UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

INTERPOLACIÓN GRÁFICA CON FAMILIAS DE FUNCIONES DEPENDIENTES DE PARÁMETROS. UN ESTUDIO EXPLORATORIO CON GEOGEBRA

JESÚS BERNAL RODRÍGUEZ

TUTOR: JUAN FRANCISCO RUIZ HIDALGO

GRANADA, 2016

Universidad de Granada

CURSO 2015/2016

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela del doctor D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Jesús Bernal Rodríguez dentro del Máster Universitario en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Jesús Bernal Rodríguez

Vº Bº del tutor

Juan F. Ruiz.

Fdo.: D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradezco a mi tutor, D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo por la propuesta de la temática motivante de este trabajo, así como el tiempo y las valiosas charlas que hemos mantenido. A su vez, me gustaría agradecer al profesor D. Tomás Ortega del Rincón por motivar la temática del trabajo con la tesis de Dña. Milagros Puerta Rebuel.

En segundo lugar, una mención especial al alumnado del IES García Lorca de Algeciras (Cádiz), a los que he seguido recordando durante la redacción de este trabajo. En especial, recuerdo a Ismael que creaba un clima especial en el centro y que trágicamente ha fallecido recientemente. También me gustaría agradecer la colaboración de mi compañera Dña. Ana Quintanilla en las sesiones con su grupo.

Por último, quiero agradecer a todas aquellas personas que me han acompañado en esta etapa. En especial, a mis padres, que siempre están ahí y a mi compañera Elena, por su apoyo y cariño incondicional.

CONTENIDO

1 Introducción 1

2 Justificación 5

2.1 Marco curricular 5

2.1.1 Marco curricular LOE 6

2.1.2 Marco curricular LOMCE 8

2.2 Antecedentes e interés de la investigación 11

3 Marco teórico 15

3.1 Funciones elementales 15

3.2 Interpolación gráfica 16

3.3 Breve aproximación histórica a la noción de función 17

3.4 Teoría de la representación. Funciones 18

3.5 Geogebra como instrumento investigador 22

4 Metodología 27

4.1 Tipo de estudio y descripción de la muestra 27

4.2 Estructura general de los cuestionarios 28

4.3 Descripción de los cuestionarios y de las tareas 29

4.3.1 Cuestionario A. Estructura y actividades 29

4.3.2 Cuestionario B. Estructura, descripción y diseño 30

4.4 Planificación y ejecución de las sesiones 33

4.4.1 Fase inicial: Familiarización con GeoGebra, sus deslizadores y cuestionarios 36

4.4.2 Fase de ejecución: Prácticas y cuestionarios 37

4.5 Preparación de las tareas de interpolación con GeoGebra 38

4.6 El proceso de organización y análisis de los resultados 40

4.6.1 Organización y análisis del cuestionario A 42

4.6.2 Organización y análisis del cuestionario B 42
5 Resultados 45
5.1 Análisis del cuestionario A...45
5.1.1 [A.1] Tareas predefinidas de interpolación con GeoGebra 45
5.1.2 [A.2] Interpretación de los parámetros de las familias de funciones......................48
5.1.3 [A.3] Tarea aleatoria de interpolación con GeoGebra 63
5.2 Análisis del cuestionario B...68
5.2.1 Fiabilidad del instrumento de recogida de información.......................................68
5.2.2 Análisis clúster jerárquico 69
5.2.3 Características de los clúster: Análisis clúster de K-medias 72
6 Conclusiones 75
6.1 Conclusiones respecto a los objetivos y las hipótesis de trabajo..................................75
6.2 Limitaciones de la investigación, oportunidades de mejora y cuestiones abiertas.........79
6.3 Sobre la experiencia de aula y valoración personal 81
7 Bibliografía 83
8 Anexos 89
8.1 Contenidos de funciones para 1º y 2ºESO ampliada 91
8.2 Contenidos de funciones para 3ºESO (académicas) ampliada 92
8.3 Contenidos de funciones para 3ºESO (aplicadas) ampliada 93
8.4 Contenidos de funciones para 4ºESO (académicas) ampliada 94
8.5 Contenidos de funciones para 4ºESO (aplicadas) ampliada 96
8.6 Cuestionario A de la familia lineal (Anverso)..98
8.7 Cuestionario A de la familia lineal (Reverso) 99
8.8 Cuestionario A de la familia cuadrática (Anverso) 100
8.9 Cuestionario A de la familia cuadrática (Reverso)...101

8.10 Cuestionario A de la familia exponencial (Anverso) 102

8.11 Cuestionario A de la familia exponencial (Reverso) 103

8.12 Cuestionario A de la familia de prop. inversa (Anverso) 104

8.13 Cuestionario A de la familia de prop. inversa (Reverso) 105

8.14 Cuestionario B.1 de la familia lineal 106

8.15 Cuestionario B.1 de la familia cuadrática 107

8.16 Cuestionario B.1 de la familia exponencial 108

8.17 Cuestionario B.1 de la familia de proporcionalidad inversa 109

8.18 Cuestionario B adjunto a la familia lineal y cuadrática 110

8.19 Cuestionario B adjunto a la familia lineal y cuadrática 111

8.20 Muestras de deficiencias en la reproducción de gráficas (1/2) 112

8.21 Muestras de deficiencias en la reproducción de gráficas (2/2) 113

1 INTRODUCCIÓN

El presente trabajo toma como punto de partida la tesis doctoral de Puerta (2009) donde se muestra que el alumnado del primer curso de Bachillerato con una instrucción adecuada es capaz de resolver tareas de interpolación y extrapolación gráficamente usando diferentes familias de funciones con mayor facilidad y mostrando mayor preferencia que usando el método algebraico. Entre los resultados de los ciclos de investigación-acción que desarrolla en los consecutivos años de estudio, resalta Puerta (2009) en sus conclusiones que el método gráfico es más fácil de recordar para el alumnado una vez trabajado de un año para otro pues no depende tanto de conocimientos previos ligados a la resolución de ecuaciones. Las familias de funciones que maneja el alumnado son las lineales, circulares, cuadráticas, elípticas, hiperbólicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas; siendo estas últimas inaccesibles algebraicamente al nivel de conocimientos del alumnado que cursa 1º de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, pero sí es accesible con el método gráfico.

Pretendemos adaptar la idea trabajada por la tesis de Puerta (2009) en un nuevo escenario protagonizado por el uso de la herramienta tecnológica GeoGebra como medio para resolver tareas de interpolación en ciertas familias de funciones por el alumnado. En primer lugar nos pareció interesante centrarlo en la etapa inmediatamente inferior para profundizar en la idea que con unos medios adecuados las tareas de interpolación son tareas accesibles para el alumnado, incluso de cursos inferiores al que marca el currículo oficial. En segundo lugar, mejoran las posibilidades de las plantillas físicas que se usan en su tesis permitiendo cambiarlas instantáneamente mediante el uso de deslizadores en GeoGebra y la instrucción necesaria es menor en el alumnado, porque está habituado al uso de dispositivos móviles, lo cual creemos que es una ventaja.

Al objeto de este trabajo consideramos conveniente restringir las familias de funciones a las cuatro que aparecen en el currículo oficial en España de la Educación Secundaria Obligatoria (lineales, cuadráticas, exponenciales y de proporcionalidad inversa), pues servirían al autor del trabajo en su labor docente y son parte de los contenidos de la materia de Matemáticas. La metodología en cambio la planteamos poco intervencionista con el alumnado, pues no diseñamos más que una pequeña sesión de instrucción cuyo fin último es presentar la herramienta GeoGebra y presentar el concepto de interpolación, no tan desconocido por las tareas familiares de unir puntos para dibujar figuras desde la infancia.

En primer lugar describimos un gran objetivo para este estudio y otros específicos que detallamos a continuación:

Describir las conductas del alumnado de 2º y 4ºESO cuando realizan tareas de interpolación lineal, cuadrática, exponencial y de proporcionalidad inversa usando GeoGebra con ayuda de deslizadores.

a. *Inducir experimentalmente el significado que asignan los estudiantes a los parámetros en la expresión general de las funciones.*
b. *Identificar estrategias y conjeturas de ajuste de la función entre cada una de las familias de funciones.*
c. *Detectar errores de reproducción de gráficas de funciones.*
d. *Medir cierto grado de aprendizaje en la asociación de funciones dadas por su expresión algebraica con su gráfica.*

En torno a estos objetivos nos planteamos las siguientes hipótesis:

H.1. Sin más que una instrucción básica en el manejo de GeoGebra y manipulando con deslizadores familias de funciones, el alumnado es capaz de realizar tareas de interpolación gráfica.

H.2. La dificultad de interpolar una función depende del tipo de familia, del número de parámetros y su tipología (traslación, forma, orientación…).

H.3. El alumnado manifiesta una percepción dinámica de las familias de funciones.

Este trabajo se articula en apartados, siendo el segundo donde justificamos dentro del marco curricular aquellos aspectos que hacen referencia a las familias de funciones con las que trabajamos y el interés del uso de herramientas tecnológicas para su trabajo en el aula. Por otro lado completamos dicho apartado con algunas investigaciones que por sus cuestiones planteadas, contenidos o herramientas destacan el planteamiento de nuestro trabajo como una temática interesante.

En el tercer apartado presentamos el marco teórico, que contiene la información necesaria para entender el trabajo en sí, indagando en las familias de funciones elementales que son el objeto de trabajo y escuetamente tratando la idea de interpolación gráfica, los sistemas de representación que son el medio en el que lo analizamos y las cuestiones teóricas que hacen de GeoGebra el medio en el cual nos planteamos el desarrollo de nuestra investigación.

En el cuarto apartado de la metodología, describimos la muestra de alumnado de segundo y cuarto curso de Educación Secundaria que participó en este estudio e incluimos el diseño de las tareas así como los registros de información que requerimos cumplimentar al alumnado al realizar las tareas de interpolación. Nos planteamos una investigación no sólo en cuestión de éxitos o fracasos en tareas de interpolación, pretendemos obtener información de la interpretación que el alumnado hace de los parámetros de las familias de funciones que manejan como deslizadores así como de su percepción de las estrategias necesarias para resolver los problemas propuestos. No menos importante es el diseño de cuestionario posterior a la tarea con ordenador consistente en la identificación de unas funciones dadas por su expresión algebraica entre varias gráficas.

En el quinto apartado analizamos los resultados obtenidos en el estudio desglosados en secciones que creemos que facilitan la comprensión de los mismos y optando por presentar más datos de forma tabular y explícita que mediante técnicas estadísticas, pues el número de alumnado lo permite y creemos que resulta fundamental en un estudio como este eminentemente exploratorio con una población pequeña de sujetos.

Para concluir, recogemos en el sexto y último apartado nuestras conclusiones. Además de contestar a las hipótesis planteadas, comentamos limitaciones de esta investigación junto a posibles cuestiones futuras que surgen a partir de este trabajo, cerrando con la experiencia de aula y unos comentarios personales de interés para la docencia.

2 JUSTIFICACIÓN

2.1 MARCO CURRICULAR

En este apartado vamos a justificar el tema e interés de esta investigación en base al currículo de matemáticas vigente en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España. En este caso, durante el curso 2014-15 en el desarrollo de esta investigación está vigente la Ley Orgánica de Educación (MEC, 2006) para el alumnado objeto de estudio de 2º y 4º de ESO. Sin embargo, vemos interesante también contrastar la misma con los cambios que supone la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (MECD, 2013) que se implantaba en los dos cursos siguientes en la etapa secundaria, tanto en su etapa obligatoria como posobligatoria. En las siguientes Tablas 2.1.1 y 2.1.2 se recogen los periodos de implantación de estas leyes educativas en los distintos cursos y etapas. Se entiende en este trabajo que la vigencia de las mismas en términos de currículo en el sistema educativo español se limita al momento que éste se ve modificado de facto en el correspondiente curso y etapa.

Tabla 2.1.1
Implantación de la LOE por cursos y etapas

	Etapas		
Cursos	Educación Primaria	Educación Secundaria Obligatoria	Bachillerato
2007-08	1º y 2º	1º y 3º	
2008-09	3º y 4º	2º y 4º	1º
2009-10	5º y 6º		2º

Tabla 2.1.2
Implantación de la LOMCE por cursos y etapas

	Etapas		
Cursos	Educación Primaria	Educación Secundaria Obligatoria	Bachillerato
2014-15	1º, 3º y 5º		
2015-16	2º, 4º y 6º	1º y 3º	1º
2016-17	5º y 6º	2º y 4º	2º

2.1.1 Marco curricular LOE

Para comenzar, trataremos de identificar los contenidos relativos a las funciones utilizadas en el estudio que aparecen en la LOE. En esta legislación, aparecen los contenidos de nuestra materia divididos en cinco bloques (Números, Álgebra, Geometría, Funciones y gráficas y Estadística y Probabilidad). El alumnado en cada curso irá aumentando su conocimiento en lo que a funciones se refiere de forma progresiva.

