

**DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE GRANADA**



**TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS
ENTRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
VERBAL Y SIMBÓLICO POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA**

Trabajo Fin de Máster que presenta
SUSANA RODRÍGUEZ DOMINGO

Dirigido por las doctoras
D^a. MARTA MOLINA
D^a. MARIA CONSUELO CAÑADAS
D^a. ENCARNACIÓN CASTRO

GRANADA, 2011

**DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE GRANADA**



**TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS
ENTRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
VERBAL Y SIMBÓLICO POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA**

Trabajo Fin de Máster presentado por
D^a. Susana Rodríguez Domingo
para la obtención del título
Máster en Didáctica de la Matemática

Tutoras:

D^a. Marta Molina

D^a. María Consuelo Cañadas

D^a. Encarnación Castro

GRANADA, 2011

Esta investigación ha sido realizada en el seno del Grupo de Investigación FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada, y en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en educación matemática” del Plan Nacional de Investigación, Desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

AGRADECIMIENTOS

A las doctoras D^a. Marta Molina, D^a. María Consuelo Cañadas y D^a. Encarnación Castro, quiero expresar mi agradecimiento, por ofrecerme su orientación con buena voluntad y dedicación para realizar satisfactoriamente este trabajo, por su paciencia y confianza ofrecida.

A mis familiares, amigos y todos los que de alguna manera han colaborado conmigo en este trabajo, les expreso mi más sincero agradecimiento. Del mismo modo, quiero mostrar mi agradecimiento al grupo de estudiantes que han participado en esta investigación y han hecho posible este trabajo.

En especial, a esas personas que con sus consejos de fortaleza y entusiasmo en momentos de dificultad me han animado a emprenderme en este camino realizado.

INDICE DE CONTENIDOS

PRESENTACIÓN	1
I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	3
I.1. Motivación del problema a investigar	3
I.2. Representación algebraica en el currículo	4
I.3. Justificación de la investigación	5
I.4. Objetivos de la investigación	7
II. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES	8
II.1. Álgebra	8
II.2. Sistemas de representación	10
II.3. Errores y dificultades	13
II.4. Juegos en Educación Matemática	15
II.5. Estudios previos	19
III. MARCO METODOLÓGICO	23
III.1. Tipo de investigación realizada	23
III.2. Sujetos de estudio	24
III.3. Conocimientos previos de los sujetos	26
III.4. Diseño de la recogida de datos	27
III.5. Diseño del instrumento	28
III.6. Recogida de datos	32
III.6.1. Primera fase: completar el dominó	34
III.6.2. Segunda fase: el juego	34

IV. RESULTADOS	37
IV.1. Análisis de las producciones de los estudiantes. Fase 1: completar el dominó	37
IV.1.1. Producciones en la primera fase	38
IV.1.2. Errores	40
IV.1.3. Clasificaciones de los errores	40
IV.1.4. Análisis de los errores	42
IV.2. Análisis de las producciones de los estudiantes. Fase 2: el juego ...	50
IV.2.1. Primera ronda	50
IV.2.2. Semifinales	56
IV.2.3. Final	58
IV.3. Discusión de los resultados obtenidos	59
V. CONCLUSIONES	62
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67

PRESENTACIÓN

El estudio que aquí se presenta es un Trabajo de Fin de Máster desarrollado durante el curso académico 2010-2011, en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, por la alumna Susana Rodríguez Domingo, bajo la dirección de las doctoras D^a. Marta Molina, D^a. María Consuelo Cañadas y D^a. Encarnación Castro, quienes han colaborado en equipo junto con la estudiante del máster.

Se plantea e indaga el problema de conocer cómo los estudiantes de educación secundaria traducen y relacionan enunciados algebraicos presentados en distintos sistemas de representación. En concreto, este trabajo se centra en la traducción entre los sistemas de representación verbal y simbólico por un grupo de estudiantes de 4º de educación secundaria obligatoria de un instituto de Motril (Granada). Por enunciados algebraicos denominamos a aquellos que expresan relaciones generales entre cantidades, algunas de ellas desconocidas.

En el estudio han participado veinticuatro estudiantes que han cursado la asignatura de matemáticas opción A durante el curso académico 2010-2011, en diferentes grupos. Con objeto de motivarles en el trabajo, las tareas realizadas fueron planteadas con un dominó algebraico diseñado para esta investigación, en dos situaciones diferentes. En la primera situación los estudiantes debían construir las fichas de un dominó algebraico diseñado *ad hoc*. Para la construcción de las fichas se les proporcionó un esquema con doce fichas rectangulares y separadas en dos mitades por un segmento (a semejanza de las fichas de un dominó). En seis de dichas mitades aparecían enunciados algebraicos representados verbalmente que debían de expresar simbólicamente y en otras seis mitades enunciados expresados simbólicamente que los estudiantes debían expresar verbalmente.

En la segunda situación debían jugar con las veinticuatro fichas construidas. Doce de dichas fichas eran las que ellos habían creado previamente, las otras doce eran fichas dobles formadas por la expresión verbal y la simbólica de un mismo enunciado algebraico de los que ya existían en las fichas anteriores.

Las dos situaciones referidas nos han proporcionado los datos empíricos que hemos utilizado en este trabajo.

Estructura de la Memoria

El informe del trabajo realizado se ha organizado en cinco capítulos.

En el primero, justificamos el interés de este estudio y presentamos el problema de investigación, así como el objetivo general y los objetivos específicos que de él se derivan y lo que pretendemos alcanzar con este estudio.

En el segundo capítulo, describimos el marco teórico que sustenta este trabajo, enmarcándolo en los estudios previos realizados relacionados con el problema de investigación planteado. En este capítulo se precisa el significado de los términos clave empleados y se describe el estado de la cuestión.

El tercer capítulo está dedicado al marco metodológico. Describimos el tipo de investigación realizada y los sujetos participantes. Así mismo detallamos el instrumento de recogida de datos y describimos su proceso de elaboración y de aplicación.

El capítulo cuarto presentamos los resultados obtenidos tras analizar los datos provenientes de las dos fases en que se aplica el instrumento de recogida de información.

Finalmente, en el capítulo quinto, presentamos las conclusiones de esta investigación y se detallan las posibles vías de continuación del trabajo que hemos identificado y que serán consideradas para la posterior realización de una tesis doctoral en esta misma línea de investigación.

Acompañando a esta memoria se presentan varios anexos donde se recogen: (a) instrumento utilizado para la recogida de datos, (b) fichas construidas por los estudiantes en la primera fase de la recogida de datos, (c) transcripciones de las grabaciones de audio realizadas durante la segunda fase de la recogida de datos y (d) algunas imágenes tomadas durante dicha segunda fase.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este primer capítulo detallamos la motivación del problema de investigación planteado en este trabajo, justificamos el interés que nos lleva a realizar este estudio y presentamos el problema de investigación, a través del objetivo general y los objetivos específicos que de él se derivan.

I.1. MOTIVACIÓN DEL PROBLEMA A INVESTIGAR

La motivación del trabajo de investigación que se presenta radica en las dificultades encontradas entre el alumnado del segundo ciclo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) al manejar el lenguaje algebraico. Dicho alumnado, a pesar de que se les inicia en este campo en los cursos del primer ciclo de secundaria, siguen teniendo dificultades para relacionar el lenguaje cotidiano con el lenguaje algebraico, lo que obstaculiza su comprensión de enunciados de problemas en los que es necesario hacer uso de lenguaje algebraico para su resolución.

En el caso del álgebra, muchos docentes coinciden en que gran parte del alumnado incurre en los mismos errores de forma reiterada, síntoma de las serias dificultades que tienen en su aprendizaje.

La experiencia profesional de la investigadora es breve pero variada: He impartido durante ocho años clases particulares y soy funcionaria del cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria de la Junta de Andalucía desde 2006. Desde dicha fecha he impartido docencia en tres centros educativos diferentes: I.E.S. Blas Infante, de Ogíjares (Granada), durante los cursos 2006-2007 y 2007-2008; I.E.S. Pablo de Olavide, de La Carolina (Jaén), durante los cursos 2008-2009 y 2009-2010; e I.E.S. Francisco Javier de Burgos, de Motril (Granada), en el presente curso escolar 2010-2011. Una de las razones que motivó mi interés por el Máster en Didáctica de la Matemática fue profundizar en la comprensión del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para enriquecer mi formación como docente e iniciarme en la actividad investigadora.

En este tiempo como docente he observado que se dedica un amplio período de tiempo en ESO y Bachillerato a la práctica de traducciones de enunciados algebraicos del sistema verbal al simbólico, en diferentes contextos pero, a pesar de ello, los estudiantes siguen teniendo dificultades e incurren en errores en el dominio de este tipo de traducciones y de técnicas algebraicas básicas.

A raíz de estas observaciones, crece mi interés por conocer e indagar sobre este tema por lo que en este trabajo nos proponemos analizar los errores cometidos por los estudiantes al traducir enunciados algebraicos del sistema de representación verbal al simbólico, y viceversa. Se espera que este trabajo sea de utilidad para mejorar la enseñanza del álgebra, principalmente lo que refiere a los procesos de traducción entre ambos sistemas de representación mencionados. Disminuir los errores identificados y descritos en este trabajo en procesos de traducción entre representaciones ayudaría en lo que se puede considerar la razón de ser del álgebra: la resolución de problemas. Nuestro estudio se centra en un punto clave en la resolución de problemas ya que para resolver problemas contextualizados mediante el uso del álgebra, el primer paso es traducir un enunciado verbal a su representación simbólica y, a partir de ahí, manipular la expresión algebraica mediante las normas de operaciones que establece el propio lenguaje algebraico.

I.2. REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA EN EL CURRÍCULO

En relación con el tema que se aborda en este trabajo, los documentos curriculares vigentes para la educación secundaria en España (Boletín Oficial del Estado, 2006) y Andalucía (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 2007a), comunidad autónoma a la que pertenece el centro donde cursan sus estudios los sujetos participantes en esta investigación, destacan entre las expectativas de aprendizaje de esta etapa que los estudiantes sean capaces de utilizar adecuadamente el lenguaje algebraico y traducir entre este lenguaje y el verbal, enfatizando la importancia del mismo para la comunicación en contextos matemáticos o científicos e incluso de otros ámbitos de la actividad humana. Los siguientes extractos, procedentes de ambos documentos curriculares, lo ponen de manifiesto:

Todos los bloques de contenidos deben estar orientados a “aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática, y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas adecuadas” (Boletín Oficial del Estado, 2006, p. 687).

La adecuada utilización progresiva de símbolos y expresiones contribuirá al desarrollo natural de las destrezas algebraicas, que se facilitará con la lectura e interpretación simbólica de las situaciones problemáticas que se planteen y, en sentido inverso, con la traducción al lenguaje verbal de expresiones y resultados

algebraicos. De esta manera, las Matemáticas deberán concebirse, entre otras muchas cosas, como un vehículo de comunicación y expresión de ideas, que contribuirá a la comprensión de otras materias (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 2007b, p. 53 y 54).

Los criterios de evaluación que se proponen en ambos documentos pretenden comprobar si el alumnado puede manipular expresiones algebraicas así como hacer uso de estas manipulaciones para enfrentarse a problemas de la vida cotidiana, señalando la importancia de saber traducir situaciones reales al lenguaje algebraico.

En 4º curso de ESO, curso al que pertenecen los sujetos de este estudio, dentro del bloque de álgebra de la materia de matemáticas opción A se establece que se debe trabajar el

manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos. Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos (Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 2007a, p. 758).

I.3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Dadas las numerosas dificultades que evidencian los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, este campo es de gran interés para la investigación en Educación Matemática, y así lo ponen de manifiesto diferentes investigaciones, tanto a nivel internacional como nacional. Estudios previos como los realizados por Arcavi (1994), Bednarz, Kieran y Lee (1996) o Kaput (1998, 2000) han planteado la problemática existente en la adquisición de dominio y comprensión del lenguaje algebraico.

En esta línea de trabajo entre los estudios previos consultados, destacamos los que se han venido desarrollando en la Universidad de La Laguna. Socas (1997) establece algunos criterios para clasificar errores según distintos aspectos a tener en cuenta de los enunciados algebraicos propuestos a los estudiantes. Palarea (1998), en su tesis doctoral titulada *La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*, insiste en la importancia de analizar las dificultades y los errores en que incurren los estudiantes en el álgebra pues “estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso

normal de construcción del conocimiento matemático, pero los profesores tienen que conocerlas y reflexionar sobre ellas para facilitar su explicitación por parte de los alumnos” (p. 74). Probablemente, los docentes

necesitemos enseñar menos directamente y dedicar más tiempo a conocer lo que piensan los alumnos, discutiendo con ellos a nivel intuitivo acerca de sus concepciones erróneas y presentarles luego situaciones matemáticas para seguir pensando en aquello que les permite reajustar sus ideas (p. 78).

Ruano, Socas y Palarea (2008) continúan en esta línea de trabajo realizando un análisis y una clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. Concluyen con algunas consecuencias didácticas tras el estudio realizado.

Estudios como los mencionados justifican el interés de este trabajo fin de máster sobre el aprendizaje del Álgebra por estudiantes de secundaria, que se espera continuar, en mayor profundidad, para realizar una tesis doctoral.

En general, se ha encontrado en la literatura de Educación Matemática un escaso número de trabajos que hayan explorado los procesos de traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico. El paso del lenguaje verbal al simbólico ha sido abordado en algunas investigaciones centradas en la resolución de problemas (Clement, 1982; Clement, Lochhead y Monk, 1981), como uno de los pasos iniciales al abordar un problema resoluble algebraicamente. Menor atención ha recibido la traducción del sistema de representación simbólico al verbal, habiendo sido abordada desde estudios que exploran el papel de la escritura verbal en el aprendizaje del álgebra (Wollman, 1983; MacGregor, 1990). Consideramos que el análisis de los procesos de traducción en los dos sentidos pueden ser de utilidad para: (a) profundizar en la comprensión que poseen de los estudiantes del lenguaje simbólico y ayudar en la exploración de estrategias de enseñanza en el aprendizaje del álgebra e (b) indagar sobre las dificultades que tienen para escribir simbólicamente aquello que pueden encontrar enunciado de forma verbal.

El trabajo que realizamos se enmarca dentro del grupo de investigación FQM-193: “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico” de la Universidad de Granada. Este grupo está interesado, entre otros aspectos, en el estudio de las dificultades que los jóvenes encuentran en el manejo de las estructuras numéricas cuando se enfrentan a nociones de matemática avanzada. Se ocupa del aprendizaje de conceptos numéricos en

el sistema escolar y de la utilidad que tiene la noción de representación para analizar e interpretar la comprensión de tales conceptos por parte de los escolares. Dentro de dicho grupo, esta investigación se desarrolla en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en Educación Matemática” del Plan Nacional de Investigación, desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España, estando relacionada con dos de los objetivos principales de dicho proyecto: (a) profundizar en el papel que juegan las representaciones en la resolución de problemas matemáticos en los niveles escolares y (b) caracterizar dificultades y obstáculos relacionadas con el empleo de distintas representaciones en la resolución de problemas de matemáticas. Diferentes trabajos de este grupo han contribuido a estos objetivos, como se presentará en los antecedentes de este trabajo.

I.4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

El **objetivo general** del trabajo es analizar el proceso de traducción que realizan estudiantes de educación secundaria entre los sistemas de representación verbal y simbólico (en ambos sentidos), de enunciados generales de relaciones numéricas. El análisis de este proceso constituye un primer paso en la indagación sobre la capacidad de estos estudiantes para realizar dicha traducción y en su comprensión de los enunciados en cada uno de los sistemas de representación mencionados.

Este objetivo general se concreta en los siguientes **objetivos específicos**:

1. Construir un instrumento que permita explorar el proceso de traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal.
2. Analizar y clasificar los errores en los que incurren los estudiantes al realizar dichas traducciones.
3. Describir las relaciones que los estudiantes ponen de manifiesto entre diferentes representaciones de un mismo enunciado algebraico, así como las explicaciones que dan a las mismas.

Tomando estos objetivos como referencia, hemos elaborado la fundamentación teórica de este trabajo, el diseño de la recogida de datos y el análisis de los datos obtenidos.

II. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En este capítulo presentamos el marco teórico de esta investigación el cual se organiza en torno a los siguientes términos clave: álgebra y lenguaje algebraico, sistemas de representación, errores y dificultades, y juego (en concreto, el juego del dominó). La información que se presenta permite enmarcar la investigación realizada y precisar el significado de los términos que utilizamos. También se describe el estado de la cuestión en relación con el problema de investigación, sintetizando los resultados de los principales estudios previos consultados.

II.1. ÁLGEBRA

El Álgebra se considera una parte de las matemáticas que *trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, de las estructuras matemáticas, y, de las operaciones de esas estructuras. En este sentido, el Álgebra escolar se interpreta como una "aritmética generalizada" y como tal involucra la formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas* (Palarea 1998, p. 36).

Aunque esta consideración se tuvo en cuenta en la implantación de la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) para orientar la enseñanza del álgebra escolar, con los cambios sufridos en el sistema educativo español desde entonces, ha ido cambiando (Palarea, 1998). Actualmente, el Álgebra aparece de manera transversal a lo largo de todos los bloques de enseñanza y se puede considerar “como una de las partes de la Matemática que influye considerablemente [...] favoreciendo la potencia y simplicidad de sus propios lenguajes y métodos” (p. 37).

La concepción actual del Álgebra es multidimensional englobando el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, el desarrollo y la manipulación del simbolismo, y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Bednarz et al., 1996; Kaput, 1998, 2000).

Se reconoce una fuerte conexión del Álgebra con la generalización. Se tiene en cuenta como una herramienta para la comprensión, expresión y comunicación de generalizaciones, para revelar estructura, para establecer conexiones y para formalizar los argumentos matemáticos (Arcavi, 1994; Gómez, 1995).

Así mismo, el Álgebra se considera un lenguaje. Ésta es una idea extendida en la Educación Matemática. Autores como Caspi y Sfard (2011) profundizan en ella y, tras realizar análisis de estudios de otros autores como Lee (1996), destacan que se trata de un “discurso, esto es, una forma de comunicación” (p. 1).

Drijvers y Hendrikus (2003) distinguen cuatro enfoques en el tratamiento del Álgebra en la literatura existente: (a) el Álgebra como un medio para resolver problemas, (b) el estudio de las funciones, es decir, de relaciones entre variables, (c) generalización de relaciones y el estudio de patrones y estructuras; y (d) el Álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, centrado en el lenguaje.

Hasta hace más de una década, en la investigación relacionada con la enseñanza y aprendizaje del Álgebra, había una asunción implícita de que el pensamiento algebraico y, por tanto, el Álgebra, sólo podía tener lugar ante la presencia del lenguaje simbólico (Drijvers y Hendrikus, 2003; Sutherland, Rojano, Bell y Lins, 2001). Actualmente, como ponen de manifiesto las consideraciones anteriores sobre qué es el Álgebra, el uso del simbolismo algebraico sigue considerándose un elemento esencial del Álgebra escolar pero se adopta una concepción más amplia de esta sub-área de las matemáticas (Molina, 2006).

Desde esta perspectiva, autores como Bell (1988) y Bednarz et al. (1996) insisten en que sólo un equilibrio entre las diferentes componentes del Álgebra, y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, puede permitir al alumnado comprender en profundidad la pertinencia del Álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico. Con este objetivo diversos investigadores se han interesado en distinguir las tareas que se pueden considerar algebraicas (por ejemplo, Ake, 2010; Blanton y Kaput, 2005).

A nivel internacional, se hacen críticas en la enseñanza tradicional del Álgebra, basadas principalmente en la gran cantidad de jóvenes “que fracasan en este área y dejan de estudiar matemáticas, la falta de conexión entre el Álgebra y las demás áreas de las matemáticas y la ausencia de significado en el aprendizaje algebraico adquirido por los estudiantes” (Molina y Castro, 2006, p. 1). Estas críticas han motivado un creciente interés en la investigación de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra. La resolución de problemas ha sido uno de los contextos utilizados en dichas investigaciones. Cañadas (2007) recoge diferentes trabajos que han abordado diferentes

objetivos relacionados con el álgebra y, particularmente, la generalización desde una metodología centrada en la resolución de problemas en la última década.

En este contexto surge la distinción entre diferentes tipos de problemas donde el Álgebra juega un papel en la resolución. Ruano et al. (2008) hacen depender la distinción entre un problema aritmético y uno algebraico del sistema de representación elegido para su resolución. Otros autores como Fernández (2001) o Lesh, Post y Behr (1987) hacen esta distinción puntualizando que el problema algebraico requiere “primero describir y después calcular”. Al igual que Fernández (2001), consideramos la interpretación de investigadores como Kieran y Filloy (1989), teniendo en cuenta que “la elección de un sistema de representación más cercano al campo de la Aritmética o del Álgebra para su resolución depende, en gran medida, del resolutor y no del problema en sí” (Fernández, 2001, p. 140).

II.2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

La idea de sistemas de representación no es clara ni fácil de describir, una muestra de esto es que se encuentran diferentes definiciones al hacer una búsqueda en la literatura especializada de Educación Matemática. En relación con los sistemas de representación encontramos una terminología variada como *símbolos*, *sistemas matemáticos de signos*, *sistemas de notación*, *sistemas de registros semióticos*, *objetos ostensivos o sistemas de representación* (Cañadas, 2007). La distinción entre el significado de las diferentes términos depende del marco teórico de referencia. En este apartado utilizamos la idea de representación como base para llegar a concretar la idea de sistema de representación. Esta idea se basa fundamentalmente en los trabajos previos que se han venido desarrollando en el grupo de investigación en el que se enmarca este trabajo.

Representación

El uso que se da en la filosofía contemporánea del término “representación” es para referirse a cualquier “cosa” que puede evaluarse semánticamente (Dancing y Sosa, 1993). Desde este planteamiento son representaciones las expresiones simbólicas, los enunciados, los diagramas, los gráficos y otras notaciones usuales de las matemáticas. Todos ellos son objeto de estudio en matemáticas.

Desde la Educación Matemática y de acuerdo con Rico (2000,2009), entendemos por representación todas aquellas herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares

abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas. Como afirman Castro, Rico y Romero (1997), el concepto de representación “da por supuesta la consideración de dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas” (p. 362). De forma análoga, Godino (2003) distingue la representación como una relación de correspondencia entre los objetos al poner uno de ellos en lugar de otro.

Cada concepto matemático se puede representar de diferentes modos y “cada uno de los modos distintos de representar un mismo concepto matemático proporciona una caracterización diferente de dicho concepto; no hay un único sistema capaz de agotar en su totalidad la complejidad de las relaciones que cada concepto matemático encierra” (Castro y Castro, 1997, p.103). En relación con esta afirmación Gairín (1998) acusa a la comunidad matemática de identificar cada concepto con una de sus representaciones prioritarias y simplificar las conexiones entre los diversos sistemas de representación, dificultando así la comprensión de los aprendices.

Usando “las representaciones, las personas organizan la información de un concepto u operación para poder pensar sobre ellos, expresar su comprensión, y utilizarla en situaciones y problemas prácticos o en situaciones de un determinado concepto” (Rico, 1997b, p. 53).

Usualmente se distingue entre dos tipos de representaciones: *representaciones internas* y *representaciones externas* (Goldin, 2002). Para pensar y razonar sobre ideas matemáticas es preciso formarse una representación interna de las mismas, de modo que la mente tenga posibilidad de operar con ellas. Investigadores como Castro (1995), Hiebert y Carpenter (1992) destacan que para comunicar estas ideas es preciso realizar una representación externa. Esta dualidad de la noción de representación le convierte en un instrumento adecuado para el estudio de la comprensión, pues cada concepto para ser comprendido necesita el uso de más de un sistema de representación.

Las representaciones externas actúan como estímulo para los sentidos y permiten la expresión de los conceptos e ideas a los sujetos en los procesos de construcción de nuevas estructuras mentales (Duval, 1993). Las representaciones externas “como son los enunciados en el lenguaje natural, las fórmulas algebraicas, las gráficas, las figuras geométricas, entre otras muchas, son el medio por el cual los individuos exteriorizan sus imágenes y representaciones mentales, haciéndolas accesibles a los demás” (Rico, 1997b, p.101).

En esta investigación nos centramos en las representaciones externas, pues es lo que se puede observar en la manipulación y los procesos de comunicación de los estudiantes.

Sistemas de Representación

Las distintas formas de representación de un mismo concepto matemático permiten hablar de estructuras más generales que contienen a las representaciones, entre ellas los sistemas de representación (Cañadas, 2007). En el trabajo de Castro et al. (1997) se pone de manifiesto que el conjunto de signos, símbolos y reglas para expresar o representar una estructura matemática ha de responder a su carácter sistémico, por ello se habla de *sistemas matemáticos de signos* (Kieran y Filloy, 1989), *sistemas de notación* (Kaput, 1992) o *sistemas semióticos* (Duval, 1993).

Guiadas por el trabajo llevado a cabo por el grupo de investigación “Didáctica de la Matemática” de la Universidad de Granada en la línea de Pensamiento Numérico, llamamos *sistemas de representación* al conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permite representar una estructura matemática y que sigue cierta sistematización. Se enfatiza la importancia de que no hay sistema de representación que agote en su totalidad la complejidad que encierra cada concepto matemático. Por lo general, los conceptos matemáticos disponen de más de un sistema de representación. Cada uno de estos sistemas, destaca y pone de manifiesto algunas propiedades importantes del concepto, a la vez que oculta o dificulta la expresión de otras propiedades (Rico, 1997b; Gómez, 2007).

La comprensión de cualquier concepto matemático se potencia con la utilización de más de un sistema de representación del mismo y la facilidad para realizar traducciones de uno a otro de dichos sistemas. La traducción entre sistemas de representación hace referencia al procedimiento que relaciona un mismo objeto expresado en diferentes sistemas de representación (Castro y Castro, 1997; Gómez, 2007).

Estas transformaciones son fundamentales en la adquisición de conceptos y en la resolución de problemas (Cifarelli, 1998; García, 2000; Lesh et al., 1987; Schultz y Waters, 2000). En particular, la consideración de diferentes sistemas de representación y la habilidad en la traducción (o falta de ésta) es un factor que afecta al rendimiento en la resolución de problemas (Villegas, 2002). Autores como Friedlander y Tabach (2001) señalan que el estudiante será mejor solucionando problemas algebraicos si desde temprana edad se mueve fácilmente de una representación a otra.

Esta virtud de los sistemas de representación la destaca Rico (1997a) al considerar los sistemas de representación como un organizador del currículo.

En este trabajo nos centramos en los sistemas de representación simbólico y verbal los cuales se consideran frecuentemente para representar diferentes conceptos matemáticos. El sistema de representación simbólico se caracteriza por el empleo de forma escrita de números (numerales) y letras y signos característicos de la aritmética, mientras que el sistema de representación verbal está determinado por el uso del lenguaje cotidiano (Cañadas, 2007) incluyendo, en ocasiones, terminología específica del lenguaje matemático académico. De este modo, un ejemplo de enunciado algebraico en representación verbal es: un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos. Su traducción al sistema de representación simbólico es $x + (x + 1) = y - 2$.

Socas (1997) considera que el uso del lenguaje habitual en la representación verbal favorece la interpretación de los signos utilizados en el lenguaje algebraico pero hay que considerar que el lenguaje matemático es más preciso que el lenguaje natural ya que está sometido a unas reglas exactas y es necesario interpretar de manera correcta los signos utilizados. Del mismo modo, es necesario cuidar el uso de ciertas palabras que según el contexto en el que se utilicen pueden ocasionar confusiones de conceptos. Así mismo, tener en cuenta el orden en que se enuncia una expresión algebraica pues es necesario entender si se está haciendo de manera secuencial o no.

II.3. ERRORES Y DIFICULTADES

Los errores son esquemas cognitivos inapropiados y perjudiciales para una determinada situación; son intentos no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación (Matz, 1980). Un error es un “esquema cognitivo inadecuado y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o un despiste” (Socas, 1997, p. 125).

Pese a que todos incurrimos en errores, éstos suelen tener connotaciones negativas en la escuela, y parece ser que más en matemáticas. Quizás porque las matemáticas son consideradas las ciencias exactas, no se permite la equivocación; pero si se supone que la escuela sirve para aprender para la vida, es necesario reivindicar en ella el derecho para el error (Corbalán, 1994). Rico (1995) reivindica que el error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos.

El estudio de los errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es de gran relevancia porque, entre otras cosas, permite conocer la naturaleza de nociones matemáticas fundamentales. Los errores pueden tener diferente procedencia. Uno de los focos de los errores son las dificultades. Esto justifica que numerosos trabajos traten de forma conjunta errores y dificultades. Como pone de manifiesto Socas (2007), las dificultades y los errores en el aprendizaje de las matemáticas es un tema de investigación en Educación Matemática en el que hay cuestiones significativas aún por resolver, a pesar de su antigüedad, de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos usados para interpretar los resultados.

Para realizar un análisis de las dificultades y errores del alumnado en la construcción del conocimiento matemático debemos tener en cuenta que las dificultades, normalmente, no pueden evitarse porque forman parte del proceso de construcción del conocimiento matemático (Palarea, 1998). El profesorado debe conocerlas y reflexionar sobre ellas para conducir mejor la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Así mismo, conocer los errores básicos que comete el alumnado es clave para el aprendizaje de cuestiones más complejas (Socas, 1997). Los errores dan información sobre las dificultades que presentan contenidos específicos de matemáticas y a las que es necesario prestar atención en la enseñanza.

Esta necesidad del profesorado por conocer los errores y dificultades propios de un tema son los que llevan a Rico (1997a) a considerar los errores y dificultades como un organizador del currículo.

Caracterización de Errores en Álgebra

Como una primera caracterización de los errores que cometen los estudiantes en contextos algebraicos, Socas (1997, p. 144) propone tres direcciones para abordar estos errores, que estarían determinados por:

1. Errores que tienen su origen en un obstáculo.
2. Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.
3. Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

Como primer eje, errores que tienen su origen en un obstáculo, considera que el alumnado, al comenzar con sus estudios de Álgebra, suele ver las expresiones algebraicas como enunciados incompletos. Por ejemplo, al encontrar situaciones donde la operación de adición ya no significa lo mismo que en Aritmética. Dentro de este eje

también tiene cabida la yuxtaposición de símbolos en el lenguaje algebraico, donde $5x$ suele notar “5 veces x ” el alumnado tiende a sustituir un valor por x y convertirlo en un número de dos cifras, por ejemplo 53.

En el segundo eje están los errores que tienen su origen en ausencia de sentido, donde tiene cabida errores que derivan de la Aritmética como es el uso de fracciones, de paréntesis o de potencias, y los errores en los procedimientos. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente, por falta de linealidad de estos operadores (p. 146). También se encuentran los errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva, de las reglas de potencias como el desarrollo de las identidades notables o errores de cancelación. Este tipo de errores indican que los alumnos tienden a generalizar procedimientos que se verifican en determinadas ocasiones. Dentro de este segundo eje, se recogen también los errores causados por las características propias del lenguaje algebraico, que se manifiesta “en diferentes procesos matemáticos, tales como: generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural y particularización” (p. 148).

En el tercer eje están los errores que se deben a la falta de actitud racional hacia las matemáticas, que se pueden llamar “casuales o de descuido [...] que van desde una excesiva confianza en la tarea matemática hasta un bloqueo que le incapacita para la citada tarea” (Socas, 1997, p.152).

En este trabajo tomamos como base esta clasificación de errores, que adaptaremos hasta conseguir una categorización de errores adaptada a nuestro estudio.

II.4. JUEGOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En Educación Matemática existe un interés por potenciar la utilización de los juegos como mediadores para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Desde edades tempranas, el aprendizaje de los niños se desarrolla en un entorno de juego (Edo, Baeza, Deulofeu y Badillo, 2008) y su importancia es destacada por psicólogos de prestigio internacional como Vygotski, quien subraya su papel en la generación de aprendizaje y afirma que el juego crea una zona de desarrollo próximo en el niño, y por investigadores del área de Didáctica de la Matemática. “El juego proporciona beneficios cognitivos, sociales y morales que, no sólo no debe coartarse en ninguna etapa del desarrollo del niño, ni posteriormente de adulto, sino que debe potenciarse” (Edo et al. 2008, p. 62). Actualmente se disponen de pocos datos que permiten establecer conclusiones de la

relación entre la construcción del conocimiento matemático y situaciones didácticas donde se usen juegos.

Pero, ¿qué es un juego? Hay diferentes definiciones, algunas de las cuales se pueden ajustar a contextos educativos. Se puede decir del juego, en general, que es un conjunto de actividades que un individuo realiza por mero placer. El juego se manifiesta como una forma natural de la actividad humana, que aparece en época muy temprana de la infancia y continúa a lo largo de la vida adulta (Castro, Olmo y Castro (2002).

Destacamos que un juego es una ocupación voluntaria que cumple un conjunto de reglas bien definidas y que termina tras un número finito de movimientos (Corbalán, 1994). De Guzmán (1984) resalta que “la matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse, mediante instrumentos matemáticos” (p. 7). Este autor destaca que la organización de actividades lúdicas puede incidir en la visión de las matemáticas que se forman los estudiantes, pues puede ayudar a que las consideren como una ciencia divertida.

Deulofeu (2011) utiliza el número de sujetos participantes en el juego y el objetivo del mismo para distinguir entre *recreaciones matemáticas* y *juegos matemáticos*. Las recreaciones matemáticas “son problemas de carácter lúdico que una persona debe tratar de resolver y un juego es una actividad en la que participan por lo menos dos personas, siendo el primer objetivo de los jugadores ganar a sus adversarios” (p. 16).

Otros autores definen el juego como

una actividad colectiva basada en reglas fijas, sencillas, comprensibles y asumidas por todos los participantes. Las reglas establecerán no sólo los objetivos para el conjunto de jugadores, sino también los objetivos específicos de cada uno de los participantes que deberán buscar las estrategias para bloquear y/o ganar al resto de los participantes (Edo, Deulofeu y Badillo, 2007, p. 62).

En ocasiones los juegos se relacionan con los materiales didácticos a utilizar en el aula. Contreras (2004) indica que un material estructurado puede ser válido como medio didáctico para aprender conceptos matemáticos y, dentro de los materiales, los juegos aparecen en primer lugar por su enorme atractivo para los adolescentes. El presentar un material en forma de juego aprovecha el impulso hacia la diversión de los niños y jóvenes, consiguiendo con él un aprendizaje más eficaz.

Ventajas del Uso del Juego en la Enseñanza de las Matemáticas

Castro y col. (2002) recogen los principios pedagógicos que Moyles (1990) otorga al juego, entre ellos aparecen: (a) El juego no es la antítesis de trabajo: ambos forman parte de las actividades de los individuos en la vida; (b) el juego es potencialmente un excelente medio de aprendizaje.

Entre las ventajas que proporciona el uso de juegos en la enseñanza destaca el romper “con la rutina de los ejercicios mecánicos [...] proporcionando al alumno una mayor motivación y estímulo” (Chacón, 1992, p. 14). Otra de las ventajas es que

el juego ofrece a los estudiantes es la oportunidad de ganar o perder, esto les sirve para estimular cualidades personales y sociales como la auto-estima-autovaloración, la confianza, la cooperación, el reconocimiento de los éxitos de los compañeros y compañeras, etc. El juego va a requerir también del alumnado una participación más activa en el proceso de aprendizaje. Ayuda a desarrollar hábitos y actitudes positivas frente al trabajo escolar (pp. 16-17)

Parece claro que el uso de juegos en el aula debe proporcionar a nuestros alumnos/as a través de las matemáticas la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos. Con el juego, el alumnado se encuentra más activo mentalmente que cuando trabaja con otra metodología, lo que confirma el potencial motivador de los juegos como instrumento metodológico de enseñanza.

