UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA

PROGRAMA DE MASTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PRESENCIA DEL CERO EN TEXTOS DE MATEMATICAS DE 1º A 5º BÁSICO, PUBLICADOS EN CHILE EN LOS AÑOS 2006 Y 2007

Paola M. Donoso Riquelme

Tutora: Dra. Encarnación Castro Martínez

GRANADA

Septiembre 2009

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA

PROGRAMA DE MASTER EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

PRESENCIA DEL CERO EN TEXTOS DE MATEMATICAS DE 1º A 5º BÁSICO, PUBLICADOS EN CHILE EN LOS AÑOS 2006 Y 2007

Paola M. Donoso Riquelme

Tutora: Dra. Encarnación Castro Martínez

GRANADA

Septiembre 2009

A mis padres Víctor y Ximena

por su amor incondicional.

AGRADECIMIENTOS

A mi profesora guía: Encarnación Castro Martínez, por sus orientaciones en toda la elaboración de esta investigación.

A los profesores del departamento de Didáctica de la Matemática, por sus valiosas enseñanzas en los cursos del programa.

A mis compañeros Laura, Miguel y Marcelo por su amistad y apoyo en todo momento.

A los autores de libros de texto de Matemáticas, en especial a los que he utilizado en mi investigación, por la gran labor que realizan.

Al gobierno de Chile, quien me otorgó la beca MIDEPLAN, que hizo posible mi participación en el programa de Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

INDICE

RESUMEN

En el siguiente estudio se han analizado textos escolares de educación matemática de 1º a 5º básico[1], publicados en Chile en los años 2006 y 2007, con el propósito de identificar la presencia del cero.

Para realizar este análisis, se determinaron los contextos numéricos en que el cero se encuentra presente. A su vez, se determinaron las especificidades de este número, respecto al resto de los números, especificidades que confirman su comportamiento atípico en diferentes situaciones numéricas.

La investigación, además, da a conocer diferentes estudios realizados sobre el concepto del cero, los cuales confirman que no todas las propiedades de los números son generalizables al cero, y que los alumnos cometen errores al operar con el cero como cifra única y como cifra componente de un número.

Una vez identificado los contextos y especificidades del cero, se elaboraron categorías que nos permitieron clasificar cada uno de los ejercicios o actividades registradas en los textos escolares donde el cero se encuentra presente. Dando origen a cuatro categorías principales: cero como cifra única, como cifra componente de un número, representaciones del cero, y operaciones aritméticas. A su vez, cada una de estas categorías contiene subcategorías que ayudaron a identificar los contextos y situaciones en que se presenta el cero en los textos analizados.

Por cada subcategoría se elaboraron tablas de frecuencias, obteniendo así datos numéricos, que luego fueron transformados en datos verbales, para finalmente realizar una descripción detallada sobre los contextos y situaciones en que se presenta el cero en este grupo de textos.

[1] Primaria en España

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. INTRODUCCIÓN

Los contenidos relacionados con los números, sus operaciones y su uso para resolver problemas, son predominantes en los planes y programas de Educación Matemática de los diferentes países. La introducción de dichos contenidos en la enseñanza, se hace desde temprana edad. Hoy en día, saber los números y operar con ellos es considerado un conocimiento básico para todo ser humano, al igual que saber leer y escribir.

Concretamente en Chile, los Planes y Programas de estudio (Chile, 2003a; 2003b; 2004a; 2004b; 2004c) propuestos por el Ministerio de Educación (MINEDUC) destinados a Educación Matemática para los niveles de primero a quinto básico[2], están divididos en cuatro ejes temáticos: números, operaciones aritméticas, formas y espacio, y resolución de problemas. El MINEDUC[3], establece que los contenidos correspondientes a estos cuatro ejes, deben ser enseñados en forma articulada. En el eje de números, se señala que el niño debe desarrollar el sentido de cantidad y que el aprendizaje de los números resulta más efectivo cuando se ha comprendido en forma gradual los principios que rigen el sistema de numeración decimal. Considerando que su estructura es compleja, se espera que los escolares puedan llegar a comprender la forma en que se estructuran los números y puedan generar nuevos números a partir de la aplicación de las regularidades propias del sistema de numeración decimal. Además, el eje temático de números, se plantea en estrecha relación con los procedimientos aprendidos en el eje de operaciones aritméticas, con el propósito de que ambos aprendizajes sean complementarios, es decir, ambos ejes se deben enseñar en forma simultánea para complementar y reforzar su adquisición. Para el eje de forma y espacio, se pretende desarrollar el lenguaje geométrico y la imaginación espacial, a través de la profundización en el estudio de formas de dos y tres dimensiones, y el análisis de sus

[2] Primero a Quinto de Educación Primaria en España.
[3] MINEDUC, Ministerio de Educación.

representaciones. A su vez, el eje de resolución de problemas, se plantea con un carácter transversal y está desarrollado a lo largo de los tres ejes restantes.

Además, en los Planes y Programas de estudio (Chile 2003a; 2003b; 2004a; 2004b; 2004c) se establece que los estudiantes deberían aprender el sistema de numeración decimal a partir de 1° Básico[4], y a medida que avanzan en su escolaridad aumentar el ámbito numérico. Es así como en 1° Básico, respecto a los números deben aprender hasta el 99, en 2° Básico[5] hasta el 999; y es en 5° Básico[6] donde se espera que estén preparados para aplicar todos los principios y así generar nuevos números y operar con ellos sin dificultad. De ser logrados los objetivos propuestos, los escolares de 1° a 4° Básico deberían adquirir el sistema de numeración decimal en profundidad y no deberían presentar dificultades en el momento de operar con cualquier número en 5° Básico, ya sea en actividades de resolver operaciones aritméticas, en la escritura y lectura convencional de los números, ó en cualquier situación involucrada con números, independiente de su cantidad de cifras.

El sistema de numeración decimal posee una estructura regida por principios, y la aplicación de estos principios ayuda a resolver todos los algoritmos posibles. Por tales motivos, es de gran importancia que los estudiantes de educación básica en Chile y primaria en España, lo adquieran en forma comprensible a su edad.

1.2. JUSTIFICACIÓN DEL TRABAJO

Como veremos más adelante, el sistema de numeración decimal se completó con la invención del cero, lo que permitió llevar registros numéricos y realizar cálculos en forma abreviada, estas acciones sin la presencia del cero no hubiesen sido posibles. Sabemos que el cero pertenece a los diez dígitos que conforman el sistema de numeración decimal, sin embargo, es un número que posee cierta especificidad respecto al resto de los números, Anthony y Walshaw (2004); Cataño (2007); Castro y Rico (1983); O'Connor y Robertson (2006); y D'Amore (2008), lo corroboran.

Diferentes investigadores han desarrollado estudios que ponen de manifiesto que el dominio de dicha especificidad, genera dificultades a numerosos alumnos, de todos los niveles, y que

[4] 1º Básico corresponde a 1º de Primaria en el sistema español.
[5] 2º de Primaria en España.
[6] 5º de Primaria en España.

lleva a producir errores al resolver ejercicios matemáticos, en los cuales esté presente el cero (Anthony y Walshaw (2004); Cataño (2007); Donoso (2008); Lerner (1994); Lerner y Sadovsky en Parra, C. y Saiz, I. (comps.) (1994/2005). La adquisición del concepto del cero, con toda su peculiaridad, se considera indispensable en la comprensión del sistema de numeración decimal.

Uno de los recursos que utiliza todo estudiante de Educación Primaria es el libro de texto. En Chile el gobierno invierte en la adquisición de textos escolares, los cuales se distribuyen en forma gratuita a todos los centros educativos subvencionados del país. En el MINEDUC[7] trabaja un equipo denominado *Textos Escolares*[8], el cual determina qué textos son los más adecuados para que el alumnado adquiera los contenidos propuestos en los planes y programas de estudio. En los textos de matemática aparecen unidades conectadas con los ejes temáticos descritos anteriormente, y no se ha hecho un estudio que valide el tratamiento que en los mismos se le da al cero. De acuerdo a los antecedentes estudiados, los cuales se verán en detalle en el capítulo III, el cero debería tener un tratamiento especial y diferenciado del resto de los números, de no hacerlo el alumnado le atribuye propiedades que no le corresponden, lo que provoca serios errores al momento de su utilización.

Por este motivo, es de mi interés investigar sobre la presencia del cero en los textos escolares de educación básica, específicamente aquellos que son distribuidos por el MINEDUC en Chile en los niveles de 1º a 5º Básico[9], publicados en los años 2006 y 2007, y utilizados en el año 2008.

1.3. MOTIVACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En Chile existe la prueba SIMCE (Sistema de Medición de la Calidad de la Educación), la cual evalúa a los alumnos de 4º y 8º Básico, y 2º Medio[10] en las áreas de Lenguaje, Matemática y Ciencias, los resultados obtenidos en el área de Educación Matemática en el año 2006 arrojaron que los escolares no logran la totalidad de los objetivos propuestos[11]. Motivada por saber cuales serían algunas de las razones de estos bajos resultados, realicé un

[7] MINEDUC, Ministerio de Educación.
[8] ver: http://portal.textosescolares.cl/website/index.php
[9] 1º a 5º de Primaria en España.
[10] 4º de Primaria, 2º de ESO y 4º de ESO en España.
[11] ver http://www.simce.cl

estudio con alumnos de 2º Básico y docentes de Educación Básica en Chile (Donoso, 2008), sobre la adquisición del sistema de numeración decimal, con el cual pude constatar que nuestro sistema de numeración decimal al ser posicional se rige por determinados principios, todos ellos deben ser enseñados en forma explícita para que los estudiantes logren generar nuevos números y operar con ellos sin dificultad, propósito que se pretende alcanzar en 5º Básico. El estudio arrojó que el valor posicional y el concepto del cero, son conocimientos que generan serias dificultades en la comprensión de nuestro sistema de numeración e impiden que nuestros alumnos logren generar nuevos números y operar con ellos, y a su vez, son conocimientos que la mayoría de los docentes no consideran relevante.

De nuestra consideración sobre las dificultades que provoca el concepto del cero, surge la necesidad de conocer la especificidad que este número posee, y aportar conocimientos sobre el trato que le dan los autores de textos escolares al cero como resultado de estudiar de qué manera es presentado en los textos escolares, específicamente en aquellos que utiliza la mayoría de los estudiantes de Educación Básica en Chile.

1.4. OBJETIVOS DEL ESTUDIO

Objetivo General

Analizar y describir la presencia del cero en textos escolares de 1º a 5º de Educación Básica[12], publicados en Chile en los años 2006 y 2007.

Objetivos Específicos

- Localizar estudios realizados en educación sobre el concepto del cero.
- Determinar la especificidad del número cero, respecto al resto de los números.
- Elaborar categorías que sirvan como marco para realizar un análisis de contenido en los textos seleccionados.
- Identificar los contextos y situaciones en que se presenta el cero, en los textos seleccionados.

[12] 1º a 5º de Primaria en España.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES DEL ESTUDIO

Con objeto de enmarcar nuestro trabajo recogemos en este capítulo una breve revisión histórica del cero y su relación con el sistema de numeración decimal. Tratamos de poner de manifiesto que la introducción del cero en el sistema, además de producirse más tardíamente que cualquier otro número, fue a su vez, muy controvertida lo que podría explicar, en cierta medida, la dificultad que presenta el cero en el aprendizaje tanto como número en sí como en su participación en el sistema de numeración y sus aplicaciones.

Por otra parte, y con el mismo objetivo anterior, recogemos aquellos comportamientos del cero, en diferentes partes de la matemática, que le hacen poseer una entidad propia.

En un tercer apartado de este capítulo, recogemos investigaciones realizadas en las que de alguna manera ha estado presente el cero. En dichos trabajos hemos encontrado información sobre: la génesis del cero, los diferentes significados y usos del cero, las dificultades que provoca la presencia del cero en diferentes tareas matemáticas y la relación existente entre el cero y el valor posicional característico del sistema numérico.

2.1. EL CERO A TRAVÉS DE LA HISTORIA

Estudios antropológicos han puesto de manifiesto que el cero surgió de forma independiente en lugares tan alejados como Mesopotamia y Mesoamérica. Si bien, es posible, que las motivaciones que dan lugar a dicha aparición, en ambas civilizaciones, fuesen diferentes. En el primer caso sería una motivación centrada en la contabilidad, en el segundo caso se trataría de motivaciones de tipo astronómico y religioso.

2.1.1. Los números una necesidad del hombre

Los números aparecen originariamente, como una necesidad en la vida diaria de las personas. La necesidad de cuantificar colecciones de objetos parece ser la necesidad más perentoria con la que se pudieron encontrar. Por medio de los dedos de las manos podían contabilizar colecciones de hasta diez elementos, y usando los dedos de manos y pies podían remontarse hasta veinte. Cuando el uso de los dedos resultaba inadecuado, se podían utilizar pequeños montones de piedras para materializar, mediante una correspondencia biunívoca, los elementos de una colección. Posiblemente cuando el hombre primitivo empleara este sistema de modelizar las cantidades de objetos, amontonara las piedras por grupos de cinco, debido a que antes se había familiarizado con los quíntuplos de objetos por observación de su propia mano o pie, y dado que los montones de piedras constituyen un mecanismo demasiado efímero para conservar la información, es de suponer que dichas personas de la prehistoria registraran las cantidades de objetos haciendo muescas en un palo o en un trozo de hueso (Asimov, 1984; Asimov, 2005; Boyer 1986; Corbalán, 2003; Guedj, 1998; Stewart, 2008). Esta es la primera forma de representar cantidades de objetos que se conoce, constituye el origen de los signos numéricos cuando actúan como cuantificadores de colecciones de objetos. Paulatinamente se va produciendo otros registros más elaborados para dichas cantidades.

Los números, así, en sus inicios y durante largo tiempo, están ligados a algo concreto, (seis caballos, tres rinocerontes) han de pasar siglos para que adquieran su carácter abstracto ("seis", "tres") que permite hablar de ellos como entes con existencia propia así como operar con ellos.

A medida que las colecciones de objetos, que se consideran, se hacen más amplias y es dificultoso poder abordarlas con objetos reales es necesaria la invención de un sistema que permita su manejo de manera más sencilla. Para suplir esta necesidad, surgen los sistemas de numeración. Un sistema de numeración consiste en un conjunto de símbolos y reglas de generación que permiten construir todos los números válidos en el propio sistema[13].

El sistema de numeración decimal es el que usamos actualmente en nuestra cultura, Castro (2001) lo define como un conjunto de signos, reglas y convenios que permiten representar la serie infinita de los números naturales. Además señala que la idea más básica es que un sistema de numeración es un sistema de representación y la forma más elemental de realizarla es mediante un conjunto de puntos o trazos, tantos como unidades tiene el número. Luego, lo que facilita el recuento de los objetos es agrupar los trazos en bloques de igual número de elementos que se escriben separados, originando agrupamientos simples, donde cada grupo

[13] http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_numeraci%C3%B3n

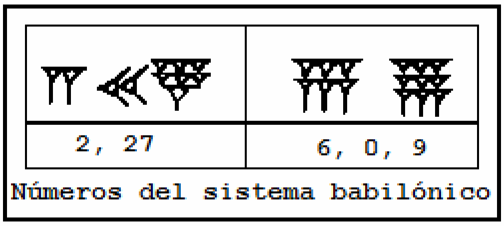
tiene el mismo número de elementos. Esto exige fijar un número para formar los grupos, dicho número constituye la base del sistema de numeración del sistema. Cuando las cantidades son grandes, se realiza el agrupamiento múltiple, consiste en aplicar a los grupos formados la técnica de formar con ellos nuevos grupos y aplicar reiteradamente esta idea, siempre que los grupos formados superen en número a la base o sean iguales a ellas. Surgiendo así, la idea de *unidades de distinto orden* y de que *n* unidades de un orden forman una unidad de orden superior, en base *n*.

El sistema de numeración decimal, que usamos, es posicional y de base diez, permite escribir todos los números con solo diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9; donde el valor de un símbolo se multiplica por 10, por 100, o por 1000, dependiendo de su posición (Stewart, 2008). Con muy pocos signos se puede representar prácticamente cualquier número. La importancia del cero está unida al valor posicional de los números.

Representar los números fue la primera función de los sistemas de numeración. Posteriormente, asumen también la función de calcular. Es posible representar sin calcular, pero no es posible calcular sin representar, aunque sea mentalmente. Castro, Rico y Castro (1987), señalan que la aritmética surgió en cada caso junto con un sistema de numeración y para satisfacer unas necesidades primordiales, no sólo de recuento sino también operatorias; con los números no sólo se simbolizan cantidades, también las acciones, relaciones y transformaciones cuantitativas, que pueden realizarse sobre los objetos, tienen un reflejo en las operaciones aritméticas. Estas acciones sobre el mundo real tienen su expresión simbólica en las operaciones numéricas básicas: suma (agregar), resta (separar), producto (reiterar), y división (repartir). Las operaciones numéricas dan potencialidad al número.

2.1.2. De Mesopotamia a la India

En Mesopotamia, "tierra entre ríos", situada entre el Tigris y Éufrates florecieron las primeras civilizaciones humanas. Alrededor de 3.500 años a.C. comenzaron a dejar sus rastros los pueblos sumerios, acadios, asirios y babilónicos, pueblos que llegaron a conocer la escritura y las matemáticas. Han sobrevivido textos numéricos originales de la época cuyo estudio hace pensar que dispusieron de un sistema numérico posicional (Boyer, 1986), sin cero durante 1000 años (O'Connor y Robertson, 2000) escribían las distintas cifras que representaban las diferentes unidades por medio de espigas verticales u horizontales, comenzaron a dejar una columna en blanco entre dos grupos de signos cuneiformes, con la función que hoy tiene asignada el cero (Cataño, 2007; Capanna, 2001; O'Connor y Robertson, 2006; Stewart, 2008) lo que hace difícil, al leer sus escritos discernir en la representación de un número si se refieren a 36 o a 306, por ejemplo.



Fuente: O'Connor, J. y Robertson, E. (2000)

Fue alrededor de 400 años a.C. cuando los escribas babilonios concibieron un signo que se representaba como una doble espiga inclinada. Era el signo de separación en la escritura de los números, distinguiendo así números como 36 y 306 señalados anteriormente. Este símbolo para denotar un espacio vacío, no fue el único que se utilizó. En una tabla datada en 700 a.C. se usan tres ganchos para esta misma idea y en otras de la misma época un solo gancho. Si bien es cierto que diferentes marcas se usaron para denotar una posición que quedaba vacía, también lo es que dichas marcas estaban siempre entre dos cifras, nunca como final de un número (lo que sería el lugar de las unidades). Se puede interpretar esto como que el primer uso que se hace del cero es como signo de puntuación para denotar un espacio vacío, para que los números tengan una interpretación correcta, y no es un uso del cero como número.

Cuando la expedición de Alejandro Magno conquistó Babilonia en el año 331 a.C., los griegos aprendieron a usar el cero, que ya comienza a aparecer en los papiros astronómicos con la figura de un círculo. Los antiguos griegos, comenzaron sus contribuciones a las matemáticas sobre la época en la que el cero como indicador de posición vacía empezaba a usarse por los matemáticos babilonios. Pero este pueblo, que no adoptó un sistema numérico posicional, no necesitaba usar el cero. Fueron los matemáticos griegos interesados por la astronomía, los que utilizaron el símbolo O en los registros de datos astronómicos. Sobre el uso de por qué se usó este símbolo, en particular, existen numerosas teorías. Hay quienes afirman que corresponde a omicrón, la primera letra de la palabra griega para decir nada, es decir "*ouden*". Otra explicación, es que significaba "*Obol*", una moneda casi sin valor, y que surge cuando se usaban fichas para contar en una tabla de arena, esta explicación se apoya en el hecho de que cuando se eliminaba una ficha para dejar una columna vacía, el hueco en la arena parecía un O. Hasta ahora no se sabe, si era la letra omicrón o la inicial de oudén (nada), porque también se le usaba para señalar los grados de un ángulo. La prueba más antigua de su presencia en la cultura griega es una tablilla del año 876 donde “270” aparece escrito como “27º” (Capanna, 2001; Corsaria, 2006; O'Connor y Robertson, 2000; Pinedo, 2001; Stewart, 2008).

Ptolomeo en el Almagesto escrito alrededor del 130 d.C. usó el sistema babilonio sexagesimal junto con O, parámetro de vacío. En esta época Ptolomeo usaba el símbolo O tanto entre dígitos como al final del número. Pero no todos los astrónomos griegos le secundaron, sólo unos pocos, excepcionalmente, usaron la notación que cayó en desuso varias veces antes de establecerse finalmente (Iohannes Dei, 2007; O'Connor y Robertson, 2000)

En la comitiva de Alejandro Magno, además de soldados había intelectuales, con ellos el cero viajó a la India y allí permaneció durante varios siglos. De aquí que se afirme que a los indios les debemos el invento del cero "completo", por así decir, con sus tres funciones (Guedj, 1999). Alrededor del año 560 d.C. el uso del cero entró en la matemática india. Los indios usaron un sistema de numeración posicional y el cero se usaba para denotar un lugar vacío (Capanna, 2001 y Corsaria 2006).

En el 500 d.C. Aryabhata crea un sistema numérico que no tenía cero y era un sistema posicional. Usó la palabra "kha" para la posición cero y posteriormente el mismo cero adoptaría ese nombre (O'Connor y Robertson, 2000; Iohannes Dei, 2007; Pinedo, 2001). Aryabhata afirma que “de un lugar a otro, cada uno es diez veces el que le precede”, hay una clara indicación de que en su mente estaba de una manera consciente la aplicación del principio posicional (Iohannes Dei, 2007). La idea del “valor local o posicional” había sido ya un elemento absolutamente esencial del sistema de numeración babilónico, y quizás lo que los hindúes hicieron fue considerar que esta idea era aplicable también al sistema de notación decimal para los números enteros, que ya se estaba usando en India (O'Connor y Robertson, 2000).

Como vemos, existen registros de la idea de valor local o posicional en el año 449, no obstante, la primera aparición indudable del cero en la India es una inscripción del año 876 (Capanna, 2001; Cataño, 2007; Corsaria 2006; O'Connor y Robertson, 2000; Iohannes Dei, 2007; Stewart, 2008), es decir, más de dos siglos después de la primera referencia que conocemos a los otros nueve números. No está justificado que el número cero, en tanto idea conceptualmente distinta de un símbolo para designar una posición vacía, surgiera al mismo tiempo que los otros nueve números hindúes.