Según el Real Decreto 1631/2006 (MEC, 2007) que establece los contenidos mínimos a trabajar en el aula, el alumnado deberá conocer en 1ºESO, los siguientes contenidos de funciones:

- Organización de datos en tablas de valores.
- Coordenadas cartesianas. Representación de puntos en un sistema de ejes coordenados. Identificación de puntos a partir de sus coordenadas.
- Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización de contraejemplos cuando las magnitudes no sean directamente proporcionales.
- Identificación y verbalización de relaciones de dependencia en situaciones cotidianas.
- Interpretación puntual y global de informaciones pre- sentadas en una tabla o representadas en una gráfica.
- Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación. (MEC, 2007, p.753)

Estos contenidos, básicos en su descripción y que, según mi experiencia no suelen ser trabajados en profundidad en este curso son completados con los propuestos para 2ºESO, que ya incluyen la representación gráfica de una tabla de valores o expresión algebraica que nos acerca a lo que necesitamos para nuestro estudio:

- Descripción local y global de fenómenos presentados de forma gráfica.
- Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos.
- Obtención de la relación entre dos magnitudes directa o inversamente proporcionales a partir del análisis de su tabla de valores y de su gráfica. Interpretación de la constante de proporcionalidad. Aplicación a situaciones reales.
- Representación gráfica de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla.
- Interpretación de las gráficas como relación entre dos magnitudes. Observación y experimentación en casos prácticos.
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas. (MEC, 2007, p.754)

En 3ºESO, el alumnado ya se introduce en las características de las funciones y en su análisis, incidiendo en las familias de funciones lineales, que es una de las que vamos a utilizar en este trabajo:

- Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
- Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte. Uso de las tecnologías de la información para el análisis conceptual y reconocimiento de propiedades de funciones y gráficas.
- Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica.
- Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
- Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta. (MEC, 2007, p.756)

Y para finalizar la etapa de Educación Secundaria, en 4ºESO nuestra materia se divide en dos opciones, A o B. El alumnado de 4ºESO Opción A estudiará los contenidos sobre funciones que se exponen a continuación:

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.
- Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. Utilización de tecnologías de la información para su análisis. (MEC, 2007, p.758)

Como hemos podido observar, es en este nivel cuando se introducen por primera vez las funciones exponenciales y cuadráticas, por lo que serán tenidas en cuenta en el estudio. El alumnado de 4ºESO Opción B, por su parte, también trabaja otro tipo de funciones como son las de proporcionalidad inversa y logarítmica:

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.
- Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales.
- Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales.

- Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico. (MEC, 2007, p.759)

Para finalizar, en la Orden del 10 de agosto de 2007 (Junta de Andalucía, 2007) se incluyen diversos aspectos fundamentales para los docentes como diversas sugerencias didácticas, los núcleos temáticos de cada materia o la relevancia y sentido educativo de la misma. Como núcleo temático transversal, se incluye el "Uso de los recursos TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas" y según esta orden:

> Los medios tecnológicos son hoy día herramientas esenciales y habituales en el proceso educativo, en general, y en la materia de matemáticas de manera específica. Deben aprovecharse para el desarrollo de los procesos de aprendizaje y para facilitar la comprensión de los conceptos, dando menos peso a los algoritmos rutinarios y poniendo énfasis en los significados y razonamientos. (JA, 2007, p.51)

He ahí la importancia que se le debe dar al uso de las nuevas tecnologías en el aula y como deben servir para fomentar el razonamiento por parte del alumnado, no un mero solucionador de problemas.

2.1.2 Marco curricular LOMCE

Tras conocer los contenidos sobre funciones expuestos por la LOE, pasamos a conocer los nuevos contenidos plasmados en la LOMCE para todos los niveles de la Educación Secundaria Obligatoria. A fecha de esta investigación, la única concreción existente de esta ley se encuentra en el Real Decreto 1105/2014 (MECD, 2015), quedando todavía pendiente el Decreto propuesto por la Junta de Andalucía como concreción a este. Aun así, observamos diferencias entre ambas leyes para la materia de matemáticas, añadiendo esta última un primer bloque denominado "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas" que anteriormente no existía.

Comenzamos con 1º y 2ºESO, que en esta nueva legislación introduce sus contenidos sin diferenciar entre los dos cursos, identificando aquellos elementos relacionados con funciones. En la Tabla 2.1.3 se pueden observar los contenidos para este curso. En el Real Decreto antes citado a los bloques de contenido le acompañan criterios de evaluación y estándares de aprendizaje, que adjuntamos en el Anexo 8.1.

Tabla 2.1.3

Contenidos de funciones presentes en MECD (2015, p. 412) para los cursos de 1º y 2ºESO

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.
- Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

En el Bloque 1 anteriormente mencionado encontramos el siguiente estándar de aprendizaje, muy relacionado con nuestra tarea, y que el alumnado debe desarrollar en esta primera etapa:

> Utiliza medios tecnológicos para hacer representaciones gráficas de funciones con expresiones algebraicas complejas y extraer información cualitativa y cuantitativa sobre ellas. (MECD, 2015, p.409)

Es interesante observar la importancia cada vez mayor que se le da al uso de recursos tecnológicos en el aula como forma de aprendizaje de estos medios por parte del alumnado. Encontraremos indicaciones en este sentido desde 1ºESO hasta 4ºESO.

En los cursos de 3º y 4ºESO, la LOMCE subdivide la materia de matemáticas en dos vías o caminos dependiendo de los futuros estudios que el alumnado quieran seguir, ya sea enfocados a estudios de Bachillerato o a Formación Profesional. Las “Matemáticas con orientación académica” serán destinadas a aquel alumnado que desee seguir sus estudios de Bachillerato, y las “Matemáticas orientadas a enseñanzas aplicadas” serán las elegidas por el alumnado que vaya a estudiar Formación Profesional o terminar sus estudios. La elección de unas matemáticas u otras estarán siempre orientadas por el equipo docente que ha impartido el curso en 2ºESO.

Comenzamos con la materia de matemáticas en 3ºESO mostrada en las Tablas 2.1.4. y 2.1.5. según sean con orientación académica o a enseñanzas aplicadas. Los contenidos entre ambas opciones son similares y las funciones a trabajar en este curso serían las funciones lineales y las cuadráticas, realizando su análisis y representándolas en la gráfica. Los criterios y estándares de aprendizaje remitimos a los Anexos 8.2 y 8.3.

Tabla 2.1.4

Contenidos de funciones presentes en MECD (2015, p. 394) para 3ºESO (académicas)

- Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
- Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.
- Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
- Expresiones de la ecuación de la recta.
- Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.

Tabla 2.1.5

Contenidos de funciones presentes en MECD (2015, p. 402) para 3ºESO (aplicadas)

- Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
- Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.
- Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
- Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
- Expresiones de la ecuación de la recta
- Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.

En 4ºESO continúan el estudio de funciones añadiendo otro tipo de modelos funcionales diferentes de los estudiados en 3ºESO y relacionándolos con su utilización práctica en diversos contextos y situaciones. Se trata de un estudio más práctico y en profundidad del análisis de funciones donde el alumnado ya puede trabajar elementos que vamos a pedir en nuestro cuestionario. En la Tabla 2.1.6 y 2.1.7 se pueden observar los contenidos seleccionados para el bloque de funciones. Para observar los criterios y estándares de aprendizaje remitimos a los Anexos 8.4 y 8.5.

Tabla 2.1.6

Contenidos de funciones presentes en MECD (2015, p. 397) para 4ºESO (académicas)

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
- Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

Tabla 2.1.7

Contenidos de funciones presentes en MECD (2015, p. 406) para 4ºESO (aplicadas)

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
- Estudio de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.

2.2 ANTECEDENTES E INTERÉS DE LA INVESTIGACIÓN

Este apartado recoge algunas referencias de la búsqueda bibliográfica que hemos realizado para situar esta investigación dentro del panorama de la educación matemática y el interés que puede suscitar. Al implicar el concepto de función, interpolación, uso de representaciones (principalmente gráfica) y el elemento tecnológico GeoGebra, nos decantamos por hacer un recorrido bibliográfico no tan centrado en la temática de la interpolación por las escasas referencias encontradas, quizás demasiado restrictiva, como pone de manifiesto Puerta (2009) en su tesis y Berciano, Ortega y Puerta (2015) en una revisión posterior. Optamos en nuestro caso por un enfoque más general resaltando algunos documentos que sirven de interés en el tema del estudio y evitando repetir aquellas referencias que se usen con posterioridad para la descripción del marco teórico.

Centrados en el interés de este trabajo, Ruiz, Bosch y Gascón (2007) destacan que las “letras” que son usadas en las matemáticas de la etapa secundaria obligatoria lo hacen como incógnitas en las ecuaciones y variables en el lenguaje funcional, pero se prescinde del concepto de parámetro, restringiendo su significado a fórmulas a aplicar y dificultando el paso en etapas posteriores a trabajar con expresiones algebraicas de familias de funciones elementales como modelos de relaciones entre magnitudes. En esta misma línea, Puig y Monzó (2013) también proponen instrucción específica a nivel de alumnado y profesorado indicando que se debe presentar en el currículo:

> El álgebra como un instrumento para la resolución de problemas a través de la traducción de éstos a sistemas de ecuaciones o gráficas de funciones, y el álgebra como sistema de signos que permite que los fenómenos modelados mediante funciones se organicen en familias, cuyas características se establecen y se estudian en el plano de la expresión. (p. 9)

Even (1998) pone de manifiesto que en el caso del concepto de función, no basta sólo con la distinción entre la estructura subyacente de proceso y objeto, sino que tal y como se recoge en otras investigaciones es importante distinguir entre un acercamiento global y puntual al mismo. Por su parte, Azcárate y Deulofeu (1990) destacan que la representación gráfica de una función permite ver mejor al alumnado sus características globales.

Rogers (1995) desglosa la habilidad de interpretar gráficas de funciones en destrezas de menor a mayor dificultad señalando cómo los medios tecnológicos pueden incidir en estas destrezas. La secuencia que propone Rogers (1995) está formada por interpretación cualitativa, lectura de valores, descripción de variables, relación de variables, hacer predicciones y modelizar a partir de una descripción con datos. Señala Rogers (1995) que se pueden plantear tareas mediados por software como el ajuste de curvas con familias de funciones usando familias como la lineal, exponencial o de proporcionalidad inversa, interviniendo el alumnado en los parámetros, comparando y realizando predicciones, interpolando o extrapolando, que ayudan a trascender a los propios datos.

En la búsqueda de referencias del uso de GeoGebra y Cabri-Géomètre, que poseen ciertas similitudes en su interfaz gráfica, son varios los trabajos que han servido como un acercamiento al uso de esta herramienta con alumnado y a profundizar en las referencias que desarrollamos en el marco teórico. Desde un enfoque general, Koklu y Topcu (2012) con una revisión bibliográfica señalan que algunas ventajas que proporciona el uso de software dinámico al alumnado son: "(a) representar objetos matemáticos desde diversas perspectivas, (b) examinar y/o explorar relaciones matemáticas en profundidad, (c) experimentar con diferentes acercamientos en la resolución de problemas, (d) enunciar y testar conjeturas, y (e) cuestionamiento y pensamiento crítico." (p. 1000). Desde un enfoque práctico y con referencias didácticas destinadas a la formación docente, Bracho, Araujo y González (2014) y Gutiérrez y Prieto (2015) caracterizan algunas transformaciones geométricas respectivamente en la familia de parábolas dadas por las expresiones $f(x) = e^{ax}$ y $g(x) = ax^2$ en función del parámetro a mediante GeoGebra combinando el uso deslizadores con la opción "rastro" de GeoGebra. Por su parte, Koklu y Topcu (2012) estudian la influencia de instrucción con Cabri en conceptos erróneos del alumnado sobre las gráficas de la familia de funciones cuadráticas con una metodología pre-test y post-test con grupo de control partiendo de una clasificación de concepciones erróneas previas, llegando a la conclusión que algunos errores son menos frecuentes en el grupo que ha tomado instrucción y sugiriendo que la no mejoría en el resto de concepciones erróneas puede deberse a la mala elección de las gráficas de funciones prototipo elegidas en la instrucción.

A nivel de docencia para el alumnado, las actividades de interpolación gráfica pueden plantearse en secundaria para modelizar situaciones que, en muchos casos, consisten en un conjunto de datos extraídos de forma empírica en contextos cercanos realizando mediciones con una periodicidad adecuada. Estas mediciones pueden ser obtenidas mediante la observación directa, apoyados en instrumentos de medida o mediante el uso de sensores. Bryan (2005) referencia la existencia de diversas herramientas digitales para obtener datos a partir de grabaciones de vídeo que pueden ser exportados para ser analizados, por ejemplo, con hojas de cálculo con opciones interesantes como el ajuste de curvas. Por su parte, Hitt (2014) propone una secuencia de actividades incluyendo la modelización de un fenómeno físico mediante al uso combinado de Tracker, usado para extraer datos de un vídeo grabado con un dispositivo móvil, y GeoGebra, para manipularlos.

