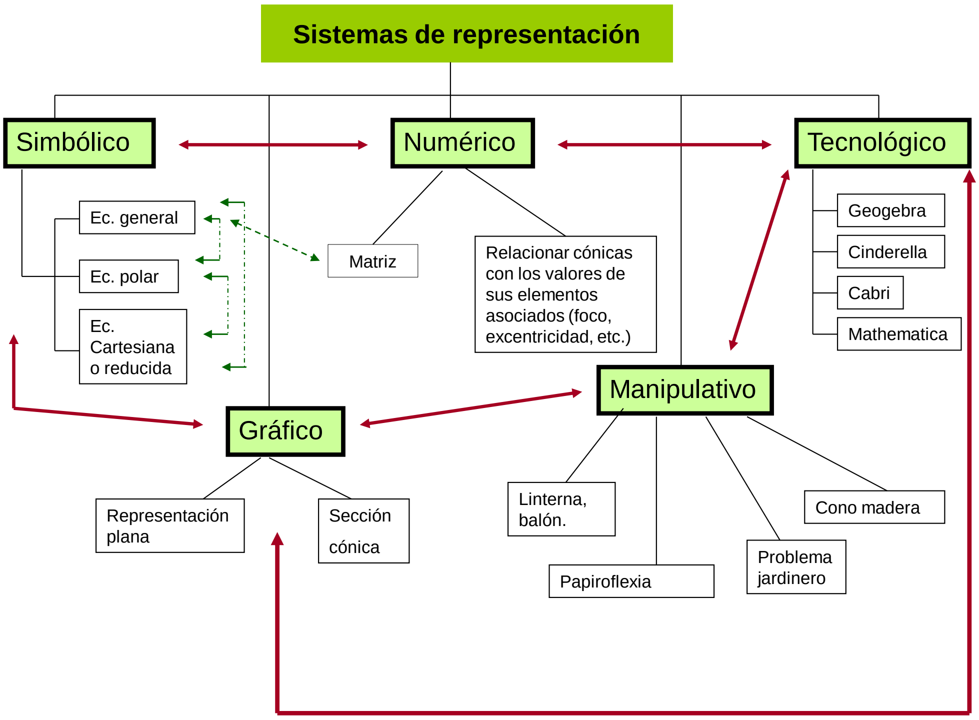
Simbólica. Introduciendo algunas de los tres tipos de ecuaciones.

Numérica. Indicando cuál es la matriz o los elementos de la cónica.

Gráfica. Representando directamente la cónica.

Los programas que podemos utilizar para ello son, entre otros, Geogebra, Cinderella, Cabri, Mathematica, etc.

Como se mencionó al principio todos estos métodos de representación están relacionados. El siguiente esquema muestra las posibles representaciones de las cónicas junto con las relaciones existentes entre ellas.



- **¿Para qué sirven?**

  A la hora de estudiar la fenomenología de las cónicas, y relacionarla con las subestructuras asociadas, podemos encontrar infinitos ejemplos. En este estudio nos reduciremos a una muestra por la imposibilidad de enumerarlos todos. La importancia fundamental de las cónicas reside en el aparato sensitivo del hombre mismo. Su capacidad de percepción depende principalmente del ojo. El hombre, es ante todo, una criatura que mira, y los rayos luminosos que penetran en el ojo o que de él parten en dirección contraria para construir la visión forman un cono. Nos hemos centrados en las cónicas que desde nuestro punto de vista tienen más interés que son la circunferencia y la elipse.

  <u>LA CIRCUNFERENCIA</u>

- **LA RUEDA**

  He aquí un invento simple y antiquísimo. Sin embargo fue algo esencial para la evolución de maquinarias de todo tipo. La rueda es un elemento necesario en infinidad de inventos, tanto antiguos como actuales, desde los primitivos molinos, hasta la bicicleta, motocicleta, automóvil, avión, cosechadora, tractor, silla de ruedas, etc.

Subestructura asociada: La equidistancia de todos los puntos de la circunferencia a un único punto (centro) permite repartir fuerzas y provocar giros aplicando la fuerza en ese punto.
Clasificación: Laboral.

- **ARCO**

En el lenguaje cotidiano la palabra **arco** se emplea, por definición, para hacer referencia a la porción de una curva determinada. En definitiva, un arco no es más que un cierto segmento de una circunferencia. En ese mismo sentido empleamos el término cuando, en Arte, hacemos alusión a determinados tipos de arco, como el de medio punto (media circunferencia) o el de herradura (más de media circunferencia).