De Guzmán (1984) establece además que “el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático” (p. 3). Este autor asegura que el interés de los matemáticos de todos los tiempos por los juegos respalda el hecho de que son muchos los juegos con un contenido matemático profundo y sugerente, y que, además, parte de la matemática tiene un sabor lúdico. De Guzmán argumenta que los instrumentos que deben utilizarse en las aulas

debe consistir en el estímulo de su propia acción, colocándole en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que mejor pueden conducir a la adquisición de las actitudes básicas más características que se pretende transmitir con el cultivo de cada materia (p. 10).

Como mencionan Edo y Deulofeu (2006), muchos juegos utilizan la matemática en su desarrollo, por sus relaciones numéricas, por sus relaciones geométricas o por las características de algunos juegos que requieren el desarrollo de estrategias para intentar realizar la mejor jugada, de este modo, el uso de juegos en el marco escolar puede tomar como finalidad la comprensión de conceptos o la mejora de técnicas, o bien la adquisición de métodos de resolución de problemas.

Por otro lado, Corbalán (1994) destaca la importancia del uso de los juegos educativos en el aula y relaciona su uso con el agrado que puede producir en el aprendizaje, recogiendo ideas de investigadores como Alsina (1991) quien afirma que

Enseñar y aprender matemáticas puede y debe ser una experiencia feliz. Curiosamente casi nunca se cita a la felicidad dentro de los objetivos educativos pero es bastante evidente que sólo podremos hablar de una labor docente bien hecha cuando todos alcancemos un grado de felicidad satisfactorio (Corbalán, 1994, p. 14).

En cuanto a la relación entre juego y errores, este autor propone que la práctica sistemática de juegos matemáticos es una buena manera de autocorrección de errores, pues si se cometen errores se pierden las partidas del juego. Destaca que la detección y el tratamiento de errores y dificultades en el aprendizaje es una de las funciones del empleo del juego en la enseñanza.

No obstante, la selección y/o diseño de juegos para la enseñanza debe hacerse con sumo cuidado. El Informe Cockcroft (1985) recomienda, a cualquier edad y en cualquier nivel de conocimientos del alumnado, la utilización bien planificada de puzzles y juegos matemáticos para contribuir a clarificar ideas de programa y para desarrollar el pensamiento lógico.

Hay una gran cantidad de juegos conocidos popularmente que se han ido adaptando con los años a las aulas. Muchos de ellos requieren de una serie de procesos típicos del quehacer matemático. En relación con esta investigación, mencionados algunas de las variedades de dominós que existen en el mercado los cuales sirven para practicar la resolución de ecuaciones sencillas, para relacionar el cálculo de áreas con las fórmulas correspondientes, emparejar figuras con misma superficie, asociar funciones y su representación gráfica, etc. En los trabajos de Contreras (2004, p. 26) se presentan algunos ejemplos de dominós algebraicos donde intervienen elementos como ecuaciones, potencias, áreas y fórmulas. También se comercializan dominós de operaciones y números que permiten practicar el cálculo mental. Entre los materiales

diferentes al dominó, que pretenden fomentar el aprendizaje del álgebra, cabe mencionar el puzzle algebraico utilizado por Domínguez, Hernández, Muñoz, Palarea, Ruano y Socas (2006).

II.5. ESTUDIOS PREVIOS

En este apartado resaltamos los principales trabajos de investigación relacionados con nuestro tema de estudio y que constituyen los antecedentes del mismo.

Investigaciones previas han determinado el interés existente en la investigación en Educación Matemática por el estudio de las dificultades que los jóvenes encuentran en el manejo de las estructuras numérica y por la utilidad de la noción de representación para analizar e interpretar la comprensión de conceptos numéricos por parte de estudiantes. Centramos nuestra atención aquí en los trabajos previos relacionados con los errores en que incurren los estudiantes en el trabajo con el simbolismo algebraico por ser los más cercanos al problema de investigación considerado. Sintetizamos los resultados mostrados para dar una idea del estado de la cuestión en relación con nuestro problema de investigación.

Booth (1982) investigó el tipo de expresiones algebraicas que los alumnos consideran equivalentes. Concluyó que los alumnos interpretaban las expresiones de manera diferente según el contexto, ignorando las convenciones del orden de las operaciones. Los alumnos mostraron haber adoptado la siguiente regla: “Una expresión algebraica se resuelve siempre de izquierda a derecha a menos que el contexto especifique que otra operación debe realizarse previamente”. Según esto, un par de expresiones pueden ser equivalentes en un contexto y no serlo en otro. Este modo de proceder elimina la necesidad del orden de las operaciones o el uso de paréntesis, reglas que sólo son utilizadas en actividades específicas para su práctica.

Wollman (1983) determina fuentes de error en la traducción de enunciados algebraicos verbales a su representación simbólica. Menciona cómo en los libros de texto de álgebra escolar, se suele poner énfasis en que los estudiantes aprendan una *habilidad mecánica* (p. 169), de modo que el problema consiste en trabajar con una ecuación dada. Una conclusión de su estudio es que la inclusión de contexto no influye en la traducción de enunciados.

Este autor cita trabajos de otros investigados como Clement et al. (1981), quienes estudian los errores generalizados de estudiantes de educación superior al traducir

enunciados verbales a su representación simbólica. Estos estudios se realizaron mediante pruebas escritas y, en algunos casos, se complementaron posteriormente con una entrevista individual. Estos autores aportan información que revela debilidades de los estudiantes en la traducción de enunciados y sugieren que los estudiantes no se benefician del contexto en el proceso de traducción.

MacGregor y Stacey (1993) muestran cómo los estudiantes producen formulaciones incorrectas de ecuaciones lineales con dos incógnitas al traducir enunciados algebraicos. Analizan la traducción de enunciados algebraicos verbales a su expresión simbólica, indicando que se puede realizar de dos maneras: mediante la traducción directa de las palabras clave o tratando de expresar el sentido del enunciado. Estos autores concluyen que se producen errores con mayor frecuencia mediante la primera forma y explican la importancia de la interacción del lenguaje y el aprendizaje de las matemáticas, pues las características del lenguaje natural pueden en ocasiones actuar como un obstáculo e inducir al error al traducir enunciados algebraicos. Las conclusiones de estos trabajos advierten la incidencia del lenguaje natural sobre la comprensión matemática y que, en ocasiones, no es sencillo representar las ideas en el lenguaje formal que las matemáticas requieren. Destacan que los estudiantes deben ser conscientes de que ciertas relaciones fáciles de expresar en el lenguaje natural precisan de cierta reorganización o reinterpretación antes de ser traducidas al lenguaje algebraico.

El grupo de trabajo en la Universidad de la Laguna en Didáctica de la Matemática (Tenerife) ha venido investigando en cuestiones relacionadas con los errores que estudiantes de secundaria evidencian en el aprendizaje del álgebra. Ruano, Socas y Palarea (2008) presentan un estudio con alumnos de educación secundaria sobre tres procesos específicos del lenguaje algebraico (sustitución formal, generalización y modelización). Realizan un análisis de errores y las consecuencias didácticas que se derivan de estos. En este trabajo, además, se menciona la importancia que tiene para el profesor el conocer los errores que cometen sus alumnos/as, pues le servirá para arbitrar procedimientos y remedios efectivos de ayuda para corregir dicho errores y, en lo sucesivo, poder evitarlos. Los autores identifican algunos errores recurrentes relacionados con la necesidad de clausura, la particularización de expresiones, el uso incorrecto del paréntesis y la confusión de la multiplicación y la potencia. Destacan que “parece conveniente prestar especial atención a la prevención y remedio de estos errores en el tratamiento del lenguaje algebraico” (p. 72). Determinan también que otros errores

de los que han analizado, tienen su origen en una ausencia de sentido, destacando la importancia de “identificarlos para tratar de corregirlos en el ámbito aritmético y que no sean un problema añadido a la hora de introducir el álgebra” (p. 72).

Diversas investigaciones tratan de indagar sobre la razón de los obstáculos que encuentran los estudiantes con el álgebra y aportan opciones que ayuden a la superación de obstáculos relacionados con el álgebra. Así, Collis (1975) hace consideraciones sobre el uso y significado que los alumnos hacen y atribuyen a las letras. Enfedaque (1990) llevó a cabo un estudio con alumnos de 8º de EGB, de 1º y de 2º de BUP (13-16 años) en Barcelona. Este trabajo aportó algunas sugerencias sobre cómo introducir el uso de las letras en Álgebra para disminuir los errores, así como algunas cuestiones sobre la actitud del profesorado para detectar los anteriores y poder mejorar la competencia algebraica de los alumnos.

Cañadas y Castro (2002) centran su interés en el análisis de los errores en la resolución de problemas de carácter inductivo y llevan a cabo un análisis de los mismos. En un trabajo posterior (Cañadas, Castro y Castro, 2008) se interesan por los sistemas de representación empleados por estudiantes de secundaria en el proceso de generalización. Observan una mayor tendencia a utilizar la representación verbal en la expresión de la generalización y al explicar sus respuestas.

Desde hace casi dos décadas, desde la propuesta *Early Algebra* se han abordado investigaciones dirigidas a mejorar las propuestas didácticas existentes, tratando de incorporar el álgebra desde edades más tempranas a las habituales (Cai y Knuth, 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, Carraher y Blanton, 2009; Molina, 2009). En este sentido, Molina y Castro (2006) señalan la importancia de desarrollar el pensamiento algebraico desde la educación primaria, algo que puede ayudar a solventar algunos de los obstáculos con los que se encuentran los estudiantes de niveles educativos superiores.

Domínguez et al. (2006) utilizan la clasificación de errores realizada por Socas (1997) para analizar los orígenes de los errores cometidos por un grupo de estudiantes de secundaria y bachillerato, utilizando como instrumento un puzle algebraico. A partir de este estudio, estos autores elaboran una propuesta curricular y destacan el interés de que los estudiantes manipulen varias representaciones para llegar al estudio autónomo de la representación de un objeto.

Castellanos y Obando (2009) indagan sobre los errores y dificultades de los estudiantes en la construcción de pensamiento algebraico con la intención de construir un nuevo modelo didáctico para la enseñanza de las matemáticas. Estos autores destacan las dificultades de los estudiantes para usar e interpretar los paréntesis, tanto en contextos aditivos como multiplicativos, en los aspectos estructurales y operacionales.

En la Universidad de Valencia (España) se han realizado varios trabajos que prestan atención a las razones y posibles soluciones de los errores relacionados con el Álgebra, desde un enfoque centrado en la resolución de problemas. Cerdán (2010) realiza un estudio con un grupo de alumno/as de BUP (14-18 años) en el que elabora un catálogo con los errores más comunes producidos por estos sujetos. Analiza los errores desde el punto de vista del uso de letras y la construcción de la expresión algebraica. En este estudio, detecta que los estudiantes incurren en errores al intentar traducir directamente de las palabras clave a los símbolos matemáticos, de izquierda a derecha, sin prestar atención al significado, entre otros factores. Clasifica los errores para la traducción de problemas a ecuaciones en tres categorías: (a) errores en el uso de letras, (b) errores en la construcción de expresiones aritméticas o algebraicas y (c) error de igualdad. Arnau (2010) expone que los estudios previos realizados sobre las dificultades de los estudiantes de secundaria en el estudio del lenguaje algebraico, analizados desde el punto de vista de la resolución de problemas, incitan al uso de la aritmética para su resolución o métodos no algebraicos en general. El autor propone el uso de la hoja de cálculo como medio para abordar algunas dificultades encontradas y evitar así errores.

III. MARCO METODOLÓGICO

Este capítulo está dedicado a caracterizar el tipo de investigación desarrollada, describir los sujetos participantes en el estudio, así como detallar la recogida de datos realizada a partir de la descripción del diseño y aplicación del instrumento elaborado con el fin de dar respuesta a los objetivos de investigación planteados en este estudio.

En la Figura 3.1 mostramos un esquema de la estructura de este capítulo, con base en los pasos realizados en la metodología de esta investigación:

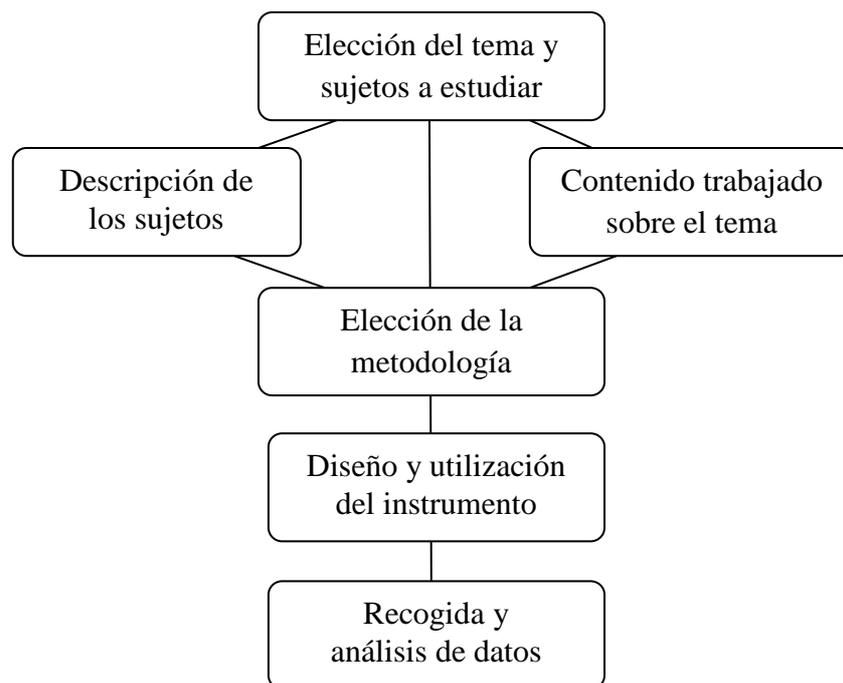


Figura 3.1. Esquema del marco metodológico

III.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN REALIZADA

La presente investigación es de naturaleza exploratoria y descriptiva ya que se dispone de poca información procedente de estudios previos en relación con la traducción entre los sistemas de representación verbal y simbólica en el contexto de enunciados algebraicos por estudiantes de educación secundaria. Se persigue describir el modo en que los estudiantes realizan estas transformaciones entre sistemas de representación, las dificultades que evidencian en dicho proceso y los errores que cometen. También atendemos a la comprensión que de ambas representaciones ponen de manifiesto estos estudiantes.

Se trata de una investigación transversal porque se hace en un momento determinado en el que se recoge información de un grupo de sujetos. La investigación es de carácter

cualitativo y cuantitativo de acuerdo con el objetivo planteado en la misma y con los datos recogidos procedentes de un grupo de estudiantes que realizan una tarea preparada para la ocasión. A partir de dichos datos se realiza un análisis detallado de las actuaciones de los estudiantes. En general, se pretende recopilar información preliminar que sirva de fundamentación para el diseño y desarrollo de una investigación posterior más amplia dirigida a la realización de una tesis doctoral.

III.2. SUJETOS DE ESTUDIO

La población considerada para realizar la investigación la constituyen estudiantes de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) matriculados en la materia matemáticas opción A.

Se consideró una muestra inicial de 26 estudiantes inscritos en el curso académico 2010-2011 en el Instituto de Enseñanza Secundaria Francisco Javier de Burgos de Motril (Granada), centro en el que trabaja como profesora de matemáticas la alumna de máster que presenta este trabajo. Este centro educativo tiene seis grupos para cada curso de ESO. En él se imparten los cuatro cursos de Educación Secundaria, las modalidades de Bachillerato de Ciencias Naturales y de la Salud y Humanidades y Ciencias Sociales, y un Ciclo Formativo de Informática.

La selección de los estudiantes fue intencional, atendiendo a la disponibilidad y la facilidad de acceso a los mismos para llevar a cabo esta investigación. Los sujetos forman parte de dos grupos distintos en los que la autora de este trabajo imparte docencia de matemáticas. El primer grupo está formado por 8 alumnos/as del grupo A, y el segundo está formado por 18 alumnos/as donde, a su vez, 9 de esos estudiantes son del grupo B y otros 9 del grupo C. Para referirnos a los sujetos, protegiendo su identidad, usaremos una notación compuesta por un número y una letra, donde el número se les ha asignado por el orden alfabético dentro de su grupo y la letra hace referencia al grupo al que pertenecen. Así, para el grupo A, hay estudiantes desde 1A hasta 8A; desde 1B hasta 9B para los del grupo B; y, del mismo modo, desde 1C hasta 9C para los del grupo C.

El poder adquisitivo de los habitantes de la zona donde se encuentra este centro educativo es de nivel bajo y las condiciones socio-culturales también. Todo ello condiciona la situación escolar de este alumnado. Presentan numerosas faltas de asistencia al centro y poca motivación e interés por el aprendizaje y el estudio.

En cuanto a la situación académica de los estudiantes, aunque están en 4º de ESO, algunos tienen la asignatura de matemáticas de cursos anteriores sin aprobar o están repitiendo este curso. En la Tabla 3.1 recogemos estos casos, indicándolo con ✕.

Sujeto	Tiene suspensas			Repite 4º
	Matemáticas 1º	Matemáticas 2º	Matemáticas 3º	
1A		✕	✕	
2A				✕
3A				✕
4A				✕
5A			✕	
6A			✕	
7A		✕	✕	
8A				✕
1B	✕	✕	✕	
2B			✕	
3B			✕	
4B		✕	✕	
5B			✕	
6B			✕	
7B				✕
9B			✕	
5C				✕
6C			✕	
7C			✕	
8C			✕	
Total	1	4	14	6

Tabla 3.1. Materia pendiente de aprobar y repetición de cuarto curso

Como puede observarse en la Tabla 3.1, más de la mitad de los alumnos (14 de 26) están cursando 4º de ESO pero con una situación académica particular que suponemos que merma su conocimiento matemático.

A continuación describimos la situación particular de algunos estudiantes que se puede considerar que no hacen un seguimiento regular de las clases.

El sujeto 4A abandonó gran parte de asignaturas que configuran el currículo del curso durante los dos primeros trimestres y, en el caso particular de matemáticas, solía faltar con bastante frecuencia a las clases. A partir de finales del segundo trimestre retomó las clases con regularidad y el interés por superar todas las materias del curso. Los sujetos 1A y 7A también faltan con frecuencia a clase, lo que provoca que el ritmo de trabajo en este grupo, en general, sea lento.

El estudiante 1B no aprobó la primera y la segunda evaluación de la materia de matemáticas. Este sujeto falta a clase de manera continuada por motivos familiares y por falta de interés. El estudiante 3B comenzó a trabajar y a tener interés por aprender cuando observó que la mayoría de sus compañeros participaban en las actividades de clase y quiso ser partícipe también de las actividades diarias. El sujeto 4B no tiene interés y constantemente trata de distraer a sus compañeros en clase, sólo muestra algo de interés por superar las pruebas escritas pues considera que es lo único que tienen en cuenta los docentes, a pesar de que, desde el primer momento, se informó a los estudiantes de los criterios de evaluación de la asignatura establecidos por el departamento, que incluyen el trabajo diario y el interés mostrado por la asignatura.

En el grupo B se encuentra el mayor número de estudiantes con la materia del curso anterior (3º) sin aprobar, lo que repercute en el ritmo de trabajo en clase pues es necesario recordar constantemente conceptos básicos que el alumnado del último curso de ESO ya debería conocer.

El grupo C destaca por el trabajo constante en la mayoría de sus miembros, trabajando en clase y ayudando a sus compañeros/as del grupo B con el que comparten el horario de clase de matemáticas opción A.

En el momento de aplicación del instrumento de investigación, los sujetos 1A y 1B habían abandonado por completo el curso por motivos personales por lo que el total de sujetos con el que se analizan los resultados es de veinticuatro, 12 chicos y 12 chicas.

III.3. CONOCIMIENTOS PREVIOS DE LOS SUJETOS

Con anterioridad a la recogida de datos, durante el curso académico 2010/2011, los sujetos habían trabajado en el primer trimestre y principio del segundo, los primeros temas del bloque de contenidos de aritmética y álgebra, en concreto los siguientes temas: (a) números enteros y racionales, (b) números decimales, (c) números reales, (d) problemas aritméticos, (e) expresiones algebraicas y (f) ecuaciones e inecuaciones. Posteriormente, continuaron con el tema de sistemas de ecuaciones para finalizar el bloque de álgebra y el resto de bloques de contenidos (geometría y estadística y probabilidad). En concreto, en el bloque de álgebra, antes de utilizar el instrumento de recogida de información, los alumnos trabajaron el lenguaje algebraico y la traducción de enunciados, casi siempre del verbal al simbólico.

Una revisión del libro de texto (Colera, Martínez, Gaztelu y Oliveira, 2008) y de los enunciados no contextualizados que se trabajaron en el aula a partir de las actividades propuestas por la profesora nos permitió identificar el tipo de relaciones numéricas que se habían trabajado en el aula en el contexto de enunciados algebraicos. A continuación presentamos las relaciones numéricas identificadas, donde *número* se refiere a una cantidad desconocida (ya sean variables o incógnitas) y *cantidad* a una cantidad conocida. En general, todas las relaciones encontradas se refieren a una o a más combinaciones de las siguientes relaciones:

- suma y diferencia de dos números;
- un número más/menos cierta cantidad;
- producto/cociente de dos números;
- cociente y resto de dos números;
- múltiplos de un número;
- divisibilidad de un número;
- cuadrado o el cubo de un número;
- raíz cuadrada de un número;
- porcentaje de una cantidad;
- números consecutivos; y
- números pares e impares.

III.4. DISEÑO DE LA RECOGIDA DE DATOS

Debido a las situaciones personales de los estudiantes y a su falta de motivación para realizar tareas escolares, decidimos organizar la recogida de datos de forma que despertara cierto interés en los estudiantes. Se acordó construir un juego que se pudiera utilizar individualmente y en pequeños grupos y que sirviera como instrumento de recogida de información. La parte que se desarrolla de forma individual actúa como un test o prueba ya que los alumnos/as han de realizar la tarea de escribir de forma simbólica seis expresiones que aparecen escritas de forma verbal y escribir verbalmente otras seis expresiones que se les presentan de forma simbólica.

En la segunda parte se trata de observar la interacción de los estudiantes mientras emparejan representaciones en diferentes sistemas de representación, verbal o simbólico, de un mismo enunciado algebraico. Esta fase se puede describir como una entrevista clínica no estructurada en tanto que se planteó a los estudiantes una situación (juego con el dominó) en la que debían actuar bajo unas reglas establecidas a priori, y se observó las acciones de los sujetos interviniendo únicamente para llamar la atención por la falta de cumplimiento de alguna regla del juego o pedir la repetición de alguna idea. En la entrevista clínica se intenta que el sujeto tenga la oportunidad de expresarse libremente, sin limitaciones, para, de esta manera, conocer más a fondo su pensamiento (Ginsburg, 1997). En palabras de Piaget (1984): “el arte clínico no consiste en conseguir que haya

una respuesta, sino en hacer hablar libremente y en descubrir las tendencias espontáneas, en vez de canalizarlas y ponerles diques” (p. 14).

III.5. DISEÑO DEL INSTRUMENTO

Basamos el diseño del instrumento en el juego del dominó con el que los sujetos participantes en esta investigación están familiarizados y con el que frecuentemente se divierten. González (2000) define este juego clásico como un juego cuyas fichas se encuentran divididas en partes y están compuestas por las combinaciones de siete palos tomados en grupos de dos, teniendo en cuenta la repetición para la formación de las fichas dobles. El número de palos no está limitado y que existen dominós con cualquier cantidad de estos. El diseño del juego tiene una componente matemática en la disposición de los puntos en las fichas y en la composición de éstas por combinaciones de los palos. Según los palos considerados hay distintos dominós diferentes del clásico. Por ejemplo, el dominó chino, cuyas reglas son similares al juego que se practica en Europa, está compuesto por 21 fichas y un seis doble, no contiene ninguna ficha blanca, ni ninguna que tenga la mitad blanca. Existen multitud de variantes, una de las más interesantes es la denominada *mah-jong*, inventada hacia 1860 y que alcanzó gran éxito en China, donde rápidamente suplantó al *wei-chi* (ajedrez chino). El *mah-jong* fue introducido en la década de 1910 en los Estados Unidos de América, desde donde se difundió a Europa.

Entre los diferentes dominós están los dominós matemáticos, como hemos mencionado en el capítulo previo, que hacen uso de la riqueza de representaciones existentes para conceptos que van desde cantidades a funciones o expresiones algebraicas.

Cuasi-dominó Algebraico

Utilizamos una adaptación del juego del dominó para poner a los sujetos en situaciones en las que han de manejar los sistemas de representación verbal y simbólico en el contexto de enunciados algebraicos.

A pesar de que el juego que hemos construido y usamos en este trabajo no cumple la definición de dominó, optamos por llamar a este *cuasi-dominó algebraico* como *dominó* porque se ha utilizado basándonos en las reglas del juego del dominó clásico y, además, esta terminología resultaba más cercana para los estudiantes. En torno a este dominó organizamos la recogida de datos en dos fases, una individual y otra grupal. En la primera fase los estudiantes debían completar las fichas del cuasi-dominó. Esta tarea

nos permitía indagar en la capacidad de cada estudiante para traducir enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico. La segunda fase consistió en un torneo realizado con las fichas previamente construidas. A partir de las interacciones de los estudiantes en el transcurso del juego se persigue obtener información sobre cómo los estudiantes relacionan representaciones verbales y simbólicas de un mismo enunciado algebraico.

Se tomaron una serie de decisiones que justificamos a continuación para el diseño del instrumento de recogida de información.

Para la construcción de las fichas del juego partimos de las relaciones numéricas identificadas en el análisis del libro de texto y de las actividades propuestas por la profesora. Se decidió usar únicamente relaciones numéricas generales y números naturales. Los resultados de estudios previos como el de Wollman y otros autores citados en Wollman (1983) apoyan la consideración de enunciados algebraicos sin contexto de referencia al no detectar ayuda del contexto en los procesos de traducción del sistema de representación verbal al simbólico.

Al tener en cuenta sólo números naturales, no se consideraron algunas de las relaciones numéricas que los estudiantes habían trabajado antes, tales como el porcentaje de un número, ya que por cursos anteriores estaban acostumbrados a representar esta relación con números decimales (esto es, para referirse al 25% de un número utilizan $0,25 \cdot x$ como representación simbólica). Teniendo en cuenta estas consideraciones, el listado de relaciones numéricas utilizadas para el diseño de las fichas fue el siguiente:

- Aditivas: (a) suma y diferencia de números, (b) suma y diferencia de números y cantidades, (c) números consecutivos
- Multiplicativas: (a) divisibilidad (múltiplos y divisores de un número), (b) producto y cociente de un número y una cantidad, (c) división entera y (d) paridad
- Potencias: (a) potencia de un número y (b) raíz cuadrada de un número

Con la intención de tener un equilibrio en los enunciados propuestos, acordamos proponer doce enunciados, la mitad en representación verbal y la otra mitad en representación simbólica, de modo que, en cada caso, hubiera un enunciado aditivo, uno multiplicativo, uno de potencia, y un enunciado para cada combinación de dos en dos de estos tres tipos de relaciones: (a) aditivo y multiplicativo, (b) aditivo y de potencia, y (c) multiplicativo y de potencia. Esto se refleja en la Tabla 3.2 donde sólo tenemos en

cuenta las celdas marcadas por \times pues es equivalente considerar la combinación de las relaciones en un orden que en otro.

	Aditivo	Multiplicativo	Potencia
Aditivo	\times	\times	\times
Multiplicativo		\times	\times
Potencia			\times

Tabla 3.2. Relaciones entre los enunciados

Otras tres variables de tarea consideradas en el diseño de los enunciados han sido:

- Si son abiertos o cerrados. Entendemos por enunciados cerrados aquellos que establecen una igualdad entre dos enunciados algebraicos, es decir, aquellos que equivalen a una ecuación.
- Si involucran una o dos variables algebraicas.
- Si los enunciados expresados verbalmente son secuenciales o no secuenciales. Por ejemplo, la expresión $x + (x + 1) - 4$ representada verbalmente de forma secuencial correspondería a “un número más su consecutivo menos cuatro”, pero de forma no secuencial podría ser “la suma de dos números consecutivos menos cuatro” o “la diferencia de la suma de dos números consecutivos y cuatro”. La distinción que establecemos radica en si la traducción del enunciado del sistema de representación verbal o simbólico se puede realizar o no siguiendo estrictamente del orden del mismo procedimiento de izquierda a derecha.

Decidimos diseñar los enunciados de forma que la mitad fueran abiertos y la otra mitad cerrados alternándose esta condición con ser secuenciales o no. De este modo, en ambos conjuntos de seis enunciados correspondientes a cada tipo de representación, debía haber tres enunciados abiertos y otros tres cerrados, tres enunciados verbales de modo secuencial y otros tres de modo no secuencial. Además, la mitad de los enunciados debía incluir dos variables algebraicas y la otra mitad una sola. El modo en que se combinaron estas variables de tarea se muestran en la Tabla 3.3 y en la Tabla 3.4.

	Secuencial	No secuencial
Aditivo	Cerrado, 2 variables	
Multiplicativo		Abierto, 2 variables
Potencia		Cerrado, 1 variable
Aditivo y Multiplicativo	Abierto, 2 variables	
Aditivo y Potencia		Abierto, 1 variable
Multiplicativo y Potencia	Cerrado, 1 variable	

Tabla 3.3. Relaciones para los enunciados verbales

	Abierto	Cerrado
Aditivo		1 variable
Multiplicativo	1 variable	
Potencia		2 variables
Aditivo y Multiplicativo	1 variable	
Aditivo y Potencia	2 variables	
Multiplicativo y Potencia		2 variables

Tabla 3.4. Relaciones para los enunciados simbólicos

Finalmente, los enunciados verbales que consideramos son los que se recogen en la Tabla 3.5 y los enunciados en representación simbólica que se proponen se recogen en la Tabla 3.6.

Relación numérica	Características del enunciado	Representación verbal
Aditivo	Secuencial – Cerrado Dos variables	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
Multiplicativo	Asecuencial – Abierto Dos variables	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número
Potencia	Asecuencial – Cerrado Una variable	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número
Aditivo y Multiplicativo	Secuencial – Abierto Dos variables	Un número par menos la cuarta parte de otro número
Aditivo y Potencia	Asecuencial – Abierto Una variables	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
Multiplicativo y Potencia	Secuencial – Cerrado Una variable	Un número, por ese número al cuadrado, es igual al mismo número al cubo

Tabla 3.5. Enunciados en representación verbal para traducir a simbólica

Relación numérica	Características del enunciado	Representación simbólica
Aditivo	Abierto-Una variable	$x + (x + 1) - 4$
Multiplicativo	Cerrado-Una variable	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Potencia	Abierto-Dos variables	$(\sqrt{x})^y$
Aditivo y Multiplicativo	Cerrado-Una variable	$x \cdot (x + 1) = 7x$
Aditivo y Potencia	Cerrado-Dos variables	$x^2 - y^2 = 11$
Multiplicativo y Potencia	Abierto-Dos variables	$(x \cdot y)^3$

Tabla 3.6. Enunciados en representación simbólica para traducir a verbal

Antes de poner en práctica el instrumento en la recogida de datos, se ensayó su uso por el equipo de trabajo que ha desarrollado esta investigación.

III.6. RECOGIDA DE DATOS

La recogida de datos realizada, como se ha introducido previamente, consta de dos fases. En la primera de ellas, los sujetos tenían que rellenar las partes de las fichas del juego que posteriormente iban a utilizar en la segunda fase. Dichas fichas les fueron presentadas en un folio tamaño A3 simulando una partida de dominó ya jugada, como se muestra en la Figura 3.2 (en el Anexo I puede consultarse la resolución de esta tarea).

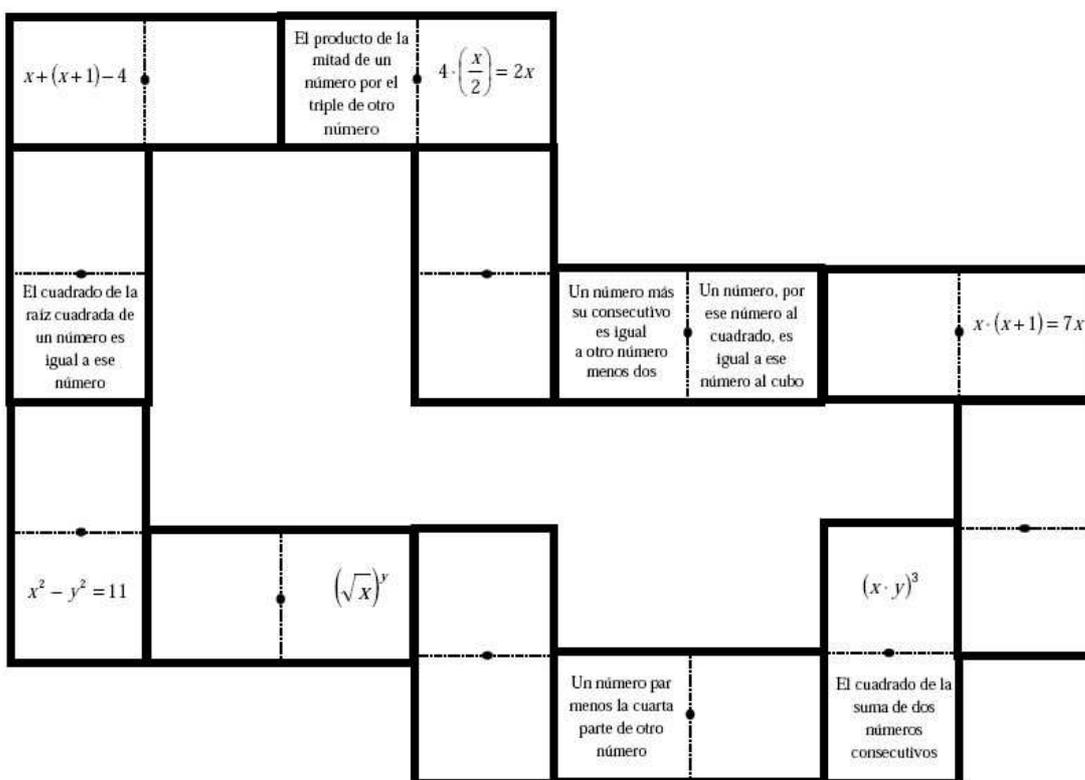


Figura 3.2. Documento para la primera fase de la recogida de información

En la segunda fase de la recogida de información, se lleva a cabo un torneo entre los estudiantes donde jugaron con las fichas del juego que habían construido en la primera fase, agrandadas y plastificadas, a las que se les añaden doce fichas más, llamadas *fichas dobles*, formadas por la expresión verbal y simbólica de los diferentes enunciados que aparecen en las fichas simples. La Figura 3.3 presenta las primeras doce fichas que los alumnos formaron en la primera fase de la recogida de datos y la Figura 3.4 muestra las doce fichas dobles que fueron añadidas para el juego durante el torneo (en el Anexo

I se encuentran estas fichas con el tamaño real que se le dio a los estudiantes: 5.9 cm x 10.8 cm).