3 MARCO TEÓRICO

Empezamos esta sección acercándonos a las familias de funciones elementales desde la Matemática mediante una definición estructural y otra descriptiva, junto a un acercamiento a su didáctica, lo que nos lleva a una primera decisión de presentación al alumnado de las tareas de interpolación a realizar. En segundo lugar, describimos escuetamente en qué consiste la interpolación gráfica así como su presencia en el currículo oficial, interesándonos por destacar los beneficios de introducir este tipo de tareas en la docencia de secundaria. Posteriormente describimos, mediante algunas reseñas históricas, los distintos tipos de representación que dan origen al concepto de función para enmarcar nuestro trabajo dentro de la teoría de representación, destacando la necesidad de que el alumnado sea capaz de trabajar con diferentes sistemas de representación para una mejor comprensión del concepto de función. Por último, nos preocupamos por algunos enfoques teóricos de investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de tecnologías digitales, tomándolos como guía para describir el papel que juega GeoGebra en este trabajo que será concretado en la sección siguiente, resaltando algunos aspectos del programa que pueden resultar de interés para el investigador.

3.1 FUNCIONES ELEMENTALES

Desde el punto de vista de la Matemática, hay autores que definen las funciones elementales atendiendo únicamente a la estructura algebraica del conjunto de los números reales. Se demuestra de hecho que considerando el grupo conmutativo respecto de la suma, $\{\mathbb{R}, +\}$, y el grupo conmutativo de los números reales positivos respecto de la multiplicación, $\{\mathbb{R}^+, \cdot\}$, todos los isomorfismos continuos que se pueden establecer entre ambos grupos son exactamente cuatro: las funciones lineales, las funciones exponenciales, las funciones logarítmicas y las funciones potenciales (véase por ejemplo, Linés, 1991, pp. 265-281).

Con más generalidad, se suele referir con el término de funciones elementales a aquellas que se obtienen combinando las operaciones suma, producto, cociente o composición de funciones racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus inversas (Spivak, 2006).

Desde un punto de vista didáctico, Confrey y Smith (1991) acuñan el término *función prototipo* para referirse a aquellas funciones canónicas dentro de unas familias de funciones que no son obtenibles a partir de las otras mediante transformaciones como operaciones o composiciones. Las familias a las que se refiere son la lineal, cuadrática, polinómicas de mayor grado, de proporcionalidad inversa, exponencial y trigonométricas, cuyas funciones prototipo dadas algebraicamente son $y = x$, $y = x^2$, $y = x^n$, $y = {}^{1}/_{x}$, $y = a^x$, etc. Dedican entonces actividades en contextos cercanos que podemos calificar de modelización para que el alumnado las vincule a situaciones reales que representan o sobre las que aplican. Una vez consolidado un estudio básico de estos rasgos, trabajan mediante transformaciones como traslaciones, dilataciones o composiciones con funciones lineales para llegar a conclusiones del comportamiento de toda la familia de funciones.

En nuestro trabajo elegimos que el alumnado en las tareas de interpolación gráfica de funciones con GeoGebra parta de la constante de ecuación $y = 0$, realizando las transformaciones determinadas por los deslizadores que implementamos. Otra alternativa habría sido enfocarlo en el sentido de Confrey y Smith (1991) que hemos expuesto, siendo lo primero que viera el alumnado al ir a trabajar con la familia de funciones una función prototipo elegida.

3.2 INTERPOLACIÓN GRÁFICA

En primer lugar, conviene aclarar la definición del concepto de interpolación en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$. Este concepto consiste en dados un conjunto finito de puntos usualmente notados como (x_0, y_0), (x_1, y_1), … , (x_n, y_n), encontrar una función $y = f(x)$ que verifique que $y_i = f(x_i)$ para todo $i \in \{0,1, \dots, n\}$. Es decir, que cada valor de la ordenada de cada punto sea la imagen del correspondiente valor de la abscisa. Existen numerosas referencias de cómo resolver algebraicamente este problema, siendo usuales las referencias a métodos de interpolación polinómicas en manuales destinados a distintas disciplinas científicas usando el método de Newton, Lagrange o la resolución de un sistema de ecuaciones (Hadeler, 1982, pp. 96-99; Izar, 1998, pp. 84-104).

Tal como recoge Puerta (2009) y revisado por una publicación posterior de Berciano, Ortega y Puerta (2015), la presencia del concepto de interpolación en el currículo de secundaria en España se limita a 1º de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales ciñéndose exclusivamente a la interpolación lineal y cuadrática algebraicas, cuya vigencia se extiende a la normativa actual LOMCE (MECD, 2015).

Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) catalogan en dos tipos las tareas adecuadas para el trabajo con funciones y gráficas: interpretación y construcción. Entre las tareas de construcción encontraríamos aquellas en las que a partir de unos datos dados usualmente en forma de tabla o dada se obtiene la gráfica mediante una expresión, o viceversa. Tal como recoge Puerta (2009), las tareas de interpolación gráfica empiezan como actividades de construcción y su carácter gráfico supone una actividad rica, pues puede pedirse el alumnado que clasifique entre varias familias de funciones (no limitándonos a la lineal y cuadrática del currículo oficial) eligiendo la más adecuada, estimar la escala apropiada para el ajuste gráfico, predecir valores intermedios y externos tal como se hace en estudios científicos o sociales reforzando la aplicabilidad de las tareas a la vida real y obtener la función de la familia dada por su expresión algebraica. Por supuesto, una vez obtenida la gráfica de la función mediante interpolación se pueden trabajar aspectos interpretativos de la misma.

3.3 BREVE APROXIMACIÓN HISTÓRICA A LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

La noción de función, admite diversos acercamientos dependiendo del contexto histórico, social y académico al que hagamos referencia. Limitándonos a una breve revisión histórica, la noción de función ha ido muy ligada a establecer una relación de dependencia entre conjuntos numéricos, si bien sólo vamos a resaltar brevemente algunos acontecimientos. Encontramos algunas referencias de tablas babilónicas donde se ponía de manifiesto una relación de dependencia numérica, por ejemplo, Romero y Serrano (1997, p. 23) describen la existencia de tablillas babilónicas con la presencia dos columnas de números naturales, una correspondencia que hoy día denominaríamos variable y su correspondiente imagen con valores de la función exponencial. Esta concepción primitiva de función se mantuvo prácticamente inalterable hasta que Descartes (2002) desarrolló la conocida como geometría analítica, que produjo un cambio de mentalidad al asociar ecuaciones algebraicas a curvas. Este nuevo hecho disparó el interés de la época en el estudio del movimiento planetario y la dinámica de los cuerpos encontrando el medio de expresión de leyes físicas que explicitaban la dependencia entre cantidades con algunos representantes ilustres como Kepler y Galileo. En el siglo XVII se tendió más a buscar expresar explícitamente la dependencia en torno a variables por medio de ecuaciones con el desarrollo del cálculo infinitesimal por matemáticos como Newton, Leibniz, Wallis o Barrow. Ya en el siglo XIX, Dirichlet y Lobachevski darían una definición matemática de función muy cercana a la actual al hablar de correspondencias entre intervalos numéricos (Durán, 1996; Luzin, 1998).

3.4 TEORÍA DE LA REPRESENTACIÓN. FUNCIONES

La pequeña reseña histórica del apartado anterior nos sirve para poner de manifiesto que cuando hablamos de funciones realmente nos evoca diferentes registros como una tabla de valores, gráfica, ecuación o correspondencia unívoca. En este punto cabe preguntarse por un lado cómo accedemos e interaccionamos con el concepto de función, centrándonos en nuestro caso en el papel que desempeñan las representaciones en estos procesos.

La noción de representación, tal como expone Rico (2009) no es exclusivamente referida al conocimiento matemático, sino al conocimiento en general interesando a lo largo de la historia a grandes filósofos como Platón, Descartes o Kant. Refiriéndose al conocimiento matemático, Castro y Castro (1997) distinguen dos tipos de representaciones, internas para poder operar mentalmente sobre ellas y externas para poder comunicarlas como actividades esenciales del pensamiento y razonamiento matemático. Duval (1993) y Vergnaud (1997) resaltan que las representaciones externas son inherentes a la disciplina de las matemáticas, ya que las características de los conceptos matemáticos, en contraposición con otros tipos de conocimiento, no son accesibles a través de los sentidos y estas deben ser comunicadas a través de dichas representaciones usando un conjunto de símbolos, gráficos o lingüísticos. De hecho, se hace necesario disponer de un sistema de representaciones pues cada representación facilita o dificulta la percepción y comprensión de las propiedades del concepto (Janvier, 1987; Rico, 2000). Es más, tal como señala Rico (2000) se debe evitar la identificación del concepto con una de sus representaciones tal como se hace con frecuencia en un contexto escolar al limitarse al manejo de una sola representación, pues estaríamos ante una simplificación que dificultaría al alumnado percibir ciertas propiedades del concepto matemático. Por ejemplo, en el caso del concepto de función y su representación gráfica usando unos ejes cartesianos, Zalavsky (1997) señala que al interpretar la gráfica de una función cuadrática el alumnado tiende a pensar que esta se limita a la región dibujada cuando de hecho el dominio es infinito y como consecuencia llegan a la conclusión de que la gráfica no corta al eje vertical. También Janvier (1998) señala que el alumnado tiene dificultades para distinguir entre pendiente y altura, tomando como valor de pendiente el de la altura.

En este punto conviene aclarar que en nuestro trabajo entenderemos por representaciones a “todas aquellas herramientas —signos o gráficos— que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas” (Rico, 2009, p. 3). Asimismo, consideramos las representaciones como una de tres componentes de significado de un concepto matemático escolar, adoptando la noción de significado de concepto matemático escolar desarrollada por Rico (2012) y basada en las diferencias entre sentido y referencia de Frege (1998). Las tres componentes son:

- Estructura conceptual, dada por los conceptos, relaciones, operaciones, propiedades y proposiciones derivadas y que suministra el criterio de veracidad o falsedad para las proposiciones que se pueden enunciar sobre dicho concepto.
- Sistemas de representación, definidos por los símbolos y reglas que lo hacen presente, lo transforman y lo relacionan con otros. Los sistemas de representación sistematizan conjuntos de signos apropiados para un concepto o familia de conceptos y, mediante sus reglas de transformación y de traducción, regulan criterios de inferencia operativos.
- Contextos y modos de uso, incluyen aquellos fenómenos, situaciones y problemas que están en el origen de un concepto y le dan sentido. (Rico, 2012, pp. 52-53)

Aunque existe un marco teórico específico desarrollado por Duval (2006) sobre los sistemas de representación semiótica y los registros dentro de cada sistema (Duval, 1999), a los efectos de este trabajo nos centraremos en tres de los cuatro sistemas de representación para el concepto de función: verbal, tabular, gráfico y algebraico, formulados por Janvier (1987). Creemos que la descripción de acciones de traducción (conversión según Duval (2006)) entre los sistemas de representación que usa Janvier (1987) es un buen modelo (véase Tabla 3.4.1) para describir las tareas que requerimos al alumnado en este trabajo.

Tabla 3.4.1

Posibles acciones de traducción entre sistemas de representación

		Registro destino			
		Descripción verbal	Tabla	Gráfica	Fórmula
Registro origen	Descripción verbal		Medir	Dibujar	Medir
	Tabla	Leer		Trazar	Probar
	Gráfica	Interpretar	Leer		Ajustar curva
	Fórmula	Reconocimiento de parámetros	Computar	Dibujar	

Nota. Tomado de Janvier (1987) tal como reproduce Puerta (2009, p. 87)

En primer lugar, planteamos unas tareas de interpolación gráfica con familias de funciones y el alumnado debe ajustar la curva llegando a la fórmula que la representa. Al preguntarles por el significado gráfico de los deslizadores unido a la presencia de la ecuación de la función que tengan en pantalla, les solicitamos una interpretación verbal y buscamos reforzar el reconocimiento general del significado de los coeficientes de la función dada. Al pedirles que dibujen la gráfica solución que tienen en pantalla, pedimos al alumnado que reproduzcan la curva, interesándonos detectar posibles deficiencias de concepto, escalas, características y propiedades gráficas. En la tarea del cuestionario B, pretendemos que el alumnado a partir de la experiencia acumulada en las tareas de interpolación, asocie funciones dadas por su ecuación con su gráfica, difiriendo en este caso a la acción mostrada en la Tabla 3.4.1. Mostramos en la Tabla 3.4.2 la adaptación del modelo de Janvier (1987) en referencia con las tareas propuestas al alumnado en nuestra investigación. El diseño y descripción de las actividades así como los cuestionarios de recogida de información que se derivan de ellas se pueden leer con detalle en el Punto 4.3.

Tabla 3.4.2

Acciones de traducción entre sistemas de representación en las tareas esta investigación

		Registro destino			
		Descripción verbal	Tabla	Gráfica	Fórmula
Registro origen	Descripción verbal				
	Tabla				
	Gráfica	Interpretar		Reproducir	Ajustar curva
	Fórmula	Reconocimiento de parámetros		Asociar	

Nota. Elaboración propia adaptada de Janvier (1987)

Para cerrar este apartado, destacamos además de lo expuesto que desarrollar en el alumnado capacidades para usar múltiples representaciones de los conceptos matemáticos y traducir entre dichos sistemas facilita la resolución de problemas (Kaput, 1987; Duval, 2002), y por tanto, se convierten en objetivo a conseguir en la educación matemática (véase en Punto 2.1 referencias curriculares al manejo de representaciones gráfica, verbal, tabular o algebraica y mediación de elementos tecnológicos). Sin embargo, como ponen de manifiesto muchos investigadores (Sierpinska, 1992; Even, 1998; Hitt, 1998), el alumnado encuentra dificultades en establecer conexiones entre diferentes registros semióticos y entre distintas representaciones del concepto de función. En un trabajo reciente de Acevedo, Van Dooren, y Verschaffel (2014) sobre la mejora de la flexibilización en la elección de representaciones en la familia de funciones lineales, destacan como conclusiones de varios estudios con la misma temática que la elección de representaciones que realiza el alumnado puede estar influida por su mayor presencia en la docencia recibida, percibiéndola así como más correcta y no basada en la adecuación de la misma a la situación o el nivel de dominio que tengan de cada una, remarcando en cualquier caso que dicha flexibilidad ha de ser trabajada intencionalmente para desarrollarse.

