



TRABAJO FIN DE MÁSTER:

Comprensión de la solución de sistemas de ecuaciones lineales por alumnos de 2º ESO

Máster Universitario de Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA

ALUMNA: Mireia Moll Garriga
SUPERVISOR: Luis Rico Romero
Curso 2010/2011





Universidad de Granada

COMPRENSIÓN DE LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR ALUMNOS DE 2º ESO

Memoria de TRABAJO FIN DE MÁSTER realizada bajo la tutela del Catedrático D. Luis Rico Romero del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Mireia Moll Garriga, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo.: Mireia Moll Garriga

Vº Bº del tutor

Fdo.: Luis Rico Romero

Índice:

	Pág.
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	4
1.1. INTRODUCCIÓN.....	4
1.2. OBJETIVO DEL ESTUDIO.....	5
2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.....	6
2.1. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO.....	6
2.1.1. COMPETENCIAS A ADQUIRIR POR LOS PROFESORES EN FORMACIÓN.....	6
2.1.2. LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN EL CURRÍCULO DE LA ESO.....	7
2.1.3. INVESTIGACIÓN EDUCATIVA.....	10
2.2. ANÁLISIS DE CONTENIDO.....	11
2.2.1. ESTRUCTURA CONCEPTUAL.....	12
2.2.2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.....	16
2.2.3. ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO.....	18
3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN.....	20
3.1. CONTEXTO.....	20
3.2. INTERVENCIÓN EDUCATIVA.....	20
3.3. METODOLOGÍA.....	22
3.4. RECOGIDA DE DATOS Y DISEÑO DEL CUESTIONARIO.....	24
4. ANÁLISIS DE LOS DATOS.....	28
4.1. PROCESO DE ANÁLISIS.....	28
4.2. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 1.....	31
4.3. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 2.....	35
4.4. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 3.....	39
5. CONCLUSIONES.....	43
5.1. OBTENCIÓN DE CONCLUSIONES.....	43
5.2. VERIFICACIÓN DE LAS CONCLUSIONES.....	45
6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	47
7. ANEXO.....	48



1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. INTRODUCCIÓN

El álgebra plantea numerosas dificultades a los alumnos de educación secundaria, entre ellas, la traducción del lenguaje ordinario al lenguaje algebraico, dificultades conceptuales e interpretativas de las ecuaciones y los sistemas, las destrezas algebraicas o la relación que existe entre los símbolos y lo que representan.

La dificultad de esta materia unida a su enorme utilidad, hacen del álgebra algo muy atractivo desde el punto de vista del profesional docente, que debe asumir como un reto el salto que deber dar los alumnos desde la aritmética hasta este nuevo lenguaje que les lleva a multiplicar sus posibilidades.

Los sistemas de ecuaciones lineales permiten a los alumnos enfrentarse a una gama más amplia de problemas, en diferentes contextos, relacionados con multitud de situaciones; pero para que este aumento en la capacidad de resolver problemas sea efectivo, se requiere que los alumnos entiendan qué es un sistema de ecuaciones lineales y qué significa su solución.

El uso y significado de las letras, el concepto de variable, el significado de los signos en una operación, la ambigüedad en los convenios de notación (entre números o entre números y letras), etc., dificultan el aprendizaje del álgebra y, por lo tanto, la comprensión de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

En mi corta experiencia, durante el período de prácticas, he podido constatar que para la mayoría de los alumnos, la solución de un sistema de ecuaciones es sencillamente un resultado al que llegan tras haber aplicado algún método analítico pero no unos números que, finalmente, sustituidos en el lugar de las letras, deben satisfacer las dos ecuaciones. Se pierde fácilmente el significado de lo que se está haciendo. Resolver el sistema es una idea que tienen bastante clara, aunque ésta no parece estar conectada con el hecho de que eso signifique hallar su solución ni lo que la solución en sí representa.

Este estudio consiste en una breve investigación educativa acerca de lo que los estudiantes de 2º ESO entienden por solución de un sistema de ecuaciones lineales, y consta de cuatro partes. En la primera de ellas, llamada fundamentación teórica, se hace una justificación de este estudio desde el punto de vista de las competencias a adquirir por los profesores de secundaria en formación, desde los contenidos del currículo de la ESO y desde lo que tiene que decir la investigación educativa acerca de la importancia del álgebra en la educación secundaria; por otra parte, se procede al análisis de contenido del tema “Sistemas de ecuaciones lineales”, análisis necesario para este trabajo puesto que ha sido la base que se ha seguido para la realización del cuestionario. La segunda parte trata del diseño de la investigación: metodología seguida, recogida de datos, diseño del cuestionario... La tercera parte muestra el proceso seguido para el análisis de los datos, así como el análisis de las respuestas a las tres preguntas incluidas

en el cuestionario. Finalmente, no podían faltar las conclusiones, donde se narran los resultados más relevantes y se procede a la interpretación de los mismos, tratando de recoger los conocimientos adquiridos a lo largo de la investigación en relación al problema estudiado.

1.2. OBJETIVO DEL ESTUDIO

La principal finalidad de este trabajo es describir las ideas, imágenes, conceptos y modos de proceder que tienen los alumnos de 2º ESO acerca de la solución de un sistema de ecuaciones lineales tras haber estudiado el tema. Para ello, se han seguido los siguientes pasos:

- Intervención educativa durante aproximadamente un mes, con un total de 10 sesiones. Durante dicho período se les explicó a los alumnos el tema de “Sistemas de ecuaciones lineales”.
- Elaboración de tres tareas centradas en el objetivo específico “comprensión de la solución de un sistema de ecuaciones lineales” y que se incluyeron en el examen que los alumnos realizaron durante la penúltima sesión del tema (la última fue para la corrección del mismo).
- Categorización de los diferentes significados, desde un punto de vista conceptual o procedimental, según el caso, de las respuestas que los alumnos de 2º ESO proporcionaron tras haber estudiado el tema “Sistemas de ecuaciones lineales”.
- Disposición de los datos y análisis de los resultados obtenidos para cada una de las preguntas.
- Extracción de conclusiones.

De acuerdo con la finalidad y contexto mencionados, el objetivo de este estudio es averiguar **qué entienden los alumnos por solución de un sistema de ecuaciones lineales a partir de cómo la verbalizan, cómo la interpretan, cómo la representan y cómo la discriminan, aplican y controlan.**

Las cuestiones planteadas buscan hacer un “barrido” del análisis de contenido del tema –estructura conceptual, representaciones y fenomenología- aunque centrado en este caso en un objetivo específico: comprensión de la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Y es que, hay diferentes significados para un mismo concepto matemático, que vienen dados por las estructuras conceptuales que lo refieren, por los sistemas de símbolos que lo representan, y por los objetos y fenómenos de los que surge y que le dan sentido (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

2.1.1. COMPETENCIAS A ADQUIRIR POR LOS PROFESORES EN FORMACIÓN

Según la **ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas**, algunas de las competencias que los estudiantes debemos adquirir durante el estudio de este máster de formación de profesorado son:

1. Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. (...)

2. Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.

3. Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.

Por otra parte, en el apartado 1 del artículo 10, Enseñanzas de Máster, del **Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales**, se pone de manifiesto que *“Las enseñanzas de Máster tienen como finalidad la adquisición por el estudiante de una formación avanzada, de carácter especializado o multidisciplinar, orientada a la especialización académica o profesional, o bien a **promover la iniciación en tareas investigadoras.**”*

Esta breve investigación educativa que se presenta pretende, en mayor o menor medida, poner de manifiesto el desarrollo de las competencias mencionadas. Para ello se ha llevado a cabo, respectivamente:

- Un estudio de la información que aportan diferentes normativas españolas acerca del currículo de Educación Secundaria Obligatoria, centrado en el bloque de álgebra, y asimismo de varios libros de texto.

- Un análisis de contenido del tema “Sistemas de ecuaciones lineales”, necesario para el análisis cognitivo y análisis de instrucción posteriores, y que contribuye a la competencia de planificación.
- Una breve intervención educativa, durante el período de prácticas, intentando conectarla con el bloque teórico y finalmente,
- La investigación en sí, modalidad escogida para este Trabajo Fin de Máster, que pretende, de una manera muy sucinta dadas las limitaciones de este estudio, el procesamiento de la información recogida, su estudio, la detección de los errores y dificultades frecuentes de los alumnos (relacionados, en este caso, con la comprensión de la solución de sistemas de ecuaciones lineales) y la transformación de esta información en conocimiento que permita su aplicación futura en los procesos de enseñanza-aprendizaje de este tema.

2.1.2. LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN EL CURRÍCULO DE LA ESO

En el anexo II del **Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria**, podemos encontrar las materias que se impartirán en cada curso de esta etapa educativa. Uno de los apartados hace referencia, obviamente, a las matemáticas, incluyendo un bloque de contenidos comunes para cada curso, que constituye el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca. Dicho bloque hace referencia expresa, entre otros, a un tema básico del currículo: la resolución de problemas.

El RD apunta a que, desde un punto de vista formativo, *la resolución de problemas es capaz de activar las capacidades básicas del individuo, como son leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo, revisarlo, adaptarlo, generar hipótesis, verificar el ámbito de validez de la solución, etc. pues no en vano es el centro sobre el que gravita la actividad matemática en general.* También se introducen en este bloque la capacidad de expresar verbalmente los procesos que se siguen y la confianza en las propias capacidades para interpretar, valorar y tomar decisiones sobre situaciones que incluyen soporte matemático, poniendo de relieve la importancia de los factores afectivos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

El resto de los contenidos se distribuyen en cinco bloques: Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas, y Estadística y probabilidad.

La citada norma pone de manifiesto que *las destrezas algebraicas se desarrollan a través de un aumento progresivo en el uso y manejo de símbolos y expresiones desde el primer año de secundaria al último, poniendo especial atención en la lectura, simbolización y planteamiento que se realiza a partir del enunciado de cada problema.* Además, para la organización de los contenidos de álgebra se ha tenido en cuenta que su estudio resulta, con demasiada frecuencia, difícil a muchos alumnos. *La construcción*

del conocimiento algebraico ha de partir de la representación y transformación de cantidades. El trabajo con patrones y relaciones, la simbolización y la traducción entre lenguajes son fundamentales en los primeros cursos.

A pesar de que el tema “Sistemas de ecuaciones lineales” aparece en algunos libros de texto de 2º ESO y, de hecho, es el tema que durante el período de prácticas he impartido a los alumnos de este curso, lo cierto es que según este RD es un tema que pertenece al tercer curso, apareciendo entre los contenidos del bloque de álgebra:

- *Análisis de sucesiones numéricas. Progresiones aritméticas y geométricas.*
- *Sucesiones recurrentes. Las progresiones como sucesiones recurrentes.*
- *Curiosidad e interés por investigar las regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números.*
- *Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico.*
- *Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables.*
- *Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita.*
- ***Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.***
- *Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.*

Además, entre los criterios de evaluación se hallan los siguientes:

2. Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado y observar regularidades en secuencias numéricas obtenidas de situaciones reales mediante la obtención de la ley de formación y la fórmula correspondiente, en casos sencillos.

A través de este criterio, se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno para transformarla en una expresión algebraica. En lo referente al tratamiento de pautas numéricas, se valora si se está capacitado para analizar regularidades y obtener expresiones simbólicas, incluyendo formas iterativas y recursivas.

3. Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales para resolver problemas que puedan ser traducidos previamente a ecuaciones y sistemas. La resolución algebraica no se plantea como el único método de resolución y se combina también con otros métodos numéricos y gráficos, mediante el uso adecuado de los recursos tecnológicos.