$x \cdot x^2 = x^3$	El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número	$(x \cdot y)^3$	La suma de dos números consecutivos menos cuatro	$(\sqrt{x})^2 = x$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
$x \cdot (x + 1) = 7x$	El cubo del producto de dos números	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número	$x^2 - y^2 = 11$	Un número, por ese número al cuadrado, es igual al mismo número al cubo
$(x + (x + 1))^2$	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número	$(\sqrt{x})^y$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$x + (x + 1) - 4$	El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número
Un número par menos la cuarta parte de otro número	$2x - \frac{y}{4}$	El cuadrado de un número, menos el cuadrado de otro número, es igual a once	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$	$\frac{x}{2} \cdot 3y$	$x + (x + 1) = y - 2$

Figura 3.3. Fichas simples del juego

Un número, por ese número al cuadrado, es igual al mismo número al cubo	$(x \cdot y)^3$	El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número	$x + (x + 1) - 4$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	$(\sqrt{x})^2 = x$
$x \cdot x^2 = x^3$	El cubo del producto de dos números	$x \cdot (x + 1) = 7x$	La suma de dos números consecutivos menos cuatro	$x + (x + 1) = y - 2$	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número
La raíz cuadrada de un número elevada a otro número	$(x + (x + 1))^2$	El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once	$\frac{x}{2} \cdot 3y$	El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número	$2x - \frac{y}{4}$
$(\sqrt{x})^y$	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	$x^2 - y^2 = 11$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$	Un número par menos la cuarta parte de otro número

Figura 3.4. Fichas dobles del juego

Antes de la aplicación del instrumento, se informó a los sujetos de la intención de realizar un concurso compuesto por dos partes. La primera consistiría en realizar un ejercicio de manera individual y la segunda en competir con sus compañeros en un torneo donde el ganador final obtendría un premio. A la profesora le llamó la atención el

hecho de que con esta leve explicación, la motivación entre los sujetos fue llamativa, lo cual fue evidente cuando, en la semana de realización del torneo, no faltó a clase ningún estudiante a pesar de que algunos de ellos estaban enfermos. La explicación que daban era que querían competir con sus compañeros.

III.6.1. Primera Fase: Completar el Dominó

En la ficha reproducida en la Figura 3.1 debían formar las fichas del juego. Esta fase se realizó de manera individual. Las explicaciones dadas a los sujetos fueron las siguientes:

- deben poner el nombre y apellidos en los folios tamaño A3 que se les aporta, para que puedan ser identificados,
- deben realizar la tarea de manera individual, sin consultar ni a sus compañeros ni a la profesora,
- deben rellenar las fichas de modo que se unan expresiones que significan lo mismo pero escritas de distinta manera, por ejemplo, una ficha puede tener un lado donde diga “ $x + 2$ ” y otra ficha que se uniera a ella puede poner “un número más dos”,
- no había piezas en blanco ni fichas dobles, como ocurre en un dominó tradicional,
- deben escribir las fichas mediante letras al utilizar el sistema de representación verbal. Es decir, si tenían que referirse a la cifra cinco que no usasen “un número menos 5” sino la expresión “un número menos cinco”,
- no podían hablar entre ellos durante esta parte del trabajo.

La profesora actuó como observadora de los alumnos y se limitó a resolver cuestiones prácticas como donde colocar un enunciado para que encajara con una ficha y no formaran fichas dobles. Cuando formulaban alguna cuestión relacionada con información de los intereses investigadores, la profesora se limitó a decirles que ellos escribiesen lo que considerasen más adecuado. Por ejemplo, consultaron varias veces a la profesora sobre cómo representar un número par y ésta les indicó que no podía revelarles la forma correcta, que se limitasen a escribir lo que creían que correspondía.

III.6.2. Segunda Fase: El Juego

En la segunda fase se celebró un torneo con las fichas del dominó construidas en la primera fase. Una vez realizada una primera ronda en grupos de 3 o 4 estudiantes, se jugaron dos semifinales cada una con tres jugadores, de donde los dos jugadores con

mayor puntuación fueron seleccionados para una cita final. En esta final, jugaros estos cuatro sujetos, entre los que se seleccionó un único ganador del torneo.

Para esta segunda fase se establecieron las siguientes reglas a seguir:

1. El número de jugadores debe ser de tres o cuatro personas.
2. Se reparten todas las fichas entre los jugadores, existiendo un total de veinticuatro fichas.
3. Se debe estar atento a las propias fichas y a los movimientos de los compañeros.
4. Se irán sumando puntos en las siguientes situaciones:
 - un punto por cada ficha bien colocada si además se explica de manera justificada el porqué está correctamente situada
 - dos puntos si corrige de manera correcta y justificada a algún compañero/a que coloque de manera errónea una ficha
 - un punto al primer participante que se quede sin fichas en una partida
5. Ganará la persona que lleve más puntos en todas las partidas jugadas tras pasar treinta minutos de juego.
6. De cada treinta minutos jugados, sale un jugador ganador, que jugará en una semifinal. Los dos primeros de cada semifinal jugarán una gran final con el resto de ganadores de los otros grupos. Al final, habrá un único ganador entre todos los alumnos/as participantes que se llevará un premio.

Atendiendo a la disponibilidad de los sujetos, así como a sus características tanto académicas como actitudinales, se organizó a los sujetos en seis grupos heterogéneos para la realización del torneo del siguiente modo:

Grupo 1: 5A, 3A, 7A, 1C Grupo 3: 3B, 7B, 6B, 4B Grupo 5: 7C, 5C, 6C, 3C
 Grupo 2: 2A, 6A, 4A, 8A Grupo 4: 2B, 5B, 8B, 9B Grupo 6: 8C, 2C, 9C, 4C

En la Tabla 3.7 se recoge la organización general del torneo.

Sujetos	Nº partidas en 30 min	Ganador/es
Primera ronda		
Grupo 4	3	9B
Grupo 3	4	3B
Grupo 6	4	2C
Grupo 5	3	6C
Grupo 1	3	3A
Grupo 2	4	2A

Sujetos	Nº partidas en 30 min	Ganador/es
Semifinales		
3B, 9B, 2C	3	9B, 2C
2A, 3A, 6C	4	2A, 3A
Final		
9B, 2C, 2A, 3A	4	3A

Tabla 3.7. Organización del torneo

Desarrollo del Torneo

El desarrollo del torneo se llevó a cabo con los grupos indicados anteriormente por separado, en un aula y en presencia de la profesora. De este modo ningún grupo supo qué habían hecho sus compañeros previamente. Los propios estudiantes se encargaron de engañar a sus compañeros o no decirles en qué consistían estas.

En primer lugar la profesora recordó a los estudiantes las normas del juego, aclarando la existencia de fichas dobles para aquellos sujetos que no conocieran el dominó (fueron sólo dos). Se destacó la importancia de que las explicaciones fueran claras, pues a partir de las grabaciones de audio de las mismas se iba a realizar un análisis de la información obtenida. El papel de la profesora durante el juego consistió en grabar en audio las explicaciones que daban los estudiantes al colocar una ficha en el juego. También realizó algunas intervenciones con el objetivo de que los estudiantes se explicasen con mayor claridad, pues en ocasiones se limitaban a leer los enunciados verbales de las fichas o no precisaban la relación entre el simbolismo y parte de la expresión verbal (por ejemplo no indicaban cómo se representa un número cualesquiera o su consecutivo). Otras dos intervenciones puntuales fueron dirigidas a explicar cómo se unían las fichas, dado que no estaba permitido unir dos enunciados representados con el mismo sistema de representación, y a dar indicaciones para que observasen cuando una partida estaba terminada por no poder colocarse ninguna ficha más.

IV. RESULTADOS

En este cuarto capítulo presentamos el análisis de los datos recogidos en dos partes.

En primer lugar, recogemos el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes al documento escrito empleado en la primera fase de la recogida de datos.

En segundo lugar, sintetizamos el análisis de las grabaciones de audio y de las transcripciones realizadas, procedentes de la segunda fase de la recogida de datos.

Cerramos el capítulo con una discusión de los resultados obtenidos a partir de ambos análisis.

IV.1. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES. FASE 1: COMPLETAR EL DOMINÓ

En este apartado, realizamos un análisis de datos de la primera fase del juego en la que los estudiantes trabajaron de manera individual para formar las fichas del dominó. Las producciones de los estudiantes que aquí se analizan pueden consultarse en el Anexo II de este trabajo.

Centramos el análisis de esos datos en los errores cometidos por los estudiantes en la traducción de enunciados algebraicos entre las representaciones simbólica y verbal. El análisis lo realizamos atendiendo al tipo de traducción que deben realizar los estudiantes, al tipo de errores que cometen en dichas transformaciones y a la frecuencia con que cometen dichos errores.

También se tienen en cuenta los conocimientos previos que la profesora tiene sobre los sujetos, principalmente en lo relativo al tipo de errores.

Para facilitar la referencia al trabajo que realizaron los estudiantes en la primera fase, hemos numerado desde 1 hasta 12 los espacios que tenían que rellenar los alumnos/as para formar las fichas, en el sentido de las agujas del reloj, como se muestra en la Figura 4.1. Utilizaremos esta numeración para citarlos en el resto del trabajo.

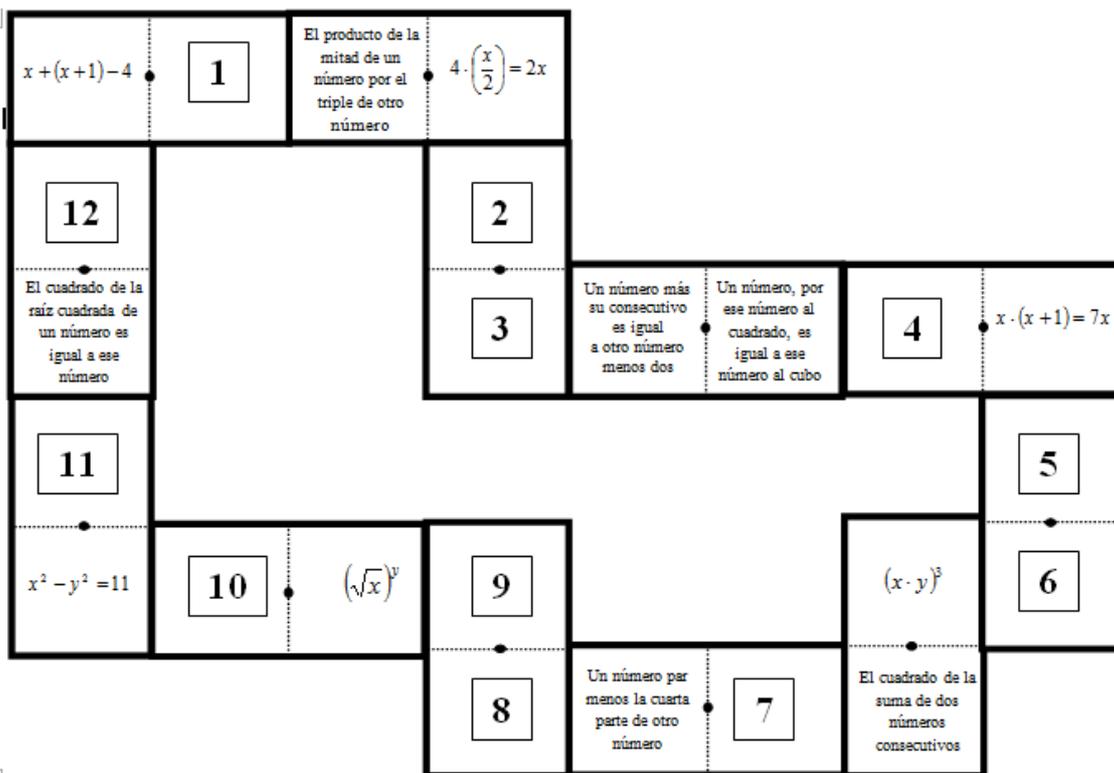


Figura 4.1. Documento a rellenar por los alumnos

IV.1.1. Producciones en la Primera Fase

En la Tabla 4.1 se recogen las producciones de los estudiantes a la tarea de completar el dominó. Diferenciamos entre las respuestas correctas, respuestas en las que se observa algún error y apartados sin responder. Utilizaremos las notaciones siguientes para diferenciar estas respuestas: E para indicar un error, O para indicar que el lugar está en blanco, ✓ para indicar que se ha realizado de manera correcta el paso de un sistema de representación a otro y D, para indicar que la interpretación de la expresión o enunciado es dudosa y requiere alguna aclaración.

Utilizando estas notaciones, en la Tabla 4.1 presentamos los tipos de respuestas de cada estudiante (primera columna de la tabla) en cada uno de los apartados que debían cumplimentar (de 1 hasta 12, recogido en la primera fila).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2A	✓	✓	✓	✓	✓	✓	E	E	O	✓	✓	✓
3A	✓	✓	✓	✓	✓	✓	E	✓	✓	✓	✓	✓
4A	O	✓	✓	✓	E	✓	✓	E	O	✓	✓	✓
5A	E	✓	E	✓	✓	✓	✓	E	✓	✓	✓	✓
6A	✓	✓	✓	✓	✓	✓	E	E	✓	✓	✓	✓
7A	E	✓	E	✓	✓	✓	✓	E	✓	✓	✓	✓
8A	✓	✓	E	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
2B	E	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3B	E	E	O	✓	E	✓	E	✓	✓	✓	✓	✓
4B	E	✓	✓	✓	✓	E	✓	E	✓	E	O	E
5B	E	✓	✓	✓	✓	✓	E	E	✓	✓	✓	✓
6B	E	✓	E	✓	E	✓	E	E	E	✓	✓	✓
7B	E	✓	✓	E	✓	D	✓	✓	✓	✓	✓	✓
8B	E	✓	E	✓	✓	D	✓	E	✓	✓	✓	E
9B	E	✓	E	✓	E	✓	✓	E	E	E	✓	✓
1C	✓	✓	✓	✓	✓	✓	E	E	✓	✓	✓	✓
2C	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	E	✓	✓	✓
3C	E	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
4C	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
5C	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	E	✓	✓	✓	✓
6C	O	✓	E	✓	✓	✓	✓	E	✓	✓	✓	✓
7C	E	✓	✓	✓	✓	✓	✓	E	✓	✓	✓	✓
8C	O	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
9C	✓	✓	✓	✓	✓	E	E	✓	E	✓	✓	✓

Tabla 4.1. Análisis de resultados del trabajo escrito

En la Tabla 4.2 resumimos el número de estudiantes que dan cada tipo de respuesta para cada uno de los doce apartados a rellenar. Como se puede observar, los enunciados 8 y 1 son en los que los estudiantes incurren en más errores.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
✓	9	23	16	23	20	20	16	10	18	22	23	22
O	2	0	1	0	0	0	0	0	2	0	1	0
D	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
E	13	1	7	1	4	2	8	14	4	2	0	2

Tabla 4.2. Recuento por enunciados

Centrándonos en los errores que comete cada sujeto, en la Tabla 4.3 recogemos una clasificación de las respuestas según los estudiantes. En seis ocasiones hubo estudiantes que dejaron un enunciado sin contestar: enunciado 1 (sujetos 4A y 6C), enunciado 3 (sujeto 3B), enunciado 9 (sujetos 2A y 4A) y enunciado 11 (sujeto 4B).

	✓	O	D	E		✓	O	D	E		✓	O	D	E
2A	9	1	0	2	2B	11	0	0	1	1C	10	0	0	2
3A	11	0	0	1	3B	7	1	0	4	2C	11	0	0	1
4A	8	2	0	2	4B	6	1	0	5	3C	11	0	0	1
5A	9	0	0	3	5B	9	0	0	3	4C	12	0	0	0
6A	10	0	0	2	6B	6	0	0	6	5C	11	0	0	1
7A	9	0	0	3	7B	9	0	1	2	6C	9	1	0	2
8A	11	0	0	1	8B	7	0	1	4	7C	10	0	0	2
					9B	6	0	0	6	8C	11	0	0	1
										9C	9	0	0	3

Tabla 4.3. Recuento por sujetos

Hay dos casos en los que no es claro si la respuesta que han dado es o no correcta. Son los casos del enunciado 6, por parte de los sujetos 7B y 8B. Este enunciado requiere que a partir de la representación simbólica $(x \cdot y)^3$ se exprese su representación verbal. El sujeto 7B lo expresa como “un número por otro al cubo” que se puede entender como que el segundo número está elevado al cubo en vez del producto de ambos. El sujeto 8B, lo expresa como “un número por otro elevado al cubo” que se puede entender también como que el segundo número está elevado al cubo en vez del producto de ambos.

IV.1.2. Errores

Diversos tipos de respuesta en el trabajo realizado por los estudiantes en la primera fase del juego ponen de manifiesto errores al realizar la tarea.

Las siguientes tablas presentan el número de errores identificados, distinguiendo el sistema de representación en el que se les presenta el enunciado a los estudiantes: del simbólico al verbal (ver Tabla 4.4) y del verbal al simbólico (ver Tabla 4.5).

De Simbólica a Verbal	Nº de Errores
Enunciado 2	1
Enunciado 5	4
Enunciado 6	2
Enunciado 9	4
Enunciado 10	2
Enunciado 12	2
Total	15

Tabla 4.4. Número de errores de representación simbólica a verbal

De Verbal a Simbólica	Nº de Errores
Enunciado 1	13
Enunciado 3	7
Enunciado 4	1
Enunciado 7	8
Enunciado 8	14
Enunciado 11	0
Total	43

Tabla 4.5. Número de errores de representación verbal a simbólica

IV.1.3. Clasificación de los Errores

En la Tabla 4.6 presentamos la clasificación de errores en la que basamos nuestro análisis. Esta clasificación surge de los estudios previos consultados sobre análisis y tipologías de errores, realizando las adaptaciones adecuadas a nuestra investigación para lo que hemos tenido en cuenta las respuestas de los alumnos/as a los enunciados

propuestos. Atendiendo al tipo de actividad planteada, no hemos considerado aquellas subcategorías de los antecedentes en las que se consideraban tanto el cálculo de valores numéricos como la manipulación de enunciados simbólicos. La Tabla 4.6 recoge las categorías, las subcategorías y el código con el que identificamos cada tipo de error.

Categoría	Subcategoría o tipo	Código
I. Según la completitud del enunciado	Incompletos	I.1
	Desmedidos	I.2
II. Derivados de la aritmética	Paréntesis	II.1
	Fracción - Producto	II.2
	Potenciación – Producto	II.3
	Suma – Producto	II.4
	Fracción - Potenciación	II.5
III. Derivados de las características propias del lenguaje algebraico	Generalización	III.1
	Particularización	III.2
	Variables	III.3
	Complicación estructural	III.4

Tabla 4.6. Clasificación de errores

A continuación, explicamos el significado de cada una de las subcategorías de la clasificación de errores de la Tabla 4.6. Primeramente, distinguimos tres grandes categorías de errores: (a) según la completitud del enunciado, (b) derivados de la aritmética y (c) derivados de las características propias del lenguaje algebraico. La primera hace referencia a errores que tienen que ver con enunciados en los que falta o sobra algún símbolo o palabra para que la expresión, ya sea simbólica o verbal, pueda ser considerada correcta. Si falta, se corresponden con la subcategoría de “incompletos” (I.1) y, si sobra, con la subcategoría “desmedidos” (I.2).

En los errores derivados de la aritmética consideramos aquellos que provienen de la incorrecta interpretación de los símbolos, operaciones o relaciones entre ellos. Distinguimos cinco subcategorías. La subcategoría “paréntesis” (II.1) corresponde a errores debidos a la mala posición de un paréntesis o a la falta del mismo y que hacen que la expresión algebraica no sea correcta. Las demás subcategorías se refieren a errores en los que la primera de las operaciones referida en el nombre de la subcategoría es interpretada como la segunda operación que se menciona. Por ejemplo, si en el enunciado propuesto se requiere representar verbalmente el enunciado dado por $(\sqrt{x})^y$, y los sujetos lo enuncian como “la raíz cuadrada de un número por otro número

distinto”, entendemos que ha cometido un error en la interpretación de la potencia al haber expresado en su lugar un producto (II.3).

Consideramos errores dentro de la categoría III aquellos que *derivan de las características propias del lenguaje algebraico* usado al interpretar los enunciados verbales o simbólicos, entendiendo como tales errores aquellos que son propios del uso del simbolismo algebraico. En esta categoría diferenciamos dos tipos de errores. Primero, errores en los que se generaliza un elemento o parte del enunciado que es un caso concreto. Por ejemplo, un sujeto que, en vez de especificar que en la expresión simbólica $x + (x + 1) - 4$ “se resta el número cuatro”, expresa “se resta un número par” (III.1). Segundo, errores debidos a la particularización de números o relaciones concretas de una expresión general (III.2). Por ejemplo, cuando a los sujetos se les pide que traduzcan simbólicamente el enunciado “Un número par menos la cuarta parte de otro número” y lo expresan particularizando el número “par” a un número concreto, por ejemplo $2 - \frac{x}{4}$.

Hemos llamado error *de variable*⁽¹⁾ (III.3) cuando los sujetos no distinguen de manera correcta el uso de distintas variables/incógnitas en el enunciado. Un ejemplo lo encontramos cuando al representar de forma simbólica el enunciado “Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos”, el sujeto representa con el mismo símbolo ambas variables pese a corresponder a números diferentes.

Error de *complicación estructural* (III.4) es aquel en el que los sujetos no interpretan apropiadamente la estructura del enunciado algebraico o parte del mismo. Por ejemplo, un sujeto que expresa el enunciado “El cuadrado de la suma de dos números consecutivos” como $x + (x + 1) = x^2$.

IV.1.4. Análisis de los Errores

Teniendo en cuenta la clasificación presentada, mostramos a continuación los resultados de los errores en que incurren los sujetos al traducir enunciados de representación simbólica a verbal (ver Tabla 4.7).

⁽¹⁾ Debido a las características de los enunciados utilizados en este trabajo, no se está realizando una distinción entre si la letra utilizada tiene papel de variable o de incógnita.

Enunciado	Sujeto	Respuesta de los sujetos	Error	
2	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$	4B	No indica que se trata de la cifra cuatro, generalizando aun número par cualquiera	III.1
5	$x \cdot (x+1) = 7x$	4A	Generaliza todo al mismo número x	III.1
		3B	Expresa “un número por <i>su consecutivo más uno</i> es igual a siete”, donde sobra parte del enunciado y no expresa que es igual a siete veces el primer número	I.1 I.2
		6B	No menciona que se trata de un número y su consecutivo, lo expresa como “producto de un número es igual a siete veces ese número”	I.1
		9B	No identifica de que es siete por el primer número	III.3
6	$(x \cdot y)^3$	4B, 9C	Identifican el cubo como el triple	II.3
9	$(\sqrt{x})^y$	6B	Expresa “el cuadrado de la raíz cuadrada de un número”, no identifica que la potencia es otro número distinto	II.3
		9B	Expresa “la raíz cuadrada de un número y su cuadrado”	
		2C	Expresa como “un número por la raíz cuadrada de otro número”	
		9C	Expresa “la raíz cuadrada de un número multiplicada por sí, por otro número”	
10	$x^2 - y^2 = 11$	4B	Dice “doble” y generaliza once a un número impar cualquiera	II.3 III.1
		9B	No expresa que se trata de una diferencia, lo expresa diciendo “dos números diferentes elevados a dos son igual a once”	I.1
12	$x + (x+1) - 4$	4B	No indica que se trata de la cifra cuatro, generalizando aun número par cualquiera	III.1
		8B	No especifica que se trata de un número y su siguiente, expresa “un número más <i>otro número</i> más uno menos cuatro”	III.3

Tabla 4.7. Errores en la traducción de simbólica a verbal

En la Tabla 4.8 presentamos un resumen del tipo de errores en que incurren los estudiantes y de la frecuencia con que surgen al traducir enunciados de forma simbólica a verbal, así como el enunciado donde se han producido estos errores y los sujetos que los han cometido.

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado	Sujetos
I.1	3	5	3B, 6B
		10	9B
I.2	1	5	3B
II.3	7	6	4B, 9C
		9	6B, 9B, 2C, 9C
		10	4B
III.1	4	2	4B

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado	Sujetos
III.3	2	5	4A
		10	4B
		12	4B
		5	9B
		12	8B

Tabla 4.8. Frecuencia de tipos de errores en traducción de simbólica a la verbal

Al transformar enunciados del sistema de representación simbólica a verbal, los sujetos no cometieron errores notados por II.1, II.2, II.4 y II.5 que son errores provenientes de la aritmética. De esta categoría, los estudiantes solo incurren en errores debidos al mal uso de la interpretación de potencias y producto (II.3). De las categorías de errores relacionadas con el álgebra, no se han producido errores de particularización de elementos (III.2) ni debidos a la complicación estructural (III.4).

Resumimos en la Tabla 4.9 los sujetos, el tipo de error y la frecuencia con que son cometidos en estas traducciones, marcando con \checkmark cada caso.

	I.1	I.2	II.3	III.1	III.3	Total
4A				\checkmark		1
3B	\checkmark	\checkmark			\checkmark	3
4B			\checkmark	\checkmark		2
6B	\checkmark		\checkmark			2
8B				\checkmark		1
9B	\checkmark		\checkmark		\checkmark	3
2C			\checkmark			1
9C			\checkmark			1

Tabla 4.9. Sujetos, tipo de errores y frecuencia de simbólica a verbal

Como se puede observar en la Tabla 4.9, del total de veinticuatro sujetos, sólo ocho incurren en errores en esta primera fase en la traducción de enunciados de presentación simbólica a verbal, siendo los errores debidos al mal uso de la interpretación de potencias y producto (II.3) los más frecuentes.

Realizamos a continuación un análisis análogo al anterior pero para la traducción de enunciados del sistema de representación simbólica a verbal (ver Tabla 4.10).

	Enunciado	Sujeto	Respuestas de los sujetos	Error
1	“El producto de la mitad de un número por el triple de otro número”	5A	Expresa $x \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot 3$ y donde sobra la primera letra	I.2
		7A, 3B	Confunde el triple con el cubo y no identifica dos números distintos: $\frac{x}{2} \cdot x^3$	II.3 III.3

Enunciado	Sujeto	Respuestas de los sujetos	Error
	2B, 7C	Confunde el triple de un número con el cubo	II.3
	4B	Expresa $x \cdot (x : 2) \cdot 3y$, sobra la primera letra	I.2
	5B	Expresa la tercera parte en vez del triple $\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3}$	II.2
	6B	Expresa $x \cdot \left(\frac{x}{2} \cdot 3x\right)$ donde sobra la primera letra y no identifica que son dos números distintos	I.2 III.3
	7B, 8B, 9B	No identifica que son dos números distintos	III.3
	3C	Expresa $\left(\frac{x}{2} \cdot 3y\right)^2$	I.2
3	5A, 7A, 6B, 8B, 9B	No identifica que se habla de dos números distintos, $x + (x + 1) = x - 2$	III.3
	8A, 6C	No expresa correctamente el consecutivo de un número	III.4
4	7B	Expresa suma en vez de producto: $x + x^2 = x^3$	II.4
7	2A	Expresa $x + (x + 1) = x^2$	III.4
	3A	Falta un paréntesis para que la expresión pueda ser considerada correcta $(x + (x + 1))^2$	I.1 II.1
	6A	Expresa el cuadrado de un número consecutivo $(x + 1)^2$	III.4
	3B, 5B, 6B	Falta un paréntesis para que la expresión sea correcta	I.1 III.4
	1C	Escribe dos expresiones siendo una incorrecta $x^2 + (x + 1)^2$ y a otra le falta un paréntesis $(x + (x + 1))^2$	III.4 I.1 II.1
	9C	Lo expresa como $x^2 + (x + 1)^2$	III.4
8	2A	No expresa un número par cualquiera, expresa $2 - \frac{4}{x}$, expresando mal la cuarta parte	III.2 II.2

Enunciado	Sujeto	Respuestas de los sujetos	Error
	4A	No expresa un número par, sólo expresa un número cualquiera x , $x - \frac{y}{4}$	III.4
	5A	No expresa un número par cualquiera y expresa la cuarta potencia: $2 - x^4$	III.2 II.5
	6A	No identifica que se trata de dos números distintos: $2x - \frac{x}{4}$	III.3
	7A	No expresa un número par sino el cuadrado de un número y no identifica que se trata de dos números distintos: $x^2 - \frac{x}{4}$	III.3 III.4
	4B	Lo expresa con números concretos del siguiente modo: $2 - \frac{3}{4}$	III.2
	5B, 6B, 6C, 7C	No expresa un número par cualquiera sino que pone el número dos $2 - \frac{x}{4}$	
	8B, 1C	Expresa un número par como la suma de un número cualquiera más dos, $x + 2 - \frac{y}{4}$	III.4
	9B	Falta expresar un número par y lo expresa indicando que no recuerda cómo notar un número par cualquiera identificando sólo la cuarta parte de otro número pero mal expresada: $-\frac{4}{x}$	
	5C	No expresa un número par, sólo expresa un número cualquiera x , escribe $x - \frac{y}{4}$	

Tabla 4.10. Errores en la transformación de representación verbal a simbólica

Análogamente al caso de la traducción de representación simbólica a verbal, en la Tabla 4.11 presentamos un resumen del tipo de errores y la frecuencia con que se han cometido al traducir enunciados del sistema de representación verbal al simbólico.

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado	Sujetos
I.1	5	7	3A, 3B, 5B, 6B, 1C
I.2	4	1	5A, 4B, 6B, 3C
II.1	2	7	3A, 1C
II.2	2	1	5B

Tipo de error	Frecuencia	Enunciado	Sujetos
		8	2A
II.3	4	1	7A, 2B, 3B, 7C
II.4	1	4	7B
II.5	1	8	5A
III.2	7	8	2A, 5A, 4B, 5B, 6B, 6C, 7C
III.3	13	1	7A, 3B, 6B 7B, 8B, 9B
		3	5A, 7A, 6B, 8B, 9B
		8	6A, 7A
III.4	15	3	8A, 6C
		7	2A, 6A, 3B, 5B, 6B, 1C, 9C
		8	4A, 7A, 8B 9B, 1C, 5C

Tabla 4.11. Tipo de errores y frecuencia al transformar de verbal a simbólica

Destaca el hecho de que los errores debidos a la particularización (III.2), se produce únicamente en el enunciado 8, *un número par menos la cuarta parte de otro número*, pues los sujetos toman un número par concreto para expresar la relación de manera simbólica.

Los errores relacionados con variables (III.4) se encuentran en los enunciados 3, 7 y 8. En el tercer enunciado, se producen errores al no expresar de manera correcta dos números consecutivos de manera simbólica. El sujeto 8A expresa la suma dos números consecutivos como $x+1x$ y el sujeto 6C como $x+x+2$. En el enunciado 7 (*el cuadrado de la suma de dos números consecutivos*) se producen errores por cambiar el orden de las operaciones indicadas, expresando los sujetos 1C y 9C el cuadrado de la suma como la suma de los cuadrados, y el sujeto 2A expresa simbólicamente un enunciado que no corresponde con la expresión verbal que se le proporciona ($x+(x+1)=x^2$). Por último, en el caso del enunciado 8 (*un número par menos la cuarta parte de otro número*) los errores de complicación estructural (III.4) provienen de que el sujeto 7A realiza una interpretación incorrecta de un número par cualquiera, expresándolo como x^2 y los sujetos 8B y 1C como $x+2$.

En la Tabla 4.12 expresamos para cada sujeto, el tipo de error y la frecuencia con que comenten cada uno marcando con ✓ cada caso.

	I.1	I.2	II.1	II.2	II.3	II.4	II.5	III.2	III.3	III.4	Total
2A				✓				✓		✓	3
3A	✓		✓								2
4A										✓	1
5A		✓					✓	✓	✓		4
6A									✓	✓	2
7A					✓				✓	✓	3
8A										✓	1
2B					✓						1
3B	✓				✓				✓	✓	4
4B		✓						✓			2
5B	✓			✓				✓		✓	4
6B	✓	✓						✓	✓	✓	5
7B						✓			✓		2
8B									✓	✓	2
9B									✓	✓	2
1C	✓		✓							✓	3
3C		✓									1
5C										✓	1
6C								✓		✓	2
7C				✓				✓			2
9C										✓	1

Tabla 4.12. Sujetos, tipo de errores y frecuencia de verbal a simbólica

Veintiuno de los veinticuatro sujetos incurren en errores en esta primera fase de la recogida de información en la traducción de enunciados de presentación verbal a simbólica.

Como puede observarse, los tipos de errores más frecuentes son los de complicación estructural (III.4) y dos tipos de errores referidos a variables (III.3) y particularización (III.2). El error de la complicación estructural (III.4) es el más frecuente entre los estudiantes. Esta situación es análoga a lo que ocurre en la traducción del sistema de representación simbólico al verbal.

Tal y como se especifica en el tercer capítulo de este trabajo, los estudiantes participantes forman parte de tres grupos distintos (A, B y C), teniendo características similares los del mismo grupo. En la Tabla 4.13 presentamos un resumen de los errores realizados según los grupos de estudiantes.

Grupo		A		B		C	
Transformación		$S \rightarrow V$	$V \rightarrow S$	$S \rightarrow V$	$V \rightarrow S$	$S \rightarrow V$	$V \rightarrow S$
Tipo de error	I.1	-	1	3	3	-	1
	I.2	-	1	1	2	-	1
	II.1	-	1	-	-	-	1
	II.2	-	1	-	1	-	1

Grupo		A		B		C	
Transformación		$S \rightarrow V$	$V \rightarrow S$	$S \rightarrow V$	$V \rightarrow S$	$S \rightarrow V$	$V \rightarrow S$
	II.3	-	1	3	2	2	-
	II.4	-	-	-	1	-	-
	II.5	-	1	-	-	-	-
	III.1	1	-	2	-	-	-
	III.2	-	2	-	3	-	2
	III.3	-	3	-	5	-	4
	III.4	-	5	2	5	-	-
Total por grupo y representación		1	16	11	22	2	10
Total por grupo		17		33		12	

Tabla 4.13 Análisis de errores por grupos

El grupo C reúne el 19.4% de los errores. Este grupo está formado por nueve sujetos de los cuales solamente uno está repitiendo 4º curso y tres tienen la materia de matemáticas del curso anterior pendiente de aprobar. En la traducción de representación simbólica a verbal sólo se producen errores relacionados con la mala interpretación de la operación a realizar entre potencias y/o productos (II.3). Sin embargo en la traducción de verbal a simbólica, se producen errores de diferentes tipos, ocasionándose más en la subcategoría sobre identificación incorrecta de dos variables distintas.

Aproximadamente el 27.4% de los errores se concentran en el grupo formado por los sujetos del grupo escolar A. En este grupo hay un conjunto de ocho estudiantes de los cuales cuatro están repitiendo 4º curso y los otros cuatro tienen las matemáticas del curso anterior aun sin aprobar. En este caso, sólo se comete un tipo de error en la traducción de representación simbólica a verbal, en la categoría de generalización. En la traducción de verbal a simbólica se da una mayor variedad de tipos de errores, ocasionándose la mayoría en la complicación estructural (III.4).

Por último, destacamos que aproximadamente el 53.4% de los errores cometidos se reúnen en el grupo B. Los sujetos de este grupo son los que más deficiencias de conocimiento matemático poseen, pues aproximadamente el 87.5 % de ellos tienen la asignatura de matemáticas de cursos anteriores sin aprobar. En estos casos, no se producen errores debidos al mal uso de paréntesis ni errores debidos a la mala interpretación de las operaciones de fracciones y/o productos. La mayor parte de los errores de este grupo se deben a una inadecuada interpretación del uso de distintas variables (III.3) y a la expresión de la estructura utilizando el lenguaje algebraico (III.4).

IV.2. ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES. FASE 2: EL JUEGO

En este segundo apartado del cuarto capítulo, realizamos un análisis de la segunda parte de la recogida de datos en la que los estudiantes jugaron con las fichas construidas en la primera parte. En el Anexo III se recogen las transcripciones de las grabaciones de audio de las partidas y en el Anexo IV se muestran algunas imágenes del final de las partidas jugadas.