Con la introducción del décimo número en el sistema de notación hindú para representar el cero en la forma de un redondo huevo de oca, quedaba completo el moderno sistema de numeración para los enteros (Capanna, 2001; O'Connor y Robertson, 2000).

Surgen numerosos problemas cuando se adopta el cero como número, sobre todo problemas relacionados con su comportamiento en las operaciones aritméticas, suma, resta, multiplicación y división a los que los matemáticos indios Brahmagupta, Mahavira y Bhaskara intentaron dar respuesta en sus libros (Stewart, 2008).

Brahmagupta (598 - 660) fue un matemático y astrónomo hindú. Intentó dar reglas para la aritmética teniendo en cuenta el cero y los números negativos en el siglo VII. Explicó que dado un número si lo restas a sí mismo obtienes el cero. Dio las siguientes reglas para la suma que implicaban al cero: *La suma de cero y un número negativo, es negativo, la suma de un número positivo y cero es positivo, la de cero y cero es cero.* La resta es un poco más compleja: *Un número negativo restado de cero es positivo, un número positivo restado de cero es negativo, cero restado de un número negativo es negativo, cero restado de un número positivo es positivo, cero restado de cero es cero.*

Para la multiplicación Brahmagupta dice que cualquier número multiplicado por cero es cero, pero tiene una dificultad con la división: *Un número positivo o negativo cuando es dividido por cero es una fracción con cero como denominador. Cero dividido por un número positivo o negativo es o cero expresado o expresado como fracción el cero como numerador y una cantidad finita como denominador. Cero dividido por cero es cero.*

Si bien Brahmagupta considerado desde los conocimientos actuales, está diciendo muy poco cuando sugiere que n dividido por 0 es $n/0$; y está equivocado cuando afirma que cero dividido por cero es cero, es cierto que realizó un intento brillante, fue la primera persona (que se sepa) que intentó extender la aritmética a los números negativos y al cero (Cataño, 2007; O'Connor y Robertson, 2000; Pinedo, 2001).

En 830, alrededor de 200 años después de que Brahmagupta escribiese su obra maestra, Mahavira (800–870) escribió Ganita Sara Samgraha, que fue diseñado como una actualización del libro de Brahmagupta. Afirma que: *…un número multiplicado por cero es* *cero, y un número permanece igual si se le resta cero.* Sin embargo sus intentos de mejorar las afirmaciones de Brahmagupta sobre la división por cero le llevan a error. Escribe: *Un número permanece sin cambio cuando es dividido por cero.* (Cataño, 2007; O'Connor y Robertson, 2000; Pinedo, 2001).

Bhaskara (1114- 1185) escribió unos 500 años después de Brahmagupta. A pesar del paso del tiempo aún sigue con problemas para explicar la división por cero. Escribe: *Una cantidad dividida por cero se convierte en una fracción cuyo denominador es igual a cero. Esta fracción tiene como valor una cantidad infinita. En esta cantidad en la cual cero es el divisor, no hay alteración aunque se sumen o se resten muchos; así como no tuvieron lugar cambios en el infinito e inmutable Dios cuando se crean o se destruyen los mundos, aunque numerosos órdenes de seres sean absorbidos o creados.* Por tanto, Bhaskara intentó resolver el problema escribiendo que $n/0 = \infty$. Si esto fuese cierto, entonces 0 veces por ∞ debe ser igual a cada número n, por tanto todos los números serían iguales. Los matemáticos indios no podían llegar al punto de admitir que no se puede dividir por cero. Bhaskara hizo otra afirmación correcta sobre las propiedades del cero, como que $0^2 = 0$ y que $\sqrt{0} = 0$. (Cataño, 2007; O'Connor y Robertson, 2000; Pinedo, 2001).

Después de prosperar en la India, el cero volvió a Bagdad integrado en el sistema de numeración de los indios, allá por el año 773, ya que el trabajo de los matemáticos indios fue transmitido a los matemáticos árabes y, a través de la España morisca, se transmitió al resto de Europa (Capanna, 2001).

En una primera etapa Al-Kwarizmi escribió *Al' Kwarizmi en el arte Hindú del Cálculo* en el cual describe el sistema numérico indio de valor por posición de cifras basado en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y 0. Este trabajo fue el primero en usar el cero como marcador de posición en una notación de base posicional. A Al-Kwarizmi se le atribuye la cita: *Cuando en una resta nada queda, entonces escribe un pequeño círculo para que ese lugar no permanezca vacío* (Al-Kwarizmi explicando el cero, Siglo IX). Posteriormente Ibn Ezra, en el siglo XII, escribió tres tratados sobre números que ayudaron a traer los símbolos e ideas indias de las fracciones decimales a la atención de algunos estudiantes europeos. *El libro de los números* describe el sistema decimal para enteros con valores de posición de izquierda a derecha. En este trabajo Ibn Ezra usa el cero, al que llama galgal (significa rueda ó círculo).

Ligeramente más tarde, en el siglo XII Al-Samawal, escribió*: "si restamos un número positivo de cero permanece el mismo número negativo… si restamos un número negativo de cero nos queda el mismo número positivo"* (O'Connor y Robertson, 2000).

Las ideas se dispersaron hacia el Este, a China, así como al Oeste a los países Islámicos. En 1247, el matemático chino Ch'in Chiu-Shao escribió *Tratado matemático en nueve secciones*, en el cual usa el símbolo O para el cero. Un poco más tarde, en 1303, Zhu Shijie escribió *El espejo de Jade de los cuatro elementos* en el cual usa de nuevo el símbolo O para el cero. (Corsaria, 2006; O'Connor y Robertson, 2000; Pinedo, 2001).

Una de las personas que importaron las nuevas ideas numéricas a Europa fue Leonardo de Pisa (Fibonacci) que en su obra *Liber Abaci* describe los nueves símbolos indios junto con el signo O, alrededor del año 1200, pero no fue usado hasta bastante tiempo después. Fibonacci se refiere al cero como la "marca" O, en cambio a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 los llama números. Los números empiezan a conocerse como arábigos y los cálculos que con ellos se hacían, algoritmos. No todos aceptaron hacer las cuentas utilizando algoritmos pues se consideraban menos fiables que los viejos contadores. En 1299 el gobierno de Florencia puso fuera de ley a los libros contables que contenían «algoritmos», y en Padua se hizo obligatorio que los precios de los libros estuvieran en letras, como garantía de lealtad comercial. Para el siglo XV, la victoria de los números arábigos era total (Capanna, 2001; Corsaria, 2006; O'Connor y Robertson, 2000; Pinedo, 200; Stewart, 2008).

En síntesis, podemos decir que el cero nació entre los sumerios, simplemente para resolver dificultades de representación de los números, y luego para realizar cálculos. Más tarde se apropiaron de él los griegos de Alejandro Magno, de paso por Babilonia. Los griegos lo llevaron a la India. De allí lo tomaron los árabes, que se lo transmitieron a los mercaderes italianos, y éstos lo difundieron en toda Europa. Para los siglos XV y XVI, el cero se extendió tras encontrar mucha resistencia. (Capanna, 2001).

Según Denis Guedj (1999), *Sunya* es el nombre de la marca del vacío en lengua india; y la primera representación del cero fue un pequeño círculo, *Sunya*, el vacío. Cuando se traduce al árabe se convierte en *sifr*, y posteriormente en latín será, *zephirum*, que produjo *zephiro*, *cero*.

Por su parte, el vacío es una categoría especial, muy difícil de localizar y la creación del cero como cifra significa designar el lugar vacío en una columna por medio de un signo este hecho exige pasar de la negación a la afirmación, atreverse a significar una ausencia por medio de una presencia, actuación que llevó mucho tiempo y cambio de mentalidad.

Las primeras civilizaciones necesitaron un tiempo largo para concebir el cero como número, una razón era filosófica: ¿cómo puede cero ser un número cuando un número es una cantidad de cosas? ¿Es nada una cantidad? (Stewart, 2008).

Por lo que a la "nada" se refiere, participa de la categoría de la existencia. La creación del cero número realiza una síntesis de ambas categorías y lleva a cabo una radical transformación del estatuto del número. "No hay nada" se convierte, con él, en "hay nada". Paso de la lógica a la aritmética, del cero lógico al cero matemático que es un "valor".

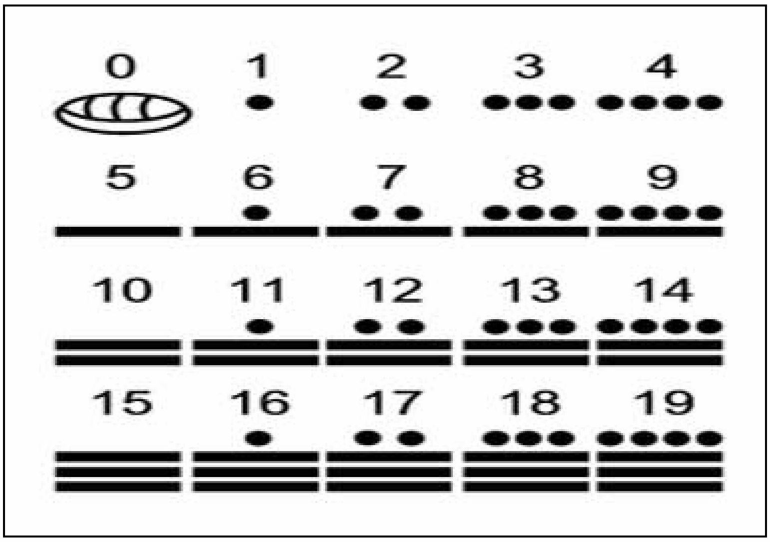
El trayecto que permitió pasar de "no hay" a "hay cero" constituye una etapa fundamental en la historia del pensamiento. ¿Cuánto? ¡Cero! (Guedj, 1999).

2.1.3. El cero en los mayas

Todo lo anterior sucedió en el viejo mundo: Asia, África y Europa entre los años 300 a de C. y 1600 d de C. Pero también en América, existen registros de la presencia del cero, específicamente en la cultura de los mayas. Es probable que la invención del cero pudiese deberse a los olmecas, una civilización anterior a los mayas ubicada en los actuales estados de Tabasco y Veracruz. Desgraciadamente su descubrimiento no paso a otras culturas más allá de los mayas. Los mayas vivieron en Mesoamérica, ocupando el área que hoy es el Sur de México, Guatemala y el norte de Belice. Fueron una civilización que surgió entre el 250 y el 900 aproximadamente. Los mayas en su obsesión por contar y contabilizar el tiempo descubrieron el cero. Contaban con varios calendarios distintos. El calendario cósmico, un calendario civil con 360 días y 5 fechas «fantasmas» y un tercer calendario con un año de 260 días. El cuarto era el ciclo diabólico de los "Señores de la Noche". Para otras cosas se usaba un calendario lunar, otro con el ciclo sinódico de Venus y hasta uno de Mercurio. El problema surgía con los cruces de estos calendarios (cinco años del calendario de Venus eran 8 del civil, y 405 lunaciones eran 46 años del calendario Tzolkin) pues existía el peligro de que en cualquiera de esas intersecciones de calendarios se acabara el tiempo, por lo que había que exorcizarlas. Aquí es donde aparece el cero (Capanna, 2001; Cataño, 2007; Corsaria, 2006; Guedj, 1999; Iohannes Dei, 2007; O'Connor y Robertson, 2000; Pinedo, 2001).

Los “Señores de la Noche” eran acaudillados por la Muerte, llamada Cero. Todos los años se organizaba una pelea a muerte entre dos campeones, uno de los cuales hacía de Cero. El Cero siempre tenía que perder. Si no lo hacía lo tiraban por una escalinata, y el mundo seguía andando. Los astrónomos mayas desarrollaron, durante el primer milenio de nuestra era, un sistema de numeración de posición de base 20, en la que los números son representados por conjuntos de puntos y trazos (Capanna, 2001).

Un signo gráfico particular, un óvalo horizontal, que representa una concha de caracol, un glifo, desempeña el papel de signo separador eficaz y permite una escritura sin ambigüedad de los números. Aunque no tiene carácter operatorio, ni siquiera se le considera un número, no deja de ser un notable invento (Capanna, 2001; Cataño, 2007; Corsaria, 2006; Guedj, 1999; Iohannes Dei, 2007; O'Connor y Robertson, 2000; Pinedo, 2001; Stewart, 2008).



Numeración Maya

Fuente: Corsaria, 2006

Se sabe que sobre el 665, usaron un sistema numérico de valor posicional de base 20 con un símbolo para el cero. El cero estaba en uso antes de que lo introdujesen en el sistema numérico de valor posicional. Esto es un enorme éxito, pero lamentablemente no influenciaron a otras culturas. (Cataño, 2007; Capanna, 2001).

Para los mayas, el cero significaba ausencia, entrada en un nivel de la torre de números. Representado de forma abstracta como caracol ó como concha bivalda. En las cronologías, los números se representaban, como barras y puntos pero el cero era como una caracola, semejante a una pelota de rugby; un rostro preocupado que se acariciaba el mentón; un hombre tatuado con la cabeza echada hacia atrás. Tonda y Noreña (1994, citado en Cataño, 2007), muestran que la innovación del cero es anterior a las inscripciones encontradas en las construcciones de la India antigua. Con un doble significado de la nada: conjunto vacío y terminación o cabalidad.

En el cero Maya se une la cualidad de ausencia de unidades y la de señalar que un período, una fecha ó una cantidad se completa (Tonda y Noreña, 1994, citado en Cataño, 2007, p. 21).

2.1.4. Resumen de la génesis y desarrollo del cero

Inicialmente el cero surge como un signo de puntuación, para que los números tengan una interpretación correcta, y se registraba al medio de un número. Con el paso del tiempo, esta "marca" se registraba en medio y al final de un número, y no era considerada como un número, sino como cifra indicando la ausencia de cantidad de un orden determinado. De esta manera, era un marcador de posición en una notación de base posicional. Finalmente, llegó a ser considerado un número que posee las funciones de presencia de posición y ausencia de cantidad en cualquier sistema de numeración.

Aunque haya sido considerado como un número, el cero no tiene significado en la mayoría de los contextos de uso del número, o si lo tiene no es fácil de entender: la secuencia numérica ascendente no la comenzamos por cero, salvo que se pida; sí aparece en la secuencia numérica descendente; en el recuento lo usual es empezar por uno, no por cero; como cardinal, el cero indica el conjunto vacío; en contextos de medida es el punto de partida de las escalas lineales graduadas para medir; como cardinal no es frecuente comenzar por cero, sino por uno (Castro, 2001).

2.2. CERO, UN NÚMERO CON ENTIDAD PROPIA

Uno de los objetivos de nuestro estudio es determinar la especificidad del número cero, respecto al resto de los números, para identificar posteriormente los contextos y situaciones en que se presenta el cero, en los textos seleccionados. Para ello hemos determinado la entidad que presenta el cero en los distintos contextos numéricos. A su vez, como los textos seleccionados corresponden a los niveles de 1º a 5º de Educación Básica (Educación Primaria en España), donde los conjuntos numéricos que se enseñan son los naturales y los racionales, hemos identificado el comportamiento que presenta el cero en el conjunto de los naturales.

2.2.1. Contextos de los Números Naturales

Si bien el número es un concepto único, su utilización en la práctica incorpora distintos significados en los que hay que emplear una amplia gama de destrezas, técnicas y habilidades. Cuando nos enfrentamos a una situación que requiere un tratamiento numérico, debemos discernir con qué significados se emplean allí los números y cuáles son los procesos lícitos y conclusiones que podemos obtener.

Como lo señalan Castro, Rico y Castro (1987), los números naturales adquieren distintos significados en función de los contextos particulares en los que se estén empleando, ellos son: secuencia verbal, contar, cardinal, medida, ordinal, como código y como tecla ó botón. Es posible encontrar dichos contextos aisladamente o situaciones que abarquen más de un significado.

Se está en un contexto de *secuencia verbal* cuando se recita la secuencia numérica convencional sin usar a la vez cualquier ente externo ligado a dicha recitación. En el contexto de *contar*, se usa la misma secuencia convencional pero asociando cada uno de los elementos de dicha secuencia a los elementos de una colección mediante una aplicación biunívoca. Se presenta el contexto de *cardinalidad* cuando se usa el número para dar cuenta de la cantidad de objetos que hay en una colección o conjunto discreto. Al conocimiento de dicho número, o cantidad, se puede llegar mediante la percepción de la cantidad (de súbito), contando o estimando. El contexto de *medida* hace referencia a la utilización de los números naturales para expresar, junto con una unidad de medida, el número que de dichas unidades contiene una cantidad de magnitud discreta. En este contexto el número aparecerá siempre acompañado de la unidad de medida correspondiente. En un contexto *ordinal*, el número designará el lugar relativo de un objeto en una colección totalmente ordenada. Cuando los números se utilizan como etiquetas para diferenciar objetos o clases, se presentan en un contexto de *código*. En este caso los números pueden ser sustituidos por letras u otros signos que harían la misma función. En un contexto de *tecla*, cada uno de los números está asociado a un resorte que habrá que manejar para su funcionamiento.

No todos estos contextos tienen utilidad para las operaciones básicas, sucede con el contexto de símbolo, por ejemplo. Las operaciones de suma, resta multiplicación y división tienen sentido en los contextos cardinal y de medida, fundamentalmente, y se llegará a ellos mediante las abstracciones de los procesos manuales de unir, separar, agregar reiteradamente o segregar reiteradamente sobre colecciones discretas de objetos.

Sin embargo, el cero, tiene un significado particular, diferente al resto de los números, en los contextos numéricos, no apareciendo en algunos de ellos, como sucede en la secuencia verbal, al contar, o al marcar una posición de orden, como veremos en el apartado siguiente.

2.2.2. El cero en los diferentes contextos

- **El cero en la secuencia verbal**

En la secuencia verbal, es común utilizar las secuencias numéricas en los juegos de niños, como en el escondite, o en canciones infantiles donde está presente la secuencia numérica, en todos ellos la secuencia comienza por uno y el cero no aparece.

- **El cero en el recuento**

Contar se utiliza, sobre todo, para dar a conocer el cardinal de una colección de objetos. La acción de contar exige comenzar por uno para que el resultado del conteo llegue, en su último "paso", al conocimiento correcto del cardinal. No se puede empezar por cero ya que el resultado sería erróneo. Por tanto, no tiene uso el cero en el contexto de conteo.

- **El cero como cardinal**

Se denomina cardinal de un conjunto a la cantidad de objetos que posee. El uso del cero en un contexto cardinal se hará para señalar el cardinal del conjunto vacío. El cero expresa así la ausencia de cantidad, es decir, no hay elementos en una colección, lo que hace que sea considerado como "un número sin valor".

- **El cero en un contexto de medida**

Puesto que toda medida exige de un número (cardinal) y una unidad de medida, el cero sólo intervendrá en aquellos casos en los que la medida sea nula. No obstante juega un papel crucial en numerosas medidas como origen desde donde se comienza a hacer la misma. Ejemplo, para medir una longitud a través de un instrumento graduado (léase regla graduada), el punto de partida se hace coincidir con el cero.

- **El cero en el contexto ordinal**

En el contexto ordinal, el cero apenas tiene uso. Si bien el primer número natural es el cero, cuando se trata de orden, sobre todo en la vida cotidiana, es el uno el que se toma como primer ordinal. En contadas ocasiones se habla de una situación cero como anterior a la primera situación.

- **El cero como signo**

El cero, sí es usado como signo ó código, igual que sucede con los otros números.

- **El cero como tecla**

En este contexto, los números usados son del cero al nueve, con ellos se pueden componer los demás. Esto lleva implícito que cuando se pulsa una tecla el número correspondiente puede tener un valor absoluto o relativo. Absoluto, cuando es el único, o el último que se pulsa; relativo, en los restantes casos. En esta situación el cero actúa igual que los demás números.

Además de estas diferencias de contexto respecto a los otros números, el cero es considerado un número natural específico, que se distingue de los demás por su comportamiento atípico en muchas ocasiones, así lo confirman: Anthony y Walshaw (2004); Caianiello y Codetta (1996); Cataño (2007); Castro y Rico (1983); Castro y Torralbo (2001); O'Connor y Robertson (2000); D'Amore (2008); Levenson, Tsamir y Tirosh (2007); y Roanes (1976), quienes han identificado algunas especificidades en el cero.

2.2.3. El cero en la construcción de los Números Naturales

Algunos matemáticos, especialmente los que se dedican a la Teoría de Números, prefieren no reconocer el cero como un número natural. Otros, especialmente los que se dedican al estudio de Teoría de conjuntos, Lógica e Informática, sostienen la postura opuesta. Quienes lo consideran perteneciente al conjunto de los naturales, establecen que este conjunto también se puede definir como el conjunto que nos permite contar el número de elementos que contienen los demás conjuntos, y el conjunto vacío tiene cero elementos.

Sin embargo, por convenio el cero no se incluía en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$. Y se representaba como $\mathbb{N}_0$, al conjunto de los números naturales cuando incluye al cero, por ello nos podemos encontrar con muchos libros donde los autores no consideran al cero como número natural.

A algunos matemáticos les resulta conveniente tratarlo como a los otros números naturales y a otros no, por eso la discrepancia. Desde un punto de vista histórico el cero aparece tan tarde que algunos no creen que sea justo llamarlo natural. Incluso hay quienes afirman desde un punto de vista metafísico que el cero no existe, y así agregan más razones para no llamarlo «natural».

Según las teorías de la construcción de los números naturales, existen dos grupos. Las que consideran el aspecto ordinal del número, y las que consideran el aspecto cardinal. En ambas, el cero posee gran protagonismo. A continuación presentamos la axiomática de Peano, que basa la construcción de los números naturales en el aspecto ordinal; y la teoría de conjuntos, que la basa en el aspecto cardinal.

A. Axiomas de Peano

Los Postulados de Peano describen la estructura Números Naturales sin necesitad de otra teoría por ejemplo Teoría de Conjuntos, y ajena de las definiciones aritméticas de suma o equivalencia.