Subestructura asociada: La equidistancia y la repartición de fuerzas, además de la comodidad constructiva de trabajar con su fórmula analítica. Métrica.
Clasificación: Laboral, Social (arte y arquitectura).

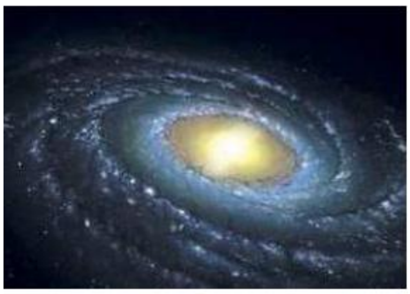
LA ELIPSE

La elipse es la curva que describen los planetas en su giro alrededor del Sol, pero, por razones obvias no podemos verla tal cual. Encontrar elipses a nuestro alrededor, aparentemente es difícil, pero sólo aparentemente. Vamos a ver a continuación algunos ejemplos.

- **LEYES DE KEPLER**

Estudiando una gran cantidad de datos experimentales, Kepler (1571 – 1630) determinó empíricamente los tres siguientes hechos sobre el movimiento de los planetas conocidos como las leyes de Kepler:

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el sol en uno de los focos.



2. El radio vector trazado desde el sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

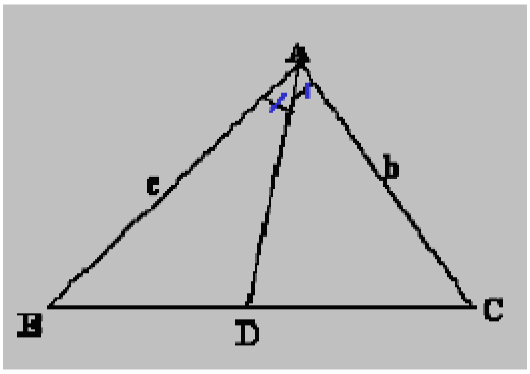
3. Los cuadrados de los períodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de la órbita elíptica.

Subestructura asociada: focos

Clasificación: Científico.

- **PROPIEDAD ÓPTICA**

La geometría plana se demuestra el siguiente resultado: Si se tiene un triángulo *ABC* y un punto *D* sobre *BC* entonces:



El segmento AB es bisectriz del ángulo:

$$BAC \Leftrightarrow \frac{\overline{BD}}{DC} = \frac{c}{b}$$

Esta propiedad permite construir la normal y por ende la tangente en un punto cualquiera de la elipse.

Al unir el punto *P1* de la elipse con *F'* y con *F*, puede demostrarse que la bisectriz del ángulo *F'P1F* es la normal *nn* a la curva por *P1*.

Esta propiedad se conoce como la **propiedad óptica o focal de la elipse** y tiene interesantísimas aplicaciones:

1. Considérese un rayo de luz que se enfoca desde un foco hacia un punto *P1* de la curva. Como *nn* es bisectriz del ángulo *F'P1F*, entonces, ángulo de incidencia = ángulo de reflexión y por tanto el rayo se reflejará pasando por el otro foco. Este hecho es utilizado en la construcción de conchas acústicas.

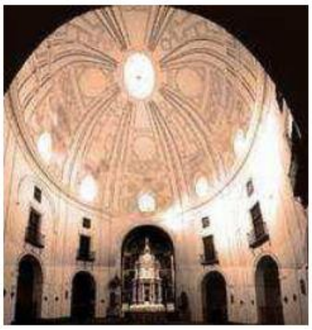
2. Supongamos que la elipse se hace rotar alrededor del eje *x* formando una superficie de revolución e imaginemos un salón cuyos techos y paredes son la superficie anterior. Cuando una persona habla desde un foco F, puede ser escuchada en el otro foco a pesar de estar muy lejos del anterior y puede no ser audible en otros puntos intermedios a causa de que las ondas de sonido chocan contra las paredes y son reflejadas en el segundo foco y llegan a él en el mismo tiempo ya que ellas viajan el mismo tiempo.

Subestructura asociada: distancia focal

Clasificación: Científico

- **ARQUITECTURA**

  Las formas arquitectónicas constituyen, como las pictóricas o las escultóricas, un lenguaje que contiene la posibilidad de transmitir mensajes. Para Rudolf Arnheim las formas tienen un determinado efecto psicológico sobre quien las contempla, efecto derivado de sus intrínsecas cualidades expresivas. Así, la elipse, al contar con dos centros comunica inquietud, inestabilidad.