Aunque en el tercer curso no aparezca explícitamente, entre los contenidos o entre los criterios de evaluación, el objetivo “comprensión de la solución de sistemas de

ecuaciones lineales”, sí que se puede apreciar entre los contenidos del bloque de álgebra del 2º curso, y ya que este tema se ha impartido en 2º, se justifica la elección de esta línea de investigación:

- *El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades.*
- *Obtención del valor numérico de una expresión algebraica.*
- **Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación.**
- *Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. **Interpretación de la solución.***
- *Utilización de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.*

Criterios de evaluación

3. *Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.*

*Se pretende comprobar la capacidad de utilizar el lenguaje algebraico para generalizar propiedades sencillas y simbolizar relaciones, así como plantear ecuaciones de primer grado para resolverlas por métodos algebraicos y también por métodos de ensayo y error. Se pretende evaluar, también, la capacidad para poner en práctica estrategias personales como alternativa al álgebra a la hora de plantear y resolver los problemas. Asimismo, se **ha de procurar valorar la coherencia de los resultados.***

7. *Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la **comprobación de la coherencia de la solución obtenida**, y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.*

*Con este criterio se valora la forma de enfrentarse a tareas de resolución de problemas para los que no se dispone de un procedimiento estándar que permita obtener la solución. **Se evalúa desde la comprensión del enunciado a partir del análisis de cada una de las partes del texto y la identificación de los aspectos más relevantes, hasta la aplicación de estrategias de resolución, así como el hábito y la destreza necesarias para comprobar la corrección de la solución y su coherencia con el problema planteado.** Se trata de evaluar, asimismo, la perseverancia en la búsqueda de soluciones y la confianza en la propia capacidad para lograrlo y valorar la capacidad de transmitir con un lenguaje suficientemente preciso, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros. También se pretende valorar su actitud positiva para realizar esta actividad de contraste.*

Por otra parte, parece razonable pensar que la comprensión de la solución de sistemas de ecuaciones lineales contribuye a la adquisición de la competencia

matemática, definida en el anexo I de este RD como *“la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.”* Y es que, la comprensión de la solución es una parte fundamental en la resolución de problemas y ésta a su vez lo es de la competencia matemática, ya que la misma implica, entre otras cosas, *el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana y la puesta en práctica de **procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas** o a la obtención de información. Estos procesos permiten aplicar esa información a una mayor variedad de situaciones y contextos, seguir cadenas argumentales identificando las ideas fundamentales, y estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones.*

Por lo tanto, a mi juicio, se deduce que valorar el grado de coherencia de los resultados obtenidos (estimar y enjuiciar la lógica y validez de una información), comprender la solución a un problema (obtenida como resultado de una ecuación o de un sistema de ecuaciones), permite, entre otras cosas, su aplicación posterior a otras situaciones y con ello se contribuye a la adquisición de la competencia matemática.

2.1.3. INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Una vez justificado este estudio desde el punto de vista de las competencias a adquirir por los profesores de secundaria en formación y desde los contenidos del currículo de la ESO, el tercer marco de justificación es el que propone la investigación educativa acerca de la importancia del álgebra en la educación secundaria. Son numerosos los autores que han investigado este tema, entre ellos, Socas (1998):

“El álgebra escolar es considerada como una de las partes de la matemática que influye considerablemente en el aspecto formativo, por la potencia y simplicidad de sus registros formales y por sus métodos, pero su aprendizaje genera muchas dificultades a los alumnos y estas dificultades son de naturaleza diferente, y tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas y emocionales hacia el álgebra.”

La enseñanza y el aprendizaje del álgebra deben atender equilibradamente a distintos objetivos educativos (Fernández, 1997):

a) Establecimiento de destrezas cognitivas de carácter general, susceptibles de utilizarse en una amplia gama de casos particulares y que contribuyan, por sí mismas, a la potenciación de las capacidades cognitivas de los estudiantes.

- b) La aplicación funcional, que posibilite a los estudiantes valorar y aplicar sus conocimientos algebraicos fuera del ámbito escolar, en situaciones de la vida cotidiana.
- c) La valoración instrumental, creciente a medida que el estudiante progresa hacia tramos superiores de la educación, y en la medida en que el Álgebra proporciona formalización al conocimiento humano riguroso y, en particular, herramientas para la simbolización y acceso al lenguaje científico.

La resolución de problemas y, por tanto, la resolución de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones, es uno de los puntos centrales de la educación matemática, como se ha podido observar en el apartado anterior, y los alumnos necesitan de una serie de estrategias básicas para llevarla a cabo: usar tablas, diagramas, fórmulas, detectar los datos facilitados y los que deben buscar, traducir el lenguaje ordinario al simbólico, probar posibles soluciones que satisfagan el problema... El álgebra es una potente herramienta que permite cimentar en los alumnos procedimientos formales, generales, en la resolución de problemas, acabando con las limitaciones de los procedimientos informales o de búsqueda experimental, como la descomposición (propia de la aritmética) o la estrategia de ensayo y error. La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas dentro de las matemáticas escolares; de hecho, este paso se produjo de manera natural en la historia, principalmente por la necesidad de tener un mecanismo potente para resolver problemas que no podían solucionarse a través de la aritmética ni de la geometría.

2.2. ANÁLISIS DE CONTENIDO

Utilizando la definición de Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008):

“El Análisis de Contenido es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares. El Análisis de Contenido es parte del Análisis Didáctico, que configura un conjunto de procedimientos necesarios para llevar a cabo el diseño y la planificación de unidades didácticas. Mediante este Análisis se desarrollan las capacidades del profesor de matemáticas para establecer diversos significados de los temas matemáticos escolares, que son conocimientos necesarios para marcar expectativas sobre el aprendizaje de los alumnos y para delimitar y diseñar tareas basadas en la concreción de unas demandas cognitivas. Es decir, el Análisis de Contenido contribuye al desarrollo de capacidades profesionales para la enseñanza vinculadas con la competencia de planificación.”

Mediante el análisis de contenido se lleva a cabo una descripción estructurada de los diferentes significados de los conceptos y procedimientos de un tema, desde la perspectiva de su estructura conceptual, sus sistemas de representación, y su análisis fenomenológico, los principales componentes de dicho análisis.

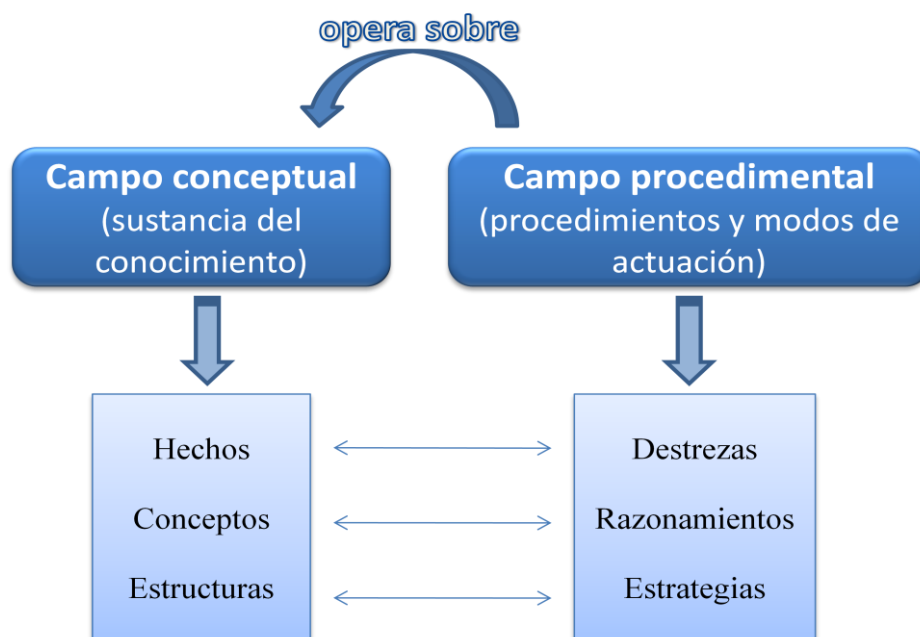
2.2.1. ESTRUCTURA CONCEPTUAL

La estructura conceptual trata de dar respuesta a cuáles son los conceptos que caracterizan el tema, qué procedimientos se pueden establecer entre esos conceptos, cómo se relacionan esos conceptos entre sí, cómo se relacionan esos procedimientos entre sí y cómo se relacionan entre ambos.

Este organizador del currículo dentro del análisis de contenido puede, por tanto, dividirse en dos grandes bloques: el campo conceptual y el procedimental; a su vez, ambos campos admiten tres niveles de complejidad, que ordenados de menor a mayor son:

- Campo conceptual → hechos, conceptos y estructuras.
- Campo procedimental → destrezas, razonamientos y estrategias.

Por otra parte, se pueden diferenciar cuatro categorías dentro de los hechos: términos, notaciones, convenios y resultados.



- **Campo conceptual**

- a) **Hechos**

- **Términos**

Monomio, polinomio (parte literal, coeficiente, incógnita, grado), semejanza, expresión algebraica, valor numérico.

Ecuación lineal (incógnita, coeficiente, miembro, solución, equivalencia, incompatibilidad).

Sistema de ecuaciones lineales (incógnitas, coeficientes, miembros, solución, compatibilidad, incompatibilidad).

Representación gráfica (tabla de valores, ejes cartesianos, recta, intersección...).

- **Notaciones**

Ecuación lineal $\rightarrow ax + by = c$

Sistema de ecuaciones lineales $\rightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Par de valores $\rightarrow (x, y)$

Operaciones aritméticas $\rightarrow \{+, -, \cdot, : \}$

Igualdad $\rightarrow \{=\}$

Equivalencia $\rightarrow \{\sim\}$

Coeficientes $\rightarrow \{a, b, c, \dots\}$

Incógnitas $\rightarrow \{x, y, z, \dots\}$

- **Convenios**

$ax + by = c$, es la forma general de una ecuación lineal

Se excluye el símbolo de producto aritmético para no confundirlo con la incógnita x .

La expresión ax se lee “a equis” y no “a por equis”.

La suma de monomios no semejantes se deja indicada y se obtienen polinomios.

Los monomios semejantes se suman dejando la misma parte literal y sumando los coeficientes.

- **Resultados**

Regla de la suma: “Si a una ecuación o sistema le sumamos o restamos el mismo número a los dos miembros, la ecuación o sistema resultante es equivalente al original”.

Regla del producto: “Si una ecuación o sistema la multiplicamos o dividimos por un número distinto de cero, la ecuación o sistema resultante es equivalente al original”.

Resultados de los que se deducen el método de sustitución, igualación y reducción.

b) Conceptos

Valor numérico de una expresión algebraica, operaciones con expresiones algebraicas.

Ecuaciones equivalentes, sistemas equivalentes, combinación lineal, sistema compatible determinado, sistema compatible indeterminado, sistema incompatible.

Métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales: método numérico (o por tanteo), método de sustitución, método de igualación, método de reducción, método gráfico.

c) Estructuras

$(P(X), +, \cdot)$ anillo conmutativo

• **Campo procedimental**

a) Destrezas

Escritura y lectura de expresiones algebraicas, ecuaciones y sistemas.

Operaciones combinadas con monomios y polinomios.

Simplificación en operaciones con expresiones algebraicas.

Resolución de ecuaciones lineales y de sistemas de ecuaciones sencillos por tanteo.

Representación gráfica de una ecuación lineal y de un sistema de ecuaciones lineales.

Traducción al lenguaje algebraico de enunciados sencillos.

b) Razonamientos

Deductivo: propiedades de las operaciones con monomios y polinomios. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Figurativo: uso de tablas y representaciones gráficas.

Estrategia de ensayo y error: por ejemplo mediante la manipulación de balanzas en programas informáticos.

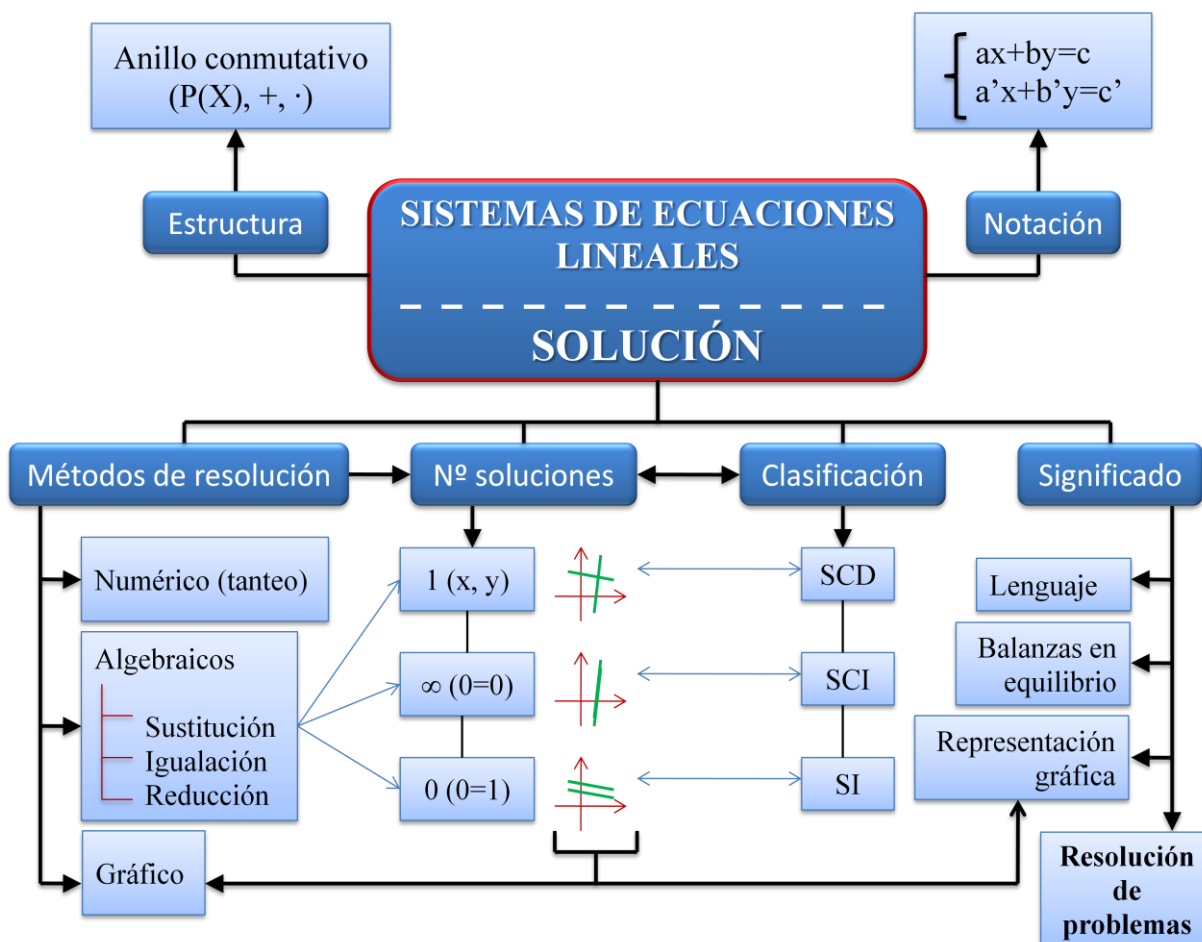
c) **Estrategias**

Cálculo mental.