En esta parte del análisis atendemos a cómo los sujetos leen los enunciados simbólicos y verbales y los relacionan al hacer los emparejamientos, además de cómo se corrigen a sí mismos o entre ellos.

Presentamos este análisis dividiéndolo en tres partes. En primer lugar analizamos las primeras partidas de los seis grupos formados por cuatro sujetos cada uno. En segundo lugar, analizamos las partidas jugadas en las dos semifinales en las que participaron grupos de tres sujetos. Por último, analizamos las partidas de la final, donde juegan los cuatro sujetos finalistas.

IV.2.1. Primera Ronda

Detallamos a continuación el análisis de las partidas jugadas por cada grupo.

a) Grupo 4: 2B, 5B, 8B, 9B

Se realizaron tres partidas en los treinta minutos de juego. La profesora tuvo que indicar a los jugadores que detallaran los enunciados de las fichas ya puestas en juego y explicaran los emparejamientos. De manera constante hubo que insistirles en que especificaran cuando se referían a “un número” en una representación simbólica, si éste estaba representado por la letra x o la letra y , para que precisaran si estaban hablando de una sola variable o de dos variables distintas. Al tener que colocar fichas dobles, en la primera partida surgió una dificultad debida a la similitud de enunciados.

En la primera partida, los sujetos evitaron colocar fichas que no estaban seguros dejando pasar la oportunidad de sumarse puntos y dando lugar a que el juego no avanzara durante un tiempo mientras analizaban cada uno sus fichas y cómo colocarlas. Al insistirles que se explicasen bien, el sujeto 5B opta por detallar hasta el más mínimo detalle al relacionar las dos representaciones de un mismo enunciado, enunciando frases como “un número, x , más su consecutivo, x más uno, es igual a otro número que podemos darle el valor que tú quieras, en este caso le damos y , menos dos”. Esto provocó que sus compañeros intentaran explicarse con el mismo detalle, dando lugar a

explicaciones como “un número, que es x , por ese mismo número al cuadrado, que es x al cuadrado, es igual a ese mismo número al cubo” (sujeto 8B).

Destaca el caso del sujeto 9B quien, a pesar de su inseguridad en todas las partidas, al leer enunciados simbólicos y verbales, pasó a jugar la final del torneo pues dio más detalle en sus explicaciones que sus compañeros, lo que hizo que obtuviera más puntos durante el juego.

b) Grupo 3: 3B, 4B, 6B, 7B

Los estudiantes de este grupo jugaron cuatro partidas en el tiempo estimado, realizando la última para desempatar y establecer un sujeto ganador. El sujeto 3B comenzó teniendo dificultades para indicar verbalmente cómo se expresan dos números consecutivos pese a identificarlos en su representación simbólica y realizar de manera correcta el emparejamiento.

El sujeto 7B expresó verbalmente el enunciado simbólico $(\sqrt{x})^2 = x$ como “la raíz cuadrada de un número es igual a ese número”, corrigiéndose a sí mismo posteriormente para enunciarlo correctamente, algo que hizo habitualmente durante las jugadas. Consideramos que comete un descuido cuando lee el siguiente enunciado: “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues el cuadrado de un número elevado a dos es igual al mismo número” y no se da cuenta de que está leyendo un mismo enunciado de dos maneras distintas. Pese a encontrar estas dificultades, es el único estudiante que expresó con claridad la relación que reconocía entre la expresión verbal y simbólica de un enunciado desde el principio, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo: “Un número par, dos x , menos la cuarta parte de otro número, menos y partido de cuatro”. En la cuarta partida expuso: “el cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número... espérate...” y el sujeto 6B le corrigió su error al explicar la frase y él mismo rectificó diciendo “muy bien... me he equivocado... la raíz cuadrada de x al cuadrado”.

El sujeto 6B mostraba bastante inseguridad al leer enunciados, actitud que es similar a la que mantenía normalmente en el aula cuando tenía que comentar algo referido a la asignatura. Esta circunstancia hizo que durante el juego hubiera que insistirle en que se explicara con mayor claridad pues enunciaba frases como la siguiente: “Porque... mira... el producto... el producto con la mitad, por el triple de otro número, que el

número es el y , y este es el triple... yo me entiendo...”. Sus propios compañeros le pidieron que se explicara mejor en variadas ocasiones porque no le entendían.

c) Grupo 6: 2C, 4C, 8C, 9C

Al igual que el grupo anterior, estos sujetos llevaron a cabo cuatro partidas del juego en el tiempo determinado. Al principio del juego hubo que indicar varias veces que el emparejamiento de fichas debía hacerse uniendo enunciados expresados en diferentes sistemas de representación pues, por ejemplo, el sujeto 2C unió dos fichas por la misma representación verbal y no comprendió en un primer momento su error hasta apreciar que la ficha era doble. Este mismo sujeto rectificó correctamente el error del sujeto 9C al colocar y enunciar erróneamente una ficha en el enunciado $(\sqrt{x})^y$:

9C: *Pongo ésta porque la raíz cuadrada de un número que vale x es igual a dicho número*

2C: *No, está mal... porque no dice que esté elevada a dos, dice la raíz cuadrada de un número elevada a otro número*

Lo sujetos de este grupo, en las dos primeras partidas leían la representación verbal o simbólica del enunciado que contiene la ficha que iban a colocar pero no la relacionaban con la ficha que estaba puesta en juego.

En las dos siguientes partidas explicaron mejor las relaciones entre las representaciones verbal y simbólica de un mismo enunciado. Por ejemplo, el sujeto 8C expresó: “el cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x es un número, x más uno es su consecutivo, y está elevado al cuadrado”. Al sujeto 9C había que recordarle que se explicase mejor en algunas ocasiones, como ocurre en el siguiente caso:

9C: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos...*

P: *Pero, ¿qué pone ahí? (señalando a la expresión simbólica) Tu me has leído la frase, pero, ¿qué pone en el simbólico?*

9C: *Un número que es x , más su consecutivo, es x más uno, es igual a y menos dos*

d) Grupo 5: 3C, 5C, 6C, 7C

Estos sujetos realizaron tres partidas durante la media hora de juego. En la primera jugada, el sujeto 6C tuvo que explicar mejor un enunciado y a partir de ahí los demás sujetos también trataron de explicarse con más detalle corrigiéndose a sí mismos. Así ocurre, por ejemplo, en el enunciado 10, donde el sujeto 3C explica el emparejamiento realizado como sigue: “un número al cuadrado menos otro número distinto da once... un número al cuadrado menos otro número diferente al cuadrado da once”. En la segunda partida, el sujeto 5C se mostraba más perezoso al realizar las explicaciones. La

profesora le insistió para que detallara mejor los enunciados, como ocurre en el siguiente caso:

5C: *La mitad de un número por el triple de otro*

P: *¡Qué explicaciones! Yo cuando lo esté escuchando no voy a saber si me has puesto la frase o el símbolo*

5C: *Sí hombre...el símbolo...*

P: *Clarísimo...*

En el caso del sujeto 6C, que durante las partidas explicaba con bastante detalle los enunciados, sufrió un momento de confusión en el siguiente caso:

6C: *Éste... no, éste era así... el cuadrado de la raíz cuadrada de un número que es x igual a ese número que es x ... la raíz cuadrada de un número...*

P: *Léelo bien, porque tal cual que te escuchado... si te pongo y te escuchas... has dicho, un número x es igual a x*

P: *No, no te estoy diciendo que esté mal, que me expliques bien*

6C: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número... pues la raíz cuadrada de x elevada a dos igual a x*

También se observa un momento de confusión en el sujeto 3C que, a pesar de que habitualmente en clase detalla bastante su trabajo, en las jugadas no explicaba con detenimiento los enunciados que ponía en juego, como ocurre en el caso siguiente:

3C: *Un número por otro al cuadrado, da ese mismo al cubo*

P: *Pues tal y como me lo has dicho no está bien*

3C: *Ah bueno...un número por ese mismo al cuadrado...*

En la última partida, la profesora tuvo que recordarles la importancia de explicar los emparejamientos realizados ya que daban explicaciones menos detalladas.

En uno de los enunciados, el sujeto 7C puso en juego una ficha con dudas sobre la corrección de la jugada, provocando que sus compañeros interviniesen y argumentaran si el emparejamiento realizado era o no correcto:

7C: *Creo que esto está mal, no lo sé...*

6C: *Está mal... porque no corresponde... pone el cuadrado de la suma de dos números consecutivos...*

P: *¿Y ahí qué pone?*

6C: *Un número más su consecutivo es igual a ese número siete veces mayor*

3C: *No, eso está mal explicado*

6C: *He dicho un número por su consecutivo...*

7C: *Has dicho "más"*

3C: *Esto es un número por su consecutivo es igual a siete ... siete veces el primer número*

e) Grupo 1: 3A, 5A, 7A, 1C

Se jugaron tres partidas en la media hora. Al iniciar la primera de ellas, el sujeto 1C explicó el enunciado 11 dando la justificación de porqué se cumple la igualdad

$(\sqrt{x})^2 = x$, siendo necesario aclararle que lo que debía explicar es el porqué puede unir dos fichas: por qué un enunciado escrito simbólicamente es igual a otro escrito verbalmente o viceversa.

Este grupo de sujetos detallaron desde el primer momento tanto el enunciado de la ficha que ya se encontraba en juego como el enunciado de la ficha que ellos iban a colocar, dando lugar a frases como la siguiente del sujeto 3A: “El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, porque cuatro por x partido de dos es igual a dos x ”. Este grupo, en ninguna de las partidas jugadas relacionó ambas representaciones.

En algunos casos, los sujetos se corregían a sí mismos, como es el caso del sujeto 3A en el siguiente enunciado: “Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo porque x por x al cuadrado es igual a tres x ... a x al cubo”. O como en el caso del sujeto 1C, donde formuló el enunciado siguiente: “El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, pues x más x más uno es igual a siete x ”, no dándose cuenta en un primer momento que al enunciar la segunda parte de su explicación se refirió a la suma en vez de al producto, algo que rectificó sin dificultad al pedirle la profesora que repitiera su explicación.

Al finalizar la primera partida, el sujeto 7A colocó una ficha de manera errónea uniendo dos enunciados iguales expresados en el sistema de representación verbal. Esto provocó una discusión con sus compañeros sobre el cierre del juego al colocar esa ficha, estableciéndose finalmente que el problema era la manera de unir la nueva ficha a la jugada anteriormente.

En la segunda partida, el sujeto 3A tuvo una pequeña confusión al leer un enunciado en su forma simbólica, pues manifestó verbalmente el enunciado 11 de manera correcta pero al decir su representación simbólica estableció que se trataba de “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues x ... la raíz cuadrada de x es igual a x ...” dándose cuenta después del error cometido al leer la ficha. Este sujeto resaltó erróneamente que se cerraba el juego antes de tiempo pues el sujeto 5A aún podía colocar una ficha doble.

En la tercera y última partida de este grupo, la profesora no tuvo la necesidad de intervenir pues los sujetos enunciaban sin problemas las representaciones simbólicas y

verbales de los enunciados algebraicos de las fichas del juego aunque no llegaron a relacionar ambas expresiones.

f) Grupo 2: 2A, 4A, 6A, 8A

Los sujetos que forman este segundo grupo realizaron cuatro partidas en los treinta minutos determinados por las reglas del juego. De forma reiterada, fue necesario insistirles en la importancia de formular oralmente tanto los enunciados verbales como los simbólicos. Por ejemplo, al sujeto 4A, tras formular el enunciado 12 como “La suma de dos números consecutivos menos cuatro” se le pidió que expresase cómo se lee el enunciado en representación simbólica para que se acostumbraran a leer en voz alta las dos representaciones, esto es, la representación de la ficha que ya está en juego y de la ficha que ellos ponen en juego. Tras esta indicación este sujeto expone la representación simbólica de este enunciado como “un número x , más x más uno, o sea, su consecutivo, menos cuatro”.

Al finalizar esta partida, los sujetos se quedaron únicamente con fichas dobles sin colocar, lo que provocó incertidumbre en el sujeto 4A a quien sus propios compañeros explicaron la situación a la que habían llegado.

En algunos casos, los sujetos se corregían entre ellos. Un ejemplo es el caso del sujeto 4A, quien formuló el enunciado 9 como: “La raíz cuadrada de un número elevado a otro número, o sea, la raíz de x al cuadrado”. Su compañero 6A le rectificó diciendo que se trata de “elevado a y , no al cuadrado”.

Se produce la siguiente conversación entre algunos sujetos, donde se pone de manifiesto cómo la competitividad les motivó a explicar correctamente los emparejamientos realizados:

4A: *El doble de un número que es x menos la cuarta parte de otro número, un número par menos la cuarta parte de otro número*

8A: *Pero ¿por qué sabes que es un número par? Explícalo...porque cualquier número multiplicado por dos es par...*

Esta situación de explicarse fichas los unos a los otros, se produjo sobre todo al finalizar las partidas y tener que explicar porqué se había cerrado el juego.

En las partidas tercera y cuarta que realizó este grupo, la intervención de la profesora fue prácticamente nula, pues los sujetos explicaron con bastante detalle las dos representaciones de los enunciados, aunque no llegaban a relacionar ambas expresiones, se limitaban a leer primero la representación verbal y después su expresión simbólica. Sólo intervino al final de la tercera partida cuando los sujetos se encontraron con la

situación de que la partida estaba cerrada para pedirles que analizaran si alguna ficha estaba mal colocada. Los estudiantes advirtieron que había dos fichas mal colocadas, pues se había unido a la representación simbólica del enunciado 4 una ficha con representación verbal del enunciado 6, tal como se muestra en la Figura 4.1.

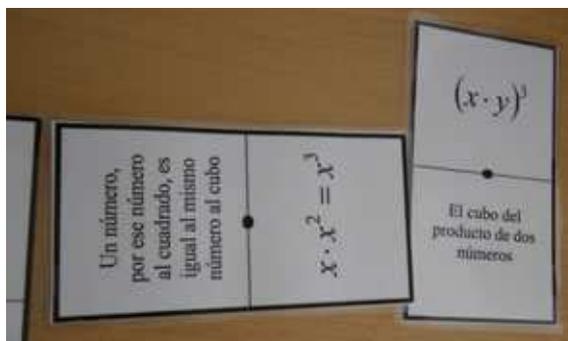


Figura 4.1. Error de emparejamiento de fichas

IV.2.2. Semifinales

Los ganadores de las partidas anteriores jugaron las semifinales.

Primera Semifinal: Sujetos 3B, 9B, 2C

En el inicio de la primera partida el sujeto 2C formuló el enunciado 2 de la siguiente manera: “Cuatro por la mitad de un número que es x , es igual al doble de ese número que es $x...$ ”. Esto dio lugar a confusión, al no poder distinguir si cuando dice “la mitad de un número que es x ” se está refiriendo a que el número cualquiera es x o a que la mitad de un número se denota por x . El sujeto 9B lo enunció posteriormente para rectificar al sujeto 2C diciendo: “El producto de cuatro, que es cuatro multiplicado, por la mitad de un número, que es x entre dos, que es igual al doble de dicho número...”.

En la segunda partida, el sujeto 2C también expresó enunciados confusos como el siguiente: “El producto de la mitad de un número, que es x , por el triple de otro que es $y...$ la mitad de un número, que es x , por otro número, por tres veces otro número que es $y...$ ”. En la tercera partida, se le pidió a este sujeto 2C que repitiera varias veces la manera en que pronunció el enunciado 4 pues en primer lugar dijo: “Un número, que es x , por ese mismo número que es x al cuadrado, es igual a ese mismo número que es x al cubo” y tras una repetición de varias veces de manera semejante lo enunció como: “Vamos a ver... el producto de la mitad de un número, que es x partido de dos, por el triple de otro número que es”. Esto hizo ver a la profesora que realizar una pausa en la lectura produjo una diferencia para entender el enunciado simbólico leído oralmente. Este estudiante no precisó la relación entre parte del enunciado verbal y del simbólico

en algunos casos. Por ejemplo, en el enunciado 8 explicó “Un número par, que es dos x , menos la cuarta parte de otro que es y ”, precisando la escritura simbólica de un número par pero no así la de la cuarta parte de un número.

Por otra parte, el sujeto 3B, que en las primeras partidas del torneo justificó bien el emparejamiento de los enunciados, sufrió en esta primera semifinal varios enredos verbales con los enunciados, dando lugar a situaciones como la siguiente:

3B: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, pues aquí los dos números es x más otro número que es x más uno es igual a menos cuatro...*

P: *Repíte*

3B: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, la suma de dos números, x más ... el otro número, su consecutivo, menos cuatro*

Este sujeto leyó confusamente algunos enunciados de las fichas que quería emparejar dando lugar a confusión entre los compañeros que le escuchaban, pues aunque algunos sujetos afirmaban que sabían a lo que se referían, pues conocían las fichas, la lectura dada no era correcta.

Al finalizar la primera partida este sujeto provocó la siguiente situación, donde sus propios compañeros le explicaron el error cometido:

3B: *No lo sé... el producto de la mitad de un número por el triple de otro... el producto porque está multiplicando, de un número que es x , por otro número elevado a dos es igual a ese número elevado a tres... al triple de otro número ...*

9B: *No, está mal...*

2C: *Porque has puesto el producto de la mitad de un número*

9B: *De la mitad y aquí pone de x al cuadrado*

2C: *Aquí sería, un número por otro número... por ese mismo número al cuadrado es igual a ese mismo número al cubo*

9B: *Para que esto se cumpliera aquí tendría que poner x por... la mitad de un número que sería y o x partido de dos...*

En este caso, el sujeto 3B leyó el enunciado verbal de la ficha que ya estaba en juego y explicó la representación simbólica del enunciado que tenía en su ficha, pero no se dio cuenta de que no correspondían al mismo enunciado algebraico escrito de dos formas distintas sino que se trataba de dos enunciados algebraicos diferentes.

Segunda Semifinal: Sujetos 2A, 3A, 6C

En esta segunda semifinal la profesora apenas intervino pues los sujetos participantes explicaban con claridad los enunciados de las fichas que ponían en juego, detallando las dos representaciones que estaban emparejando, justificando tanto el enunciado de la

ficha que ya está en juego como el enunciado de la ficha que iban a colocar. En la mayoría de los casos, leían primero el enunciado en su representación verbal y posteriormente explicaban la relación de éste con su representación simbólica. Así ocurrió, por ejemplo, en el caso del sujeto 3A enunciando “El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x partido de dos, que es la mitad de un número, es igual al mismo número por dos”.

En la segunda partida, el sujeto 2A colocó erróneamente una ficha dando lugar a que el sujeto 3A le replicase justificando el porqué de su error. Destacamos que, a pesar de que estos sujetos se explicaban con bastante claridad en la mayoría de los casos, daban lugar a situaciones en las que ellos mismos se corregían.

IV.2.3. Final

En las últimas partidas del juego, que constituyeron la ronda final, participaron los sujetos 9B, 2C, 2A, 3A. Éstos realizaron cuatro partidas en el tiempo estimado de 30 minutos, resultando ganador el sujeto 3A. En estas partidas, la profesora apenas tuvo que intervenir pues los sujetos participaban en el juego y expresaban los enunciados de las fichas correctamente, además de que ellos mismos se incitaban a explicarse con claridad.

Tal como sucedió en las partidas de la semifinal, los sujetos 9B y 2C explicaron con menor detalle los enunciados expresados simbólicamente tanto de sus fichas como los que ya estaban puestos en juego, y los sujetos 2A y 3A detallaron en primer lugar el enunciado verbal para explicar posteriormente cómo es la representación simbólica de dicho enunciado relacionando ambas representaciones.

Al finalizar la primera partida de esta final, el sujeto 2A mostró dificultades al justificar el emparejamiento del enunciado verbal 5 con su representación simbólica. Este estudiante cambió la operación al leer el enunciado simbólico, expresando “El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x más x más uno que es su consecutivo, es igual a siete x ” pero, al decirle la profesora que repitiera más despacio, lo enuncia correctamente: “ x por x más uno que es el consecutivo, es igual a siete veces x ”.

A partir de la tercera partida, el sujeto 9B se mostró más nervioso, dando lugar a situaciones en las que en vez de leer el enunciado señalaba la ficha y comentaba algunos enunciados como “El cubo del producto de dos números, los dos números que son x e y , bueno, x por y , y el cubo que está detrás del paréntesis... y el paréntesis encima. Esta

situación hizo que sus propios compañeros le pidieran que se explique mejor sin indicar que se produce un error en su lectura, sino una confusión en la lectura del enunciado.

IV.3. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

En este último apartado del capítulo realizamos un resumen de los resultados que se obtienen a partir de los análisis realizados en los apartados anteriores.

Al realizar un análisis de la primera parte del instrumento de recogida de datos, se observa que se producen más errores en un trabajo escrito cuando los estudiantes tuvieron que pasar un enunciado algebraico en representación verbal a su representación simbólica, produciéndose en estas transformaciones de enunciados aproximadamente el 75% de los errores analizados (esto puede observarse en las tablas 4.4 y 4.5 anteriores).

Los errores que se identificaron en la primera fase de recogida de información corresponden a los debidos a la mala interpretación de las operaciones de potenciación y de producto en el caso de traducción de enunciados de representación simbólica a verbal (subcategoría II.3). Los enunciados que más errores concentran son el 5 donde los sujetos tienen que expresar verbalmente $x \cdot (x + 1) = 7x$ y el enunciado 10 donde tienen que expresar la representación verbal de la expresión $x^2 - y^2 = 11$. En el primer caso, la dificultad encontrada por los sujetos consiste en identificar los números consecutivos. En el segundo enunciado mencionado, la dificultad radica en identificar que se trata de dos números diferentes que están elevados al cuadrado y la operación posterior consistiría en realizar la resta. Sin embargo, estos dos enunciados no produjeron errores en los sujetos a lo largo de la segunda fase, donde los sujetos ponen en juego la manera de leer oralmente y relacionar representaciones verbales y simbólicas de un mismo enunciado algebraico.

En el caso de la traducción de enunciados de representación verbal a simbólica, se producen el mayor número de errores en la categoría relacionada con las características propias del lenguaje algebraico. En la mayoría de los casos estos errores se deben a la complicación estructural, a la mala interpretación de existencia de distintas variables y a la particularización de casos. En la mayoría de las ocasiones, estos errores se concentran en el enunciado 1 (*el producto de la mitad de un número por el triple de otro número*) y en el enunciado 8 (*un número par menos la cuarta parte de otro número*), acumulando entre los dos aproximadamente el 63% de los errores cometidos en este tipo de transformaciones de enunciados.

Se observa en las producciones de los estudiantes mediante el juego que, a pesar de que uno de los errores cometidos con más frecuencia por los sujetos es no expresar correctamente por escrito la representación simbólica de “un número par” (enunciado 8), cometiendo el error de particularizar, en el juego, identifican sin problemas que la expresión $2x$ corresponde a un número par cualquiera.

Al analizar las dos fases del instrumento de recogida de información, destaca el hecho de que el enunciado 11 (*el cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número*) no produjo ningún error en la primera fase de la aplicación del instrumento y, sin embargo, durante la segunda parte del juego, los sujetos encontraron dificultades al leer su representación simbólica $(\sqrt{x})^2 = x$. En el juego éste fue el enunciado que provocó más confusión verbal entre los estudiantes. Al leer este enunciado en su representación simbólica, gran parte de los sujetos expresaron “El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número”, “la raíz cuadrada de x es igual a ese número que es x ”, sin que la mayoría se dieran cuenta de que estaban expresando el equivalente a $\sqrt{x} = x$.

Durante las partidas jugadas se observó que la mayoría de estos estudiantes tuvieron dificultades para expresarse con claridad oralmente. En variadas ocasiones los estudiantes fueron capaces de corregir sus propias explicaciones tras realizar una pausa o serle requerida una nueva explicación por sus compañeros o la profesora, sin requerir ayuda externa. Algunos estudiantes, entre ellos los sujetos 2A o 3A, se expresaron de manera detallada, explicando las representaciones verbal y simbólica desde el primer momento. Además, estos estudiantes relacionaban con bastante claridad las dos representaciones de los enunciados.

Cabe destacar el caso del sujeto 9B, quien incurre en muchos errores en el trabajo escrito al traducir enunciados algebraicos de su representación simbólica a su representación verbal. En el juego manifiesta un gran nerviosismo por explicar los enunciados, lo que hace que de un gran detalle en sus explicaciones obteniendo así más puntos que los sujetos contra los que jugó.

Por otra parte, el sujeto 2C, durante el trabajo escrito únicamente manifestó un error, concretamente en el enunciado 9 donde tenía que traducir la expresión $(\sqrt{x})^y$ y escribió “un número por la raíz cuadrada de otro número”. Sin embargo en las partidas de las semifinales manifestó enunciados confusos en varias ocasiones, al no distinguir con

claridad de manera oral la lectura de enunciados simbólicos de los verbales. Esto puede deberse a los nervios de jugar las últimas partidas.

Por último, destacamos el caso del sujeto 3B, quién incurrió en gran cantidad de errores en el trabajo escrito, en ambos sentidos de la traducción, y también al leer los enunciados expresados simbólicamente durante las partidas.

Se han destacado los estudiantes que han tenido un comportamiento diferente a sus compañeros. El resto de alumnos, a pesar de manifestar errores en la primera fase del instrumento, no los manifestaron en la segunda fase. En la mayoría de los casos los estudiantes únicamente realizaban una lectura de ambas representaciones por separado. En las semifinales y en la final, los sujetos relacionaron las dos formas de representar el enunciado al realizar la lectura. Esto se puede deber tanto a un proceso de aprendizaje durante el desarrollo de la aplicación del instrumento como al tipo de estudiantes que participaron en estas partidas.

En cuanto a la motivación de los sujetos, es llamativo para la profesora, cómo los sujetos 4A, 7A, 2B y 4B, quienes usualmente tienen poco interés por la asignatura, durante la semana de aplicación del instrumento de recogida de información para este trabajo de investigación no faltaron a clase y mostraron interés por participar. Únicamente se les informó el viernes de la semana anterior que a partir del siguiente lunes se iban a realizar unas pruebas para hacer un concurso donde al final de la semana tendríamos un estudiante ganador que se llevaría un premio, sin especificar en qué consistían ni las pruebas ni el premio.

Durante la realización de la segunda parte del instrumento, los sujetos se mostraron muy motivados al tener que competir con sus propios compañeros y con los de los otros grupos escolares, lo que hizo que sujetos como 3B, aun encontrándose enfermo, hiciera que su padre esperase una hora para llevarle al médico para poder terminar la parte escrita. O, casos como el sujeto 6C que hizo que su madre esperase media hora fuera del instituto para poder competir en la partida semifinal del juego.

El hecho de que durante la segunda parte de la aplicación del instrumento los estudiantes trabajaran en grupo, discutiendo la manera de leer los enunciados, tanto simbólicos como verbales, hizo que hubiera comunicación entre ellos, que aprendieran los unos de los otros la manera correcta de leer enunciados simbólicos que, en general, era donde más dificultad tenía. Además, disponían de una motivación externa, pues todos querían conocer cuál era el premio.

V. CONCLUSIONES

Este último capítulo está dedicado a recoger las conclusiones obtenidas tras la realización de este trabajo de investigación.

Consideramos que, en ocasiones, al llegar a cierta etapa del aprendizaje, un gran número de alumnos tienen sentimientos contrarios a las matemáticas, más aún, si han tenido dificultades con ellas a lo largo de su etapa educativa, como sucede con los estudiantes con los que se ha trabajado en esta investigación. En estos casos es de especial importancia que el profesorado intente convertir estas actitudes negativas en positivas. Para ello puede utilizar los medios que encuentre a su alcance y, en particular se hace necesario motivar al alumnado usando aquellos recursos que les sean familiares.

Esta necesidad de contar con un alumnado interesado surge también a la hora de realizar una investigación en el aula. Todo ello dio lugar a que nos planteásemos la necesidad de la construcción de un instrumento de recogida de información basado en el juego. El dominó fue el que nos pareció más adecuado por dos razones: (a) su regla básica (poner juntas aquellas partes que son iguales) es generalmente conocida y, en caso de no serlo, fácilmente comprensible por un potencial jugador, y (b) esa regla básica se adecuaba perfectamente a la tarea que en nuestro trabajo exigía que realizaran los estudiantes, para la recogida de datos. De aquí el instrumento diseñado, como se ha descrito en el capítulo III consiste en construir las fichas de un juego semejante al dominó mediante la traducción de enunciados algebraicos en representación verbal a simbólica y viceversa. En primer lugar los estudiantes completaron la construcción de las fichas que se les proporcionaron a medio rellenar. En segundo lugar, pusieron en práctica la lectura de enunciados simbólicos y verbales jugando con dichas fichas en un torneo.

Consecución de los Objetivos

Consideramos conseguido el primer objetivo específico consistente en *construir un instrumento que permita explorar el proceso de traducción entre los sistemas de representación simbólico y verbal*. El instrumento se ha construido y, como se ha mencionado en el desarrollo del trabajo, nos ha permitido obtener datos por medio de su utilización en dos fases. La primera de ellas, es un trabajo escrito que nos ha servido para analizar y clasificar los errores en los que incurren los estudiantes al realizar por escrito transformaciones entre los sistemas de representación simbólico y verbal. La

segunda parte se puede considerar una entrevista clínica no estructurada. La autora de este trabajo realiza la observación de las actuaciones de los estudiantes durante los episodios de juego anotando y grabando la dialéctica de los estudiantes convertidos en jugadores, interesándose por sus expresiones orales y las relaciones que establecen entre los enunciados algebraicos expresados en ambos sistemas de representación. Este hecho nos permite afirmar que el instrumento ha cumplido las expectativas puestas en el mismo que consistían en que su uso permitiera explorar el proceso de traducción entre los sistemas de representación verbal y simbólica, de enunciados generales de relaciones numéricas que realizan los estudiantes en educación secundaria, abordándose así el primer objetivo propuesto.

En cuanto al segundo objetivo específico planteado, *analizar y clasificar los errores en los que incurren los estudiantes al realizar dichas traducciones*, la aplicación de la primera fase del instrumento nos ha permitido: (a) construir un sistema de categorías (partiendo de los empleados en estudios previos) y (b) analizar los errores en los que incurren los estudiantes al traducir enunciados de un sistema de representación a otro (de verbal a simbólico y de simbólico a verbal) utilizando las categorías definidas.

Como se ha detallado en el capítulo IV, hemos podido clasificar estos errores y hemos observado que al pasar de representación verbal a simbólica, el error más cometido por estos sujetos es debido al mal uso de la interpretación de potencias y producto. En el cambio de representación simbólica a verbal, el error más frecuente ha sido el de complicación estructural. Algunos de los errores detectados en el paso de la representación verbal a la simbólica, en concreto la particularización de expresiones y la confusión de la multiplicación y la potencia, coinciden con los detectados por Ruano et al. (2008) en un estudio sobre los errores cometidos por estudiantes de educación secundaria en tres procesos específicos en los que se pone en juego el lenguaje algebraico: sustitución formal, generalización y modelización.

La puesta en práctica de la segunda fase del instrumento nos ha servido para analizar cómo sujetos que incurren en errores en un trabajo escrito, por ejemplo, no cometen tantos al leer enunciados simbólicos oralmente. Este resultado puede ser debido a un proceso de aprendizaje de los sujetos tras la realización de la primera fase del juego y del propio desarrollo de la segunda fase en grupo con sus compañeros/as. Así mismo, se puede considerar que la reducción de errores en esta segunda fase es producto, al menos

en parte, de la observación en las fichas en las que aparece la misma expresión algebraica en ambos sistemas de representación.

En lo referido al tercer objetivo específico, *describir las relaciones que los estudiantes ponen de manifiesto entre diferentes representaciones de un mismo enunciado algebraico, así como las explicaciones que dan a las mismas*, consideramos que se ha conseguido parcialmente durante la realización de la segunda fase del instrumento. La consecución de este objetivo está limitada por la información dada oralmente por los estudiantes durante la fase de juego de la recogida de datos, al explicar los emparejamientos realizados. Como se detalla en el capítulo IV, en esta fase hemos observado que fue necesario insistir a los estudiantes en la necesidad de relacionar las expresiones emparejadas. Al expresar dichas relaciones algunos estudiantes solamente leían las dos representaciones, una a continuación de la otra, como en el siguiente ejemplo: “La raíz cuadrada de un número elevado a otro número, la raíz de x elevada a y ”. Otros estudiantes, en cambio, relacionarían ambas representaciones de un mismo enunciado como puede observarse en el siguiente ejemplo: “la raíz cuadrada de un número, que es x , pues raíz de x , elevada a otro número, pues elevada a y ”. En este segundo caso los estudiantes pusieron en correspondencia los elementos de ambas representaciones mientras que en el primer caso la relación que se establece entre ambas representaciones de un mismo enunciado es global, y por tanto menos precisa.

Las correcciones realizadas por unos estudiantes a otros motivaron la explicitación de las relaciones que percibían entre ambas representaciones de un enunciado.

A partir de la consecución de los objetivos específicos se ha avanzado en el objetivo general de este trabajo, consistente en *analizar el proceso de traducción entre los sistemas de representación verbal y simbólico (en ambos sentidos), de enunciados generales de relaciones numéricas, que realizan estudiantes de educación secundaria*. Con este análisis pretendemos dar un primer paso en la indagación sobre la capacidad de estos estudiantes para realizar dicha traducción y en su comprensión de los enunciados en cada uno de los sistemas de representación mencionados.

La información obtenida en este trabajo es de utilidad para profundizar en el conocimiento de los estudiantes, tanto desde el punto de vista de la investigación como de la docencia. Por un lado, aporta información útil para el desarrollo de investigaciones centradas en la resolución de problemas dados verbalmente, donde es necesario realizar,

previamente a su resolución, una traducción del enunciado entre distintos sistemas de representación. Desde el punto de vista de la docencia, puede ser interesante para la elaboración de propuestas didácticas teniendo en cuenta, por ejemplo, la metodología empleada para la recogida de información o los errores en que los estudiantes incurren, con vistas al planteamiento de determinadas tareas que constituyan oportunidades de aprendizaje para dichos estudiantes.

Líneas de Continuación

El trabajo realizado es una primera indagación en la exploración de los procesos de traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólica por estudiantes de secundaria. A partir de los resultados obtenidos identificamos varias vías de continuación para esta investigación:

- El hecho de que los estudiantes traduzcan con más facilidad un enunciado algebraico dado en su representación simbólica a su representación verbal puede aprovecharse para iniciar a los estudiantes en el estudio del álgebra. Desde la perspectiva de la invención de problemas se puede aprovechar esta mayor facilidad para que sean los estudiantes los que propongan problemas a partir de enunciados algebraicos expresados simbólicamente y, a partir de dichos problemas, abordar la traducción del sistema de representación verbal al simbólico, que entraña más dificultades.

- Dado que en este estudio se han considerado los sistemas de representación algebraico y verbal, dependiendo de los objetivos de investigación particulares y del contenido matemático que interese, se pueden diseñar otros estudios en los que se explore el proceso de traducción de enunciados con otros sistemas de representación (sistemas de representación diferentes de los considerados o los mismos, junto con algún o algunos otros).

- Con el objetivo de que los estudiantes desarrollen su capacidad para realizar transformaciones de enunciados entre diferentes sistemas de representación, y profundizar en el estudio de dicho proceso y de su comprensión de los enunciados, se puede desarrollar un experimento de enseñanza contemplando estos dos (o más) sistemas de representación. El análisis de errores realizado permite plantear una propuesta de innovación curricular en la que el propio alumnado reflexione sobre sus ideas erróneas. Esto proporcionaría una situación de aprendizaje en el que el rol del profesorado jugaría un papel activo y coordinado con el alumnado.