3.5 GEOGEBRA COMO INSTRUMENTO INVESTIGADOR

Con vistas a describir el uso del elemento tecnológico digital en este trabajo, GeoGebra, recurrimos a la descripción de algunos enfoques teóricos que se han desarrollado en Didáctica de la Matemática preocupados por la introducción de la tecnología en el aula de matemáticas y las nuevas perspectivas que abren las interacciones entre los elementos del clásico triángulo didáctico de profesor, conocimiento matemático y estudiante mediados por la inclusión de este elemento.

Según sintetiza Pérez (2014), las teorías más actuales para investigar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas mediante el uso de tecnologías digitales corresponden a cuatro grandes enfoques: la Aproximación Instrumental, la Teoría de Mediación Semiótica, la Orquestación Instrumental y el enfoque Seres-humanos-con-medios (p. 130). En opinión de Pérez (2014), la integración de elementos tecnológicos en el aula de matemáticas modifica la concepción clásica del triángulo didáctico, poniendo de manifiesto que los cuatro enfoques presentados constituyen dimensiones de lo que acuña como "tetraedro didáctico" (p. 148) donde, no excluyentemente, distintas investigaciones han usado aunque no explícitamente elementos de las teorías señaladas. En este trabajo exploratorio nos fijaremos en algunos elementos dentro de estas teorías movidos tanto por el diseño de las tareas como para la adecuación de la herramienta a nuestras necesidades.

Desde la teoría Aproximación Instrumental, partimos de la concepción que GeoGebra en este trabajo es lo que Rabardel (2011) denomina *artefacto*, pues constituye el soporte en el que elaboramos nuestra propuesta de tareas de interpolación con la intención de analizar la interacción de un grupo de alumnos con el elemento tecnológico. En particular, nos interesa lo que Rabardel (2011) llama *instrumento*, que surge de los significados, técnicas y esquemas mentales de los que se sirve el alumnado para generar conocimiento sobre el artefacto para intentar conseguir los fines marcados en tareas de resolución de problemas. En este marco, resulta interesante para su análisis establecer grados de desarrollo de habilidades de instrumentación e instrumentalización del alumnado (véase, por ejemplo, Iranzo y Fortuny (2009)), para establecer cómo el artefacto influye en el alumnado y viceversa.

Tomando ideas de la Teoría de Mediación Semiótica, de Bartolini y Mariotti (2008, como se cita en Pérez, 2014), se pone el énfasis en la vinculación que se establece entre las tareas planteadas dentro de un ciclo didáctico por el docente para favorecer el paso de los significados personales a significados matemáticos del alumnado durante la realización de tareas en una secuencia didáctica mediada por el elemento tecnológico. Bartolini y Mariotti (2008, como se citó en Pérez, 2014) distinguen entre signos del artefacto, signos pivote y signos matemáticos. La postura de Bartolini y Mariotti (2008, como se citó en Pérez, 2014), viene marcada por su propuesta para el desarrollo de ciclos didácticos donde intervenga un artefacto tecnológico compuestos de tres etapas claramente secuenciadas:

- Realización de unas *actividades con el artefacto* donde el alumnado ha de resolver problemas y se estimula al alumnado para que desarrollen signos personales del proceso.
- La *producción individual de signos* donde el alumnado tenga que expresar distintos tipos de signos en relación con el artefacto en el contexto propuesto de resolución de problemas. Dentro de esta categoría se puede recurrir a escritura, dibujos o manifestaciones orales, donde resulta de interés buscar la reflexión del alumnado en su propia práctica.
- La *producción colectiva de signos* tiene lugar posteriormente a la resolución de problemas y es una situación de discusión dirigida por el docente. En ella se toman en consideración los signos desarrollados por el alumnado, confrontándolos con la ayuda del docente ampliando los significados personales.

Respecto a la Teoría de la Mediación Semiótica, en el marco de este trabajo, tomamos el ciclo didáctico propuesto por Bartolini y Mariotti (2008) como un referente de las posibles fases a desarrollar dentro de nuestra investigación. Por último, tomando como referente las tres etapas del ciclo didáctico propuesto por Bartolini y Mariotti (2008), nos centramos en analizar las dos primeras etapas, centrándonos en la interacción del alumnado con GeoGebra en las tareas propuestas así como los signos y estrategias que desarrollen.

Por otro lado, la Orquestación Instrumental vendría a preocuparse por cómo el docente es capaz de promover en el grupo de alumnado una mejor interacción con el artefacto y el propósito que persigue. Esta dimensión viene a responder a cómo el docente se plantea el uso de un artefacto para las tareas de aprendizaje por las posibilidades que concibe de la inclusión del mismo como mejora de su propia docencia. Llevándolo al ciclo didáctico de Bartolini y Mariotti (2008), hay que plantearse cómo las tareas presentan una adecuada presentación al alumnado, las limitaciones del artefacto y la planificación secuencial de tareas como gestión de espacios o tiempo. En nuestra opinión, en esta reflexión entra la valoración y adecuación de propuestas existentes, tomando en nuestro caso como referente el documento de Underwood et al. (2005) por explicitar la necesidad de incorporar unos principios de diseño en tareas con medios tecnológicos que podamos vincular con los estímulos que persigamos en el alumnado. Underwood et al. (2005) realizan una propuesta de principios de diseño tecnológicos agrupándolos en tres categorías: motivación, presentación y resolución de problemas, basándose en el uso que en diversas investigaciones se hace de los medios tecnológicos y las valoraciones de sus efectos positivos. Respecto a favorecer la motivación, Underwood et al. (2005) destacan que en la motivación del alumnado influye partir en lo posible de contextos conocidos, graduar las actividades partiendo del éxito inicial, la interactividad o la calidad gráfica deben plantearse de acuerdo a quien se dirige teniendo un valor añadido la propuesta de actividades donde probar o conjeturar. En cuanto a la importancia de la presentación, Underwood et al. (2005), destacan la efectividad de un lenguaje claro y conciso para que el estudiante sepa lo que debe hacer, además de destacar en una herramienta que sea interactiva deben diferenciarse aquellos elementos que permitan interactuar con aquellos que no, para invitar a actuar y favorecer la concentración. Por último, respecto a la resolución de problemas, Underwood et al. (2005) resaltan la necesidad de que el medio tecnológico permita crear entornos donde los estudiantes prueben ideas, hagan conjeturas y puedan vincular lo visual con lo simbólico obteniendo una adecuada retroalimentación para fomentar su autonomía, así como nuevas interacciones entre profesores y estudiantes. Remitimos al Punto 4.3.2 donde describimos las decisiones en cuanto al diseño de las tareas.

El último enfoque Seres-humanos-con-medios trasciende los fines de este trabajo, pues vendría a plantear cómo el elemento tecnológico altera el modo en que el conocimiento es visto y los roles de las personas involucradas en situaciones de aprendizaje. El énfasis no sólo está en el elemento tecnológico por tanto, sino en interesarse en las relaciones que se establecen desde una mayor generalidad (Borba y Villareal, 2005).

Por último, apuntamos algunas características de GeoGebra de especial interés en nuestra opinión de cara a la investigación. Estas permiten hacer un seguimiento de las interacciones de los sujetos objeto de estudio con los elementos creados en un archivo de trabajo del programa, con la ventaja de no limitarnos a producciones finales como ocurre en cuestionarios tradicionales. Pasamos a enumerarlas:

- El *protocolo de construcción* es una opción de GeoGebra que permite ver paso a paso la creación de los distintos elementos que componen la disposición de elementos que figuran en el archivo de trabajo. Resulta de gran utilidad para analizar respuestas dadas por sujetos objeto de estudio que hayan tenido que crear distintos elementos en el archivo de trabajo (como puntos, rectas, cónicas, mediciones…) para la resolución de un problema.
- Los deslizadores en GeoGebra tienen una propiedad intrínseca, el *registro en la hoja de cálculo*. Esto permite, al estar activado, registrar cada vez que se modifique el valor del deslizador su nuevo valor en una celda de la hoja de cálculo. Esto complementado con una variable temporal que se registre simultáneamente el momento de la interacción, permite al investigador tener un registro secuencial de inicio a fin con las potencialidades de exportar esos datos a multitud de programas de análisis de datos.

Hacemos notar además que estas características dentro de una propuesta de tareas son invisibles hacia los sujetos objeto de estudio, lo que podría plantearse como alternativa a la grabación en caso de ser necesaria y los posibles efectos negativos que pueda tener. Valoramos que es una fuente extra de información que puede aportar y motivar el aumento de investigaciones donde intervenga GeoGebra.

4 METODOLOGÍA

4.1 TIPO DE ESTUDIO Y DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA

Este estudio podríamos catalogarlo principalmente como exploratorio pues pretendemos:

> Examinar o explorar un tema o problema de investigación poco estudiado o que no ha sido abordado nunca antes. Por lo tanto, sirve para familiarizarse con fenómenos relativamente desconocidos, poco estudiados o novedosos, permitiendo identificar conceptos o variables promisorias, e incluso identificar relaciones potenciales entre ellas. (Cazau, 2006, p. 26)

La muestra que participó en este estudio estuvo integrada por catorce alumnos de nivel 2ºESO y nueve alumnos de nivel 4ºESO, que cursaban la opción B de Matemáticas en el curso 2014-15 en el I.E.S. García Lorca de Algeciras, provincia de Cádiz. La selección de dicha muestra no fue intencional sino por disponibilidad tanto de tiempos como del espacio necesario para realizarlo a cabo. En el caso del grupo de 2ºESO el autor impartía clase al grupo mientras que al grupo de 4ºESO no se le impartía clase, pero existía la posibilidad de acudir en una hora sin docencia semanal con el mismo al aula de informática, necesaria para el desarrollo de este estudio que detallaremos a continuación. La disponibilidad del alumnado de 2ºESO estuvo sujeto al orden de manifestar su interés para la participación del mismo, pues el número de ordenadores era limitado. Esta observación de individuos y la organización del trabajo, en el que se cuenta lo que ha ocurrido, lo convierten, además, en un trabajo descriptivo (Cohen y Manion, 2002).

El periodo de estudio comprendió desde la segunda quincena de mayo a la primera de junio con un final flexible en función del aprovechamiento de las mismas que detallaremos en esta sección.

La metodología que diseñamos es exploratoria y descriptiva pues pretendemos recoger datos a distintos niveles en relación al uso que da el alumnado de GeoGebra en tareas de interpolación con las familias de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales y de proporcionalidad inversa, la percepción que describe del alumnado del uso del artefacto y de las transformaciones que sufren las curvas con las que trabajan. Complementamos este trabajo dinámico con una tarea posterior sin el artefacto GeoGebra para ver el éxito que alcanza el alumnado objeto de estudio asociando funciones dadas por su expresión algebraica a una rejilla de gráficas de funciones.

4.2 ESTRUCTURA GENERAL DE LOS CUESTIONARIOS

En primer lugar establecemos el orden de trabajo con las familias de funciones. Siguiendo el orden natural tal como es presentado en el currículo, inicialmente se trabaja la familia de funciones lineales durante los tres primeros cursos, posteriormente en el cuarto curso se trabajan otras familias de funciones en especial las cuadráticas, seguidas de las de proporcionalidad inversa y exponencial (4º curso opción B de Matemáticas, omitiéndose las de proporcionalidad inversa en la opción A). Pese a lo dispuesto en el currículo oficial, cabe decir que el nivel de profundización es diferenciado. La familia de funciones cuadráticas es estudiada en cuanto a forma, interpretación de los coeficientes, puntos de corte con los ejes o la importancia del vértice en su representación y aplicación a la resolución de situaciones. Por su parte, las familias de funciones de proporcionalidad inversa o las exponenciales, suelen ser presentadas restringidas a casos particulares ($f(x) = {}^{1}\!/_{x}$ y $g(x) = a^{x}$) al ser la primera vez que se trabajan en 4º de ESO.

Establecida la secuencia de trabajo, decidimos estructurar los cuestionarios para cada una de las familias de funciones en tres bloques diferenciados:

- Cuestionario A: Tiene lugar interactuando con el programa GeoGebra en el ordenador. Se les propone al alumnado una secuencia de tareas de interpolación sobre GeoGebra manipulando los parámetros de su expresión con el uso de deslizadores. En dichas tareas se incluyen unas preguntas sobre el significado que le atribuyen a dichos parámetros y la descripción de los pasos más importantes que destacan de la resolución de una última tarea junto a la reproducción gráfica de la solución que obtienen en pantalla.
- Cuestionario B: Tiene lugar sin interacción con el programa GeoGebra en el ordenador. Consiste en asignar las tres funciones dadas por sus fórmulas con su representación gráfica que se encuentra en un cuadrante de gráficas. Para esta tarea el alumnado puede consultar el cuestionario A.
- Cuestionario C: Tiene lugar con posterioridad a las sesiones de trabajo con ordenador. Pretende recoger la valoración de la experiencia por parte del alumnado.