Subestructura asociada: focos.

Clasificación: público.

Concluimos nuestro análisis de contenidos haciendo hincapié en que las curvas cónicas han sido de mucha importancia en la vida del ser humano ya que gracias a ellas, se han podido descifrar y resolver fenómenos de la naturaleza, y desarrollar la tecnología con el fin de beneficiar y facilitar nuestras vidas.

ANÁLISIS COGNITIVO:

- **¿Qué pretendemos de los alumnos/as?**

  A continuación señalamos los objetivos que perseguimos, justificando su aportación a cada una de las competencias de PISA:

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
	Identificar las diferentes cónicas no degeneradas								
1	Definir lugar geométrico y las diferentes cónicas como tales.	☆		☆					
2	Identificar los diferentes elementos de las cónicas y describir cómo influyen en la clasificación de éstas.		☆	☆					☆
3	Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.	☆	☆		☆		☆	☆	
4	Distinguir las diferentes secciones del cono que dan lugar a las distintas cónicas.						☆		☆

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
	Analizar las posiciones relativas y las rectas notables								
5	Hallar la recta tangente y la recta normal a una cónica en un punto de ésta.				☆	☆		☆	
6	Determinar posiciones relativas entre recta y cónica.				☆	☆		☆	☆

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
	Representar cónicas gráficamente								
7	Construir gráficamente las cónicas usando programas de geometría dinámica.	☆	☆				☆		☆
8	Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa.	☆	☆				☆		
9	Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.			☆	☆	☆		☆	
	Balance final	4	4	3	4	3	4	4	4

A continuación, justificaremos brevemente la elección que hemos hecho de las competencias:

1) ***Definir lugar geométrico y las diferentes cónicas como tales.***

PR: Hay que distinguir entre las diferentes cónicas y conocer sus diferentes definiciones matemáticas.

C: Se expresan usando ideas matemáticas.

2) ***Identificar los diferentes elementos de las cónicas y describir cómo influyen en la clasificación de éstas.***

AJ: Elabora argumentos de clasificación de las cónicas en base a sus elementos.

C: Describen cómo influyen los elementos en cada una de las cónicas, qué características les aportan para su clasificación.

HT: Usando programas informáticos y juegos, se pueden modificar los diferentes elementos tras apreciarlos y moverlos para ver qué ocurre.

3) ***Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.***

   PR: Ofrece distintos elementos según el tipo de ecuación que nos ofrezcan de éstos. Debe conocer las diferentes ecuaciones, tanto entre cónicas, como las distintas formas dentro de una misma cónica.

   AJ: Justifica en qué se basa para establecer relaciones entre cónica y ecuación.

   M: Expresan matemáticamente un problema y usa procesos matemáticos para resolverlo.

   R: Interpretan, relacionan formas diferentes de representación.

   LS: Manejan enunciados y expresiones con símbolos matemáticos.

4) ***Distinguir las diferentes secciones del cono que dan lugar a las distintas cónicas***.

   R: Interpretan las diferentes secciones del cono como un sistema más de representación.

   HT: Podemos usas las herramientas tecnológicas para visualizar las secciones.

5) ***Hallar la recta tangente y la recta normal a una cónica en un punto de ésta.***

   M: Expresan matemáticamente este tipo de problemas.

   RP: Resuelven y plantean problemas sobre las rectas notables asociadas a las cónicas.

   LS: Utilizan variables, resuelven ecuaciones, comprenden cálculos.

6) ***Determinar posiciones relativas entre recta y cónica.***

   M: Estructuran y analizan un problema.

   RP: Resuelven y plantean problemas sobre posiciones relativas en el plano.

   LS: Uso de las representaciones simbólicas de recta, cónica, distancia.

   HT: Útil para ver la representación gráfica y comprobar el resultado obtenido analíticamente.

7) ***Construir gráficamente las cónicas usando programas de geometría dinámica.***

   PR: Tienen que seleccionar los elementos relevantes para la construcción de cada cónica y elegir un método de construcción apropiado.

   AJ: Deben justificar por qué eligen un determinado método y argumentar cada paso que dan.

   R: Diferentes formas de representación.

   HT: Conocer y saber utilizar las diferentes herramientas para poder usarlas.