Resolución de sistemas complejos a través de los métodos de sustitución, igualación, reducción y gráfico.

Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales (traducción al lenguaje algebraico de enunciados complejos).

Se presenta a continuación un mapa conceptual, centrado en la noción de solución, en el que están representados los principales conceptos relacionados con la misma así como las relaciones entre ellos:



2.2.2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Con los sistemas de representación se trata de dar respuesta a las posibles formas de representar los elementos de un tema así como las relaciones entre ellas. Representar implica hacer presente un concepto, objeto o idea.

Cada sistema de representación pone de manifiesto y destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa; también permite entender y trabajar algunas de sus propiedades (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

Se van a abordar cinco tipos de representaciones de los sistemas de ecuaciones lineales: simbólica, verbal, manipulativa, gráfica y tabular.

- **Representación simbólica**

Se trata de una combinación de letras y números agrupados en un par de igualdades:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

siendo a , b , c , a' , b' y c' valores conocidos (números) y x e y valores desconocidos o incógnitas. La parte que está a la izquierda de cada igualdad se denomina primer miembro de la ecuación y la parte de la derecha, segundo miembro. A cada par de valores (x, y) que verifique simultáneamente las dos igualdades se le llamará solución del sistema de ecuaciones lineales.

- **Representación verbal**

Se trata de expresar un sistema de ecuaciones lineales por medio del lenguaje oral o escrito:

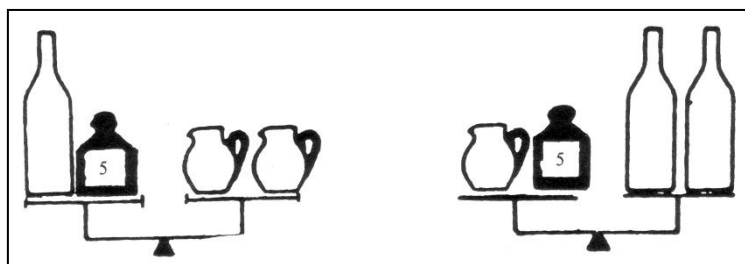
“En el zoo, entre búfalos y avestruces hay 12 cabezas y 34 patas. ¿Cuántos búfalos son? ¿Y cuántas avestruces?”

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 12 \\ 4x + 2y = 34 \end{cases}$$

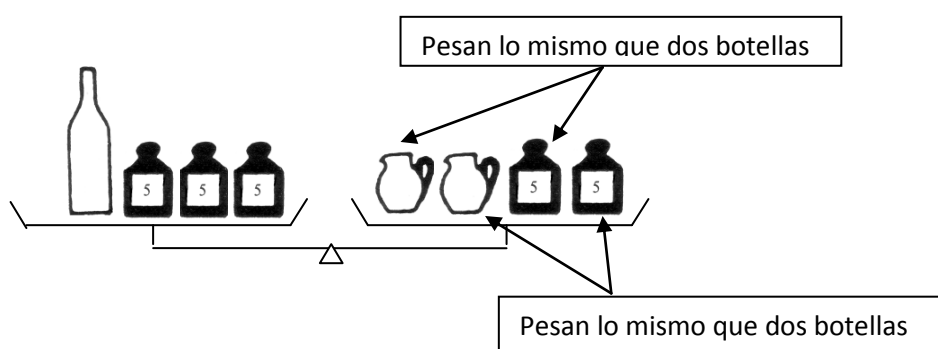
- **Representación manipulativa**

Un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse a través de objetos que se puedan manipular, por ejemplo, un par de balanzas, donde el contenido de cada uno de los platillos sería un miembro de una ecuación y los pesos desconocidos serían las incógnitas. El sistema puede resolverse manipulando los contenidos de los platillos de manera que las balanzas sigan estando en equilibrio.

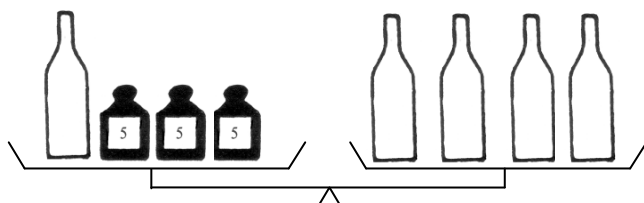
Las balanzas que a continuación se presentan están en equilibrio. En cada una de ellas hay botellas y jarras. También hay pesos, cuyos números indican hectogramos. Podemos adivinar cuánto pesa cada botella y cuánto cada jarra:



Si añado dos pesos de 5hg a cada platillo de la primera balanza, obtengo una balanza equivalente:

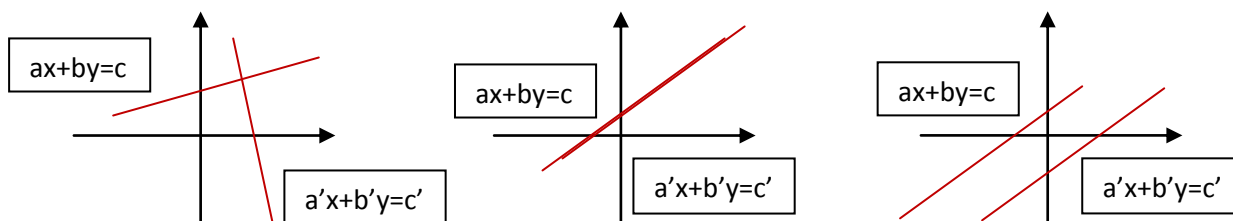


Ahora es muy fácil saber lo que pesa una botella y, posteriormente, lo que pesa una jarra:



• **Representación gráfica**

La representación gráfica es muy útil para hallar la solución de un sistema de ecuaciones lineales, ya que sería el punto de corte de las rectas que representan cada una de las ecuaciones del sistema:



Sistema con solución

Sistema con infinitas soluciones

Sistema sin solución

- **Representación tabular**

Por último, también se puede representar un sistema de ecuaciones lineales a través de las tablas de valores que se generan de cada una de las ecuaciones que lo componen:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

$$x + y = 5$$

$$2x - y = 7$$

x	y
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1

Solución

x	y
0	-7
1	-5
2	-3
3	-1
4	1

2.2.3. ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO

Finalmente, la fenomenología es la tercera de las dimensiones con las que se organizan los significados de un concepto matemático y pone de manifiesto el modelo funcional de las matemáticas escolares, es decir: el significado de un concepto matemático se logra cuando se muestra su conexión con el mundo real, con los fenómenos implicados. El análisis fenomenológico trata, por tanto, de dar respuesta a cuáles son las utilidades del tema, qué tipo de problemas soluciona o en qué situaciones podría estar presente.

Dos son los fenómenos que se ejemplifican con los contenidos del bloque de iniciación al álgebra: los símbolos y las variables. El conocimiento y uso de símbolos, las reglas de su utilización y las diferentes funciones que pueden desempeñar tienen en la iniciación al álgebra un amplio campo de trabajo. El papel de las variables y su sustitución formal es otro (Rico, 2008).

Este análisis aborda, en primer lugar, las situaciones vinculadas a la estructura en estudio (siguiendo las propuestas por PISA), y, en segundo lugar, la delimitación de los contextos en que está presente.

- **Situaciones**

A continuación se muestran las situaciones en las que los sistemas de ecuaciones lineales pueden estar presentes:

a) **Personales:** relacionadas con actividades diarias de los alumnos.

“Para pagar un artículo que costaba 3€, he utilizado 9 monedas, unas de 20céntimos y otras de 50. ¿Cuántas monedas de cada clase he utilizado?”

b) **Educativas o Laborales:** las que encuentra el alumno en el centro escolar en un entorno de trabajo.

“En un test de 30 preguntas se obtienen 0.75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0.25 puntos por cada error. Si mi nota ha sido 10.5, ¿cuántos acierto y cuántos errores he tenido?”

c) **Públicas:** relacionadas con la sociedad.

“Se sabe que entre los dos partidos políticos mayoritarios suman 269 diputados, y a uno de ellos le faltan 40 para tener el doble que el otro. ¿Cuántos diputados tiene cada partido?”

d) **Científicas:** procesos tecnológicos, problemas específicamente matemáticos...

“Calcula dos números cuya suma sea 191 y su diferencia 67.”

- **Contextos**

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolver una gran variedad de problemas. Los fenómenos modelizados a través de sistemas de ecuaciones lineales serán aquéllos en los que puedan establecerse relaciones lineales ($f(a+b)=f(a)+f(b)$, $f(\lambda a)=\lambda \cdot f(a)$) y esto ocurre por ejemplo con los fenómenos físicos que tienen que ver con magnitudes (masa, tiempo, longitud, dinero...). Aparte de las magnitudes (escalares), también podemos encontrar otra familia de estructuras lineales: los espacios vectoriales; no obstante, en la etapa educativa en la que nos ubicamos, no se hace referencia a los vectores en el tema de “Sistemas de ecuaciones lineales” y por lo tanto trataremos únicamente con la familia de los escalares.

Podemos decir, entonces, que los sistemas sirven para determinar el valor de dos datos desconocidos, conocidas dos relaciones lineales entre ellos.

3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. CONTEXTO

Esta breve investigación educativa se ha llevado a cabo en el IES Padre Suárez (Granada) con los alumnos matriculados en 2º ESO, grupo A (31 alumnos), durante el período de prácticas del máster de formación de profesorado.

El período de actuación docente duró aproximadamente 1 mes, desde el martes 22 de Marzo hasta el lunes 25 de Abril. Fueron un total de 9 sesiones de una hora y una sesión de 1 hora y media (examen). Las clases se impartieron los lunes y martes, de 12.45 a 13.45 h, y los miércoles, de 13.45 a 14.45 h.

3.2. INTERVENCIÓN EDUCATIVA

En este apartado se incluye muy brevemente la planificación del tema “Sistemas de ecuaciones lineales” impartido a los alumnos: los contenidos, las expectativas de aprendizaje, los errores y dificultades más frecuentemente detectados y la descripción de algunas tareas.

De manera sucinta, la distribución de los contenidos impartidos a lo largo de las sesiones fue la siguiente:

Se comenzó con un recordatorio sobre las operaciones básicas con expresiones algebraicas, el valor numérico de una expresión algebraica, la supresión de denominadores en una igualdad algebraica y la transposición de términos para despejar una incógnita, para seguir con la ecuación lineal, soluciones de una ecuación lineal, representación gráfica de la misma y reconocimiento de si un par de valores (x, y) es solución de una ecuación lineal.

De los sistemas de ecuaciones lineales se trabajó con la identificación de la solución entre un conjunto de pares de valores (x, y) , el cálculo por tanteo de las soluciones de sistemas sencillos y la aplicación de los métodos de sustitución, igualación y reducción, con la comprobación posterior de la solución obtenida.

Por último, elección del método más adecuado para resolver un sistema de ecuaciones lineales, representación gráfica del mismo, reconocimiento, ante la representación gráfica, de si el sistema tiene solución o no, en su caso, identificación de la solución en el gráfico, conexión con los métodos de resolución analítica y, para acabar, resolución de problemas mediante el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales.