4.3 DESCRIPCIÓN DE LOS CUESTIONARIOS Y DE LAS TAREAS

En este apartado vamos a presentar y describir la estructura de los cuestionarios usados en este estudio. Estos tienen un formato homólogo en las distintas familias de funciones que se aplican, así pues seleccionaremos en cada caso un modelo para ilustrar los apartados, pudiendo recurrirse a una visualización y lectura completa de los mismos en los Anexos 8.6 al 8.19.

4.3.1 Cuestionario A. Estructura y actividades

En la Figura 1 se puede ver una estructura del modelo de cuestionario A, donde se han añadido unas llaves numeradas con el fin de describir mejor las secciones del mismo.

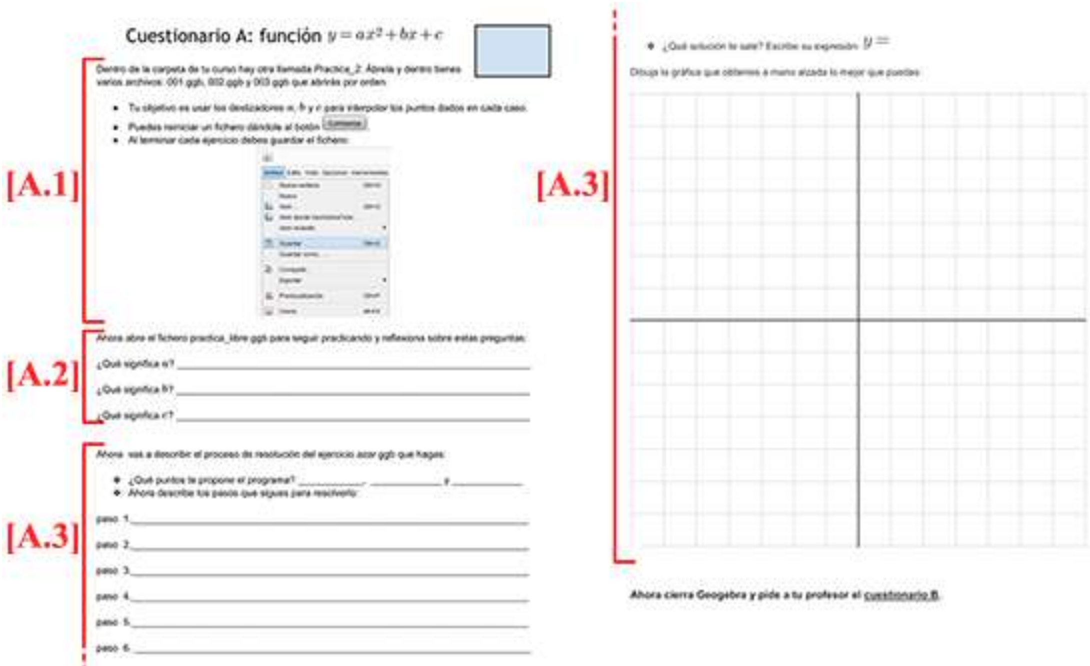


Figura 1. *Cuestionario A dividido en secciones para explicar la estructura*

La primera sección del cuestionario describe la carpeta donde se encuentran los archivos correspondientes de trabajo llamados de forma secuencial *001.ggb*, *002.ggb* y *003.ggb*. Se le informa al alumnado del objetivo de las actividades consistente en interpolar los puntos dados en cada caso, la posibilidad de reiniciar la actividad mediante el uso de un botón etiquetado como *Comienza* y la necesidad de guardar al finalizar cada tarea.

La segunda sección propone la apertura del archivo de trabajo llamado *practica_libre.ggb*. En ella se pide al alumnado que practique de forma similar a los anteriores ejercicios para describir el significado de cada uno de los parámetros, teniendo la dualidad de ser deslizadores en Geogebra.

La tercera sección propone la apertura del archivo de trabajo *azar.ggb*. El objetivo de esta sección es describir los pasos de resolución de un problema de interpolación propuesto sobre puntos elegidos al azar en la aplicación. Esto se completa con la inclusión de la ecuación de la expresión dada por la solución en pantalla y la reproducción de la misma en unos ejes cartesianos situados en una cuadrícula proporcionada.

4.3.2 Cuestionario B. Estructura, descripción y diseño

El cuestionario B consta de dos partes, que hemos dividido a efectos prácticos como cuestionario B.1 y B.2.

En el caso del cuestionario B.1, tiene la disposición de su contenido en formato apaisado. Debajo del título encontramos tres funciones dadas por sus expresiones y a continuación la mayor parte del espacio lo ocupa una secuencia de gráficas de funciones que han sido dispuestas en una tabla de tres filas y seis columnas con un espacio sombreado debajo de ellas. El objetivo de este cuestionario es que el alumnado objeto de estudio relacione cada función con la gráfica oportuna de entre las dieciocho posibles en base a la experiencia previa de trabajo. En la Figura 2 se muestra una miniatura del mismo, pudiendo acudir a los Anexos 8.14 al 8.17 para verlos en mayor detalle.

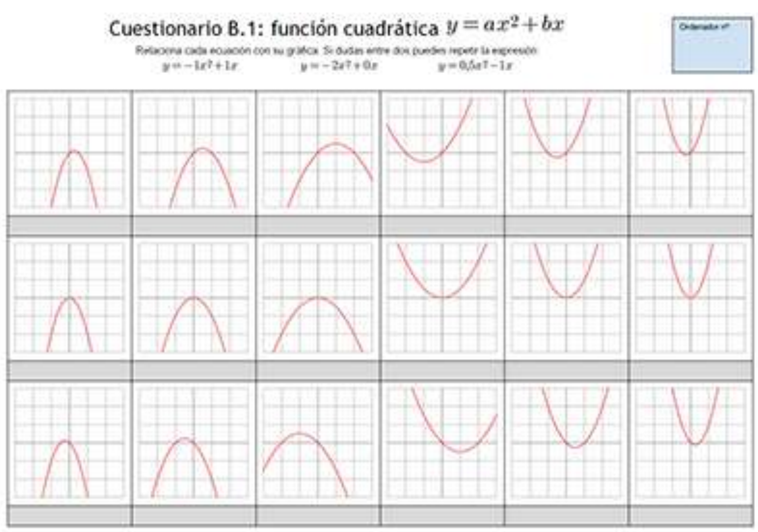


Figura 2. *Cuestionario B.1 de la familia de funciones cuadráticas (reducción)*

En cuanto al diseño de las imágenes, estas han sido generadas con GeoGebra manteniendo la estética y colores de la práctica, por lo que la gráfica de las funciones es roja y se presenta cuadrícula en los ejes cartesianos. Para hablar de la determinación de las imágenes, se ha prescindido del parámetro c en el caso de las familias de funciones cuadráticas, de proporcionalidad inversa y exponenciales. Esto nos permite limitarnos a dos parámetros a y b de forma que presentamos las gráficas en la tabla en horizontal y vertical, tomando una muestra de cada familia consistente en seis valores del parámetro a y tres del parámetro b. Además, prescindir del parámetro c estimamos que no supone grandes carencias pues su interpretación en todos los casos es similar.

El diseño de este instrumento está inspirado en la experiencia al trabajar el cuestionario A con el ordenador por el alumnado. Intentamos obtener datos de la representación mental gráfica y dinámica que han adquirido del trabajo con estas familias de funciones. El cuestionario B.2 nos sirve de complemento al pedirles que nos describan porqué han asociado de esa manera y también ejerce algún tipo de control para este estudio que no se asignen relaciones por puro azar o detectar estrategias alternativas que use el alumnado. No olvidemos, por ejemplo, que en el cuarto curso de secundaria han trabajado el estudio de los puntos de corte con los ejes resolviendo ecuaciones y sistemas en el caso de las cuadráticas. También existen otras estrategias como evaluar la función en varios puntos y simplemente asignar la gráfica correcta sin el uso de cualquier conocimiento que haya podido adquirir el alumnado durante esta experiencia de aula.

Recordemos en este punto que para rellenar este cuestionario el alumnado no dispone de ordenador, pero sí del cuestionario A para favorecer respuestas concordantes.

Por último, cerramos el diseño con la elección de los parámetros que dan lugar a las distintas imágenes. Para ello hacemos notar en primer lugar algunas interpretaciones gráficas de cada parámetro:

- En el caso de la familia de funciones lineales, $\{f(x) = ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$, el parámetro a se interpreta gráficamente como la pendiente de la gráfica de la función, mientras que b se interpreta gráficamente dentro de la familia como el desplazamiento vertical de la gráfica de la función $g(x) = ax$, que es una recta que pasa por el origen. Tradicionalmente en los libros de textos se suelen nombrar estos parámetros como m y n, pero no pretendemos provocar dicha asociación más allá del propio formato del cuestionario.

- En el caso de la familia de funciones cuadráticas, $\{f(x) = ax^2 + bx + c: a, b, c \in \mathbb{R}\}$, sabemos que sus gráficas son parábolas. Son simétricas respecto de la recta determinada en los ejes cartesianos por la ecuación $x = {}^{-b}/_{2a}$, teniendo un mínimo o máximo en el corte con dicha recta dependiendo si a es positivo o negativo respectivamente. El parámetro c se interpreta gráficamente dentro de la familia como el desplazamiento vertical de la gráfica de la función $g(x) = ax^2 + bx$, que es una parábola que pasa por el origen.
- En el caso de la familia de funciones exponenciales $\{f(x) = ab^x + c: a, c \in \mathbb{R} ; b \in \mathbb{R}^+\}$ sabemos que sus gráficas son continuas, estrictamente monótonas cuando $b \neq 1$ y $a \neq 0$ (son constantes en caso contrario), convexas cuando a y b son estrictamente positivos, cóncavas cuando son estrictamente negativos, posee una asíntota horizontal $y = c$ a la que tiende en más infinito si es estrictamente decreciente o en menos infinito si es estrictamente creciente y la tendencia en el extremo contrario es más infinito o menos según el signo de a. En el caso $b = 0$, la gráfica coincide con la constante $y = a + c$. El parámetro c se interpreta gráficamente dentro de la familia como el desplazamiento vertical de la gráfica de la función $g(x) = ab^x$.
- En el caso de la familia de funciones de proporcionalidad inversa, $\{f(x) = \frac{a}{x-b} + c: a, b, c \in \mathbb{R}\}$, sabemos que sus gráficas son hipérbolas. Sus asíntotas son las rectas determinadas en los ejes cartesianos por las ecuaciones $x = b$ y $x = c$, determinando cuatro cuadrantes. Si a es positivo la gráfica correspondiente está en el primer y tercer cuadrante tomando dichas rectas como ejes de referencia, y de ser negativo en el segundo y cuarto cuadrante.

Elegimos entonces una muestra de valores de los parámetros que capten esencialmente la posición y forma dentro de cada una de las familias:

- En el caso de la familia de funciones lineales, tomamos $a \in \{-2, -1, -0'5, 0'5, 1, 2\}$ y $b \in \{-1, 0, 1\}$.

- En el caso de la familia de funciones cuadráticas, tomamos $a \in \{-2, -1, -0'5, 0'5, 1, 2\}$ y $b \in \{-1, 0, 1\}$.
- En el caso de la familia de funciones exponencial, tomamos $a \in \{-2, -1, -0'5, 0'5, 1, 2\}$ y $b \in \{0'5, 1, 2\}$.
- En el caso de la familia de funciones de proporcionalidad inversa, tomamos $a \in \{-2, -1, -0'5, 0'5, 1, 2\}$ y $b \in \{-1, 0, 1\}$.

Las funciones propuestas a relacionar por el alumnado son tres en cada cuestionario B.1, permutando los parámetros a y b, buscando distintas referencias en horizontal y vertical de forma que no haya un patrón reconocible.

Por último, cabe hablar entonces del interés de este diseño en el análisis y valoración posterior. Creemos que es un formato útil pues podemos asignar una puntuación a cada una de las funciones que le pedimos al alumnado, valorando así la cercanía a la respuesta correcta, y con ello relacionar el significado que le atribuyen a cada uno de los parámetros de forma independiente mirando horizontal y verticalmente las respuestas dadas. La exposición de este análisis de resultados se trata con mayor profundidad en el Punto 4.6.

Por último señalar que el cuestionario B.2 aporta información descriptiva de cómo el alumnado toma la decisión de asignar las funciones propuestas con las gráficas. Remitimos a los Anexos 8.18 y 8.19 para observar la estructura, que no es más que una tabla con espacio para que el alumnado pueda escribir.