El cero interviene en tres de los cinco axiomas que estableció Peano. Castro y Rico (1983), destacan que las tres ideas primitivas de la aritmética de Peano son: “cero”, “número” y “sucesor”, a partir de ellas elabora sus cinco proposiciones iniciales ó axiomas:

I. Cero es un número.

II. El sucesor de cualquier número es un número.

III. Dos números distintos no tienen igual sucesor.

IV. Cero no es sucesor de ningún número.

V. Toda propiedad que tenga cero y que al tenerla un número la tenga también su sucesor, la tiene en general cualquier número.

Esta axiomática toma como elementos primitivos los de cero y sucesor, fundamentadas en el aspecto ordinal del número. La función sucesor expresa la posición relativa de dos elementos entre sí y, por recurrencia la posición de un elemento con respecto al primero, que es el cero. Por ello considera que cero pertenece a los naturales. Además, la serie de los naturales comienza por cero, en el sentido de Peano al decir que cero es sucesor de ningún número.

B. Teoría de conjuntos

En la construcción por cardinalidad de los números naturales, según Roanes (1976), la idea de conjunto aparece intuitivamente como colección de objetos, colección es usada como sinónimo de conjunto. Los elementos de un conjunto son los objetos o entes que lo forman. En el caso que el conjunto no contiene ningún elemento, se llama conjunto vacío. La clase formada por el conjunto vacío se llama número cero. La clase formada por el conjunto {a} y sus equipotencias se llama número uno. La clase uno de cuyos representantes es el conjunto {h, i} se llama número dos. La clase definida por el conjunto {1, x, 2} se llama número tres, etc. De este modo los números naturales son las clases producidas por esta relación de equivalencia, llamada también equipotencia, es decir, dos conjuntos son equipotentes cuando tienen el mismo número de elementos. Por último, es importante destacar que el único conjunto que no contiene elementos, es el conjunto vacío, denominado cero.

2.2.4. El cero en el sistema decimal de numeración

El sistema de numeración decimal permite que a partir de ciertos elementos simples y utilizando una serie de reglas se puedan construir, sin limitación, todos los números naturales que se deseen. Los elementos simples mencionados son 0 (cero), 1 (uno), 2 (dos), 3 (tres), 4 (cuatro), 5 (cinco), 6 (seis), 7 (siete), 8 (ocho), 9 (nueve). Cada uno de estos elementos simples son las cifras que van a componer todos los números. En la composición de los números interviene el principio o regla de posición mediante el cual el valor de una cifra en un número dependerá de la posición que ocupe en el mismo, así el valor de 2 es diferente en el número 52 que en el 326 pues el lugar de orden ocupado es diferente para cada uno de los números. El cero cuando se utiliza como cifra, al componer un número, indica la ausencia de cantidad de un determinado orden, y a su vez, señala la presencia de posición de ese orden. Se podría pensar que una vez que aparece un sistema numérico de valor posicional, entonces el cero como indicador de posición vacía es una idea necesaria. Por tanto, se trata de una cifra necesaria en cualquier base de un sistema de numeración posicional.

2.2.5. El cero propiedad estructural en diferentes operaciones aritméticas

El cero, en diferentes operaciones aritméticas de números naturales, no se comporta igual que los demás números. Podemos observar que en la adición y sustracción, al agregar ó quitar cero elementos a un conjunto, el conjunto no se altera, permanece igual. Por tal razón, en la adición, el cero da origen a la propiedad denominada elemento neutro, Roanes (1976):

"EXISTENCIA DE ELEMENTO NEUTRO: Existe un número natural, el cero, cuya suma con un número natural cualquiera, a, es a, es decir, tal que $0 + a = a$ "(p. 230)

En el proceso de multiplicación, al multiplicar un número cualquiera por cero, siempre dará por resultado cero, ya que, por definición, la multiplicación es una operación aritmética de composición que consiste en sumar reiteradamente la primera cantidad tantas veces como indica la segunda, o sea:

$m \text{ x } n = m + m + m + m + m\ldots + m$

Cuando el cero está presente, donde hay cero sumandos, la suma de cero veces *m* es cero, así que, $m \text{ x } 0 = 0$, sin importar lo que valga *m*, siempre que sea finito. Siendo cero el número de veces, el resultado obtenido es cero. Lo que da origen a la propiedad absorbente del cero. Por ello Roanes (1976), registra la siguiente proposición:

"Si el producto de dos números naturales es cero, uno de ellos, al menos, ha de ser cero". (p. 243)

La división es entendida como una operación aritmética de descomposición que consiste en averiguar cuántas veces un número (el divisor) está contenido en otro número (el dividendo). La división es una operación matemática, inversa de la multiplicación y puede considerarse también como una resta repetida. En matemática, una división por cero es una división en la que el divisor es igual a cero. Particularmente en los números naturales, la división por cero no está definida, debido que para todo número *n*, $n \text{ x } 0 = 0$, por lo que el cero no tiene inverso multiplicativo. En cambio, cuando el cero ocupa el lugar del dividendo, y el divisor es *n*, el resultado es cero, es decir, $0{:}\ n = 0$, porque $0 \text{ x } n = 0$.

2.2.6. Representaciones del cero

El cero tiene su representación mediante el signo 0 que se lee "cero", se trata de la cifra. Cuando forma parte de un número, el mismo puede ser representado de manera usual (ej. 304) o, haciendo uso de los principios del sistema de numeración descompuesto en otros elementos, así: en forma aditiva (300+4) o en forma polinómica ($3\text{x}10^2+0\text{x}10^1+4\text{x}10^0$). En las representaciones de la secuencia numérica el cero ocupa un lugar especial. Así en la representación de la recta numérica determina el inicio de la misma. En una representación en diagrama cartesiano, señala el punto de unión de las dos rectas. De acuerdo a la teoría de conjuntos, el cero corresponde al conjunto vacío, por tanto, su representación en el diagrama de Veen Euler es un conjunto sin elementos. En el ábaco de barras y argollas, al representar un número que tiene cero en algunos de sus lugares de sus órdenes de unidades, el cero es representado como una barra sin argollas, es decir, el lugar vacío que indica ausencia de elementos.

2.3 EL CERO: ESTUDIOS REALIZADOS

El cero, y sus concepciones de nada, vacío, ausencia, ha sido inspiración para filósofos, escritores, matemáticos, físicos, astrónomos, astrólogos, educadores e investigadores. Es así como se han publicado desde cuentos juveniles como el “El señor del cero”, escrito por María Isabel Molina (1996), obras como “El libro de la nada” de Jhon D. Barrow (2001), y artículos en diferentes revistas y diarios, donde se reflexiona sobre el cero, como lo hace el filósofo Pablo Capanna (2001), quien publicó una columna titulada “El cero y la nada”, en un diario argentino. Como nuestro interés radica en el cero dentro de la educación, a continuación presentamos una serie de estudios realizados por diferentes investigadores, donde el protagonista es el cero.

Caianiello y Codetta (1996), elaboraron un cuestionario sobre el significado del número cero. Entrevistaron a 2500 estudiantes italianos de todos los niveles, de primaria a educación universitaria, y también a personas adultas. Las preguntas eran: *¿Qué significa cero para ti? ¿Qué diferencia podría existir si tú no tuvieses el número cero?* Muchas respuestas correspondían a emociones y sentimientos. Las respuestas de los entrevistados, no sólo estaban centradas en las matemáticas sino que usaban metáforas gráficos e imágenes, lo cual revela las sugerencias que aporta el símbolo. El número cero también fue conectado con la realidad, particularmente con su uso práctico, y con la esfera emocional de los hombres. Las ambigüedades sobre el significado del cero están conectadas con: nada, vacío, ausencia de cosas ó símbolos. Las conclusiones obtenidas fueron:

- Muchos estudiantes asocian el cero con algunos símbolos esotéricos, los que históricamente, han sido ligados a ellos, como es el caso de la muerte, donde supuestamente se termina un ciclo y comienza otro.
- El cero motiva muchas respuestas emocionales de los estudiantes relacionados con un miedo al vacío, ó a lo desconocido, mientras que en otros estudiantes evoca pensamientos de equilibrio y crecimiento, puesto que al ser considerado como el origen de la secuencia numérica en los naturales, se le atribuye el inicio de una nueva etapa en la vida.
- Los significados emocionales del cero, llevan a los estudiantes a construir complejas estructuras cognitivas alrededor del concepto matemático del cero aprendido en la escuela.
- El significado matemático del cero aparece con evidencia, solamente en aquellos períodos en los que los estudiantes están escolarizados.

Hughes (1986), realizó un estudio con niños escolares entre 5 y 8 años de Edimburgo. Al entrevistar a niños preescolares, observó que realizaban representaciones de pequeñas cantidades, apelando a una correspondencia biunívoca. A su vez, representaban el cero sin dificultades, asignándole significado de ausencia de cantidad. Constató que los niños entrevistados presentaban dificultades al representar números mayores de diez, y al restar o sumar con estos números, considerados *"números grandes"* por los alumnos entrevistados. A su vez, el cero planteó serios problemas al resolver sumas o restas de números que lo contenían, producto de su incomprensión dentro de un sistema de valor posicional. Confirmó que una de las causas de las dificultades de aprendizaje en matemáticas consistiría en la capacidad de los niños para efectuar "*traducciones"* entre las representaciones concretas y su respectiva representación escrita. Esta idea se ve confirmada aún más cuando aparece el cero, ya que, su significado de ausencia de cantidad es una idea demasiado abstracta para poder ser representada en forma concreta por los niños.

Lerner (1994), entrevistó a 90 escolares venezolanos de 1°, 3° y 5° de Ed. Básica (30 niños por cada curso), con el propósito de investigar acerca de cómo se aproximan los niños al sistema de numeración decimal. En relación al valor posicional y el cero, especifica que presenta problemas cuando forma parte de una cantidad de dos o más cifras, ya que, el cero representa al mismo tiempo: la ausencia de elementos y la presencia de una posición. Los niños descubren muy tempranamente el valor del cero como representación de la ausencia de cantidad. Sin embargo, no comprenden que a su vez significa presencia de una posición, concepto estrechamente relacionado con la noción de valor posicional. Los escolares entrevistados de 1° Básico, reconocen que el cero es el "elemento neutro" en las operaciones de suma y resta. Además, agregan que sólo tiene valor cuando aparece después de otro número, lo que quieren decir es que en este caso el 0 no puede suprimirse sin afectar el valor del número, ellos afirman que el 0 vale a la derecha de otro número y no a la izquierda. A diferencia de lo que ocurrió con los niños de 1° Básico, los sujetos de 3° y 5°, desde el comienzo señalaron que el valor del 0 depende de su ubicación.

Lerner y Sadovsky (1994/2005), realizaron entrevistas clínicas a parejas de niños argentinos de 5 a 8 años, 50 niños, los integrantes de cada pareja pertenecían al mismo grado. Las afirmaciones de los niños entrevistados muestran que ellos han elaborado unas hipótesis: *"Cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número"*; como criterio de comparación, en un número, *"el primero es el que manda"*.

Frente a la escritura convencional de los algoritmos, las autoras advierten que a los niños se les ha enseñado el procedimiento convencional para resolver sumas con sumandos de varias cifras y es este procedimiento el que los ha llevado a pensar que, al resolver una cuenta utilizando el algoritmo tradicional, cada cifra se suma en forma independiente unas de otras, transformándose en una suma entre dígitos ubicados en el mismo orden posicional. Al considerar separadamente las cifras, los niños no pueden aplicar esta estrategia cuando resuelven problemas en la vida diaria. Entonces, se ven obligados a crear procedimientos especiales para resolver la situación en que una cifra del minuendo es menor que la que ocupa el mismo lugar en el sustraendo y estos procedimientos son básicamente los siguientes:

- sumar en lugar de restar,
- invertir los términos de la resta (restar "al revés"),
- quitar del minuendo lo que se puede quitar, y
- no realizar la operación.

En este último caso, el resultado puede coincidir con el minuendo (que queda intacto porque la operación no pudo realizarse) o bien puede ser cero, pero un cero que representa la imposibilidad de restar. Sintetizan que los niños han construido dos reglas que nadie les ha enseñado:

a) el valor del cero en función de la posición que ocupa con respecto a otros números,

b) la relación entre el valor del número y la cantidad de cifras que lo componen.

Estas reglas, les ayudarán a comprender la numeración escrita, ya que les permite hacer comparaciones válidas, no sólo en relación con los números que los niños ya manejan desde el punto de vista de la numeración hablada, sino también en relación con números cuya denominación oral desconocen.

Sheuer, Sinclair, Merlo de Rivas y Tièche Christinat (2000), desarrollaron una investigación en Argentina y Suiza. Estudiaron niños en dos países diferentes para obtener algunos datos en relación a la generalidad o universalidad de las conductas de los niños con respecto a la escritura de números. Realizaron entrevistas individuales donde se solicitó la escritura al dictado de los números naturales:

3	7	10	15	26	27	54	60 ó 30	100	103	171	346	620

500 (en francés) ó 1.000 (en castellano)

A los niños de 7 y 8 años se les propuso también:

1.003	1.090	3.000	3.099	10.000	10.015	10.016	19.522	100.000	100.003

Llama la atención que a los niños que se les propuso:

1.003	1.090	3.000	3.099	10.000	10.015	10.016	19.522	100.000	100.003

cometían errores en registrar la cantidad correcta de ceros. Todos los errores cometidos por los niños en la escritura convencional de los números, confirman, una vez más, que el valor posicional y el cero plantean dificultades en la adquisición del sistema de numeración decimal.

Anthony y Walshaw (2004), realizaron un estudio con una muestra de 100 estudiantes de Nueva Zelanda, 50 de cuarto grado y 50 de octavo grado, a todos ellos se les preguntó: *¿Hay un número que yo pueda quitar o agregar a 7 y aún siga siendo el mismo número?* Las respuestas se caracterizaban por no reconocer al cero como un número legítimo. Existía confusión sobre el significado del cero. El cero como un elemento neutro en la adición y sustracción. El 60% estuvo de acuerdo en que existía un número que podría agregar ó quitar a 7, y todavía conservar el mismo número, 7. Aquellos que no estuvieron de acuerdo parecieron ser incapaces de recordar o comprender el número cero. Cuando los estudiantes identifican correctamente el cero como el número que podría agregar o sustraer a 7, y así conservar el mismo número 7, sus explicaciones a menudo reflejan las dificultades de tratar de describir la acción física de agregar o quitar "nada". Las autoras plantean que al considerar el concepto del cero como "*nada*", se ignora la presencia del cero. El peligro real de considerar cero como sinónimo de "*nada"* es la implicación de no ser considerado. Ellas, concluyen que muchos de los estudiantes entrevistados tienen una inadecuada comprensión del concepto del cero, por tanto, para superar las dificultades que provoca el cero, proponen que los niños deberían abordar las complejidades del cero gradualmente.

Donoso (2008), en un estudio realizado en Chile, elaboró una prueba y una entrevista. La prueba fue aplicada a 16 alumnos de segundo básico, y la entrevista a 8 docentes que enseñaban matemáticas en segundo básico. La prueba medía conocimientos de numeración y operaciones aritméticas de adición y sustracción con números naturales de tres y cuatro cifras.

Con respecto al cero, el estudio arrojó que en la enseñanza de los números, el nueve y el cero ameritan mayor dedicación, puesto que los números terminados en nueve son el antecesor de todos los números terminados en 0, lo que provoca serias dificultades. Y el cero dentro de un número, representa ausencia de cantidad y presencia de posición, determinada por la base 10, del sistema de numeración decimal. El desconocimiento de las funciones del cero, es un obstáculo cognitivo para el aprendizaje del sistema de numeración decimal.

Con respecto a las respuestas de los docentes, se observa que ninguno de ellos hace referencia a la enseñanza del cero.

Cataño (2007), la autora se propuso conocer las interpretaciones del cero en el aula, identificar sus usos y la forma en cómo lo construyen los alumnos. Para ello elaboró un instrumento que denominó *Encuesta Cero,* el cual consta de dos partes: la primera plantea seis situaciones problemáticas donde el cero aparece en la información o en los resultados; la segunda son cinco ejercicios aritméticos donde aparecen: la adición, sustracción, multiplicación y división, tanto de números naturales como decimales y fracciones. La muestra estaba constituida por seis alumnos, entre 17 y 20 años de edad, todos de México, que cursaban primer año de ingeniería.

Después del análisis de los comentarios hechos por los alumnos en la *Encuesta Cero,* quedaron algunas inquietudes relacionadas con respuestas poco claras o reducidas y fue entonces como una prolongación a la encuesta, aplicar una entrevista clínica basada en las respuestas iniciales de cada alumno.

Entre sus conclusiones están que:

- Hay diferentes y muy variados significados del cero en el ámbito escolar, reflejo de ello son las reglas escolares y específicas que los alumnos mencionan: *"cero por cualquier número es cero", "la división de un número cualquiera entre cero está indefinida, porque la operación es imposible", "la división de cero entre cero, es también indefinida porque podría realizar dicha operación, pero el resultado no es único".*
- Establece asociación entre ciertas palabras y la ausencia del valor. Por ejemplo, gratis es considerado como nada o cero dinero y sucede que el alumno, cuando se encuentra con una situación semejante, cuyo valor asignado es cero, le confiere mayor importancia y en ocasiones no sabe qué operación efectuar.
- Los alumnos tienen claro el concepto de positivo y negativo siempre que estén trabajando con números enteros. Pero, en general, no clasifican al cero como un elemento neutro y, en algunos casos, dudan de si es positivo y negativo a la vez.
- Los alumnos tienen un conocimiento vago o nulo sobre expresiones en las que el cero aparece como 0/0 y no van más allá de un resultado numérico, es decir, el contexto tiene importancia para expresar el resultado.
- Cuando los alumnos relacionan el concepto del cero con temas de geometría: interpretaron el significado de una recta de pendiente cero; recordaron que una línea horizontal tiene pendiente cero; algunos recordaron la ecuación general de la recta y=mx+c; y otros omitieron el significado de rectas tangentes.

En D'Amore (2008), el autor, después de un trabajo realizado por medio de coloquios con niños entre tres y seis años, muestra que la génesis del cero, como cifra y cardinal, es espontánea en ellos. Se parte de la hipótesis de que en el origen de las dificultades en el aprendizaje del cero existen obstáculos didácticos, creados por la tendencia a evitar una introducción espontánea de dicho concepto.

En las entrevistas se observa que:

- No todos los niños entrevistados saben escribir los numerales del 1 al 9, pero casi todos saben escribir el 0.
- La mayor parte de los niños sabe asociar el cero con "nada", entendido como ausencia de acción o de objetos.
- Casi todos los niños consideran el cero como un número.
- Muchos, haciendo referencia a la escritura de los números dicen que cero sirve para escribir los números.
- La casi totalidad de los entrevistados reconocen el cero en un número escrito y demuestran que saben escribir números de hasta 3 cifras en los que aparezca el cero; casi todos manifestaron, aunque intuitivamente, el valor posicional del cero en la escritura de los números.

Levenson, Tsamir y Tirosh, (2007), de la universidad Tel-Aviv de Israel, realizaron un estudio sobre los problemas y dilemas que enfrentan los estudiantes de sexto grado cuando extienden la propiedad de paridad al incluir el cero. Para ello entrevistaron a dos estudiantes de sexto grado, y se les preguntó: *"¿Por qué 14 es un número par?"*. Las respuestas fueron:

Alumno 1: *"14 es un número par porque es divisible por 2";*

Alumno 2: *"14 es un número par porque es múltiplo de 2, 14 es divisible por 2. 7x2=14 y no hay resto al final"*

Luego, se les pidió si podrían utilizar las explicaciones presentadas para la paridad de 14, para ayudarles a evaluar y aclarar su comprensión sobre la paridad del cero. Las respuestas fueron:

Alumno 1: *"cero nunca es un número par o impar. El número cero no es divisible por nada, por eso, no puede ser par"*

Alumno 2: *"cero no es un número par o impar porque es el número más pequeño, por lo que no puede ser dividido o multiplicado por 2"*

En ambas respuestas se observa que los estudiantes intentan incorporar al cero en su conocimiento previo sobre los números, considerándolo como un número natural. Los autores concluyen que el cero causa confusión cuando es incorporado a los naturales, porque en el conteo no está presente. Además, cero a ser conceptualizado como "*nada*" causa serias dificultades. Por tanto, los docentes de primaria deben dar al cero un tratamiento especial para que los estudiantes puedan percibir que las propiedades aplicables a los números naturales, no siempre son extensibles al número cero.

Aunque existe controversia, en cuanto si es o no un concepto que se adquiere en forma intuitiva, según los estudios presentados, todos coinciden en que la comprensión del concepto cero es importante en la adquisición del sistema de numeración decimal, y su incomprensión o desconocimiento, provoca errores en diversas situaciones donde se encuentre presente, por ejemplo: en la lectura y escritura de números, en operaciones aritméticas donde algunos de los números contenga cero como cifra, etc. Llama la atención que hasta ahora, no se hayan encontrado estudios relacionados sobre el cero en educación secundaria.

CAPITULO III

METODOLOGÍA

El enfoque de nuestro estudio es cualitativo, enmarcándose en el término interpretativo en el sentido de Erikson (1989), quien adopta esta expresión por ser más inclusivo que otros como etnografía, o estudio de casos, y evita la connotación esencialmente no cuantitativa dado que cierto tipo de cuantificación se emplea en este trabajo, específicamente la elaboración de tablas de frecuencia. Dicho enfoque, además, recoge el interés por el significado de las actividades humanas y por la interpretación de ellas que hace el investigador.

Es importante destacar que el fin del estudio es exploratorio. Según Goetz y LeCompte (1988), el estudio exploratorio tiene como objetivo la comparabilidad y traducibilidad de los resultados. Razón por la cual, no pretendemos generalizar los resultados de nuestro análisis a otros libros de texto no incluidos en nuestra muestra, sino poner de manifiesto la presencia que posee el cero en los textos seleccionados, para que en estudios futuros pueda servir de comparación, entre otros usos.

3.1. SELECCIÓN DE LA MUESTRA DE LIBROS DE TEXTO

La estrategia de muestreo utilizada, corresponde a un muestreo no probalístico, siendo un muestreo intencionado. El muestreo intencionado "(…) consiste en seleccionar casos con abundante información para estudios detallados" (Patton, 1991, citado por McMillan y Schumacher, 2005, p. 406)

Hemos seleccionado una muestra de cinco textos de Educación Matemática, utilizados en Chile en el año 2008, de los niveles de 1º a 5º Básico[14], publicados en los años 2006 y 2007, el listado de los textos se registra en el anexo I, página 70.