8) ***Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa.***

   PR: Deben utilizar conceptos y procedimientos matemáticos para establecer la relación.

AJ: Justificar los cálculos y el método para establecer dicha relación.

M: Expresen y estructuren matemáticamente un problema inicial.

R: Decodifiquen, interpreten distintas formas de representar.

9) ***Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.***

C: Expresan ideas acerca de la matemáticas.

RP: Resuelven y analizan problemas.

LS: Traducen problemas al lenguaje matemático y luego interpretan el resultado matemático dentro del contexto del problema.

- **¿Qué obstáculos nos encontramos en el proceso de enseñanza-aprendizaje?**

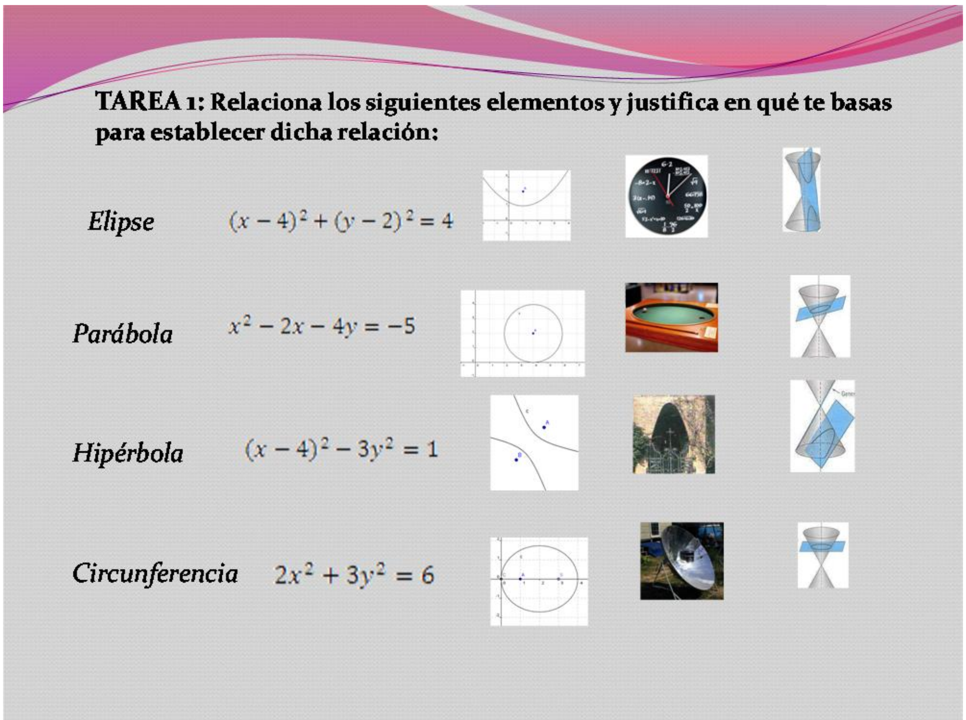
En el siguiente cuadro mostramos los errores y dificultades que creemos que pueden surgir, señalando su relación con los objetivos anteriores:

ERRORES Y DIFICULTADES	OBJETIVOS ASOCIADOS
1. No reconocer las cónicas como secciones del cono.	1 y 4
2. No percibir la presencia de las cónicas en la vida y naturaleza.	9
Dificultad para identificar los elementos de la cónica en su representación gráfica.	2,7 y 8
4. Desconexión entre los distintos sistemas de representación.	3,4,5,6,8 y 9

5. Incapacidad de identificar problemas relacionados con cónicas y resolverlos.	5,6 y 9
6. Manejo inadecuado de cálculo y de expresiones algebraicas.	2,3,5,6 y 9
7. Capacidad de visión espacial poco desarrollada	1,4,5,6 y 9
8. Deficiencia de conceptos geométricos previos (distancias, perpendicularidad,…)	5,6 y 7

- **¿Cómo enseñamos?**

A continuación mostramos alguna actividad, mostrando su aportación a los objetivos y competencias y los errores y dificultades que pretende solventar:



¿A qué objetivos contribuye?