- Los enunciados utilizados en este trabajo no tienen un contexto concreto, se trata de relaciones numéricas generales, por lo que sería de interés realizar un estudio semejante con enunciados algebraicos contextualizados. Esta línea conectaría con la investigación sobre *resolución de problemas*. En este sentido, extraer las relaciones numéricas generales del enunciado de un problema es un heurístico previo al planteamiento simbólico de las mismas. Utilizando este heurístico, la resolución de un problema contextualizado pasa a ser un enunciado descontextualizado que contiene la información necesaria para su resolución. De este modo, se conecta el proceso de traducción del enunciado de problemas con el proceso de traducción de enunciados estudiado en esta investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ake, L. (2010). *Una aproximación al razonamiento algebraico elemental desde el marco del enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático*. Trabajo de Fin de Máster. Granada: Universidad de Granada.
- Alsina, C. (1991). *Los 90 son nuestros. Ideas didácticas para una matemática feliz*. Trabajo presentado en el Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, París.
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 24-35.
- Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Valencia: Universidad de Valencia.
- Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. London: Kluwer Academic Publishers.
- Bell, A. (1988). Algebra – Choices in curriculum design. En A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 147-153). Veszprém, Hungría: OOK.
- Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Boletín Oficial del Estado (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. (Vol. BOE N° 5, pp. 677-773). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Consultado el 27 de octubre de 2010 en <http://www.adideandalucia.es/disposicion.php?cat=85>
- Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007a). *Decreto 231/2007, de 31 de julio, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía*. (Vol. BOJA N° 156, pp. 15-25). Sevilla: Junta de Andalucía. Consultado el 27 de octubre de 2010 en <http://www.adideandalucia.es/disposicion.php?cat=85>
- Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (2007b). *Orden de 10-8-2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en*

- Andalucía. (Vol. BOJA N° 171, pp. 23-65). Sevilla: Junta de Andalucía. Consultado el 27 de octubre de 2010 en <http://www.adideandalucia.es/disposicion.php?cat=85>
- Booth, L. R. (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School*, 11(3), 5-6.
- Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral, Universidad de Granada. Consultado el 23 de febrero de 2011 en <http://digibug.ugr.es/handle/10481/158>
- Cañadas, M. C. y Castro, E. (2002). Errores en la resolución de problemas matemáticos de carácter inductivo. En J. M. Cardeñoso, E. Castro, A. J. Moreno y M. Peñas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: resolución de problemas* (pp. 147-154). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y SAEM Thales.
- Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Description of a procedure to identify strategies: the case of the tiles problem. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. (Vol. 2, pp. 257-264). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM e IAP.
- Caspi, S. y Sfard, A. (2011). *The entrance to algebraic discourse: informal meta-arithmetic as the first step toward formal school algebra*. Trabajo presentado en el 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Rzeszów, Polonia. Consultado el 12 de marzo de 2011 en <http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/index.php?id=wg3>
- Castellanos, M. y Obando, J. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico*. Conferencia presentada en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia.
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.
- Castro, E., Olmo, M^a. A. y Castro, E. (2002). *Desarrollo del pensamiento matemático infantil*. Dto. Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada.
- Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(3), 361-371.
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), 99-110.
- Chacón, I. (1992). Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas. *Apuntes I.E.P.S*, 55. Madrid: Narcea ediciones.
- Cifarelli, V. (1998). The development of mental representations as a problem solving activity. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17(2), 239-264.
- Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1, 16-30.
- Clement, J., Lochhead, J. y Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 88, 286-290.
- Cockroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Informe Cockroft. Consultado el 13 de junio de 2011 en <http://www.educationengland.org.uk/documents/cockcroft>
- Collis, K. F. (1975). *A study of concrete and formal operations in school mathematics: A Piagetian viewpoint*. Melbourne, Australia: Australian Council for Educational Research.
- Colera, J., Martínez, M., Gaztelu, I. y Oliveira, M. J. (2008). *Matemáticas 4º educación secundaria, opción A*. Madrid: Grupo Anaya.
- Contreras, M. (2004). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial Síntesis.
- Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Dancing, J. y Sosa, E. (1993). *A Companion to epistemology*. Oxford: Basil Blackwell.
- De Guzmán, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. En Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton" (Ed.). *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)* (pp. 49-85). Tenerife: Editor.
- Deulofeu, J. (2011). *Prisioneros con dilemas y estrategias dominantes. Teoría de juegos*. Navarra: RBA.

- Domínguez, E., Hernández, J., Muñoz, M., Palarea, M. M., Ruano, R. y Socas, M. (2006). Investigación e innovación matemática. Un ejemplo: puzle algebraico. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación. Monografía IV*, 59-77.
- Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept or parameter*. Tesis doctoral no publicada. Utrecht: Universidad de Utrecht. Consultado el 7 de abril de 2011 en <http://www.library.uu.nl/digoarchief/dip/diss/2003-0925-101838/in.houd.htm>
- Duval, R. (1993). *Semiosis et noesis, Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa*. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J. y Badillo, E. (2008). Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *UNION 14*, 61-75.
- Edo, M. y Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacción y construcción de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(2), 257-268.
- Edo, M., Deulofeu, J. y Badillo, E. (2007). *Juego y matemáticas: un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela*. Trabajo presentado en las XIII Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Granada.
- Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Suma 5*, 23-34.
- Fernández, F. (2001). El problema de los “problemas algebraicos”. En P. Gómez y L. Rico (Eds.). *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 137-147). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Friedlander, A. y Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. En A. A. Cuoco (Ed.1), *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics: The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, Virginia. NCTM.
- Gairín, J. M. (1998). *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*. Tesis Doctoral. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.
- García, J. (2000). *Representaciones en resolución de problemas. Un estudio comparativo con estudiantes españoles y mexicanos*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Ginsburg, H. (1997). *Entering the child's mind: The clinical interviewing psychological research and practice*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la

- Matemática. Universidad de Granada. Consultado el 19 de abril de 2011 en http://usuarios.fceia.unr.edu.ar/~sreyes/funciones_semioticas.pdf
- Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Gómez, B. (1995). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 13(3), 313-325.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- González, J. L. (2000). *El arte del dominó: teoría y práctica*. Barcelona. Editorial Paidotribo.
- Hiebert, J. y Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding, en Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 65-97). Nueva York: MacMillan Publishing Company.
- Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 515-556). Nueva York: MacMillan.
- Kaput, J. (1998). *Teaching and Learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, Massachusetts: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2009). *Algebra in the Early Grades*. Londres: Routledge.
- Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). London: Kluwer.

- Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1987) Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.
- MacGregor, M. (1990). Writing in natural language helps students construct algebraic equations. *Mathematics Education Research Journal*, 2(2), 1-11.
- MacGregor, M. y Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 217-232.
- Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. *Journal of Children's Mathematical Behavior*, 3(1), 93-166.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Primaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada. Consultado el 21 de enero de 2011 en <http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM06-2822.pdf>
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- Molina, M. y Castro, E. (2006). Uso y desarrollo de pensamiento relacional por alumnos de tercero de Primaria. En J. I. Navarro y M. Aguilar (Eds.), *Learning maths in childhood. Proceedings of the International Symposium on Early Mathematics* (pp. 263-281). Cádiz: Departamento de Psicología de la Universidad de Cádiz.
- Moyles, J. (1990). *El juego en la educación infantil y primaria*. Morata. Madrid.
- Palarea, M^a. M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Tenerife: Universidad de la Laguna. Consultado el 10 de febrero de 2011 en http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-106509_archivo.pdf
- Piaget, J. (1984). *La representación del mundo en el niño*. (6^a Edición). Madrid: Ediciones Morata.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.

- Rico, L. (1977a). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-59). Barcelona: Horsori.
- Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-60). Barcelona: Horsori.
- Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. En L. C. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.), *Actas del IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 219-231). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, 4(1), 1-14.
- Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.
- Schultz, J. E. y Waters, M. S. (2000). Why representation? *Mathematics Teacher*, 3(6), 448-453.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.
- Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. y Lins, R. (Eds.) (2001). *Perspectives on school algebra*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Villegas, J. L. (2002). *Representaciones en resolución de problemas: un marco de análisis de protocolos*. Trabajo de Investigación Tutelada. Granada: Universidad de Granada.
- Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14, 169-181.

**DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE GRANADA**



**ANEXOS DEL TRABAJO FIN DE MÁSTER
TRADUCCIÓN DE ENUNCIADOS ALGEBRAICOS
ENTRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
VERBAL Y SIMBÓLICO POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA**

Trabajo Fin de Máster que presenta
SUSANA RODRÍGUEZ DOMINGO

Dirigido por las doctoras
D^a. MARTA MOLINA
D^a. MARIA CONSUELO CAÑADAS
D^a. ENCARNACIÓN CASTRO

GRANADA, 2011

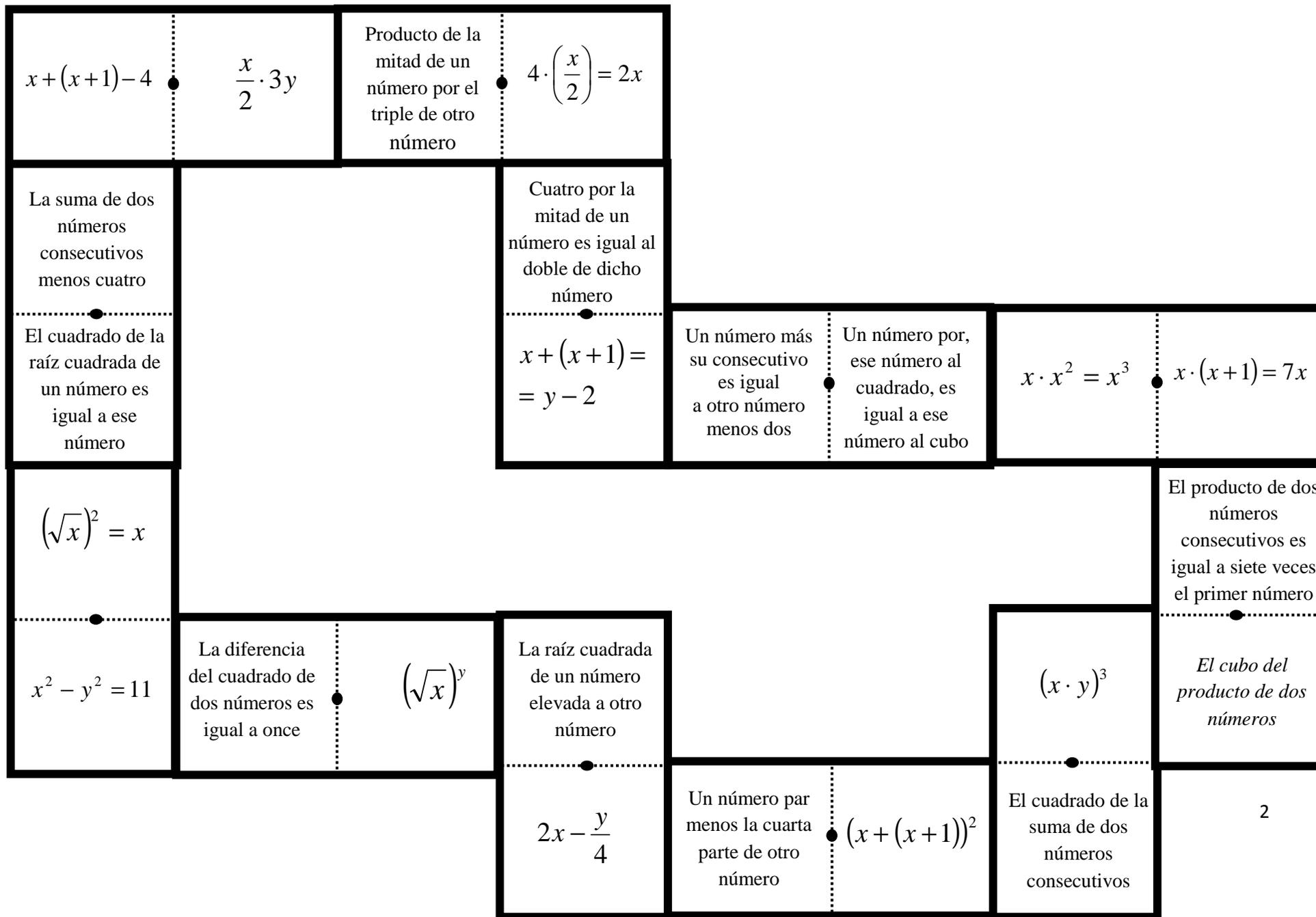
Anexo I: Instrumento para la recogida de datos	1
Anexo II: Primera fase de la recogida de datos	9
Anexo III: Transcripción de las grabaciones de la segunda fase de la recogida de datos	34
Anexo IV: Imágenes de algunas partidas	74

ANEXO I: Instrumento para la recogida de datos

En este primer anexo adjuntamos el instrumento de recogida de información, que como se ha descrito en el informe del trabajo, está formado por las siguientes partes:

Un primer documento que se entregó a los sujetos para que lo rellenaran (se les dio en un folio tamaño A3 a cada uno). Mostramos este documento resuelto.

Después se muestran las fichas de dominó con las que jugaron los sujetos durante la segunda parte de la recogida de datos. Las fichas se presentan en el mismo tamaño que las fichas con las que jugaron los sujetos.



$$x + (x + 1) - 4$$

$$\frac{x}{2} \cdot 3y$$

El producto de la mitad de un número por el triple de otro número

$$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$$

El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número

$$x + (x + 1) = y - 2$$

Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos

Un número, por ese número al cuadrado, es igual al mismo número al cubo

$$x \cdot x^2 = x^3$$

$$x \cdot (x + 1) = 7x$$

El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número

El cubo del producto de dos números

$$(x \cdot y)^3$$

El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

$$(x + (x + 1))^2$$

Un número par menos la cuarta parte de otro número

La raíz cuadrada
de un número
elevada
a otro número

$$2x - \frac{y}{4}$$

$$(\sqrt{x})^y$$

El cuadrado de un
número, menos el
cuadrado de otro
número,
es igual a once

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

$$x^2 - y^2 = 11$$

La suma de dos
números
consecutivos
menos cuatro

El cuadrado de la
raíz cuadrada de
un número es
igual a ese
número

El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número

$$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$$

$$(x \cdot y)^3$$

El cubo del producto de dos números

Un número, por ese número al cuadrado, es igual al mismo número al cubo

$$x \cdot x^2 = x^3$$

$$\frac{x}{2} \cdot 3y$$

El producto de la mitad de un número por el triple de otro número

Un número más
su consecutivo es
igual
a otro número
menos dos

$$x + (x + 1) = y - 2$$

$$(x + (x + 1))^2$$

El cuadrado de la
suma de dos
números
consecutivos

El cuadrado de un
número
menos el cuadrado
de otro número
es igual a once

$$x^2 - y^2 = 11$$

$$x + (x + 1) - 4$$

La suma de dos
números
consecutivos
menos cuatro

La raíz cuadrada
de un número
elevada
a otro número

$$\left(\sqrt{x}\right)^y$$

$$2x - \frac{y}{4}$$

Un número par
menos la cuarta
parte de otro
número

El producto de
dos números
consecutivos es
igual a siete veces
el primer número

$$x \cdot (x + 1) = 7x$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

El cuadrado de la
raíz cuadrada de
un número es
igual a ese
número

ANEXO II: Primera fase de la recogida de datos

En este segundo anexo recogemos las producciones de los estudiantes en la primera fase de la recogida de datos, identificando cada estudiante en la esquina superior derecha mediante el código alfanumérico correspondiente y que han sido detallados en el apartado III.2 del informe del trabajo.

2A

$x + (x+1) - 4$	$\frac{x}{2} \cdot 3y$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos cuatro.			Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de ese número
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
			Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
			$x \cdot x^2 = x^3$
			$x \cdot (x+1) = 7x$
$(\sqrt{x})^2 = x$			Un número por su consecutivo es igual a siete veces ese número.
$x^2 - y^2 = 11$	Un número al cuadrado menos otro número al cubo es once.	$(\sqrt{x})^y$	Un número por otro número elevados al cubo.
		?	
$2 - \frac{5}{x}$			Un número por menos la cuarta parte de otro número
			$x + (x+1) = x^2$
			El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

3A

$x + (x+1) - 4$	$\frac{x}{2} - 34$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo, menos cuatro.			Cuatro por la mitad de un número, es igual a ese número multiplicado por dos.
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			
	$x + (x+1) = 4 - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
$(\sqrt{x})^2 = x$			$x \cdot (x^2) = x^3$
			$x \cdot (x+1) = 7x$
			Un número por su consecutivo es igual a ese número por siete.
$x^2 - y^2 = 11$	El cuadrado de un número, menos el cuadrado de otro número es igual a once.	$(\sqrt{x})^y$	La raíz de un número elevado a otro número.
			$(x \cdot y)^3$
			Un número por otro al cubo.
	$(x \cdot 2) - \frac{4}{4}$	Un número por menos la cuarta parte de otro número	$(x + (x+1))^2$
			El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

4A

$x + (x+1) - 4$		El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$				
un número más su consecutivo menos cuatro			Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de un número				
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			$x + (x+1) = y - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo	$x \cdot x^2 = x^3$	$x \cdot (x+1) = 7x$
$(\sqrt{x})^2 = x$							Un número por su consecutivo es igual a siete por un número
$x^2 - y^2 = 11$	El cuadrado de un número, menos el cuadrado de otro número es igual a once	$(\sqrt{x})^y$				$(x \cdot y)^3$	El producto de dos números al cubo
			$x - \left(\frac{y}{4}\right)$	Un número par menos la cuarta parte de otro número	$(x + (x+1))^2$		El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

5A

$x + (x+1) - 4$	$x \left(\frac{x}{2}\right) 3x$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos cuatro			Cuatro por la mitad de un número es igual a dos veces ese número
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			$x + (x+1) = x - 2$
$(\sqrt{x})^2 = x$			Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
$x^2 - y^2 = 11$	Un número al cuadrado menos otro número al cuadrado es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
			$x \cdot x^2 = x^3$
$x^2 - y^2 = 11$	$x \cdot (x+1) = 7x$	El producto de un número con su consecutivo es igual a siete veces ese número	El producto de dos números diferentes al cubo
		La raíz cuadrada de un número elevada a otro número	$(x \cdot y)^3$
		$2 - x^4$	Un número par menos la cuarta parte de otro número
		$[x + (x+1)]^2$	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

6A

$x + (x+1) - 4$	$\frac{x}{2} \cdot 3y$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos cuatro.			Cuatro por la mitad de un número es igual a dos veces ese número.
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			$x + x + 1 = y - 2$
		Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
			$x \cdot x^2 = x^3$
$(\sqrt{x})^2 = x$			$x \cdot (x+1) = 7x$
			Un número por su consecutivo es igual a siete veces ese número
$x^2 - y^2 = 11$	Un número elevado al cuadrado menos otro número elevado al cuadrado es igual a once.	$(\sqrt{x})^y$	Un número por otro elevado al cubo.
		La raíz cuadrada de un número elevado a otro número	
$2x - \frac{x}{4}$		Un número par menos la cuarta parte de otro número	$(x+1)^2$
			El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

7A

$x + (x+1) - 4$	$\left(\frac{x}{2}\right) \cdot x^3$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos cuatro			Cuatro por la mitad de un número es igual a dos por ese número
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			$x + (x+1) = x+2$
$(\sqrt{x})^2 = x$			Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
$x^2 - y^2 = 11$	El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
		La raíz cuadrada de un número elevado a otro número	$x \cdot x^2 = x^3$
Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo	$x \cdot x^2 = x^3$	$x \cdot (x+1) = 7x$
			Un número más su consecutivo es igual a siete por ese número
$x^2 - \left(\frac{x}{4}\right)$	Un número par menos la cuarta parte de otro número	$(x \cdot y)^3$	El cubo de un producto de dos números
	$[x + (x+1)]^2$	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	

$x + (x+1) - 4$	$\frac{x}{2} = 3g$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Sumar un número con su consecutivo y restarle cuatro			La mitad de un número multiplicado por cuatro es igual a el doble de ese número
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			$x + 1x = 2x$
$(\sqrt{x})^2 = x$			Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
$x^2 - y^2 = 11$	El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	Elevar a un número la raíz cuadrada de otro
			$2x - \frac{y}{4}$
Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo	$x \cdot (x^2) = x^3$	$x \cdot (x+1) = 7x$
			Un número multi. por su consecutivo es igual a siete veces ese número
		$(x \cdot y)^3$	El cubo de el producto de dos números
Un número par menos la cuarta parte de otro número	$(x + (x+1))^2$	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	

2B

$x + (x+1) - 4$	$\frac{x}{2} \cdot y^3$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
La suma de dos números consecutivos menos cuatro		El producto de cuatro por la mitad de otro es igual a dos veces el segundo número	
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número		$x + (x+1) = y - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
			Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
$(\sqrt{x})^2 = x$			$x \cdot x^2 = x^3$
			$x \cdot (x+1) = 7x$
$x^2 - y^2 = 11$	un número elevado a dos menos otro número elevado a dos es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primero
		La raíz cuadrada de un número elevado a otro	El producto de dos números elevado al cubo
		$2x - \frac{y}{4}$	
		Un número par menos la cuarta parte de otro número	$(x + (x+1))^2$
			El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

3B

$x + (x+1) - 4$	$\frac{x}{2} \cdot x^3$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos cuatro			Cuatro por la mitad de un número es igual a 2
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			$x +$
		Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
			$x(x^2) = x^3$
			$x \cdot (x+1) = 7x$
$(\sqrt{x})^2 = x$			Un número por su consecutivo más uno es igual a siete
$x^2 - y^2 = 11$	La resta de dos números con su cuadrado es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	Un número por otro número elevado a tres
		La raíz cuadrada de un número elevado a otro número	$(x \cdot y)^3$
		Un número par menos la cuarta parte de otro número	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
$2x - \frac{y}{4}$			$x + (x+1)^2$

4B

$x + (x+1) - 4$	$x \cdot (x+2) \cdot 3y$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos un número par			El producto de un número par por la mitad de otro es igual a su doble
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			
	$x + x + 1 = y - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
			$x \cdot x^2 = x^3$
			$x \cdot (x+1) = 7x$
			Un número por su consecutivo es igual a siete veces ese número
$x^2 - y^2 = 11$	La resta de el doble de dos números es igual a otro número impar.	$(\sqrt{x})^y$	La raíz cuadrada de un número elevado a otro número
	$2 - \frac{3}{4}$	Un número par menos la cuarta parte de otro número	$(x + x+1)^2$
			El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
			$(x \cdot y)^3$
			El triple del producto de dos números diferentes

5B

$x + (x+1) - 4$	$\frac{x}{2} + \frac{x}{2}$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos cuatro.			Cuatro por la mitad de un número es igual a dos por ese número.
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número		$x + (x+1) = y - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
$\sqrt{x^2} = x$			Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
$x^2 - y^2 = 11$	El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once.	$(\sqrt{x})^y$	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número.
		$z - \frac{z}{4}$	Un número par menos la cuarta parte de otro número
		$x \cdot x^2 = x^3$	$x \cdot (x+1) = 7x$
			Un número más su consecutivo es igual a siete por ese número
	$(x \cdot y)^3$		El producto de dos números distintos elevado a tres.
	$x + (x+1)^2$	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	

6B

$x + (x+1) - 4$	$x \left(\frac{x}{2} \cdot 3x \right)$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2} \right) = 2x$
La suma de dos números consecutivos menos cuatro		Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de ese número.	
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número		$x(x+1) = x^2 - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
$(\sqrt{x})^2 = x$			Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
$x^2 - y^2 = 11$	La diferencia de dos cuadrados es once.	$(\sqrt{x})^y$	El cuadrado de la raíz cuadrada de un número
		$(2 - \frac{x}{4})$	Un número par menos la cuarta parte de otro número
			$x + (x+1)^2$
			El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
			El producto de un número es igual a ese número veces ese número
			La multiplicación de dos números al cubo
			$x \cdot (x+1) = 7x$

7B

$x + (x+1) - 4$	$\frac{x}{2} \cdot 3x$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos cuatro			cuatro por la mitad de un número igual al doble de ese número
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			$x + (x+1) = y - 2$
$(\sqrt{x})^2 = x$			Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
$x^2 - y^2 = 11$	el cuadrado de un número menos el cuadrado de otro igual a once	$(\sqrt{x})^y$	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
$x^2 - y^2 = 11$		la raíz de un número elevado a otro número	$x + x^2 = x^3$
$x^2 - y^2 = 11$	$2x - \frac{y}{4}$	Un número par menos la cuarta parte de otro número	$x \cdot (x+1) = 7x$
		El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	$(x + (x+1))^2$
		un número por su consecutivo igual a siete veces ese número	$x \cdot (x+1) = 7x$
	$(x \cdot y)^3$	un número por otro al cubo	

8B

$x + (x+1) - 4$	$\frac{x}{2} \cdot 3x$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
<i>Un número más otro número más uno menos cuatro</i>			<i>Cuatro por el medio de un número es igual al doble de ese número</i>
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número			$x + x + 1 = x - 2$
		Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
$(\sqrt{x})^2 = x$			$x \cdot x^2 = x^3$
			$x \cdot (x+1) = 7x$
			<i>Un número por otro más uno es igual al doble de ese número</i>
$x^2 - y^2 = 11$	<i>El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once</i>	$(\sqrt{x})^y$	$(x \cdot y)^3$
		<i>La raíz cuadrada de un número elevado a otro número</i>	<i>Un número por otro elevado al cubo</i>
		$x + 2 - \frac{y}{4}$	
		Un número par menos la cuarta parte de otro número	$(x + x + 1)^2$
			El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

9B

$x + (x+1) - 4$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su siguiente menos dos		Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de un número
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número		$x + (x+1) = x - 2$
		Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
$(\sqrt{x})^2 = x$	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo	$x \cdot x^2 = x^3$
$x^2 - y^2 = 11$	Un número por su siguiente es igual al septeto de un número	$x \cdot (x+1) = 7x$
dos números diferentes elevados a pot. con igual a 11	La raíz cuadrada de un número y su cuadrado	un número multiplicado por otro dos veces a tres
$(\sqrt{x})^y$	No se puede los pases	$\frac{1}{x} \cdot 4$
	Un número par menos la cuarta parte de otro número	$(x+1) - x - 2$
	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	

1C

$x + (x+1) - 4$	$\frac{x}{2} = 3y$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos cuatro			La mitad de un número por cuatro es igual al doble de este
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número		$x + (x+1) = y - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo	$x \cdot x^2 = x^3$	$x \cdot (x+1) = 7x$	Un número por su consecutivo es igual a dicho número por siete.
$(\sqrt{x})^2 = x$	La diferencia de dos números al cuadrado es 11	$(\sqrt{x})^y$	Raíz cuadrada de un número elevado a otro número
$x^2 - y^2 = 11$	La diferencia de dos números al cuadrado es 11		
Un número par menos la cuarta parte de otro número	$(x+2) - \frac{y}{4}$	$(x \cdot y)^3$	La multiplicación de dos números elevados al cubo
Un número par menos la cuarta parte de otro número	$x^2 + (x+1)^2$ $(x + (x+1))^2$	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos	

2C

$x + (x+1) - 4$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$			
~Un número más su siguiente menos cuatro			~Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de ese número		
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número		$x + (x+1) = y - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo	$x \cdot x^2 = x^3$
$(\sqrt{x})^2 = x$					~El producto de un número por su siguiente es siete por ese número
$x^2 - y^2 = 11$	~El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once	$(\sqrt{x})^x$	~Un número por la raíz cuadrada de otro número		$(x \cdot y)^3$
		$2x - \frac{y}{4}$	Un número par menos la cuarta parte de otro número	$(x + x + 1)^2$	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

$x + (x+1) - 4$	$\left(\frac{x}{2} \cdot 3y\right)^2$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos cuatro.		La mitad de un número por cuatro es igual a el doble de ese mismo número	
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número		$x + (x+1) - 2$	
		Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos	
		Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo	$x \cdot x^2 = x^3$
			$x \cdot (x+1) = 7x$
$(\sqrt{x})^2 = x$			Un número multiplicado por su consecutivo es igual a siete veces el primer número
$x^2 - y^2 = 11$	Un número al cuadrado, menos otro número al cuadrado es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	El cubo de un número multiplicado por otro distinto
		La raíz cuadrada de un número elevada a una cantidad	
			$(x \cdot y)^3$
		Un número par menos la cuarta parte de otro número	
$(x \cdot 2) - \frac{y}{4}$		$[x + (x+1)]^2$	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos

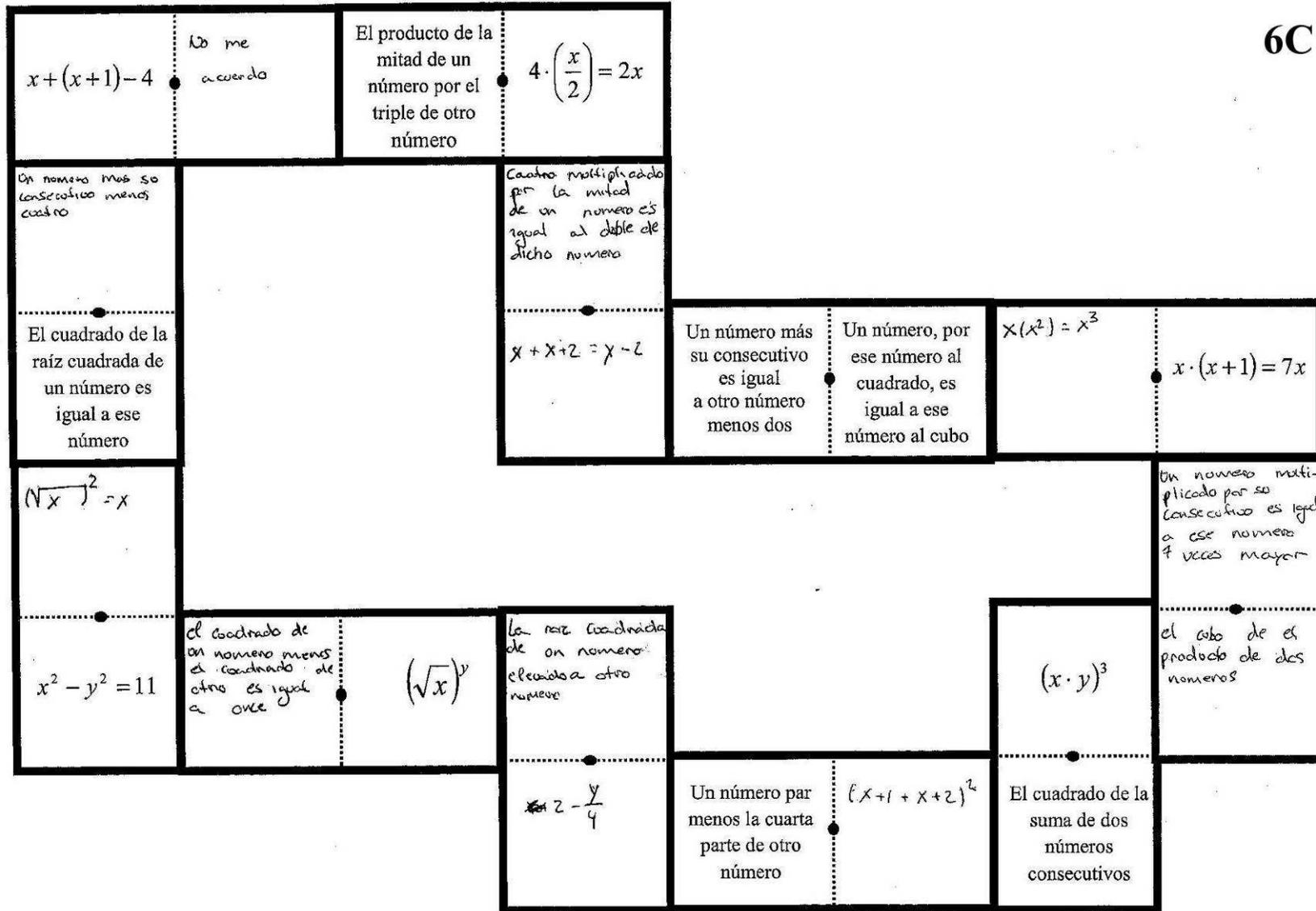
4C

$x + (x+1) - 4$	$\left(\frac{x}{2}\right) \cdot (3y)$	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su consecutivo menos Cuatro		El producto de cuatro por la mitad de un número es igual a el doble de ese número	
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número		$x + (x+1) = y - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
$(\sqrt{x})^2 = x$			Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
$x^2 - y^2 = 11$	Un número al cuadrado menos el cuadrado de otro número es igual a once	$(\sqrt{x})^y$	La raíz cuadrada de un número elevada a otro número
		$2x - \frac{y}{4}$	Un número par menos la cuarta parte de otro número
			$(x + (x+1))^2$
			El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
			El producto de un número por su consecutivo es igual a siete veces ese número
			El producto de dos números al cubo
			$x \cdot x^2 = x^3$
			$x \cdot (x+1) = 7x$

5C

$x + (x+1) - 4$	<p>El producto de la mitad de un número por el triple de otro número</p> $4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$				
<p>Un número más la suma de ese número más uno, menos cuatro.</p>	<p>El producto de la mitad de un número por cuatro es igual al doble de ese número</p>				
<p>El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número</p>	$x + (x+1) = y + 2$	<p>Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos</p>	<p>Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo</p>	$x + x^2 = x^3$	$x \cdot (x+1) = 7x$
$(\sqrt{x})^2 = x$	<p>El producto de un número por su consecutivo es siete veces ese número.</p>				
$x^2 - y^2 = 11$	<p>Un número al cuadrado por menos otro número al cuadrado es igual a once</p>	$(\sqrt{x})^y$	<p>La raíz cuadrada de un número elevado a otro número.</p>	$(x \cdot y)^3$	<p>El producto de un número por otro y elevado al cubo.</p>
$x - \frac{y}{4}$	<p>Un número par menos la cuarta parte de otro número</p>	$[x + (x+1)]^2$	<p>El cuadrado de la suma de dos números consecutivos</p>		

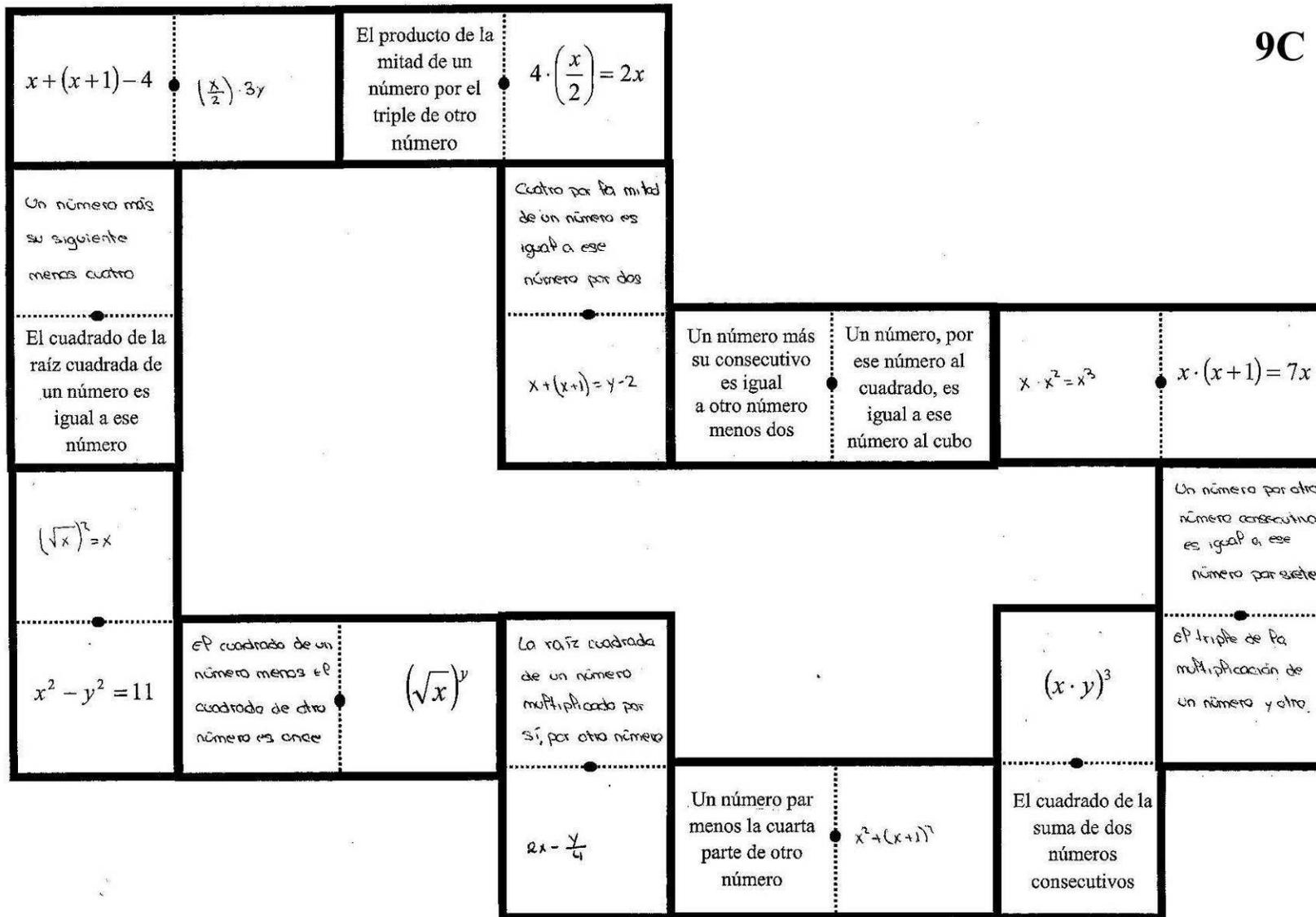
6C



8C

$x + (x+1) - 4$	La suma de un número más su siguiente más cuatro	El producto de la mitad de un número por el triple de otro número	$4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) = 2x$
Un número más su siguiente menos cuatro		Cuatro por la mitad de un número es igual a dos x	
El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número		$x + x + 1 = y - 2$	Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos
			Un número, por ese número al cuadrado, es igual a ese número al cubo
$(\sqrt{x})^2 = x$			$x \cdot x^2 = x^3$
$x^2 - y^2 = 11$	La diferencia del cuadrado de dos números distintos es once	$(\sqrt{x})^y$	El producto de un número y su consecutivo es igual a siete x
		La raíz cuadrada de un número elevada a otro número	El cubo del producto de dos números
$2x - \frac{1}{4}y$			$(x \cdot y)^3$
		Un número par menos la cuarta parte de otro número	El cuadrado de la suma de dos números consecutivos
		$(x + x + 1)^2$	

9C



ANEXO III: Transcripciones de las grabaciones de la segunda fase de la recogida de datos

En este tercer anexo presentamos las transcripciones de las grabaciones realizadas a los estudiantes mientras jugaban con el dominó algebraico especial.

