UNIDAD DIDÁCTICA: TRIGONOMETRÍA

Máster en formación al profesorado de enseñanza secundaria (Especialidad Matemáticas)

Trabajo realizado por:
Fco. Javier Fernández Medina
Bajo la supervisión de:
D. Luis Rico Romero

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Curso 2010-11

ÍNDICE

0. INTRODUCCIÓN

0.1 JUSTIFICACIÓN

La ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre se encarga de establecer la ordenación de las enseñanzas del Máster en Formación al Profesorado de Secundaria, y, en el Apartado 3 de su ANEXO fija las competencias generales que los estudiantes de dicho Máster deben adquirir. Entre estas competencias encontramos:

- Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Buscar, obtener, procesar y comunicar información, transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.

Asimismo, esta orden hace una concreción de objetivos en cada módulo y materia. Dentro de las competencias correspondientes al módulo específico, en las distintas materias, se encuentran las siguientes:

- Conocer la historia y los desarrollos recientes de las materias y sus perspectivas para poder transmitir una visión dinámica de las mismas.
- Conocer contextos y situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares.
- Conocer los desarrollos teórico-prácticos de la enseñanza y el aprendizaje de las materias correspondientes.
- Transformar los currículos en programas de actividades y de trabajo.
- Adquirir criterios de selección y elaboración de materiales educativos.
- Integrar la formación en comunicación audiovisual y multimedia en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Conocer estrategias y técnicas de evaluación y entender la evaluación como un instrumento de regulación y estímulo al esfuerzo.

Además de esto, la LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (L.O.E.) fija las funciones del profesorado en el Capítulo I del Título III, entre las que se encuentran la programación y enseñanza de las materias asignadas y la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado, así como la evaluación de los procesos de enseñanza.

En este contexto, y, ciñéndome a las directrices para este Trabajo de Fin de M áster (TFM), he elegido entre las diferentes modalidades la de la elaboración de una unidad didáctica debidamente fundamentada, en la que intento plasmar la adquisición por mi parte de las competencias antes nombradas.

Esta unidad didáctica desarrolla el tema de trigonometría y está dirigida al nivel de 4º de E.S.O. (opción B). La razón por la cual decidí elegir este tema y este nivel es que en el módulo Practicum pude intervenir en unas sesiones de clase en las que trabajé este tema con un grupo de 4º de E.S.O., hecho que considero me da una perspectiva más amplia en la que apoyarme para la realización de esta unidad.

A continuación resumo la normativa referente a la ordenación de la enseñanza secundaria que debe ser tenida en cuenta para en este trabajo.

0.2 MARCO NORMATIVO CURRICULAR

La L.O.E. define en el Artículo 6 de su Título Preliminar el *Currículo* como el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación. Según esta ley, le corresponde a las administraciones educativas establecer cuáles son los mínimos exigibles que debe contener el currículo para cada una de sus componentes. Encontramos por lo tanto un primer nivel de responsabilidad en cuanto a la planificación del currículo en la administración educativa nacional y autonómica. El segundo nivel de concreción le corresponde a los centros educativos y profesionales docentes. La L.O.E. establece las funciones de los centros educativos, y, en el Artículo 125, referente a la *Programación general anual*, establece que los centros elaborarán dicha programación, en la que se recogerán aspectos relativos a la organización y funcionamiento del centro entre los cuales está incluido el currículo. Ya por último, le corresponde a los departamentos didácticos en cada centro desarrollar esta programación general en una *Programación de Departamento*, llevada a cabo por los docentes.

El REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, establece las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria, a las que hace referencia la L.O.E. La finalidad de estas enseñanzas mínimas es garantizar una formación común para todos los alumnos y alumnas.
En primer lugar se hace referencia en este Real Decreto, en el Artículo 7, a las competencias básicas que al final de la etapa de la E.S.O. los alumnos y alumnas deberán haber adquirido. Estas competencias básicas ponen el acento en aprendizajes considerados imprescindibles, desde un planteamiento orientado a la aplicación de los saberes adquiridos y se debe contribuir a ellas desde todas las áreas. En el marco de la propuesta realizada por la Unión Europea se fijan las siguientes competencias básicas[1]:

1. Competencia en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática.
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia social y ciudadana.
6. Competencia cultural y artística.
7. Competencia para aprender a aprender.
8. Autonomía e iniciativa personal.

Por otro lado, tanto los objetivos como la propia selección de los contenidos buscan asegurar el desarrollo de estas competencias, y, los criterios de evaluación, sirven de referencia para valorar el progresivo grado de adquisición de las mismas.
En cuanto a las enseñanzas mínimas, este Real Decreto realiza una descripción detallada de los contenidos por curso o bloques de cada materia así como los criterios de evaluación. Recojo a continuación los del curso 4º de E.S.O. opción B, que involucran a esta unidad didáctica:

[1] En el Anexo I a este Real Decreto se tiene acceso a una descripción detallada de cada una de estas competencias.

CONTENIDOS:

Contenidos comunes:

- Planificación y utilización de procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas.
- Expresión verbal de argumentaciones y procedimientos de resolución de problemas con la precisión y rigor adecuados a la situación.
- Interpretación de mensajes que contengan argumentaciones o informaciones de carácter cuantitativo o sobre elementos o relaciones espaciales.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas y en la mejora de las encontradas.
- Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.

Contenidos del bloque de Geometría:

- Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas. Relaciones métricas en los triángulos.
- Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas.
- Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
- Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN:

De los siete criterios de evaluación que aparecen para todo el curso, destaco el tercero y séptimo que se encuentran íntimamente relacionados con el tema abordado:

- Utilizar instrumentos, fórmulas y técnicas apropiadas para obtener medidas directas e indirectas en situaciones reales.

Se pretende comprobar la capacidad de desarrollar estrategias para calcular magnitudes desconocidas a partir de otras conocidas, utilizar los instrumentos de medida disponibles, aplicar las fórmulas apropiadas y desarrollar las técnicas y destrezas adecuadas para realizar la medición propuesta.

- Planificar y utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas tales como la emisión y justificación de hipótesis o la generalización, y expresar verbalmente, con precisión y rigor, razonamientos, relaciones cuantitativas e informaciones que incorporen elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello.

Se trata de evaluar la capacidad para planificar el camino hacia la resolución de un problema, comprender las relaciones matemáticas y aventurar y comprobar hipótesis, confiando en su propia capacidad e intuición. También, se trata de valorar la precisión y el rigor del lenguaje utilizado para expresar todo tipo de informaciones que contengan cantidades, medidas, relaciones, numéricas y espaciales, así como estrategias y razonamientos utilizados en la resolución de un problema.

La aportación de la administración educativa andaluza a esta descripción en lo que respecta al currículo en la E.S.O. se da en la Orden del 10 de Agosto del 2007. Establece que los departamentos didácticos serán los encargados de desarrollar las programaciones didácticas de las distintas materias, mediante la concreción de los objetivos, ordenación de los contenidos, establecimiento de la metodología y de los procedimientos y criterios de evaluación. En la elaboración de dichas programaciones se deberán incluir los núcleos temáticos del currículo propio de Andalucía, establecidos en el Anexo I, así como los principios para el desarrollo de los contenidos y orientaciones metodológicas establecidas en dicha Orden. También serán los departamentos los encargados de programar las distintas medidas de atención a la diversidad que pudieran llevarse a cabo.
Los *núcleos temáticos* a los que hace referencia esta Orden, correspondientes a la materia de matemáticas son los siguientes[2]:

- Resolución de problemas (transversal).
- Uso de los recursos TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (transversal).
- Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas (transversal).
- Desarrollo del sentido numérico y la simbolización matemática.
- Las formas y figuras y sus propiedades.
- Interpretación de fenómenos ambientales y sociales a través de las funciones y sus gráficos y de las estadísticas y probabilidad.

Se puede ver una descripción más detallada de cada uno de estos núcleos temáticos desde el punto de vista de su relevancia y sentido educativo, contenidos relevantes, interacción con otros núcleos temáticos, sugerencias acerca de líneas metodológicas y utilización de recursos y criterios de valoración de los aprendizajes, en dicho anexo.

0.3 ESTRUCTURA DEL TRABAJO

Es por lo tanto labor del docente llevar a cabo una planificación completa del currículo teniendo como base la anterior normativa, y ese es el objetivo de este trabajo, en el que realizo un análisis didáctico completo que facilite desarrollar la unidad didáctica teniendo en cuenta todas las variables que definen el currículo.
La estructura del análisis didáctico es la siguiente:
1.- Análisis de contenido (desarrollo histórico, estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología).
2.- Análisis cognitivo (objetivos y competencias, errores y dificultades, oportunidades de aprendizaje).
3.- Análisis de instrucción (variables a considerar en las tareas, materiales y recursos).
4.- Análisis de la evaluación (instrumentos y criterios de evaluación).
Tras este análisis didáctico, propongo una secuenciación de tareas con la que abordar en unas cuantas sesiones de clase los contenidos estudiados.

[2] Se puede ver una descripción más detallada de cada uno de estos núcleos temáticos desde el punto de vista de su relevancia y sentido educativo, contenidos relevantes, interacción con otros núcleos temáticos, sugerencias acerca de líneas metodológicas y utilización de recursos y criterios de valoración de los aprendizajes, en el Anexo I a dicha Orden.

1 ANÁLISIS DE CONTENIDO:

1.1 HISTORIA

Para tener una perspectiva completa del contenido que conforma el cuerpo teórico del tema es importante realizar un estudio de la evolución histórica de los conceptos implicados. Realizo a continuación un breve resumen de los hechos más importantes en el desarrollo histórico de la trigonometría.

PRIMEROS PRECEDENTES:

EGIPTO 2000-1800 a.C.

En el problema 56 del Papiro de Rhind o de Ahmes (en la figura se puede observar un detalle de este papiro) se encuentran por primera vez rudimentos de trigonometría y de teoría de triángulos semejantes. Del problema de mantener la pendiente de cada cara constante durante la construcción de una pirámide, surge lo que podríamos considerar como la primera razón trigonométrica. Los egipcios tenían en cuenta el cociente entre "el avance" y "la subida" para medir la pendiente, es decir, lo hacían por medio del cociente entre la variación horizontal y la vertical (la actual cotangente) a la que llamaban "seqt". Hoy en día esta razón tiene importancia en arquitectura, donde se llama a esta medida "desplome". En el problema 56 de este Papiro, se pide calcular el "seqt" de una pirámide de la que se conocen la altura y base.

BABILONIA 1900-1600 a. C.

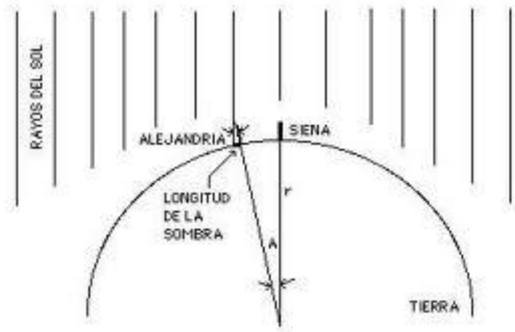
En la tablilla 322 de la colección Plimpton, conservada en la Universidad de Columbia, aparece otro "germen" de la trigonometría. Esta tablilla muestra una tabla con una serie de ternas pitagóricas formadas por números enteros (idearon un método para obtenerlas) y aparece también en la tabla la razón entre hipotenusa y cateto mayor (la actual secante) en una secuencia de grado en grado de 31º a 45º. Esta tabla fue utilizada en los problemas de medir áreas de cuadrados o lados de triángulos rectángulos.

Pero las tablillas mesopotámicas y los papiros egipcios, como todos los documentos prehelénicos, contienen siempre casos prácticos, sin ninguna formulación general, son unas matemáticas totalmente utilitarias.

EL NACIMIENTO DE LA TRIGONOMETRÍA. GRECIA.

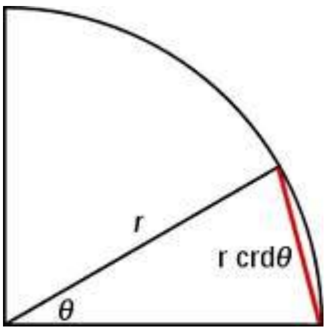
"Cuando trazo a placer el vertiginoso ir y venir de los cuerpos celestes,
mis pies ya no tocan la tierra, sino que me hallo en presencia del mismo Zeus
y me sacio de ambrosía, alimento de los dioses." (Ptolomeo)

La trigonometría surge en Grecia para dar respuesta a problemas clásicos de la Astronomía de la época. **Aristarco de Samos** escribió un tratado (en torno al 260 a.C.) titulado *Sobre los tamaños y distancias del Sol y la Luna* en el que, por medio de la semejanza de triángulos, daba la relación entre las distancias Tierra-Sol y Tierra-Luna. Otro trabajo que aportó nuevas muestras de que en aquella época se daba el ambiente idóneo para el nacimiento de la trigonometría, es el de **Eratóstenes de Cirene**



(276 a.C. -194 a.C.), que, en su tratado, *Sobre la medida de la tierra,* aproxima el tamaño de ésta utilizando una medición del ángulo entre dos ciudades, Assuan y Syena, situadas en el mismo meridiano, obteniendo el resultado de un cincuentavo de círculo completo, para después multiplicar por 50 la distancia entre estas dos ciudades y obtener así una aproximación bastante buena de la longitud de la circunferencia de la tierra, de unos 250.000 estadios, o lo que es lo mismo, unos 46.000 Km. En este trabajo se aprecia cómo se empiezan a relacionar ángulos (en la circunferencia) y distancias (longitud del arco). El intento de profundizar en el conocimiento de estas relaciones, para aplicarlo en multitud de problemas astronómicos, de navegación, agrimensura, etc., fue lo que impulsó el desarrollo de la trigonometría.

Poco después de estos trabajos aparece la obra de **Hiparco de Nicea**, considerado el padre de la trigonometría porque elabora la primera tabla trigonométrica de la que se tiene constancia. Hiparco de Nicea (ca. 180-ca. 125 a.C.) se ocupó de elaborar una tabla en la que aparecieran valores de arcos y sus cuerdas correspondientes, así como la razón entre éstos, para una serie completa de ángulos. La contribución que se le atribuye a Hiparco es la de organizar y ordenar los datos empíricos obtenidos por los babilonios. No sabemos con precisión cuando comenzó a usarse una división del círculo completo en 360º, pero parece ser que este hecho se debe principalmente a Hiparco, que utilizó tal división en su tabla de cuerdas, debido probablemente a la astronomía, donde el zodiaco había sido dividido en 12 "signos" o 36 "decanes", divididos éstos a su vez en 30 o 10 partes, respectivamente.



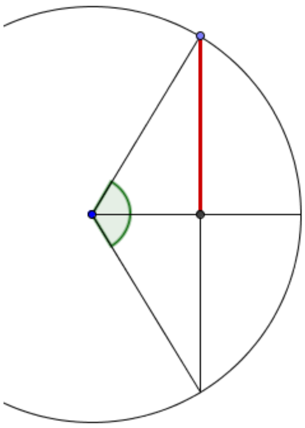
Otro de los personajes que ayudó al desarrollo de la trigonometría en la antigua Grecia fue **Menelao de Alejandría** (ca. 100), que en el tratado *Esférica*, libro I, establece las bases de la trigonometría esférica, estudiando y deduciendo algunas propiedades de los triángulos esféricos.

Pero fue la obra de **Ptolomeo** la de mayor importancia en cuanto a lo que concierne a los orígenes de la trigonometría. En su obra *Sintaxis matemática* (que fue llamada por los árabes *Almagesto),* escrita durante el segundo siglo de nuestra era, de la cual se conservan copias, Ptolomeo realiza un tratado astronómico, en el que calcula tablas de cuerdas, usadas para "leer" la posición de los astros. En este tratado Ptolomeo presenta un importante resultado, del cual se deducen como casos particulares fórmulas para el cálculo de cuerdas para la suma y diferencia de arcos, y de éstas las del arco doble y mitad. Con estas herramientas, Ptolomeo tuvo más fácil la elaboración de tablas de cuerdas con mayor exactitud, e incluyó en su *Almagesto* una para ángulos desde medio grado hasta 180º, de medio en medio grado. Para ello, Ptolomeo utilizó también la división de la circunferencia en 360 partes (grados), las cuales a su vez fueron subdivididas en 60 partes (*partes minutae primae*, de aquí la procedencia del término minuto) y cada una de estas también fue dividida en otras 60 partes (*partes minutae secundae*, y, de aquí la procedencia de segundo). El hecho de tomar subdivisiones de 60 partes se debe a que el sistema de numeración sexagesimal que utilizaban los babilónicos por aquella época, era mucho más eficaz para operar con fracciones que el sistema de fracciones unitarias egipcias, y el de las fracciones usuales de los griegos.

Además Ptolomeo también dividió el diámetro de su círculo trigonométrico en 120 partes, quedando el radio dividido en 60.
Las tablas que elaboró Ptolomeo en el Libro I de *Almagesto* fueron una herramienta indispensable para los astrónomos durante más de mil años.

No está claro que hubiera progresos importantes en la trigonometría de Ptolomeo, en el año 150 de nuestra era, respecto a la de Hiparco en el año 150 a.C., o incluso respecto a Apolonio y Arquímedes cien años antes. Pero lo que es claro, es que desde ese momento en que la trigonometría satisface todas las exigencias prácticas de los problemas astronómicos, se deja de profundizar en su estudio, ya que en esta época imperaba un movimiento a la práctica que dominó durante tres siglos. Pero más tarde estas técnicas serían estudiadas de nuevo por árabes e hindúes, los cuales harán de puente entre la matemática antigua y el mundo moderno.