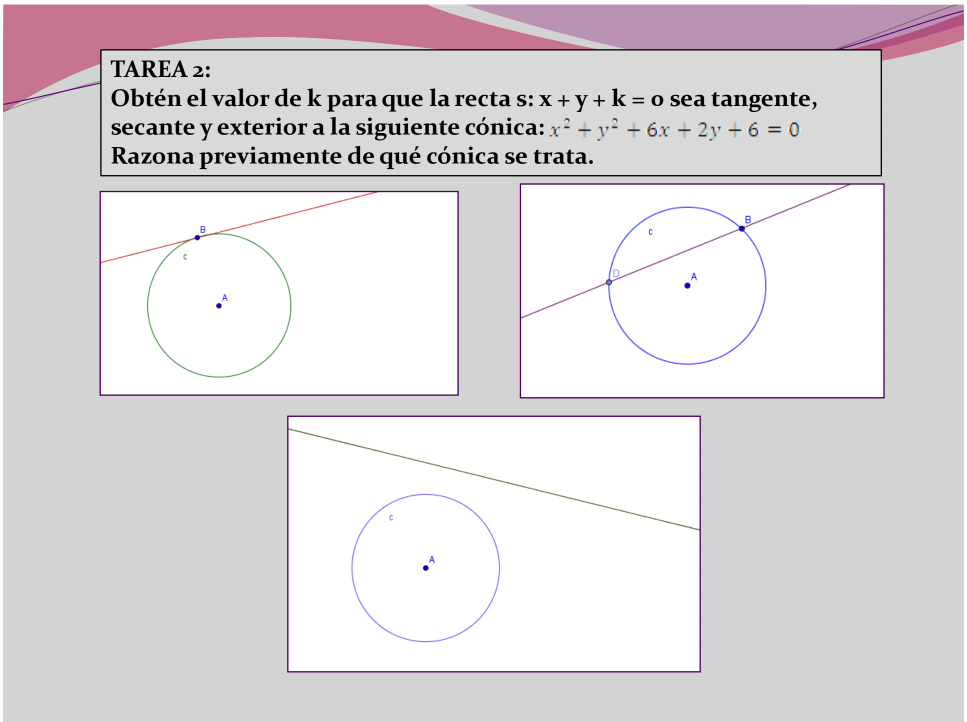
- Distinguir las diferentes secciones del cono que dan lugar a las distintas cónicas.(4)
- Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica y viceversa. (8)

Errores y dificultades que pretende solventar

- No reconocer las cónicas como secciones del cono.(1)
- No percibir la presencia de las cónicas en la vida y naturaleza.(2)
- Desconexión entre los distintos sistemas de representación.(4)
- Dificultad para identificar los elementos de la cónica en su representación gráfica.(3)

¿Qué competencias trabaja?

- Pensar y razonar
- Argumentar y justificar
- Representar



¿A qué objetivos contribuye?

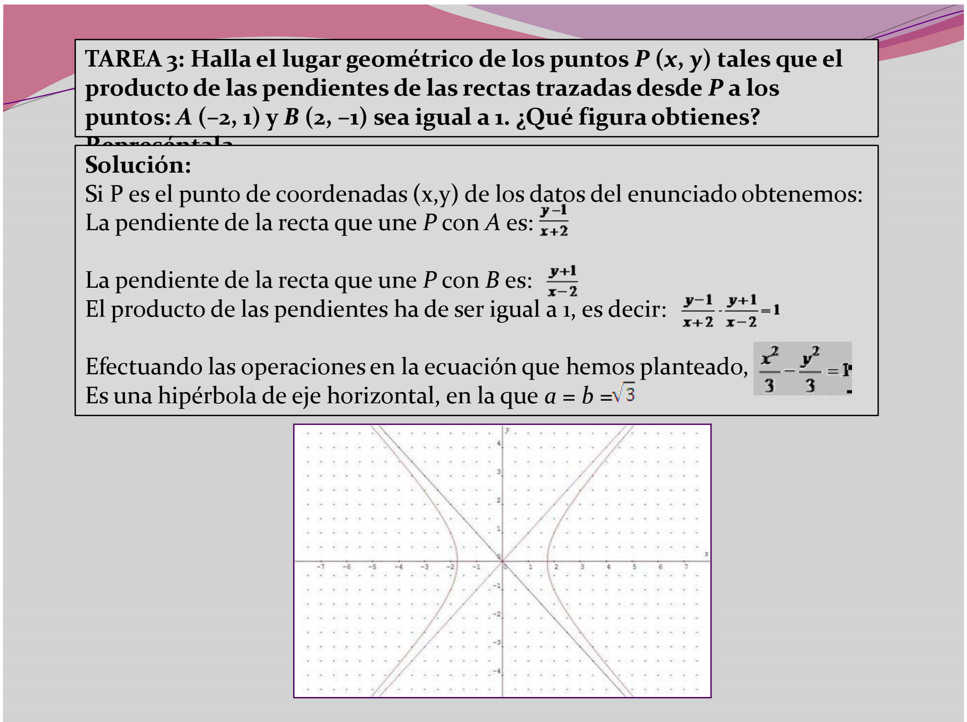
- Determinar posiciones relativas entre recta y cónica .(6)
- Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.(3)