4.4 PLANIFICACIÓN Y EJECUCIÓN DE LAS SESIONES

Una vez diseñados los cuestionarios, conviene planificar las sesiones de aula tanto espacial como temporal teniendo en cuenta los recursos materiales y de población sujeto de estudio. De hecho en este trabajo juega un papel primordial el uso de GeoGebra por lo que requerimos necesariamente el uso de ordenadores, donde la disposición de los mismos y sus características determina en parte las condiciones en las que podemos realizar las sesiones que planteamos.

El equipo informático del que disponemos para este estudio está situado en el aula informática del centro educativo. La distribución de ordenadores en el aula se compone de dieciséis ordenadores de reciente adquisición para el curso 2014-15, aunque uno no se encuentra operativo en el periodo en el que se va a ejecutar las prácticas con ordenador. Para la realización de esta prueba vemos práctico numerar los equipos informáticos según su distribución espacial tal como se ve en la Figura *3*. Cabe añadir que el acceso a la misma es limitado en cuanto a número de sesiones disponibles, ya que existe profesor de informática en el centro que hace uso de la misma en horario lectivo, por lo que debemos ajustarnos al horario disponible de la misma y el propio del autor del trabajo. El ordenador del profesor se encuentra conectado a un proyector que muestra la pantalla sobre una pizarra blanca de rotulador que hace las veces de pantalla visible desde todo el aula.

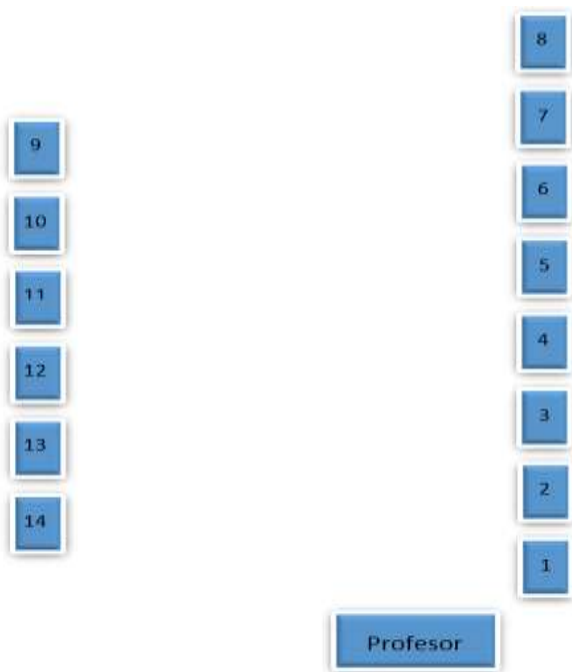


Figura 3. *Disposición de los ordenadores del aula de informática*

Respecto al alumnado al que se le pasará el cuestionario, tomamos la decisión de pasarlo dentro de dos grupos, uno de 2º de ESO al que se le imparte clase de matemáticas y otro de 4º de ESO al que no. La elección de ambos grupos vino determinada por disponer de una hora libre en el aula de informática semanal de forma que no afectábamos la docencia por parte del profesor de informática, siendo en el caso del grupo de segundo integrada dentro del horario de clase y en el de cuarto en una hora disponible por el autor del trabajo sin docencia. Comentamos brevemente la situación curricular de ambos grupos respecto al enfoque de trabajo del tema de funciones:

- El grupo de 2º de ESO ha visto lo básico de representación gráfica de funciones mediante tablas de valores obtenidas evaluando expresiones polinómicas de primer grado. No se les ha presentado la función lineal como familia de funciones ni características que la definan.
- El grupo de 4º de ESO han trabajado la representación gráfica de familias de funciones en el curso anterior y el actual. En la lineal han visto el significado de los parámetros, en la cuadrática sólo el significado gráfico del coeficiente del término de mayor grado y el cálculo de cortes con los ejes cartesianos. Respecto a las familias de funciones de proporcionalidad inversa o las exponenciales, realmente su trabajo en el aula se limitó según su profesora que les impartió clase limitarse a presentar los casos particulares de una función inversa y otra exponencial ($f(x) = {}^{1}/_{x}$ y $g(x) = e^{x}$) mediante su representación a partir de tablas de valores, resaltando algunas características globales como continuidad, tendencia o forma.

En este punto, es conveniente hacer un breve inciso, antes de exponer la planificación de las distintas sesiones y las decisiones respecto de las mismas. En nuestro caso compartimos las ideas de Hopkins (1989, pp. 165-167) sobre investigación de aula que expresan nuestras inquietudes ante la realización de estas tareas:

- La función principal del profesor es la de enseñar y no debería interrumpirse por otras tareas.
- Al hilo del anterior punto, la recopilación de datos no debe obstruir la función docente.
- La metodología que se desarrolle debe permitir formular hipótesis y poder llevarse al aula.
- Debe ser atractivo para el profesor.
- Debe prestarse atención a los aspectos éticos.

Como comentarios a las mismas, conviene que resaltemos que tanto el autor del trabajo como su tutor tomamos la decisión que la elección de los grupos al tratarse de un estudio exploratorio lo haríamos en base a disponibilidad determinada por el aula de informática que requeríamos. Esto tiene sentido pues no buscamos un perfil determinado de alumnado, en todo caso detectarlo mediante este estudio o definir rasgos que nos permitieran hacerlo. Respecto a la docencia propia de matemáticas tanto el autor como el departamento del centro educativo vieron interesante que el tema de trabajar aspectos de funciones mediante GeoGebra podría resultar interesante pues el próximo curso las aulas de matemáticas se tiene previsión de ser equipadas con pizarras digitales, con lo que estas sesiones podrían aportar información útil con vistas al siguiente curso. En particular, la profesora de matemáticas del grupo de 4º de ESO, quiso estar presente y se ofreció a ayudar durante la realización de las sesiones. Por último, a nivel de centro se informó convenientemente al equipo directivo por el propio autor y tutor contando con su colaboración, informando a las familias del mismo mediante una autorización.

Respecto al diseño de las sesiones, discutimos acotar el uso de las mismas por los principios antes expuestos, queríamos que el ritmo final lo marque el propio alumnado. Planteamos movernos entre dos y cuatro sesiones pues lo vemos suficiente antes de las mismas al trabajar con cuatro cuestionarios. Como el alumnado no acude al aula de informática en hora de matemáticas ni presumiblemente conoce el software GeoGebra se plantea antes de realizar las propias sesiones hacer una presentación de la misma y el formato de los cuestionarios para que el alumnado entienda la mecánica de la misma. La estructura de esta previsión la describimos a continuación:

4.4.1 Fase inicial: Familiarización con GeoGebra, sus deslizadores y cuestionarios

1) El autor del trabajo utiliza el proyector del aula para presentar la herramienta GeoGebra. Se les presenta al alumnado como una calculadora gráfica de forma que pueden representar funciones dadas por su expresión sin más que introducirlo por teclado. Se introducen expresiones como:

$$y = x + 1,\ y = \frac{1}{x},\ y = -2x^2,\ y = 3^x$$

2) Se le pide al alumnado que en sus ordenadores asignados abran una carpeta llamada *Sesión_0*. Dentro abrirán el *applet* llamado *000.ggb* tal como se muestra en el proyector y permanecerán a la espera mirando el proyector.
3) Este ejemplo consiste en cuatro deslizadores que mueven un punto azul que parte de (1,1) derecha, arriba, izquierda, abajo. El desorden es intencionado. Se les pide llevar mediante los deslizadores el punto dado a (-1,1) y luego a (2,-5) que están presentes. Por último,

deben describir por escrito en un folio qué influencia tienen en el punto los deslizadores. Una vez lo hagan se pone en común para que todos entiendan cuál es la respuesta correcta y se use una expresión adecuada de redacción. Lo que perseguimos con este ejemplo externo a las sesiones del cuestionario es no manipular las funciones de la prueba para evitar influir en las respuestas, dejando claro cómo usar los deslizadores y cómo redactar la respuesta adecuadamente.

4) Por último, buscamos familiarizar al alumnado con el formato de los cuestionarios. Para ello se les propone una tarea de interpolación en el caso de la familia de funciones definidas por la ecuación $y = a, a \in \mathbb{R}$ para los puntos (1,5), (-2,-6) y (0,3) visibles en los applets 001.ggb, 002.ggb y 003.ggb respectivamente. Se les dice en el cuestionario que describan el significado del deslizador o parámetro a mostrándoles en el proyector un ejemplo del que hemos llamado cuestionario A para este caso similar al de la Figura 1.

4.4.2 Fase de ejecución: Prácticas y cuestionarios

En esta fase se realizan cada una de las cuatro pruebas con familias de funciones. El orden de actuación en el aula es siempre el siguiente:

1) En primer lugar se encienden todos los ordenadores.
2) Se reparten los cuestionarios con todo el alumnado sentado en su lugar que no cambia en las sucesivas sesiones.
3) El cuestionario A se reparte a petición del alumnado, pero el cuestionario B sólo se entrega previa revisión visual de que se ha completado el mismo y cerrado el programa GeoGebra. Se insta a completar los apartados que se detecten vacíos.
4) Una vez acabado el cuestionario B, se revisa visualmente la conclusión del mismo recogiéndose en ese momento los cuestionarios A y B.
5) En cada sesión, sólo se repartirán un máximo de dos cuestionarios respectivos a dos familias de funciones diferentes de la secuencia establecida con anterioridad.

En cuanto a las sesiones necesarias previstas, de dos a cuatro, cuando la mayoría del alumnado haya concluido los cuestionarios se considerará de facto acabada en dicha sesión para no interferir en la docencia normal del grupo.

4.5 PREPARACIÓN DE LAS TAREAS DE INTERPOLACIÓN CON GEOGEBRA

Aunque por razones de redacción este apartado figure a continuación del anterior, su desarrollo ocupó parte del trabajo previo de estudio de las posibilidades y limitaciones de esta herramienta tecnológica que ya hemos expuesto en el Punto 3.5.

En cuanto a las decisiones estéticas de las prácticas, se ha tomado como referente el uso que hacen los libros de textos del alumnado al estudiar las gráficas. Estos libros de texto de segundo y cuarto curso de la secundaria (Colera y Gaztelu (2011); Colera, Oliveira, Gaztelu, Colera y Martínez (2011)) usan unos ejes cartesianos en color negro, sobre una cuadrícula de línea continua en tono gris, reservando el color rojo para el trazado de la gráfica de la función para la presentación de la mayoría de sus ilustraciones. Esto se implementa, tal como se aprecia en la Figura 4, en las prácticas con GeoGebra y en el cuestionario B con vistas a mantener cercanía con el uso de clase del libro de texto.

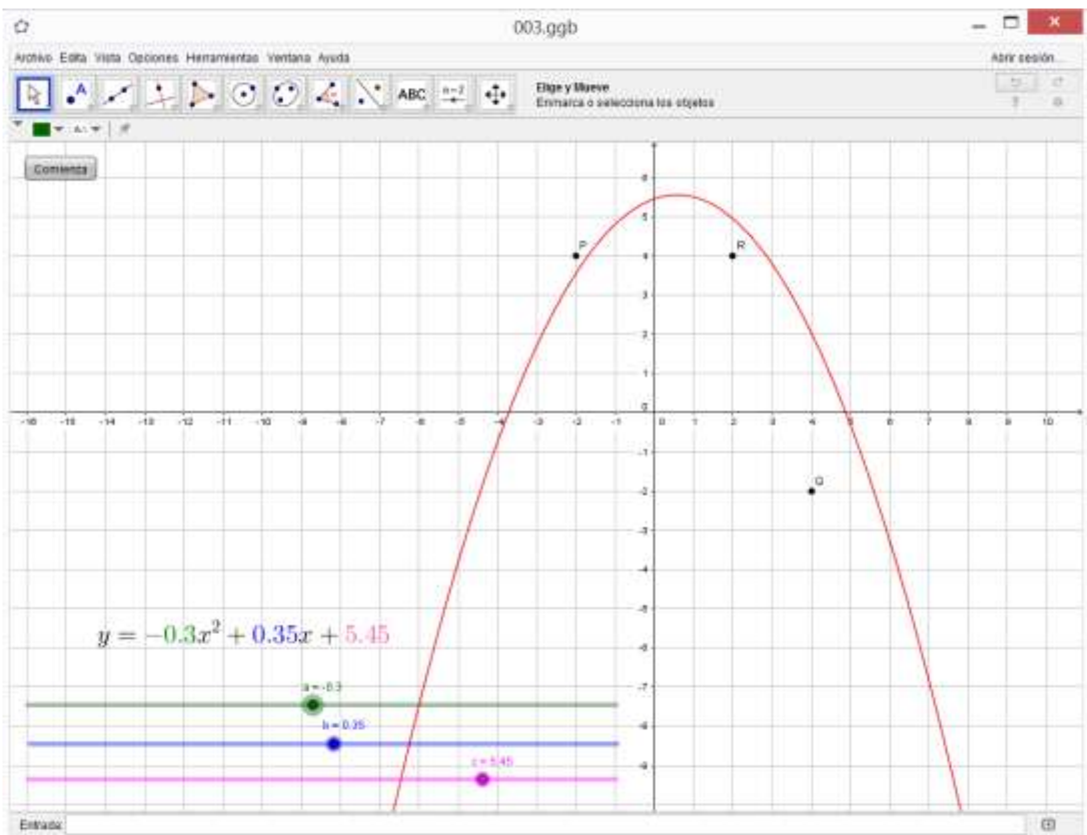


Figura 4. *Ventana de ejemplo de una práctica iniciada con GeoGebra*

En la actividad de interpolación con la resolución gráfica del problema que planteamos, vinculamos los deslizadores situados en la parte inferior izquierda de la pantalla (véase la Figura 4) con su representación simbólica por el uso del mismo color en parámetro como deslizador y la ecuación para favorecer su relación durante la práctica y que el alumnado pueda concentrarse en sacar conclusiones. En la fase inicial podremos destacar que los deslizadores son los elementos interactivos de las prácticas, mientras que los rótulos así como ajustar el zoom o la posición en pantalla de los ejes cartesianos, los aspectos a adecuar para cada usuario para visualizar con mayor precisión la gráfica.