LA TRIGONOMETRÍA HINDÚ



Los *Siddhãntas* son unas obras escritas, que aparecieron hacia finales del siglo IV, que recogen conocimientos sobre astronomía. En ellos se puede observar una gran influencia de las teorías astronómicas griegas, y particularmente de la trigonometría y astronomía de Ptolomeo. Pero aunque los hindúes adquiriesen sus conocimientos acerca de la trigonometría de Grecia, le dieron una nueva forma muy significativa.
La trigonometría de Ptolomeo se basaba en la relación entre las cuerdas y los correspondientes arcos o ángulos centrales que ellas subtienden, pero los hindúes estudiaron la razón entre la mitad de la cuerda (semicuerda) y la mitad del arco, y esta razón fue el antecesor de nuestro actual seno.
No mucho después de los *Siddhãntas*, durante el siglo VI, vivió **Aryabhata**, cuya obra más conocida, titulada *Aryabhatiya*, es un delgado volumen escrito en verso que recoge temas de astronomía y matemáticas. Sin ninguna relación con la lógica o la metodología deductiva más propias de la matemática griega, Aryabhata también realizó tablas donde se dan los senos de los ángulos menores o iguales que 90º para 24 intervalos angulares de 3y¾ de grado cada uno. Las tablas incluyen también los valores de lo que llamamos seno verso de un ángulo es decir, *(1- sen θ)*. Aryabatha utilizó una circunferencia de 360·60=21.600 unidades, para lo que tuvo que tomar entonces un radio de 3.438 unidades (utilizando una aproximación de π correcta hasta la milésima), por lo tanto, habría que dividir los valores de la tabla entre ese radio, para obtener unas tablas de senos bastante precisas.

LA TRIGONOMETRÍA ÁRABE

Un par de siglos después de Aryabatha, aparecen las primeras referencias sobre trigonometría en Arabia. Estas referencias en principio adoptaban el modelo de cuerdas griego, pero finalmente se decantaron por el modelo hindú, basando así su teoría sobre la función seno, y fue a través de los árabes como llegó a Europa la trigonometría del seno.
Una de las obras destacables es la de **Al-Battani** (ca. 850-929), conocido en Europa como Albategnius, que en su libro *Sobre el movimiento de las estrellas* aplica la

trigonometría directamente al triángulo rectángulo, obteniendo una fórmula que en la actualidad se leería como

$$b = a\frac{sen(90º - A)}{sen\,A}$$

donde a y b son los catetos de un triángulo rectángulo y A el ángulo opuesto al lado a.
Un siglo más tarde, en la época de **Abu´l-Wefa** (939-998), la función tangente era ya conocida y se podía expresar la relación anterior como $a=b\ tg\ A$. Los árabes calculaban la función tangente sobre el círculo unidad, lo que no ocurría con la función seno de los hindúes, acercándose un poco más a la idea de la trigonometría moderna. Además el trabajo de Abu´l-Wefa fue un trabajo más sistemático, "a la griega", en la que se demuestran ya importantes resultados como las fórmulas del ángulo doble y del ángulo mitad, o el teorema de los senos para triángulos esféricos. También realizó una tabla de senos de ángulos de cuarto en cuarto grado con ocho cifras decimales exactas, una tabla de tangentes, y utilizó en sus cálculos las seis funciones trigonométricas usuales y diversas relaciones entre ellas, pero esta utilización de las seis funciones no pareció ser muy seguida en el periodo medieval.
Pero los árabes llevaron la trigonometría más allá, **Al-Biruni** (973-1048), al resolver el problema de inscribir un polígono regular de nueve lados en una circunferencia, lo reduce a resolver la ecuación $x^3=1+3x$, por medio de la fórmula matemática para $cos3\theta$.
También en aquella época, **Ibn-Yunus**, introdujo la fórmula

$$2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$$

que es una de las cuatro fórmulas de transformación "de productos a sumas" que se utilizaron en Europa durante el siglo XVI, antes de que se inventaran los logaritmos.
Los avances serían menores en los siguientes siglos, y ya en periodo de decadencia cultural del mundo islámico, **Nasir Eddin Al-Tusi** (1201-1274), astrónomo nieto del gran conquistador Genghis Khan, siguiendo las líneas de Abu´l-Wefa escribió el primer tratado sistemático de trigonometría plana y esférica, en la que se presenta como materia independiente, y no ya ligada a la astronomía. En esta obra se estudian las seis funciones trigonométricas usuales, y se dan reglas para resolver los diversos casos de triángulos planos y esféricos.

LA EUROPA MEDIEVAL

Durante el siglo XII los europeos latinos superaron la barrera lingüística que les separaba de la cultura árabe, e incluso de la cultura griega. Comenzaron a hacerse en esta época una oleada de traducciones del árabe, hebreo y griego al latín. De pronto la Europa Occidental comenzó a mirar la matemática árabe de una manera más favorable a como lo había hecho con la geometría griega, y los intelectuales latinos del siglo XII adquirieron la trigonometría árabe tal y como aparecía en las obras astronómicas. De una de estas traducciones, hecha por Gerardo de Chester sobre el 1150, surge el término seno. Los hindúes llamaron *jiva* a la semicuerda antes nombrada, y los árabes adoptaron este nombre bajo la forma *jiba*, ahora bien, en árabe existe también la palabra *jaib* que significa –bahía- o –ensenada-, y cuando Roberto de Chester se encontró con el término técnico *jiba*, debió confundirlo con la palabra usual *jaib*, y lo tradujo por la palabra *sinus* que es el nombre latino para –bahía- o –ensenada-. A veces se utilizó para la semicuerda la frase más detallada *sinus rectus* o "seno recto o vertical", y de ahí también el nombre de *sinus versus* o nuestro "seno verso" para el "seno vuelto sobre su lado".
Europa no alcanzó un alto nivel en el campo de la trigonometría hasta que **Regiomontano** (1436-1476) escribió su obra *De triangulis* hacia el 1464 En el primer

libro de este tratado, encontramos una exposición de los conceptos fundamentales sobre magnitudes y razones, inspirada por Euclides, y a continuación vienen más de 50 proposiciones que tratan de la resolución de triángulos basándose en las propiedades de los triángulos rectángulos. El libro II comienza enunciando con claridad el teorema de los senos y demostrándolo, y sigue con otros problemas sobre determinación de lados, ángulos y áreas de triángulos planos conociendo algunos datos. Un ejemplo de este tipo de resultados es el siguiente:
"Si se conocen la base de un triángulo y el ángulo opuesto, y si además se conoce o bien la altura correspondiente a la base, o bien el área, entonces pueden calcularse los otros lados".
Los libros III y IV contienen resultados acerca de la trigonometría esférica, incluyendo el teorema de los senos.
En esta obra, Regiomontano no contempla la función tangente que si incluiría en un tratado posterior *Tabulae directionum*, Regiomontano utilizó un radio de 100.000 unidades para su tabla de tangentes de ángulos de grado en grado. Las obras de Regiomontano influyeron notoriamente en los trabajos de principios del siglo XVI.
En esta época también contribuyó al desarrollo de la trigonometría Nicholas Copernicus o **Copérnico** (1473-1543) que fue un astrónomo que revolucionó la concepción del mundo, si bien es cierto que su obra estaba directamente influenciada por la obra de Regiomontano.
Se sabe que en 1539 Copérnico recibió como estudiante al joven matemático prusiano Georg Joachim **Rheticus** (1514-1576) que había estado en contacto con la matemática que se hacía en Nuremberg, por lo tanto con la trigonometría de Regiomontano, pero Rheticus fue más lejos, aunando las ideas de estos dos maestros escribió el tratado más completo que se había escrito hasta el momento sobre trigonometría, bajo una obra en dos volúmenes titulada *Opus palatinum de triangulis.* El autor descarta en este libro el tratamiento tradicional de las razones trigonométricas consideradas respecto a arcos de circunferencia, para definirlas directamente a partir de los lados de un triángulo rectángulo. Rheticus estudió las seis funciones trigonométricas, y realizó tablas detalladas de todas ellas. Para realizar sus tablas usó una hipotenusa (radio) de 10.000.000 de unidades para las funciones seno y coseno, y para las funciones restantes un cateto adyacente de también 10.000.000 de partes, para intervalos angulares de 10".

PRELUDIO A LA MATEMÁTICA MODERNA

La mayor parte de las obras de la antigüedad habían sido ya traducidas, el álgebra árabe había sido asimilada e incluso mejorada y la trigonometría se había convertido en una materia independiente. La época estaba casi madura para llevar a cabo rápidos avances que superaran las contribuciones antiguas, medievales y renacentistas. La figura más brillante de esta transición fue **François Viète** (1540-1603), o en su forma latinizada Franciscus Vieta. La trigonometría de Viète se caracteriza por su enfoque analítico general. Realizó un trabajó similar al de Rheticus, realizando también tablas para las seis razones trigonométricas, en su obra *Canon mathematicus* (1579), utilizando un radio de gran magnitud para evitar la aparición de complicadas fracciones, aunque Viète también prefería darle un enfoque a la trigonometría basada en el triángulo rectángulo. Al darle un carácter analítico, Viète pudo dedicarse a obtener identidades como un grupo de fórmulas conocidas como las "*reglas de prostafairesis*", esto es, fórmulas, como la obtenida por Ibn-Yunus, que permitían convertir un producto de funciones circulares en una suma o diferencia (de donde les venía el nombre de *prostafairesis,* palabra griega que significa suma y resta). Un ejemplo de estas fórmulas es

$$sen x + sen y = 2sen(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$$

A finales del siglo XVI se popularizó este método de prostafairesis, que hizo que, ayudados por tablas trigonométricas, cálculos tediosos se realizaran con menor esfuerzo en todos los observatorios astronómicos importantes. Los cocientes por su parte se manejaban de la misma manera utilizando una tabla de secantes y cosecantes. Viète llegó más allá, relacionando la trigonometría con la teoría de números para obtener unas fórmulas para el seno y coseno de los ángulos múltiplos de un ángulo dado. Todo este cuerpo teórico facilitó a Viète el uso de la trigonometría en la resolución de ecuaciones, como ya hiciera Al-Biruni siglos atrás con una ecuación en particular. La trigonometría dio así un salto hacia problemas aritméticos y algebraicos, y, a finales del siglo XVI y comienzos del XVII, hubo un entusiasmo considerable por la trigonometría. En esta época aparece por primera vez el nombre de trigonometría, en el título de una exposición de Bartholomaeus Pitiscus (1561-1613) que se publicó en el año 1595 como suplemento a un libro sobre “esférica”

Poco después, en 1635, **Gilles Persone de Roberval** realizo un bosquejo de la mitad de un arco de la curva “seno”, hecho con el que se descubre un nuevo aspecto de la trigonometría, encaminada ahora hacia un enfoque funcional, que culminará con Euler. Roberval pudo demostrar con su método de indivisibles que

$$\int_a^b sen x\, dx = \cos a - \cos b$$

Pocos años más tarde, la trigonometría tomó un nuevo rumbo dado por los hermanos **Jacques Bernoulli** (1654-1705) y **Jean Bernoulli** (1667-1748), que redescubrieron los desarrollos de *sen nθ, cos nθ,* en función de *sen θ y cos θ* dados anteriormente por Viète y los generalizaron a valores racionales de n. Pero lo más destacable de su trabajo es cómo los hermanos Bernoulli intentan desarrollar la trigonometría desde un punto de vista analítico, con lo que llegaron a resultados de una complejidad superior con los que estudiaron ciertas ecuaciones diferenciales.

Un trabajo fundamental en este nuevo aspecto analítico de la trigonometría fue el de **Roger Cotes** (1682-1716). Cotes tuvo una muerte prematura y sólo se publicaron algunos trabajos incompletos, a título póstumo, en 1722 con el nombre de *Harmonia mensurarum.* En esta obra se reconocía el carácter periódico de las funciones trigonométricas, y aparecieron por primera vez impresas las representaciones de las funciones tangente y secante. Se trata de uno de los primeros libros en los que se da un tratamiento sistemático a las funciones trigonométricas o circulares, incluyendo una tabla de integrales de éstas. Pero el autor llega más allá, al ocuparse del problema de la descomposición de polinomios y aplicar sus conocimientos de trigonometría para llegar a resultados que fueron utilizados posteriormente por **Abraham De Moivre** (1667-1754), quien, en 1707, en un artículo publicado en las *Philosofical Transactions,* utiliza una fórmula equivalente a

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\, sen\theta$$

De Moivre siguió utilizando la trigonometría para experimentar con números complejos que resolvieran ecuaciones polinómicas o facilitaran descomponer polinomios sin raíces reales en factores cuadráticos, como ya hiciera Cotes.

Leonhard Euler (1707.1783), uno de los más grandes matemáticos de la época, que realizó un sinfín de trabajos en distintas ramas de la matemática desde joven y a lo largo de su vida publicó más de 500 libros y artículos. Después de su muerte, siguieron apareciendo obras que se publicaron póstumamente. La obra de Euler *Introductio in analysin* se considera la piedra angular del nuevo análisis, vital en el desarrollo de la matemática en el siglo XVIII. En lo que respecta a la trigonometría, para Euler el seno de un ángulo era indistintamente un segmento, sino simplemente un número, la ordenada de un punto de la circunferencia unidad, o el número definido por una serie infinita. Euler convirtió la trigonometría en una potente herramienta del análisis. Estos desarrollos en serie de las funciones trigonométricas fueron aplicados por Euler en el cálculo de la suma de series infinitas. Otra de las aplicaciones que Euler le dio a la trigonometría analítica está relacionado con el estudio de curvas planas, donde encontró expresiones que involucraban a las funciones circulares para representar de forma paramétrica diversas curvas conocidas, como la cicloide. Como último apunte de la aportación que Euler hizo a la trigonometría, cabe decir también que la notación que actualmente se utiliza para las funciones trigonométricas, sin, cos, tan, cot, sec, cosec se debe también a su obra *Introductio* en la cual utilizaba estas abreviaturas.

La trigonometría siguió y sigue siendo una herramienta fundamental en el análisis moderno. Los nuevos matemáticos de los últimos siglos han estado obligados a familiarizarse con las funciones trigonométricas, que aparecen en muy distintos ambientes: como coeficientes de los desarrollos en serie de funciones continuas, o bien como componentes de funciones solución de ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales, implicadas en multitud de problemas relacionados con el estudio de los fenómenos físicos, también toman forma de las componentes de matrices correspondientes a giros en el plano y el espacio, etc.

1.2 ESTRUCTURA CONCEPTUAL

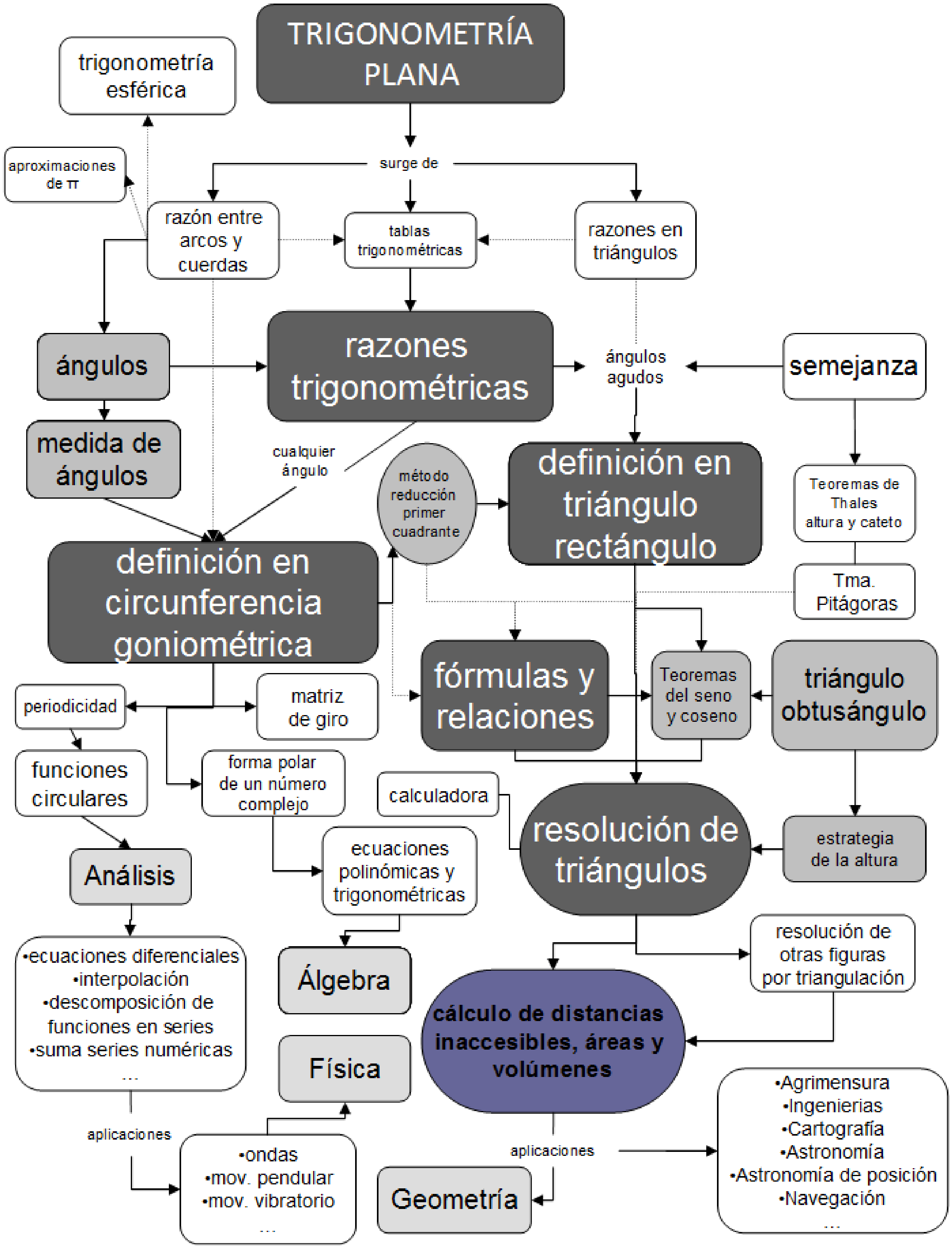
Siguiendo con el análisis de contenido, y, tras esta revisión del desarrollo histórico de la trigonometría, sigue a continuación un análisis de los conceptos y procedimientos que se ven involucrados en el proceso de aprendizaje y enseñanza de la trigonometría. En principio, este análisis está hecho sin tener en cuenta que la unidad didáctica va dirigida a alumnos de 4º de E.S.O., más adelante realizaré una concreción y seleccionaré de este análisis los conceptos y procedimientos oportunos para la enseñanza de la trigonometría a ese nivel.