Errores y dificultades que pretende solventar

- Manejo inadecuado de cálculo y de expresiones algebraicas.(6)
- Deficiencia de conceptos geométricos previos (distancias, recta normal, perpendicularidad,…). (8)

¿Qué competencias trabaja?

- Pensar y razonar
- Argumentar y justificar
- Lenguaje simbólico



¿A qué objetivos contribuye?

- Dificultad para identificar los elementos de la cónica en su representación gráfica. (3)
- Manejo inadecuado de cálculo y de expresiones algebraicas. (6)

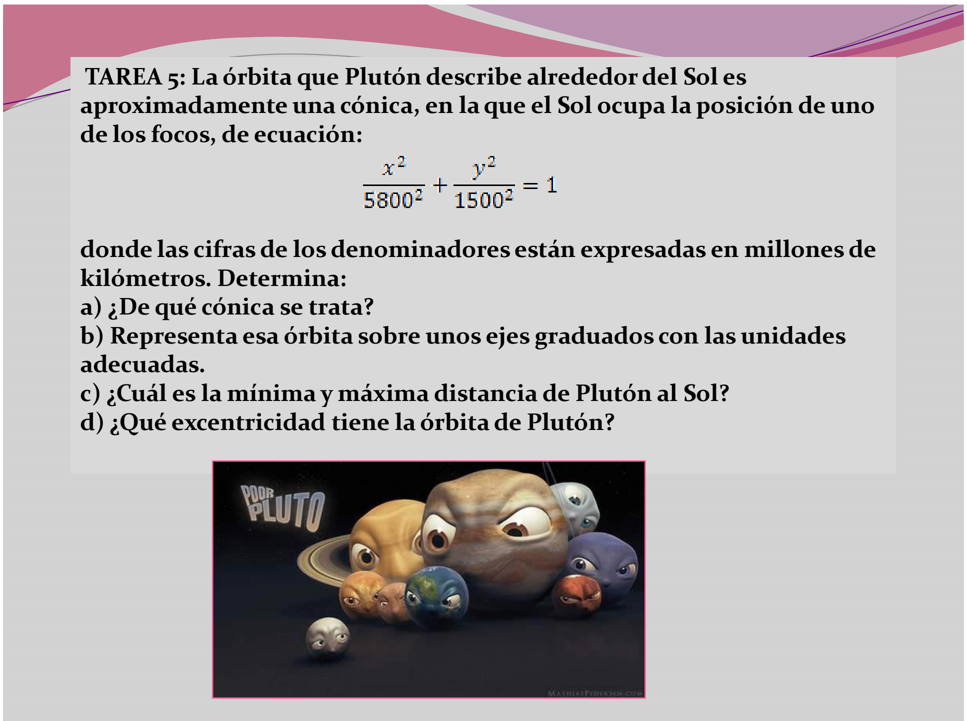
Errores y dificultades que pretende solventar

- Pensar y razonar
- Argumentar y justificar
- Representar
- Lenguaje simbólico

¿Qué competencias trabaja?

- Obtener la ecuación reducida y cuadrática general de una cónica. (2)

- Conocer los distintos elementos de las cónicas (4)
- Identificar las cónicas a través de sus elementos (5)
- Relacionar las ecuaciones de las cónicas con su representación gráfica(10)



¿A qué objetivos contribuye?

- Relacionar cada cónica con sus distintas ecuaciones y obtener éstas a partir de varios elementos o propiedades.(3)
- Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.(9)

Errores y dificultades que pretende solventar

- No percibir la presencia de las cónicas en la vida y naturaleza.(2)
- Incapacidad de identificar problemas relacionados con cónicas y resolverlos.(5)
- Manejo inadecuado de cálculo y de expresiones algebraicas.(6)

¿Qué competencias trabaja?