La principal razón de la elección de estos textos, es que son utilizados actualmente en Chile por la mayoría de la población escolar.

[14] 1º a 5º de Primaria en España.

Además, nos concentramos en el análisis de los libros de texto de 1º a 5º Básico, porque son los niveles donde se inicia el aprendizaje formal de los números, por tanto, el cero está presente.

No todos los textos pertenecen a la misma editorial, puesto que en Chile existe una política de textos escolares, en la cual las editoriales presentan sus textos, y el MINEDUC[15] selecciona más de una, para que los profesores elijan entre ellas. A continuación se explica en detalle cómo funciona el proceso de selección de textos en Chile.

El Estado chileno asume la misión de que cada estudiante del sistema subvencionado y municipalizado de educación reciba gratuitamente los textos escolares que necesita para su formación. Para cumplir con este deber se creó el Programa de Textos Escolares, entidad dependiente del Ministerio de Educación que realiza cada año un laborioso proceso.

El recorrido parte con un grupo de expertos que realiza la evaluación técnica de cada una de las opciones de textos, que presentan las principales editoriales del país, para seleccionar las que mejor se adecuan a los requerimientos de los estudiantes.

Los establecimientos educacionales, por su parte, se acreditan en el sistema, a través del sitio web www.textosescolares.cl, indicando su interés en utilizar los textos de este programa. Posteriormente, los docentes eligen, entre las alternativas propuestas de textos, los que mejor se acomoden a sus propósitos educativos. Aquellos establecimientos educacionales que no participan en el proceso de elegibilidad, reciben los textos escolares que el Ministerio les asigna.

Los títulos adquiridos como resultante de los pasos anteriores ingresan entonces a la distribución, proceso que se realiza junto con el inicio de cada año escolar y en el cual los libros son enviados a todos y cada uno de los establecimientos inscritos.

Por lo general, el MINEDUC selecciona dos editoriales, de las cuales los docentes deben elegir un texto por cada asignatura y nivel de aprendizaje. Aunque existe autonomía de parte de los profesores para la selección de textos, sucede que la mayoría de los establecimientos escogen los mismos libros, provocando que gran parte de la población escolar en Chile utilice textos iguales. A su vez, no es requisito que una misma editorial sea utilizada en una

[15] MINEDUC: Ministerio de Educación.

asignatura y para todos los niveles, por eso es que en nuestra muestra de textos escolares, todos son de Educación Matemática, pero no todos pertenecen a la misma editorial.

Cada temporada se efectúa, además, un seguimiento de uso, destinado a que cada año la calidad de los textos se incremente y el proceso gane en eficiencia.

Posteriormente, el establecimiento debe participar en los procesos de Acreditación, Elegibilidad y Distribución para recibir los textos en forma oportuna.

Procesos de Textos Escolares

Acreditación

El Proceso de Acreditación permite identificar a los establecimientos educacionales que desean usar los textos escolares proporcionados por el Ministerio de Educación.

A través de la Acreditación, los establecimientos se comprometen a recibir los textos que distribuye el ministerio, entregarlos a cada uno de los estudiantes y a utilizarlos en el proceso pedagógico con sus alumnos.

Elegibilidad

El Proceso de Elegibilidad requiere la participación activa de directivos y docentes en la selección de los libros de texto. Los profesores pueden elegir entre dos alternativas de textos escolares, con el propósito de optar a la que mejor se adapte a las prácticas pedagógicas, realidad estudiantil y proyecto educativo de cada establecimiento.

Distribución

El Ministerio de Educación envía directamente los textos escolares hasta cada uno de los establecimientos subvencionados y municipales que participan en el proceso. El éxito en esta etapa final depende del oportuno cumplimiento de cada uno de los pasos anteriores.

Seguimiento de Uso

Textos Escolares cuenta con varias líneas de investigación destinadas a obtener información específica acerca del uso que se le da a los textos y la opinión que tienen los docentes y los estudiantes de este material didáctico.

Evaluación técnica

El Ministerio cuenta con un riguroso Proceso de Evaluación de los textos ofertados, que vela por el cumplimiento de los requisitos y la calidad técnico-pedagógica de las distintas alternativas presentadas.

Fuente: http://portal.textosescolares.cl/website/index.php

El Ministerio de Educación adquiere textos escolares que permanecen en el sistema entre uno y cuatro años, según la asignatura y nivel de aprendizaje.

La mayoría de los textos escolares para la Enseñanza Básica tienen características de texto-cuaderno, es decir, contemplan espacios para que los estudiantes escriban en ellos, por tanto, deben ser renovados cada año. No así en los otros libros que entrega el Ministerio de Educación.

Antes de reimprimir los textos, el Ministerio realiza una corrección de estos para alinearlos a posibles ajustes realizados en el currículum nacional y/o para actualizar información que haya quedado obsoleta producto de los avances propios de cada disciplina. Una vez concluido este ciclo, se vuelve a iniciar un proceso de adquisición para los diferentes textos.

3.2. TÉCNICA DE ANÁLISIS DE DATOS

Nuestro estudio es una investigación no interactiva, conocida como investigación analítica, donde se estudian conceptos a través de un análisis de documentos (McMillan y Schumacher, 2005). El investigador identifica, estudia, y luego sintetiza los datos para proporcionar un conocimiento del concepto. En esta investigación el concepto analizado es el cero, y la fuente que proporciona los datos son textos escolares de Educación Matemática, considerados como documentos oficiales, por ser manuales previamente evaluados y aceptados por el ministerio de educación en Chile.

La técnica de análisis de datos corresponde a lo que Pérez (1994) denomina análisis de contenido. Para dicho autor el análisis de contenido puede considerarse como un instrumento de respuesta a la curiosidad del hombre por descubrir la estructura interna de la información, bien en su composición, su forma de organización o estructura, bien en su dinámica. Krippendorff (1990), conceptúa el análisis de contenido como una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a un contexto.

El análisis de contenido se sitúa en el ámbito de la investigación descriptiva, pretende descubrir los componentes básicos de un fenómeno determinado extrayéndolo de un contenido dado a través de un proceso que se caracteriza por el intento de rigor de medición (Pérez, 1994). Asimismo, trata de analizar y estudiar en detalle el contenido de una comunicación escrita, oral, visual; en nuestro caso se trata de una comunicación escrita, donde las unidades de análisis corresponden a cinco libros de textos, en palabras de Krippendorff (1990), serían unidades físicas.

En nuestra investigación, hemos analizado la presencia del cero en una muestra determinada de libros de textos escolares, con el propósito de identificar los contextos y situaciones en que se presenta el cero y así aportar conocimientos sobre el trato que le dan los autores de textos escolares. Esta información, presumimos, nos proporcionará con posterioridad, dilucidar algunas de las razones por las que nuestros alumnos chilenos no alcanzan la totalidad de los objetivos propuestos en el eje de aprendizaje de numeración, pues hemos comprobado que, presentan serios problemas en la adquisición del sistema de numeración, siendo uno de los obstáculos la incomprensión del cero.

La unidad de análisis primaria, son los cinco libros de textos escolares seleccionados. En ellos identificamos todas las actividades matemáticas donde el cero se encuentra presente, y cada uno de estos elementos fue ubicado en categorías, previamente establecidas, es decir, fueron categorizados.

Se entiende por categorización la clasificación de los elementos de un conjunto a partir de unos criterios previamente definidos. Estos elementos o dimensiones son cada uno de los que comprende una variable cualitativa. Por tanto, una categoría es la noción general que representa un conjunto o una clase de significados determinados (Pérez, 1994).

Para la elaboración de las categorías se tomaron en cuenta las reglas sugeridas por Pérez (1994). Reglas que indican formalmente cómo se incluye cada unidad de análisis en una categoría determinada.

- *Homogeneidad*. Todas las categorías deben tener entre sí una relación lógica con la variable que se considera.
- *Utilidad*. El conjunto total debe abarcar todas las posibles variaciones y, por lo tanto, permitir la clasificación de todas las observaciones.
- *Exclusión mutua*. Debe haber un lugar y sólo uno para codificar cualquier respuesta.
- *Claridad y concreción*. Se deben expresar con términos sencillos y directos de modo que su intención sea clara y no dé lugar a varias interpretaciones.

Una vez clasificados todos los elementos en categorías, se elaboraron tablas de frecuencia, de esta manera traducimos las categorías verbales en categorías numéricas. Las categorías definidas y las tablas de frecuencia se encuentran en el anexo II, III y IV, páginas 71, 73 y 83 respectivamente.

Según Buendía y Colás (1994), la tendencia imperante aboga por la independencia entre el diseño de investigación y el análisis de datos. Esta relativa independencia posibilita establecer muy distintas combinaciones entre tipos de diseños y modalidades de análisis. Desde esta perspectiva resulta correcto e incluso conveniente la aplicación de tratamientos estadísticos a diseños cualitativos o la cuantificación de datos cualitativos.

En síntesis, nuestro diseño de investigación es cualitativo-interpretativo como se explicó en el apartado anterior. Utilizando el análisis de contenido como técnica de análisis de datos, lo que nos ha permitido realizar una cuantificación de datos cualitativos.

3.3. UNIDADES DE ANÁLISIS

Como ya hemos señalado las unidades de análisis primarias han sido los cinco textos escolares de Educación Matemática, correspondientes a los niveles de 1º a 5º Básico (Primaria en España).

El elemento que se ha analizado es el cero, por tanto, como unidad secundaria de análisis han sido todas las actividades matemáticas donde se registra el cero. Lo que nos ha llevado elaborar cuatro categorías principales:

A. **Cero, cifra única.** Entendiendo como cifra, al signo o carácter que representa a cada uno de los diez primeros números.

B. **Cero, cifra componente de un número.** El cero representa la función de ausencia de cantidad y presencia de posición como cifra en un número.

La diferencia entre ambas categorías, radica en que en A el cero es presentado como un elemento único, en cambio en B el cero forma parte de un número.

C. **Representaciones.** El cero ha sido modelado matemáticamente, en sus dos contextos, como cifra única y como componente de un número.

D. **Operaciones Aritméticas en los naturales.** El cero es un número y como tal está presente en las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división. Actuando como cifra única y como cifra dentro de un número.

En la figura Nº1 se visualizan cuatro unidades de análisis, donde A y B corresponden a los ejes principales, ambas unidades indican la función que posee el cero. En A, aparece como única cifra, y en B se registra indicando la presencia de posición dentro de un número. C, corresponde a las representaciones que ha tenido el cero, en sus dos modalidades (A y B), lo cual queda representado con las líneas punteadas, para referirnos a que el cero posee representaciones como única cifra y como cifra componente de un número. Lo mismo sucede con D, las operaciones aritméticas en los naturales, donde el cero actúa como única cifra y como cifra componente de un número.

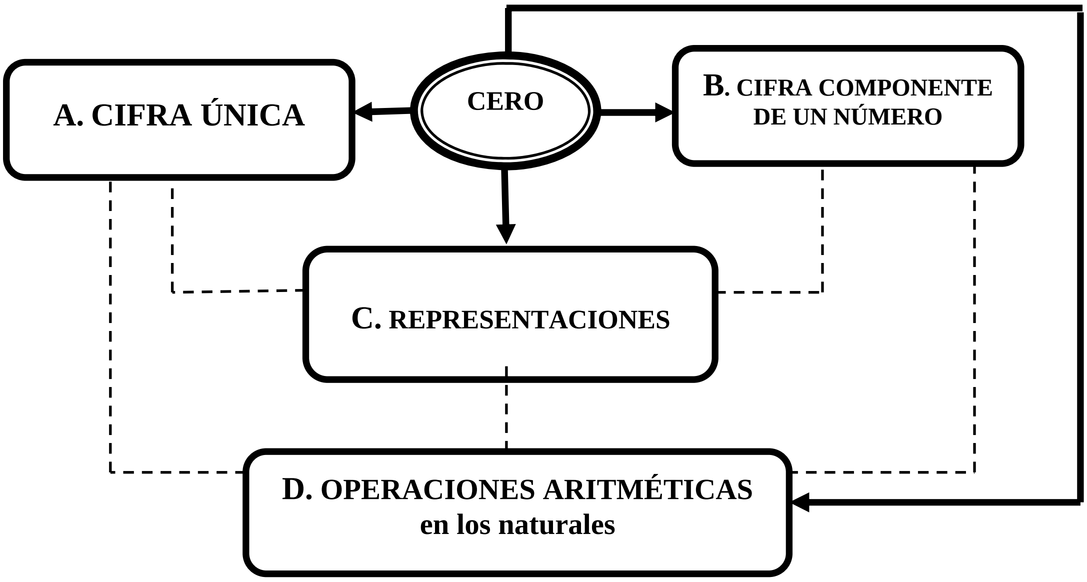


Figura Nº1.

Las líneas punteadas indican la unión entre los cuadros señalados, representando un doble mensaje, comunican que en C (Representaciones) y en D (Operaciones aritméticas), el cero se presenta en sus dos modalidades.

A cada una de estas cuatro unidades (A, B, C, y D), le corresponden subcategorías:

A. CIFRA ÚNICA A.1. Cardinal A.2. Relación de orden A.3. Origen de magnitud A.4. Tecla
B. CIFRA COMPONENTE DE UN NÚMERO B.1. Lectura B.2. Escritura: a) Símbolos alfabéticos b) Símbolos numéricos

B.3. Aproximación B.4. Relación de orden B.5. Unidades de medida B.6. Valor posicional
C. REPRESENTACIONES C.1. Representaciones del cero como cifra única C.2. Representaciones del cero como cifra componente de un número C.3. Expresión aditiva de un número C.4. Expresión polinómica de un número
D. OPERACIONES ARITMÉTICAS, EN LOS NATURALES. D.1. El cero es término D.2. Múltiplos de 10 D.3. Potencias de 10 D.4. Como cifra de un número D.5. Redondeos

Como la categoría D, hace mención a las operaciones aritméticas dentro de los naturales, hemos elaborado categorías por cada una de las operaciones, para especificar en qué términos de la adición, sustracción, multiplicación, y división, el cero se encuentra como: término de una operación, como múltiplo de 10, como potencia de 10, como cifra de un número y al resolver operaciones aritméticas por redondeo. Lo que se detalla a continuación.

D.1. El cero es término

ADICIÓN	SUSTRACCIÓN	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
Uno de los sumandos es cero	Resto es cero	Uno de los factores es cero	*(no se registra)*
Todos los sumandos son cero	Sustraendo es cero	Todos los factores son cero	

D.2. Múltiplos de 10

ADICIÓN	SUSTRACCIÓN	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
Los sumandos son múltiplos de 10	Minuendo y sustraendo son múltiplos de 10	Ambos factores son múltiplos de 10	Dividendo y divisor son múltiplos de 10
Uno de los sumandos es múltiplo de 10	Minuendo es múltiplo de 10	Un factor es múltiplo de 10	Dividendo es múltiplo de 10
La suma es múltiplo de 10	Sustraendo es múltiplo de 10	El producto es múltiplo de 10	Divisor es múltiplo de 10

D.3. Potencias de 10

ADICIÓN	SUSTRACCIÓN	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
La suma es una potencia de 10	Minuendo es una potencia de 10	Potencia de 10 en los factores	Dividendo es una potencia de 10
Un sumando es potencia de 10	Sustraendo es una potencia de 10	Una potencia de 10 por un múltiplo de 10	Divisor es una potencia de 10
			Cociente es una potencia de 10
			Dividendo, divisor y cociente son potencias de 10

D.4. Como cifra de un número

ADICIÓN	SUSTRACCIÓN	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
Cero como cifra en los sumandos	Cero como cifra de un término	Cero como cifra de un factor	Cero como cifra del dividendo

D.5. Redondeos

ADICIÓN	SUSTRACCIÓN	MULTIPLICACIÓN	DIVISIÓN
Suma por aproximación	Resta por aproximación	Multiplicación por aproximación	División por aproximación

En la figura Nº1 se presentan las cuatro principales categorías, en la figura Nº2 se observan las subcategorías de cada una de ellas.

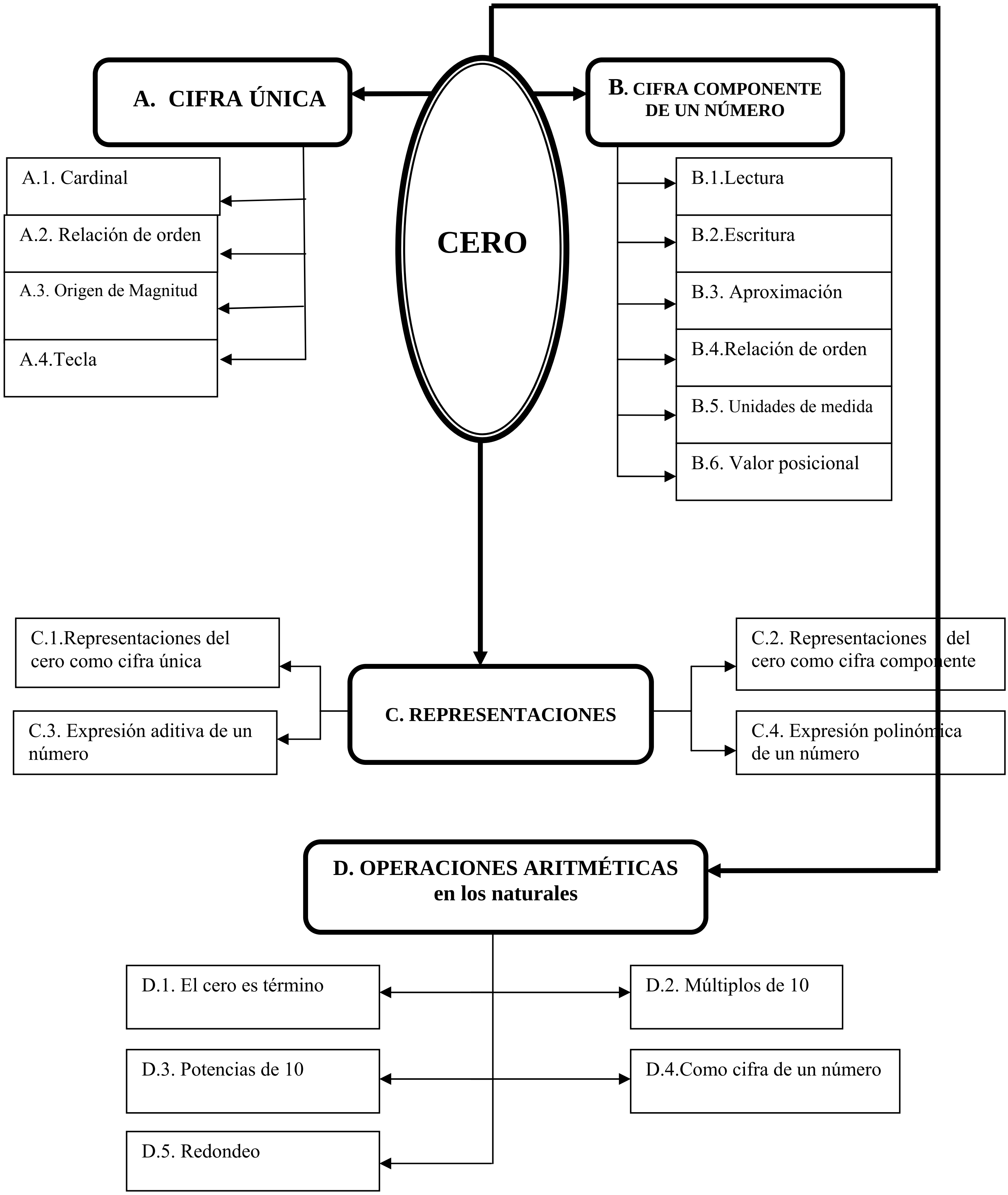

A. CIFRA ÚNICA
A.1. Cardinal
A.2. Relación de orden
A.3. Origen de Magnitud
A.4.Tecla
CERO
B. CIFRA COMPONENTE DE UN NÚMERO
B.1.Lectura
B.2.Escritura
B.3. Aproximación
B.4.Relación de orden
B.5. Unidades de medida
B.6. Valor posicional
C.1.Representaciones del cero como cifra única
C.3. Expresión aditiva de un número
C. REPRESENTACIONES
C.2. Representaciones del cero como cifra componente
C.4. Expresión polinómica de un número
D. OPERACIONES ARITMÉTICAS en los naturales
D.1. El cero es término
D.2. Múltiplos de 10
D.3. Potencias de 10
D.4.Como cifra de un número
D.5. Redondeo

Figura Nº2.

CAPITULO IV

ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

Como se explicó en el capítulo anterior, por cada categoría se elaboraron tablas de frecuencias. Para ello se identificaron todas las actividades en que se encuentra presente el cero, y se clasificaron de acuerdo a sus características en categorías. Cada actividad fue considerada como una unidad, y la acumulación de estas unidades fueron registradas en las tablas de frecuencia, que se encuentran en el anexo IV, página 83. Comentamos en este capítulo el análisis realizado a dichas tablas de frecuencias a la vez que se proporciona una explicación de cada una de las categorías.

Para referirnos a los textos escolares, los mencionaremos según al curso que corresponde, denominando: 1º, 2º, 3º, 4º, y 5º, a los textos de 1º Básico, 2º Básico, 3º Básico, 4º Básico y 5º Básico respectivamente.

A. CIFRA ÚNICA

Esta categoría contempla todos aquellos ejercicios o actividades en que el cero se presenta como única cifra.

A.1.CARDINAL. Hace referencia a la cardinalidad de un conjunto (o colección). El cero es el cardinal que representa el conjunto vacío. El cero, aparece como cardinal solo en los textos de 1º y 3º, en ambos textos se registran solo dos ejercicios. En ningún otro texto se encuentra presente como cardinal.

A.2. RELACIÓN DE ORDEN. El cero aparece registrado como el primer número de la secuencia numérica. Es en el texto de 1º en donde aparecen más actividades donde se contempla el cero como el primer número de la secuencia numérica, con ocho ejercicios. Luego, se registra una sola actividad en el texto de 4º, en los demás textos no aparece ninguna actividad de relación de orden contemplando al cero.