El análisis está separado en conceptos y procedimientos, y dentro de estos grupos podemos observar tres niveles de complejidad. En lo conceptual distinguimos entre hechos, conceptos y estructuras, y, a su vez, dentro de la categoría con un nivel básico de complejidad, hechos, distingo entre términos, notaciones, convenios y resultados. En el campo procedimental, los tres niveles de dificultad considerados son: destrezas, razonamientos y estrategias.

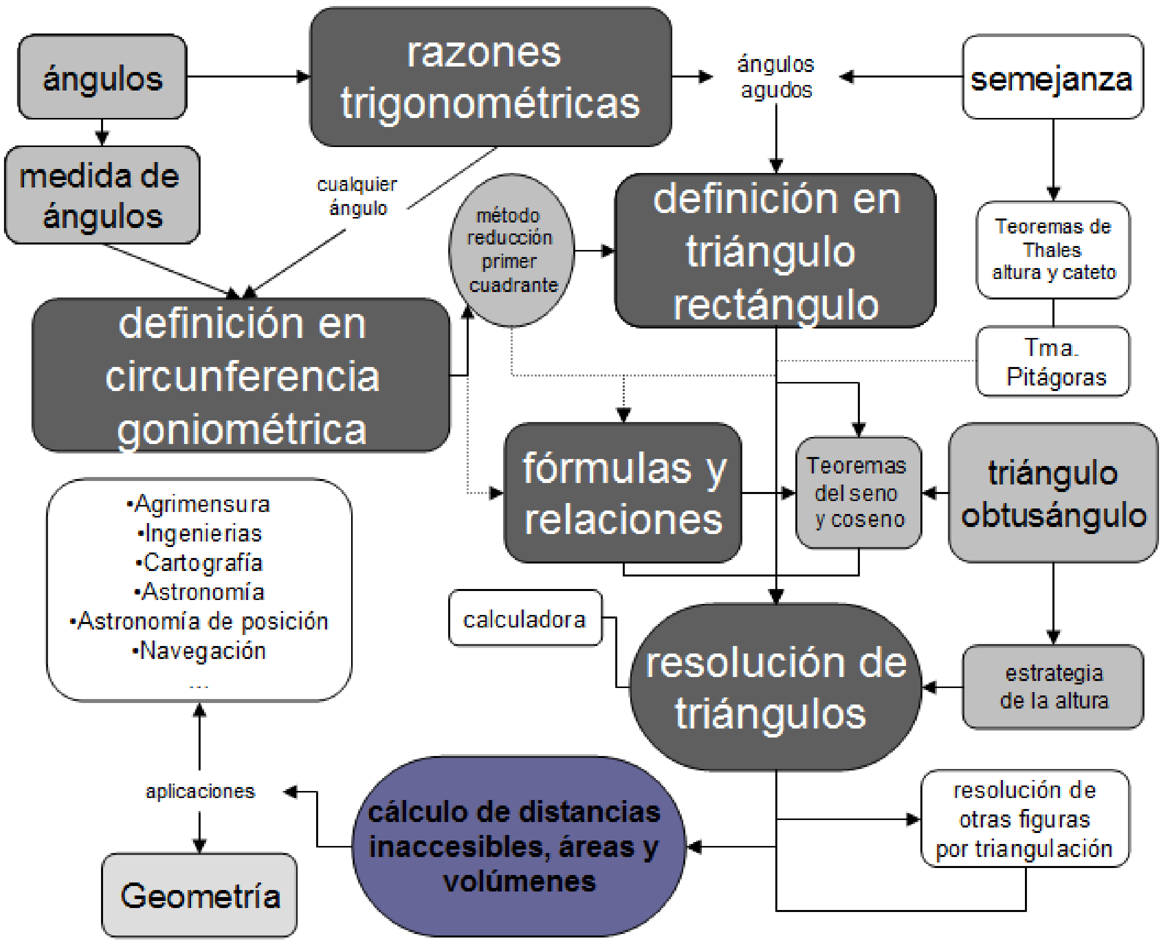
CONOCIMIENTO CONCEPTUAL	**HECHOS**	TÉRMINOS	• Ángulo, medida en grados. • Ángulos agudos, rectos, obtusos y llanos. • Ángulos complementarios, suplementarios y opuestos. • Triángulo, triángulos agudo, rectángulo y obtusángulo. • Elementos de un triángulo rectángulo: catetos e hipotenusa. • Teorema de Pitágoras. • Semejanza. Teorema de Thales. • Sistemas de coordenadas cartesianas. Cuadrantes. • Circunferencia goniométrica.
		NOTACIONES	• Grado sexagesimal → º • Radianes → rad • sen, cos, tan, cosec, sec, cotan. • $(\text{sen}\ \alpha)^2=\text{sen}^2\ \alpha$, esta notación se sigue para cualquier potencia de cualquier razón trigonométrica. • Los vértices de un triángulo los notamos con letras mayúsculas, los lados con minúsculas, y los ángulos con letras griegas: α, β, γ.
		CONVENIOS	• Orientación de los ángulos: los ángulos positivos se miden en sentido antihorario. • El símbolo $^{-1}$ en las razones trigonométricas hace referencia a las funciones inversas (funciones arco)
		RESULTADOS	• Las razones trigonométricas dependen sólo de la amplitud del ángulo y no de los lados del triángulo. • La tangente es cociente entre seno y coseno. • $\text{sen}\ \alpha=\text{sen}(\alpha+360º)$ • $\cos\alpha=\cos(\alpha+360º)$ • El seno y coseno toman valores en el intervalo $[-1,1]$ y la tangente no existe para múltiplos de $\pi/2$. • Regla de los signos. • Fórmulas para ángulo complementario, suplementario, opuesto y ángulos que difieren 180º. • Fórmulas para las razones trigonométricas de la suma y diferencia de ángulos. • Los puntos de la circunferencia unidad tienen por coordenadas al coseno y seno del ángulo. • Fórmula del área para un triángulo cualquiera.
	CONCEPTOS	• Medida de ángulos en radianes. • Razones trigonométricas básicas en triángulo rectángulo. • Razones trigonométricas básicas en circunferencia goniométrica. • Resto de razones trigonométricas. • Relaciones fundamentales entre razones trigonométricas. • Teorema de los senos, Teorema del coseno. • Periodicidad del seno y coseno, funciones trigonométricas.	
	ESTRUCTURAS	• Las funciones seno y coseno son base de las funciones periódicas.	

CONOCIMIENTO PROCEDIMENTAL	**DESTREZAS**		• Relacionar ángulos y arcos de circunferencia. • Identificar y dibujar distintos tipos de ángulos y triángulos. • Conversión de unidades de medida de ángulos de modo manual y con calculadora. • Indicar los ángulos complementarios, suplementarios, opuestos y aquellos que difieran 180º en la circunferencia. • Identificar cateto mayor, menor e hipotenusa. • Identificación de cuadrantes. • Proyectar puntos sobre los ejes. • Representación de ángulos en la circunferencia goniométrica. • Cálculo de las razones trigonométricas de ángulos agudos, a partir de su definición, en triángulos rectángulos. • Construir un triángulo rectángulo del que se conocen las razones trigonométricas de sus ángulos. • Uso de calculadora para cálculo de razones trigonométricas. • Uso de programas de geometría dinámica para representar ángulos y triángulos • Uso de los conocimientos geométricos en la medida de áreas y volúmenes.
	RAZONAMIENTOS	DEDUCTIVO	• Comprobar la validez de las relaciones fundamentales con distintos ángulos. • Cálculo de las razones trigonométricas en 2º,3º y 4º cuadrante • Demostración de igualdades derivadas de las relaciones fundamentales. • Cálculo de las razones trigonométricas de ángulos notables a partir del triángulo equilátero e isósceles.
		INDUCTIVO	• Reconocimiento de fórmulas por el método de ensayo-error • Obtención de la regla de los signos
		ANALÓGICO	• A partir de la fórmula del seno del ángulo doble/mitad, obtención de la fórmula del coseno del ángulo doble/mitad
		FIGURATIVO	• Estimación del valor de un ángulo y de sus razones trigonométricas a partir de su representación gráfica • Uso de tablas de valores de razones trigonométricas. • Representación de triángulos rectángulos para la resolución de problemas
	ESTRATEGIAS		• Resolución de triángulos rectángulos • Cálculo de áreas y longitudes • Resolución de diferentes problemas geométricos utilizando los distintos resultados teóricos conocidos • Resolución de triángulos cualesquiera mediante la "Estrategia de la altura", de la "doble medida", Teorema del seno, Teorema del coseno, etc.

En este mapa conceptual presento un resumen de los principales conceptos y procedimientos que componen la trigonometría, así como relaciones entre éstos, resultados destacables y aplicaciones directas:



Limitándonos a los componentes de este mapa que tienen cabida en la enseñanza de la trigonometría en 4º de E.S.O., siguiendo los indicadores del currículo, éste queda reducido a lo siguiente:



1.3 <u>SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN</u>

El siguiente punto en este análisis de contenido, es el correspondiente al análisis de los sistemas de representación que entran en juego cuando se trabaja la trigonometría. Esta nueva dimensión del análisis didáctico, los sistemas de representación, esta formada por "*todas aquellas herramientas –signos o gráficos- que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas*" (Rico, 2009).
Los sistemas de representación hacen referencia a las distintas formas de pensar y trabajar la trigonometría, los distintos puntos de vista desde los cuales el tema que nos interesa toma forma. Estos sistemas juegan un papel fundamental en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, ya que permite acercarse a los conceptos por varias vías, lo que los hace más accesibles. Estas vías o distintos sistemas de representación, no están aislados, y no tiene por qué ser excluyentes, un mismo concepto puede necesitar

ser trabajado desde distintos sistemas complementados, es por ello que también se hace necesario estudiar cómo están relacionados estos distintos sistemas.

Distingo varios grupos de sistemas de representación: simbólico, numérico, verbal, gráfico y el dado por materiales manipulables.

REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA:

Se pueden representar por medio de símbolos algebraicos las razones trigonométricas, como vemos en estos ejemplos:

$$\boxed{sen\alpha = \frac{a}{c}}$$

Este ejemplo pone de manifiesto la caracterización de las razones trigonométricas de un ángulo agudo como razón entre los lados de un triángulo rectángulo.

$$\boxed{\begin{array}{l} sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \\ \dfrac{a}{sen\,A} = \dfrac{b}{sen\,B} = \dfrac{c}{sen\,C} \end{array}}$$

También podemos expresar mediante representaciones simbólicas relaciones simples entre razones trigonométricas, como las relaciones fundamentales, o propiedades complejas de los triángulos en las cuales intervienen estas razones, como puede ser el teorema del seno.

$$\boxed{C(0,1) = \left\{ \left(sen\,\theta, \cos\theta \right) / \ \theta \in \mathbb{R} \right\}}$$

Mediante el uso de símbolos se puede hacer patente otra caracterización de las razones seno y coseno como puntos de la circunferencia unidad.

REPRESENTACIÓN NUMÉRICA Y TABULAR

$$\boxed{\begin{array}{l} sen\,30º = \dfrac{1}{2} \\ \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{array}}$$

En estos ejemplos se pone de manifiesto como se representan las razones trigonométricas de un ángulo de numéricamente.

También podemos encontrar tablas que recogen razones trigonométricas de algunos ángulos, como el ejemplo de abajo a la izquierda que recoge una regla para recordar fácilmente las razones trigonométricas de los ángulos notables, o la de la derecha en la que se recoge el valor numérico de las razones de ciertos ángulos en una clásica tabla trigonométrica.

	0°	30°	45°	60°	90°
Sen α =	$\sqrt{0}$	1	2	3	4
			2		
Cos α =	$\sqrt{4}$	3	2	1	0
			2		
Tg α =	$\sqrt{0}$	1	2	3	4
	$\sqrt{4}$	3	2	1	0

REPRESENTACIÓN VERBAL

Los siguientes ejemplos intentan poner de manifiesto cómo verbalmente se pueden evocar los conceptos matemáticos que subyacen en la trigonometría desde distintos puntos de vista, así como relaciones entre estos conceptos o complejas propiedades en un triángulo:.

i. el seno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.

ii. en una circunferencia el cociente entre la longitud del arco asociado un ángulo central, y la cuerda que lo subtiende decrece de Pi a uno cuando el ángulo decrece de 180 a 0 grados.

iii. dado un ángulo en la circunferencia unidad, las coordenadas del punto que define sobre estás, son el coseno y el seno de dicho ángulo.

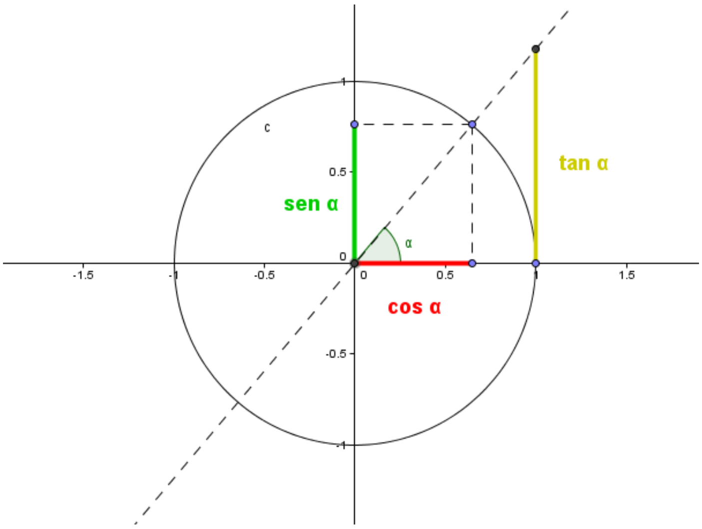
iv. la tangente de un ángulo es igual al cociente entre el seno y el coseno de dicho ángulo

v. en un triángulo, la longitud de los lados está en proporción directa con los senos de los respectivos ángulos opuestos

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

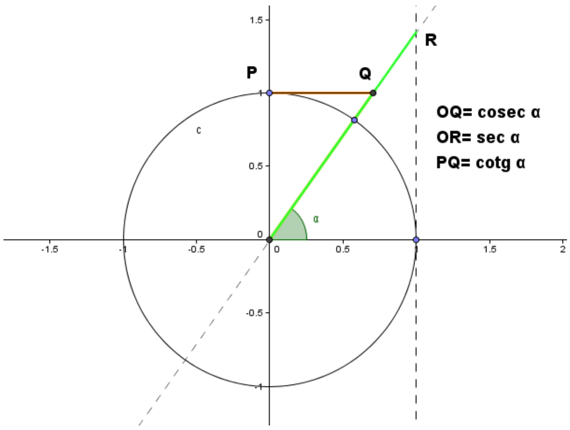
La trigonometría es una disciplina geométrica, y en esta rama de la matemática, en la enseñanza en estos niveles, cada concepto tiene una o varias formas de ser representado gráficamente, ya sea en el plano o el espacio.

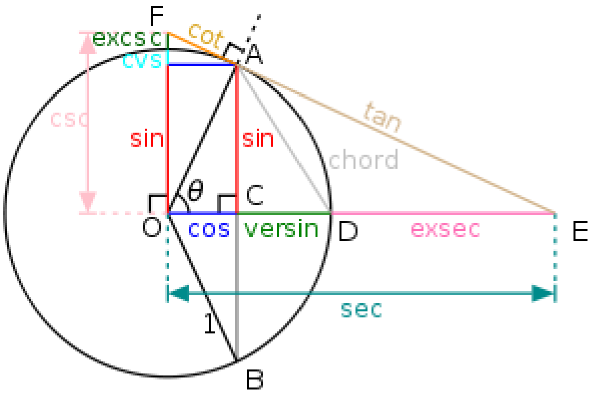
Desde la circunferencia goniométrica se pueden definir gráficamente las razones trigonométricas como la longitud de ciertos segmentos.



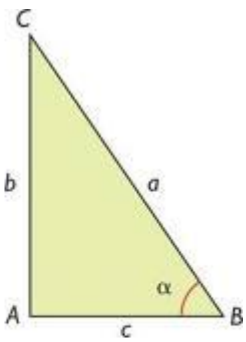
En este gráfico se puede visualizar cómo se representan gráficamente el seno, coseno y tangente de un ángulo en la circunferencia goniométrica

También las razones trigonométricas inversas pueden ser representadas por segmentos asociados a la circunferencia goniométrica.

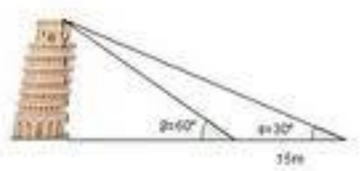




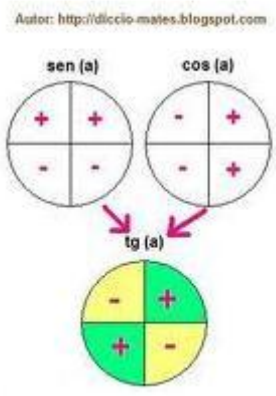
En esta imagen se representan a la vez todas las razones trigonométricas estudiadas y algunas más que no se utilizan en la actualidad. Se puede observar un modo distinto al anterior para representar a las razones inversas.

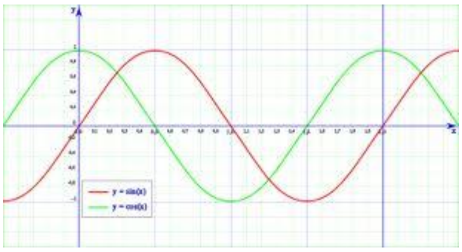


Es fundamental también en el desarrollo de esta unidad el trabajo con triángulos. El alumno o la alumna que se enfrente a la trigonometría deberá acometer una serie de problemas que involucran la resolución de triángulos. Por ello, aunque por sí solos no supongan un sistema de representación para los conceptos propios de la trigonometría, serán fundamentales en la modelación de un problema, en la representación de situaciones que puedan ser resueltas con la trigonometría.



También podemos encontrar elementos gráficos que representen reglas como el siguiente ejemplo, que sintetiza la llamada ley de los signos para las razones trigonométricas.