El cálculo por tanteo de las soluciones de un sistema de ecuaciones permite mantenerse siempre dentro del contexto en el que se ha planteado el problema, **dotando a las acciones de un significado, así como a la solución**, por eso fue la manera en la que introduje los sistemas a los alumnos. No obstante, las actividades propuestas para resolverlas de este modo supusieron bastantes dificultades para los alumnos, tratando, la

mayoría, de resolverlas a través de una ecuación, es decir, recurriendo al lenguaje algebraico. Parece ser que una vez conocida la potencia de esta herramienta (la vieron en el tema anterior de ecuaciones) es difícil volver a los métodos de ensayo y error. Esto ocurrió con el siguiente ejemplo:

“¿Cuál es la edad del abuelo? ¿Y la de la abuela?”



Por otra parte, Intentando **dotar de significado** la noción de sistema de ecuaciones, **el concepto de solución de un sistema** y los procedimientos de resolución del mismo, introduje el método de sustitución a través de una pequeña actividad en la pizarra con balanzas, teniendo los alumnos también bastantes dificultades para resolverla. Posteriormente se tradujo esta actividad al lenguaje algebraico, para que vieran la conexión que hay entre la acción sobre los objetos y los movimientos que se hacen con los símbolos sobre el papel. Para el método de igualación se usó, asimismo, este sistema de representación, entre otros, realizando los alumnos varias actividades de este tipo (véase, por ejemplo, la que se incluye en el apartado “Sistemas de representación” del análisis de contenido). También se han resuelto tareas muy parecidas a las dos primeras que aparecen en el cuestionario elaborado para esta investigación (véase el apartado 3.4).

Para la explicación del método de reducción, propuse una actividad introductoria en la pizarra, que resolvieron entre todos (como en el caso de las balanzas), para que interpretaran mejor qué es un sistema de ecuaciones lineales, percibieran el concepto de combinación lineal y encontraran la solución a través de un proceso que pudiera dar sentido a todas las acciones, antes de pasar al lenguaje algebraico:

“El otro día fui a comer con unos amigos a un bar. Pedimos 3 refrescos y 4 hamburguesas y nos cobraron 17.60€. Nos quedamos con hambre, así que pedimos 1 refresco y 2 hamburguesas más, que nos costaron 8.20€. ¿Cuánto costarán entonces 6 refrescos y 8 hamburguesas? ¿Y 4 refrescos y 6 hamburguesas? ¿Y 2 refrescos y 2 hamburguesas? ¿Podrías construir una nueva pista? Buscad pistas en las que sólo aparezcan refrescos o hamburguesas.”

De esta forma, los alumnos fueron poco a poco resolviendo el sistema, liberándose del contexto. Las actividades de este tipo permiten finalizar la tarea de **aprender** qué es un sistema, **qué es la solución de un sistema** y cómo se resuelve un sistema (Grupo Azarquiél, 1991).

He considerado importante que los alumnos entiendan qué queremos conseguir cuando resolvemos un sistema de ecuaciones. Para que los símbolos lleguen a tener significado es necesario, por lo menos al principio, que las letras tengan un referente concreto, que sean abstracciones de algo que se pueda saber qué es. Se ha intentado que los alumnos se den cuenta de que una expresión algebraica es “algo” que se ha construido como respuesta a una determinada experiencia y por tanto, **la solución de un sistema de ecuaciones también es “algo”**.

Uno de los principales problemas relacionados con la comprensión de la solución que he podido observar durante este corto período de tiempo es que lo importante para la mayoría de los alumnos es llegar a un resultado, aunque no se entienda qué significa. Independientemente de la utilización que se haga de las letras, se puede llegar al resultado correcto a pesar de que el significado que se le ha atribuido a las letras no lo sea.

En cuanto a las expectativas de aprendizaje, con la elaboración de la unidad didáctica correspondiente a este tema, se plantearon 16 objetivos específicos, de los cuales, estimo tienen relación con el objeto de este estudio los siguientes:

- Identificar, entre un conjunto de pares de valores, la solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Calcular por tanteo las soluciones de sistemas sencillos.
- Comprensión de la solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Aplicar los diferentes métodos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales (sustitución, igualación y reducción, gráfico).
- Interpretar, ante la representación gráfica de un sistema, si éste tiene solución o no, y, en su caso, identificar la misma.
- Identificar las relaciones entre la resolución gráfica de un sistema y las resoluciones analíticas (sistema con una solución, con infinitas soluciones o sin solución).
- Resolver problemas con sistemas de ecuaciones lineales.
- Inventar y enunciar problemas que se resuelvan con sistemas de ecuaciones lineales.
- Comprobar los resultados obtenidos y tomar decisiones en función de los mismos.

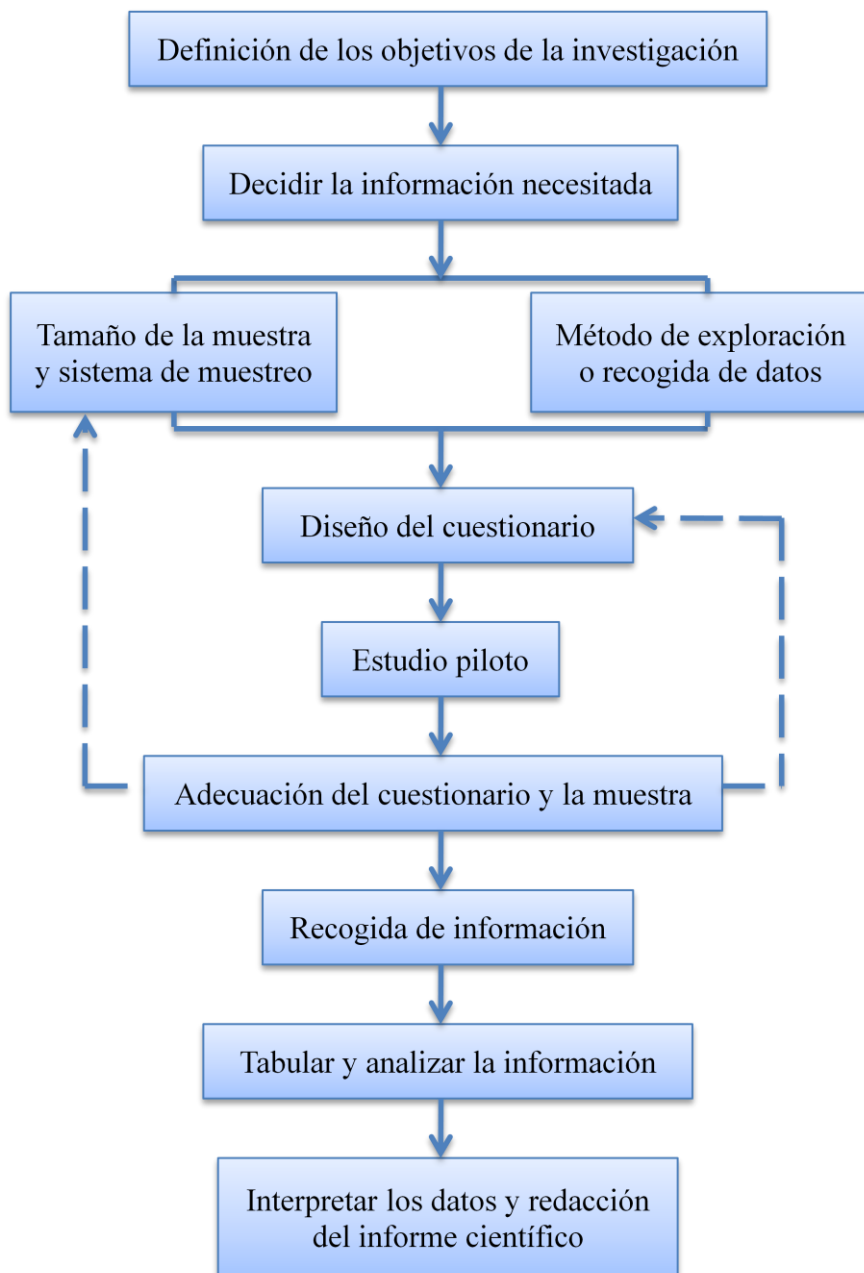
3.3. METODOLOGÍA

Los métodos descriptivos resultan muy apropiados en determinados campos educativos pues permiten la recogida de información detallada que describa una determinada situación, la identificación de problemas, la comparación y evaluación, y la

planificación futura y toma de decisiones. Es por ello que ha sido la metodología escogida para este estudio.

Concretamente, se ha llevado a cabo un estudio tipo encuesta, el método descriptivo más empleado en investigación educativa, cuya intención puede ser triple: describir las condiciones de la naturaleza existente, identificar patrones con los que poder establecer comparaciones y/o determinar las relaciones que existen entre acontecimientos específicos (Cohen y Manion, 1990).

De forma general, se puede decir que el proceso que siguen este tipo de estudios puede concretarse en las siguientes etapas (Colás, 1994):



3.4. RECOGIDA DE DATOS Y DISEÑO DEL CUESTIONARIO

Como puede deducirse del apartado anterior, la técnica de encuesta consiste en la obtención de datos a través de preguntas realizadas a los miembros de una población o de una muestra (Buendía, 1994).

Los instrumentos básicos de la investigación por encuesta son los cuestionarios y la entrevista, habiéndose utilizado en este caso el cuestionario, con la intención de conocer las ideas, imágenes y conceptos que tienen los alumnos de 2º ESO sobre la solución de un sistema de ecuaciones lineales tras haber estudiado el tema. El cuestionario se rellenó en mi presencia, puesto que las preguntas formaban parte del examen que los alumnos realizaron durante la penúltima sesión.

Los prerequisites para el diseño del cuestionario que se tuvieron en cuenta fueron los determinados por Cohen y Manion en su obra “Métodos de investigación educativa”: finalidad de la investigación, población sobre la que se va a centrar y recursos que están disponibles. Estos prerequisites se detallan a continuación:

- Finalidad de la investigación → obtener información acerca de la comprensión, por parte de los alumnos de 2º ESO, de la solución de un sistema de ecuaciones lineales a partir de cómo la verbalizan, cómo la interpretan, cómo la representan y cómo la discriminan, aplican y controlan.
- Población o sujetos sobre los que se va a centrar → alumnos de 2º ESO (grupo A) del IES Padre Suárez, Granada, curso 2010/2011. El cuestionario lo rellenaron en total 31 alumnos.
- Recursos disponibles → los ofrecidos por el instituto.

En cuanto al diseño del cuestionario, consta de 3 tareas, de un total de 7 que tenía el examen del tema “Sistemas de ecuaciones lineales”.

Las tareas se formularon teniendo en cuenta los siguientes criterios:

- Se ha procurado que los 3 problemas pongan de manifiesto la consecución o no del objetivo específico “comprensión de la solución de un sistema de ecuaciones lineales” sin supeditarlos a la resolución del sistema, que sería otro objetivo.
- Cada uno de los problemas está referido a uno de los componentes del análisis de contenido del tema; en concreto, la primera pregunta (pregunta nº2 en el examen; véase el Anexo) hace referencia al contexto o sentido (fenomenología); la segunda pregunta (la nº 6 en el examen) tiene que ver con una de las posibles representaciones de la solución de un sistema de

ecuaciones lineales; y por último, la tercera pregunta (la nº 7 en el examen) podríamos situarla dentro de la estructura conceptual del análisis de contenido.

- Los enunciados de las preguntas son claros, simples y directos, adecuados a las personas a las que van dirigidos y centrados en el concepto que se quiere estudiar para obtener respuestas claras y precisas que faciliten su análisis posterior.

A continuación se hace una descripción de cada una de las preguntas y de su finalidad:

➤ **Primera cuestión**

En una frutería pueden verse las siguientes ofertas:

OFERTA A:
5 melones y 2 sandías
!!! 13€ !!!

OFERTA B:
3 melones y 4 sandías
!!! 12€ !!!

Dos amigos apuestan una entrada de cine a que pueden averiguar el precio de un melón y el de una sandía. Andrea dice que cada melón cuesta 2€ y que cada sandía, 1.5€; sin embargo, Julián dice que un melón vale 1€ y una sandía 2.25€:

- ¿Quién de los 2 lleva razón? Justifica tu respuesta.
- Sabiendo quién lleva razón, ¿cuánto costarían entonces 8 melones y 5 sandías?
- Ana fue el otro día a dicha frutería y pagó 18€ por 4 melones y 6 sandías. ¿El precio era correcto?