A.3. ORIGEN DE MAGNITUD. El cero se registra como el origen de medidas en unidades de medida estándares. En los libros de 1º, 2º, 3º, y 4º aparece el cero en actividades en que se registra como el origen de medidas estándares. Es en el libro de 4º donde se encuentran más actividades de esta subcategoría con nueve ejercicios, y en el texto de 5º no se registra ninguna.

A.4. TECLA. El cero es registrado como tecla. En los textos de 1º, 2º y 3º, aparecen una o dos actividades de esta subcategoría, en los de 4º y 5º no se contempla ninguna.

B. CIFRA COMPONENTE DE UN NÚMERO

A diferencia de la categoría anterior, aquí el cero se encuentra presente como cifra de un número, cumpliendo las funciones de ausencia de cantidad y presencia de posición.

B.1. LECTURA de números con presencia del cero dentro del número.

Esta subcategoría contempla todas las actividades en que se solicita leer números en voz alta que contengan cero en una o más de sus cifras. Los números aparecen registrados en símbolos numéricos. El texto de 1º no registra ninguna actividad de esta subcategoría. Los textos de 2º, 3º, 4º y 5º si la contemplan, siendo el texto de 2º el que registra mayor cantidad de actividades de esta subcategorización, con un total de diecisiete ejercicios.

B.2. ESCRITURA de números en símbolos alfabéticos o numéricos.

Esta clasificación considera todas las actividades en que se solicita escribir números, ya sea utilizando símbolos alfabéticos o numéricos.

Utilizando símbolos alfabéticos, se registran ejercicios en los libros de 2º, 3º, 4º y 5º, en el de 1º no se contemplan actividades de esta clase. El de 3º y el de 5º registra la mayor cantidad de esta subcategoría, en ambos existen 5 actividades.

Utilizando símbolos numéricos, es el texto de 5º el que posee la mayor cantidad de actividades de esta clase, con un número de doce ejercicios, a diferencia de los textos de 2º y 3º que poseen solo una actividad, y en los textos de 1º y 4º se encuentra ausente.

B.3. APROXIMACIÓN. Redondeo de un número a la decena, centena, unidad de mil, decena de mil más cercana.

Los textos que presentan mayor cantidad de ejercicios en los cuales se solicita aproximar números, son los de 4º y 5º, quienes registran treinta y nueve y veinticuatro respectivamente. A diferencia de los textos de 2º y 3º, que presentan uno y cinco. En el texto de 1º, este tipo de actividad se encuentra ausente.

B.4. RELACIÓN DE ORDEN. Ordenar números que contienen cero en una ó más de sus cifras.

En esta subcategoría se contemplan todas las actividades en que se solicita ordenar números que contengan cero en una o más de sus cifras, ya sea de menor a mayor, o de mayor a menor. En el de 1º, no se registran actividades de esta naturaleza. Es en el de 4º, donde aparecen más actividades de relación de orden, registrándose cuarenta y cinco ejercicios. A diferencia de los de 2º con nueve, 3º con quince y 5ºcon los diecisiete.

B.5. UNIDADES DE MEDIDA. Realizar equivalencias entre unidades de medida estandarizadas.

Las actividades de esta naturaleza, consisten en realizar equivalencias entre unidades de medida estandarizadas, la más usual es la unidad de longitud, donde se solicita realizar equivalencias entre metro, decímetro y centímetro. El texto de 4º es el único que contempla actividades de esta clase, cincuenta ejercicios.

B.6. VALOR POSICIONAL. Identificar posición y valor del cero dentro de un número.

En esta subcategoría, se contempla aquella actividad en que el alumno debe identificar la posición y el valor que posee el cero dentro de un número. El texto de 4º, es el único que presenta actividades de esta clase, registrando diez ejercicios. Ningún otro lo considera.

C. REPRESENTACIONES en un modelo.

Esta categoría contempla todas aquellas actividades en que el cero es modelado.

C.1. REPRESENTACIONES DEL CERO COMO CIFRA COMPOMENTE DE UN NÚMERO.

El cero se presenta como cifra única en la recta numérica, y se encuentra en la regla como modelo de la recta numérica. En todos los textos de la muestra se registran dibujos de la regla en donde el cero aparece como única cifra, la mayor cantidad de registros se encuentran en los textos de 1º y 4º.

C.2. REPRESENTACIONES DEL CERO COMO CIFRA COMPOMENTE DE UN NÚMERO

A diferencia de la subcategoría anterior, en esta clase el cero se encuentra cumpliendo las funciones de presencia de posición y ausencia de cantidad en un número. En los textos analizados, se registran dos modelos: el ábaco y las monedas y billetes del sistema monetario chileno. En el dibujo del ábaco se observa las barras y argollas, y en la barra correspondiente al cero, no hay argollas. El sistema monetario chileno, se caracteriza por tener billetes y monedas múltiplos de 5, siempre utilizando números enteros, y no décimos como el euro. Los valores de las monedas y billetes chilenos son: 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000, y 20000. Los textos de 3º, 4º y 5º contemplan actividades de esta naturaleza, en ellos se solicita representar números con monedas y billetes chilenos, o en el ábaco, 3º contiene nueve ejercicios, 4º tiene catorce y 5º cuatro. Los textos de 1º y 2º, no registran ejercicios de esta clase.

C.3. EXPRESION ADITIVA DE UN NÚMERO

Esta subcategoría contempla todas aquellas actividades en que se solicita componer o descomponer un número de acuerdo a su valor aditivo. Todos los textos presentan ejercicios de esta clase. En el de 1º hay once, en el de 2º nueve, en 3º quince, 4º doce y 5º diecinueve.

C.4. EXPRESIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO

A diferencia de la subcategoría anterior, aquí se solicita componer o descomponer un número de acuerdo a su valor multiplicativo. Los textos de 3º y 4º, son los únicos que registran esta clase de actividades, en el de 3º se registran solo dos ejercicios de este tipo, y en el de 4º, trece ejercicios.

D. OPERACIONES ARITMÉTICAS EN LOS NATURALES

Como se explicó en el capítulo IV, cada subcategoría (D.1. cero es término, D.2. múltiplos de 10, D.3. potencias de 10, D.4.omo cifra de un número, y D.5.redondeos) de esta clase ha sido analizada según su presencia en cada operación aritmética: adición, sustracción, multiplicación y división. La descripción de las subcategorías se realizó pensando en el desarrollo de cada operación por medio del algoritmo convencional. Es decir, en la adición y sustracción los términos son ubicados en forma vertical. Y en la multiplicación y división en forma horizontal. Además, se realizan descripciones detalladas de las características de los términos de cada operación. Para mayor comprensión de la descripción de las subcategorías de la categoría D revisar el anexo III, página 73.

D.1. EL CERO ES TÉRMINO

Esta subcategoría contempla todas las actividades en que el cero aparece como uno o más de los términos de la operación.

ADICIÓN

a) *Uno de los sumandos es cero*, actuando como elemento neutro de la adición. Este tipo de actividad se registra en los textos de 1º, 2º y 5º, se encuentra ausente en 3º y 4º. Sin embargo, aparece solo un ejercicio de este tipo en 1º y 5º, en el de 2º aparecen cuatro.
b) *Todos los sumandos son ceros*, por tanto, el resultado es cero. Solo se registra un ejercicio de esta clase en el texto de 5º, ningún otro texto lo contiene.

SUSTRACCIÓN

a) *Resto es cero*, minuendo y sustraendo son iguales, por tanto, el resto es cero. Los textos de 1º, 4º y 5º, registran ejercicios de esta naturaleza. 4º y 5º, registran un solo ejercicio, y en 1º solo dos.

b) *Sustraendo es cero*, y el resto es igual al minuendo. El texto de 1º, es el único que registra ejercicios de este tipo, registrando diez ejercicios. En ningún otro texto, aparece el cero como sustraendo.

MULTIPLICACIÓN

a) *Uno de los factores es cero*, siendo cero el producto. El cero actúa como elemento absorbente de la multiplicación. Los textos de 4º y 5º son los que presentan este tipo de ejercicios, se registran dos en el de 4º y diecisiete en el de 5º.

b) *Todos los factores son ceros*, por tanto, el producto es cero. Esta clase de ejercicios no se registra en ninguno de los textos analizados.

D.2. MÚLTIPLOS DE 10

Uno o más de los términos de la operación es múltiplo de diez. Consideramos múltiplos de 10, a todos aquellos números que poseen dos o más cifras terminados en cero, sin ser potencias de 10.

ADICIÓN

a) Los sumandos son múltiplos de 10.

Todos los sumandos son múltiplos de diez con igual o diferente cantidad de cifras.

i. Los ejercicios más simples es cuando todos los sumandos son múltiplos de 10, y contienen igual cantidad de cifras. Además, poseen igual cantidad de ceros ubicados en el mismo orden posicional, por tanto, en el algoritmo convencional donde los sumandos se ubican en forma vertical, los ceros se suman con ceros, y el resultado presenta la misma cantidad de cifras que los sumandos, porque la suma no aumenta en un orden posicional al de los sumandos. Todos los textos registran aproximadamente entre diez y veinte ejercicios con estas características.

ii. Otro tipo de ejercicio, es cuando todos los sumandos son múltiplos de 10, pero contienen diferente cantidad de cifras. Sin embargo, presentan el mismo número de ceros en sus cifras y todos ubicados en el mismo orden posicional. La diferencia con el anterior, es que la suma mantiene el número de cifras del sumando mayor, o puede aumentar en un orden a este sumando. Los textos de 4º y 5º presentan más de diez ejercicios de esta naturaleza, a diferencia de 1º, 2º y 3º que registran dos, uno y tres respectivamente.

iii. En este subtipo, los sumandos son múltiplos de 10, de igual cantidad de cifras, pero diferente cantidad de ceros, por tanto, al ubicar verticalmente los sumandos para desarrollar la suma, en el orden de las unidades todos serán ceros, a diferencia con lo que sucede en el orden de las decenas, donde se debe sumar cero más cualquier dígito diferente de cero. En el texto de 5º se observan cuatro ejercicios de esta clase, ningún otro texto presenta ejercicios de este subtipo.

iv. La diferencia que presenta esta clase de ejercicios con el anterior, es que los sumandos poseen diferente cantidad de cifras y de ceros, por tanto, la suma mantiene el número de cifras del sumando mayor, o puede aumentar en un orden a este sumando. Los textos que 4º y 5º son los únicos que registran esta clase, con y siete ejercicios repectivamente.

b) Uno de los sumandos es múltiplo de 10.

i. Los ejercicios consisten en que solo un sumando es múltiplo de 10, por tanto, los ceros pueden ser sumados con cualquier dígito diferente de cero o igual a cero, cuando los sumandos poseen uno o más ceros en sus cifras. Los textos de 1º, 2º, 3º y 5º registran esta clase de ejercicios. Destacando el texto de 3º, por ser el que registra veintitrés ejercicios, en cambio los demás registran diez ejercicios aproximadamente. En el de 4º no se registran.

c) La suma es múltiplo de 10.

i. Ninguno de los sumandos es múltiplo de 10, en cambio la suma si lo es. El texto de 5º, es el único que registra este tipo de suma, presentando dos ejercicios de esta naturaleza.

SUSTRACCIÓN

a) Minuendo y sustraendo son múltiplos de 10.

Minuendo y sustraendo son múltiplos de diez con igual o diferente cantidad de cifras.

i. Ambos términos poseen <u>igual cantidad de cifras y de ceros</u>, todos ubicados en el mismo orden posicional. Por tanto, es la resta más fácil de resolver con ceros, porque al estar ubicados en el algoritmo convencional en forma vertical, al restar de derecha a izquierda, se resta cero menos cero, y luego los dígitos diferentes de cero. Todos los textos registran ejercicios de esta naturaleza, en 2º y 5º se registran seis ejercicios, en 3º y 4º solo dos, y en 1º ocho ejercicios.

ii. Los términos de la resta poseen <u>igual o diferente cantidad de cifras</u>, por tanto, al ubicar los números en forma vertical para resolver el algoritmo, existe la posibilidad de restar cero menos cero, siendo dígitos iguales. Un dígito mayor que cero menos cero, siendo el dígito del sustraendo menor que el ubicado en el minuendo. A esto se refiere cuando en la descripción de la categoría en el anexo III dice: *"los dígitos que componen el sustraendo son <u>menores y/o iguales</u> a los dígitos ubicados en el mismo orden en el minuendo".* Los textos de 2º, 3º, 4º, y 5º, son quienes presentan ejercicios con estas características. En el de 1º, no se registran. 2º contiene tres ejercicio, 3º solo dos, 4º uno y 5º registra cuatro.

iii. Ambos términos poseen <u>igual o diferente cantidad de cifras</u>. Los dígitos que componen el sustraendo, en comparación con los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden posicional, presentan las posibilidades de ser: <u>mayores y menores; mayores e iguales; mayores, menores e iguales</u>; por ejemplo: al restar cero con cero en el orden de las unidades son dígitos iguales, y luego en el orden de las decenas al restar un número diferente de cero con cero es menor el dígito del sustraendo, y al restar cero menos cualquier dígito distinto de cero, es mayor el dígito del sustraendo. Ejercicios con estas características se registran en los textos de 2º, 3º, 4º y 5º. Siendo en el de 5º, el que presenta más de diez ejercicios de esta clase, con trece; a diferencia de 2º, 3º, y 4º que contienen siete, dos y ocho respectivamente.

b) *Minuendo es múltiplo de 10.*

i. Minuendo posee dos o más cifras y el sustraendo pertenece al orden de las unidades siendo diferente de cero. Por tanto, el dígito del sustraendo es mayor que el dígito del minuendo ubicado en el mismo orden, ya que, el dígito del sustraendo siempre será mayor que cero. Los textos de 2º y 5º, son los únicos que registran ejercicios de esta clase, registrando dos y tres respectivamente.

ii. Minuendos y sustraendo poseen dos o más cifras. El sustraendo puede presentar dígitos mayores, menores e iguales; iguales y menores; iguales y mayores; menores y mayores, en comparación con los dígitos del minuendo ubicados en el mismo orden. Por ejemplo: cuarenta menos treinta y dos (40-32), el 2 del sustraendo es mayor que el 0 del minuendo, y el 3 del sustraendo es menor que el 4 del minuendo, en este ejercicio se cumple que los dígitos son mayores y menores. Los textos de 2º, 3º, 4º, y 5º registran este tipo de ejercicios, 2º y 3º registran cuatro ejercicios, 4º solo uno y 5º tres.

c) *Sustraendo es múltiplo de 10.*

i. Minuendo no contiene cero en sus cifras. Todos los dígitos del sustraendo son menores que los del minuendo. Los textos de 1º, 2º y 5º registran ejercicios de esta naturaleza. Siendo el de 1º, el que registra mayor cantidad, con cuatro ejercicios, 2º contiene solo uno y 5º dos.

ii. El minuendo no contiene cero en sus cifras. Los dígitos que componen el sustraendo son menores e iguales en comparación con los dígitos del minuendo ubicados en el mismo orden. En el texto de 2º se registra un ejercicio de esta naturaleza, en el resto de textos no se observa.

MULTIPLICACIÓN

a) *Ambos factores son múltiplos de 10.*

i. Al ser ambos factores múltiplos de 10, el producto es múltiplo de 10. Los textos de 3º, 4º, y 5º presentan estos ejercicios. Siendo en el texto de 5º, el que más ejercicios de esta clase registra, con once ejercicios, a diferencia de 3º y 4º, que presentan dos ejercicios cada uno.

b) Un factor es múltiplo de 10.

i. Un factor es múltiplo de 10, y el otro pertenece al orden de las unidades. El producto es múltiplo de 10. Los textos de 3º, 4º, y 5º, presentan ejercicios de esta naturaleza. Siendo el de 5º el que registra cuarenta y dos ejercicios, a diferencia de 3º y 4º que registran diez y veinticinco respectivamente.

ii. Un factor es múltiplo de 10, y el otro tiene dos o más cifras. El producto es múltiplo de 10. Los textos de 3º, 4º y 5º son quienes registran este tipo de ejercicios. 4º y 5º, registran trece ejercicios, y 3º solo dos.

c) El producto es múltiplo de 10.

i. El producto es múltiplo de 10, porque uno de los factores es par y el otro es múltiplo de 5. Los textos de 3º, 4º y 5º presentan ejercicios de esta naturaleza. Destacando en el texto de 5º la mayor cantidad de ejercicios, registrando quince, en comparación con dos que contiene el de 3º, y cinco el de 4º.

DIVISIÓN

a) Dividendo y divisor son múltiplos de 10.

i. Dividendo, divisor y cociente son múltiplos de 10, y el resto es cero. Los textos de 3º, 4º, y 5º registran ejercicios de esta naturaleza, pero muy pocos, 4º y 5º registran uno solo, y 3º registra solo dos.

ii. Dividendo y divisor son múltiplos de 10, el cociente pertenece al orden de las unidades diferente de cero, y el resto es cero. Los textos de 3º y 5º registran ejercicios de esta clase. En 3º aparece uno, a diferencia de 5º donde se registran doce.

iii. Dividendo y divisor son múltiplos de 10, el cociente posee dos o más cifras diferentes de cero. El resto es cero. Los textos de 3º, 4º y 5º registran esta clase de ejercicios, siendo 5º el que presenta más, con cinco. A diferencia de 3º y 4º que contienen solo uno.

b) Dividendo es múltiplo de 10

i. El dividendo posee dos o más cifras y el divisor posee solo una. En el cociente no está el cero, y el resto es cero. Los textos de 3º, 4º y 5º registran esta clase de ejercicios. Siendo el de 3º quien más registra con once ejercicios, 4º contiene solo uno, y 5º posee nueve.

ii. Dividendo posee dos o más cifras y divisor posee dos o más cifras diferente de cero. En el cociente no está el cero, y el resto es cero. El texto de 5º es el único que registra ejercicios de esta naturaleza, con dos ejercicios.

iii. Divisor posee una sola cifra diferente de cero. Cociente es múltiplo de 10 y el resto es cero. En los textos de 3º, 4º y 5º se registra este tipo de ejercicios, siendo el de 5º quien presenta más ejercicios esta clase con veinte, a diferencia de los otros que contienen nueve y siete respectivamente.

iv. Divisor posee una o más cifras diferentes de cero, cociente es múltiplo de 10, resto es cero. Solo en el texto de 5º se registra este tipo de ejercicios, en ningún otro texto aparece, 5º contiene ocho ejercicios

v. Divisor posee una o más cifras diferentes de cero, cociente no está presente el cero, resto no es cero. Solo en el texto de 5º se registra este tipo de ejercicios, en ningún otro texto aparece, 5º contiene cinco ejercicios

vi. Divisor es múltiplo de 5, cociente es múltiplo de 10, resto es cero. El texto de 3º es el único que registra un ejercicio de esta naturaleza con un ejercicio.

vii. Divisor es múltiplo de 5, cociente es múltiplo de 5, resto es cero. Los textos de 3º y 5º son los únicos que registran ejercicios de esta naturaleza, uno y dos respectivamente.

viii. Divisor es 2, cociente es múltiplo de 10, resto es cero. Los textos de 3º, 4º y 5º son quienes registran este tipo de ejercicios. Destacando el texto de 5º, que registra diecinueve ejercicios, a diferencia de 3º y 4º que solo registran uno.

c) Divisor es múltiplo de 10

i. Dividendo y cociente no poseen cero en sus cifras, resto no es cero. Los textos de 3º, 4º, y 5º registran ejercicios con estas características; 3º y 5º registran dos, y 4º solo uno.

D.3. POTENCIAS DE 10

Uno o más de los términos de la operación es potencia de diez. Nos referimos a potencias de diez, a todos aquellos números formados por una unidad seguida de ceros.

ADICIÓN

a) La suma es una potencia de 10.

i. Sumandos poseen igual cantidad de cifras y de ceros. Los ceros están ubicados en el mismo orden posicional. La suma es una potencia de 10. El texto de 2º es el único que registra ejercicios de esta naturaleza, presentando quince ejercicios.

ii. Sumandos poseen diferente cantidad de cifras, y no contienen ceros. La suma es una potencia de 10. Los textos de 1º y 5º presentan ejercicios con estas características. 1º contiene solo uno, y 5º contiene cuatro.

b) Un sumando es potencia de 10.

i. Uno sumando es potencia de diez, y el otro es múltiplo de 10. El texto de 5º es el único que registra ejercicios de esta clase, con once ejercicios.

SUSTRACCIÓN

a) Minuendo es una potencia de 10

i. Minuendo contiene dos o más cifras, y es un orden mayor que el sustraendo. Sustraendo y resultado son múltiplos de 10. Los textos de 1º, 2º, 3º y 4º presentan ejercicios con estas características; 2º y 4º registran nueve cada uno, a diferencia de de 1º que solo presenta uno y 3º, solo dos.

ii. Minuendo contiene dos o más cifras, y es un orden mayor que el sustraendo. Sustraendo y resultado no contienen ceros en sus cifras. El texto de 5º es el único que registra esta clase de ejercicios, con dos de ellos.

iii. Minuendo contiene dos o más cifras, sustraendo posee una sola cifra del orden de las unidades distinto de cero, el resultado no contiene cero en sus cifras. Los textos de 2º, 3º y 5º registran esta clase de ejercicios, siendo el de 5º el que contiene más ejercicios con estas características, registrando cuatro ejercicios a diferencia de 2º y 3º que registran uno solo.

b) Sustraendo es una potencia de 10.

i. Minuendo es un orden mayor que el sustraendo, el resultado no contiene ceros. El texto de 4º registra un solo ejercicio de esta naturaleza, ningún otro texto lo considera.

ii. Minuendo es un orden mayor que el sustraendo con la presencia de cero en una de sus cifras, el resultado no contiene ceros. El texto de 4º registra cuatro ejercicios de esta clase, ningún otro texto lo considera.

iii. Minuendo y resultado son múltiplos de diez. Los textos de 4º y 5º registran esta clase de ejercicios, 4º registra cuatro, y 5º solo uno.