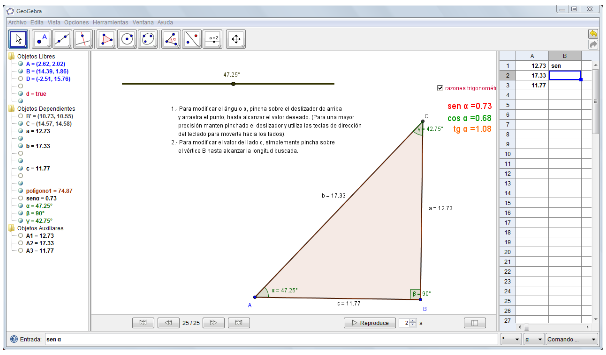




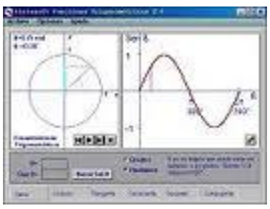
Aquí podemos ver para terminar la representación gráfica de la función seno y coseno, que aunque se escapa de los contenidos curriculares del nivel hacia el que está enfocado esta unidad, bien podrían ser introducidas en alguna actividad de ampliación, ya que a este nivel los alumnos ya están familiarizados con las funciones y sistemas de coordenadas.

REPRESENTACIÓN CON MATERIALES MANIPULATIVOS

Este tema es especialmente favorable para el uso de materiales manipulativos con los cuales facilitar el proceso de aprendizaje. Es fundamental apoyar la enseñanza de cualquier concepto geométrico en la representación gráfica, y esto se hace especialmente interesante cuando se realiza por medio de distintos materiales manipulables que permitan interactuar con estos conceptos y dinamizar esta representación gráfica. En el apartado dedicado a recursos, dentro del análisis de instrucción nombro un par de ejemplos que ilustran esta forma de trabajar la geometría. Pero en lo que se refiere a encontrar materiales que propiamente representen los conceptos trigonométricos encuentro ciertas dificultades.



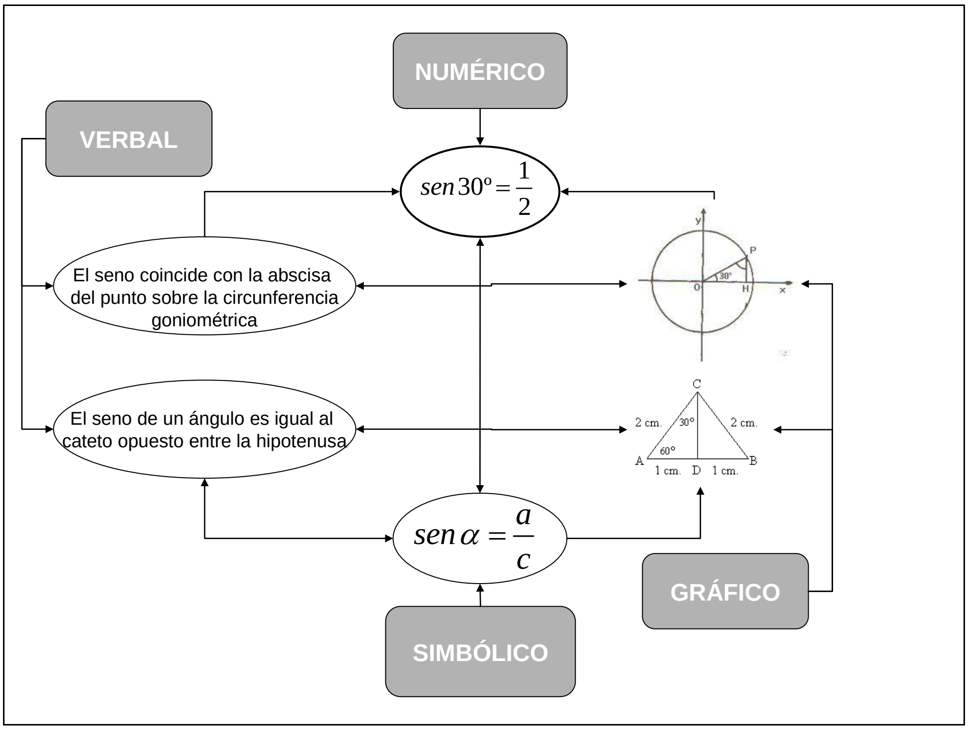
Podemos encontrar aplicaciones que, por ejemplo, permiten modificar un triángulo variando el tamaño de los lados dejando fijos los ángulos, es decir, permite construir fácilmente triángulos semejantes, con los que se puede representar en cierto modo el concepto de razón trigonométrica, y observar como los cocientes entre sus lados permanecen constantes al pasar de un triángulo a otro semejante.



La aplicación que se observa a la izquierda representa el seno sobre la circunferencia goniométrica y a la vez construye la gráfica de la función seno variando el ángulo en la circunferencia.

RELACIÓN ENTRE LOS DISTINTOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

A la hora de presentar un concepto es importante hacerlo desde los distintos sistemas de representación y también es importante poner en relación estos sistemas para que el escolar tenga diferentes perspectivas de dicho concepto y pueda construir un significado más rico, en el siguiente gráfico intento mostrar la relación entre los distintos sistemas expuestos:



1.4 FENOMENOLOGÍA DEL TEMA Y MODELIZACIÓN

Me propongo en esta sección estudiar la fenomenología de los conceptos de interés en el desarrollo de esta unidad didáctica, esto es, los fenómenos de cuyo estudio surge la trigonometría. Se trata de responder a la pregunta de ¿para qué sirve la trigonometría?, ¿en que situaciones se hace útil?, ¿qué fenómenos la hacen presente?

El estudio de la fenomenología en el análisis didáctico cobra sentido si atendemos a la descripción que se da en la L.O.E. de la competencia matemática, en la que se puede leer:

> *Esta competencia cobra realidad y sentido en la medida que los elementos y razonamientos matemáticos son utilizados para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan. Por tanto, la identificación de tales situaciones, la aplicación de estrategias de resolución de problemas, y la selección de las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible están incluidas en ella*
>
> *En definitiva, la posibilidad real de utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible. Por ello, su desarrollo en la educación obligatoria se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de*

situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

CONTEXTOS Y SUBESTRUCTURAS CONCEPTUALES

Basándome en el análisis histórico y conceptual, intento mostrar cuáles son los fenómenos a los que da respuesta la trigonometría, describiendo primero los contextos en los cuales ésta aparece[3]:

1. Conocida la amplitud de un ángulo central en la circunferencia (equivalentemente, la longitud de un arco), ¿es posible conocer la longitud de la cuerda que define dicho ángulo (arco)?
2. Conocida la longitud de una cuerda en una circunferencia, ¿es posible calcular la amplitud del ángulo asociado (equivalentemente, la longitud del arco)?
3. Conocidos un ángulo y un lado de un triángulo rectángulo, ¿es posible deducir el valor de los demás elementos de dicho triángulo?
4. Conocida la razón entre los lados de un triángulo rectángulo, ¿es posible calcular los ángulos de dicho triángulo?
5. Conociendo los tres lados de un triángulo cualquiera (o dos lados y un ángulo, o un lado y dos ángulos) ¿es posible calcular el resto de elementos de dicho triángulo?

Las subestructuras conceptuales que subyacen a estos contextos son:

a) Razones trigonométricas en la circunferencia (contextos 1 y 2)
b) Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo (contextos 3 y 4).
c) Resolución de triángulos rectángulos (contextos 3 y 4).
d) Resolución de triángulos cualesquiera (contexto 5).

FENÓMENOS

Algunos de los fenómenos en los que la trigonometría se hace relevante son:

- Fenómenos relacionados con aeronáutica, navegación, astronomía, astronomía de posición, cálculo de trayectorias y rumbos.
- Fenómenos de medida indirecta o medida de distancias inaccesibles, que pueden aparecer en agrimensura, arquitectura, ingenierías, cartografía, etc.
- Fenómenos que impliquen el cálculo de áreas de figuras resolubles por triangulación, aplicable de nuevo en agrimensura, ingenierías, etc.

SITUACIONES

Las distintas situaciones en las cuales pueden aparecer los problemas relacionados con la trigonometría son:

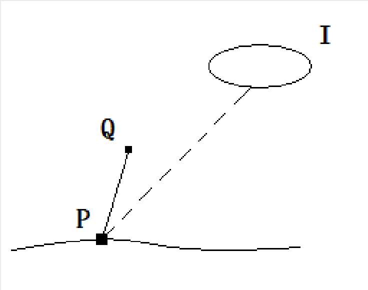
Situación pública:

> *El alcalde de Granada promete construir un teleférico que vaya desde la ciudad hasta Sierra Nevada. El punto al cual supuestamente llegará el teleférico esta a unos 1750 m. de altura, y desde el punto de salida se divisa bajo un ángulo de 15º. Si el teleférico viaja a 25 Km./h. ¿Cuánto se tardaría en realizar un viaje?*

[3] Restringiéndome a los contenidos propios de esta unidad didáctica, ya que, si ampliamos hasta incluir, por ejemplo, las funciones trigonométricas, aparecen muchos nuevos contextos que tienen asociados multitud de fenómenos físicos.

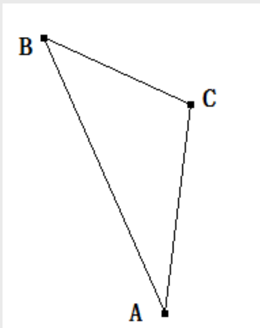
Situación personal:

Luis ha salido a dar un pequeño paseo en su barca y se dirige hacia un pequeño islote (I) que se encuentra a 4 millas del puerto, pero, nada más salir de puerto (P) se ve sorprendido por una ventisca que le desvía de su rumbo 15º, y, calcula que ha recorrido en esa nueva dirección cerca de una milla, hasta llegar al punto Q. ¿A qué distancia se encuentra en ese momento del islote?¿Qué nuevo rumbo deberá tomar para llegar a su destino (basta con que des el ángulo PQI)?



Situación laboral:

A la empresa le VAYA VALLA S.A. le han pedido vallar un terreno que tiene una forma similar al triángulo que se ve en la imagen. ¿Cuántos metros de valla se necesitaran para realizar dicho trabajo?
Datos: el lado AB mide 120 metros, AC mide 105 metros y el ángulo BAC mide 25º.



Situación científica:

Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

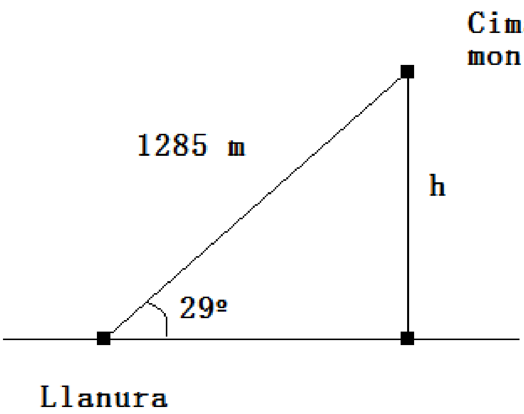
a) *El seno de un ángulo está comprendido entre -1 y 1.*
b) *El coseno de un ángulo siempre es positivo.*
c) *La tangente de un ángulo puede tomar cualquier valor real.*
d) *El coseno de un ángulo siempre es menor que el seno de dicho ángulo.*
e) *El coseno de un ángulo puede ser menor que el seno de dicho ángulo.*

RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA VIA MODELIZACIÓN

La resolución de problemas vía modelización en esta unidad se basa en interpretar correctamente los datos del enunciado para después realizar un esquema gráfico en el que se recojan estos datos. Normalmente este esquema se corresponderá con una figura triangular, o bien, con algún polígono, que podrá ser resuelto vía triangulación. A continuación muestro un ejemplo del proceso de modelación al que me refiero.

> *Con un geodómetro podemos medir distancias hasta puntos lejanos. Por ejemplo, desde la llanura medimos la distancia hasta la cima de un monte, que resulta ser 1.825 m. Si desde ese mismo lugar, el ángulo de elevación de la cima del monte es de 29º. ¿Cuál es la altura del monte (medida desde la llanura)?*

a) En primer lugar el alumno o alumna debe realizar un esquema gráfico en el que se recojan los datos del enunciado. Uno de los problemas que puede encontrar el alumno o alumna a la hora de interpretar el enunciado es entender el significado de "el ángulo de elevación". Supuesto resuelto este problema, el esquema gráfico será:



Una vez traducido el enunciado, y reconocido el triángulo rectángulo, se debe pensar que estrategia seguir para resolverlo. Como conocemos un ángulo y un lado, y queremos saber el valor de otro de los lados, se podrá resolver el problema usando una de las razones trigonométricas del ángulo de 29º, pero, ¿cuál de ellas usamos? La opción más eficiente será utilizar aquella cuya definición involucra al lado conocido y al que queremos calcular. Como en este caso se conoce la hipotenusa del triángulo e interesa conocer el cateto opuesto al ángulo de 29º, el camino más corto será utilizar la definición de seno, con la que obtenemos:

$$sen\,29^{o} = \frac{h}{1285}$$

y, despejando h,

$$h = 1285 \cdot sen\,29^{o} = 622{,}98m$$

En último lugar, el alumno debería comprobar que no llega a un resultado absurdo como por ejemplo, obtener una longitud del cateto mayor que la hipotenusa

2 ANÁLISIS COGNITIVO

Una vez analizada la complejidad de las nociones matemáticas relevantes en la trigonometría, desde distintos puntos de vista, esta etapa del análisis didáctico se centra ahora en responder a las preguntas ¿qué esperamos que aprendan los alumnos y alumnas sobre trigonometría?, ¿qué obstáculos pueden encontrar en este proceso de aprendizaje?, ¿cómo se puede facilitar este aprendizaje? Este análisis tiene en cuenta cuáles son las cotas que el currículo establece para la enseñanza de la trigonometría al nivel de 4º de E.S.O., por ello, muchos de los aspectos estudiados en el análisis de contenido se quedan fuera al restringirnos a lo que procede enseñar en dicho nivel.
A continuación, trato de responder a la primera de las preguntas arriba formulada, enumerando los objetivos específicos (expectativas).

2.1 EXPECTATIVAS:

Con el intento de darle una mayor claridad o coherencia al siguiente análisis, agrupo los objetivos en los respectivos focos conceptuales:

1.- Razones trigonométricas en triángulos rectángulos.
2.- Razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica.
3.- Relaciones fundamentales, uso de la calculadora.
4.- Estrategias de resolución de problemas.

FOCO 1: Razones trigonométricas en triángulos rectángulos.

Objetivos:

- O1. Diferenciar las distintas clases de ángulos y triángulos.
- O2. Comprobar mediante software de geometría dinámica que las razones trigonométricas dependen exclusivamente de la amplitud del ángulo.
- O3. Calcular las razones trigonométricas directas e inversas de un ángulo en un triángulo rectángulo conocidos tres o dos lados.
- O4. Utilizar los triángulos rectángulos equilátero e isósceles para deducir las razones trigonométricas de los ángulos notables.
- O5. Resolver triángulos rectángulos conocidos un ángulo y un lado.
- O6. Modelizar y resolver correctamente problemas de la vida real que involucren la resolución de triángulos rectángulos.

FOCO 2: Razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica:

Objetivos:

- O7. Representar ángulos en la circunferencia goniométrica.
- O8. Convertir ángulos de grados a radianes y viceversa de modo manual y con calculadora.
- O9. Representar, a partir de un ángulo del primer cuadrante, su complementario, suplementario, opuesto y aquel ángulo con el que difiere 180º.
- O10. Deducir la “regla de los signos” a partir de la definición de razones trigonométricas como coordenadas de la circunferencia unidad.

O11. Calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo utilizando el método de reducción al primer cuadrante.
O12. Resolver ecuaciones trigonométricas sencillas gráficamente.

FOCO 3: Relaciones fundamentales, uso de la calculadora:

Objetivos:
O13. Deducir las razones trigonométricas a partir de una dada utilizando las relaciones fundamentales.
O14. Calcular razones trigonométricas de un ángulo cualquiera a partir de las fórmulas obtenidas del método de reducción al primer cuadrante.
O15. Utilizar correctamente la calculadora para obtener las razones trigonométricas de un ángulo, así como para obtener el ángulo a partir de una de sus razones.

FOCO 4: Estrategias de resolución de problemas:

Objetivos:
O16. Resolver problemas de "doble medición", y reconocer la utilidad práctica de este método para el cálculo de distancias inaccesibles.
O17. Aplicar correctamente la estrategia de la altura para resolver triángulos oblicuángulos.
O18. Modelizar y resolver correctamente problemas de la vida real que involucren triángulos oblicuángulos, usando el teorema de los senos y de los cosenos.

Es necesario realizar también una reflexión acerca de cómo los objetivos antes descritos contribuyen al logro de las competencias matemáticas PISA (que pueden ser entendidas como objetivos a largo plazo). Evidentemente, con cada objetivo se puede contribuir al desarrollo de todas las competencias en la mayoría de los casos, pero señalo en cada objetivo las competencias a las que se contribuye en mayor medida.

Las competencias o procesos generales elegidos por el proyecto PISA, y a las que hago referencia en los posteriores análisis son las siguientes:

1) PENSAR Y RAZONAR (**PR**).
2) ARGUMENTAR Y JUSTIFICAR (**AJ**).
3) COMUNICAR (**C**).
4) MODELIZAR (**M**).
5) RESOLVER PROBLEMAS (**RP**).
6) REPRESENTAR (**R**).
7) LENGUAJE SIMBÓLICO (**LS**).
8) HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS (**HT**).