Las transcripciones se organizan en nueve partes, en cada una de ellas se identifica el grupo de sujetos que participa, la fecha y la hora en la que se llevó a cabo. La profesora viene identificada con la letra P y los sujetos con los códigos alfanuméricos detallados en el apartado III.2 del informe del trabajo fin de máster.

Como se ha comentado en las reglas del juego descritas en el marco metodológico de este trabajo, de cada treinta minutos jugados, sale un jugador ganador, que participó en una semifinal. Los dos jugadores con más puntuación en cada semifinal jugaron una gran final. El torneo concluyó con un único ganador entre todos los sujetos participantes.

En la media hora de la que disponían para jugar, en algunos casos se realizaron tres partidas y en otros casos cuatro partidas, bien porque había tiempo suficiente o para realizar un desempate.

Debido a la disponibilidad de los sujetos y del horario de clases, la organización del torneo fue la que se describe en la Tabla AIII.1. En las transcripciones se sigue el orden descrito en la tabla.

Sujetos	Nº partidas en 30min	Ganador
Primera ronda		
Grupo 4: 2B, 5B, 8B, 9B	3	9B
Grupo 3: 3B, 4B, 6B, 7B	4	3B
Grupo 6: 2C, 4C, 8C, 9C	4	2C
Grupo 5: 3C, 5C, 6C, 7C	3	6C
Grupo 1: 3A, 5A, 7A, 1C	3	3A
Grupo 2: 2A, 4A, 6A, 8A	4	2A
Sujetos		
Nº partidas en 30min		
Ganador		
Semifinales		
1ª Semifinal: 3B, 9B, 2C	3	9B, 2C
2ª Semifinal: 2A, 3A, 6C	4	2A, 3A
Final		
9B, 2C, 2A, 3A	4	3A

Tabla AIII.1. Organización del torneo

GRUPO 4. FECHA Y HORA: 13-04-11, 8:28-9:05

Primera partida:

5B: *¿Empieza el que quiera?*

P: *No, empieza el que está a mi derecha (están colocados, empezando por la derecha de la profesora, en el orden en que aparecen anteriormente). Hay fichas dobles, significan que lo que esté escrito encima es lo mismo que está escrito debajo.*

2B: *Me he quitado la peor.*

P: *¿Por qué dices que es la peor?*

2B: *Es la más difícil. Pero esto es la explicación de esto, ¿no?*

- P: *Sí, pero da igual, tú has soltado la primera ficha, no tienes que explicar nada.*
- 5B: *Paso*
- 8B: *Paso*
- 9B: *Porque es lo que está diciendo aquí, la raíz cuadrada de un número elevada a otro número.*
- P: *¿Seguro?*
- 9B: *Sí, estoy poniendo lo mismo que pone aquí.*
- 2B: *Aquí tengo que poner el texto de esto, ¿no?*
- P: *El texto de esto ¿qué es?*
- 2B: *Estoy buscando... no tengo*
- 8B: *Nos vamos a quedar todos aquí sin poner...*
- 2B: *Alguien la tiene que tener*
- P: *Tener en cuenta que tiene que estar... si esa no es doble, la doble y otra que se una a ésta.*
- 5B: *Ésta. Porque es lo que pone aquí.*
- P: *¿Pero qué es lo que pone aquí?*
- 5B: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número*
- 2B: *Espera, que voy a ver qué es lo que pone aquí*
- P: *Léelo en voz alta*
- 2B: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, ¿quién tira?*
- 8B: *Pues yo paso*
- 9B: *Yo también paso*
- 2B: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once*
- 5B: *Esta no hace falta que la explique, ¿no?*
- P: *Sí, tú tienes que explicar todo lo que pones*
- 5B: *Porque es lo que pone aquí. El cuadrado de un número, el cuadrado de otro número, igual a once.*
- 8B: *Porque el cuadrado de este número, es la raíz cuadrada de este número es igual a este número*
- P: *“Este número” ¿quién es?*
- 8B: *x*
- 9B: *Esto es lo mismo que pone ahí, ¿no?*
- P: *No, tengo que ir juntando un simbólico con un verbal*
- 9B: *Que lo que dice aquí es lo que está aquí hecho, un número par menos la cuarta parte de otro*
- P: *Que poco os explicáis*
- 9B: *¿Qué te explico aquí?*
- 2B: *El cuadrado de la suma, que es este dos, es igual a otro número, que es x*
- P: *¿Puedes repetir?*
- 2B: *Sí, mira, el cuadrado de la suma, no, el cuadrado de la raíz, y es igual a otro número, que es x*
- 5B: *Paso*
- 8B: *Aquí dice que un número par menos la cuarta parte de otro número*
- P: *Pero, ¿aquí quién es quién?*
- 8B: *Pues éste es el número par y éste es la cuarta parte (lo dice señalando los elementos de la ficha)*
- 2B: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos. Estos son los dos números consecutivos y el cuadrado*
- P: *¿Quiénes son? Léelo*
- 2B: *El cuadrado de la suma de dos número consecutivos*
- P: *¿Y en esa expresión quién es quién?*
- 2B: *Éste es el primer número consecutivo y éste es el segundo, y esto es el elevado al cuadrado*
- P: *La ficha que has puesto, ¿cómo es? ¿es doble o no es doble?*
- 2B: *¿Cómo que si es doble? No sé qué es lo que quieres decir*
- 9B: *Pues que es doble, que pone lo mismo aquí que aquí*
- P: *Tú no has dicho lo mismo, te estabas refiriendo a la ficha anterior*
- 9B: *Es que esta es la misma que ésta*

- P: *Sí, pero eso no significa que esa ficha sea doble, significa que esta ficha se puede unir a aquella (una anterior)*
- 8B: *Aquí dice, la suma de dos números consecutivos, que son, x más x más uno*
- 9B: *Esto va aquí, ¿no?*
- P: *Tú sabrás, ponlo, justifica el porqué y si no es, tus compañeros te dirán porqué no*
- 9B: *Claro y se llevan dos puntos. Paso*
- 2B: *Paso, no puedo*
- 5B: *Yo no tengo*
- 8B: *Yo tampoco*
- 9B: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro*
- P: *Ya, pero en esa expresión, ¿qué es?*
- 9B: *Pues, una división...*
- P: *A ver, tú estás poniendo “el producto de la mitad de un número, ¿donde está aquí el producto?*
- 9B: *Aquí, x entre dos, que es la mitad de un número, por el triple de otro, por tres y*
- 2B: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número*
- P: *¿Y eso dónde está?*
- 2B: *Aquí, porque mira, el producto de cuatro, que es cuatro multiplicado entre la mitad de un número, que es x entre dos y es igual al doble*
- 8B: *¿Esta ficha también es doble? Yo no tengo...*
- 2B: *¿Y el primero que se quede sin cartas gana?*
- P: *Se gana un punto*
- 9B: *Paso*
- 2B: *Paso*
- 9B: *Javi, pero tú sí tienes*
- 5B: *El producto... es que esto no lo he leído*
- P: *Pero tú no tienes que mirar el verbal, tienes que mirar el simbólico*
- 8B: *Tienes que mirar éste*
- P: *¿Seguro que va esa ficha ahí?*
- 5B: *Pone, el producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número*
- P: *¿Lo que pone ahí entonces?*
- 5B: *Sí*
- 2B: *No, no es... porque aquí no pone el producto de cuatro y aquí es cuatro*
- P: *Si lo pone... lee...*
- 2B: *Si, es que no lo he visto bien... así doblado...*
- 8B: *Ésta, porque dice que un número, más su consecutivo, es igual a otro menos dos, a otro número menos dos*
- P: *Pero, ¿dónde está eso ahí?*
- 8B: *Pues este es un número, y su consecutivo*
- P: *¿Quién es “esto es un número”?*
- 8B: *x luego su consecutivo, y luego otro número, que es y*
- 9B: *Paso*
- 2B: *Paso*
- 5B: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos*
- P: *Pero explícate bien. Tu imagínate que yo no lo estoy mirando*
- 5B: *Un número, x , más su consecutivo, x más uno, es igual a otro número que podemos darle el valor que tú quieras, en este caso le damos y , menos dos*
- 8B: *Un número, que es x , por el mismo número al cuadrado, que es x al cuadrado, es igual al mismo número al cuadrado... al cubo, que es x al cubo*
- 9B: *El producto de dos números consecutivos, x por x más uno, es igual a siete veces el primer número, siete x*
- 2B: *¡Jaque mate! ... Porque pone el cubo, que es el tres este, del producto de dos números, que es x e y ... ¿Yo puedo ahora corregir a alguien ahora si se equivoca o algo?*
- P: *Sí*

5B: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos... Yo paso*

P: *¿Ya habéis acabado? Mirad qué fichas hay encima de la mesa*

2B: *Sí, está cerrado...*

Segunda partida:

5B: *Pone...un número, por ese mismo número al cuadrado, es igual a al mismo número elevado a tres*

8B: *Un número, que es x , por ese mismo número al cuadrado, que es x al cuadrado, es igual a ese mismo número al cubo*

9B: *Un número, por ese número elevado al cuadrado, x elevado a dos, es igual a ese número elevado al cubo, x elevado a tres*

2B: *Un número, que es x , más su consecutivo, que es x más uno, es igual a un número menos dos, aquí está y menos dos*

5B: *Producto de cuatro por la mitad de un número*

P: *¿Ahí donde está la mitad de un número?*

5B: *Por la mitad de un número, que lo llamamos x , dividido entre dos, es igual al doble de dicho número, x*

8B: *El producto de un número, de dos números, más su consecutivo, que es x y x más uno, es igual a siete veces el primer número, que es igual a siete x*

9B: *Paso*

2B: *Sí tengo... el producto de la mitad de un número, que sería, x partido de dos, y el triple de un número que es tres y*

P: *A ver... ¿ahí que pone?*

2B: *El triple de otro número*

P: *¿Y es aquello entonces?*

2B: *Sí... el triple de otro número, que es tres y*

5B: *Paso*

8B: *Yo también...*

9B: *La suma de dos números consecutivos, x y x más uno, menos 4*

2B: *Yo, la explico, ¿no?... mira, el producto de dos números consecutivos, que es x por x más uno, es igual a siete veces el mismo número, que es siete x*

5B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, aquí tenemos el número, que le llamamos x , raíz cuadrada, elevada a dos, es igual a x*

8B: *No, no tengo*

9B: *El cubo, de dos productos... no, el cubo del producto de dos números*

P: *¿Por qué?*

9B: *x por y elevado a tres*

2B: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno y el cuadrado*

5B: *El cuadrado de un número, que llamamos x , elevado al cuadrado, menos el cuadrado de otro número, que en este caso llamamos y , es igual a once*

8B: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos es x más x más uno elevado a dos*

9B: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, x que es raíz cuadrada elevada a y*

2B: *¿Me toca a mí? ¿Qué pone ahí? ¿Me lo lees? ¿o por ahí no puedo poner?*

8B: *No, no... va abierto por allí*

2B: *Entonces paso*

8B: *Un número par, que es dos x , menos la cuarta parte de otro número, y entre cuatro*

5B: *¿Tú no tienes? ¿entonces yo cierro?*

P: *No sé, vosotros sabréis, que me lo explique alguien porque se cierra o no se cierra*

2B: *Porque el que empieza aquí y el que está aquí son el mismo...*

5B: *Porque aquí dice, un número par menos la cuarta parte de otro número, y aquí pone...dos x menos y cuatro... y es lo mismo*

Tercera partida:

2B: *El producto de dos números consecutivos, x por x más uno, es igual a siete veces el primero, que es igual a siete x*

5B: *No, paso*

- 8B: *No*
- 9B: *Yo también paso*
- 2B: *Un número x , por ese número al cuadrado, x al cuadrado, es igual al mismo número al cubo, x al...*
- 5B: *Paso*
- 9B: *Estamos en las mismas...*
- 8B: *Paso*
- 9B: *Tengo, un número por ese mismo número al cuadrado... igual al mismo número al cubo, x elevado a tres*
- 2B: *El producto de dos números consecutivos, x por x más uno, es igual a siete veces el primer número, es siete x ... ¡habré explicado pocas veces este!*
- 5B: *Un número x , más su consecutivo, x más uno, es igual a otro número y , menos dos*
- 8B: *El cubo del producto de dos número, x es un número, y es otro número, elevado a tres. ¿Qué pone allí?*
- 2B: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al dicho, al número de dicho número, al doble de dicho número*
- 8B: *Qué mal te explicas tío*
- 2B: *Ya, es que me he liado leyendo. Pero te lo voy a quitar*
- 8B: *Jo*
- 2B: *El producto de cuatro, que es cuatro, por la mitad de un número, que es x entre dos, es igual a dicho número*
- P: *No, lee bien... ¿qué pone ahí?*
- 2B: *Es igual al doble de dicho número, dos x*
- 5B: *Yo, lo mismo que ha explicado él...*
- P: *No me vale, entonces no te lo sumo*
- 5B: *Espérate, espérate... El producto de cuatro, cuatro, por la mitad de un número, que le llamamos x , partido de dos, porque la mitad de un número es siempre partido dos, es igual al doble dicho número que es x*
- 8B: *No tengo...*
- 9B: *El producto de la mitad de un número, x entre dos, por el triple de otro, tres y*
- 2B: *Paso*
- 5B: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos...esto está elevado al cuadrado porque está aquí el corchete, aquí están los números consecutivos, x más x más uno*
- 8B: *Anda, que antes la tenía...El producto de la mitad de un número, que es x partido de dos, por el triple de otro número que es tres y .*
- 9B: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x más uno menos cuatro*
- 5B: *Tu pasas... El cuadrado, esto está... la raíz cuadrada está elevada al cuadrado, de un número x es igual a ese número que es x*
- 8B: *Que va... paso*
- 9B: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once... x elevado a dos menos y elevado a dos es igual a once... Esto es, el cuadrado de un número, x elevado a dos, menos el cuadrado de otro número, y elevado a dos, es igual a once*
- 2B: *Paso*
- 5B: *El cuadrado de un número, lo llamamos x , elevado al cuadrado, menos el cuadrado de otro número en este caso lo llamamos y , elevado al cuadrado, es igual a once*
- 8B: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz de x elevada a y .*
- 9B: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, dos x , dos es par, menos y entre cuatro*
- 2B: *Paso*
- 5B: *Paso*
- 8B: *Es que...se ha cerrado ya, ¿no?*
- 2B: *Sí, se ha cerrado...te lo explico...espera, a lo mejor tiene él otra carta...porque este y este son los que cierran, estos son los mismos...*
- P: *Explícate mejor*

- 2B: *Esta carta y ésta, que son las que cierran el dominó éste, son las que están al final y al principio...*
 P: *¿No hay ninguna carta más que poner?*
 2B: *¿Tiene que ser texto o puede ser...?*
 P: *Tú sabrás...*
 2B: *No, ya está allí...*

GRUPO 3. FECHA Y HORA: 13-04-11, 10:21-11:11

Primera partida:

- P: *Venga, Patricia empieza...*
 3B: *La que yo quiera, ¿no? (Coloca una ficha, pero no la lee en voz alta)*
 6B: *¿Y si no tienes...? ¿paso?*
 P: *Si no tienes, pasas, como no hay para robar, pasas, pero tenéis que mirar bien primero...*
 7B: *Porque es un número par, dos x, menos la cuarta parte de otro número... entre cuatro*
 P: *Pero, ¿ahí quién es el otro número?*
 7B: *La y*
 6B: *Paso*
 4B: *Yo tampoco tengo...*
 3B: *Yo tengo una duda entre dos....*
 P: *Ponla, la que creas... y si alguien te rebate... (coloca una ficha) ¿porqué pones esa?*
 3B: *Porque dice, que el cuadrado de la suma de dos números... pues dos números al cuadrado... y la suma...*
 P: *Pero ahí no dice dos números, ¿ahí qué dice?*
 3B: *Consecutivos*
 P: *¿Qué pone ahí?*
 3B: *Pues porque pone eso*
 4B: *Porque son dos números consecutivos*
 P: *¿Quién?*
 3B: *x y x*
 P: *No*
 4B: *x y x más uno... ¡le rebatió, ponme un punto!*
 3B: *Pero en verdad sabía hacerlo*
 7B: *Porque es la misma que la otra... un número par, menos la cuarta parte de otro número*
 6B: *Mira... la raíz... la raíz cuadrada de un número elevada a otro número...*
 P: *Pero, ¿quién es "un número"?*
 6B: *x*
 P: *¿Elevada a...?*
 6B: *Pues x elevada a la y*
 4B: *No tengo*
 3B: *Porque... son dos números consecutivos, más uno, y todo elevado al cuadrado*
 7B: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro es igual a once*
 P: *Pero, ¿ahí quien es...?*
 7B: *x al cuadrado menos y al cuadrado elevado a once*
 6B: *Pero, ¿cómo es esto?*
 P: *Hay fichas dobles...*
 6B: *Ah, vale... pues paso*
 4B: *El cuadrado, x elevado al cuadrado, es igual a x...*
 P: *No te entiendo*
 4B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de x es igual al mismo número*
 3B: *El producto de dos números elevado al cubo, elevado a tres*
 P: *¿Y aquí qué tenemos?*
 3B: *Pues un número por otro, todo elevado a tres, al cubo*
 7B: *Paso*
 6B: *Paso*

- 4B: *Paso*
- 3B: *Pues por lo mismo que el otro...por que dice, el cubo del producto de dos números, x por y , y todo elevado al cubo*
- 7B: *El producto de números consecutivos, x por x más uno, igual a siete veces el primer número, igual a siete x*
- 6B: *Esto no es normal...no tengo nada...*
- 4B: *El producto de dos números consecutivos, x más x más uno... x por x más uno, es igual a siete veces la x*
- 3B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues aquí está un número elevado a dos, que es igual al número que está en la raíz cuadrada (se queda sin fichas)*
- P: *Has terminado, pero aunque sigan ellos, si les rebates, te sigo puntuando*
- 7B: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x más uno, menos cuatro*
- 6B: *Un número, por este número que está al cuadrado... lo mismo, y es igual al mismo número al cubo*
- 4B: *Paso*
- 7B: *Paso*
- 6B: *Porque...mira... el producto con la mitad, por el triple de otro número, que el número es el y , y este es el triple... yo me entiendo...*
- P: *Pero te tengo que entender yo....*
- 4B: *Paso*
- 7B: *Paso*
- 6B: *Porque, el mismo número por el mismo número al cuadrado, es igual al mismo número al cubo... son iguales...*
- 4B: *Porque dice, un número por su consecutivo, x más x más uno, es igual a otro número menos dos*
- 7B: *Paso*
- 6B: *Este es, un número más su consecutivo, que es el siguiente número... un número más su consecutivo que es igual a otro número menos dos...*
- 7B: *Está cerrado...*
- P: *Soltad la fichas encima de la mesa. ¿Qué pone en aquella ficha última?*
- 4B: *¿Tengo una?*
- P: *¿Qué pone en aquella última?*
- 4B: *El producto de cuatro por la mitad de un número es...*
- P: *¿Alguno de vosotros ve qué hubiera podido poner?*
- 3B: *Tiene dos*
- 7B: *Tiene dos veces la misma*
- P: *Os he dicho que teníais que fijaros más*

Segunda partida:

- 6B: *(Coloca una ficha, pero no la lee en voz alta)*
- 4B: *Paso*
- 3B: *Porque dice...el cuadrado del número... el cuadrado...*
- P: *¿Qué fichas estás juntando a cuál?*
- 3B: *Ah, esta... el cubo del producto de dos números... un número, por otro número, elevado al cubo, a tres*
- 7B: *Paso*
- 6B: *Paso*
- 4B: *Porque el cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno, elevado a dos...*
- 3B: *¿Y si echo una y está mal?*
- P: *Pues te corrigen y ya está*
- 3B: *Porque dice... el cuadrado de la suma de dos números... de dos números consecutivos, y como dice al cuadrado, todo esto elevado a dos*
- 7B: *Un número par, dos x , menos la cuarta parte de otro número, menos y partido de cuatro*

- 6B: *La raíz de un número está elevada a otro número que es y*
 3B: *Está mal...*
 P: *¿Por qué dices que está mal?*
 3B: *Ah no, porque tengo yo aquí una parecida*
 4B: *Paso*
 3B: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, pues un número elevado a dos menos otro número elevado a dos es igual a once*
 7B: *Paso*
 6B: *Paso*
 4B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de x elevado a dos, es igual a x*
 3B: *El cubo del producto de dos números, pues un número por otro número elevado a tres, al cubo*
 7B: *Paso*
 6B: *Este es el producto de estos dos números consecutivos, que es igual a siete, siete veces el primer número*
 3B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues un número elevado a dos es igual a ese mismo número, bueno, la raíz cuadrada de un número elevada a dos...*
 7B: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x más uno menos cuatro*
 6B: *Un número por el mismo número al cuadrado es igual al mismo número al cubo*
 4B: *La suma de dos números consecutivos, x más x más uno, menos cuatro*
 7B: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro, la mitad de x por tres y*
 6B: *Es lo mismo que éste... que es un número por el mismo número al cuadrado es igual al mismo, a ese número al cubo*
 4B: *El producto de la mitad de un número, la mitad de x , es igual al triple de otro número, de y*
 3B: *Paso*
 7B: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por la mitad de la x es igual a dos x*
 6B: *Paso*
 4B: *Un número más su consecutivo, x más x más uno, es igual a otro número menos dos, y menos dos*
 3B: *Paso*
 7B: *Paso*
 6B: *Paso*
 4B: *Un número más su consecutivo, x más x más uno, es igual a otro número menos dos... ¡y ponme otro porque he terminado el primero!*
 P: *Vale, vale, pero una pregunta, ¿habéis terminado ya todos?*
 4B: *No lo sé...*
 P: *Pues mirad bien*
 7B: *Sí está cerrado, se habrá puesto por ahí...*

Tercera partida:

- 4B: *Paso*
 3B: *Paso*
 7B: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de un número, cuatro por la mitad de x es igual a dos x*
 6B: *El producto de la mitad, que es dos, por el triple de otro número, tres y*
 4B: *La suma de dos números consecutivos, x más x más uno, menos cuatro*
 3B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues el cuadrado de un número elevado a dos es igual al mismo número (No se le da el punto porque no está correctamente leída y explicada)*
 7B: *Paso*
 6B: *Paso*
 4B: *Paso*
 3B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues la raíz cuadrada*

de un número elevada a dos es igual a ese número

7B: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro es igual a once, x al cuadrado menos y al cuadrado es igual a once*

6B: *Paso*

4B: *El cuadrado de un número, x elevado a dos, menos el cuadrado de otro número, y elevado a dos, es igual a once*

3B: *Paso*

7B: *Paso*

6B: *La raíz cuadrada de un número que es la x , elevada a otro número que es la y*

4B: *Un número par, dos x , menos la cuarta parte de otro número*

3B: *Paso*

7B: *Paso ya lo ha cerrado Marcos...*

6B: *No lo ha cerrado...*

4B: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno, elevado a dos*

3B: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, pues dos números, uno más su consecutivo, todo elevado a dos*

7B: *Paso*

6B: *El cubo de este...del producto de dos números*

P: *Pero eso es lo que lees ahí, pero ahí que pone (señalando a la representación simbólica)*

6B: *Es que no estaba seguro...pone el x por otro número, y el cubo...*

4B: *Paso*

3B: *Paso*

7B: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por x más uno, es igual a siete x*

6B: *La x es un número por otro número al cuadrado es igual al mismo número, bueno son los dos el mismo... un número por otro número, por el mismo número que está al cuadrado es igual al mismo número al cubo*

4B: *Paso*

3B: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, pues un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número elevado al cubo*

7B: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, pues x más x más uno igual a y menos dos*

4B: *Ya está cerrado... porque están los dos aquí que faltan...*

Cuarta partida:

3B: *Dice... un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, pues un número por otro número elevado a dos es igual al mismo número al cubo*

7B: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más x más uno igual a y menos dos*

6B: *El producto de cuatro, porque está el cuatro multiplicando, a la mitad de un número igual al doble de este número, ya está, de x ...*

3B: *¿Qué has dicho?*

7B: *Yo no me he enterado*

6B: *Pues el producto que es cuatro por... el producto de este número que es un número, la mitad, que es igual al mismo número, al doble del mismo número... que es dos x*

4B: *Paso*

3B: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, pues el producto porque está multiplicando cuatro a un número partido de dos es igual a dos por ese número*

7B: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, la mitad de x por tres y*

6B: *Paso*

4B: *Tengo mis dudas....No me rebatáis tío...*

P: *El juego es el juego...*

4B: *Aquí, ésta...porque el producto de la mitad de x por el triple, de tres y*

3B: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, pues el*

- producto de un número x porque está multiplicando es igual a otro número... espérate que lo lea, más su consecutivo es igual al mismo número del principio por siete*
- 7B: *Te estás liando...*
- 3B: *Es que es difícil...*
- 7B: *Paso*
- 6B: *Paso*
- 4B: *La suma de dos números consecutivos, x más x más uno, menos cuatro*
- 3B: *Me está rallando esta ya... el producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número... pues el producto porque está multiplicando, de un número por otro número más su consecutivo es igual al mismo número del principio siete x*
- 7B: *Paso*
- 6B: *Paso*
- 4B: *El cubo del producto de dos números, pues x por y elevado a tres*
- 3B: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, pues un número más otro número, su consecutivos, menos cuatro*
- 7B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número... espérate...*
- 6B: *Está mal... está mal...*
- 7B: *Muy bien... me he equivocado... La raíz cuadrada de x al cuadrado*
- 6B: *La raíz cuadrada de un número es igual... elevada a dos, al cuadrado es igual al mismo número*
- 4B: *El cubo del producto de dos números, x por y elevado a tres*
- 3B: *Paso*
- 7B: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número igual a once, x al cuadrado menos y al cuadrado igual a once*
- 6B: *La raíz cuadrada de un número está elevada a otro número*
- 4B: *La suma de números consecutivos, x más x más uno menos cuatro*
- 3B: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número... pues la raíz cuadrada de un número elevada a otro número que es y*
- 7B: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, un número par, dos x , menos la cuarta parte de otro número, y partido cuatro*
- 6B: *Un número par... un número par menos la cuarta parte del número... de otro número... éste es un número y éste es el otro número*
- 3B: *Ya ha cerrado*
- 4B: *Ya ha cerrado*
- 3B: *No, lo he dicho yo antes... porque dice... el cuadrado de la suma de dos números consecutivos... y aquí ya está*

GRUPO 6. FECHA Y HORA: 13-04-11, 12:57-13:35

Primera partida:

- P: *¿Porqué pones esa ficha?*
- 2C: *Porque es un número par... menos la cuarta parte de otro número*
- 9C: *Porque ésa es la raíz cuadrada de un número elevada a otro...*
- P: *Pero explicaros un poco mejor...*
- 4C: *Pongo ésta ficha porque dice que es el cuadrado de un número que está representado por x , menos el cuadrado de otro número representado por y , es igual a once*
- 8C: *¿Puedo poner aquí?*
- P: *No, sólo en los extremos*
- 8C: *¿Y si no tienes?*
- P: *Si no tienes, pasas*
- 8C: *Pues paso*
- 2C: *Pongo esta ficha porque es la raíz cuadrada de un número x elevada a dos y es igual a ese número*
- P: *Pero no puedo juntar simbólico y simbólico, tengo que juntar un verbal con un simbólico*
- 2C: *Espera... (le da la vuelta a la ficha, que es doble)*

- P: *Ah, que la habías puesto al revés... entonces si...*
- 9C: *Pongo ésta porque la raíz cuadrada de un número que vale x es igual a dicho número*
- 2C: *No, está mal... porque no dice que esté elevada a dos, dice la raíz cuadrada de un número elevada a otro número*
- 4C: *No, está bien...*
- P: *Muy bien Raquel, está elevada a otro número, no al cuadrado...*
- 8C: *Paso*
- 2C: *Porque es el cuadrado de la raíz cuadrada de un número que es x que es igual a ese número que sigue siendo x*
- 9C: *Paso*
- 4C: *Pongo ésta porque es el cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno menos cuatro*
- 8C: *Pongo ésta porque x es un número y éste es su consecutivo menos cuatro*
- 2C: *Paso*
- 9C: *Pongo éste porque un número cualquiera está partido de dos y se multiplica por tres por otro número*
- 4C: *Pongo ésta porque es el cubo del producto, x por y al cubo*
- 8C: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número*
- 2C: *Paso*
- 9C: *Paso*
- 4C: *El producto de dos números consecutivos, x por x más uno, es igual a siete veces el primero, siete x*
- 8C: *Ésta es... el producto de x , es la multiplicación, que está partido de dos, por el triple de otro número*
- 2C: *Paso*
- 9C: *Paso*
- 4C: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x partido de dos es igual a dos x*
- 8C: *El producto de cuatro por la mitad del número que es éste es igual al doble del número*
- 2C: *No... paso*
- 9C: *Porque un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos...*
- P: *Pero, ¿ahí qué pone? ¿en el simbólico qué pone? ¿pone lo mismo?*
- 9C: *Pone un número... x , más su consecutivo... x más uno*
- P: *¿Y el otro número?*
- 9C: *... y es igual a otro número que equivale a y menos dos*
- 4C: *Es el número por otro al cuadrado ... el mismo número al cuadrado es igual a x , no al mismo número, al cubo... He terminado las cartas...*
- 8C: *Paso*
- 2C: *No se puede... porque éste se tiene que juntar con ése... estaría cerrado*

Segunda partida:

- 2C: *Coloca la primera ficha, pero sin leerla en voz alta*
- 9C: *Pongo ésta porque es un número por ese... porque un número cualquiera que equivale a x está multiplicado por ese mismo número al cuadrado, es igual al mismo número al cubo*
- 4C: *Pongo ésta porque es, un número más su consecutivo ... es igual a otro número menos dos*
- 2C: *La multiplicación de cuatro partido por la mitad de éste es igual al doble del primero*
- 9C: *Paso*
- 4C: *Paso*
- 8C: *Pongo ésta porque es el producto de dos números consecutivos, que son x por x más uno, que es igual a siete veces ese mismo número*
- 2C: *Paso*
- 9C: *Ésta es el cubo del producto de dos números cualquiera*
- 4C: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno. Si me equivoco, ¿me quitas puntos?*
- P: *No, simplemente no te puntuó. Pero si te rebate otro compañero, le doy a él dos*

- 8C: *El producto, la multiplicación de la mitad de un número, que es x , por el triple de otro número*
- 2C: *Pongo esto porque es el cuadrado de la suma de dos números consecutivos que es x más x más uno*
- 9C: *Pongo éste porque es un número par menos la cuarta parte de otro*
- 4C: *Porque es la suma de dos números consecutivos menos cuatro*
- P: *Pero, ¿quiénes son los números?*
- 4C: *Pues x y x más uno*
- 8C: *Pongo esto porque es la raíz cuadrada de un número elevada a otro número que es y*
- 2C: *Paso*
- 9C: *Pongo ésta porque es el cuadrado de un número que equivale a x , menos el cuadrado de otro que equivale a y , es igual a once*
- 4C: *El cuadrado de la raíz cuadrada de x es igual a l propio x ... Está cerrado aquí*

Tercera partida:

- 9C: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x más uno menos cuatro*
- 4C: *Paso*
- 8C: *Pongo ésta porque es la suma de dos números consecutivos, x más x más uno menos cuatro*
- 2C: *Pongo ésta porque es el cuadrado de la raíz cuadrada de un número que es igual a ese número*
- P: *Pero, ¿ahí donde está el número?*
- 9C: *El número es x*
- 8C: *No, pero no dice que está elevado a dos*
- P: *Te está diciendo al cuadrado. Pero, que me leas bien ésta... ¿qué pone?*
- 9C: *La raíz cuadrada de un número, que es x , elevada a dos, es igual a ese mismo número*
- 4C: *Paso*
- 8C: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro. Esto es la mitad de un número por el triple de otro*
- P: *Tenéis que explicaros bien. Recuerdo que luego yo no voy a ver las fichas, sólo voy a escuchar... si me dices “esto es”... luego yo no lo se*
- 8C: *x es un número*
- 2C: *Paso*
- 9C: *Pongo esta porque es el cuadrado de un número que equivale a x menos el cuadrado de otro número que equivale a y , es igual a once*
- 4C: *Paso, si es lo mismo que antes...*
- 8C: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado es el cuadrado de un número, menos y al cuadrado que es el cuadrado de otro número, es igual a once*
- 2C: *Imposible que tenga que pasar....*
- P: *Míralas bien si de verdad tienes que pasar o no...*
- 2C: *Paso*
- 9C: *Paso*
- 4C: *La raíz cuadrada de un número x , elevada a otro número y*
- 8C: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x es un número partido por dos que es la mitad por el triple de y*
- 2C: *Paso*
- 9C: *El producto de cuatro por la mitad de un número que equivale a x es igual al doble de dicho número*
- 4C: *La raíz cuadrada de un número x elevada a otro número y*
- 8C: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos... éste es un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos*
- 2C: *Un número que es x por ese mismo número al cuadrado es igual a x al cubo*
- 9C: *Un número par, que es dos por x , menos la cuarta parte de otro número que es y partido por cuatro*
- 4C: *El producto de dos números consecutivos, x más x más uno, es igual a siete veces el primer*

número

8C: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número*

2C: *El cubo de dos números... el cubo del producto de dos números que son x e y*