MULTIPLICACIÓN

a) Potencia de 10 en los factores

i. Un factor es potencia de diez y el otro pertenece al orden de las unidades, el producto es múltiplo de diez. Los textos de 3º, 4º y 5º presentan estos ejercicios, con veinte, catorce y veinte y uno respectivamente.

ii. Un factor es potencia de diez y el otro posee dos o más cifras, el producto es múltiplo de diez. El texto de 5º es el único que presenta ejercicios de esta clase, registrando catorce ejercicios.

iii. Factores y producto son potencias de diez. Los textos de 3º, 4º y 5º son quienes registran ejercicios de este tipo, 3º y 5º contienen dos, y 4º cuatro.

b) Una potencia de 10 por un múltiplo de 10

i. Producto es múltiplo de diez. Los textos de 3º y 5º presentan ejercicios de esta clase, 3º registra cinco ejercicios y 5º registra nueve.

DIVISIÓN

a) Dividendo es una potencia de 10.

i. Divisor pertenece al orden de las unidades, cociente es múltiplo de 10 y el resto es cero. Los textos de 4º y 5º contienen ejercicios con estas características, 4º registra cuatro ejercicios, y 5º solo uno.

b) Divisor es una potencia de 10

i. Dividendo y divisor contienen la misma cantidad de ceros. Cociente no posee cero y el resto es cero. Los textos de 3º, 4º y 5º presentan ejercicios de esta naturaleza, 3º y 5º contienen cuatro y 4º solo tres.

ii. Dividendo y cociente son múltiplos de 10, el resto es cero. Los textos de 3º y 5º contienen esta clase de ejercicios, con uno y tres respectivamente.

iii. Dividendo y cociente son múltiplos de 10, el resto no es cero. Solo el texto de 5º registra ejercicios con estas características, con cuatro.

c) Cociente es una potencia de 10.

i. Dividendo contiene el dígito del divisor seguida de ceros, divisor contiene una sola cifra perteneciente al orden de las unidades diferente de cero, el resto es cero. Los textos de 3º y 5º presentan esta clase de ejercicios, con seis y siete respectivamente.

ii. Dividendo y divisor contienen diferente cantidad de cifras, poseen en el mismo orden los mismos dígitos seguidos de ceros. El resto es cero. Los textos de 3º y 5º contienen este tipo de ejercicio, 3º registra solo uno, y 5º contiene cinco.

d) Dividendo, divisor y cociente son potencias de 10.

i. Dividendo y divisor contienen diferente cantidad de cifras. El texto de 4º, es el único que registra ejercicios con estas características, con dos.

D.4. COMO CIFRA DE UN NÚMERO

Uno o más de los términos de la operación posee cero dentro de su número, sin ser múltiplo de 10 o potencia de 10.

ADICIÓN

a) Cero como cifra en los sumandos

i. Una o más de las cifras, ubicadas en el mismo orden, de los sumandos son ceros. En el resultado está presente el cero. Solo el texto de 5º registra ejercicios con estas características, registrando cuatro ejercicios.

ii. Uno de los sumandos posee cero en una o más de sus cifras. El otro sumando no posee cero. En el resultado no está presente el cero. El texto de 5º, es el único que registra esta clase de ejercicios, registrando solo dos.

SUSTRACCIÓN

a) Cero como cifra de un término.

i. Una o más de las cifras ubicadas en el mismo orden del minuendo y sustraendo son iguales, en el resultado está presente el cero. Los textos de 1º, 3º, 4º y 5º presentan esta clase de ejercicios. 1º y 5º registran tres ejercicios, y 3º y 4º registran solo uno.

ii. Minuendo contiene cero en una o más de sus cifras, sustraendo no contiene ceros. En el resultado no está presente el cero. Los textos de 2º, 4º y 5º presentan ejercicios de esta naturaleza. 2º y 4º registran solo uno, y 5º registra cinco.

iii. Minuendo contiene cero en una o más de sus cifras, sustraendo no contiene ceros. En el resultado si está presente el cero. El texto de 5º registra un solo ejercicio de esta clase, en ningún otro texto se presentan ejercicios con esas características.

iv. Minuendo no contiene cero en sus cifras, sustraendo contiene cero en una o más de sus cifras. En el resultado no está presente el cero. El texto de 5º registra tres ejercicios de esta naturaleza, ningún otro texto contiene este tipo de ejercicios.

v. Minuendo no contiene cero en sus cifras, sustraendo contiene cero en una o más de sus cifras. En el resultado si está presente el cero. El texto de 5º registra un ejercicio de esta naturaleza, ningún otro texto contiene este tipo de ejercicios.

vi. Minuendo y sustraendo contienen cero en una o más de sus cifras, en el resultado está presente el cero. El texto de 5º registra dos ejercicios con estas características, ningún otro texto lo contiene.

MULTIPLICACIÓN

a) Cero como cifra de un factor

i. En un factor, el cero se encuentra presente en una de sus cifras, en el producto no está presente el cero. Los textos de 4º y 5º contienen ejercicios de esta naturaleza, 4º registra solo uno, y 5º registra cuatro.

ii. En un factor, el cero se encuentra presente en una o más de sus cifras, en el producto si está presente el cero. El texto de 5º, es el único que registra este tipo de ejercicios, registrando diez ejercicios.

DIVISIÓN

a) Cero como cifra del dividendo

Dividendo y divisor no son múltiplos de diez.

i. El cero se ubica en una o más de las cifras centrales del dividendo, el cociente no contiene cero en sus cifras, el resto si es cero. Los textos de 3º y 5º contienen esta clase de ejercicios, 3º registra un solo ejercicio y 5º registra siete.

ii. El cero se ubica en una o más de las cifras centrales del dividendo, el cociente si contiene cero en sus cifras, el resto si es cero. El texto de 5º es el único que registra ejercicios de esta naturaleza, registrando tres ejercicios.

iii. El cero se ubica en una o más de las cifras centrales del dividendo, el cociente no contiene cero en sus cifras, el resto no es cero. El texto de 5º es el único que registra ejercicios de esta naturaleza, registrando cinco ejercicios.

D.5. REDONDEOS

En operaciones aritméticas por aproximación como redondear los términos de la operación aritmética a un orden específico y estimar el resultado.

i. SUMA POR APROXIMACIÓN. Redondear los sumandos a un orden posicional específico y realizar la suma. El resultado será una estimación. En los textos de 3º y 5º se registran ejercicios con estas características, el de 3º registra tres ejercicios y el de 5º, doce.

ii. RESTA POR APROXIMACIÓN. Redondear el minuendo y sustraendo a un orden posicional específico y realizar la resta. El resultado será una estimación. En los textos de 4º y 5º se registran ejercicios con estas características, el de 4º registra dieciocho ejercicios y el de 5º, tres.

iii. MULTIPLICACIÓN POR APROXIMACIÓN. Redondear los factores a un orden posicional específico y realizar la multiplicación. El resultado será una estimación. El texto de 5º es el único que registra ejercicios de esta naturaleza, registrando solo cinco.

iv. Redondear el dividendo y divisor a un orden posicional específico y realizar la división. El resultado será una estimación. Los textos de 4º y 5º contienen esta clase de ejercicios, 4º registra cinco ejercicios y 5º registra diecisiete.

CAPITULO V

CONCLUSIONES

Como se explicó en el capítulo II, en Chile se pretende que los alumnos de quinto básico, primaria en España, estén preparados para aplicar todos los principios del sistema de numeración y así generar nuevos números y operar con ellos sin dificultad. Para que lo anterior se cumpla, es necesario haber aprendido el sistema de numeración en profundidad en los años anteriores. Como quedó demostrado en el capítulo II, el cero es un número que se comporta de manera atípica en comparación con el resto de los números, provocando que muchos alumnos generalicen las propiedades de los números al cero, causando serios errores en la conceptualización del mismo; lo que impide que el sistema de numeración sea aprendido en forma correcta.

En el apartado 2.2 se determinan las especificidades del número cero, respecto al resto de los números, lo cual nos confirma que el cero es un número con entidad propia. Por tanto, en los libros de texto es fundamental que se registren ejercicios o actividades que contemplen todas estas especificidades. Al identificar los contextos numéricos, se observa que el cero no se encuentra presente en la secuencia verbal, al contar y en el contexto ordinal. Es importante entonces, que los alumnos reconozcan la ausencia del cero en estos contextos para que gradualmente comiencen a familiarizarse con la idea de que el cero es un número diferente.

Sin embargo, lo que nos interesa en este estudio es identificar los contextos y situaciones en que se presenta el cero en los textos seleccionados. En los textos analizados, encontramos la presencia del cero en los contextos numéricos de: cardinal, medida, y tecla, no aparece como código.

Como ya se explicó, en Chile los planes y programas especifican que los alumnos deben adquirir el sistema de numeración decimal en los cursos de 1º a 4º básico, y luego en 5º deben aplicar todo lo aprendido. Al centrarnos en el cero, los textos de 1º a 4º, deberían registrar ejercicios con todas aquellas especificidades del cero, para que en el texto de 5º los alumnos apliquen sus conocimientos sobre numeración en su totalidad. En el análisis de contenido realizado, lo primero que identificamos es que los textos contemplan al cero como cifra única, y como cifra componente de un numero.

Como cifra única, se presenta en los contextos de cardinal, relación de orden, origen de magnitud y como tecla. Los contextos de cardinal y relación de orden, son contextos importantes en el aprendizaje de los números. Como cardinal indica la ausencia de elementos, el cero es el único número que posee esta característica. Y en la relación de orden, es el primer número de los naturales, como se confirma en el axioma de Peano, al decir, que "cero no es sucesor de ningún número". Llama la atención que el cero como cardinal, solo se presenta en los textos de 1º y 3º básico, y por la cantidad de veces que aparece, su presencia no es relevante. Lo mismo sucede con la relación de orden, solo se registra en los textos de 1º y 4º. Concluimos que con la poca presencia que tiene el cero como cifra única en contextos de cardinal y relación de orden, es posible que nuestros alumnos no lo reconozcan como número. No obstante, el cero como origen de magnitud se presenta en los textos de 1º, 2º, 3º, y 4º; estando ausente en el de 5º, curso en el que se pretende apliquen todo lo ejercitado en los niveles anteriores. Esto nos lleva a pensar que la presencia del cero como cifra única, no es relevante en los textos analizados.

El cero como cifra componente de un número, se registra en actividades de: lectura, escritura, aproximación, relación de orden, en unidades de medida estandarizadas y al identificar el valor posicional dentro de un número. Todas estas actividades no aparece en el texto de 1º, y creemos que no existe una razón válida para que esto suceda, ya que a este nivel corresponde aprender los números de una y dos cifras, por tanto, el cero debería estar presente, en dicho texto, como cifra componente de un número.

Con respecto a la lectura de números con presencia del cero en sus cifras su presencia es destacada en los textos, al igual que la escritura utilizando símbolos alfabéticos. No sucede igual, con la escritura de números utilizando símbolos numéricos. Ejercitar la lectura y escritura de números en sus dos simbologías, permite conocer el nombre de los números, lo cual permitirá generar los nombres de aquellos números que el alumno desconoce.

Los ejercicios de aproximación de números, tan necesarias para que los escolares se familiaricen con las unidades de orden de nuestro sistema de numeración, son muy poco frecuentes, en los textos de 1º, 2º y 3º, lo que suponemos puede provocar, a la larga, serias dificultades al desarrollar operaciones aritméticas por redondeo.

Ordenar números en forma ascendente o descendente es una actividad muy frecuente en los textos. Se destaca que los textos de 2º a 5º presentan gran variedad de números con presencia del cero en sus cifras, para ser ordenados. Se deduce que el cero como cifra de un número en este tipo de actividad es relevante, favoreciendo la comprensión del valor posicional en el sistema de numeración decimal.

Las actividades donde se solicita realizar equivalencias entre diferentes unidades de medida, que pueden beneficiar el conocimiento sobre las equivalencias entre las unidades de orden del sistema de numeración decimal, sólo se presentan en el texto de 4º, y creemos que deberían estar presentes en los demás textos.

Tareas en las que se solicite explícitamente la posición y el valor del cero dentro de un número, idóneas para el aprendizaje de las funciones del cero como cifra de un número, entre otras sólo el texto de 4º contempla esta actividad. Consideramos que es necesario que se incluyeran en los demás textos.

El cero como única cifra, es el representante del conjunto vacío, y representarlo por medio de un modelo concreto es imposible. Sin embargo, todos los textos registran la regla como modelo de la recta numérica, donde el cero es representado como única cifra. Este modelo favorece la enseñanza del cero en su contexto de ordinal.

La utilización de monedas y billetes del sistema monetario chileno como soporte en los que aparecen representados los números es una actividad frecuente en los textos de 3º, 4º y 5º. Sin embargo, suponemos que no favorece la enseñanza del cero como cifra de un número, porque no se percibe explícitamente en dichas representaciones la presencia de posición y ausencia de cantidad, ya que no se incide sobre el número. A diferencia de lo que sucede con el ábaco, donde si se observa la ausencia de cantidad, ya que en el lugar del cero no existe la presencia de argollas. El sistema monetario chileno, al utilizar monedas y billetes múltiplos de diez, beneficia el aprendizaje de la expresión aditiva de un número. No obstante, en los textos la presencia del ábaco es menos frecuente que el sistema monetario chileno. Ambos modelos deberían ser registrados en los textos, cada uno favorece un aspecto del sistema de numeración donde se encuentra presente el cero.

La expresión aditiva de un número, completada con la expresión polinómica de un número puede ser fundamental para comprender el valor relativo y absoluto de un número. En los textos analizados, la expresión aditiva se registra en todos los textos, y la polinómica sólo se presenta en los textos de 3º y 4º. Encontramos razonable su ausencia en los textos de 1º y 2º, puesto que en esos niveles se enseña solo la adición y sustracción. Sin embargo, debería ser registrada en el texto de 5º, para así reforzar su aprendizaje.

Hemos observado que el cero como cifra única no es frecuente en este grupo de textos, lo mismo sucede cuando el cero es término de una operación aritmética. En la adición, el cero actúa como elemento neutro, por tanto, su presencia es importante. Sin embargo, se registran muy pocos ejercicios en los cuales el cero es el elemento neutro de la adición. Situación que creemos va en detrimento del aprendizaje de esta propiedad. En la sustracción se repite esta realidad. La multiplicación, se trabaja en las aulas a partir de 3º, por tanto, se espera que desde sus inicios se enseñe el cero como elemento absorbente, no obstante en el texto de 3º no se considera, en el de 4º es muy poco frecuente, y en el de 5º su presencia viene a ser relevante. La presencia del cero como única cifra en operaciones aritméticas es notable, en la adición y sustracción al agregar o quitar cero elementos a un conjunto, el conjunto no se altera, permanece igual. En la multiplicación, al multiplicar un número cualquiera por cero siempre dará cero. La división por cero no está definida. Todas son acciones que no sucede con los demás números, por ende, desarrollar operaciones aritméticas con la presencia del cero como término debe darse toda la importancia que tiene y tomarlas con prioridad en la enseñanza de los números.

Las operaciones aritméticas donde uno o más de los términos poseen cero en una o más de sus cifras sin ser múltiplos de 10 o potencias de 10, no son frecuente en los textos de 1º, 2º, 3º, y 4º, su presencia se destaca en 5º. Esta situación suponemos perjudica el aprendizaje de las operaciones aritméticas con números que contienen cero en una o más de sus cifras. Hemos visto que el cero no actúa igual que los demás números, y en las operaciones aritméticas su comportamiento da origen a propiedades, razón más que suficiente para ejercitar operaciones aritméticas con presencia del cero, como única cifra y como cifra componente de un número.

El cero es un componente importante en los múltiplos de 10 y potencias de 10, por encontrarse presente en una o más cifras de un número. Cuando un múltiplo de 10 o potencia de 10 posee más de un cero como cifra, por lo general se encuentran ubicados uno al lado del otro, por tanto, determina la presencia de posición de unidades de orden consecutivas, lo que facilita la adición y dificulta la sustracción. Todos los textos registran gran cantidad de adiciones y multiplicaciones donde uno o más de los términos son múltiplos de diez, ambas operaciones al ser conmutativa no presentan mayores dificultades, y por la cantidad de ejercicios registrados, se observa que los escolares ejercitan estas operaciones.

A diferencia de la sustracción, que no es conmutativa, los ejercicios donde el minuendo y sustraendo son múltiplos de diez son frecuentes en todos los textos. Sin embargo, los ejercicios donde el minuendo es múltiplo de diez son poco frecuentes. Esta situación creemos que sería uno de los factores que explicaría la dificultad que presentan los escolares al realizar esta clase de ejercicios.

Ejercicios de división con la presencia del cero en sus números se registran con mayor frecuencia en el texto de 5º, estando casi ausentes en el resto de los textos. La división es una operación donde la presencia del cero es compleja, por tanto, es fundamental desarrollar ejercicios con números con la presencia del cero en sus cifras.

Las operaciones aritméticas de adición y sustracción con presencia de potencias de 10 en uno o más de sus términos son poco frecuentes. Se destacan ejercicios de multiplicación donde un factor es potencia de 10 y el otro pertenece al orden de las unidades. Estos ejercicios se mecanizan con mucha facilidad, porque lo que verdaderamente se multiplica es el uno por cualquier otro dígito y se le agregan los ceros a la derecha, pero no existe conciencia real de estar multiplicando por cero. Nuevamente es el texto de 5º el que registra mayor cantidad de ejercicios de multiplicación con potencia de 10 en los factores. Ejercicios de división con potencias de 10 en uno o más de sus términos son frecuentes en el texto de 5º, estando casi ausentes en los demás textos. Consideramos que es razonable que sea en el texto de 5º donde su presencia sea mayor, por la complejidad que entraña la operación.

Es notable que en los textos de 1º y 2º no se registren operaciones aritméticas por aproximación. El de 3º solo registra sumas por aproximación, el de 4º registra restas y divisiones, y es en el texto de 5º donde se registran todas las operaciones aritméticas por aproximación.

Podemos concluir entonces, que en los textos analizados la presencia del cero no es relevante. Existiendo una notable ausencia del cero como única cifra, en los contextos de cardinalidad y de relación de orden, y como término en las operaciones aritméticas. Además, existe poca presencia de operaciones aritméticas donde uno o más de los términos poseen cero en una o más de sus cifras.

El sistema de numeración se completó con la aparición del cero, por tanto, creemos necesario que los escolares de los primeros años de primaria comiencen a familiarizarse con las especificidades de este número. Los textos escolares son un reflejo de los contenidos que aprenden nuestros alumnos chilenos. Según nuestro estudio, el cero debería tener más protagonismo en los textos desde 1º, para que al avanzar en su escolaridad los alumnos aumenten su conocimiento sobre este número y disminuyan los errores que cometen en su percepción y uso.

El texto de 5º, presenta la mayor cantidad de ejercicios con presencia del cero, incluso hay clases de ejercicios que no se registran en los demás textos, que son de cursos inferiores. Entendemos que esta situación debería ser modificada. Sugerimos que, puesto que en 5º los escolares deben aplicar todo lo aprendido en los años anteriores, para los primeros cursos los textos fuesen introduciendo tareas y ejercicios apropiados y que el texto de 5º registrase los mismos tipos de ejercicios pero con números de más cifras, ya que consideramos que no es correcto presentar tipos de ejercicios que nunca antes se han trabajado.

Determinar las especificidades del cero es un aporte a quienes estén interesados en el protagonismo que tiene este número en la enseñanza del sistema de numeración decimal y el desarrollo de las operaciones aritméticas. Además, identificar y analizar su presencia en los de textos de matemática de 1º a 5º, permitirá detectar los aspectos del cero que no son considerados, y así modificar esta situación.

Esperamos, en un futuro próximo, dar difusión a nuestros resultados para que puedan llegar a los autores de libros de texto chilenos, fundamentalmente, así como a otros autores de otros países. Pretendemos, en la medida de lo posible, hacer recapacitar a dichos autores sobre la situación del cero y que puedan tener elementos de juicio para plantearse alguna modificación a la hora de realizar nuevos textos.

En otro orden de cosas, es nuestro propósito continuar con la investigación, en varios frentes. Por un parte, profundizar en el estudio del sistema decimal de numeración y de las investigaciones realizadas en relación con el tema. Profundizar así mismo en la componente histórica del cero. Por otra parte, estudiar, en una muestra amplia de alumnos chilenos, la comprensión de dicho sistema de numeración detectando los posibles obstáculos, que suponemos existen, debidos a la presencia del cero en el mismo y a su estatus especial.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anthony, G. y Walshaw, M. (2004). Zero: a "None" Number? *Teaching children mathematics, Agosto,* 38-42.

Asimov, I. (1984). *Cómo descubrimos los números*. Barcelona: Editorial Molino.

Asimov, I. (2005). *De los números y su historia.* Buenos Aires: El Ateneo.

Barrow, J. (2001). *El libro de la nada*. Barcelona: Crítica.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Buendía, L. & Colás, Mª P. (1994). *Investigación Educativa.* Sevilla: Ediciones ALFAR.

Capanna, P. (2001, Octubre 16). El cero y la nada. *Página 12, Futuro*. Extraído el 18 Marzo, 2009, de http://www.geocities.com/juegosdeingenio/lecturas/cero.htm

Cataño, A. (2007). *Estudio didáctico del cero.* Tesis para optar al grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, México D. F., México. Extraído el 18 Mayo, 2009, de http://itzamna.bnct.ipn.mx:8080/dspace/bitstream/123456789/122/1/Catano_2007.pdf

Castro E. (editor) (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Castro, E. y Rico, L (1983, septiembre). *Cero ¿es un número natural? Análisis de las dificultades de cero.* Trabajo presentado en I Jornadas Andaluzas de profesores de Matemáticas, Cádiz, España.

Castro, E.; Rico, L. y Castro E. (1987). *Números y Operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Editorial Síntesis. S.A.

Caianiello, E. y Codetta, A (1996) *Does mathematics teaching influence common sense? Does common sense interfere in mathematics learning?* O. P. P. I. Milano, Italy.

Chile. Ministerio de Educación (2003a). *Programas de estudio Nivel Básico 1. Primer Año Básico.* Santiago de Chile: Unidad de currículo y evaluación.

Chile. Ministerio de Educación (2003b). *Programas de estudio Nivel Básico 2. Segundo Año Básico.* Santiago de Chile: Unidad de currículo y evaluación.

Chile. Ministerio de Educación (2004a). *Programas de estudio Nivel Básico 3. Tercer Año Básico.* Santiago de Chile: Unidad de currículo y evaluación.

Chile. Ministerio de Educación (2004b). *Programas de estudio Nivel Básico 4. Cuarto Año Básico.* Santiago de Chile: Unidad de currículo y evaluación.