FOCO 1 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
		1	2	2	1	1	2	1	1
O1	Diferenciar las distintas clases de ángulos y triángulos expresando cuáles son las diferencias.			♦					
O2	Calcular las razones trigonométricas directas e inversas de un ángulo en un triángulo rectángulo conocidos tres o dos lados						♦	♦	
O3	Comprobar mediante software de geometría dinámica que las razones trigonométricas dependen exclusivamente de la amplitud del ángulo, explicando el porqué		♦	♦			♦		♦
O4	Utilizar los triángulos rectángulos equilátero e isósceles para deducir las razones trigonométricas de los ángulos notables		♦						
O5	Resolver triángulos rectángulos conocidos un ángulo y un lado	♦							
O6	Modelizar y resolver correctamente problemas de la vida real que involucren la resolución de triángulos rectángulos				♦	♦			

FOCO 2 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
		3	1	0	0	0	4	1	2
O7	Representar ángulos en la circunferencia goniométrica						♦		♦
O8	Convertir ángulos de grados a radianes y viceversa de modo manual y con calculadora							♦	♦
O9	Representar, a partir de un ángulo del primer cuadrante, su complementario, suplementario, opuesto y aquel ángulo con el que difiere 180º						♦		
O10	Deducir la “regla de los signos” a partir de la definición de razones trigonométricas como coordenadas de la circunferencia unidad	♦	♦						
O11	Calcular las razones trigonométricas de cualquier ángulo utilizando el método de reducción al primer cuadrante	♦					♦		
O12	Resolver ecuaciones trigonométricas sencillas gráficamente	♦					♦		

FOCO 3 RELACIONES FUNDAMENTALES, CALCULADORA		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
		2	0	0	0	0	1	2	2
O13	Deducir las razones trigonométricas a partir de una dada utilizando las relaciones fundamentales	♦						♦	
O14	Calcular razones trigonométricas de un ángulo cualquiera a partir de las fórmulas obtenidas del método de reducción al primer cuadrante	♦						♦	♦
O15	Utilizar correctamente la calculadora para obtener las razones trigonométricas de un ángulo, así como para obtener el ángulo a partir de una de sus razones						♦		♦

FOCO 4 ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS		**PR**	**AJ**	**C**	**M**	**RP**	**R**	**LS**	**HT**
		3	1	0	3	3	0	0	3
O16	Resolver problemas de “doble medición”, y reconocer la utilidad práctica de este método para el cálculo de distancias inaccesibles	♦	♦		♦	♦			♦
O17	Aplicar correctamente la estrategia de la altura para resolver triángulos oblicuángulos	♦			♦	♦			♦
O18	Modelizar y resolver correctamente problemas de la vida real que involucren triángulos oblicuángulos, usando el teorema de los senos y de los cosenos	♦			♦	♦			♦

En la siguiente tabla se muestra un recuento general de la aportación de los objetivos al logro de las competencias básicas. Considero útil este ejercicio ya que pone de manifiesto cuáles de estas competencias están menos cubiertas, hecho que debe ser tenido en cuenta durante todo el proceso de puesta en práctica de esta unidad didáctica. Por ejemplo, aunque la competencia de comunicar no este expresamente fomentada por estos objetivos, se puede contribuir a su desarrollo día a día en cada explicación, tarea, etc.

RECUENTO DE COMPETENCIAS	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS	1	2	2	1	1	2	1	1
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA	3	1	0	0	0	4	1	2
RELACIONES FUNDAMENTALES CALCULADORA	2	0	0	0	0	1	2	2
ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	3	1	0	3	3	0	0	3
TOTAL	9	4	2	4	4	7	4	8

EJEMPLIFICACIÓN DE TAREAS DESDE LOS OBJETIVOS Y LAS COMPETENCIAS

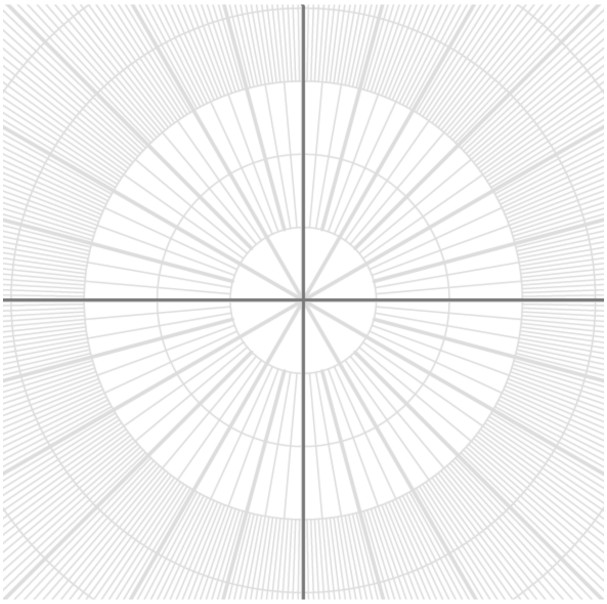
Muestro a continuación cómo se puede abordar la consecución de algunos objetivos y el logro de competencias a través de tareas concretas:

TAREA 1:

a) Dado el ángulo de 30º, calcula su suplementario, el ángulo con el que difiere 180º y su ángulo opuesto. Expresa estos ángulos en grados y radianes.

b) Dibuja en la circunferencia los cuatro ángulos del apartado anterior.

c) Observa el dibujo que forman. Repite el proceso para los ángulos de 45º y 60º sin hacer cálculos.



Análisis de la Tarea desde los objetivos y las competencias:

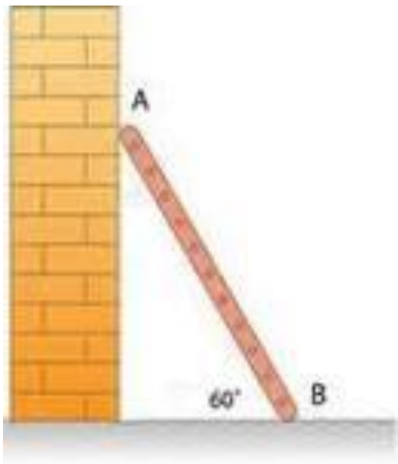
Objetivos asociados:

O7	Representar ángulos en la circunferencia goniométrica
O8	Convertir ángulos de grados a radianes y viceversa de modo manual y con calculadora
O9	Representar, a partir de un ángulo del primer cuadrante, su complementario, suplementario, opuesto y aquel ángulo con el que difiere 180º

Competencias:

Aunque en principio estos objetivos están asociados a las competencias *Representar*, *Lenguaje Simbólico y Herramientas Tecnológicas*, esta tarea contribuye principalmente al logro de las competencias *Pensar y Razonar* (se le pide al alumno o alumna que sean capaces de, a partir de un ejemplo concreto, reconocer regularidades y generalizar al caso general), *Representar* (al afrontar esta tarea se juega con la representación gráfica de un ángulo y con su representación simbólica-numérica, y ambas representaciones se relacionan).

TAREA 2:



Según las indicaciones de seguridad, al usar una escalera, esta debe formar un ángulo de 60º con el suelo.
a) ¿Hasta que altura podremos llegar siguiendo esta indicación con una escalera de 2,5 metros de larga?

b) ¿A qué distancia de la pared deberíamos apoyar el pie de la escalera para que se cumpla la nombrada indicación?

Análisis de la tarea desde los objetivos y las competencias:

Objetivos asociados:

O5	Resolver triángulos rectángulos conocidos un ángulo y un lado
O6	Modelizar y resolver correctamente problemas de la vida real que involucren la resolución de triángulos rectángulos

Competencias:

> Considero que la anterior tarea contribuye principalmente a las competencias de *Modelar* (se hace necesario traducir la realidad a una estructura matemática) y *Resolver problemas* (tras la modelación se debe resolver este problema mediante el uso de la trigonometría).

2.2 ERRORES Y DIFICULTADES PREVISIBLES EN EL DESARROLLO DE LA U.D.

¿Qué puede frenar el aprendizaje de los escolares? ¿Qué dificultades pueden encontrar? En el proceso de enseñanza y aprendizaje los errores juegan un papel fundamental, por las siguientes razones:

- Los alumnos pueden encontrar problemas a la hora de asimilar un concepto, ya sea porque arrastra deficiencias en contenidos anteriores necesarios para los propios de esta unidad, o debido a la propia dificultad del contenido, pero en ambos casos, los errores se pueden interpretar como un "síntoma" de dónde se encuentra el problema. El profesor una vez "diagnosticado" el problema puede afrontarlo prestando una mayor atención a esa parte del contenido, debe intentar que el alumno tome conciencia de cuál es el error y de dónde proviene, para así, además, fomentar su actitud crítica en este proceso de aprendizaje.
- También es posible que el error provenga de una mala práctica docente, en este caso el error será indicativo de que algo no se está haciendo bien y pondrá al profesor en alerta para que éste intente abordar desde otra perspectiva, utilizando otros ejemplos, etc. Esto hace que se depure el proceso de enseñanza.

En la siguiente tabla presento las dificultades que a priori se pueden esperar en el desarrollo de esta unidad, junto con los objetivos asociados a cada una de estas dificultades:

	DIFICULTADES	OBJETIVOS ASOCIADOS
D1	Confundir tipos de triángulos o elementos de un triángulo rectángulo (catetos e hipotenusa)	1
D2	Problemas para detectar las tres alturas en un triángulo cualquiera	1
D3	Dificultad en la aplicación de las definiciones de las razones trigonométricas (por ejemplo, confundir la definición de seno con la de coseno)	2
D4	Dificultades del lenguaje (confundir cosecante con secante, suplementario y complementario, etc.)	2,9
D5	Dificultades en la utilización de resultados previos como el Teorema de Pitágoras o Thales	2,4,5
D6	Modelación incorrecta de un problema debido a una deficiente comprensión del enunciado	6,16,17,18

D7	Dificultad en la representación de ángulos negativos o mayores de 360º en la circunferencia	7,9
D8	Dificultad en la utilización de la regla de conversión entre grados y radianes.	8
D9	Dificultad en la extensión de la definición de razones trigonométricas a ángulos no agudos	10,11
D10	Problemas con el cálculo “gráfico” de las razones de ángulos no agudos	10,11
D11	Dificultad en la interpretación y resolución de una ecuación trigonométrica	12
D12	Dificultad en el tratamiento algebraico de las razones trigonométricas, relaciones y fórmulas.	13,14
D13	Dificultad para trabajar en la calculadora en distintos modos (DEG y RAD)	15
D14	Dificultad para reconocer qué método es el más apropiado en cada problema con triángulos oblicuángulos	16,17,18
D15	Dificultad para utilizar conocimientos geométricos básicos en la resolución de problemas	6,18

Cada error concreto que aparezca en el transcurso del aprendizaje de la trigonometría puede estar asociado a varias dificultades. Por ejemplo, un error común, es el siguiente:

> Cuando se pide que se calcule el seno de un ángulo conocido el coseno, se recurre a la relación fundamental, y al resolver el problema no se tiene en cuenta la solución negativa.

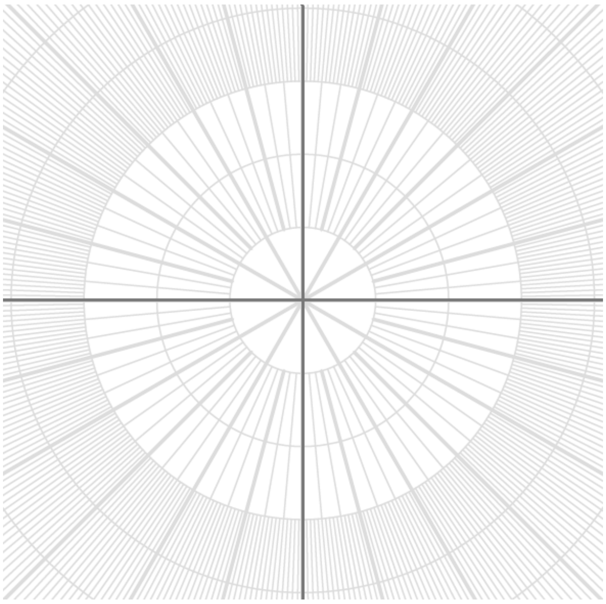
Este error está asociado a las dificultades D9 y D12.
Pero también ocurre que cada una de estas dificultades tiene asociados distintos errores, por ejemplo, otro error asociado a la D12, sería pensar que las razones trigonométricas son lineales y realizar cálculos del tipo $sen(2x)=2\ sen\ x$.

Aparte de las dificultades propias de esta unidad, se presupone que el alumno o alumna ha adquirido ya una serie de conocimientos geométricos necesarios para el correcto desarrollo de este tema, como pueden ser conceptos geométricos básicos (ángulos, triángulos, polígonos, área de polígonos, etc.), así como conceptos algebraicos (ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas). Por ello, sería importante realizar una evaluación inicial en la que se pudiera comprobar la validez de esta suposición, comprobar si el escolar tiene realmente los conceptos previos claros. Esta evaluación previa puede dar una valiosa información acerca del origen de los errores en el desarrollo de esta unidad.

2.3 EJEMPLIFICACIÓN DE TAREAS DESTINADAS AL DIAGNÓSTICO Y LA SUPERACIÓN DE LAS DIFICULTADES

Presento a continuación unos ejemplos de tareas con las que se podría diagnosticar y ayudar a la superación de las dificultades anteriormente expuestas.

TAREA 1:



a) Representa en la circunferencia un ángulo de 15º, y, a continuación otro de 375º.

b) ¿Podrías dar el valor de un ángulo que al representarlo coincida con la representación del ángulo de 75?

c) ¿Cuántos ángulos como el del apartado b) eres capaz de encontrar?

d) De lo anterior, ¿se puede deducir alguna regla general? Explícala con tus palabras

TAREA 2:

Sabiendo que $sen\,\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ¿cuánto puede valer el coseno de α?

a) Resuelve esta cuestión utilizando la primera relación fundamental.

b) Hazlo ahora gráficamente, para ello sigue estos pasos:

- En la circunferencia goniométrica, señala el valor (aproximado) de $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ en el semieje positivo de la “x” (recuerda que el seno coincide con la abscisa).
- Traza una perpendicular al eje x en el punto que has marcado.
- Esa recta determina dos puntos sobre la circunferencia.
- Une el origen con cada uno de los puntos, y tendrás los ángulos cuyo seno vale $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- ¿Cuál será entonces la respuesta a la pregunta inicial?

3. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

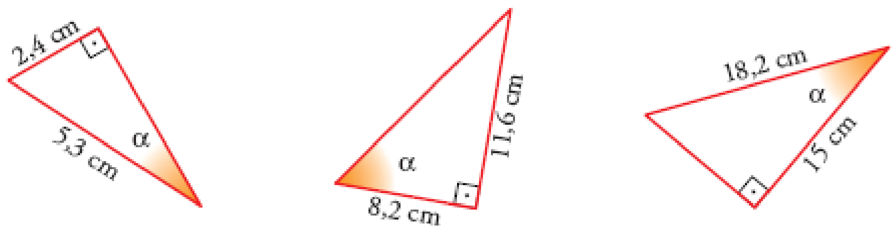
3.1. GRADOS DE COMPLEJIDAD DE LAS TAREAS

El análisis de instrucción está relacionado con las tareas que se van a llevar a cabo en esta unidad didáctica. Este análisis ayuda a realizar una selección de tareas acorde con los contenidos que se quieren impartir, que ayuden al logro de objetivos y competencias, y como no, a la superación de las dificultades. Este criterio será usado para la planificación del desarrollo de la unidad (en la siguiente sección), en la organización de la secuenciación de tareas.
También incluye este apartado algunos recursos o materiales didácticos idóneos para la implementación de la unidad.
Muestro en primer lugar algunos ejemplos de tareas con los tres niveles de dificultad asociados a las competencias PISA, una descripción general de estos niveles podría ser:

- Reproducción: es el nivel inferior de dificultad en el que el escolar se enfrenta a un problema en el que tiene simplemente que aplicar conceptos o procedimientos ya manejados.
- Conexión: en tareas con este nivel de dificultad el alumno o la alumna debe relacionar conceptos y afrontar problemas en contextos ligeramente diferentes de aquellos en los que se introdujeron dichos conceptos por primera vez.
- Reflexión: este es el nivel superior de dificultad, en el cual el escolar debe relacionar conceptos y procedimientos para resolver problemas originales que suponen una novedad para él.

EJEMPLOS DE TAREAS DE DIFERENTES NIVELES DE DIFICULTAD

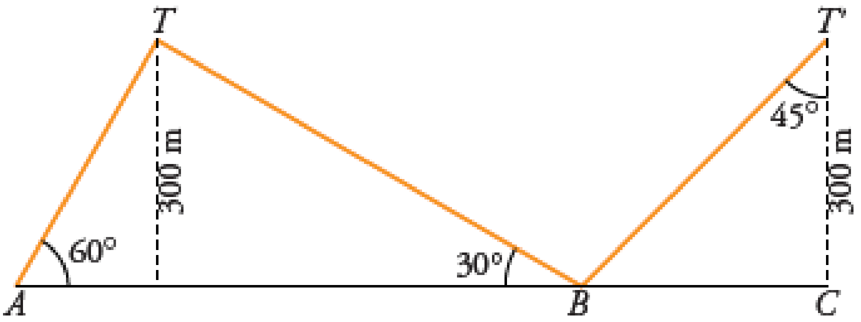
TAREA 1: REPRODUCCIÓN



Calcula las razones trigonométricas del ángulo indicado en cada uno de los triángulos.

Esta tarea está pensada para practicar con la definición de razones trigonométricas en un triángulo rectángulo. Considero que su nivel de dificultad es de reproducción, ya que el alumno o alumna, para resolver esta tarea, simplemente deben aplicar la definición de razones trigonométricas tal y como se les ha presentado, con la única diferencia de que en este caso es necesario que apliquen previamente el teorema de Pitágoras, con el que se supone el escolar debe estar bien familiarizado.

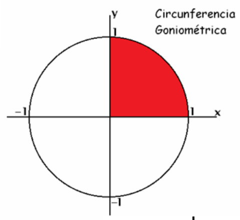
TAREA 2: CONEXIÓN



Se quiere instalar una línea de alta tensión que salga del punto A y pase por dos transformadores, T y T'. La figura de arriba es un plano de la línea: Calcula la longitud que debe tener el cable para poder realizar la instalación.

En esta tarea el alumno o alumna debe aplicar sus conocimientos acerca de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos en un contexto ligeramente diferente al contexto en el cual (supuestamente) son introducidas, pero esta variación no es significativa, ya que el único esfuerzo que debe realizar es reconocer en el dibujo los tres triángulos rectángulos sobre los que poder realizar los cálculos pertinentes.

TAREA 3: REFLEXIÓN



(a) Señala en qué cuadrante se encuentra α si:

(a.1.) $\text{sen}\ \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$; (a.2.) $\cot \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.

(b) Los ángulos α y β cumplen $\tan \alpha > \tan \beta$ y $\begin{cases} 270° < \alpha < 360° \\ 270° < \beta < 360° \end{cases}$

indica si son ciertas las siguientes afirmaciones justificando tu respuesta:

(b.1.) $\alpha < \beta$; (b.2.) $\text{sen}\ \alpha < \text{sen}\ \beta$.