9C: *Paso*

4C: *Paso*

8C: *El cubo del producto de dos números que son x e y*

9C: *Ya se acaba, ¿no?*

P: *¿Porqué?*

9C: *Porque el cuadrado de la suma de dos números, que es esto...*

P: *Pero, ¿faltan fichas por poner? Si se puede seguir...*

8C: *Sí, yo puedo seguir poniendo...*

P: *Bueno, seguimos el orden...*

8C: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos que son x más x más uno*

9C: *Ya no se puede...*

2C: *Sí, sí se puede...El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, que son x por x al cuadrado...Espera..*

9C: *¿Puedo hablar?... No se puede porque esa misma ficha, si te das cuenta, no equivale a ésta... tendría que tener estas mismas letras para que siga igual*

P: *¿Y qué pone ahí?*

9C: *Aquí pone, x ... el cuadrado de dos números, de la suma de dos números consecutivos*

P: *¿Y qué pone en la ficha que quiere poner Raquel?*

9C: *El producto...*

Cuarta partida:

8C: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once*

P: *Pero, ¿quién es un número y quién es otro número?*

8C: *Mira, esto es un número elevado al cuadrado*

P: *¿Quién es "esto"?*

8C: *x ... x al cuadrado es un número elevado al cuadrado, y al cuadrado es otro número elevado al cuadrado*

2C: *La raíz cuadrada de un número que es x , elevada a otro número que es y*

9C: *Pongo esto porque es un número par, que es dos por x , menos la cuarta parte de otro número que es y*

4C: *Paso*

8C: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x es un número, x más uno es su consecutivo, y está elevado al cuadrado*

2C: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, que es x más x más uno*

9C: *Este es el cuadrado.. el cubo de dos productos... me estoy liando, el cubo del producto de dos números*

4C: *Paso*

8C: *Paso*

4C: *No, no... El cuadrado de un número, menos el cuadrado de otro número, x al cuadrado menos y al cuadrado es igual a once*

8C: *Entonces yo también tengo para poner... El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, x es ese número, elevado al cuadrado, igual a x que es el mismo número*

2C: *El producto de dos números que son x e y , al cubo*

9C: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete... a siete veces el primer número, que es x*

P: *Pero, ¿Quién es un número?*

9C: *x ...*

P: *¿y su consecutivo?*

9C: *x más uno*

4C: *La suma de dos números consecutivos, x más x más uno, menos cuatro*

8C: *Cómo no... Rafa me la tiene que quitar... paso, por su culpa...*

2C: *La mitad de un número, que es el x , por el triple de otro número que es y*

- 9C: *Pongo esto porque es un número por ese número al cuadrado que es x , es igual a ese mismo número al cubo*
- 4C: *Paso*
- 8C: *Paso*
- 2C: *Un número más su consecutivo, que es x más x más uno, es igual a otro número menos dos, que es y menos dos*
- 9C: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos...*
- P: *Pero, ¿qué pone ahí? (señalando a la expresión simbólica) Tu me has leído la frase, pero, ¿qué pone en el simbólico?*
- 9C: *Un número que es x , más su consecutivo que es x más uno, es igual a y menos dos*
- 4C: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de ese número*
- 8C: *Paso*
- 2C: *El producto de cuatro por la mitad de un número que es dos... por la mitad de un número que es x es igual al doble de ese número*
- 9C: *Ya se cierra... no se puede seguir*
- P: *¿Porqué?*
- 9C: *Porque el producto de la mitad de un número por el triple de otro número ya está...*
- 4C: *Ala, Raquel, a la semifinal...*

GRUPO 5. FECHA Y HORA: 13-04-11, 13:57-14:26

Primera partida:

- 5C: *¿Puedo poner la que quiera?*
- P: *Sí, ahora mismo ella empieza poniendo la que quiera. Después, si no tenéis para poner pasáis, pero miradlas bien antes...*
- 5C: *Paso*
- 6C: *Un número par menos la cuarta parte de otro número*
- P: *Te recuerdo que yo no estoy mirando... así no entiendo lo que acabas de decir.. No te estoy diciendo que esté mal, simplemente que me digas porqué esto es lo mismo que esto (indicándole la ficha que había puesto y la que acaba de colocar)*
- 6C: *Porque dos por x , un número al multiplicarlo por dos es par y luego un número cualquiera que es y dividido entre cuatro es la cuarta parte*
- 3C: *Porque es lo mismo... un número más su consecutivo, los dos al cuadrado*
- P: *Pero, ¿quién es el número?*
- 3C: *El número x , x más uno su consecutivo y luego al cuadrado*
- P: *(Ante la duda de cómo seguir pues esta alumna no ha jugado nunca al juego del dominó, se le aclaran algunas cosas) Noelia, él ha juntado esto con esto... tú tienes que ver si tienes algo igual que este extremo o aquel extremo*
- 7C: *Pongo esto, porque es un número par menos y es un número cualquiera menos la cuarta parte*
- 5C: *No tengo de esos... no tengo todavía... paso*
- 6C: *Es igual... es x por un número elevado al cubo...*
- 5C: *Pero... ¿dos de esas se pueden poner?*
- P: *No, ¿qué estamos juntando? (El alumno 6C le da la vuelta a su ficha)... ahora sí, tenemos que juntar un verbal y un simbólico, que suerte de que sea doble*
- 6C: *No, que había visto que era doble maestra...*
- 3C: *Paso*
- 7C: *Porque es el cubo de xy*
- 5C: *¿Por aquí podemos poner?*
- P: *No, es como el dominó, por un extremo o por otro... no podemos sacar más extremos*
- 5C: *¡No tengo!*
- P: *Cuando terminemos la partida, ponéis las fichas boca arriba y si veis que alguien podía haber puesto, decís el por qué*
- 5C: *Ah no, sí, sí tengo... Esta, dos números consecutivos, x y el consecutivo es siete veces el x*
- 6C: *Un número por ese número, x es el número por ese número elevado al cuadrado es el mismo*

que ese número al cubo

3C: *El número más su consecutivo es igual a otro número que es la y menos dos*

7C: *La raíz de un número elevada a otro número que es y*

5C: *Este porque se multiplica por cuatro a la mitad de x y es igual al doble de x*

6C: *Paso*

3C: *El producto, que es la multiplicación de la mitad de un número, que es x partido dos, por tres veces otro número*

7C: *El cuadrado de un número que es x elevado a otro número...*

P: *¿Por qué? Póntela derecha y la lees derecha, ¿qué pone ahí?*

7C: *La raíz cuadrada*

5C: *Eso es... sí, eso... que multiplica la mitad de un número por el triple de otro*

P: *Vaya explicaciones...*

5C: *Puaf...*

P: *Sí, pero yo tengo que entenderos cuando luego os escuche...*

6C: *Este porque es la suma de un número que es x más su consecutivo que es x más uno, menos cuatro*

3C: *Un número al cuadrado menos otro número distinto da once... un número al cuadrado menos otro número diferente al cuadrado da once*

7C: *Paso*

5C: *Paso*

6C: *Este porque pone el cuadrado de un número que es x menos el cuadrado de otro número que es y elevado a dos igual a once*

3C: *No tengo*

7C: *Paso*

5C: *Paso*

6C: *Éste porque pone, el cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número... y ya allí pone también el cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número*

Segunda partida:

5C: *Ésta es doble, aquí pone lo mismo que aquí*

P: *El primero no hace falta justificarlo*

6C: *Este porque es el producto de cuatro por la mitad de un número igual a dicho número... igual al doble de dicho número*

P: *Pero, ¿quién es “ese número” en esta expresión?*

6C: *Es x*

3C: *Esto... que está copiado, pone lo mismo que aquí...*

P: *Sí, pero tienes que explicarme porqué*

3C: *Cuatro por la mitad de un número es igual a ese número que es x por dos*

7C: *¿Tengo que explicar también por qué?*

P: *Claro*

7C: *Cuatro por la mitad de un número que es x por el triple de otro número*

5C: *La mitad de un número por el triple de otro*

P: *¡Qué explicaciones! Yo cuando lo esté escuchando no voy a saber si me has puesto la frase o el símbolo*

5C: *Sí hombre... el símbolo...*

P: *Clarísimo...*

6C: *Este porque es un número que es x más su consecutivo que es x más uno, es igual a otro número menos dos*

3C: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro... el número es x*

7C: *Un número que es x, por ese mismo número al cuadrado es igual a ese mismo número al cubo*

5C: *Éste porque es la suma de dos números consecutivos, x y x más uno, menos cuatro*

6C: *Éste... no, éste era así... el cuadrado de la raíz cuadrada de un número que es x igual a ese número que es x... la raíz cuadrada de un número...*

P: *Léelo bien, porque tal cual que te escuchado... si te pongo y te escuchas... has dicho, un*

- número x es igual a x
- P: No, no te estoy diciendo que esté mal, que me expliques bien
- 6C: El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número... pues la raíz cuadrada de x elevada a dos igual a x
- 3C: Un número por otro al cuadrado, da ese mismo al cubo
- P: Pues tal y como me lo has dicho no está bien
- 3C: Ah bueno... un número por ese mismo al cuadrado...
- 7C: El producto de dos números consecutivos, x por x más uno, es igual a siete veces el primer número, igual a siete x
- 5C: Éste que es la raíz cuadrada de este número igual a ese mismo número sin raíz... pero al mismo número... ah, sobra el paréntesis, ¿no?
- P: No, simplemente, que lo que tú has dicho no es lo que has puesto
- 5C: Un número con raíz cuadrada y luego elevada al cuadrado que es igual a ese mismo número
- P: Ahora sí...
- 5C: He dicho eso...
- 7C: No...
- 5C: Bueno, pues me lo habré saltado...
- 6C: Este porque es... un número al cuadrado, el cuadrado de un número que es x menos el cuadrado de otro número que es e igual a once
- 3C: Un número por su consecutivo da igual a siete veces el primer número
- 7C: La raíz cuadrada de un número que es x elevada a otro número que es y
- 5C: Paso
- 6C: El cubo del producto de dos números, x es un número y es otro, elevado al cubo
- 3C: Esto es la raíz cuadrada de un número elevada a otro número
- 7C: Tengo un problemón... ya sabes, ¿no? (me enseña que se le tiene dos fichas para poner y no sabe cuál, coloca una de ellas)... un número par que es dos... dos x menos la cuarta parte de otro número
- 5C: Venga aquí... aquí es un número par menos la cuarta parte de otro número
- 6C: No se podían poner dos expresiones algebraicas, ¿no? ¿tiene que ir otra aquí, no?
- P: Tiene que ir un verbal. Tienen que unir simbólico con verbal, pueden ir dos simbólicas si van en la misma ficha
- 6C: Paso
- 3C: No tengo tampoco
- 7C: El cubo del producto de dos números, x por y elevado al cubo... un número por otro número al cubo
- 5C: No tengo
- 6C: El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x es un número, x más uno es el consecutivo...
- 3C: No tengo...
- 7C: Está cerrado, mira...

Tercera partida:

- 3C: Paso
- 7C: La suma de dos números consecutivos, x más x más uno, menos cuatro
- 5C: No tengo
- 6C: La suma de dos números consecutivos, que es uno x y otro x más uno, menos cuatro
- 3C: Esto es un número que se multiplica por tres veces otro número diferente
- P: ¿Quién es "un número"? ¿esto como es?
- 3C: El primer número es x ... la mitad de un número se multiplica por el triple de otro número
- P: Antes os estabais explicando mejor que ahora
- 7C: El producto de la mitad de un número, x partido dos por el triple de otro número, tres y
- 5C: Aquí es la raíz cuadrada de un número elevada al cuadrado igual a ese mismo número
- 3C: Esto es un número que se multiplica por cuatro es igual al doble del mismo número
- 7C: El cuadrado de un número que es x menos el cuadrado de otro número que es y igual a once
- 5C: Aquí es el cuadrado de x menos el cuadrado de otro número y igual a once

- 3C: *La raíz cuadrada de un número que es x elevada a otro número diferente que es y*
 7C: *El producto de cuatro por la mitad de un número x partido dos es igual al doble de dicho número, dos x*
 5C: *Aquí es... ah sí... un número más otro número que es su consecutivo igual a otro número menos dos*
 6C: *Un número que es x por ese número al cuadrado que es x elevado a dos igual a ese número al cubo*
 3C: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número diferente... la raíz cuadrada de un número que es x elevada a otro número diferente que es y*

- P: *Repito que yo después sólo voy a escuchar...*
 7C: *Creo que esto está mal, no lo sé...*
 6C: *Está mal... porque no corresponde... pone el cuadrado de la suma de dos números consecutivos...*
 P: *¿Y ahí qué pone?*
 6C: *Un número más su consecutivo es igual a ese número siete veces mayor*
 3C: *No, eso está mal explicado*
 6C: *He dicho un número por su consecutivo...*
 7C: *Has dicho "más"*
 3C: *Esto es un número por su consecutivo es igual a siete ... siete veces el primer número*
 5C: *Aquí sería un número par que es dos x menos la cuarta parte de otro número*
 P: *¿Qué es...?*
 5C: *y... y partido cuatro*
 6C: *El producto de dos números consecutivos que uno es x y su consecutivo es x más uno, es igual a siete x*
 3C: *Aquí es un número par que es dos x menos la cuarta... menos la cuarta parte de otro número diferente*
 7C: *El cuadrado... porque es el cuadrado de la suma de dos números, que es x más x más uno su consecutivo*
 5C: *Aquí es el producto de dos consecutivos es igual a siete veces ese mismo número, el primer número...*
 P: *¿Quiénes son los consecutivos? ¿Quiénes son los dos números?*
 5C: *x por x más uno, igual a siete veces x*
 6C: *El cubo de dos números... del producto de dos números porque este es un número y este es otro... x es un número, y es otro... y se cierra el este porque corresponde... se cierra el dominó... pone el cuadrado de la suma de dos números consecutivos...*
 P: *¿Estáis todos de acuerdo? ¿Nadie puede volver a soltar?*
 6C: *No, se cierra*

GRUPO 1. FECHA Y HORA: 14-04-11, 08:30-08:54

Primera partida:

- 5A: *¿Explico ésta?*
 P: *No, la primera no hace falta... pero no susurréis... Si no tenéis pasáis y ya está, no pasa nada...*
 1C: *Pero... ¿hay que decir también porque sale eso?*
 P: *No, ella no porque es la primera*
 1C: *Pero digo cuando se pone...*
 P: *Sí, cuando tu pongas tienes que decir pongo ésta porque esto es lo mismo que esto... y el porqué...*
 7A: *Paso*
 1C: *Porque la raíz cuadrada de algo al cuadrado... esto se elimina y sale x ... porque el cuadrado se va con el cuadrado de la raíz*
 P: *No, no... no que me expliques porque se cumple, sino por qué esto es igual a esto (señalando*

- la ficha que ya había puesta y la que ella acaba de poner)
- 1C: *Ah vale, porque aquí pone que el cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número y entonces la raíz cuadrada de x es igual a x*
- 5A: *Ésta, porque el cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once*
- 3A: *Yo paso...*
- 7A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, pues es x más x más uno menos cuatro*
- 1C: *Paso*
- 5A: *Paso*
- 3A: *Paso*
- 7A: *Lo mismo de antes*
- P: *Explícate, no me vale “lo mismo que antes”*
- 7A: *Pues x más x más uno menos cuatro.. es igual a la suma de dos números consecutivos menos cuatro*
- 1C: *Paso*
- 5A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro, x partido de dos por tres y*
- 3A: *¿Puedo poner ahí?*
- P: *No, sólo en los extremos, como un dominó normal*
- 7A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número es igual a x partido de dos por tres y*
- 1C: *Yo paso*
- 5A: *Paso*
- 3A: *Porque el producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, porque cuatro por x partido de dos es igual a dos x*
- 7A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, es igual que x al cuadrado menos y al cuadrado igual a once*
- 1C: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos que es igual a x más x más uno igual a y menos dos*
- 5A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de x elevada a y*
- 3A: *Porque un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más x más uno igual a y menos dos*
- P: *¿Quién es “un número”?*
- 3A: *x*
- P: *¿Y el consecutivo quién es?*
- 3A: *x más uno*
- 1C: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, es igual a x por x elevado a dos igual a x al cubo*
- 3A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo porque x por x al cuadrado es igual a tres x ... a x al cubo*
- 1C: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, pues x más x más uno es igual a siete x*
- P: *Lo que has dicho no es lo mismo que hay ahí*
- 1C: *¿Está mal o lo he dicho mal?*
- P: *Que lo has dicho un poco mal, repítelo*
- 1C: *Ah vale, que x por x más uno, x por su consecutivo es igual a siete veces x*
- 5A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por x más uno es igual a siete veces x*
- 3A: *El cubo del producto de dos números es igual a x por y elevado al cubo*
- 7A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos es igual a x más x más uno, al cuadrado*
- 1C: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número*
- P: *¿Qué pone ahí?*
- 1C: *La raíz cuadrada de y .. de otro número... elevada a otro número... raíz cuadrada de un número elevada a otro número*
- P: *No, pero eso es la frase*

- 1C: *Ya está, la raíz cuadrada de x elevada a y*
 7A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, es igual a dos x menos y partido de cuatro*
 P: *Pero no has terminado bien... estamos juntando ... déjala como la habías puesto...*
 7A: *Así...*
 P: *No, ¿alguien sabe el porqué?*
 1C: *Las letras*
 P: *Estamos uniendo simbólico con verbal... vale y ahora, aun así, ¿sigue igual? ¿sigue estando bien?...ponla otra vez, bien puesta... ¿Un número par menos la cuarta parte de otro número es lo mismo que dos x menos y cuartos?*
 7A: *Claro...*
 1C: *No...*
 P: *Pensad, si no tiene nadie qué es lo que pasa*
 1C: *No quedan más de estas...que se ha cerrado, se ha cerrado el juego... porque esto es lo mismo... se ha cerrado el juego*

Segunda partida:

- 7A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro es igual a x más su consecutivo que es x más uno menos cuatro*
 1C: *Paso*
 5A: *Paso*
 3A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues x ... la raíz cuadrada de x es igual a x ...*
 P: *¿ x al cuadrado o la raíz al cuadrado o qué?*
 3A: *Vamos a ver... la raíz cuadrada de x es igual a x ...*
 P: *Eso no es lo mismo que pone ahí... ¿qué pone aquí María?*
 3A: *La raíz de x ... al cuadrado... igual a x*
 P: *No es lo mismo que decir lo de antes, ¿no?*
 3A: *Ya... es que me he hecho un lío...*
 7A: *No se...*
 P: *A ver... que él al ponga si le corregís los demás os lleváis dos puntos*
 5A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro es igual a once, x cuadrado menos y cuadrado es igual a once*
 3A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número es x partido de dos por tres y*
 1C: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x partido de dos es igual a dos por dicho número*
 3A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado menos y al cuadrado es igual a once*
 7A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más su consecutivo que es x más uno es igual a y menos dos*
 1C: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más su consecutivo que es x más uno es igual a y menos dos*
 5A: *La raíz cuadrada de un número elevado a otro número, raíz cuadrada de x elevada a y*
 3A: *Un número por ese mismo número al cuadrado es igual a ese mismo número al cubo, x por x cuadrado es igual a x al cubo*
 7A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de x elevada a y*
 1C: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x por x cuadrado es igual a x al cubo*
 5A: *Paso*
 3A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, dos x menos y partido de cuatro*
 1C: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más su consecutivo, x más uno, al cuadrado*
 5A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno, elevado al cuadrado*
 1C: *El cubo del producto de dos números, x por y , al cubo*

- 5A: *El cubo del producto de dos números, y por x elevado a tres*
 3A: *Se ha cerrado ya, ¿no?*
 P: *¿Por qué?*
 3A: *Porque esto es igual a esto...*
 P: *¿Pero no se pueden poner más fichas?*
 3A: *No puede haber más fichas, si se juntan esos dos...*
 P: *Espera, tenemos en cuenta tu opinión, ¿los demás no podéis poner?*
 3A: *Está aquí, la tiene Alicia...*
 P: *Una vez que se pone la de Alicia, ¿ya sí estaría cerrado?*
 3A: *Sí...*

Tercera partida:

- P: *Lee qué pone en los extremos*
 7A: *En un extremo pone un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, y en el otro extremo pone un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo*
 1C: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x por x elevado a dos es igual a x elevado a tres*
 3A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más su consecutivo es igual a y menos dos*
 P: *Pero, ¿quién es el consecutivo de x ?*
 3A: *x más uno*
 7A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, sería igual a x más su consecutivo que es x más uno es igual a y menos dos*
 1C: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por la mitad... por x partido de dos es igual a dos x*
 3A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por su consecutivo que es x más uno es igual a siete x*
 7A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, sería igual a x partido de dos por tres y*
 1C: *El cubo del producto de dos números, x por y elevado a tres*
 5A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más su consecutivo, x más uno, menos cuatro*
 3A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos es igual a x más su consecutivo que es x más uno al cuadrado*
 7A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, sería igual x más su consecutivo x más uno, menos cuatro*
 5A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más su consecutivo, x más uno, elevado al cuadrado*
 3A: *Un número par menos la cuarta parte de otro, dos x menos y partido de cuatro*
 5A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro, raíz cuadrada de x elevada a y*
 1C: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado menos y al cuadrado es igual a once*
 5A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x cuadrado menos y cuadrado es igual a once*
 1C: *Creo que se ha cerrado, ¿no?*
 7A: *Sí, está cerrado*
 3A: *No, tiene que estar el doble por ahí..., no, ya...*

GRUPO 2. FECHA Y HORA: 14-04-11, 12:56-13:33

Primera partida:

- P: *Lee en voz alta lo que has puesto*
 2A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número*
 6A: *¿Ése sí vale?*
 P: *No, ¿cómo formamos el otro día las fichas?*

- 6A: *Con letras y números*
 P: *Tengo que unir, si esto está en simbólico tengo que escribir la expresión verbal que significa lo mismo o si esto está en verbal unir aquí el simbólico que significa lo mismo*
- 4A: *¿Y si no tienes? Yo por ejemplo para ese no tengo...*
 P: *Pasas, no pasa nada, luego habrá otra ronda donde se podrá echar.*
- 6A: *Ah vale...*
 P: *¿Qué pone ahí?*
- 6A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número*
 P: *¿Y en éste?*
- 6A: *La raíz cuadrada de ese número al cuadrado...*
 P: *Pero "ese número" ¿cómo está representado?*
- 6A: *Entre paréntesis...*
 P: *No...*
- 6A: *Un número...*
 P: *Cualquiera... ¿quién es?*
- 6A: *Un número cualquiera... elevado al cuadrado... la raíz cuadrada es igual a ese número*
- 4A: *¿Y si yo no tengo para éste?*
 P: *¿No tienes ni para ésta expresión ni para ésta?*
- 4A: *...Ah, sí... ¿Lo puedo poner para dónde yo quiera?*
 P: *Sí, la forma da igual*
- 4A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro*
 P: *Yo luego no voy a leer, o sea yo no voy a ver lo que habéis puesto, voy a escucharlo. ¿Qué significa esto?*
- 4A: *Un número x , más x más uno, o sea, su consecutivo, menos cuatro*
 P: *Así es como tenéis que explicaros*
- 6A: *Yo no sé explicarme...*
 P: *Sí sabéis*
- 8A: *No tengo*
- 2A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, que es x que es un número partido dos por tres y*
- 6A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues la raíz cuadrada de x elevada a dos es igual a ese número, a x*
- 4A: *Cuatro por x partido de dos es igual al doble de x , Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número*
- 8A: *x al cuadrado menos y al cuadrado es igual a once, el cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once*
- 2A: *Cuatro por x partido dos es igual a dos x , el producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número*
- 6A: *Paso*
- 4A: *x al cuadrado menos y al cuadrado es igual a once, el cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once*
- 8A: *x más su consecutivo es igual a otro número menos dos, pues es x más entre paréntesis x más uno es igual a y menos dos*
 P: *¿Cuál es el número cualquiera aquí?*
- 8A: x
- P: *¿Y el consecutivo?*
- 8A: x más uno
- P: *Vale*
- 2A: *x más x más uno es igual a y menos dos, un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos*
 P: *Te hago la misma pregunta, ¿quién es aquí un número cualquiera?*
- 2A: x
- P: *¿Y el consecutivo?*

- 2A: *x más uno*
 P: *Pues decidlo...*
 6A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, pues la raíz de x elevada a y*
 4A: *La raíz de x elevada a y , es la raíz cuadrada de un número elevado a otro número*
 P: *¿Antonio?*
 8A: *Schuuuusss....*
 P: *No, no...*
 8A: *Las bullicas...*
 P: *Yo no estoy metiendo prisa, sólo indico*
 8A: *... paso*
 2A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x por x al cuadrado es igual a x al cubo*
 6A: *Un número par menos la cuarta parte de otro, dos x menos y partido de cuatro*
 P: *¿Dónde es ahí el número par?*
 6A: *El dos x*
 4A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, un número por su cuadrado igual a x cubo...*
 P: *Has leído lo mismo, no me has dicho el simbólico, me has leído otra vez el verbal*
 4A: *Pues x por x al cuadrado es igual a x al cubo*
 8A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, pues el número es x , pues sumas x entre paréntesis x más, abro paréntesis de nuevo, x más uno, cierras dos veces paréntesis y lo elevas al cuadrado, es el cubo... el cuadrado de la suma de dos números consecutivos*
 P: *Vale, ¿quién es el número aquí?*
 8A: *x*
 P: *¿Y el consecutivo?*
 8A: *x más uno*
 P: *Vale*
 8A: *Te lo he dicho tres veces ya maestra...*
 P: *Ya, pero quiero ver si lo sabéis bien*
 2A: *Paso*
 6A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, pues x por x más uno que es su consecutivo es igual a siete x*
 4A: *Paso*
 8A: *El cubo del producto de dos números, pues x por y , un número por otro, elevado al cubo*
 2A: *Paso*
 8A: *Vamos, ¡que me veo cerrando!*
 6A: *Paso*
 4A: *Paso*
 8A: *A ver...el producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, pues x que es el primer número por su consecutivo que es x más uno es igual a siete x*
 2A: *Paso otra vez*
 6A: *Paso*
 4A: *Paso*
 2A: *Te toca...*
 8A: *Schusss... no me estreséis...pues pasamos todos...*
 4A: *Yo no lo entiendo...*
 P: *¿Por qué?*
 2A: *Porque a todos nos queda una carta*
 4A: *No se puede pasar*
 P: *¿Cómo son las cartas que os quedan? ¿Todas tienen algo en común?*
 2A: *Que pone lo mismo arriba que abajo*
 P: *Son dobles*
 2A: *Vale, pues no la puedo poner...*
 P: *¿Se puede seguir poniendo?*

2A: *No... ¿entonces?*

P: *Pues que está cerrado*

Segunda partida:

6A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz de x elevada a y*

4A: *La raíz cuadrada de un número elevado a otro número, o sea, la raíz de x al cuadrado*

6A: *Es elevado a y , no al cuadrado...*

4A: *Bueno, pues elevado a otro número*

8A: *Paso*

2A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x que es un número al cuadrado menos y que es otro número al cuadrado, es igual a once*

6A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado menos y al cuadrado es igual a once*

4A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, la raíz cuadrada de un número al cuadrado es igual a ese número*

8A: *Paso*

2A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, la raíz cuadrada de x que es ese número al cuadrado es igual a x*

6A: *La raíz cuadrada de un número elevado a otro número, la raíz de x elevada a y*

4A: *El doble de un número que es x menos la cuarta parte de otro número, un número par menos la cuarta parte de otro número*

8A: *Pero ¿por qué sabes que es un número par? Explícalo... porque cualquier número multiplicado por dos es par...*

P: *Pero lo ha dicho bien, ¿no? Ha dicho el doble de un número, ¿el doble de un número siempre será par?*

8A: *Eso es lo que quiero decir... La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x paréntesis de x más uno menos cuatro, x es el primer número y x más uno es su consecutivo*

2A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, dos x que es un número par menos otro número que es y partido cuatro*

6A: *Paso*

4A: *Paso*

8A: *La suma de dos números consecutivos menor... menos cuatro, x más x más uno que es su consecutivo, menos cuatro*

2A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x que es el número más x más uno que es su consecutivo, al cuadrado*

6A: *El cubo del producto de dos números, x por y elevado a tres*

4A: *Paso*

8A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x partido de dos que es la mitad de un número por tres y que es el triple de otro número*

2A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, que es x partido dos que es un número por tres y que es el otro número*

6A: *Paso*

4A: *Cuatro por la mitad de un número es igual al doble de un número, del mismo número*

P: *Vale, me has leído el verbal*

4A: *Sí... el producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número*

P: *Me has vuelto a leer el verbal. El simbólico que has puesto, esto es igual a esto porque...*

4A: *Cuatro por la mitad de un número es igual al doble...*

P: *¿Quién es “un número”?*

4A: *x*

P: *¿Igual a quién?*

4A: *Al doble de otro número que es x*

8A: *El cubo del producto de dos números, pues x por y elevado al cubo*

2A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x que es un número por x más uno que es su consecutivo es igual a siete x*

P: *¿Has terminado? ¿Te has quedado sin cartas?*

- 2A: Sí
- 6A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, pues x por x más uno que es su consecutivo igual a siete x*
- 4A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x por x al cuadrado es igual a x al cubo*
- 8A: *Paso*
- 6A: *Ah, me toca a mí...paso... espérate, es que no veo lo que pone...paso*
- 4A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más x más uno que es su consecutivo es igual a otro número menos dos*
- 8A: *Aunque os sorprenda, vuelvo a pasar...*
- 2A: *Yo ya no tengo cartas*
- 6A: *Paso*
- 4A: *Yo tampoco tengo cartas*
- 8A: *Es que no tengo...*
- 2A: *Tienes que tener... a la fuerza...*
- 6A: *Yo ya tengo una doble...*
- P: *¿Qué está pasando?*
- 2A: *Pues que ha acabado en las mismas cartas*
- P: *Y eso, ¿qué significa?*
- 2A: *Que ésta se une con aquella*
- P: *¿Se ha cerrado ya?*
- 2A: Sí

Tercera partida:

- 4A: *Un número por otro número al cubo*
- 8A: *Paso*
- 2A: *Vamos... con más rapidez, que me ha molado a mí esto...El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x que es un número, más x más uno que es su consecutivo, al cuadrado*
- 6A: *Un número par menos la cuarta parte de otro, dos x menos y partido de cuatro*
- 4A: *Paso*
- 8A: *Dos x que es un número par menos la cuarta parte de y es un número par menos la cuarta parte de otro número*
- 2A: *Un momento, eh!...*
- 6A: *Más bulla María... ¡vamos! ¡rápido!*
- P: *No os metáis prisa*
- 2A: *El cubo del producto de dos números, x por y que son dos números distintos, al cubo*
- 6A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, pues x por su consecutivo que es x más uno, es igual a siete x*
- 4A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de x elevada a y , a otro número*
- 8A: *Ya me habéis cerrado esa parte...paso*
- 2A: *Paso yo también*
- 6A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado que es un número menos y al cuadrado que es otro número es igual a once*
- 4A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado menos y al cuadrado es igual a once*
- 8A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues la raíz cuadrada de x elevada a dos es igual a x*
- 2A: *Paso*
- 6A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por x más uno que es su consecutivo, es igual a siete x*
- 4A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, la raíz cuadrada de x al cuadrado es igual a ese número que es x*
- 8A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, pues x más su consecutivo que sería x*

más uno, menos cuatro

2A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x por x al cuadrado es igual a x al cubo*

6A: *El cubo del producto de dos números, x por x al cuadrado es igual a x al cubo*

4A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x más uno que es su consecutivo menos cuatro*

8A: *Paso*

2A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x partido dos que es un número por tres y, que y es otro número*

6A: *Paso*

4A: *Paso*

8A: *Paso*

2A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x partido de dos por tres y, x es un número e y es otro*

6A: *Paso*

4A: *Paso*

8A: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x partido dos que sería la mitad de un número es igual al doble de dicho número*

2A: *Paso*

6A: *Paso*

4A: *Paso*

8A: *Cuatro por x partido dos que sería la mitad de un número es igual a dos x que es el doble de ese número, el producto de cuatro por la mitad de un es igual al doble de ese número*

2A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x que es un número, más x más uno que es su consecutivo, es igual a y que es otro número distinto menos dos*

6A: *Paso, me la ha quitado...*

4A: *Paso*

8A: *Paso... me queda ésta que es la que me han quitado de aquí*

4A: *Está cerrado ya porque ese va junto con éste...*

2A: *No, no va con ese*

6A: *Un número por ese número... aquí son distintos números...*

8A: *Yo ya no puedo poner más porque mira, me habéis cerrado aquí...la raíz cuadrada de un número elevada a ese número... esto iría así*

P: *Ya, pero esa es doble, eso no pasa nada*

8A: *Ya, pero por eso, yo ya no puedo cerrar*

P: *Buscar qué pasa por los extremos*

2A: *Ésa, ¿no?*

P: *¿Qué la pasa a esa?*

2A: *Aquí no pone que los números están multiplicados, que son iguales y uno está al cuadrado, elevado*

P: *¿Qué ha pasado allí? ¿Qué habéis puesto y está mal?*

2A: *El cubo...*

8A: *El cubo... ésa está mal...*

P: *Ésa la habéis puesto mal y nadie se ha dado cuenta*

2A: *El cubo del producto de dos números...*

4 A: *Alguien la ha puesto mal...*

6 A: *Yo*

4 A: *Por eso no he podido poner yo la mía...*

P: *Pero no os habéis dado cuenta cuando la ha puesto...entonces hemos cerrado ya, ¿no?*

2 A: *Sí*

Cuarta partida:

8A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x por x al cuadrado es igual a x al cubo*