- Pensar y razonar
- Plantear y resolver problemas
- Modelizar

- RELACIÓN ENTRE EL TEMA DE CÓNICAS Y OTROS TEMAS DE BACHILLERATO

Al realizar las tareas hemos observado diversas relaciones entre el tema que nos ocupa (cónicas) y otros temas presentes en el currículo de bachillerato. El interrelacionar unos temas con otros ayuda tanto a intervenir con mayor profundidad en el propio, como a conseguir una visión global y una estructura general de la matemática a nivel de bachillerato. A través de percibir unos temas dentro de otros el alumno será capaz de entender el conocimiento como un todo y la utilidad de poseer saberes previos para afrontar el aprendizaje de los nuevos. Pasaremos a detallar ejemplos de la presencia en nuestro tema de los siguientes cuatro temas que se exponen:

SIMETRÍA:

Dentro de los movimientos del plano hemos usado la traslación y la homotecia para observar cambios en la circunferencia (en la tarea 5).
En cada cónica podemos encontrar al menos un eje de simetría, que además facilita su representación gráfica.

LÍMITES Y CONTINUIDAD

Podemos extraer la continuidad de la calidad de curvas continuas que tienen las cónicas.
El concepto de límite se nos presenta claramente al estudiar la representación gráfica de la hipérbola observando cómo la gráfica se aproxima a sus asíntotas.

DERIVADAS

Uno de los conceptos más representativos en el estudio de derivadas es la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva que esa función representa. La recta tangente es un elemento notable en el estudio de las cónicas, incluso la operación derivada puede usarse para detectar puntos notables de una cónica, como por ejemplo para hallar el vértice de una parábola.

ECUACIONES

La representación de las cónicas por medio de ecuaciones es fundamental y facilita enormemente el cálculo de elementos notables de ellas. Resaltar también que en los procedimientos de manipulación de cónicas es también fundamental la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones (por ejemplo para determinar posiciones relativas de recta y cónica).

ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN:

-Ejemplo análisis de tarea: **La órbita que describe la Tierra alrededor del Sol es una cónica de excentricidad 0.017 y semieje mayor 149.60 millones de kilómetros. Calcula:**

a) **La longitud del semieje menor.**
b) **Sabiendo que el Sol está situado en uno de los focos, halla la máxima y la mínima distancia que lo separan de la Tierra.**

Objetivos:

Identificar los diferentes elementos de las cónicas y describir cómo influyen en la clasificación de éstas.(2)

Identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos.(9)

Contenidos:

- Elipse
- Obtención de los elementos de la cónica
- Identificación de la cónica a partir de su excentricidad y relaciones métricas

Sistemas de representación:

Simbólico

Situación / Contexto:

Científica/ Órbitas de los planetas

Competencias:

Modelizar

Resolver y plantear problemas

Complejidad:

Reflexión

-Ejemplo de secuenciación:

Hemos organizado las tareas en el siguiente orden entendiendo que no completan las labores prácticas necesarias para abarcar todo el tema y que es necesario y posible intercalar otras de diversos tipos para ello.

- TAREA 1: Halla la ecuación que cumplen todos los puntos cuya distancia al origen de coordenadas es 5.
- TAREA 2: Estudiar la posición de la circunferencia

C: $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

con respecto de cada una de las rectas:

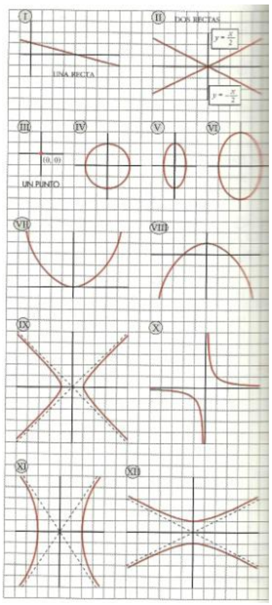
$$r: 3x - 4y - 26 = 0$$

$$s: 5x - 8y + 60 = 0$$

$$t: 3x - 4y - 1 = 0$$

¿Cómo has llegado a la solución?

- TAREA 3: Asocia cada una de las siguientes ecuaciones a una de las gráficas que se dan a continuación, justificando dicha relación:



$a)\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ $\qquad b)\ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

$c)\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ $\qquad d)\ \frac{x}{4} + y = 1$

$e)\ \frac{x^2}{4} + y = 1$ $\qquad f)\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

$g)\ y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$ $\qquad h)\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 0$

$i)\ \frac{x^2}{4} - y^2 = 0$ $\qquad j)\ \frac{x^2}{4} - y = 0$

$k)\ x^2 - y^2 = 1$ $\qquad l)\ x.y = 1$

- TAREA 4: La órbita que describe la Tierra alrededor del Sol es una cónica de excentricidad 0.017 y semieje mayor 149.60 millones de kilómetros. Calcula:

c) La longitud del semieje menor.
d) Sabiendo que el Sol está situado en uno de los focos, halla la máxima y la mínima distancia que lo separan de la Tierra.