En esta tarea el escolar debe poner en juego el conocimiento de conceptos propios del tema como la definición de razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica, pero en un contexto nuevo y complejo.

El análisis de instrucción tiene multitud de variables que deben ser tenidas en cuenta como pueden ser los recursos que se deben utilizar en el desarrollo de cada tarea, el tipo de agrupamiento que se puede llevar a cabo con los alumnos, cuál será el papel del profesor en la realización de esta tarea, cuáles son las metas, expectativas, limitaciones que podemos encontrar, cuál es el nivel de dificultad específico para cada competencia, cuál es su finalidad, etc. En el desarrollo posterior de la unidad se verán ejemplos de tareas analizadas en todas estas variables.

3.2 RECURSOS Y MATERIALES DIDÁCTICOS:

Para el desarrollo de la unidad didáctica de trigonometría, considero de gran utilidad el uso de programas de geometría dinámica con los cuales el escolar puede interactuar y asimilar con más facilidad los conceptos. En los últimos tiempos las nuevas tecnologías de la información y la comunicación están pasando a ocupar un lugar de gran relevancia en la sociedad, los jóvenes de hoy en día dominan perfectamente estas nuevas tecnologías, y es por ello que en nuestra labor como docente debemos buscar este punto de encuentro.
Esta importancia del uso de las nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje se refleja incluso en la nueva normativa relacionada con el currículo. En el Anexo II del Real Decreto de Enseñanzas Mínimas, se estructura cada materia por cursos y bloques. En cuanto al bloque de Geometría, en el cual se encuadra el tema estudiado se dice que,

"[…] *además de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes es, sobre todo, describir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas.* ***El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelar, medir o clasificar*** *de acuerdo con criterios libremente elegidos. Su estudio ofrece excelentes oportunidades de establecer relaciones con otros ámbitos, como la naturaleza o el mundo del arte, que no debería quedar al margen de atención.*
La utilización de recursos manipulables que sirvan de catalizador del pensamiento del alumno es siempre aconsejable, pero cobra especial importancia en geometría *donde la abstracción puede ser construida a partir de la reflexión sobre las ideas que surgen de la experiencia adquirida por la interacción con un objeto físico. Especial interés presentan los programas de geometría dinámica al permitir a los estudiantes interactuar sobre las figuras y sus elementos característicos, facilitando la posibilidad de analizar propiedades explorar relaciones, formular conjeturas y validarlas."*

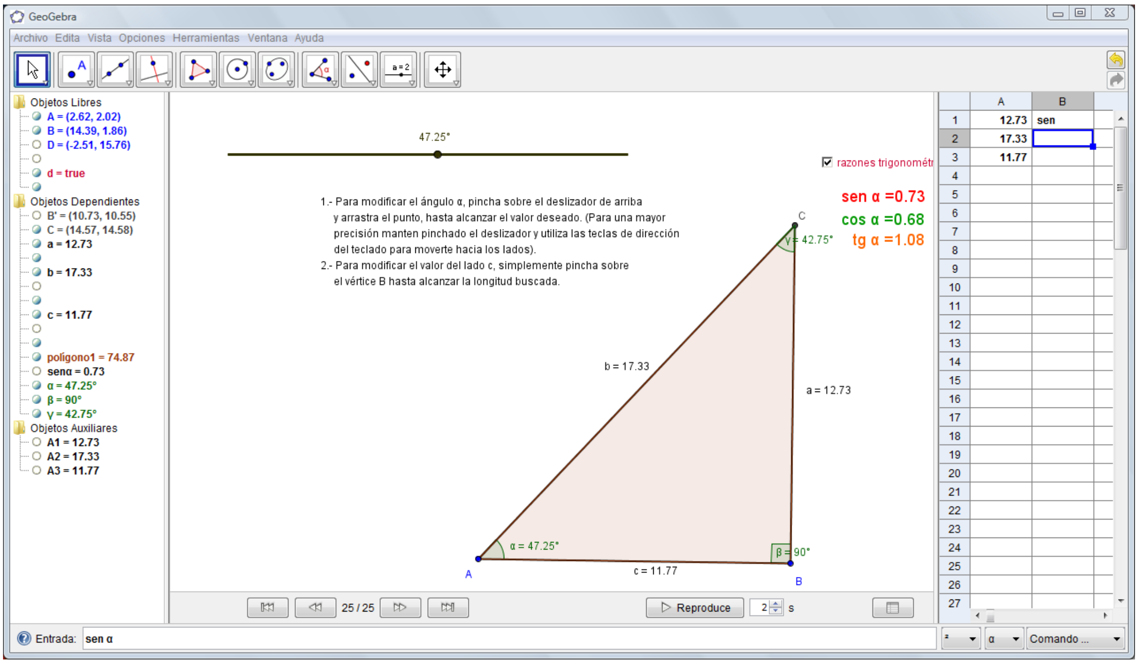
También en la Orden del 10 de Agosto de 2007 publicada en el BOJA, se describen las enseñanzas propias estructuradas en núcleos temáticos, y uno de ello es el uso de los recursos TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Presento a continuación recursos provechosos para el objetivo de esta unidad didáctica.

GEOGEBRA

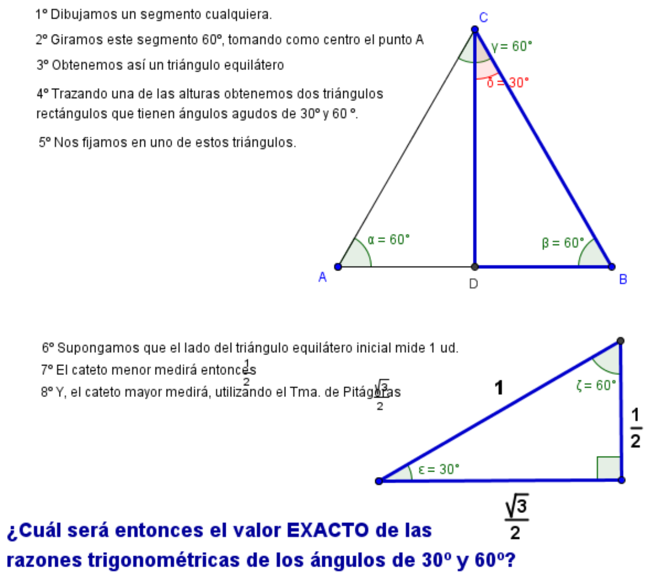
Este programa tiene una serie de características que hacen que sea muy adecuado para los objetivos que se persiguen en esta unidad. GeoGebra es un programa de libre distribución que se encuentra fácilmente en la Web (www.geogebra.org) y permite realizar construcciones geométricas de manera muy fácil e intuitiva gracias a una interfaz simple y funcional. Otra de las características de este programa que lo hacen especialmente adecuado para el aprendizaje de las matemáticas es que permite trabajar simultáneamente con representación algebraica, gráfica y numérica (tabular). Muestro a continuación algunos ejemplos extraídos de la página goniometrica.blogspot.com, en la que tenemos una serie de aplicaciones ejecutables de este programa, acompañados de una serie de actividades idóneas para la enseñanza de la trigonometría al nivel de cuarto de E.S.O. Además de esto, la página contiene una serie de enlaces interesantes de recursos en la Web.

Aplicación 1:



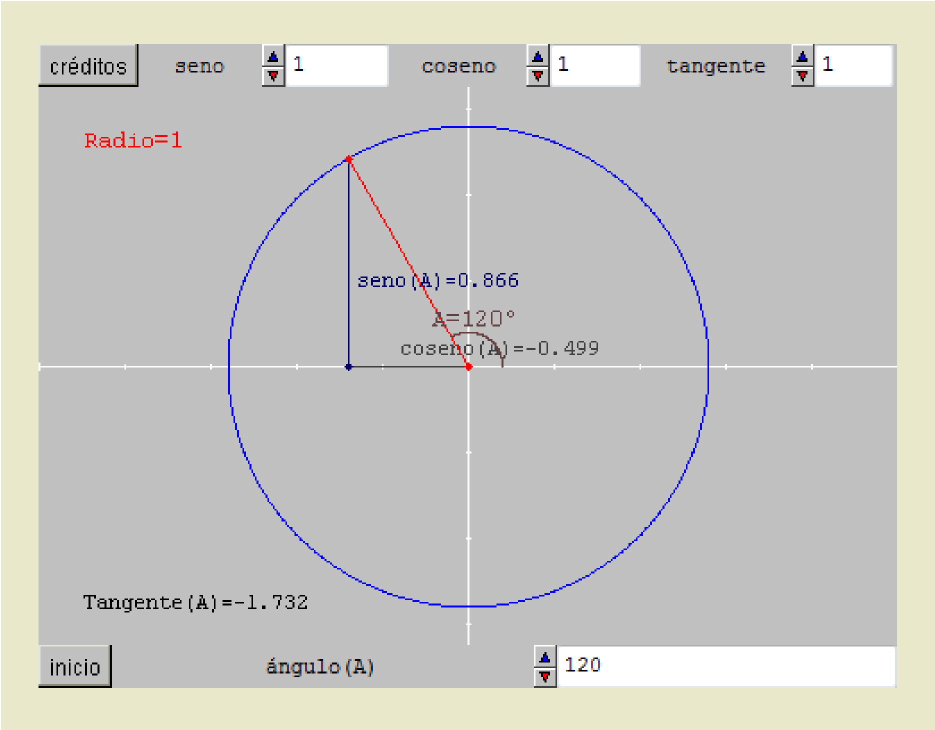
Esta aplicación está pensada para servir de herramienta en la introducción del concepto de razón trigonométrica en un triángulo rectángulo. Podemos variar los parámetros ángulo y lado, para conseguir cualquier triángulo de manera sencilla, y el objetivo principal de esta aplicación es mostrar al alumno o alumna como las razones trigonométricas sólo dependen de la amplitud del ángulo y no de las longitudes del triángulo elegido. Además, en la página nombrada encontramos una serie de actividades para que el alumno realice con la ayuda de esta aplicación

Aplicación 2:



Esta aplicación (alojada en la misma página) tiene un carácter diferente a la anterior, esta no está diseñada para que el escolar interactúe con ella, sino que presenta, paso a paso, el proceso mediante el cual, partiendo de un triángulo equilátero se pueden calcular los valores exactos de las razones trigonométricas de los ángulos de 30 y 60º.

DESCARTES

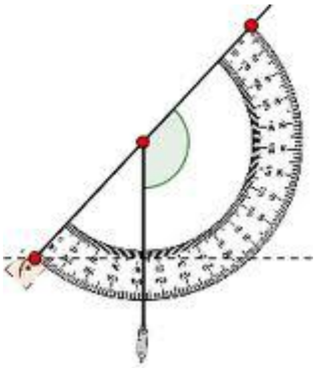


En la página dependiente del Ministerio de Educación recursostic.educacion.es/descartes se alojan un sinfín de miniaplicaciones JAVA, dedicadas a la enseñanza de las matemáticas, perfectamente organizados por, cursos y bloques. En la sección de Aplicaciones/ Geometría/ Trigonometría, encontramos materiales diseñados por profesores, que permiten desde realizar ejercicios de resolución de triángulos hasta trabajar con las relaciones fundamentales o la circunferencia goniométrica. También encontramos curiosas aplicaciones en las que tenemos que resolver un problema de medida indirecta de modo interactivo. En la imagen de la derecha se puede ver un problema en el que se quiere calcular la altura de un árbol, y para ello debemos situarnos en un punto fijo, "mover el teodolito" y utilizar el metro para resolverlo.

Son muchos más los ejemplos interesantes que se pueden encontrar en la Web, por ello animo al que lea este trabajo a que se de un "paseo" que seguro le llevará a encontrarse con alguna que otra sorpresa.

TEODOLITO

Quién no ha visto hoy en día a algún topógrafo en la calle realizando medidas con un teodolito. Es un instrumento que nos es a todos familiar, pero bastante inaccesible para poder utilizarlo con alumnos de secundaria, pero ¿y si lo construimos? Es muy fácil construir un teodolito casero que nos permita calcular el ángulo que forma la visual con cualquier objeto inaccesible, para después ayudados por una cinta métrica realizar medidas indirectas.

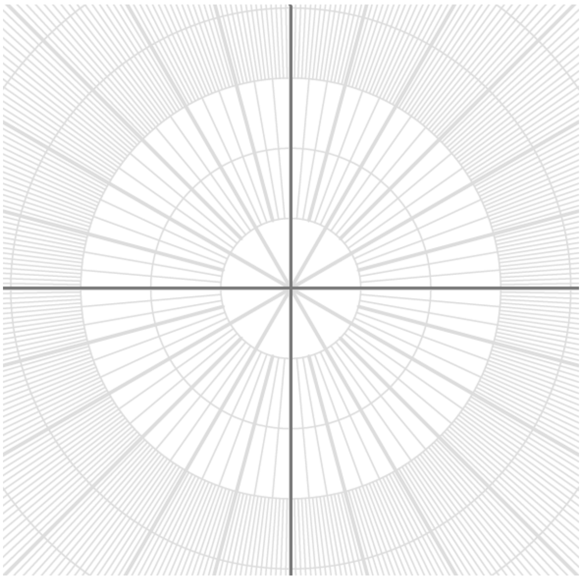


Simplemente se necesita un tubo fino de cartón, o una varilla hueca, un transportador, un trozo de cordel y algún objeto que haga las veces de plomada, por ejemplo una goma de borrar.

Si pegamos el transportador a la varilla, y en el centro de éste hacemos un agujero para poner el cordel con la goma/plomada, podremos realizar medidas de ángulos de elevación o depresión. Simplemente mirando por el agujero de la varilla hasta divisar el objetivo y viendo el ángulo que marca la plomada en el transportador, tendremos el complementario del ángulo que buscamos.

Dedicaremos una sesión a utilizar este teodolito para realizar medidas indirectas con el método de la doble medida. Se preparará, como una actividad complementaria de la unidad, un trabajo en el que los alumnos y alumnas tendrán que construir un teodolito casero, para llevar a cabo medidas de distancias inaccesibles, por ejemplo, en el patio del centro. Sin duda esta experiencia haría tomar conciencia a los alumnos de la utilidad práctica que tiene la trigonometría.

CIRCUNFERENCIA GRADUADA



Esta plantilla se hace muy útil para trabajar cómodamente sobre la circunferencia goniométrica, ya que podemos dibujar cualquier ángulo de manera sencilla. La graduación va desde pasos de 15º, 5º y 1º según nos alejamos del centro. Este material se usará en el desarrollo de la U.D. en las partes relacionadas con la circunferencia goniométrica. Los alumnos podrán estimar las razones trigonométricas de cualquier ángulo de un modo sencillo.

4. EVALUACIÓN DE APRENDIZAJES DE LA U.D.

4.1 CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Aparte de los criterios de evaluación a los que hice referencia en el punto 1.2 de este trabajo, se tendrán en cuenta los siguientes:

1. Obtiene las razones trigonométricas de un ángulo agudo a partir de un triángulo rectángulo, y de un ángulo no agudo utilizando el método gráfico de reducción al primer cuadrante.
2. Obtiene las razones trigonométricas de un ángulo conociendo una de ellas, a partir de las relaciones fundamentales.
3. Halla correctamente los valores de las razones trigonométricas de ángulos notables.
4. Resuelve triángulos rectángulos utilizando las razones trigonométricas.
5. Resuelve triángulos acutángulos mediante la estrategia de la altura.
6. Resuelve triángulos oblicuángulos con los teoremas de los senos y del coseno.
7. Modeliza y resuelve satisfactoriamente problemas utilizando la resolución de triángulos.

4.2. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

1. Anotaciones del cuaderno del profesor acerca del comportamiento, participación en clase, realización de tareas en la pizarra, entrega de tarea individual, etc.
2. Cuaderno del alumno que será revisado regularmente para comprobar si realiza las tareas diarias.
3. Prueba de evaluación inicial, que si bien no será tenida en cuenta para la evaluación del alumno, si se tendrá en cuenta para la evaluación del proceso de enseñanza, ya que puede dar una información valiosa acerca de si el alumno o alumna ha tenido una evolución positiva a lo largo de toda la unidad. (En el Anexo I se puede encontrar un ejemplo de prueba de evaluación inicial).
4. Trabajo en grupo. El trabajo en grupo se valorará con la siguiente ponderación: Actitud (10%), cuaderno de campo (20%), dossier (30%) defensa (40%), el grupo recibirá una única nota común a todos los componentes.
5. Prueba final de evaluación. Se realizará una prueba final en la que se intentará comprobar el grado de consecución de los objetivos y competencias.
6. En algunas de las unidades del curso se propondrá la lectura de algún libro cuya temática este relacionada con la divulgación matemática de alguna manera. Este trabajo será tenido en cuenta en la evaluación aunque no está ponderado.

Ponderación de los instrumentos de evaluación:

Instrumentos 1 y 2 → 10%
Instrumento 4 → 30%
Instrumento 5 → 60% (se exigirá en esta prueba una nota mínima de 4 sobre 10).

Aparte de todo esto también se tendrá en cuenta de forma positiva una evolución favorable del rendimiento del alumno a lo largo del curso.

Todos estos instrumentos de evaluación del proceso de aprendizaje, deben ser a su vez instrumentos de evaluación del proceso de enseñanza. El profesor deberá estar atento a todas las variables que influyen en estos procesos de enseñanza, la programación de aula, el propio papel del profesor, el clima en el aula, etc. También deberá estar el docente al tanto de todos aquellos detalles que le sugieran mejoras en esta U.D., desde luego, esta imprescindible herramienta de trabajo para el docente nunca debe ser considerada cerrada, debe ser susceptible de ser modificada en pro de una mejora de estos procesos de enseñanza.

5. DESARROLLO DE LA U.D.: TRIGONOMETRÍA

Esta U.D. (dirigida a 4º de E.S.O. opción B) está encuadrada en el bloque de geometría, precedida por el tema de Semejanza. Los conocimientos acerca de semejanza sirven de base a la trigonometría, y, también son importantes conceptos geométricos y algebraicos previos, supuestamente adquiridos por los alumnos y las alumnas en cursos o temas anteriores. Por esta razón, como paso previo a la puesta en práctica de estas sesiones se realizará una prueba inicial para poder comprobar si los escolares manejan los conceptos previos necesarios para el correcto desarrollo de la unidad, en el Anexo I presento una propuesta de evaluación inicial.