2A: *Paso*

- 6A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x que es el número, por x al cuadrado es igual a x al cubo*
- 4A: *x por x al cuadrado es igual a x al cubo, un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo*
- 8A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más su consecutivo que sería x más uno es igual a y , que es otro números, menos dos*
- 2A: *Un momento... el producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x partido dos que x es el número, es igual a dos x*
- 6A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, la mitad de x que es un número por tres y*
- 4A: *x más x más uno que es su consecutivo es igual a siete veces x , el producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número (dice “más” en lugar de “por”)*
- 8A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x más uno que sería su consecutivo, menos cuatro*
- 2A: *Paso*
- 6A: *El cubo del producto de dos números, x por y elevado a tres*
- 4A: *Paso*
- 8A: *Paso*
- 2A: *Paso*
- 6A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más su consecutivo que es x más uno, menos cuatro*
- 4A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, la raíz cuadrada de x al cuadrado igual a x*
- 8A: *Paso*
- 2A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, la raíz cuadrada de x que es el número al cuadrado igual a x*
- 6A: *El cubo del producto de dos números, x por y elevado a tres*
- 4A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno que es su consecutivo, al cuadrado*
- 8A: *Paso*
- 2A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x que es un número, más x más uno que es su consecutivo, al cuadrado*
- 6A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado que es un número, menos y al cuadrado que es otro número, es igual a once*
- 4A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado que es un número, menos y al cuadrado que es otro número, es igual a once*
- P: *Ainoha, ¿te has quedado sin fichas?*
- 6A: *Sí*
- 8A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de x elevada a y que es otro número*
- 2A: *Paso*
- 4A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, x que es un número... la raíz de un número que es x elevada a otro número que es y ... ah, y ya no tengo fichas*
- 8A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, dos x menos la cuarta parte de otro número que sería y partido cuatro*
- 2A: *Paso*
- 8A: *Espérate, no puedes pasar...*
- 2A: *Paso*
- 4A: *Esto sí es el mismo... se une uno con otro... un número par menos la cuarta parte de otro número que es y*
- 8A: *Yo no tengo más fichas...*
- 2A: *Y yo las tengo todas dobles...*
- 4A: *Pues ya está...*

PRIMERA SEMIFINAL. FECHA Y HORA: 14-04-11, 10:26-10:58

Primera partida:

3B: (Coloca la primera ficha, pero no la lee en voz alta)

9B: *Nada, paso*

2C: *El producto de cuatro por la mitad de un número, que es x , es igual al doble de dicho número, que es x*

P: *¿Qué es x ?*

2C: *Cuatro por la mitad de un número que es x , es igual al doble de ese número que es x ...*

P: *Lo que has dicho no es lo que hay ahí... Si alguien sabe decirlo mejor, que lo diga...*

9B: *El producto de cuatro, que es cuatro multiplicado, por la mitad de un número, que es x entre dos, que es igual al doble de dicho número...*

3B: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, pues que el producto porque está multiplicando, por la mitad de un número x ... la mitad de ese número es igual al mismo número... dos x*

9B: *Paso... si es que no tengo cartas...*

2C: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número que es y*

P: *¿Puedes repetir?*

2C: *El producto de la mitad de un número, que es x , por el triple de otro número que es y*

3B: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, un número que es el x más su consecutivo, más uno, que da igual ... a... otro número menos dos...*

P: *¿Quién es aquí el otro número?*

3B: *El y*

9B: *La suma de dos números consecutivos, que es x más x más uno, menos cuatro*

2C: *Paso*

3B: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, pues aquí los dos números es x más otro número que es x más uno es igual a menos cuatro...*

P: *Repite*

3B: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, la suma de dos números, x más ... el otro número, su consecutivo, menos cuatro*

9B: *Un número que es x y el mismo número al cuadrado que es x al cuadrado es igual al mismo número al cubo, que es x elevado a tres*

2C: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número que es x es igual a ese mismo número... que es x ...*

P: *Pero, ¿qué es lo que hay ahí escrito?*

2C: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número*

P: *Vale, pero esa es la frase... lo verbal, pero aquí, en lo simbólico, ¿qué dice?*

2C: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número que es x es igual a ese número que es x*

P: *Ayer os explicabais mucho mejor...*

3B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número x elevada a dos... la raíz cuadrada de x elevada a dos, es igual al mismo número*

9B: *El cuadrado de un número, que es x al cuadrado, menos el cuadrado de otro número, que es y al cuadrado, es igual a once*

2C: *El cuadrado de un número, que es x al cuadrado, menos el cuadrado de otro número, que es y al cuadrado, es igual a once*

3B: *Paso*

9B: *La raíz cuadrada de un número, que es la raíz cuadrada de x , elevada a otro número, que es y*

2C: *Un número par, que es dos x , menos la cuarta parte de otro que es y*

3B: *Paso*

9B: *Un número par, que es dos x , menos la cuarta parte de un número que es y partido de cuatro*

2C: *Paso*

3B: *Paso*

9B: *Esto va por aquí, ¿no?... un número x , un número al cuadrado x elevado a dos y el mismo*

número elevado a tres, que es x al cubo

2C: *El producto de dos números consecutivos, que son x más x más uno, es igual a siete veces el ese número*

3B: *El cubo del producto de dos números, pues... un número por otro número, todo elevado a tres, al cubo*

9B: *El cubo de dos números... que es el producto de x por y al cubo*

2C: *Paso... pero creo que ya se va a acabar...*

P: *¿Por qué?*

2C: *Porque este corresponde con este...*

P: *Pero mirad primero a ver si podéis poner algo...*

9B: *¿Tu pasas Patri?*

3B: *Sí...*

9B: *No...*

3B: *No, no... yo no paso...*

9B: *Ni yo tampoco...*

3B: *No sí, sí paso...*

9B: *Pues yo no... el cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno al cuadrado*

2C: *Ya sí... sí que se acaba... porque es el mismo...*

Segunda partida:

9B: *(Coloca la primera ficha, pero no la lee en voz alta)*

2C: *El cuadrado de un número, que es x , menos el cuadrado de otro número, que es y , es igual a once*

3B: *La raíz cuadrada de un número que es x , elevada a otro número que es y*

9B: *Un número par, que es dos x , menos la cuarta parte de otro número que es y entre cuatro*

2C: *El cuadrado de un número, que es x , menos el cuadrado de otro número, que es y , es igual a once*

3B: *El cuadrado de a raíz cuadrada de un número que es x , es igual a ese número, es igual a ese número que es x*

9B: *¿Cómo?*

3B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número*

9B: *Vale, vale...*

P: *¿A quién le toca?*

9B: *A mí... el cuadrado de la suma de dos números consecutivos, que es x más x más uno, elevado al cuadrado*

2C: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, que es x más x más uno al cuadrado*

3B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número, que es x , elevado a dos, es igual a ese ... a otro número...*

9B: *El cubo del producto de dos números, dos números que es x e y , y el cubo que es tres*

2C: *La suma de dos números consecutivos que es x más x más uno, menos cuatro*

3B: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, el producto porque está multiplicando un número por su consecutivo, es igual a siete veces ese número*

P: *Me has vuelto a leer el mismo verbal...*

3B: *No...*

P: *Me has dicho lo mismo que has leído*

2C: *Sí...*

3B: *El producto de dos números, producto porque está multiplicando un número... consecutivos, que es x más uno, es igual a siete veces el número*

9B: *Paso*

2C: *El producto de dos números consecutivos, que es x por x más uno, es igual a siete veces ese número, que es x*

3B: *Espera... la suma de dos números consecutivos menos cuatro, pues la suma de dos números que son x más otro número que es x más su consecutivo menos cuatro*

9B: *¿Me toca?... un número que es x por el mismo número al cuadrado, que es x al cuadrado, y*

- que el resultado es x al cubo
- 2C: El producto de la mitad de un número, que es x , por el triple de otro que es y ... la mitad de un número, que es x , por otro número, por tres veces otro número que es y ...
- 3B: El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, el producto porque está multiplicando, la mitad de un número, está partido por dos es igual al doble de ese número
- 9B: El producto de cuatro, que es cuatro multiplicado... por la mitad de un número es igual... la mitad de un número que es x entre dos es igual al doble de dicho número, que es dos x
- 2C: Paso
- 3B: Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, un número que es x más uno es igual a otro número menos dos
- 9B: Paso
- 2C: Creo que no se puede
- 9B: Ya creo que ha cerrado... ¿Ha cerrado?
- 2C: Se ha terminado ya
- P: ¿Sí? ¿seguro?
- 2C: Sí, porque este...
- 9B: No, yo creo que... Patri, tu puedes, ¿no?
- 3B: Sí...
- 2C: ¿Y por qué has pasado antes?
- 3B: No lo sé... el producto de la mitad de un número por el triple de otro... el producto porque está multiplicando, de un número que es x , por otro número elevado a dos es igual a ese número elevado a tres... al triple de otro número ...
- P: Se os ha olvidado que tenéis que fijaros en las fichas de los demás...
- 9B: No, está mal...
- 2C: Porque has puesto el producto de la mitad de un número
- 9B: De la mitad y aquí pone de x al cuadrado
- 2C: Aquí sería, un número por otro número... por ese mismo número al cuadrado es igual a ese mismo número al cubo
- 9B: Para que esto se cumpliera aquí tendría que poner x por... la mitad de un número que sería y o x partido de dos...

Tercera partida:

- 3B: El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, el producto porque está multiplicando, de un número que es x por su consecutivo que es x más uno es igual a siete x
- 9B: Dos números que es x e y , y su cubo que es... lo estás viendo ahí, que es tres...
- P: Repito que yo luego no voy a ver, voy a escuchar...
- 9B: x por y al cubo
- 2C: El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, que son, x más x más uno
- 3B: Paso
- 9B: Un número par, que es dos x , menos su cuarta parte que es y partido de cuatro
- 2C: Un número par, que es dos x , menos su cuarta parte que es y partido de cuatro
- 3B: La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de un número que es x , elevada a otro número que es y
- 9B: El producto de dos números consecutivos, que es x por x más uno, es igual a siete veces el primer número, que es siete x
- 2C: Paso... no, no paso... un número que es x ... un número por ese número que es x al cuadrado es igual a ese mismo número que es x al cubo... un número que es x , por ese mismo número que es x al cuadrado, es igual a ese mismo número que es x al cubo...
- P: Lee de nuevo esto
- 2C: Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo
- P: ¿Y ahí que pone? Lee el simbólico
- 2C: Un número, que es x , por ese mismo número que es x al cuadrado, es igual a ese mismo número que es x al cubo

- 3B: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, el cuadrado de un número que es x elevado a dos, menos el cuadrado de otro número que es y elevado a dos, da igual a once*
- 9B: *Un número más su consecutivo, es x más x más uno, que es igual a otro número menos dos, que es y menos dos*
- 2C: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número, que es x , es igual a ese mismo número, que es x ... ¡Está bien maestra!*
- P: *Pero si es que no me estás leyendo lo mismo que pone ahí*
- 2C: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese mismo número*
- P: *Vale, ese es el verbal, ¿y en el simbólico que pone?*
- 2C: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número, que es x , es igual a ese mismo número, que es x , es igual a x ...*
- 3B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, el cuadrado de la raíz cuadrada de un número, que es x , elevada a dos, es igual a ese mismo número*
- 9B: *La suma de dos números consecutivos, que es x más x más uno, menos cuatro*
- 2C: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, el número es x partido de dos, por el triple de otro que es y*
- P: *¿Puedes repetir lo que has dicho?*
- 2C: *El producto...*
- P: *No, lo que has dicho aquí, en el simbólico*
- 2C: *x partido de dos por...*
- P: *Vale, entonces repite desde el principio todo*
- 2C: *El producto de la mitad de un número que es x , partido de dos por el triple de otro que es tres... que es tres por y ...*
- P: *¿Nadie ve la manera de decirlo que no está bien? Repite*
- 2C: *Vamos a ver... el producto de la mitad de un número, que es x partido de dos, por el triple de otro número que es y*
- P: *Vale, donde has hecho esa pausa es donde está la diferencia*
- 3B: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, producto que es cuatro, producto porque está multiplicando, es igual a la mitad de x , del número...*
- 7B: *Igual no... igual no es...*
- 3B: *...por la mitad de un número, que el número es x , es igual al doble de ese número*
- 9B: *Pues yo creo que voy a pasar... a ver, espera un momento... sí, paso*
- 2C: *Paso*
- 3B: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, el producto que es cuatro que está multiplicando por la mitad de un número que es x y es igual al doble de ese número*
- 9B: *Me toca a mí*
- 2C: *Es la misma carta que antes*
- 9B: *Pues lo mismo, paso*
- 3B: *Se cierra, se cierra*
- 2C: *No*
- 3B: *Espérate, espérate*
- 9B: *No se cierra*
- 2C: *No se cierra*
- 3B: *¿No?*
- 2C: *Si no se cierra, tiene que haber la misma carta*
- 9B: *Claro*
- 9B: *No, Patri, no se cierra, déjalo*
- P: *No Patricia, di lo que ibas a decir*
- 3B: *Espérate, que estoy leyendo... claro que se cierra, porque el producto de la mitad de un número, que es x , la mitad de ese número, por el triple de otro número...*

SEGUNDA SEMIFINAL. FECHA Y HORA: 15-04-11, 10:22-10:58

Primera partida:

- P: *¿Qué has puesto? Léela*
- 3A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, que es x más x más uno que es el consecutivo, elevado a dos*
- 2A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno que es su consecutivo, al cuadrado*
- 6C: *Éste porque es el producto de dos números diferentes, el cubo de dos números diferentes, x es un número, x es otro, elevado a tres*
- P: *Repite éste, el simbólico*
- 6C: *x por y elevado a tres*
- 3A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno que es el consecutivo, elevado al cuadrado*
- 2A: *Paso*
- 6C: *Un número par, que es dos x , menos la cuarta parte de otro, que es y partido de cuatro*
- 3A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, pues dos x que es un número par menos la cuarta parte que es y partido de cuatro*
- 2A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de x elevada a y que es otro número*
- 6C: *Éste porque es el cuadrado de un número que es x elevado a dos, menos el cuadrado de otro número que es y elevado a dos es igual a once*
- 3A: *Paso*
- 2A: *Paso*
- 6C: *El producto de dos números consecutivos, que es x por x más uno, que es su consecutivo, es igual al mismo número siete veces mayor*
- 3A: *Paso*
- 2A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por x más uno que es su consecutivo es igual a siete x , siete veces ese número*
- 6C: *El cuadrado de un número, que es x elevado a dos, menos el cuadrado de otro, que es y elevado a dos, igual a once*
- 3A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues la raíz cuadrada al cuadrado es igual a ese mismo número*
- 2A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x por x al cuadrado es igual a x al cubo*
- 6C: *Paso*
- 3A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x por x al cuadrado es igual a x al cubo*
- 2A: *Paso*
- 6C: *Paso*
- 3A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x más uno que es el consecutivo, menos cuatro*
- 2A: *Paso*
- 6C: *El producto de la mitad de un número, que es x partido de dos, por el triple de otro, que es tres por y*
- 3A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, pues y más... x más x más uno que es su consecutivo es igual a y , que es otro número, menos dos*
- 2A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x partido dos por tres y , que es otro número*
- 3A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más su consecutivo que es x más uno, es igual a otro número que es y , menos dos*
- P: *¿Has terminado María?*
- 3A: *Sí*
- 2A: *El producto de la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x*

partido dos es igual a dos x

3A: *Ha terminado ya*

6C: *Ha cerrado, ¿verdad?*

P: *¿Seguro?*

3A: *Sí, porque esto es igual a eso*

P: *¿Qué es “esto” y qué es “eso”?*

3A: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x partido de dos, que es la mitad de un número, es igual al mismo número por dos*

Segunda partida:

3A: *¿La leo?*

P: *Sí*

3A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo*

2A: *Un número por ese número al cuadrado, que es x por x elevado a dos, es igual al mismo número al cubo, que es x elevado a tres*

6C: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más x más uno que es su consecutivo, es igual a y que es otro número menos dos*

3A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x por x cuadrado es igual a x al cubo*

6C: *Éste, que es un número... el producto de dos números consecutivos, x es un número, x más uno es el consecutivo, es igual a ese número que es x siete veces mayor, que es siete por x*

2A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más x más uno que es su consecutivo, es igual a y menos dos, que es otro número*

6C: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x partido de dos, que es la mitad de un número, es igual a dos por x, que es el doble de un número*

3A: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual a dicho...al doble de dicho número, cuatro por x partido de dos, que es la mitad de un número, es igual a dos x, que es el doble del mismo número*

2A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por x más uno es su consecutivo, es igual siete veces el número*

6C: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x partido de dos es la mitad de un número, por tres y, que es el triple de otro*

3A: *El cubo del producto de dos números, x que es un número por y que es otro número, elevado al cubo*

2A: *El cubo del producto de dos números, x por y que son dos números distintos, al cubo*

3A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno, que es su consecutivo, al cuadrado*

2A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x partido dos por tres y, que es otro número distinto*

6C: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x es un número más x más uno es otro número, menos cuatro*

3A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno es igual a dos... no, x más su consecutivo al cuadrado*

2A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número*

3A: *Está mal*

6C: *Es verdad, está mal. Pongo yo ahora. El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, raíz cuadrada de x elevada a dos es igual a x que es el mismo número*

3A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado menos y al cuadrado es igual a once*

2A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, dos x menos y partido cuatro*

6C: *La raíz cuadrada de un número, que es x, elevada a otro número, que es y*

3A: *Paso... Ha terminado ya.*

P: *¿Por qué?*

3A: *Porque el cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado menos y al cuadrado es igual a once*

Tercera partida:

- P: *Léela*
- 6C: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número*
- P: *¿Y en el otro extremo?*
- 6C: *La raíz cuadrada de un número elevada a dos es igual a ese número*
- 3A: *Ya me he liado... no me da tiempo...*
- P: *No pasa nada, no hay prisa*
- 3A: *Paso*
- 2A: *Paso*
- 6C: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número, la raíz cuadrada de x elevada a dos, es igual a ese número, que es x*
- 3A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, el cuadrado de x menos el cuadrado de y es igual a once*
- 2A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x el cuadrado menos y al cuadrado es igual a once*
- 6C: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de x elevada a y que es otro número*
- 3A: *Madre mía que lio tengo yo aquí...paso*
- 2A: *Paso*
- 6C: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, dos por x que es un número par menos y partido cuatro, que es otro número, la cuarta parte*
- 3A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, el número par que es dos x menos y que es otro número partido cuatro*
- 2A: *Paso*
- 6C: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno que son dos números consecutivos elevado a dos*
- 3A: *El cubo del producto de dos números, x que es un número, por y que es otro número, al cubo*
- 2A: *Paso*
- 6C: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, la raíz cuadrada de x elevada a dos es igual a x , que es el mismo número*
- 3A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más su consecutivo que es x más uno, menos cuatro*
- 2A: *Paso*
- 6C: *Paso*
- 3A: *x más x más uno menos cuatro, la suma de dos números consecutivos menos cuatro*
- P: *¿Quiénes son los números?*
- 3A: *Pues x y el consecutivo x más uno*
- 2A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x partido dos por tres y*
- 6C: *Paso*
- 3A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, pues el producto de la mitad pues es la mitad de un número que es x partido dos por el producto de otro número que es y pues el triple pues tres por y ... me he hecho un lio yo sola*
- 2A: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x partido de dos es igual a dos x*
- 6C: *Paso*
- 3A: *El cubo del producto de dos números, pues dos números, un número es x otro número es y , pues al cubo*
- 2A: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x partido de dos es igual a dos x*
- 6C: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por x más uno, que son los consecutivos, igual a siete x que es el mismo número siete veces mayor*
- 3A: *Paso*

- 2A: *Pues a mi...que se cierra...*
 3A: *No se puede cerrar*
 2A: *No es que se pueda cerrar, que me hace falta poner esa aquí*
 P: *Ah, que no hay espacio, se mueve para allá y ya está, lo ampliamos por la mesa*
 6C: *Hace falta otra mesa maestra*
 P: *Pues se pone otra mesa, no pasa nada*
 2A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x por x al cuadrado es igual a x al cubo*
 6C: *Un número por ese número al cuadrado ... y se cierra a vez... un número que es x por x al cuadrado, que es otro número igual a x elevado a tres, al cubo...y se cierra*
 P: *Y te has quedado sin fichas, ¿no?*
 6C: *Sí*
 2A: *Yo las tengo todas dobles*
 P: *Espera, ¿seguro que no se puede seguir?*
 3A: *No, no se puede seguir ya*
 2A: *Es que se ha cerrado*
 3A: *Ésta es igual a esa*
 P: *¿Y qué? ¿Nadie tiene otra que es igual a ésta? ¿Ni que sea la misma que ésta?*
 2A: *Sí, yo sí*
 P: *Entonces no se ha cerrado todavía*
 3A: *De todas maneras cuando la ponga ya no se puede hacer más nada*
 P: *Pero bueno, ella se lleva otro punto*
 2A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más x más uno es igual a y y menos dos... y ahora se cierra*

Cuarta partida:

- P: *Lee lo que has puesto*
 3A: *El cubo del producto de dos números, x por y al cubo*
 2A: *Paso*
 6C: *Paso*
 3A: *El cubo del producto de dos números, x por y , x que es un número por y que es otro número, al cubo*
 2A: *Paso*
 6C: *La de dos números consecutivos elevado a dos, el cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno, elevado a dos, que son consecutivos*
 P: *¿Quién es el número?*
 6C: *x , y x más uno su consecutivo... elevado a dos*
 3A: *El cubo del producto de dos números, pues un número es x y otro número es y y pues se multiplican, pues al cuadrado...al cubo*
 2A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, dos x menos y partido de cuatro*
 P: *¿Esto qué es?*
 2A: *Un número*
 P: *¿Un número qué?*
 2A: *Un número par*
 P: *¿Y esto?*
 2A: *La cuarta parte de otro número*
 6C: *Un número par menos la cuarta parte de otro, de otro número, dos x que es un número par menos y partido cuatro que es la cuarta parte de otro*
 3A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, pues la raíz cuadrada de un número x elevada a y que es otro número*
 2A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado menos y al cuadrado es igual a once*
 3A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de ese número es igual... espérate... El cuadrado de la raíz cuadrada de ese número es igual a ese número... pues la raíz cuadrada al cuadrado, que ...*

- la raíz cuadrada de x al cuadrado es igual a x*
- P: *Qué lío te has hecho tu sola*
- 3A: *Madre mía...*
- 2A: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, la raíz cuadrada de x al cuadrado es igual a x*
- 6C: *Paso*
- 3A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x que es un número más su consecutivo que es x más uno, menos cuatro*
- 2A: *Paso*
- 6C: *Paso*
- 3A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más su consecutivo que es x más uno, menos cuatro*
- 2A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x partido dos por tres y*
- 6C: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x partido dos que es la mitad de otro número, de un número, por tres y que es el triple de otro*
- 3A: *Paso*
- 2A: *Paso*
- 6C: *El producto de cuatro por la mitad de un número igual al doble de dicho número, cuatro por x partido de dos que es la mitad de un número igual a dos x que es el doble de dicho número*
- 3A: *Paso*
- 6C: *¿Una carta te queda?*
- 3A: *Sí*
- 2A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más x más uno es igual a y y menos dos, x más uno es el consecutivo de x*
- 6C: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más x más uno son los consecutivos, igual a y y menos dos, que es otro número menos dos*
- 2A: *¿Tienes?*
- 3A: *Paso*
- 2A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo y se cierra*
- 6C: *No...sí, sí*
- 2A: *Sí se cierra*
- 3A: *Falta el doble, pero después se cierra... falta el doble que lo tiene alguien y ya se cierra*
- P: *Pero sigue faltando la ficha doble por poner*
- 3A: *Mira a ver si al tienes tú*
- 2A: *Sí, la tengo...*
- P: *Pues ponla y ya cierra*

FINAL. FECHA Y HORA: 15-04-11, 12:53-13:29

Primera partida:

- P: *Lee lo que pone*
- 9B: *La suma de los dos números consecutivos menos cuatro*
- P: *¿Y en el otro lado?*
- 9B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número*
- 2C: *Paso*
- 3A: *La raíz cuadrada de un número es igual a ese número, pues la raíz cuadrada de x es igual a x*
- P: *Espérate, que como lo tienes al revés, estás leyendo las dos cosas mal*
- 3A: *Ah vale, el cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, el cuadrado de la raíz cuadrada de x es igual a x*
- 2A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x más uno que es su consecutivo, menos cuatro*
- 9B: *Pues paso*
- 2C: *El producto de la mitad de un número, que es x partido de dos, por el triple de otro que es y*
- 2A: *Lo ha dicho muy raro*

- 9B: *Qué quisquillosas*
 P: *Tienes que decir qué es lo que has puesto...*
- 2C: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número*
 P: *¿Y por qué es igual a eso?*
 2C: *Es el producto de la mitad de un número que es x partido de dos por el triple de otro, que es y*
- 3A: *Me estoy haciendo un lío maestra...*
 P: *Tranquila, que hay tiempo*
- 3A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, pues el cuadrado de x menos el cuadrado de y es igual a once*
- 2A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x partido dos por tres y, que es otro número distinto*
- 9B: *Pues paso otra vez, si no me han tocado cartas*
- 2C: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de un número que es x elevada a otro número que es y*
- 3A: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por la mitad de un número que es x partido dos, es igual a dos por x que es el mismo número que he dicho antes*
- 2A: *Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más x más uno que es su consecutivo, es igual a y menos dos*
- 9B: *Paso, ¡que no me han tocado cartas! ¡que éstas han ido a por mí!*
- 2C: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, un número par que es dos x menos la cuarta parte de otro número que es y partido de cuatro*
- 3A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, pues dos x menos y partido de cuatro... el doble de x que es un número menos la cuarta parte de un número*
- 2A: *Paso*
- 9B: *Vale, la primera carta que echo, el cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x y x más uno al cuadrado*
 P: *¿Quién es el número ahí?*
- 9B: *x y x más uno que es su consecutivo*
- 2C: *Yo paso*
- 9B: *Normal, si las tengo yo todas*
- 3A: *No la entiendo, la que tengo yo aquí... anda corre, mira a ver si está mal... mira... Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x que es un número y su consecutivo que es x más uno es igual a otro número que es y menos dos*
- 2A: *Paso*
- 9B: *Un número x , otro número y , y elevado a ... no, no... ¡ésta!... que me he equivocado de carta...*
- 2C: *No puede ser letra y...*
 P: *Es que es al revés*
- 9B: *Eso*
 P: *Lo habéis puesto nervioso, para una vez que echa él cartas. Venga léela*
- 9B: *Un número x y el otro número al cuadrado, x al cuadrado, que es igual a x al cubo*
- 2C: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x es un número, por ese mismo número al cuadrado es igual a x al cubo*
- 3A: *Yo paso*
- 2A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por x más uno que es su consecutivo, es igual a siete x*
- 9B: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno que son los números consecutivos y el cuadrado*
- 2C: *Paso*
- 3A: *Paso, se termina ya*
- 2A: *Se cierra*
- 9B: *No*

- 3A: Sí
 2A: Sí, se cierra
 3A: Sí, falta el doble y se cierra
 P: Bueno, esperaros
 2A: El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x más x más uno que es su consecutivo, es igual a siete x
 P: Léela bien
 2A: ¿Qué? El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número
 P: Lee esto de nuevo
 2A: x por x más uno que es el consecutivo, es igual a siete veces x
 9B: El cubo del producto de dos números, un número que es x , el otro que es y , y el cubo
 2A: Ya sí se cierra
 9B: Sí, se cierra, porque ésta y ésta son la misma

Segunda partida:

- 2C: (Coloca pero no la lee en voz alta)
 3A: Paso
 9B: Ahora me he llevado yo las buenas
 2A: Paso yo también
 2C: Pasáis todos
 9B: ¿Se ha cerrado ya? jeje
 2C: No, pero pasan... tienes que pasar
 9B: ¿Es que las tienes tú todas?
 P: Así no se juega, no vale decir las cosas
 2C: Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, x más x más uno, es igual a otro número que es y menos dos
 3A: El producto de cuatro por la mitad de un número, que es x partido de dos, es igual al doble de dicho número, es dos por x que es el número
 2A: Paso
 9B: Paso
 2C: El producto de la mitad de un número por el triple de otro número... no, que me he equivocado... el producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x partido de dos es igual al doble que es dos x
 2A: El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, x partido dos por tres y , que es otro número
 9B: Esto no es normal, paso
 2C: Un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos, un número, más x más uno que es su consecutivo, es igual a otro número que es y menos dos
 3A: Paso
 2A: La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x más uno que es su consecutivo, menos cuatro
 9B: Un número que es x , por el mismo número elevado al cuadrado, que es x cuadrado, que es igual a x al cubo
 2C: Paso
 3A: El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, x al cuadrado... la raíz cuadrada de x al cuadrado es igual a x , al número
 2A: El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por x más uno es igual a siete x
 9B: El cubo del producto de dos números, x e y son los dos números y el cubo, el cubo del producto de dos números... el cubo y el producto de dos números que es xy
 2C: El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, el cuadrado de x menos el cuadrado de y es igual a once
 3A: El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, el cuadrado de x que es un número, menos el cuadrado de y que es otro número, es igual a once
 2A: El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno que es su

consecutivo, elevado al cuadrado

9B: *Paso*

2C: *Paso*

3A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de x elevada a otro número que es y*

2A: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno que es su consecutivo, elevado al cuadrado*

9B: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, que el número par sería dos x menos la cuarta parte que es y partido de cuatro*

3A: *Y se cierra con esta carta que pongo, la raíz cuadrada de un número elevada a otro número, es la raíz cuadrada de x elevada a y ... y aquí, dos x que es el número par menos la cuarta parte de otro número, dos x que es el doble de x menos y partido de cuatro, que es la cuarta parte de otro número*

Tercera partida:

P: *Lee*

2A: *¿Qué?*

2C: *¡Qué leas!*

3A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, el número par es dos x , menos la cuarta parte de otro número es y partido de cuatro*

9B: *Saca una carta buena María, confío en ti*

2A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, dos x menos y partido de cuatro*

9B: *Gracias*

2A: *De nada*

P: *¿Quién es el número par?*

2A: *Dos x*

P: *¿Y lo otro qué es?*

2A: *Menos otro número que es y partido cuatro*

9B: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, que el cuadrado, que está aquí...y la suma de...*

3A: *Muy buena Alex, ¡que está aquí!*

9B: *Sí, x más x más uno que son los números consecutivos... jeje, es que esto tiene video-cámara*

2C: *Yo paso*

3A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, el número par que es dos x menos la cuarta parte de otro número que es y partido de cuatro*

2A: *Paso*

9B: *El cubo del producto de dos números, los dos números que son x e y , bueno, x por y , y el cubo que está detrás del paréntesis...y el paréntesis encima...*

3A: *Que está ahí, ¿no?, jeje*

9B: *...y el paréntesis encima...*

2C: *No te pongas nervioso*

2A: *¿Y el paréntesis encima?*

P: *No, está diciendo.. el tres está encima del paréntesis...*

2C: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de un número que es x elevada a otro número que es y*

3A: *Paso*

2A: *Yo también*

9B: *¿Qué dices?*

2A: *Encima, cuando puedes poner te quejas*

9B: *Ah, gracias... es la misma, pero bueno, el cubo del producto de dos números, los dos números, x por y , y el cubo que está detrás del paréntesis*

2C: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, el producto de dos números consecutivos que son x por x más uno, es igual a siete veces ese número que es siete x*

3A: *Paso... no, espera no...*

- 9B: *Ya lo has dicho*
 P: *No ha llegado a poner la siguiente*
 3A: *Un número, que es x , por ese número al cuadrado, que es x al cuadrado, es igual al mismo número al cubo, que es x al cubo, elevado a tres*
 2A: *Paso*
 9B: *Un número más su consecutivo, que es x más x más uno, que es igual a un número menos dos, el número es y y el menos dos que lo estás viendo ahí*
 P: *Yo no voy a ver después*
 9B: *Míralo ahora*
 2C: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de x elevada a otro número que es y*
 3A: *Un número más su consecutivo es igual a un número menos dos, x que es un número, más su consecutivo que es x más uno, es igual a otro número que es y menos dos*
 2A: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por x partido dos es igual al doble de x*
 9B: *Paso*
 2C: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, el cuadrado de x menos el cuadrado de y es igual a once*
 3A: *El producto de cuatro por la mitad de un número es igual al doble de dicho número, cuatro por la mitad de un número, por x partido dos, que es el otro número, es igual al doble de dicho número, pues dos por x que es el número que hemos dicho*
 2A: *Paso*
 9B: *Vamos a ver, el producto, que es la multiplicación, del triple de un número que es tres y ... y la mitad de un número que es x entre dos... ¿me has entendido?*
 P: *Sí, es que se nota que te están poniendo nervioso*
 2C: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, el cuadrado de x menos el cuadrado de y es igual a once*
 3A: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro número, pues el producto... la mitad de un número que es x partido de dos por el triple de otro número que es tres por y , que es el otro número*
 P: *¿Te has quedado sin fichas?*
 3A: *Sí*
 P: *Pues decidlo porque si no, no os veo y no os puntúo*
 2A: *Pongo y se ...*
 9B: *No, no se cierra...*
- 2A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x más uno que es su consecutivo menos cuatro*
 3A: *Falta una ficha para que se cierre*
 2A: *Sí*
 9B: *Me toca, ¿no? Mira, se cierra*
 2C: *Ya cierra*
 9B: *Lo he dicho yo primero. El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, la raíz cuadrada de x al cuadrado es igual a x . Y se cierra.*

Cuarta partida:

- 2A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por x más uno es igual a siete x*
 9B: *Paso*
 2C: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por x más uno que es su consecutivo, es igual a siete veces x*
 3A: *El cubo del producto de los dos números, x que es un número por y que es otro número, elevado al cubo, a tres*
 2A: *El producto de dos números consecutivos es igual a siete veces el primer número, x por x más uno que es su consecutivo, es igual a siete x*

- 9B: *El cubo del producto de los dos números, los dos números, x e y , y el cubo tres*
- 2C: *El cuadrado de la suma de dos números consecutivos, x más x más uno al cuadrado*
- 3A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x que es el número, por x al cuadrado es igual a x al cubo*
- 2A: *Un número por ese número al cuadrado es igual al mismo número al cubo, x por x al cuadrado es igual a x al cubo*
- 9B: *Un número par, que es dos x , menos la cuarta parte de otro número que es y partido de cuatro*
- 2C: *Paso*
- 3A: *Un número consecutivo es igual a otro número menos dos, x más su consecutivo que es x más uno, es igual a otro número que es y menos dos*
- 2A: *Un número par menos la cuarta parte de otro número, dos x menos y que es otro número, partido cuatro*
- 9B: *El producto de cuatro, que es cuatro multiplicado por la mitad de un número, que es x entre dos, es igual al dicho... al doble de dicho número, que es dos x*
- 2C: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro, x partido dos por el triple de otro número que es y*
- 3A: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada x que es un número elevada a y que es otro número*
- 2A: *Paso*
- 9B: *¿Seguro? ¿Qué pone? Elevada a otro número, no pone que es igual, ¿no?... por si acaso, pues bueno, paso yo también*
- 2A: *¿Seguro?*
- 9B: *Sí*
- 2C: *El producto de la mitad de un número por el triple de otro, x partido de dos por el triple de otro número que es y*
- 3A: *Paso*
- 2A: *La suma de dos números consecutivos menos cuatro, x más x más uno que es su consecutivo, menos cuatro*
- 9B: *El cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, la raíz cuadrada de x es igual a ese número que es x*
- 2C: *La raíz cuadrada de un número elevada a otro número, la raíz cuadrada de x elevada a otro número que es y*
- 3A: *El cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, el cuadrado de x que es un número, menos el cuadrado de y , que es otro número, es igual a once*
- 2A: *Vamos a ver... se cierra, el cuadrado de la raíz cuadrada de un número es igual a ese número, la raíz cuadrada de x al cuadrado es igual a x , y se cierra ésta con esa porque es el cuadrado de un número menos el cuadrado de otro número es igual a once, x al cuadrado menos y al cuadrado que es otro número es igual a once*
- 9B: *Que sí, que se cierra*
- 2A: *Y me he quedado sin cartas*

ANEXO IV: Imágenes de algunas partidas

En este último anexo presentamos algunas imágenes fotográficas de las partidas realizadas en el torneo durante la segunda fase de la recogida de datos.