⇒ Este problema, relacionado con la dimensión fenomenológica del análisis de contenido, consta de una breve exposición de una situación y de tres apartados donde se formulan una serie de preguntas, teniendo cada una de ellas una finalidad distinta.

El primer apartado pretende que los alumnos discriminen la solución, al tener que decidir entre dos opciones; el segundo apartado busca que los alumnos apliquen la solución para poder averiguar el precio de una combinación diferente de melones y sandías; por último, el apartado c pone de manifiesto si realmente los alumnos controlan la solución y saben cuándo deben tenerla en cuenta.

Haciendo referencia a los pasos de “estudio piloto” y “adecuación del cuestionario” que aparecen en el esquema del apartado anterior, hay que decir que esta pregunta tuvo que ser reformulada ya que, en un ejercicio anterior muy parecido que los alumnos realizaron, encontré que éstos sólo comprobaban una de las condiciones para

una persona y la segunda condición para la otra persona, es decir, no quedaba claro que las dos condiciones debían verificarse. La tarea en cuestión es la siguiente:

Aurora ha comprado 3 lápices y una goma de borrar en la papelería por 1.95 €. Su amiga Gloria ha comprado 2 lápices y tres gomas de borrar en la misma papelería y le han cobrado 2€.

a) Aurora dice que cada lápiz cuesta 0.5 € y que cada goma cuesta 0.35 €; en cambio, su amiga Gloria dice que cada lápiz cuesta 0.55 € y que cada goma, 0.30 €. ¿Quién de las dos lleva razón?

b) Sabiendo quién lleva razón, ¿cuánto costarían entonces 5 lápices y 4 gomas de borrar?

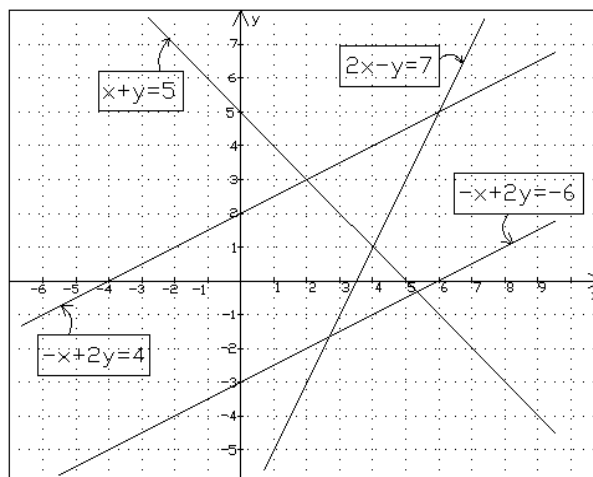
c) Manuel fue el otro día a dicha papelería y le cobraron 5.5 € por 8 lápices y 2 gomas. ¿Le timaron con el precio?

Al corregir el problema, observé que la gran mayoría de los alumnos habían comprobado el precio que decía Aurora con las cosas que ella había comprado y lo mismo para el caso de Gloria, pero no cruzaban los datos. Es posible que la dificultad consistiera en que las condiciones estaban ligadas en cierto sentido a las personas y esto obstaculizó la comprensión de que debían cumplirse ambas, independientemente de quién hubiera comprado qué.

En un principio, el enunciado del problema incluido en el cuestionario decía que Andrea compraba 5 melones y 2 sandías por 13€ y Julián, 3 melones y 4 sandías por 12€. Para intentar solventar lo que ocurrió con el ejercicio anterior, se incluyeron las ofertas en el enunciado, para desligar de algún modo las condiciones de las personas y así tuvieran que comprobar ambas.

➤ Segunda cuestión

Observa el siguiente gráfico, en el que están representadas una serie de rectas con sus correspondientes ecuaciones, y responde:



a) ¿Es el punto $x=4$, $y=1$ solución de algún sistema de ecuaciones lineales que esté representado? SÍ NO

En caso de que tu respuesta sea sí, ¿qué ecuaciones forman ese sistema?

b) ¿Cuál es la solución del sistema formado por las siguientes ecuaciones?
$$\begin{cases} x+y=5 \\ -x+2y=4 \end{cases}$$

Marca la solución en el gráfico

c) ¿Es el punto $x=3$, $y=2$ solución de algún sistema de ecuaciones lineales que esté representado? SÍ NO

En caso de que tu respuesta sea sí, ¿qué ecuaciones forman ese sistema?

d) Escribe un sistema de ecuaciones lineales que esté representado en el gráfico y que no tenga solución.

⇒ Esta tarea, compuesta de un gráfico y cuatro apartados, se centra en una de las posibles representaciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Se pretendía que los alumnos pusieran de manifiesto su comprensión acerca de la interpretación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones.

➤ Tercera cuestión

Si tuvieras que explicarle a un compañero de clase qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales:

a) ¿Cómo se lo explicarías con palabras?

b) ¿Cómo se lo explicarías con un dibujo?

⇒ Por último, con esta tarea, que consta de dos apartados, se trataba de averiguar cómo verbalizan los alumnos el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales y de cuántas maneras son capaces de representarlo.

Es la pregunta más directa, centrada en el concepto de solución, que se les propuso a los alumnos, intentando suscitar respuestas precisas. Además, con la intención de que respondieran con sinceridad, tranquilidad y sin la presión de la “nota”, esta pregunta no calificaba en el examen.

Respecto a la aplicación del cuestionario, se llevó a cabo el día 13 de Abril de 2011, a las 13.15 h. A los alumnos se les dio un total de 1.5 h para la resolución del examen.

4. ANÁLISIS DE LOS DATOS

Los datos recogidos a partir del cuestionario realizado son de carácter cualitativo, es decir:

“...elaboraciones realizadas en los propios contextos naturales donde ocurren los fenómenos estudiados, mediante procedimientos distintos a la medición que registran en forma de palabras o imágenes información descriptiva acerca de lugares, objetos, personas, conversaciones, conductas, etc.” (Gil, 1994: 29)

Los datos textuales son un tipo particular de datos cualitativos; en los contextos educativos, la mayor parte de los datos elaborados se apoyan en la expresión verbal escrita, como ha sido en nuestro caso.

Tras la recogida de la información, llega el análisis de los datos, que podría definirse como: *“el conjunto de manipulaciones, transformaciones, operaciones, reflexiones y comprobaciones realizadas a partir de los datos con el fin de extraer significado relevante en relación a un problema de investigación.”* (Woods, 1989, citado en Gil, 1994: 33).

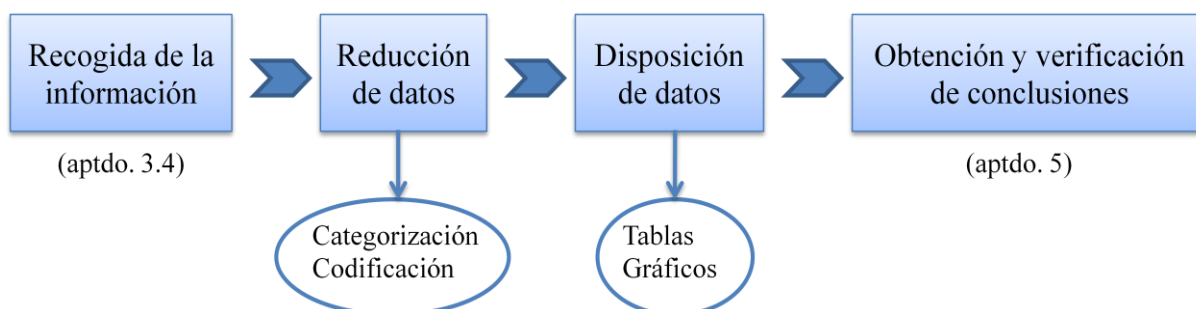
Este análisis es una parte fundamental en cualquier proceso de investigación, previa a la interpretación de los resultados y consiste en extraer e interpretar el significado de los datos recopilados para que nos resulten útiles, para lograr una mayor comprensión de la realidad analizada y poder elaborar modelos conceptuales explicativos.

El análisis de datos cualitativos es complejo, entre otras cosas, por su carácter verbal, polisémico, o por su difícil reproducción, y carece del carácter sistémico, fiable y formal de las técnicas de análisis de datos cuantitativos.

En este trabajo se han seguido algunas de las estrategias incluidas en el libro: “Análisis de datos cualitativos. Aplicaciones a la investigación educativa”, de Javier Gil Flores (1994).

4.1. PROCESO DE ANÁLISIS

Esquemáticamente, el proceso general que se ha seguido en el análisis de los datos ha sido el siguiente:



siendo objeto de este apartado los dos pasos intermedios.

1º- Reducción de datos

El primer paso, tras la recogida de la información, consistió en examinar los datos para encontrar en ellos determinados componentes temáticos que permitieran su clasificación en una u otra categoría de contenido. Las operaciones más representativas llevadas a cabo han sido las de categorización y codificación.

Los datos aislados no son significativos, y por esa razón es preciso unirlos a otros a fin de llegar a conclusiones. La agrupación de elementos es característica de los procesos de categorización. Esta operación permite clasificar conceptual o procedimentalmente las respuestas que son cubiertas con un mismo tópico. Por otra parte, codificar es asignar a cada unidad (respuesta) un indicativo (código) propio de la categoría en la que la consideramos incluida.

Antes de llegar a esta clasificación se procedió a realizar un vaciado de todos los enunciados e ilustraciones (de manera simplificada) producidos por los estudiantes de 2º de ESO. La lectura inicial de las respuestas permitió hacernos una idea global del contenido de las mismas, llevándonos a detectar algunos procedimientos de resolución que se repetían, así como palabras clave (valor, incógnita, punto de corte, gráfica...) o conceptos teóricos relevantes para el problema que se está investigando. Las categorías surgieron a partir de esos procedimientos comunes y palabras clave que aparecían a lo largo de las respuestas. En otros casos, al tratarse de preguntas cerradas, las categorías son simplemente las distintas opciones de respuesta que se les da a los alumnos, como es el caso de la pregunta 2.

Por lo tanto, la mayoría de las categorías utilizadas en este análisis no se establecieron a priori sino que se elaboraron inductivamente a partir del examen de las propias respuestas, es decir, preguntando por el tópico capaz de cubrir cada unidad.

En cuanto a los códigos asignados, éstos están formados por dos dígitos: el primero corresponde a la letra del apartado a la que pertenece la respuesta y el segundo es un número. El significado de cada código se explicará en el análisis correspondiente a cada pregunta. El número de códigos asignados, o respuestas posibles, se ha delimitado una vez estudiadas todas las contestaciones y encontradas las similitudes necesarias para incluirlas en una misma categoría.

2º- Disposición de datos

Tras la clasificación y codificación de la información se procedió a su organización y presentación a través de una serie de tablas, que han permitido, a su vez, la extracción de conclusiones.

No se ha utilizado ninguna tabla de contingencia, incidencia o similar, debido a que la población objeto de estudio es muy pequeña, al igual que el volumen de

información, lo que no ha hecho necesario el uso de este tipo de instrumentos, que lo que pretenden es el manejo de datos de una manera más ágil y práctica. En su lugar, se ha ordenado la información a través de unas sencillas tablas, una para cada pregunta, donde la primera columna hace referencia a los alumnos y en las columnas sucesivas (tantas como apartados tenga la pregunta) aparecen marcados los códigos asignados a sus respuestas.

Junto a estas tablas se presentan los códigos ligados a su significado y ciertos resultados; en concreto:

- Una tabla donde aparecen los códigos utilizados en la primera columna, el nº de alumnos que ha contestado siguiendo ese código en la segunda y este mismo resultado pero expresado como porcentaje de alumnos respecto del total, en la tercera.

- Otra tabla donde se muestra el porcentaje de aciertos obtenido para cada apartado (sólo para las dos primeras preguntas, ya que en la tercera no se ha tenido en cuenta la validez de la respuesta).

- Un par de gráficos, en la tercera pregunta, que permiten, de un solo vistazo, hacerse una idea de algunos resultados obtenidos.

4.2. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 1

A continuación se muestran el enunciado de la pregunta 1 y de cada uno de sus apartados, los códigos empleados junto con su significado y un ejemplo esquemático para clarificarlos, y las tablas donde se disponen los resultados obtenidos:

“En una frutería pueden verse las siguientes ofertas:

OFERTA A → 5 melones y 2 sandías = 13€; OFERTA B → 3 melones y 4 sandías = 12€

Dos amigos apuestan una entrada de cine a que pueden averiguar el precio de un melón y el de una sandía. Andrea dice que cada melón cuesta 2€ y que cada sandía, 1.5€; sin embargo, Julián dice que un melón vale 1€ y una sandía 2.25€:

a) ¿Quién de los 2 lleva razón? Justifica tu respuesta”.