Presento ahora 8 sesiones de trabajo en clase para el desarrollo del tema. Pretendo cubrir todo el contenido expuesto en el análisis del punto 2.1.2 (estructura conceptual). Aparte de estas sesiones, tal vez fueran necesarias algunas sesiones más en las que completar este proceso de enseñanza-aprendizaje con la realización de más actividades. El título de cada sesión hace referencia al contenido central que aborda. Algunos contenidos como el uso de programas de geometría dinámica tendrán un tratamiento transversal a lo largo de la unidad. En cada una de las sesiones incluyo los contenidos y objetivos a tratar, así como la dinámica de dicha sesión y algunas tareas significativas. La lista de sesiones es la siguiente:

1. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.
2. Relaciones fundamentales. Uso de calculadora.
3. Ángulos en la circunferencia, medida de ángulos en grados y radianes.
4. Razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica.
5. Método de reducción al primer cuadrante. Ecuaciones trigonométricas.
6. Resolución de problemas I.
7. Resolución de problemas II.
8. Actividad con el teodolito casero.

Se presentarán tareas con distintos fines, como pueden ser tareas de motivación, de construcción de significados, de ejercitación o de síntesis. Desde un principio será conveniente presentar problemas contextualizados, con los que el escolar pueda percibir la utilidad de los conocimientos adquiridos.

SESIÓN 1: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

1. **Contenidos y objetivos de la sesión**:

- Conceptos básicos: Razones trigonométricas directas e inversas en triángulos rectángulos.
- Contextos y situaciones: Medida de distancias inaccesibles, situación científica, personal y laboral.
- Sistemas de representación utilizados: Verbal, gráfico, numérico y tabular.
- Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales: Identificar y dibujar distintos tipos de ángulos y triángulos (C, R), identificar elementos de un triángulo rectángulo (C, R), cálculo de razones trigonométricas de un triángulo rectángulo (PR, LS, R), valoración de la utilidad de la practicidad de la trigonometría (PR, AJ, C), uso de la calculadora para el cálculo de razones de un ángulo agudo (R, HT), resolución de triángulos (PR, M, RP, HT).
- Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión: Suponiendo que se ha hecho una evaluación inicial y que los resultados permiten comenzar con el desarrollo de la unidad, esta sesión tiene como objetivo introducir la trigonometría partiendo de los conocimientos previos de los alumnos sobre semejanza. Se realizarán dos tareas enfocadas a la construcción de significados, y se encargará otras tareas de ejercitación para su realización en casa. Se espera de esta sesión que despierte el interés de los escolares hacia la trigonometría, por ello, se realizará una tarea que deje constancia de la utilidad de estas herramientas.

2**. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores**:
Esta es la primera sesión de la unidad, sirve de nexo entre la unidad anterior dedicada a semejanza y esta unidad.

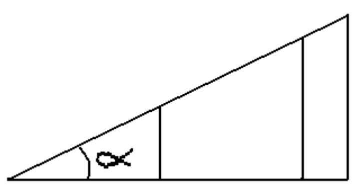
3. **Secuencia de tareas**:

Tarea 1 (Duración aproximada 25')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor comenzará realizando una ronda de preguntas a los alumnos para recordar los conceptos relacionados con semejanza en triángulos rectángulos para después dejar a los alumnos que realicen la tarea siguiente:

Observa la siguiente figura en la que hay tres triángulos rectángulos:



a) Repite el dibujo dando los valores de 30º y 45º al ángulo α.

b) A continuación rellena la tabla siguiente, midiendo en el dibujo los lados de los triángulos y calculando los cocientes que se indican:

α	*Cateto menor*	*Cateto mayor*	*Hipotenusa*	$\frac{cat.mayor}{hipotenusa}$	$\frac{cat.mayor}{hipotenusa}$	$\frac{cat.mayor}{cat.menor}$
20º						
60º						

c) ¿Qué observas? ¿Pasará lo mismo sea cual sea el valor del ángulo? ¿Por qué?
d) ¿Cuál será el resultado de dividir el cateto mayor entre la hipotenusa en otro triángulo rectángulo cualquiera en el que haya un ángulo de 20º?

- Materiales o recursos necesarios: Se requiere transportador de ángulos y regla con escala. También será necesario el uso de calculadora.
- Descripción sobre la gestión del aula: El trabajo se podrá realizar por parejas o pequeños grupos de alumnos. Al final de la actividad el profesor pedirá a dos alumnos que escriban en su pizarra sus respectivas tablas para comparar sus resultados con los del resto de la clase. Después se pondrán en común las respuestas a las cuestiones planteadas.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Con esta actividad se intenta "allanar" el camino para la definición de las razones trigonométricas.

Tarea 2 (Duración aproximada 10')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

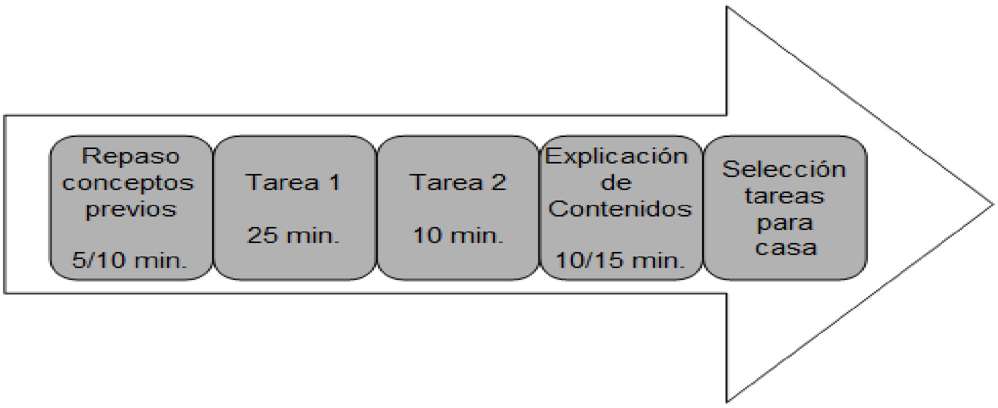
Tras la realización de la tarea 1 se presenta esta tarea en la que los alumnos pueden utilizar los resultados de dicha tarea para acometer estos problemas en los que sin saberlo estarán utilizando las razones trigonométricas para la resolución de triángulos:

a) Un pintor se ha comprado una escalera nueva, y el vendedor le ha recomendado que la use siempre formando un ángulo de 60º con la horizontal. Si la escalera tiene una longitud máxima de 4 m. ¿A qué altura podrá llegar nuestro amigo el pintor con dicha escalera?
b) Unos albañiles están construyendo una rampa para discapacitados que tiene una inclinación de 20º respecto a la horizontal. Si al final de la rampa la altura es de 1,5m, ¿qué longitud tiene la superficie de la rampa?
PISTA: ten en cuenta la tarea anterior.

- Materiales o recursos necesarios: Ninguno específico.
- Descripción sobre la gestión del aula: El profesor dejará unos minutos para que los alumnos piensen como pueden resolver el problema, si algún alumno o alumna lo realiza, saldrá a la pizarra para resolverlo mientras lo explica en voz alta.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La principal intención al proponer esta tarea es hacerle ver al grupo la utilidad de las razones trigonométricas antes de definirlas.

4. Tareas para casa: se le propondrán al alumno problemas contextualizados en los que tenga que usar las tres razones trigonométricas directas, así como la calculadora para calcular para calcularlas. También se mandará alguna tarea de ejercitación en la que tengan que calcular las razones trigonométricas de los ángulos de un triángulo rectángulo conocidos dos de sus lados.

5. Organización de la sesión:



SESIÓN 2: RELACIONES FUNDAMENTALES

1. **Contenidos y objetivos de la sesión**:

- Conceptos básicos: Relaciones fundamentales entre razones de un ángulo, uso de la calculadora.
- Contextos y situaciones: Situación científica.
- Sistemas de representación utilizados: Verbal, gráfico, numérico.
- Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales: Comprender la demostración de las relaciones fundamentales (PR, AJ, C, LS), calcular las razones trigonométricas de un ángulo conociendo una de ellas (PR, LS), calcular las razones trigonométricas de un ángulo usando la calculadora (HT), calcular el ángulo a partir de sus razones trigonométricas (HT).
- Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión: En esta sesión cobra especial importancia el uso de lenguaje simbólico. Considerando que los alumnos y alumnas hacia los cuales está dirigida esta unidad, están cursando la opción B de matemáticas, y que, por lo tanto seguramente en cursos posteriores realicen bachillerato de ciencias, es conveniente que empiecen a trabajar la representación simbólica de las matemáticas.

2**. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores**:
Esta es la segunda sesión de la unidad, tras una primera sesión de introducción a las razones trigonométricas, se presenta esta sesión en la que se trabajará con las relaciones fundamentales y el uso de la calculadora antes de enfrentar la sesión enteramente dedicada a la resolución de triángulos rectángulos.

3. **Secuencia de tareas**:

Tarea 1 (Duración aproximada 25')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Tras la presentación de las relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas de un ángulo, se les planteará la siguiente tarea a los alumnos.

Utiliza las relaciones fundamentales para obtener las razones que faltan en cada caso:

a) $sen\,\theta = \frac{2}{3}$

b) $tg\,\theta = 2,3$

c) $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

d) $sen\,\theta = 1,5$

e) $\cos\theta = 2$

f) $sen\,\theta = 1$

- Materiales o recursos necesarios: Se requiere el uso de calculadora.
- Descripción sobre la gestión del aula: Esta tarea se realizará individualmente y cuando los alumnos y alumnas acaben se le pedirá a dos de ellos que lo resuelvan en la pizarra, haciendo especial hincapié en los últimos apartados y generando un debate acerca del problema encontrado.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención primera es que los alumnos aprendan a manejar con soltura las relaciones fundamentales y sobre todo que tomen conciencia de que el seno y coseno nunca pueden valer más de uno y que cuando uno de ellos vale uno, el otro debe valer cero. También, esperando que los alumnos sólo tomen la raíz positiva al calcular el seno a partir del coseno y viceversa, se les preguntará por qué no es válida la opción negativa.

Tarea 2 (Duración aproximada 10')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

En esta tarea se trata de realizar el ejercicio anterior, esta vez con la calculadora, siguiendo los siguientes pasos:

a) Obtención del valor del ángulo a partir de su razón trigonométrica.

b) Obtención de las demás razones.

- Materiales o recursos necesarios: Se requiere el uso de calculadora.
- Descripción sobre la gestión del aula: Para no perder la atención de los alumnos y alumnas, el profesor pedirá a algún alumno que salga a la pizarra para ir anotando los resultados que los demás alumnos y alumnas, a petición del profesor irán comunicando.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención es que los alumnos cojan soltura en el uso de la calculadora en los cálculos comunes en esta unidad.

4. Tareas para casa: Se le mandará como tarea para casa la actividad nombrada en la sección de recursos, disponible en el blog goniometrica.blogspot.com, en la cual pueden ver como se calcula el valor exacto de las razones trigonométricas de los ángulos de 30º y 60º de forma constructiva, y se pide que se lleve a cabo un proceso similar para calcular las del ángulo de 45º. También se mandarán tareas de ejercitación de la sesión anterior.

5. Organización de la sesión:

SESIÓN 3: ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA, MEDIDA DE ÁNGULOS EN GRADOS Y RADIANES

1. **Contenidos y objetivos de la sesión**:

- <u>Conceptos básicos</u>: Ángulos en la circunferencia goniométrica, grados y radianes.
- <u>Contextos y situaciones</u>: Contexto de medida de ángulos en la circunferencia, situación científica.
- <u>Sistemas de representación utilizados</u>: Verbal, gráfico, numérico, simbólico, tabular.
- <u>Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales</u>: Construcción de ángulos en la circunferencia goniométrica (R), comprensión de la equivalencia en la representación de ángulos que difieren en múltiplos de 360º (PR, AJ, C, R), relacionar arcos de circunferencia y ángulos (PR, R), uso de distintos sistemas para medir ángulos (R), manejo de la regla de conversión entre sistema de medidas (LS), uso de la calculadora en modo DEG y RAD (HT), cálculo gráfico de los ángulos complementario, suplementario, opuesto y aquel que difiere 180º para ángulos agudos(PR, R).
- <u>Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión</u>: Esta sesión está pensada para ser trabajada por entero sobre la circunferencia goniométrica, se espera que el alumno maneje con soltura los dos sistemas de medida para ángulos.

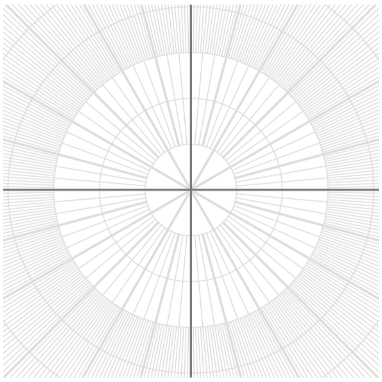
2**. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores**:
Esta tercera sesión de la unidad, prepara al alumno con todo el bagaje técnico necesario para trabajar con soltura los ángulos en la circunferencia goniométrica, lo que debe facilitar el objetivo de la siguiente sesión que es extender el concepto de razones trigonométricas a la circunferencia goniométrica.

3. **Secuencia de tareas**:

Tarea 1 (Duración aproximada 20')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

El profesor proveerá a los alumnos de unas plantillas como la de la imagen en la que no se hace necesario el trabajo con transportador para representar ángulos sobre la circunferencia.



a) Dibuja sobre la circunferencia los ángulos de 15º, 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 285º, 375º y 405º. ¿Qué ocurre con estos dos últimos ángulos?
b) Nombra cuatro ángulos que coincidan al representarlos sobre la circunferencia goniométrica.
c) Dibuja en otra plantilla los ángulos de 15º, 165º, 195º y 345º.
d) Calcula los ángulos suplementario, opuesto de 15º y aquel que difiere con éste 180º. Dibújalos en la circunferencia del apartado anterior, ¿qué sucede?

- Materiales o recursos necesarios: Se requiere el uso de regla.
- Descripción sobre la gestión del aula: Esta tarea se realizará individualmente y cuando acaben los apartados a y c se debatirá acerca de los resultados obtenidos.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención de esta actividad es la de dotar al escolar de la destreza necesaria para representar e interpretar correctamente todo tipo de ángulos sobre la circunferencia.

Tarea 2 (Duración aproximada 10')

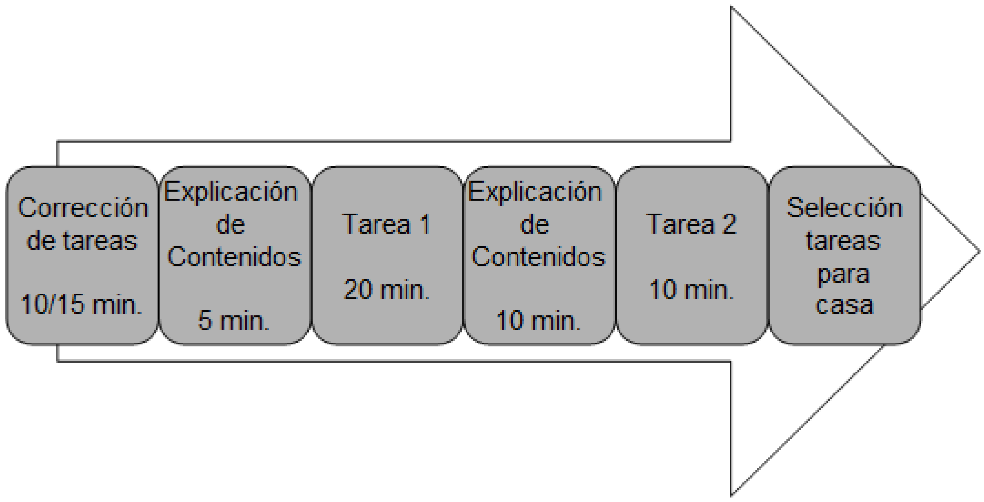
- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:

Tras presentar el concepto de radián, y la regla de conversión, así como el funcionamiento de la calculadora en los dos modos, se realizará esta tarea en la que se pedirá al alumno que rellene una tabla convirtiendo ángulos de grados a radianes, y posteriormente se le pedirá que dibuje en la circunferencia goniométrica los ángulos notables de cada cuadrante etiquetándolos son su valor en radianes.

- Materiales y recursos: plantilla y calculadora.
- Descripción sobre la gestión del aula: El profesor realizará la tabla en la pizarra, e irá pidiendo a distintos alumnos y alumnas que le den los resultados para completarla.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Se intenta que el alumno se familiarice con el sistema de medida en radianes, con el método de conversión y la expresión en radianes de los ángulos notables.

4. Tareas para casa: Se le mandará como tarea para casa otra actividad del blog goniometrica.blogspot.com, la actividad 3, en la que el alumno explora paso a paso la equivalencia entre razones de un ángulo agudo y coordenadas de los puntos de la circunferencia del primer cuadrante, con el objetivo de preparar la siguiente sección. Se pedirá a los alumnos que entreguen esta actividad por escrito para ser tenida en cuenta en la evaluación.

5. Organización de la sesión:



SESIÓN 4: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA GONIOMÉTRICA.

1. **Contenidos y objetivos de la sesión**:

- <u>Conceptos básicos</u>: Razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica.
- <u>Contextos y situaciones</u>: Contexto de medida de ángulos en la circunferencia, situación científica.
- <u>Sistemas de representación utilizados</u>: Verbal, gráfico, tabular.
- <u>Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales:</u> Relación entre las razones de un ángulo agudo y las coordenadas de la circunferencia goniométrica (PR, AJ, C, R, HT), método gráfico para el cálculo estimado de razones trigonométricas de ángulos cualesquiera (PR, R, HT), obtención de la regla de los signos (AJ, C, R),
- <u>Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión</u>: Esta sesión está pensada para ser trabajada de nuevo sobre la circunferencia goniométrica pero combinando este contexto con el de los triángulos rectángulos. También se volverá a utilizar el método de obtención de las razones trigonométricas de un ángulo a partir de la relación fundamental primera, teniendo esta vez en cuenta los dos resultados posibles. Se espera también deducir el método de reducción al primer cuadrante.
-

2**. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores**:
En esta cuarta sesión el alumno ya ha trabajado sobre la circunferencia durante la sesión anterior, lo que debe facilitar el trabajo, y al extender el concepto de razón trigonométrica a ángulos no agudos, se puede dar alguna pincelada de su uso en triángulos oblicuángulos para que motivar al alumno al mostrarle la aplicación de toda esta teoría.