Chile. Ministerio de Educación (2004c). *Programas de estudio Nivel Básico 5. Quinto Año Básico.* Santiago de Chile: Unidad de currículo y evaluación.

Corbalán, F. (2003). Nuestro sistema de numeración. En F. Corbalán, *La Matemática aplicada a la vida cotidiana* (pp 15-29). Barcelona: Editorial Graó.

Corsaria. (2006, Diciembre 3). *Historia del Cero*. Extraído el 1 agosto, 2009, de http://corsaria.zonalibre.org/archives/099558.html

D'Amore, B. (2008). El cero, de obstáculo epistemológico a obstáculo didáctico. *Boletín de la Soc. Puig Adam, 78,* 10-37.

Donoso, P. (2008). *Nivel de apropiación del sistema de numeración decimal en profesores y alumnos de NB1 y sus principales dificultades*. Tesis para optar al grado de Magíster en Ciencias de la Educación, facultad de Ciencias de la Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile, Santiago, Chile.

Erickson, F. (1989). Métodos cualitativos de investigación sobre la enseñanza. En M. C. Wittrock (Ed.) *La investigación en la enseñanza II. Métodos cualitativos y de observación.* (195-30). Madrid: Paidós.

Goetz, J. y LeCompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educati*va. Madrid: Morata.

Guedj, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números.* Barcelona: Ediciones B. S. A.

Guedj, D. (1999, Agosto 31). Una pequeña historia del cero. *El nuevo diario. El diario de los Nicaragüenses*. Extraído el 1 agosto, 2009, de http://archivo.elnuevodiario.com.ni/1999/agosto/31-agosto-1999/martes/martes3.html

Hughes, M. (1986). *Los niños y los números. Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Editorial Planeta, S. A.

Iohannes Dei. (2007, Marzo 18). El cero (historia). Extraído el 1 agosto, 2009, de http://lanaveargos.blogspot.com/2007/03/el-cero-historia.html

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica.* Barcelona: Ediciones Paidós.

Lerner, D. (1994). *Las matemáticas en la escuela. Aquí y ahora*. Buenos Aires: AIQUE Grupo Editor S. A.

Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994/2005). El sistema de numeración: Un problema Didáctico. En C. Parra y I, Saiz (comps.). *Didáctica de Matemáticas. Aportes y Reflexiones* (10ª Reimpresión) (pp. 95–184). Buenos Aires: Editorial Paidós.

Levenson, E., Tsamir, P. y Tirosh, D. (2007, Junio 22). *Neither even nor odd: Sixth grade student's dilemmas regarding the parity of zero.* Extraído el 24 de abril, 2009, de http://sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6W5B-4P1G8VF-1&_us

McMillan, J. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa.* (5ª edición) Madrid: Pearson Educación, S. A.

Molina, Mª I. (1996). *El señor del cero*. Madrid: Editorial Alfaguara.

O'Connor J. & Robertson, E. (2000). *Historia del cero.* Extraído el 18 Marzo, 2009, de http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo_3472_historia_del_cero.htm

Pérez, G. (1994). *Investigación Cualitativa. Retos e interrogantes. Volumen II. Técnicas y análisis de datos.* Madrid: Ed. la Muralla. S.A.

Pinedo, Ch. (2001). El cero a través del tiempo. Extraído el 20 de abril, 2009, de http://br.geocities.com/christianjqp/publicacoes1.htm

Roanes, E. (1976). *Didáctica de las matemáticas*. Salamanca: Ediciones ANAYA, S.A.

Sheuer, N., Sinclair, A., Merlo de Rivas, S. y Tièche Christinat, Ch. (2000). Cuando ciento setenta y uno se escribe: 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales. *Infancia y aprendizaje, 90,* 31 - 50.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas: en los últimos 10.000 años.* Barcelona: Crítica.

ANEXO I

Textos Escolares de Educación Matemática seleccionados:

1º Bs. Falconi, P. y Vigar, P. (2006).
Educación Matemática. 1º Básico. Edición especial para el ministerio de educación.
Editorial Santillana.

2º Bs. Ripamonti, Mª C. (2006)
Educación Matemática. 2º Educación Básica. Edición especial para el ministerio de educación.
Editorial Santillana.

3º Bs. López, A. y Órdenes, Mª F. (2007)
Educación Matemática. 3º Básico. Edición especial para el ministerio de educación.
Grupo editorial norma.

4º Bs. Frías, M. (2007)
Matemática 4. Cuarto Básico. Edición especial para el ministerio de educación.
Editorial Zig- zag

5º Bs. Cofré, A. y Mendoza, A. (2007)
Matemática 5. Educación Básica.
Editorial Santillana

ANEXO II

Categorías

A. CIFRA ÚNICA. El cero aparece como única cifra.

A.1. CARDINAL. Hace referencia a la cardinalidad de un conjunto (o colección). El cero es el cardinal que representa el conjunto vacío.
A.2. **RELACIÓN DE ORDEN**. El cero aparece registrado como el primer número de la secuencia numérica.
A.3. ORIGEN DE MAGNITUD. El cero se registra como el origen de medidas en unidades de medida estándares. • Temperatura • Longitud
A.4. TECLA. El cero es registrado como tecla.

B. CIFRA COMPONENTE DE UN NÚMERO. El cero representa la función de ausencia de cantidad y presencia de posición como cifra en un número.

B.1. LECTURA de números con presencia del cero dentro del número.
B.2. ESCRITURA: a) de números, utilizando símbolos alfabéticos. b) de números, utilizando símbolos numéricos.
B.3. APROXIMACIÓN. Redondeo de un número a la decena, centena, unidad de mil, decena de mil más cercana.
B.4. RELACIÓN DE ORDEN. Ordenar números que contienen cero en una ó más de sus cifras.
B.5. UNIDADES DE MEDIDA. Realizar equivalencias entre unidades de medida estandarizadas.
B.6. VALOR POSICIONAL. Identificar posición y valor del cero dentro de un número.

C. REPRESENTACIONES en un modelo.

C.1. REPRESENTACIONES DEL CERO COMO CIFRA ÚNICA • En la recta numérica • En la regla, como modelo de la recta numérica.
C.2. REPRESENTACIONES DEL CERO COMO CIFRA COMPONENTE DE UN NÚMERO • Monedas y billetes del sistema monetario chileno. • En el ábaco, ausencia de cantidad y presencia de posición

C.3. EXPRESIÓN ADITIVA DE UN NÚMERO ax100 + bx10 + c
C.4. EXPRESIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO $ax10^2 + bx10^1 + cx10^0$

D. OPERACIONES ARITMÉTICAS EN LOS NATURALES (*)

D.1. EL CERO ES TÉRMINO. El cero aparece como uno o más de los términos de la operación.
D.2. MÚLTIPLOS DE 10. Uno o más de los términos de la operación es múltiplo de diez.
D.3. POTENCIAS DE 10. Uno o más de los términos de la operación es potencia de diez.
D.4 COMO CIFRA DE UN NÚMERO. Uno o más de los términos de la operación posee cero dentro de su número.
D.5. REDONDEOS. En operaciones aritméticas por aproximación como redondear los términos de la operación aritmética a un orden específico y estimar el resultado.

(*) Como esta categoría hace mención a las cuatro operaciones aritméticas, fue necesario especificar lo que sucede con el cero en cada una de ellas. Por tal razón, cada subcategoría de D se divide en cuatro: Adición, Sustracción, Multiplicación y División. Lo que se especifica en el anexo III.

ANEXO III

Categoría D

OPERACIONES ARITMÉTICAS EN LOS NATURALES

Como se vio en el anexo II, la categoría D ha sido subdividida en cinco:

D1. EL CERO ES TÉRMINO

D.2. MÚLTIPLOS DE 10.

D.3 POTENCIAS DE 10.

D.4. COMO CIFRA DE UN NÚMERO.

D.5. REDONDEOS.

Y como las operaciones aritméticas básicas son cuatro: adición, sustracción, multiplicación y división; ha sido necesario especificar en qué términos de cada operación aritmética, el cero se encuentra como: número cero, como múltiplo de 10, como potencia de 10, como cifra de un número y al resolver operaciones aritméticas por redondeo.

Para facilitar la comprensión de cada categoría, en cada cuadro aparece la definición de la categoría, acompañado de símbolos alfabéticos y numéricos, los alfabéticos señalan las unidades de orden: **U** unidades, **D** decenas, **C** centenas, **Um** unidad de mil, **Dm** Decena de mil y **Cm** centena de mil. Y en los casos de la división, aparece: **d** décimos, **c** centésimos, para indicar que el resto no es cero. Además, aparece el símbolo ♦, el cual representa la presencia de posición dentro de un número. A su vez, se registran algunos números como por ejemplo el cero y el dos.

Esta simbología ayuda a ejemplificar los ejercicios numéricos registrados en los libros de texto donde se encuentra presente el cero.

D. OPERACIONES ARITMÉTICAS EN LOS NATURALES

D.1. EL CERO ES TÉRMINO. El cero aparece como uno o más de los términos de la operación.

ADICIÓN

Uno de los sumandos es la cifra única cero. Actúa como elemento neutro de la adición.	U + 0 = U D♦ + 0 = D♦
Todos los sumandos son cero, por tanto la suma es cero.	0 + 0 = 0

SUSTRACCIÓN

Resto es cero. El minuendo y el sustraendo son iguales, por tanto, el resto es cero.	U-U=0 DU-DU=0
Sustraendo es cero. El cero se encuentra como cifra única en el sustraendo. El resto es igual al minuendo.	U-0= U D♦-0=D♦ DU-0=DU

MULTIPLICACIÓN

Uno de los factores es cero, por tanto, el producto es cero.	0 X U = 0
Todos los factores son cero, por tanto el producto es cero.	0 x 0 = 0

DIVISIÓN *(no se registra)*

D.2. MÚLTIPLOS DE 10. Uno o más de los términos de la operación es múltiplo de diez.

ADICIÓN

LOS SUMANDOS SON MÚLTIPLOS DE 10

i.**Todos los sumandos son múltiplos de 10** y contienen **igual cantidad de cifras**. El, o los ceros, se encuentran ubicados en el mismo orden posicional, en todos los sumandos. La suma es un múltiplo de 10.	D♦ + D♦ = D♦ C♦♦ + C♦♦ = C♦♦ CD♦+CD♦=CD♦ D♦ + D♦ = CD♦
ii.**Todos los sumandos son múltiplos de 10**, y contienen **diferente cantidad de cifras.** El, o los ceros, se encuentran ubicados en el mismo orden posicional, en todos los sumandos. La suma es un múltiplo de 10.	CD♦+UmCD♦=UmCD♦ DmUmCD♦ + UmCD♦= DmUmCD♦
iii.**Todos los sumandos son múltiplos de 10**, y contienen **igual cantidad de cifras.** El, o los ceros, son sumados con cualquier dígito diferente de cero, o igual a cero. La suma es un múltiplo de 10.	C♦♦ + CD♦=CD♦

iv.**Todos los sumandos son múltiplos de 10**, y contienen **diferente cantidad de cifras.** El, o los ceros, son sumados con cualquier dígito diferente de cero, o igual a cero. La suma es un múltiplo de 10.	UmC♦♦ + CD♦=UmCD♦

UNO DE LOS SUMANDOS ES MÚLTIPLO DE 10

i. Los sumandos poseen igual ó diferente cantidad de cifras. **Uno de los sumandos es múltiplo de 10**. El, o los ceros, se suman con cualquier dígito diferente de cero, o igual a cero. La suma no es múltiplo de 10.	C♦♦ + CDU = CDU CDU + D♦ = CDU DmUm♦♦U+Um♦D♦= DmUm♦DU

LA SUMA ES MÚLTIPLO DE 10

ii. Los sumandos poseen igual ó diferente cantidad de cifra, en ellos no está presente el cero. La suma es múltiplo de 10.	UmCDU + CDU = UmCD♦

SUSTRACCIÓN

MINUENDO Y SUSTRAENDO SON MÚLTIPLOS DE 10

i.**Minuendo y sustraendo son múltiplos de 10**, con **igual cantidad de cifras y de ceros.** El, o los ceros, se encuentran ubicados en el mismo orden posicional, de ambos números. El resultado es múltiplo de 10.	C♦♦-C♦♦=C♦♦ D♦-D♦=D♦
ii.**Minuendo y sustraendo son múltiplos de 10**, con igual o diferente cantidad de cifras. Los dígitos que componen el **sustraendo son menores y/o iguales** a los dígitos ubicados en el mismo orden en el minuendo. El resultado es múltiplo de 10.	UmCD♦-UmC♦♦= Um♦D♦ CD♦-D♦=CD♦ CD♦-CD♦=D♦ C♦♦-D♦=C♦♦ CD♦-CD♦=CD♦
iii.**Minuendo y sustraendo son múltiplos de 10**, con igual o diferente cantidad de cifras. Los dígitos que componen el **sustraendo pueden ser:** - **mayores y menores** - **mayores e iguales** - **mayores, menores e iguales** que los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. El resultado es múltiplo de 10.	C♦♦-CD♦=D♦ C♦♦-CD♦=CD♦ C♦♦-D♦=CD♦ Dm♦C♦♦-DmUmC♦♦= DmUmC♦♦ CmDmUmC♦♦-DmUmC♦♦= DmUmC♦♦ CD♦-CDU=DU CD♦-CD♦=D♦

MINUENDO ES MÚLTIPLO DE 10

i. El **minuendo es múltiplo de 10**, de dos ó más cifras. El **sustraendo posee una sola cifra**, correspondiente al orden de las unidades. En el orden de las unidades, los dígitos que se restan son cero menos cualquier dígito diferente de cero. En el resultado no está presente el cero.	D♦-U=DU Um♦♦♦-U= UmCDU

ii.El **minuendo es múltiplo de 10**, de dos ó más cifras. El ***sustraendo posee dos o más cifras***. Los dígitos que componen el ***sustraendo pueden ser:*** - **mayores y menores e iguales** que los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. *(Resta con canje, o con reserva)* - **iguales y menores** que los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. *(Resta con canje, o con reserva)* - **iguales y mayores** que los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. *(Resta con canje, o con reserva)* - **menores y mayores** que los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. *(Resta con canje, o con reserva)* En el resultado no está presente el cero	CD♦-CDU=DU D♦-DU=U CD♦-CDU=CDU C♦♦-CDU=DU CD♦-DU=CDU CD♦-DU=CU D♦-DU=DU

SUSTRAENDO ES MÚLTIPLO DE 10

i.El **sustraendo es múltiplo de 10**. Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Todos los dígitos que componen el sustraendo **son menores** a los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. En el resultado no está presente el cero.	DU- D♦= DU CDU-CD♦=CDU
ii.El **sustraendo es múltiplo de 10**. Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Los dígitos que componen el sustraendo son: - **menores e iguales** a los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. *(Resta sin canje, ó sin reserva)* En el resultado no está presente el cero.	CDU-CD♦=DU

MULTIPLICACIÓN

AMBOS FACTORES SON MÚLTIPLOS DE 10

i.Ambos factores son múltiplos de diez. El producto es múltiplo de 10.	Um♦♦♦xD♦= CmDm♦♦♦♦

UN FACTOR ES MÚLTIPLO DE 10

i.Un factor es múltiplo de 10 de dos o más cifras, y el **otro factor pertenece al orden de las unidades**. El producto es múltiplo de 10.	D♦xU=D♦ D♦xU=CD♦ UmCD♦xU=
i.Un factor es múltiplo de 10, y el **otro tiene dos o más cifras**. El producto es múltiplo de 10.	D♦xDU=C♦♦ C♦♦xDU=Um♦♦♦

EL PRODUCTO ES MÚLTIPLO DE 10

i.El **producto es múltiplo de 10**, porque uno de los factores es par y el otro es múltiplo de 5.	5x2= 10

DIVISIÓN

DIVIDENDO Y DIVISOR SON MÚLTIPLOS DE 10

i.Dividendo y divisor son múltiplos de 10. El **cociente es múltiplo de 10**. El resto es cero.	CmDm♦♦♦♦:Um♦♦♦= D♦ CmDm♦♦♦♦:D♦= Um♦♦♦
ii.Dividendo y divisor son múltiplos de 10. El **cociente pertenece al orden de las unidades.** El resto es cero.	UmC♦♦:C♦♦=U
iii.Dividendo y divisor son múltiplos de 10. El cociente posee dos o más cifras diferentes de cero. El resto es cero.	C♦♦:D♦=DU

DIVIDENDO ES MÚLTIPLO DE 10

i.El dividendo es múltiplo de 10, y el **divisor pertenece al orden de las unidades**. En el **cociente no está presente el cero**. El resto es cero.	D♦:U=U D♦:U=DU
ii.El dividendo es múltiplo de 10, y el **divisor posee dos o más cifras diferentes de cero**. En el **cociente no está presente el cero**. El resto es cero.	C♦♦:DU=DU
iii.El dividendo es múltiplo de 10, y el **divisor pertenece al orden de las unidades**. **Cociente es múltiplo de 10**. El resto es cero.	D♦:U=D♦
iv.El dividendo es múltiplo de 10, y el **divisor posee una o más cifras diferentes de cero**. **Cociente es múltiplo de 10**. El resto es cero.	CD♦:DU=D♦
v.El dividendo es múltiplo de 10, y el **divisor posee una o más cifras diferentes de cero**. En el **cociente no está presente el cero**. El resto no es cero.	UmC♦♦:DU=CDU,dc
vi. Dividendo es múltiplo de 10. **Divisor es múltiplo de 5**. **Cociente es múltiplo de 10**. El resto es cero.	C♦♦:D5=D♦

viiDividendo es múltiplo de 10. **Divisor es múltiplo de 5. Cociente es múltiplo de 5.** El resto es cero.	CD♦:U=DU
viii.Dividendo es múltiplo de 10. Divisor es 2. Cociente es múltiplo de 10. El resto es cero.	UmCD♦:2= UmCD♦

DIVISOR ES MÚLTIPLO DE 10

i.Divisor es múltiplo de 10. **Dividendo no posee ceros en sus cifras.** En el **cociente no está presente el cero**. El resto no es cero.	CDU:D♦=U,dc

D.3. POTENCIAS DE 10. Uno o más de los términos de la operación es potencia de diez.

ADICIÓN

LA SUMA ES UNA POTENCIA DE 10

i.Los **sumandos poseen igual cantidad de cifras**, e igual cantidad de ceros, todos ubicados en el mismo orden posicional. La suma es una potencia de 10, de dos o más cifras.	U+U=10 D♦+D♦=100 C♦+C♦=1000
ii.Los **sumandos poseen diferente cantidad de cifras**, el cero no está presente en las cifras de los sumandos. La suma es una potencia de 10, de dos o más cifras.	DU+U=100

UN SUMANDO ES POTENCIA DE 10

i.Un sumando es potencia de 10, y el otro es múltiplo de 10. La suma es un múltiplo de 10.	100+D♦=CD♦

SUSTRACCIÓN

MINUENDO ES UNA POTENCIA DE 10.

i.El minuendo es una potencia de 10, de dos ó más cifras y es un orden mayor que el sustraendo. **El sustraendo es múltiplo de 10**. El resultado es múltiplo de 10.	100-D♦=D♦ 10000-Um♦♦♦= Um♦♦♦ 1000-C♦♦=C♦♦ 1000-CD♦=CD♦
ii.El minuendo es una potencia de 10, de dos ó más cifras y es un orden mayor que el sustraendo. **El sustraendo no posee cero en sus cifras**. En el resultado no está presente el cero.	1000-CDU=CDU
iii.El minuendo es una potencia de 10, de dos ó más cifras. **El sustraendo posee una sola cifra**, correspondiente al orden de las unidades. En el resultado no está presente el cero.	1000-U=CDU 10-U=U

SUSTRAENDO ES UNA POTENCIA DE 10

i.El sustraendo es una potencia de 10. Minuendo es un orden mayor que el sustraendo. En el resultado no está presente el cero.	1000-U=CDU 10-U=U
ii.El sustraendo es una potencia de 10. Minuendo es un orden mayor que el sustraendo y posee cero en una de sus cifras. En el resultado no está presente el cero.	1000-C♦U=CDU
iii.Sustraendo es una potencia de 10 y minuendo es múltiplo de 10. El resultado es múltiplo de 10.	1000-CD♦=CD♦

MULTIPLICACIÓN

POTENCIA DE 10 EN LOS FACTORES

i.Uno de los factores es potencia de 10, y el otro factor pertenece al orden de las unidades. El producto es múltiplo de 10.	10xU=D♦ 100xU=C♦♦
ii.Uno de los factores es potencia de 10, y el otro factor posee dos o más cifras. El producto es múltiplo de 10.	1000xDU= DmUm♦♦♦
iii.Ambos factores son potencias de 10, de igual o diferente cantidad de cifras. El producto es una potencia de 10.	10x10=100 100x1000=100000

UNA POTENCIA DE 10 POR UN MÚLTIPLO DE 10

i.Un factor es una potencia de 10 y el otro es un múltiplo de 10. El producto es múltiplo de 10.	10xD♦=C♦♦ 100xC♦♦=Dm♦♦♦♦ 1000xUm♦♦♦= Cm♦♦♦♦♦

DIVISIÓN

DIVIDENDO ES UNA POTENCIA DE 10

i.El dividendo es una potencia de 10, de dos más cifras. El divisor pertenece al orden de las unidades. El cociente es múltiplo de 10. El resto es cero.	100:U=D♦

DIVISOR ES UNA POTENCIA DE 10

i.El divisor es una potencia de 10. **Dividendo y divisor poseen la misma cantidad de ceros**. En el cociente no está presente el cero. El resto es cero.	C♦♦:100=U UmD♦♦:100=DU D♦:10=U
ii.El divisor es una potencia de 10. **Dividendo y cociente son múltiplos de 10**. El resto es cero.	CmDm♦♦♦♦:100= DmUm♦♦♦
iii.El divisor es una potencia de 10. **Dividendo es múltiplo de 10. Cociente no es múltiplo de 10**. El resto no es cero.	UmC♦♦:100=DU,dc

COCIENTE ES UNA POTENCIA DE 10

i.Dividendo mantiene el dígito del divisor pero seguida de ceros. Divisor pertenece al orden de las unidades y contiene una sola cifra. El cociente es una potencia de 10. El resto es cero.	Um♦♦♦:U=1000 D♦:U=10
ii.El divisor y el dividendo poseen en el mismo orden los mismos dígitos en su número, seguidos de ceros. El cociente es una potencia de 10. El resto es cero.	CmDm♦♦♦♦:UmC♦♦= 100

DIVIDENDO, DIVISOR Y COCIENTE SON POTENCIAS DE 10.

i.Dividendo y divisor son potencias de 10, de diferente cantidad de cifras. El cociente es una potencia de 10.	1000:10=100

D.4. COMO CIFRA DE UN NÚMERO. Uno o más de los términos de la operación posee cero dentro de su número.