A1 → Bien resuelto, sustituyendo las dos ofertas por lo que dice Andrea.

$$5 \cdot 2 + 2 \cdot 1.5 = 13 \text{ y } 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1.5 = 12$$

A2 → Bien, resolviendo el sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 13; & \rightarrow x=2 \text{ e } y=1.5 \\ 3x + 4y = 12; \end{cases}$$

A3 → Bien resuelto, comprobando sólo una oferta pero para las dos personas.

$$\text{Andrea: } 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1.5 = 13; \text{ Julián: } 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2.25 = 9.5 \neq 13$$

A4 → Bien resuelto, sustituyendo las dos ofertas por lo que dicen las dos personas.

$$\text{Andrea: } 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1.5 = 13 \text{ y } 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1.5 = 12$$

$$\text{Julián: } 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2.25 = 9.5 \neq 13 \text{ y } 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2.25 = 12$$

A5 → Mal resuelto, sólo comprueba una oferta con lo que dice Andrea o comprueba una oferta para cada persona pero se verifican ambas ("los dos llevan razón").

$$\text{Andrea: } 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1.5 = 13$$

$$\text{Andrea: } 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1.5 = 13 \text{ y Julián: } 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2.25 = 12$$

b) “Sabido quién lleva razón, ¿cuánto costarían entonces 8 melones y 5 sandías?”

B1 → Bien resuelto: $8 \cdot 2 + 5 \cdot 1.5 = 23.5$;

B2 → Mal resuelto: usa otros valores.

c) “Ana fue el otro día a dicha frutería y pagó 18€ por 4 melones y 6 sandías. ¿El precio era correcto?”

C1 → Bien resuelto: $4 \cdot 2 + 6 \cdot 1.5 = 17 \neq 18$;

C2 → Mal resuelto: usa otros valores.

Código respuestas a la pregunta 1			
Alumno	Apartado a)	Apartado b)	Apartado c)
1	A1	B1	C1
2	A2	B2	C2
3	A5	B1	C1
4	A1	B1	C1
5	A3	B1	C1
6	A2	B2	C2
7	A4	B1	C1
8	A5	B1	C1
9	A2	B1	C1
10	A2	B1	C1
11	A4	B1	C1
12	A2	B1	C1
13	A4	B1	C1
14	A2	B1	C1
15	A1	B1	C1
16	A3	B1	C1
17	A4	B1	C1
18	A2	B1	C1
19	A2	B1	C1
20	A2	B1	C1
21	A4	B1	C1
22	A2	B1	C1
23	A4	B1	C1
24	A4	B1	C1
25	A4	B1	C1
26	A4	B1	C1
27	A2	B1	C1
28	A3	B1	C1
29	A2	B1	C1
30	A4	B1	C1
31	A4	B1	C1

Tabla 1

Código	Nº alumnos	%
A1	3	9,68
A2	12	38,71
A3	3	9,68
A4	11	35,48
A5	2	6,45
B1	29	93,55
B2	2	6,45
C1	29	93,55
C2	2	6,45
PREGUNTA 1		

Tabla 2

	% Aciertos
Apartado a)	93,55
Apartado b)	93,55
Apartado c)	93,55

Tabla 3

Tras la disposición de los datos obtenidos a partir de esta pregunta, tal y como se ha explicado en el apartado anterior, se procede al análisis de los resultados.

Observando la tabla 2 se puede apreciar que las respuestas más comunes son las codificadas como A2 y A4, ambas correctas, con un 38.71% y un 35.48% respectivamente, de un total de 31 alumnos. A éstas les siguen las codificadas como A1 y A3, ambas correctas también y con un 9.68%. Por último, ha fallado este apartado un 6.45% de los alumnos.

Es posible encontrar al menos dos causas para que la respuesta A2, es decir, contestar el apartado a) resolviendo el sistema de ecuaciones, sea tan mayoritaria. En primer lugar, puede que sea la manera en la que los alumnos justifiquen mediante cálculos su elección, dándole mayor peso a la resolución analítica, aunque esto les lleve más tiempo; aunque podríamos verlo desde otro punto de vista: los alumnos se sienten confiados para hacer esa elección (para decir que Andrea lleva la razón) una vez han resuelto el sistema porque no acaban de comprender que la solución es aquel par de valores que verifica ambas condiciones. Es difícil inclinarse por una de estas dos posibilidades sin mantener entrevistas con los alumnos que han respondido de esta forma y que podrían explicarnos qué les ha llevado a hacerlo así.

Con la A4 pasa algo muy parecido, en la que los alumnos comprueban los dos pares de valores en las dos condiciones: es posible que sea la manera de justificar su elección, pero también podría ser que ellos adquieran una mayor confianza en su contestación si comprueban todos los datos y no acaban de comprender que la solución, en este caso, es única y por lo tanto no haría falta hacer todas las operaciones para justificar que es Andrea la que lleva razón.

Si nos atenemos a la segunda posibilidad en ambos casos, tendríamos que hay un 74.19% de alumnos que no acaban de comprender que la solución de un sistema es un par de números que satisfacen las dos ecuaciones; no obstante, si ha sido una manera de justificar su elección, no sería correcto hacer esta agrupación, ya que no es lo mismo resolver un sistema de ecuaciones que verificar si un par de valores cumplen dos condiciones. De hecho, a los alumnos se les indicó durante la realización del examen que no hacía falta resolver el sistema de ecuaciones para contestar al primer apartado, lo que nos lleva a pensar que, al menos, en este caso, es más probable que este grupo de alumnos (los codificados como A2) no hubiera interiorizado el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Sin embargo, con los que han respondido bien sustituyendo lo que dice Andrea en las dos ofertas (código A1) esta duda no cabe. Puede deducirse en este caso que los alumnos entienden que la solución es única y por tanto no estiman necesario hacer la comprobación con el otro par de valores.

En cuanto a los que han respondido comprobando sólo una oferta pero para las dos personas (código A3), cabe hacerse la pregunta de qué habría pasado si en lugar de elegir la primera oferta (que se cumple con Andrea pero no con Julián) hubieran elegido

la segunda (que se cumple con los dos). ¿Habrían comprobado la primera? ¿O habrían dicho que los dos llevan razón, como ha sido el caso de uno de los alumnos incluidos en la categoría A5?

Por otra parte, llama la atención que las únicas dos personas que han respondido incorrectamente al apartado b) y al c), tengan correcto el primer apartado. Se trata concretamente de los alumnos nº 2 y nº 6, que respondieron al apartado a) resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (véase la tabla 1). Podría, por tanto, deducirse que el hecho de resolver correctamente un sistema de ecuaciones lineales no implica comprender qué se está haciendo o cuál es el significado de la solución, ya que teniendo el par de valores correcto (2, 1.5), no llegan a verlo como el precio de las frutas.

El hecho de que los dos alumnos que tienen mal el primer apartado (A5) tengan bien los otros dos (B1 y C1) puede ser fruto de la casualidad y que hayan escogido los precios que dice Andrea sencillamente porque aparece en primer lugar.

Por último, en la tabla 3 podemos ver que el porcentaje de aciertos es muy alto en los 3 apartados, concretamente de un 93.55%, lo que hace pensar que los alumnos son capaces de discriminar, aplicar y controlar la solución, que era el objetivo de esta pregunta. El porcentaje de alumnos que ha resuelto correctamente los tres apartados ha sido de un 87%.

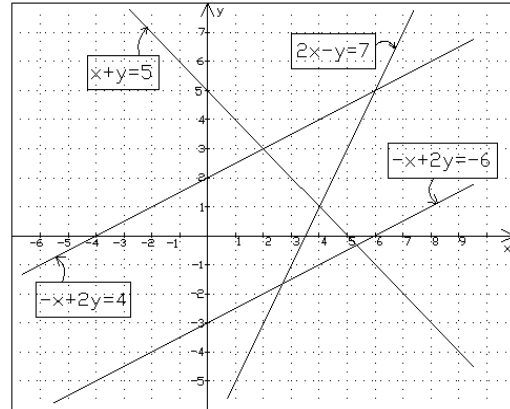
4.3. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 2

A continuación se muestran el enunciado de la pregunta 2 y de cada uno de sus apartados, los códigos empleados junto con su significado y las tablas donde se disponen los resultados obtenidos:

“Observa el siguiente gráfico, en el que están representadas una serie de rectas con sus correspondientes ecuaciones, y responde:

a) ¿Es el punto $x=4$, $y=1$ solución de algún sistema de ecuaciones lineales que esté representado? SÍ NO

En caso de que tu respuesta sea sí, ¿qué ecuaciones forman ese sistema?”



A1 → Marca SÍ y da las ecuaciones correctamente.

A2 → Marca SÍ y da las ecuaciones incorrectamente.

b) “¿Cuál es la solución del sistema formado por las siguientes ecuaciones?”
 Marca la solución en el gráfico.”

$$\begin{cases} x+y=5 \\ -x+2y=4 \end{cases}$$

B1 → Da el punto y lo marca.

B2 → Sólo marca el punto en el gráfico.

B3 → Da el punto y lo marca resolviendo correctamente el sistema de ecuaciones.

B4 → Da el punto y lo marca resolviendo incorrectamente el sistema de ecuaciones.

B5 → Da el punto mal pero lo marca bien.

() → En blanco.

c) “¿Es el punto $x=3$, $y=2$ solución de algún sistema de ecuaciones lineales que esté representado? SÍ NO

En caso de que tu respuesta sea sí, ¿qué ecuaciones forman ese sistema?”

C1 → Correcto - Marca NO;

C2 → Incorrecto - Marca SÍ.

d) “Escribe un sistema de ecuaciones lineales que esté representado en el gráfico y que no tenga solución.”

D1 → Da el sistema correctamente;

D2 → Da el sistema incorrectamente;

D3 → Da algo que no es un sistema (recta, punto);

() → En blanco.

Código respuestas a la pregunta 2				
Alumno	Apartado a)	Apartado b)	Apartado c)	Apartado d)
1	A1	B1	C1	D1
2	A1	B2	C1	D1
3	A1	B2	C2	D2
4	A1	B1	C1	D1
5	A1	B2	C1	D1
6	A1	B4	C1	D1
7	A1	B1	C1	D1
8	A1	B1	C1	D1
9	A1	B1	C1	D1
10	A1	B1	C1	D1
11	A1	B1	C1	D1
12	A1	B1	C1	D1
13	A1	B3	C2	D3
14	A1	B1	C1	D1
15	A2	B5	C1	D1
16	A2	B1	C1	D3
17	A1	B1	C1	D1
18	A2	()	C1	D1
19	A1	B1	C1	D1
20	A1	B1	C1	()
21	A1	B1	C1	D1
22	A1	B1	C1	D1
23	A1	()	C1	D1
24	A1	B3	C1	D1
25	A1	B3	C2	()
26	A1	B1	C1	D1
27	A1	B1	C1	D1
28	A1	B3	C1	D2
29	A1	B1	C1	D1
30	A1	B1	C1	()
31	A1	B1	C1	D1

Tabla 4

Código:	Nº alumnos	%
A1	28	90,32
A2	3	9,68
B1	20	64,52
B2	3	9,68
B3	4	12,90
B4	1	3,23
B5	1	3,23
()	2	6,45
C1	28	90,32
C2	3	9,68
D1	24	77,42
D2	2	6,45
D3	2	6,45
()	3	9,68
PREGUNTA 2		

Tabla 5

	% Aciertos
Apartado a)	90,32
Apartado b)	87,10
Apartado c)	90,32
Apartado d)	77,42

Tabla 6

Tras la disposición de los datos se procede al análisis de los resultados obtenidos.

En la tabla 5 se ve reflejado que el apartado a) lo ha contestado correctamente un 90.32% de los alumnos, 28 alumnos de 31 que han marcado “sí” y han escrito bien las ecuaciones del sistema. En cuanto al 9.68% restante que también ha marcado “sí” (es curioso que ningún alumno haya marcado “no”), las ecuaciones que han dado no se corresponden con la solución, de lo que se deduce que el “sí” probablemente haya sido elegido aleatoriamente, puesto que si se reconoce que ese punto es solución de un sistema, se sabe que es el punto de corte de dos rectas con lo cual escribir las ecuaciones sería inmediato ya que se dan en el mismo gráfico. Otra posibilidad, de menos peso, es que algún alumno haya sufrido una distracción a la hora de escribir estas ecuaciones.