3. **Secuencia de tareas**:

Tarea 1 (Duración aproximada 20')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor: Supuestamente los alumnos han realizado en su casa la actividad en la que tenían una pequeña introducción al concepto de razón trigonométrica en la circunferencia, no obstante, en los primeros minutos de la clase se explicará de nuevo este concepto realizando después la siguiente tarea:

a) Completa la siguiente tabla sin usar la calculadora:

	0º	*90º*	*180º*	*270º*	*360º*
sen					
cos					
tg					

b) Di en qué cuadrante se encuentran los siguientes ángulos e indica el signo de sus razones trigonométricas:

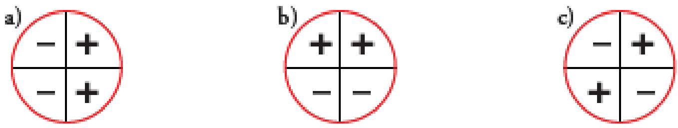
b.1.)128º b.2.)198º b.3.)87º b.4.) 285º b.5.)305º

- Materiales o recursos necesarios: Se volverá a utilizar una circunferencia graduada y regla.
- Descripción sobre la gestión del aula: Esta tarea se realizará individualmente y, mientras los alumnos y alumnas trabajan, el profesor copiara la tabla en la pizarra para luego completarla con los datos dados por los alumnos.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención es conocer las razones trigonométricas de algunos de los ángulos notables e introducir la regla de los signos.

Tarea 2 (Duración aproximada 5')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor: Esta tarea debe resultar sencilla si los conceptos anteriores están bien adquiridos.

En cada uno de estos círculos está indicado el signo de las razones trigonométricas de α, según el cuadrante en el que se encuentra. ¿Cuál corresponde a sen α, cuál a cos α y cuál a tg α?



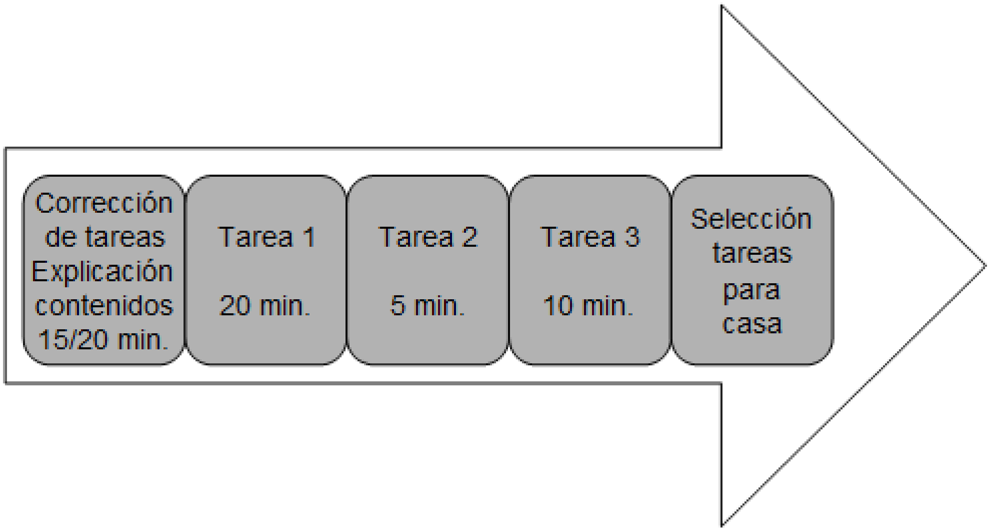
- Materiales y recursos: Ninguno específico.
- Descripción sobre la gestión del aula: El profesor preguntará a algunos alumnos y alumnas las respuestas a cada apartado y las debatirá con el resto.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Se intenta deducir la regla de los signos

Tarea 3 (Duración aproximada 10')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor: La siguiente tarea está destinada a que los alumnos calculen el valor de las razones trigonométricas de distintos ángulos de forma aproximada, a partir de su representación en la circunferencia goniométrica.
- Materiales y recursos: Compás, transportador y regla.
- Descripción sobre la gestión del aula: El profesor agrupará a los alumnos en pequeños grupos.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: Se intenta mostrar el método gráfico para calcular de forma aproximada las razones de ángulos no agudos.

4. Tareas para casa: Se encargará algún ejercicio de ejercitación para que consoliden los conocimientos adquiridos.

5. Organización de la sesión:



SESIÓN 5: MÉTODO DE REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE. ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. **Contenidos y objetivos de la sesión**:
   - Conceptos básicos: Método de reducción al primer cuadrante. Ecuaciones trigonométricas.
   - Contextos y situaciones: Contexto de medida de ángulos en la circunferencia, situación científica.
   - Sistemas de representación utilizados: Verbal, gráfico.
   - Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales: Relacionar cada ángulo con el ángulo agudo con el que comparte, salvo signo, las razones trigonométricas. (PR, AJ, C, R), método gráfico para la resolución de ecuaciones trigonométricas sencillas.

- Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión: Esta sesión hace de cierre de la teoría relacionada con razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica. Se espera que el grupo de clase no tenga problema para asimilar este método ya que se ha trabajado en las sesiones anteriores lo suficiente como para sentar una buena base.
-

2**. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores**:
Esta sesión aprovecha la sesión anterior en la que ya se trabajó con la circunferencia, y hace de cierre de esta serie de sesiones dedicadas a las razones trigonométricas en la circunferencia goniométrica.

3. **Secuencia de tareas**:

Tarea 1 (Duración aproximada 35')

- Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor: Los alumnos y alumnas deberán trabajar de nuevo sobre la circunferencia, bien sobre una plantilla, o construyéndola con compás y ayudándose del transportados de ángulos:

a) Completa la siguiente tabla:

Grados	*30*		*90*		*150*		*210*		*270*		*330*	
Radianes	*π/6*	*π/3*		*2 π/3*		*π*		*4 π/3*		*5 π/3*		*2 π*
sen α	*0,86*											
cos α	*0,5*											

b) ¿Observas similitudes entre las proyecciones de los ángulos de 30º, 150º, 210º y 330º?
c) ¿Se puede observar en la tabla otro conjunto de cuatro ángulos que guarden la misma relación? ¿Cuáles?
d) Dibuja las dos familias por separado en la circunferencia goniométrica y observa el dibujo que forman. Realiza un dibujo similar partiendo del ángulo de 40º.

- Materiales o recursos necesarios: Se volverá a utilizar una circunferencia graduada y regla, ya que el ejercicio conlleva realizar muchos cálculos.
- Descripción sobre la gestión del aula: La primera parte del ejercicio, apartado a), se podrá realizar en grupos de 3 o 4 alumnos o alumnas que se repartirán el trabajo, tras la realización de este apartado se hará una puesta en común de los resultados para que todos puedan avanzar a la vez. El apartado c se discutirá entre profesor y grupo clase. El profesor dará un tiempo para realizar el siguiente apartado para después volver a debatir sobre los resultados.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad: La intención es deducir el método de reducción al primer cuadrante de una forma natural.

Tarea 2 (Duración aproximada 15')

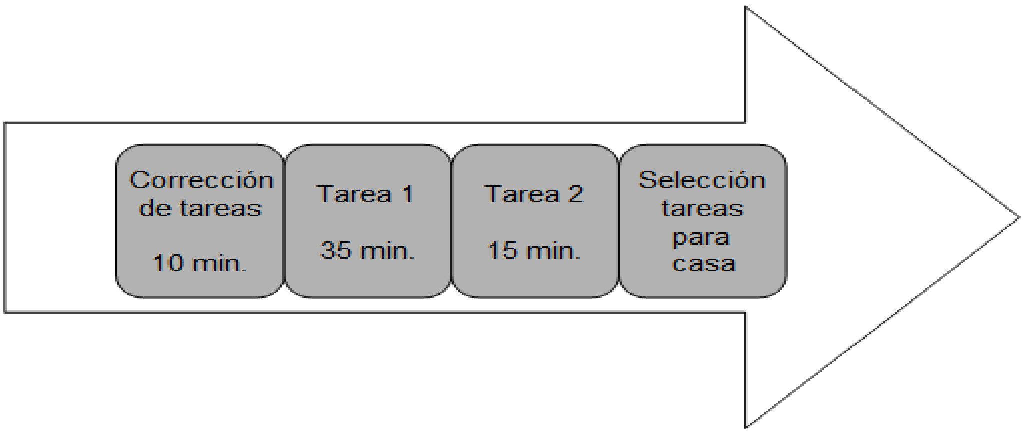
<u>Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor</u>: En esta tarea, los alumnos resolverán ecuaciones sencillas del tipo *sen* $\alpha=1/2$, siguiendo el siguiente método:

a) Marca el punto ½ en el eje y (correspondiente al seno).
b) Levanta una perpendicular en dicho punto que corte a la circunferencia en dos puntos.
c) Traza los dos ángulos que definen dichos puntos, estos ángulos son los que buscamos.

- <u>Materiales y recursos</u>: compás y regla, o circunferencia graduada y regla.
- <u>Descripción sobre la gestión del aula</u>: El profesor realizará un ejemplo, y los alumnos después se ejercitarán con algunos más.
- <u>Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad</u>: Se intenta que los alumnos encadenen procesos un poco más complejos, construyendo gráficamente la solución de una ecuación trigonométrica.

4. Tareas para casa: Se encargará algunas tareas para que ejerciten el método de reducción al primer cuadrante, y algún problema de resolución de triángulos rectángulos, para, con su corrección en la sesión siguiente introducir los contenidos del día.

5. Organización de la sesión:



SESIONES 6 Y 7: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS I Y II

1. **Contenidos y objetivos de la sesión**:
 - Conceptos básicos: Resolución de problemas, resolución de triángulos cualesquiera.
 - Contextos y situaciones: Contexto de resolución de triángulos, y todas las situaciones.
 - Sistemas de representación utilizados: Verbal, gráfico, simbólico.
 - Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales: Resolución de triángulos cualesquiera con el uso de los distintos resultados y procedimientos: teorema de los senos y del coseno, estrategia de la altura (PR, AJ, C, M, RP, R, LS, HT). Uso de la fórmula del área para un triángulo cualquiera (LS)
 - Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión: Estas dos sesiones tienen por objetivo acercar toda la teoría vista en el tema al mundo real, por medio de problemas contextualizados, con los que se intente despertar el interés de los alumnos. Estas sesiones harán hincapié en el desarrollo de las competencias de Modelizar y Resolver Problemas. Se presentarán problemas asociados a distintas situaciones en los que el alumno tendrá que poner en juego diversas estrategias. En la primera sesión se les realizará un ejemplo que se resuelva con la estrategia de la altura y otro con la estrategia de la "doble medición", para seguir después realizando más problemas del mismo tipo. En la segunda sesión se introducirán los teoremas de los senos y del coseno, junto con la fórmula del área. En ambas sesiones el profesor realizará algunos ejemplos en los que explicará como Modelizar correctamente, paso a paso un problema: diseño del esquema donde se recojan los datos y disquisición acerca de la estrategia más conveniente para abordarlo. Esto se hará para intentar inculcar un método riguroso en los alumnos que les facilite la resolución de estos problemas. Se insistirá en ejercicios de "doble medida" ya que este método será puesto en práctica en la siguiente sección. Se pueden consultar ejemplos interesantes de tareas para realizar en M. Piñeiro et ál. (1998), y en los libros de textos nombrados en la bibliografía.

2**. Enmarque de la sesión en relación con las anteriores y posteriores**:
Esta sesión está sobre todo relacionada con las primeras sesiones en las que se trabajó con triángulos rectángulos. En estas sesiones el alumno debe adquirir las destrezas suficientes para enfrentar un trabajo por grupos en la siguiente sesión, de puesta en práctica de los conocimientos adquiridos.

3. Tareas para casa: Se encargarán tareas para que ejerciten las distintas estrategias de resolución de problemas. Además de estas tareas se les encargará que construyan su propio teodolito, con las sencillas instrucciones que describí en la sección dedicada a materiales, dentro del análisis de instrucción.

SESIÓN 8: PRÁCTICAS CON TEODOLITO

- Conceptos básicos: Resolución de problemas.
- Contextos y situaciones: Trigonometría sobre triángulos y situación personal.
- Sistemas de representación: Gráfico, numérico y tabular.
- Capacidades a desarrollar y relación con las competencias generales: En esta sesión, se pretende poner realmente en práctica parte de los aprendizajes adquiridos en toda la U.D. La sesión estará centrada en el cálculo de distancias inaccesibles por medio de la resolución de triángulos rectángulos y el método de "doble medición" (PR, C, M, RP, R, HT).
- Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión: Se intenta con esta sesión que el alumno valore de forma positiva las matemáticas al poder utilizarlas fuera del aula, en problemas tipo, que bien se pueden encontrar en múltiples situaciones. Es de esperar que el alumno después de esta experiencia cambie, a mejor, su visión hacia las matemáticas, lo que, en el caso de suceder, facilitaría una disposición favorable en el futuro hacia éstas.
- Descripción de la intervención del alumno y/o profesor:

El esquema de trabajo podría ser el siguiente:

1. Esta sesión de clase se realizaría al aire libre, bien en el patio del colegio, un parque, una zona monumental, etc. El único requisito es que sea un espacio abierto en el que haya muchas distancias "que medir".
2. Se formarán grupos de cuatro, en los que, cada alumno y alumna deberían tener su propio teodolito casero. En caso de no disponer de suficientes cintas métricas, los distintos grupos deberán organizarse para repartirse las que estuvieran disponibles en tiempos iguales.
3. Se fijarán en el lugar de realización de las prácticas unos cuantos objetivos, puntos inaccesibles, alrededor de 10 puntos.
4. Cada grupo se organizará de manera que tengan al menos dos mediciones (dobles) independientes para cada objetivo. La organización del equipo deberá trabajar con un cuaderno de campo en el que realizarán las notas pertinentes.
5. El trabajo lo deberán continuar los grupos en horario no lectivo. Este trabajo constará de un dossier en el que deberán adjuntar todas las medidas bien organizadas, y la doble resolución del cálculo de las distancias a cada uno de los objetivos, con un esquema gráfico aclaratorio.
6. Pasadas una o dos semanas de clase, cada grupo expondría durante cinco minutos la resolución de uno de los problemas al resto de la clase. Un componente del grupo sería el portavoz encargado de defender el trabajo, en el momento de la defensa se elegiría por sorteo que miembro del grupo haces las veces de portavoz.
7. Se evaluará la actitud positiva hacia el trabajo en equipo, el cuaderno de campo, el dossier final y la presentación.

- Materiales y recursos: Teodolito y cinta métrica.

6. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Los procesos de enseñanza deben adaptarse a cada alumno, atendiendo en la mayor medida posible a sus capacidades individuales. Es por ello que el docente debe realizar un seguimiento lo más individualizado posible de cada alumno para detectar alumnos o alumnas que tengan problemas para seguir el normal desarrollo de la unidad, así como para detectar alumnos que tengan altas capacidades y puedan (y quieran) profundizar en la materia. Todas estas medidas de flexibilización están supeditadas a la adquisición de los contenidos mínimos, consecución de los objetivos y al logro de las competencias.
Se hace entonces necesario tener preparadas una serie de actividades de refuerzo y de ampliación con las que poder atender los alumnos que lo requieran.

TAREAS DE REFUERZO

Las tareas de refuerzo no deben sustituir en ningún caso a las tareas propias del normal desarrollo de la unidad, serán en todo caso actividades complementarias que ayuden al alumno que tiene dificultades a conseguir alcanzar el ritmo de clase.
Estas tareas deberían ir enfocadas a reforzar los contenidos mínimos expuestos en el Real Decreto de enseñanzas mínimas. Serán preferiblemente tareas de ejercitación dedicadas a la práctica con la resolución de triángulos rectángulos y su aplicación en la resolución de problemas.

TAREAS DE AMPLIACIÓN

En el caso en el que hubiera algún alumno que mostrara excesiva facilidad en el desarrollo de la unidad, se podría sugerir trabajar con unas tareas de dificultad mayor o que traten contenidos no considerados en esta unidad pero que se extienden fácilmente desde los contenidos propios de dicha unidad. Estas tareas estarían orientadas a intentar desarrollar las capacidades del alumno al máximo, pero sin que esto pudiera ocasionar perjuicio alguno al mismo.
Los contenidos que se podrían tratar podrían ser la resolución de ecuaciones trigonométricas algebraicamente, la demostración de igualdades utilizando las relaciones fundamentales, ángulos de la suma y diferencia, ángulo doble y mitad, o construcción de la función seno.

En todo caso, las medidas de apoyo a la diversidad deben ser consensuadas por todos los intereesados, desde el mismo alumno o alumna hasta la familia, que siempre debe estar informada de este tipo de medidas. Aparte de la familia y el interesado, los equipos de orientación pedagógica ayudarán a tomar las medidas oportunas en cada caso.

7. BIBLIOGRAFÍA

LIBROS

MARIANO ESTEBAN PIÑEIRO, MARCELINO IBAÑES JALÓN, TOMÁS ORTEGA DEL RINCÓN, *TRIGONOMETRÍA*. Ed. Síntesis, Madrid 1998.

KLINE Morris, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I.*, Alianza Editorial, Madrid, 1992.

BOYER, Carl B., *Historia de la matemática*. Alianza Editorial, Madrid, 2003.

RICO, Luis, *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Ed. Génesis, Madrid, 1997

ARTÍCULOS

RICO, Luis, *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. PNA, 4(1) ,1-14.

RICO, Luis et ál., *Planificación de las Matemáticas Escolares en Secundaria. El caso de los Números Naturales.* Revista Suma, Junio 2008, pp. 1-16.

PÁGINAS Web

goniometrica.blogspot.com
descartes.cnice.mec.es
es.wikipedia.org