Por último, manifestamos nuestra creencia previa a la práctica que el objetivo planteado de interpolación es lo suficientemente claro como para que el alumnado se concentre en la tarea. Además la graduación en el número de deslizadores, pasando de uno a la fase inicial, dos con la familia de funciones lineales en el cual creemos que el alumnado se siente cómodo por haber trabajado el concepto desde temprana edad, y tres en el resto de los casos, sirve como graduación en el nivel de dificultad partiendo de situaciones más fáciles presumiblemente de éxito a otras más complicadas.

En cuanto a la configuración de las prácticas de GeoGebra, recogemos las decisiones en cuanto a los elementos que lo componen.

- El color de los puntos para interpolar es negro tal como se usan en los libros de texto del alumnado.
- Los deslizadores que toman tanto valores positivos como negativos, tienen como límite inferior -10 y superior 10. En el caso del deslizador que proporciona el parámetro de la exponencial, tiene como límite inferior 0,1 y como superior 10. El incremento se fija en 0,05. Visualmente, ocupan 15 unidades (7,5 en un deslizador de la exponencial) en las posiciones que se ven en la Figura 4. Los colores asignados a los deslizadores a, b, y c, son verde oscuro, azul y magenta tal como son llamados en GeoGebra.
- En cada uno de los deslizadores, activamos el registro en la hoja de cálculo de GeoGebra. Esto hace que cada vez que se interaccione con un deslizador, se guarda el valor correspondiente en la misma. Además, creamos una variable auxiliar, que también introducimos en la hoja de cálculo que toma el tiempo. Esto se hace para tener un registro temporal de las interacciones que efectúan los alumnos.

- El valor inicial que toman los deslizadores es 0, salvo el parámetro b en el caso de las prácticas de la familia de funciones exponenciales, que toma el valor 0,1. Con lo que visualmente se parte de la constante $y = 0$.
- El botón etiquetado como *Comienza*, al pulsarlo reinicia los valores de los deslizadores a su valor inicial. Además tiene el mismo efecto con las variables auxiliares creadas para medir con precisión el tiempo en cada momento que se interaccione con los deslizadores y tener un registro consultable posteriormente.
- El rótulo de la ecuación mostrada se realiza con ayuda de LaTeX, lo cual permite colorear los parámetros conforme a su deslizador.
- La cuadrícula se configura para ser de líneas continuas, con respecto a la de guiones de la configuración por defecto.
- En cada uno de los ejes se establece la distancia en 1, con lo cual al acercar o alejar la vista en GeoGebra, el programa mantiene la graduación frente a su elección automática por defecto de la escala según el espacio en pantalla que se muestre.

4.6 EL PROCESO DE ORGANIZACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En primer lugar vamos a destacar los bloques que serán objeto de análisis caracterizados por el tipo de interacción que se establece del alumnado con la tarea y la mediación o no del medio informático GeoGebra.

En general, podemos decir que cada uno de los cuestionarios, que ya subdividimos etiquetándolos convenientemente, se corresponden con los bloques de análisis que recogemos y a su vez, con cada uno de los objetivos específicos que planteamos en la introducción del trabajo. No obstante, para que resulte más cómoda su lectura, recogemos en la Tabla 4.6.1 las distintas partes que concebimos respecto a la organización de los resultados, utilizando las etiquetas ya presentadas anteriormente en el Puntos 4.3.1 y 4.3.2, junto a su vinculación con los objetivos específicos que perseguimos con este trabajo.

Tabla 4.6.1

Organización esquemática de análisis de los resultados por bloques

Bloques de análisis	Descripción	Objetivo específico	Tipo de análisis
[A.1] Tareas predefinidas de interpolación con GeoGebra	Analizar el desempeño del alumnado en las tareas descritas en el cuestionario A consistentes en tres tareas predefinidas (001.ggb, 002.ggb y 003.ggb) de interpolación, que se guardan para un análisis posterior.	*a*	Cuantitativo
[A.2] Interpretación de los parámetros de las familias de funciones	Analizar los rasgos atribuidos a los parámetros de las familias de funciones.	*b*	Cualitativo
[A.3] Tarea aleatoria de interpolación con GeoGebra	Analizar los pasos que destaca el alumnado en una tarea de interpolación con puntos escogidos aleatoriamente que deben anotar. Se trata de la quinta y última tarea en cada familia de funciones con GeoGebra. Se les pide dibujar la solución que lleguen a obtener en pantalla por escrito.	*c*	Cualitativo
[B.1] Asignar expresión algebraica de una función con su gráfica	Analizar la asociación que hace el alumnado de tres funciones elegidas entre la familia correspondiente con un cuadrante de dieciocho gráficas.	*d*	Cuantitativo
[B.2] Detección de estrategias empleadas en el bloque anterior.	Por un lado, pretendemos controlar el uso de estrategias alternativas a la experiencia de las sesiones de trabajo en las tareas de interpolación con GeoGebra y por otro, obtener información de la relación que establece el alumnado de su interpretación de los parámetros ([A.2])	*d*	Cualitativo y cuantitativo

Nota. El identificador entre corchetes se añade para una mejor relación con los cuestionarios, siendo la letra la que indica el cuestionario del que se extrae la información. En el caso del cuestionario A, los números hacen referencia a las secciones descritas en el Punto 4.3.1.

4.6.1 Organización y análisis del cuestionario A

El cuestionario A guía la interacción del alumnado con las tareas implementadas de GeoGebra. Descriptivamente, posee tres secciones tal como hemos expuesto en la Tabla 4.6.1 que corresponden a tres fuentes de información que vamos a organizar para su análisis.

Las tareas de interpolación para cada una de las cuatro familias de funciones propuestas, [A.1] en la Tabla 4.6.1, nos genera tres tareas que ha guardado el alumnado. Planteamos una puntuación dicotómica de 1 si se efectúa correctamente o 0 en caso contrario como adecuada a establecer el éxito del alumnado y detectar si ciertos parámetros son más difíciles que otros. Además, complementariamente tendremos información de toda la manipulación del alumnado de cada uno de los deslizadores y el tiempo empleado. Esto permite un control del desempeño del alumnado absoluto que puede ilustrar casos particulares que resulten de nuestro interés.

Respecto a la interpretación de los parámetros, [A.2] en la Tabla 4.6.1, haremos un análisis cualitativo usando una escala de valoración y descripción de casos detectados de interés interesándonos tanto el vocabulario como las expresiones usadas.

Para finalizar, con la tarea aleatoria que se les plantea de interpolación, [A.3] en la Tabla 4.6.1, será la quinta que efectúen y valoraremos no sólo la realización de la misma, sino aquellos pasos que destacan y la reproducción mediante un dibujo de la gráfica obtenida tal como la perciben en la pantalla del ordenador. En particular, destacaremos aquellos aspectos gráficos que nos resulten de interés.

4.6.2 Organización y análisis del cuestionario B

El cuestionario B, recordamos que lo hemos dividido en dos partes de forma explícita al repartirlo al alumnado tal como se ve en la Figura 2. Ahora entraremos a detallar la forma de organizar para su análisis las respuestas dadas por el alumnado de cada grupo.

La idea es valorar en el cuestionario B.1 la cercanía a la respuesta correcta del alumnado al asignar expresiones de cada ecuación con su gráfica, en el sentido que exponemos a continuación de forma que no recojamos simplemente la elección correcta, sino información que podamos contrastar con la obtenida en el cuestionario A.

Lo que haremos es puntuar los parámetros a y b para cada una de las tres funciones que debe relacionar el alumnado con su gráfica correspondiente en el cuestionario B.1:

- El parámetro a valoramos lo puntuamos como 2 si es correcto, 1 si tiene el mismo signo que la gráfica correcta y 0 en caso contrario. Por formato de construcción del cuestionario B.1, esto equivale a valorar la gráfica elegida en horizontal. Recogemos en la Figura 5 un ejemplo visual de corrección. A efectos prácticos, vamos a desglosar esta puntuación en dos, valorando con 1 punto si se conserva el signo y con otro punto adicional si coincide el valor del parámetro, 0 en otro caso.
- El parámetro b lo puntuamos como 1 si es correcto o 0 en caso contrario. Por formato de construcción del mismo, esto equivale a valorar la gráfica elegida en vertical. Recogemos en la Figura 6 un ejemplo visual de corrección.

0	0	0	1	2	1
0	0	0	1	2	1
0	0	0	1	2	1

Figura 5. *Ejemplo esquemático de corrección visual del parámetro a*

Esta forma de valorar en cada una de las doce ecuaciones de funciones, tres por cada uno de los cuatro cuestionarios B.1, permite además saber si un alumno ha acertado la gráfica correspondiente cuando puntuemos a con 2 puntos y b con 1.

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Figura 6. *Ejemplo esquemático de corrección visual del parámetro b*

Organizaremos esta información en una tabla para cada uno de los ordenadores y grupos puntuando cada una de las elecciones tal como hemos explicado. Un análisis clúster nos permitirá agrupar de manera adecuada los datos de forma que podamos realizar diferentes análisis estadísticos y descriptivos.

Este cuestionario se complementa con el cuestionario B.2 para obtener más información de porqué realizan esa asignación.

5 RESULTADOS

En este capítulo se hace un análisis de los datos recogidos en los distintos cuestionarios etiquetados como A y B. La organización de este análisis ha sido descrita en la sección precedente y un resumen descriptivo de los diferentes análisis se desglosa en la Tabla 4.6.1, etiquetando las divisiones con corchetes.

Para mantener la privacidad, nos referiremos con *alumno* al usuario que use un ordenador indiferentemente de cuál sea su género pues no es tenido en cuenta en este trabajo. Además, cuando hagamos referencia a este alumnado optaremos por unas etiquetas entre corchetes indicando en primer lugar el curso y en segundo lugar el ordenador ocupado durante las sesiones con ordenador. Por ejemplo, el alumno [2_3] es de 2ºESO y ocupa el puesto 3 durante las sesiones.

5.1 ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO A

El cuestionario A es la guía del alumnado en la resolución de las tareas de interpolación con GeoGebra para cada una de las familias de funciones. Los datos recogidos alternan construcciones finales con GeoGebra guardados como archivos y registros tanto verbales como de trazado de gráficas a mano alzada en el propio cuestionario de lo observado en pantalla.

5.1.1 [A.1] Tareas predefinidas de interpolación con GeoGebra

Los datos que manejamos en este apartado se registraron en cada uno de los ordenadores en uso por el alumnado participante en el estudio.

Constituye una primera valoración del desempeño en tareas de interpolación del alumnado en dos categorías fundamentales: fracaso o éxito. Este carácter dicotómico nos hace agrupar por comodidad en la Tabla 5.1.1 y Tabla 5.1.2 el desempeño del alumnado en las tareas con los puntos predefinidos que se les proponía.

Tabla 5.1.1

Éxito del alumnado de 2ºESO en las tareas predefinidas de interpolación con cada familia de funciones

Ordenador	Lineal	Cuadrática	Exponencial	Prop. inversa
1	3	2	3	--
2	3	2	--	--
3	3	3	3	--
4	3	3	3	3
5	3	3	3	3
6	3	3	3	--
7	2	3	3	3
8	3	3	-3	3
9	3	3	3	3
10	3	3	3	--
11	3	3	3	-2
12	3	3	3	3
13	3	3	3	3
14	3	3	3	--

Nota. Se identifica alumnado con el ordenador ocupado. Se valora con 1 el "éxito" y el "0" indica fracaso, dando lugar a puntuaciones entre 0 y 3. La ausencia de puntuación es consecuencia de no solicitar el alumnado trabajar con el cuestionario. Las puntuaciones en negativo indican la pérdida de datos al no guardar el alumnado los archivos.

Respecto al éxito en el alumnado de 2ºESO, los datos ponen de manifiesto que las tareas de interpolación con la familia de funciones lineal, cuadrática y exponenciales son calificables como fáciles teniendo éxito en las tres tareas propuestas, recordemos sin mediación alguna del investigador que vayan más allá de recordar aspectos del interfaz o recordar el objetivo. Debemos matizar en el caso del ordenador 8 que la puntuación negativa se debe a que el alumno no guardó ninguno de los archivos de trabajo pues conservan la fecha en la que fueron creados, y esto queda manifiesto por los registros escritos del cuestionario A de la función exponencial donde se observa que reproduce el resultado en pantalla de la quinta tarea (aleatoria) de interpolación. Aunque no deja de ser un inconveniente el error humano en el paso final de guardar el archivo de trabajo, debemos tenerlo en cuenta para no llegar a conclusiones erróneas.