Siguiendo con la misma tabla, en el apartado b), si sumamos los alumnos que han marcado directamente el punto que se les pedía en el gráfico, hacen un total de 74.20% que no ha tenido dificultades en identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales como punto de corte de dos rectas (B1+B2). Dejaríamos aparte a los que han contestado siguiendo el código B3, ya que éstos han resuelto además el sistema de ecuaciones analíticamente. Ello podría deberse a dos causas: o lo han resuelto a posteriori y ha sido una manera de justificar la elección de dicho punto y de cerciorarse de que es el correcto, o bien han elegido el punto una vez resuelto el sistema, con lo cual significaría que no acaban de comprender la interpretación gráfica de la solución y necesitan el apoyo de la resolución analítica.

Dentro del grupo de los que han contestado incorrectamente o han dejado en blanco este apartado (un 12.90%) se ubica la categoría B4, donde el punto se marca mal a raíz de resolver incorrectamente el sistema de ecuaciones lineales, lo que indica que la interpretación gráfica no se ha asimilado, y la B5, donde el punto está bien marcado en el gráfico aunque las coordenadas escritas están equivocadas, lo que hace pensar en una posible distracción del alumno, que efectivamente sabe cuál es la solución del sistema dado.

El apartado c) tiene un porcentaje de aciertos del 90.32% y curiosamente, los tres alumnos que han contestado incorrectamente (identificando el punto de una recta como solución de un sistema de ecuaciones lineales) han acertado con los apartados a) y b) y han fallado en el d) (véase la tabla 4). ¿Cómo podría explicarse que hayan identificado un punto de corte como solución de un sistema en el primer apartado, hayan dado la solución de otro en el segundo y hayan fallado en el tercero? Cabría pensar que al tener bien los dos primeros, tener bien el tercero es automático, pero no ha sido así. Examinando las respuestas, se observa que estos alumnos, al preguntarles por las ecuaciones que formarían ese sistema han respondido escribiendo únicamente la ecuación de la recta a la que pertenece el punto. Esto nos lleva a dos cosas: primero, si el punto dado no hubiera pertenecido a ninguna recta (se hizo así intencionadamente) posiblemente estos alumnos habrían acertado este apartado contestando “no” y,

segundo, el hecho de que escriban una única ecuación implica que no han asimilado lo que significa un sistema de ecuaciones lineales.

Por otro lado, el hecho de que estos mismos alumnos hayan fallado el último apartado no implica hacerse estas preguntas ya que la no existencia de solución es algo más abstracto y difícil de reconocer, algo que se muestra con que es el apartado con el menor porcentaje de aciertos, un 77.42% (véase la tabla 6). Aún así, el número de alumnos que ha respondido correctamente a todos los apartados es elevado (~65%) aunque significativamente inferior al del apartado a).

4.4. ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS A LA PREGUNTA 3

A continuación se muestran el enunciado de la pregunta 3 y de cada uno de sus apartados, los códigos empleados junto con su significado y algún ejemplo de respuesta, y las tablas y gráficos donde se disponen los resultados obtenidos:

“Si tuvieras que explicarle a un compañero de clase qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales:

a) ¿Cómo se lo explicarías con palabras?”

A1 → Solución como concepto: valor de las incógnitas.

“La solución de un sistema de ecuaciones es el valor que se le da a las letras para que se verifique un resultado.”

A2 → Solución como concepto: punto de corte/cruce de dos rectas.

“Es el punto en el que se cortan las dos rectas.”

A3 → Solución como procedimiento de cálculo analítico.

“Es hallar las dos incógnitas de las dos ecuaciones”

A4 → Solución como procedimiento de cálculo gráfico.

“Es obtener la solución de las dos incógnitas mediante un gráfico en el que debemos representar una serie de valores.”

() → En blanco.

b) “¿Cómo se lo explicarías con un dibujo?”

B1 → Representación dos rectas que se cortan en unos ejes cartesianos.

B2 → Con balanzas: representación de un sistema de ecuaciones.

B3 → Con balanzas: representación de un sistema de ecuaciones y de la mayor parte de su resolución.

B4 → Con balanzas: no se representa un sistema de ecuaciones ni su solución.

() → En blanco o fuera de contexto.

Código respuestas a la pregunta 3		
Alumno	Apartado a)	Apartado b)
1	A1	()
2	A2	B1
3	()	B4
4	A4	B1
5	A2	B1
6	A3	B2
7	A3	B1
8	A4	B1
9	A2	B4
10	A3	B4
11	()	B1
12	A2	B1
13	A1	()
14	A3	B4
15	A4	B1
16	A3	B4
17	A4	B1
18	A4	B1
19	A3	B3
20	A1	B1
21	A3	B4
22	()	()
23	A1	B2
24	A4	B1
25	A4	B1
26	A1	B3
27	A4	B1
28	A4	B4
29	A3	()
30	A3	B4
31	A1	B1

Tabla 7

Código:	Nº alumnos	%	% total
A1	6	19,35	32,26
A2	4	12,90	
A3	9	29,03	58,06
A4	9	29,03	
()	3	9,68	9,68
B1	15	48,39	48,39
B2	2	6,45	38,71
B3	2	6,45	
B4	8	25,81	
()	4	12,90	12,90
PREGUNTA 3			

Tabla 8

A1 + A2 → solución como concepto

A3 + A4 → solución como procedimiento

B2 + B3 + B4 → representación con balanzas

Tras la disposición de los datos se procede al análisis de los resultados obtenidos. Es importante aclarar que para el análisis de las respuestas correspondientes a esta pregunta, no se ha tenido en cuenta la corrección o incorrección de las mismas sino los argumentos utilizados, los cuales han servido para incluirlas en una u otra categoría.

En el caso del apartado a), la guía para la elaboración de las categorías ha sido la reiterada aparición de una serie de palabras clave: valor, incógnita, punto de corte, gráfica, resolver, calcular... unas se refieren claramente a conceptos, mientras que otras mencionan procedimientos, lo que ha permitido delimitar dos grandes grupos: las respuestas en las que la solución es descrita como un concepto (A1+A2), donde este

concepto es el de resultado, y las respuestas en las que la solución es descrita como un procedimiento (A3+A4), como un proceso de cálculo para llegar a la solución misma.

A su vez, estos dos grupos se han subdividido en otros dos bien diferenciados: en uno de ellos prevalece lo analítico y en el otro lo gráfico, tanto conceptual como procedimentalmente. Llegamos de esta manera a las cuatro categorías mencionadas al principio: A1, A2, A3 y A4.

Si se observa la tabla 8, se puede apreciar cómo un 58.06% de alumnos recurre al proceso de resolución para explicar qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Es un porcentaje muy superior al de los otros dos grupos por lo que se puede deducir que gran parte de los alumnos confunde la solución de un sistema de ecuaciones con el proceso necesario para llegar a ella. Dentro de este grupo de alumnos, la mitad de ellos (29.03%) recurre a la explicación del método gráfico de resolución y la otra mitad a los métodos analíticos.

Por otra parte, un 32.26% de alumnos concibe la idea de solución de un sistema como un resultado, siendo mayoría dentro de este grupo, un 19.35%, los que la entienden como el valor de las incógnitas, frente al 12.90% que recurre a algo mucho más visual: el punto de corte de dos rectas.

El siguiente gráfico muestra el predominio de la idea de solución de un sistema de ecuaciones como proceso de resolución frente a la idea de resultado:

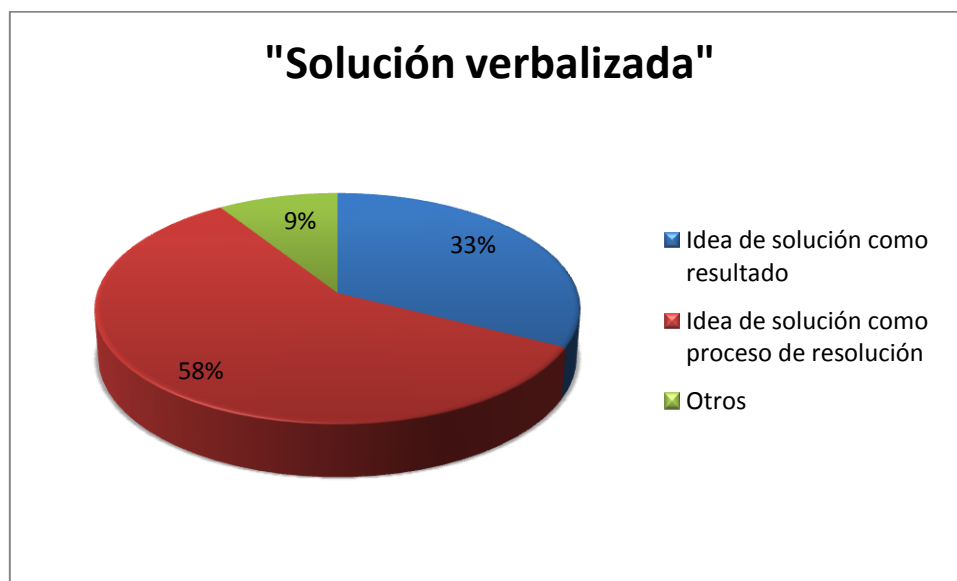


Gráfico 1

Las respuestas al apartado b) se pueden dividir también en dos grandes grupos: el primero, B1, que es el que predomina, en el que aparecen representadas dos rectas que se cortan en un punto, y el segundo, formado por las categorías B2, B3 y B4, en el que las balanzas son las protagonistas. Este segundo grupo se ha dividido en tres, en función de si lo que se representa es un sistema de ecuaciones (B2), un sistema y el

proceso para solucionarlo (B3) o bien un dibujo con balanzas que no ejemplifican nada de lo anterior (B4).

La tabla 8 muestra el alto porcentaje de alumnos (un 25.81%) que usa las balanzas para explicar lo que es la solución de un sistema de ecuaciones y sin embargo no las aplican correctamente para representarla, ni la solución ni nada que tenga que ver con sistemas de ecuaciones. El uso de las balanzas relacionadas con los sistemas es minoritario (un 12.90%) y si tenemos en cuenta que además estas representaciones estén relacionadas con la solución, que era lo que se les pedía, o con el proceso para hallarla, el porcentaje es aún menor (un 6.45%), lo que indica la enorme confusión que ha provocado en los alumnos el uso de representaciones con balanzas durante las clases. Aún así, son mayoría los alumnos que recurren a los ejes cartesianos para representar dos rectas e indicar que la solución es su punto de corte (un 48.39%), de lo que se deduce que ésta es la manera más intuitiva que tienen los alumnos para interpretar gráficamente qué es la solución de un sistema.

El siguiente gráfico muestra el predominio de la representación de solución de un sistema de ecuaciones a través de dos rectas que se cortan en un punto frente al uso de las balanzas:



Gráfico 2

5. CONCLUSIONES

5.1. OBTENCIÓN DE CONCLUSIONES

La obtención de conclusiones es el paso más importante dentro del proceso de análisis. Se trata de ensamblar, de alguna manera, los elementos que se han separado durante el proceso analítico para construir un todo estructurado y significativo. Esta interpretación es el producto de la investigación.

Recordemos cuál era el objetivo de este estudio: averiguar qué entienden los alumnos por solución de un sistema de ecuaciones lineales a partir de cómo la verbalizan, cómo la interpretan, cómo la representan y cómo la discriminan, aplican y controlan.

Con un solo estudio y con una población tan pequeña sería muy osado teorizar, pero sí que se puede realizar una aproximación al objeto del estudio. Es conveniente, por tanto, tener presente que las conclusiones que se presentan aquí sólo serán tenidas en cuenta para los sujetos que participaron en el estudio, aclarando que no se pretende generalizar los hechos ni las observaciones encontradas.

Para empezar, podría decirse que las propias categorías obtenidas en el proceso de reducción de datos han sido, en sí mismas, conclusiones del estudio porque cada una de ellas soporta un significado y a su vez muestran el abanico de posibles respuestas dadas por los alumnos.

Los resultados de la pregunta 1 ponen de manifiesto que la mayoría de los alumnos (93.55%) ha comprendido que la solución de un sistema de ecuaciones está formada por un par de valores que satisfacen dos condiciones dadas. Por otra parte, una vez que los alumnos han discriminado la solución, no han encontrado dificultades en aplicarla a una nueva condición, ya que el porcentaje de alumnos que sabiendo cuál era la solución, tras resolver el primer apartado, no ha podido resolver los otros dos ha sido muy bajo (6.45%).

De los resultados de la pregunta 2 se puede concluir que los alumnos entienden la interpretación gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones. De hecho, los que han recurrido a esta representación en la pregunta 3, lo han hecho correctamente, luego no supone dificultad entender que es el punto de corte entre dos rectas.