ADICIÓN

CERO COMO CIFRA EN LOS SUMANDOS

i.Una o más de las cifras, ubicadas en el mismo orden, de los sumandos son ceros. En el resultado está presente el cero.	UmC♦D+C♦U=UmC♦U
ii.Uno de los sumandos posee cero en una o más de sus cifras. El otro sumando no posee cero. En el resultado no está presente el cero.	UmC♦D+CDU=UmCDU

SUSTRACCIÓN

CERO COMO CIFRA DE UN TÉRMINO

i.Una o más de las cifras, ubicadas en el mismo orden, del minuendo y del sustraendo son iguales. En **el resultado está presente el cero.**	DU-U=D♦
ii.Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Minuendo contiene cero en una o más de sus cifras. El sustraendo no posee cero es sus cifras. **En el resultado no está presente el cero.**	C♦U-U=CDU
iii.Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Minuendo contiene cero en una o más de sus cifras. El sustraendo no posee cero es sus cifras. **En el resultado está presente el cero.**	Dm♦C♦U-CDU= Dm♦♦DU
iv.Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Sustraendo contiene cero en una o más de sus cifras. El Minuendo no posee cero es sus cifras. **En el resultado no está presente el cero.**	UmCDU-Um♦DU= UmCDU

v.Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Sustraendo contiene cero en una o más de sus cifras. El Minuendo no posee cero es sus cifras. **En el resultado está presente el cero.**	UmCDU-C♦U= Um♦DU
vi.Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Ambos contienen cero en una o más de sus cifras. **En el resultado está presente el cero.**	UmC♦U- Um♦DU= UmC♦U

MULTIPLICACIÓN

CERO COMO CIFRA DE UN FACTOR

i.Los factores no son múltiplos de 10. En un factor, el cero se encuentra presente en una de sus cifras. En el resultado no está presente el cero.	C♦UXDU=UmCDU
ii.Los factores no son múltiplos de 10. En un factor el cero se encuentra presente en una o más de sus cifras. En el resultado si está presente el cero.	Um♦♦UxDU= Cm♦UmCDU

DIVISIÓN

CERO COMO CIFRA DEL DIVIDENDO

i.Dividendo y divisor no son múltiplos de 10. El cero se encuentra presente en una o más de las cifras centrales del dividendo. En el cociente no está presente el cero. El resto es cero.	C♦U:U=DU
ii.Dividendo y divisor no son múltiplos de 10. El cero se encuentra presente en una o más de las cifras centrales del dividendo. En el cociente está presente el cero. El resto es cero.	Um♦DU:DU=C♦U
iii.Dividendo y divisor no son múltiplos de 10. El cero se encuentra presente en una de las cifras centrales del dividendo. En el cociente no está presente el cero. El resto no es cero.	UmC♦U:DU=DU,dc

D.5. REDONDEOS. En operaciones aritméticas por aproximación como redondear los términos de la operación aritmética a un orden específico y estimar el resultado.

ADICIÓN

i.SUMA POR APROXIMACIÓN. Redondear los sumandos a un orden posicional específico y realizar la suma. El resultado será una estimación.

SUSTRACCIÓN

ii.RESTA POR APROXIMACIÓN. Redondear el minuendo y sustraendo a un orden posicional específico y realizar la resta. El resultado será una estimación.

MULTIPLICACIÓN

iii.MULTIPLICACIÓN POR APROXIMACIÓN. Redondear los factores a un orden posicional específico y realizar la multiplicación. El resultado será una estimación.

DIVISIÓN

iv.DIVISIÓN POR APROXIMACIÓN. Redondear los términos de la división a un orden posicional específico y realizar la división. El resultado será una estimación.

ANEXO IV

TABLAS DE FRECUENCIAS

A. CIFRA ÚNICA. El cero aparece como única cifra.

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
A.1. CARDINAL. Hace referencia a la cardinalidad de un conjunto (o colección). El cero es el cardinal que representa el conjunto vacío.	2	-----	2	-----	-----
A.2. **RELACIÓN DE ORDEN**. El cero aparece registrado como el primer número de la secuencia numérica.	8	-----	-----	1	-----
A.3. ORIGEN DE MAGNITUD. El cero se registra como el origen de medidas en unidades de medida estándares.	3	5	5	9	-----
A.4. TECLA. El cero es registrado como tecla.	1	1	2	-----	-----

B. CIFRA COMPONENTE DE UN NÚMERO. El cero representa la función de ausencia de cantidad y presencia de posición como cifra en un número.

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
B.1. LECTURA de números con presencia del cero dentro del número.	-----	17	6	9	11
B.2. ESCRITURA: a) de números, utilizando símbolos alfabéticos.	-----	2	5	3	5
B.2. ESCRITURA: b) de números, utilizando símbolos numéricos.	-----	1	1	-----	12
B.3. APROXIMACIÓN. Redondeo de un número a la decena, centena, unidad de mil, decena de mil más cercana.	-----	1	5	39	24
B.4. RELACIÓN DE ORDEN. Ordenar números que contienen el cero en una ó más de sus cifras.	-----	9	15	45	17
B.5. UNIDADES DE MEDIDA. Realizar equivalencias entre diferentes unidades de medida estandarizadas.	-----	-----	-----	50	-----
B.6. VALOR POSICIONAL. Identificar posición y valor del cero dentro de un número.	-----	-----	-----	10	-----

C. REPRESENTACIONES en un modelo.

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
C.1. REPRESENTACIONES DEL CERO COMO CIFRA ÚNICA • En la recta numérica • En la regla, como modelo de la recta numérica.	5	3	3	9	2
C.2. REPRESENTACIONES DEL CERO COMO CIFRA COMPONENTE DE UN NÚMERO • Monedas y billetes del sistema monetario chileno. • En el ábaco, ausencia de cantidad y presencia de posición	-----	-----	9	14	4
C.3. EXPRESIÓN ADITIVA DE UN NÚMERO. $a100 + b10 + c$	11	9	15	12	19
C.4. EXPRESIÓN POLINÓMICA DE UN NÚMERO $ax10^{2} + bx10 + cx10^{\circ}$	-----	-----	2	13	-----

D. OPERACIONES ARITMÉTICA EN LOS NATURALES

D.1. EL CERO ES TÉRMINO. El cero aparece como uno o más de los términos de la operación.

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
ADICIÓN **Uno de los sumandos** es la cifra única cero. Actúa como elemento neutro de la adición.	1	4	-----	-----	1
Todos los sumandos son cero, por tanto la suma es cero.	-----	-----	-----	-----	1
SUSTRACCIÓN **Resto es cero.** El minuendo y el sustraendo son iguales, por tanto, el resto es cero.	2	-----	-----	1	1
Sustraendo es cero. El cero se encuentra como cifra única en el sustraendo. El resto es igual al minuendo.	10	-----	-----	-----	-----
MULTIPLICACIÓN **Uno de los factores es cero**, por tanto, el producto es cero.	-----	-----	-----	2	17
Todos los factores son cero, por tanto el producto es cero.	-----	-----	-----	-----	-----

D.2. MÚLTIPLOS DE 10. Uno o más de los términos de la operación es múltiplo de diez.

ADICIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
LOS SUMANDOS SON MÚLTIPLOS DE 10 i.Todos los sumandos son múltiplos de 10 y contienen igual cantidad de cifras. El, o los ceros, se encuentran ubicados en el mismo orden posicional, en todos los sumandos. La suma es un múltiplo de 10.	11	22	17	18	8
ii.Todos los sumandos son múltiplos de 10, y contienen diferente cantidad de cifras. El, o los ceros, se encuentran ubicados en el mismo orden posicional, en todos los sumandos. La suma es un múltiplo de 10.	2	1	3	19	13
iii.Todos los sumandos son múltiplos de 10, y contienen igual cantidad de cifras. El, o los ceros, son sumados con cualquier dígito diferente de cero, o igual a cero. La suma es un múltiplo de 10.	-----	-----	-----	-----	4
iv.Todos los sumandos son múltiplos de 10, y contienen diferente cantidad de cifras. El, o los ceros, son sumados con cualquier dígito diferente de cero, o igual a cero. La suma es un múltiplo de 10.	-----	-----	-----	4	7
UNO DE LOS SUMANDOS ES MÚLTIPLO DE 10 i.Los sumandos poseen igual ó diferente cantidad de cifras. Uno de los sumandos es múltiplo de 10. El, o los ceros, son sumados con cualquier dígito diferente de cero, o igual a cero. La suma no es múltiplo de 10.	8	7	23	-----	12
LA SUMA ES MÚLTIPLO DE 10 ii.Los sumandos poseen igual ó diferente cantidad de cifra, en ellos no está presente el cero. La suma es múltiplo de 10.	-----	-----	-----	-----	2

SUSTRACCIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
MINUENDO Y SUSTRAENDO SON MÚLTIPLOS DE 10 i.Minuendo y sustraendo son múltiplos de 10, con igual cantidad de cifras y de ceros. El, o los ceros, se encuentran ubicados en el mismo orden posicional, de ambos números. El resultado es múltiplo de 10.	8	6	2	2	6
ii.Minuendo y sustraendo son múltiplos de 10, con igual o diferente cantidad de cifras. Los dígitos que componen el sustraendo son menores y/o iguales a los dígitos ubicados en el mismo orden en el minuendo. El resultado es múltiplo de 10.	-----	3	2	1	4
iii.Minuendo y sustraendo son múltiplos de 10, con igual o diferente cantidad de cifras. Los dígitos que componen el sustraendo pueden ser: - mayores y menores - mayores e iguales - mayores, menores e iguales que los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. El resultado es múltiplo de 10.	-----	7	2	8	13
MINUENDO ES MÚLTIPLO DE 10 i.El minuendo es múltiplo de 10, de dos ó más cifras. El sustraendo posee una sola cifra, correspondiente al orden de las unidades. En el orden de las unidades, los dígitos que se restan son cero menos cualquier dígito diferente de cero. En el resultado no está presente el cero.	-----	2	-----	-----	3

ii.El minuendo es múltiplo de 10, de dos ó más cifras. El sustraendo posee dos o más cifras. Los dígitos que componen el sustraendo pueden ser: - **mayores y menores e iguales** que los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. (Resta con canje, o con reserva) - **iguales y menores** que los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. (Resta con canje, o con reserva) - **iguales y mayores** que los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. (Resta con canje, o con reserva) - **menores y mayores** que los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. (Resta con canje, o con reserva) En el resultado no está presente el cero	-----	4	4	1	3
SUSTRAENDO ES MÚLTIPLO DE 10 i.El sustraendo es múltiplo de 10. Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Todos los dígitos que componen el sustraendo son menores a los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. En el resultado no está presente el cero.	4	1	-----	-----	2
ii.El sustraendo es múltiplo de 10. Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Los dígitos que componen el sustraendo son: - menores e iguales a los dígitos del minuendo, ubicados en el mismo orden. (Resta sin canje, ó sin reserva)	-----	1	-----	-----	-----

MULTIPLICACIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
AMBOS FACTORES SON MÚLTIPLOS DE 10 i.Ambos factores son múltiplos de diez. El producto es múltiplo de 10.	----	-----	2	2	11
UN FACTOR ES MÚLTIPLO DE 10 i.Un factor es múltiplo de 10 de dos o más cifras, y el otro factor pertenece al orden de las unidades. El producto es múltiplo de 10.	-----	-----	10	25	42
ii.Un factor es múltiplo de 10, y el otro tiene dos o más cifras. El producto es múltiplo de 10.	-----	-----	2	13	13
EL PRODUCTO ES MÚLTIPLO DE 10 i.El producto es múltiplo de 10, porque uno de los factores es par y el otro es múltiplo de 5.	-----	-----	2	5	18

DIVISIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
DIVIDENDO Y DIVISOR SON MÚLTIPLOS DE 10 i.Dividendo y divisor son múltiplos de 10. El cociente es múltiplo de 10. El resto es cero.	-----	-----	2	1	1
ii.Dividendo y divisor son múltiplos de 10. El cociente pertenece al orden de las unidades. El resto es cero.	-----	-----	1	-----	12
iii.Dividendo y divisor son múltiplos de 10. El cociente posee dos o más cifras deferentes de cero. El resto es cero.	-----	-----	1	1	5
DIVIDENDO ES MÚLTIPLO DE 10 i.El dividendo es múltiplo de 10, y el divisor pertenece al orden de las unidades. En el cociente no está presente el cero. El resto es cero.	-----	-----	11	1	9
ii.El dividendo es múltiplo de 10, y el divisor posee dos o más cifras diferentes de cero. En el cociente no está presente el cero. El resto es cero.	-----	-----	-----	-----	2
iii.El dividendo es múltiplo de 10, y el divisor pertenece al orden de las unidades. Cociente es múltiplo de 10. El resto es cero.	-----	-----	9	7	20

iv.El dividendo es múltiplo de 10, y el divisor posee una o más cifras diferentes de cero. Cociente es múltiplo de 10. El resto es cero.	-----	-----	-----	-----	8
v.El dividendo es múltiplo de 10, y el divisor posee una o más cifras diferentes de cero. En el cociente no está presente el cero. El resto no es cero.	-----	-----	-----	-----	5
vi.Dividendo es múltiplo de 10. Divisor es múltiplo de 5. Cociente es múltiplo de 10. El resto es cero.	-----	-----	1	-----	-----
vii.Dividendo es múltiplo de 10. Divisor es múltiplo de 5. Cociente es múltiplo de 5. El resto es cero.	-----	-----	1	-----	2
viii.Dividendo es múltiplo de 10. Divisor es 2. Cociente es múltiplo de 10. El resto es cero.	-----	-----	1	1	19
DIVISOR ES MÚLTIPLO DE 10 i.Divisor es múltiplo de 10. Dividendo no posee ceros en sus cifras. En el cociente no está presente el cero. El resto no es cero.	-----	-----	2	1	2

D.3. POTENCIAS DE 10. Uno o más de los términos de la operación es potencia de diez.

ADICIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
LA SUMA ES UNA POTENCIA DE 10 i.Los sumandos poseen igual cantidad de cifras, e igual cantidad de ceros, todos ubicados en el mismo orden posicional. La suma es una potencia de 10, de dos o más cifras.	-----	15	-----	-----	-----
ii.Los sumandos poseen diferente cantidad de cifras, el cero no está presente en las cifras de los sumandos. La suma es una potencia de 10, de dos o más cifras.	1	-----	-----	-----	4

UN SUMANDO ES POTENCIA DE 10 i.Un sumando es potencia de 10, y el otro es múltiplo de 10. La suma es un múltiplo de 10.	-----	-----	-----	-----	11

SUSTRACCIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
MINUENDO ES UNA POTENCIA DE 10 i.El minuendo es una potencia de 10, de dos ó más cifras y es un orden mayor que el sustraendo. El sustraendo es múltiplo de 10. El resultado es múltiplo de 10.	1	9	2	9	-----
ii.El minuendo es una potencia de 10, de dos ó más cifras y es un orden mayor que el sustraendo. El sustraendo no posee cero en sus cifras. En el resultado no está presente el cero.	-----	-----	-----	-----	2
iii.El minuendo es una potencia de 10, de dos ó más cifras. El sustraendo posee una sola cifra, correspondiente al orden de las unidades. En el resultado no está presente el cero.	-----	1	1	-----	4
SUSTRAENDO ES UNA POTENCIA DE 10 i.El sustraendo es una potencia de 10. Minuendo es un orden mayor que el sustraendo. En el resultado no está presente el cero.	----	-----	-----	1	-----
ii.El sustraendo es una potencia de 10. Minuendo es un orden mayor que el sustraendo y posee cero en una de sus cifras. En el resultado no está presente el cero.	-----	-----	-----	4	-----
iii.Sustraendo es una potencia de 10 y minuendo es múltiplo de 10. El resultado es múltiplo de 10.	-----	-----	-----	4	1

MULTIPLICACIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
POTENCIA DE 10 EN LOS FACTORES i.Uno de los factores es potencia de 10, y el otro factor pertenece al orden de las unidades. El producto es múltiplo de 10.	-----	-----	20	14	21
ii.Uno de los factores es potencia de 10, y el otro factor posee dos o más cifras. El producto es múltiplo de 10.	-----	-----	-----	-----	14
iii.Ambos factores son potencias de 10, de igual o diferente cantidad de cifras. El producto es una potencia de 10.	-----	-----	2	4	2
UNA POTENCIA DE 10 POR UN MÚLTIPLO DE 10 i.Un factor es una potencia de 10 y el otro es un múltiplo de 10. El producto es múltiplo de 10.	-----	-----	5	-----	9

DIVISIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
DIVIDENDO ES UNA POTENCIA DE 10 i.El dividendo es una potencia de 10, de dos más cifras. El divisor pertenece al orden de las unidades. El cociente es múltiplo de 10. El resto es cero.	-----	-----	-----	4	1
DIVISOR ES UNA POTENCIA DE 10 i.El divisor es una potencia de 10. Dividendo y divisor poseen la misma cantidad de ceros. En el cociente no está presente el cero. El resto es cero.	-----	-----	4	3	4
ii.El divisor es una potencia de 10. Dividendo y cociente son múltiplos de 10. El resto es cero.	-----	-----	1	-----	3
iii.El divisor es una potencia de 10. Dividendo es múltiplo de 10. Cociente no es múltiplo de 10. El resto no es cero.	-----	-----	-----	-----	4

COCIENTE ES UNA POTENCIA DE 10 i.Dividendo mantiene el dígito del divisor pero seguida de ceros. Divisor pertenece al orden de las unidades y contiene una sola cifra. El cociente es una potencia de 10. El resto es cero.	-----	-----	6	-----	7
ii.El divisor y el dividendo poseen en el mismo orden los mismos dígitos en su número, seguidos de ceros. El cociente es una potencia de 10. El resto es cero.	-----	-----	1	-----	5
DIVIDENDO, DIVISOR Y COCIENTE SON POTENCIAS DE 10. i.Dividendo y divisor son potencias de 10, de diferente cantidad de cifras. El cociente es una potencia de 10.	-----	-----	-----	2	-----

D.4. COMO CIFRA DE UN NÚMERO. Uno o más de los términos de la operación posee cero dentro de su número.

ADICIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
CERO COMO CIFRA EN LOS SUMANDOS i.Una o más de las cifras, ubicadas en el mismo orden, de los sumandos son ceros. En el resultado está presente el cero.	-----	-----	-----	-----	4
ii.Uno de los sumandos posee cero en una o más de sus cifras. El otro sumando no posee cero. En el resultado no está presente el cero.	-----	-----	-----	-----	2

SUSTRACCIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
CERO COMO CIFRA DE UN TÉRMINO i.Una o más de las cifras, ubicadas en el mismo orden, del minuendo y del sustraendo son iguales. En el resultado está presente el cero.	3	-----	1	1	3
ii.Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Minuendo contiene cero en una o más de sus cifras. El sustraendo no posee cero en sus cifras. En el resultado no está presente el cero.	-----	1	-----	1	5

iii.Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Minuendo contiene cero en una o más de sus cifras. El sustraendo no posee cero en sus cifras. En el resultado está presente el cero.	-----	-----	-----	-----	1
iv.Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Sustraendo contiene cero en una o más de sus cifras. El Minuendo no posee cero en sus cifras. En el resultado no está presente el cero.	-----	-----	-----	-----	3
v.Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Sustraendo contiene cero en una o más de sus cifras. El Minuendo no posee cero en sus cifras. En el resultado está presente el cero.	-----	-----	-----	-----	1
vi.Minuendo y sustraendo poseen igual o diferente cantidad de cifras. Ambos contienen cero en una o más de sus cifras. En el resultado está presente el cero.	-----	-----	-----	-----	2

MULTIPLICACIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
CERO COMO CIFRA DE UN FACTOR i.Los factores no son múltiplos de 10. En un factor, el cero se encuentra presente en una de sus cifras. En el resultado no está presente el cero.	-----	-----	-----	1	4
ii.Los factores no son múltiplos de 10. En un factor el cero se encuentra presente en una o más de sus cifras. En el resultado si está presente el cero.	-----	-----	-----	-----	10

DIVISIÓN

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
CERO COMO CIFRA DEL DIVIDENDO i.Dividendo y divisor no son múltiplos de 10. El cero se encuentra presente en una o más de las cifras centrales del dividendo. En el cociente no está presente el cero. El resto es cero.	-----	-----	1	-----	7
ii.Dividendo y divisor no son múltiplos de 10. El cero se encuentra presente en una o más de las cifras centrales del dividendo. En el cociente está presente el cero. El resto es cero.	-----	-----	-----	-----	3
iii.Dividendo y divisor no son múltiplos de 10. El cero se encuentra presente en una de las cifras centrales del dividendo. En el cociente no está presente el cero. El resto no es cero.	-----	-----	-----	-----	5

D.5. REDONDEOS. En operaciones aritméticas por aproximación como redondear los términos de la operación aritmética a un orden específico y estimar el resultado.

Categorías	1º Bs.	2º Bs.	3º Bs.	4º Bs.	5º Bs.
i.SUMA POR APROXIMACIÓN. Redondear los sumandos a un orden posicional específico y realizar la suma. El resultado será una estimación.	-----	-----	3	-----	12
ii.RESTA POR APROXIMACIÓN. Redondear el minuendo y sustraendo a un orden posicional específico y realizar la resta. El resultado será una estimación.	-----	-----	-----	18	3
iii.MULTIPLICACIÓN POR APROXIMACIÓN. Redondear los factores a un orden posicional específico y realizar la multiplicación. El resultado será una estimación.	-----	-----	-----	-----	5
iv.DIVISIÓN POR APROXIMACIÓN. Redondear los términos de la división a un orden posicional específico y realizar la división. El resultado será una estimación.	-----	-----	-----	5	16