Esquemáticamente,

Tarea 1 ➔ Tarea 2 ➔ Tarea 3 ➔ Tarea 4

El porqué de ésta y no otra elección responde a razones de contenido, de tipo cognitivo así como funcionales, ya que tras un detallado estudio, hemos llegado a la conclusión de que dicho orden se ajusta, de manera bastante adecuada, a cada uno de esos tres criterios.

Los contenidos

Desde el punto de vista de los contenidos, el aprendizaje de las cónicas comienza con la idea de lugar geométrico, continúa con el análisis de la circunferencia y sus posiciones relativas con respecto a una recta y posteriormente se presentan el resto de cónicas, sus elementos y propiedades (secuencia de contenidos extraída de libros de texto para 1º Bachillerato de Anaya y para 2º Bachillerato de Guadiel). Es natural entender que la generalización a través de la resolución de problemas es posterior a la exposición de las bases del contenido.

En virtud de los procedimientos estamos pasando de un ejercicio sencillo en cálculos a otro algo más complejo pero mecánico y que añade interpretación a la actividad de cálculo. En la tercera tarea cabe destacar que posee distintas vías de trabajo para encontrar soluciones, incluyendo cálculos, dominio en el uso de las propiedades de las cónicas y relaciones entre diversos sistemas de representación. La tarea final se basa en la aplicación física de los contenidos, con procedimientos de interpretación, aplicación y cálculo.

La Complejidad

Podemos destacar aquí que las tareas siguen un orden creciente de complejidad empezando con una tarea de reproducción ya que se trata de cálculos y procedimientos rutinarios, siguiendo con dos de conexión debido a que se trata de interpretar y solucionar problemas estándar y terminando con el problema de la órbita de la Tierra que es de reflexión puesto que requiere una interpretación y comprensión más profunda.

Los objetivos

Las tareas abordan diversos objetivos específicos de nuestro tema, por ello, hemos creído razonable colocar primero aquella que participaba más del primer bloque de éstos: "identificar las diferentes cónicas no degeneradas" (según los tres bloques en que los hemos organizado). La segunda tarea trabaja objetivos del segundo bloque: "analizar las posiciones relativas y las rectas notables". En la tercera, y a modo de síntesis, estamos trabajando objetivos del primer y tercer bloque este último denominado "representar cónicas gráficamente" y en la última se trabaja directamente el último de los objetivos específicos que encontramos en el análisis cognitivo ("identificar el uso de las cónicas en problemas de la vida cotidiana y en la ciencia y resolverlos"), además de englobar algunos de los procedimientos y contenidos de los objetivos anteriores.

Competencias PISA

A nivel de competencias, la secuenciación, si no completa, engloba un alto número de ellas. Y entendemos natural trabajar en las primeras tareas competencias como Pensar y Razonar, Representar, Argumentar y Justificar y el Lenguaje Simbólico tan presente en este tema y dejar para la tarea final el trabajo de las competencias de Modelizar y Resolución de Problemas debido a que se crean modelos matemáticos para resolver situaciones de la realidad.

Errores y limitaciones

En cuanto a la detección de errores y limitaciones destacar que la tercera tarea ayuda a reconocer errores de concepto y procedimientos. Además, nos permite realizar un estudio global para evaluar el estadio del proceso enseñanza-aprendizaje. En la cuarta tarea podemos trabajar directamente con la limitación tan clara que sufren los alumnos/as para detectar la presencia de las cónicas en la ciencia y en la naturaleza.

Funcionalidad

Por último argumentaremos por qué razones, en lo que a funcionalidad de tareas se refiere, hemos elegido este orden de secuenciación. Nos ha parecido beneficioso para el aprendizaje comenzar con una tarea más basada en elaborar y construir, para ir así descubriendo el tema conjuntamente. Hemos creído oportuno continuar con ejercicios que sirvan para practicar y ejercitar habilidades y terminar con tareas de síntesis, que en este caso son de dos diferentes tipos pero ambas requieren ya una idea global de contenidos y procedimientos.