De las preguntas 1 y 2, podría extraerse otra conclusión, pues destaca el alto porcentaje de alumnos que recurre a la resolución analítica de un sistema de ecuaciones para contestar a preguntas en las que no es necesario dicho cálculo. Esto ha ocurrido tanto en el primer apartado de la primera pregunta como en el segundo apartado de la segunda. ¿Por qué ocurre esto? Parece que es lo que hay que hacer cuando uno se enfrenta a un sistema de ecuaciones, sin importar cuál es la pregunta. Esto va en consonancia con lo expresado por el Grupo Azarquiel (1991) sobre el algoritmo de resolución de un sistema de ecuaciones:

“Es éste, sin duda, el aspecto de los sistemas de ecuaciones que más preocupa a los alumnos, y tiene su explicación. Por un lado, saben bien que, sin un cierto dominio operatorio, no es fácil moverse con discreción en cursos posteriores de matemáticas. Por otro lado, a estas edades de iniciación al álgebra (entre los 12 y los 14 años), se tiene una mayor sensibilidad para captar cuestiones de carácter técnico que para comprender los problemas científicos. Las definiciones y las ideas no interesan en el mismo grado que los procedimientos y los automatismos. El «cómo se hace» prevalece sobre el «por qué se hace».

Siguiendo con la pregunta 3, el análisis del apartado a) ha revelado que los alumnos de secundaria consideran, en su mayoría, la solución de un sistema de ecuaciones lineales como el proceso de cálculo para llegar a ella, ya sea de manera analítica o gráfica, como demuestran las siguientes respuestas:

“La solución de un sistema de ecuaciones lineales es resolver 2 incógnitas representadas en las ecuaciones.”

“Es hallar las dos incógnitas de las dos ecuaciones.”

“Es la representación de dos igualaciones en un gráfico para saber si tienen o no solución.”

“Se trata de resolver dos incógnitas que hay en dos ecuaciones por diferentes métodos o sistemas: por igualación, por sustitución, por reducción, por gráficos.”

Aunque no se puede despreciar que aproximadamente un tercio de los alumnos entienden la solución como un resultado, es bastante superior el porcentaje de los que piensan que es un procedimiento, quizá por la misma razón que mencionaba anteriormente respecto a la resolución de sistemas de ecuaciones aun cuando no es necesario: los alumnos muestran más interés en hacer cosas, en automatizar procedimientos, que en pensar por qué se hacen o a qué les lleva.

El apartado b), en el que se pedía representar la noción de solución de un sistema de ecuaciones lineales, muestra dos tendencias claramente diferenciadas: la primera de ellas, en la que los alumnos representan la solución como el punto de corte entre dos rectas, no ha supuesto ninguna dificultad para los que han recurrido a ella (48.39%), como se ha explicado anteriormente; no se puede decir lo mismo de los que han recurrido a la representación mediante balanzas. Esto no tiene por qué significar que los alumnos no han comprendido el concepto de solución de un sistema, sino que no han sabido hacerlo a partir de este sistema de representación.

A pesar de que durante la intervención educativa se intentó dotar de significado la noción de sistema de ecuaciones, el concepto de solución de un sistema y los procedimientos de resolución del mismo, a partir, entre otras cosas, de actividades con

balanzas, para que los alumnos vieran la conexión que hay entre la acción sobre los objetos y los movimientos que se hacen con los símbolos sobre el papel, puede deducirse que, cuando un 25.81% de alumnos (un 67% del total de alumnos que recurrieron al uso de balanzas) ha usado esta representación para intentar explicar, sin éxito, qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales, algo ha fallado. Es posible que ese fallo haya consistido en el uso de las balanzas como un sistema de representación gráfico y no manipulativo. Si los alumnos hubieran podido usar balanzas de verdad o incluso haber interactuado con algún programa informático donde aparecieran balanzas y donde ellos hubieran podido manipularlas, mover los objetos, es decir, usar la estrategia de ensayo y error, puede que hubieran interiorizado mejor su significado. Hacer es aprender y en este caso, no han hecho, pareciendo que las balanzas han provocado más confusión que ayuda, algo a tener en cuenta la próxima vez.

5.2. VERIFICACIÓN DE LAS CONCLUSIONES

La verificación de las conclusiones también es muy importante en el proceso de análisis ya que es necesario dotar al estudio de credibilidad. Verificar las conclusiones de un estudio significa comprobar la validez de los descubrimientos realizados y para ello hay que ver cuánto de verdad hay en ellos, si podrían aplicarse a otros contextos o sujetos, cuál es la consistencia de los resultados y la neutralidad de los descubrimientos frente a inclinaciones, motivaciones, intereses o concepciones teóricas del investigador.

La validez de los resultados va a depender de las estrategias seguidas en cada una de las fases de la investigación: fase de diseño, recogida de datos y análisis de los mismos. Asimismo, ha de tenerse en cuenta la importancia del contexto en la obtención de conclusiones.

Por el hecho de haber estado presente y de haber explicado el tema que posteriormente iba a ser estudiado, soy consciente de que he podido provocar en los participantes respuestas que de otra manera no habrían ocurrido, es decir, las respuestas dadas han estado condicionadas a los contenidos que expliqué y a la forma en la que impartí el tema de “Sistemas de ecuaciones lineales” a los alumnos. Al mismo tiempo, también he podido verme influenciada por ellos.

Sin embargo, como el procedimiento de recogida de datos ha sido de tipo cualitativo, los datos pueden ser fácilmente validados; responden a lo que los sujetos estudiados realmente piensan, sienten o hacen, por lo que, en este aspecto, mi implicación en el contexto estudiado supone un factor que incrementaría la validez de los datos y del análisis realizado.

También hay que decir que mi presencia en este estudio, aparte de hacerme formar parte de la situación estudiada, me ha permitido comprobar las percepciones de los alumnos y comprender lo que es esencial, algo que de otra manera (pasando simplemente el cuestionario) no habría podido ocurrir.

En cuanto a si los resultados obtenidos podrían aplicarse a otros sujetos o contextos, podría servir lo dicho sobre la insistencia por parte de los alumnos en resolver los sistemas de ecuaciones, haya o no que hacerlo, ya que se corrobora con lo que dicen expertos en la materia. No obstante, ésta es una investigación sin muchas pretensiones, más centrada en el hecho mismo de investigar que en el resultado obtenido.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Castro, E. (2010). Fraccionar y repartir: Un estudio con maestros en formación inicial. Trabajo de investigación tutelada. Universidad de Granada, España. Disponible en: http://fqm193.ugr.es/seccion_libre/trabajos-de-tercer-ciclo/
- Cohen, L. y Manion, L. (1990). Métodos de investigación educativa. Editorial La Muralla, S.A. Madrid.
- Colás, M.P. y Buendía, L. (1994). Investigación educativa. Ediciones Alfar, S.A. Sevilla.
- Colera, J. y Gaztelu, I. (2008). Matemáticas 2. Editorial Anaya. Barcelona.
- Colera, J. y otros (2002). Matemáticas 3. Editorial Anaya. Barcelona.
- Fernández, F. (1997). Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España. Disponible en: http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis_dir/
- Gil, J. (1994). Análisis de datos cualitativos. Aplicaciones a la investigación educativa. Promociones y Publicaciones Universitarias, S.A. Barcelona.
- Grupo Azarquiel (1991). Ideas y actividades para enseñar álgebra. Editorial Síntesis. Madrid.
- Navas, Y. y otros (2009). Unidad didáctica. Ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones. Trabajo realizado para la asignatura Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España. Disponible en: <http://funes.uniandes.edu.co/1612/>
- ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas.
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
- Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*, 58, pp. 7-23.
- Socas, M. y otros (1989). Iniciación al álgebra. Editorial Síntesis. Madrid.
- Socas, M., Camacho, M. y Hernández, J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 32, pp. 73-88.

7. ANEXO**IES PADRE SUÁREZ SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 2º ESO****13-04-2011****NOMBRE:** _____**1.- [1p]** Decide si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y por qué:a) La solución del siguiente sistema es $x=1, y=2$:

$$\begin{cases} x+2y=10 \\ 3x-y=2 \end{cases}$$

c) La solución del siguiente sistema es $x=2, y=4$:

$$\begin{cases} x+2y=10 \\ 3x-y=2 \end{cases}$$

b) La solución del siguiente sistema es $x=3/4, y=-6/7$:

$$\begin{cases} x+2y=-27/28 \\ -2x-3y=30/28 \end{cases}$$

d) La solución del siguiente sistema es $x=2, y=-3$:

$$\begin{cases} x-y=-3 \\ 3x+2y=16 \end{cases}$$

2.- [1p] En una frutería pueden verse las siguientes ofertas:**OFERTA A:**

5 melones y 2 sandías

!!! 13€ !!!

OFERTA B:

3 melones y 4 sandías

!!! 12€ !!!

Dos amigos apuestan una entrada de cine a que pueden averiguar el precio de un melón y el de una sandía. Andrea dice que cada melón cuesta 2€ y que cada sandía, 1.5€; sin embargo, Julián dice que un melón vale 1€ y una sandía 2.25€:

a) ¿Quién de los 2 lleva razón? Justifica tu respuesta.

b) Sabiendo quién lleva razón, ¿cuánto costarían entonces 8 melones y 5 sandías?

c) Ana fue el otro día a dicha frutería y pagó 18€ por 4 melones y 6 sandías. ¿El precio era correcto?

3.- [3p] Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método que se indica:

$$\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+2y=4 \end{cases} \rightarrow \text{Sustitución}$$

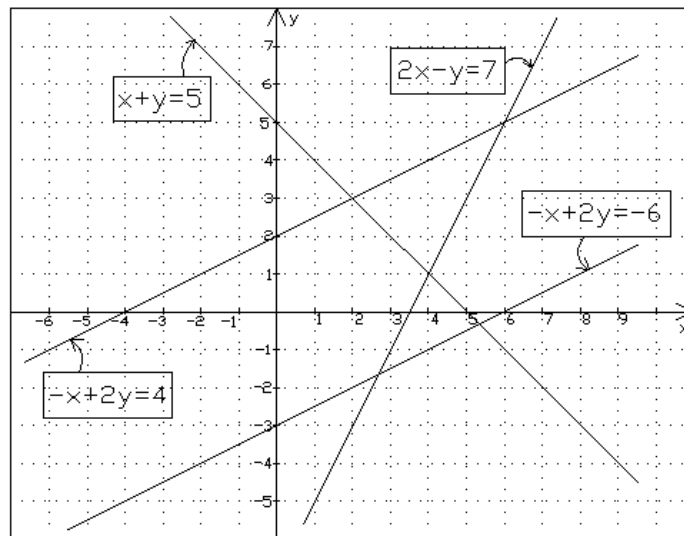
$$\begin{cases} 3x+4y=-14 \\ 2x-y=9 \end{cases} \rightarrow \text{Igualación}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 6x-4y=2 \end{cases} \rightarrow \text{Reducción}$$

4.- [2p] Un hombre tiene el triple de la edad de su hijo más tres; sin embargo, hace 3 años, su edad era el cuádruple de la de su hijo menos uno. ¿Cuáles son las edades actuales del padre y del hijo?

5.- [2p] Un fabricante de bombillas obtiene un beneficio de 0.3€ por cada bombilla que sale del taller para la venta, pero sufre una pérdida de 0.4€ por cada bombilla defectuosa que debe retirar. En un día ha fabricado 2100 bombillas, obteniendo un beneficio de 484.4€. ¿Cuántas bombillas válidas y cuántas bombillas defectuosas se han fabricado ese día?

6.- [1p] Observa el siguiente gráfico, en el que están representadas una serie de rectas con sus correspondientes ecuaciones, y responde:



a) ¿Es el punto $x=4$, $y=1$ solución de algún sistema de ecuaciones lineales que esté representado? SÍ NO

En caso de que tu respuesta sea sí, ¿qué ecuaciones forman ese sistema?

b) ¿Cuál es la solución del sistema formado por las siguientes ecuaciones?

$$\begin{cases} x+y=5 \\ -x+2y=4 \end{cases}$$

Marca la solución en el gráfico

c) ¿Es el punto $x=3$, $y=2$ solución de algún sistema de ecuaciones lineales que esté representado? SÍ NO

En caso de que tu respuesta sea sí, ¿qué ecuaciones forman ese sistema?

d) Escribe un sistema de ecuaciones lineales que esté representado en el gráfico y que no tenga solución.

7.- (Esta pregunta respóndela **en un folio aparte**, no la juntes con las demás).

Si tuvieras que explicarle a un compañero de clase qué es la solución de un sistema de ecuaciones lineales:

- c) ¿Cómo se lo explicarías con palabras?
- d) ¿Cómo se lo explicarías con un dibujo?