En el caso de las tareas de interpolación propuestas en la función inversa, seis alumnos no llegan a realizarla.

Destacamos algunas observaciones generales del desempeño del alumnado de 2ºESO en las tareas propuestas:

- Existen distintos niveles de destrezas de resolución de las tareas del cuestionario A.
- Todo cuestionario iniciado se resuelve correctamente si nos atenemos a las evidencias del registro de los archivos guardados por el alumnado, o en ausencia de estos en dos casos, al registro escrito efectuado en el propio cuestionario A de la familia de función que constata que se debieron resolver al ser tareas secuenciales análogas variando solamente los puntos a interpolar.
- El tiempo de resolución de las tareas es mayor conforme suceden las prácticas.
- Requieren de cuatro sesiones de aula para que la mayoría acabe las tareas.
- Existen incidencias en el guardado de las tareas con GeoGebra, no contando con ningún archivo guardado de alguna de las familias.

Tabla 5.1.2

Éxito del alumnado de 4ºESO en las tareas predefinidas de interpolación con cada familia de funciones

Ordenador	Lineal	Cuadrática	Exponencial	Prop. inversa
1	3	3	2	--
2	3	3	3	3
3	3	2	3	3
4	3	2	3	3
5	3	3	3	3
6	3	3	3	3
7	3	3	3	3
8	3	3	*	*
9	3	3	3	3

Nota. Se identifica alumnado con el ordenador ocupado. Se valora con 1 el "éxito" y el "0" indica fracaso, dando lugar a puntuaciones entre 0 y 3. La ausencia de puntuación es consecuencia de no solicitar el alumnado trabajar con el cuestionario. Las puntuaciones en negativo indican la pérdida de datos al no guardar el alumnado los archivos. El asterisco indica que el alumno decide no seguir participando en el estudio.

En cuanto al éxito en el alumnado de 4ºESO, podemos decir que salvo dos alumnos todos realizan las tareas de interpolación con éxito con cada una de las familias de funciones propuestas. Debemos matizar que el alumno [4_8] decidió no seguir en la segunda sesión participando en el estudio, así que realmente sólo tendríamos un caso en el alumno [4_1] que manifestó gran dificultad con la función exponencial lo que no le permitió pasar de la tercera de las cinco tareas propuestas en ese cuestionario. Nos encontramos que el alumnado de este nivel es más disciplinado que el de 2ºESO al producirse incidencias leves de pérdida de alguno de los doce archivos que manejan en total, pero no es una conducta reiterada.

Destacamos algunas observaciones generales del desempeño del alumnado de 4ºESO en las tareas propuestas:

- Existen distintos niveles de destrezas de resolución de las tareas del cuestionario A.
- Todo cuestionario iniciado se resuelve correctamente si nos atenemos a las evidencias del registro de los archivos guardados por el alumnado.
- El tiempo de resolución de las tareas es mayor conforme suceden las prácticas.
- Requieren de dos sesiones de aula para que todos salvo un caso acaben las tareas propuestas.
- No existen apenas incidencias en el guardado de las tareas con GeoGebra, siendo estas puntuales.

5.1.2 [A.2] Interpretación de los parámetros de las familias de funciones

En este apartado realizamos un análisis cualitativo del uso que hace el alumnado a cada uno de los deslizadores. La omisión de cualquier término en la pregunta busca una respuesta espontánea en el alumnado.

El análisis cualitativo que nos planteamos pretende recoger rasgos fundamentales que permitan valoraciones generales y comparativas. Con este fin, vemos conveniente establecer dos grandes categorías con las que organizar los significados que manifiesta el alumnado.

En la categoría signo adaptamos los descritos por Bartolini y Mariotti (2008) a nuestro trabajo definiéndolos a continuación:

- Artefacto: Recogemos el uso de vocabulario o términos referentes a GeoGebra.

- Pivote: Entendemos por tal a las acciones que vinculan la experiencia gráfica de manipulación con los deslizadores. Pueden ser verbales o sustantivadas.
- Matemático: Recogemos el uso de vocabulario específico de funciones tales como gráfica, ejes, pendiente, función, puntos de corte o variables.

Por otro lado, distinguimos entre niveles de detalle y corrección de los significados atribuidos por el alumnado a los deslizadores o parámetros enlazando las categorías de signos anteriormente descritas:

- Nivel de detalle: Se valora como bajo, medio o alto según el alumnado use los signos definidos con acciones en las gráficas de las funciones al manipular el deslizador. Un nivel bajo de detalle lo entendemos como la ausencia de estas acciones. Un nivel medio, si describen acciones aunque no describen la totalidad las acciones y un nivel alto vincula estas acciones con los valores del deslizador.
- Nivel de corrección: Se valora como bajo, medio o alto si el hecho descrito es correcto. Tenemos que matizar que no hacemos referencia sólo a la corrección matemática, sino a una corrección respecto al significado expresado, ya sea sólo con el artefacto, matemático o una mezcla (pivote). Un nivel bajo de corrección lo entendemos como la ausencia de referencias suficientes para describir el efecto del deslizador o presencia de errores que contradicen el efecto del deslizador. Un nivel medio de corrección si están presentes referencias aunque no describen en su totalidad el efecto del deslizador y un nivel alto si se presta atención a describir la totalidad con ausencia de errores.

El análisis cualitativo de la sección [A.2] del cuestionario A se describe a continuación por medio de tablas junto a algunas de las respuestas que dio el alumnado para ilustrar el proceso seguido en su elaboración. Además se comentan escuetamente buscando destacar el signo predominante y niveles alcanzados en cada familia.

[A.2] Familia de función lineal

Tal como se recoge en las Tabla 5.1.3, el signo predominante en el alumnado de 2ºESO es el de artefacto, más basado en los elementos presentes observables como curva o línea, junto a variedad en los tipos de movimientos. Además, en los signos pivote recogemos las acciones que se producen predominando un nivel de detalle que mayormente medio o alto tanto en detalle como en corrección, aunque hay casos de medios y bajos.

Tabla 5.1.3

Análisis cualitativo del significado atribuido a los deslizadores en la primera práctica, 2ºESO

		Signo			Nivel	
Usuario	Deslizador	Artefacto	Pivote	Matemático	Detalle	Corrección
[2_1]	*a*		Negativo, diagrama de recta decreciente Positivo, diagrama de recta creciente	Crecimiento	Alto	Alto
	b	Movimiento	Negativo, abajo Positivo, arriba		Alto	Alto
[2_2]	*a*	Vueltas	Negativo, diagrama de recta decreciente Positivo, diagrama de recta creciente		Alto	Alto
	b		Negativo, abajo con diagrama Positivo, arriba con diagrama		Alto	Alto
[2_3]	*a*	Inclinación Recta	Positiva, diagrama de recta creciente Negativa, (ausente)		Alto	Medio
	b	Movimiento Vertical	Positivo, sube Negativo, baja		Alto	Alto
[2_4]	*a*	Inclinación Recta	Positivo, diagrama de recta creciente Negativo, diagrama de recta decreciente		Alto	Alto
	b	Movimiento Vertical	Positivo, sube Negativo, baja		Alto	Alto
[2_5]	*a*	Inclinación Recta	Positivo, diagrama de recta creciente Negativa, diagrama de recta decreciente		Alto	Alto
	b	Movimiento Vertical	Positivo, sube Negativo, baja		Alto	Alto
[2_6]	*a*		Positivo, diagrama de recta creciente Negativo, diagrama de recta decreciente		Alto	Alto
	b	Movimiento	Positivo, sube Negativo, baja		Alto	Alto
[2_7]	*a*	Movimiento Agujas reloj	Negativo, sentido horario Positivo, contrario		Alto	Alto
	b	Movimiento	Negativo, abajo Positivo, arriba		Alto	Alto
[2_8]	*a*	Movimiento Agujas reloj	Negativo, sentido horario Positivo, contrario		Alto	Alto
	b	Movimiento	Negativo, abajo Positivo, arriba		Alto	Alto

[2_9]	*a*	Giro Línea			Medio	Bajo
	b	Movimiento Línea	*a* positivo, horizontal *a* negativo, diagonal	(Dependencia)	Alto	Bajo
[2_10]	*a*	Giro	Negativo, giro derecha		Medio	Medio
	b	Giro	Horizontal y vertical		Medio	Medio
[2_11]	*a*	Movimiento Línea	Vertical		Medio	Bajo
	b	Movimiento Línea	Horizontal		Medio	Bajo
[2_12]	*a*	Movimiento Línea	Vertical		Medio	Bajo
	b	Movimiento Línea	Horizontal		Medio	Bajo
[2_13]	*a*	Movimiento Línea	Vertical		Medio	Bajo
	b	Movimiento Línea	Horizontal		Medio	Bajo
[2_14]	*a*	Movimiento Agujas reloj	Negativo, sentido horario Positivo, contrario		Alto	Alto
	b	Movimiento	Vertical y horizontal		Medio	Bajo

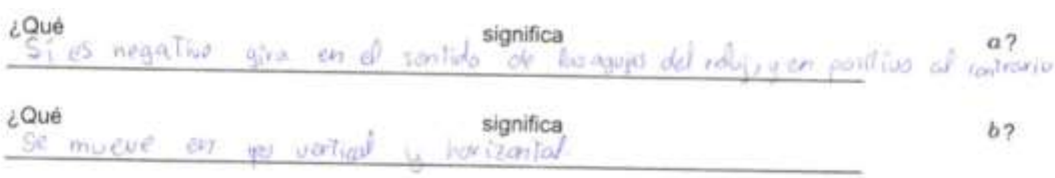


Figura 7. *Respuesta del alumno [2_14] en tarea [A.2] de la familia lineal*

En contraposición con el anterior grupo, como se recoge en la Tabla 5.1.4, el alumnado de 4ºESO se inclina por signos matemáticos con la presencia de vocabulario específico como pendiente o corte con los ejes. Encontramos omisión de las acciones que observan (signo pivote) en la mitad del alumnado, lo que limita significativamente sus descripciones de los parámetros manifestando niveles tanto de detalle como de corrección que oscilan entre bajos y altos, siendo estos últimos alcanzados en menor medida. Además, los que sí usan signos pivote en general vemos que tienen dificultad para que la descripción que dan alcancen altos niveles de detalle y corrección.

Destacamos también una diferencia con respecto al grupo de 2ºESO, consistente en que hay un alumno de 4ºESO que hace un uso combinado de los tres tipos de signos descritos. Véase, por ejemplo, el alumno [4_7] que llega a niveles altos tanto de detalle como de corrección en el parámetro *a*.

Tabla 5.1.4

Análisis cualitativo del significado atribuido a los deslizadores en la primera práctica, 4ºESO

		Signo			Nivel	
Usuario	Deslizador	Artefacto	Pivote	Matemático	Detalle	Corrección
[4_1]	*a*		Decreciente	Función	Bajo	Medio
	b	Movimiento	Crece o decrece en A y B		Medio	Bajo
[4_2]	*a*			Eje X Pendiente	Bajo	Medio
	b			Eje Y Punto de corte	Bajo	Medio
[4_3]	*a*			Pendiente	Bajo	Medio
	b			Punto de control Eje Y	Bajo	Bajo
[4_4]	*a*			x Pendiente	Bajo	Medio
	b		Creciente o decreciente	y	Medio	Medio
[4_5]	*a*			Pendiente	Bajo	Medio
	b		Creciente o decreciente		Medio	Bajo
[4_6]	*a*	Raíz	Positivo, creciente Negativo, decreciente		Alto	Medio
	b		Positivo, sube Negativo, baja	Recta	Alto	Alto
[4_7]	*a*	Girar en torno a	Positivo, creciente Negativo, decreciente	Eje X	Alto	Alto
	b	Girar en torno a		Eje Y	Medio	Bajo
[4_8]	*a*		Derecha, crece Izquierda, decrece	Crecimiento	Alto	Alto
	b		Positivo o negativo		Medio	Bajo
[4_9]	*a*		Positiva, asciende Negativa, desciende	Pendiente	Alto	Alto
	b			Ordenada Corte Eje Y	Bajo	Alto

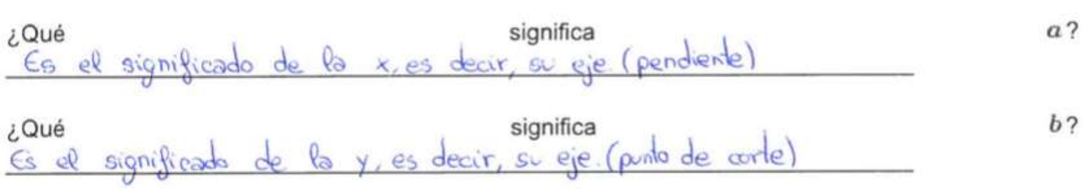


Figura 8. *Respuesta del alumno [4_2] en tarea [A.2] de la familia lineal*

[A.2] Familia de función cuadrática

Nuevamente el signo predominante manifestado en el alumnado de 2ºESO es el de artefacto (véase Tabla 5.1.5), donde el vocabulario usado combina referencias a la como curva o línea con interpretaciones del movimiento que afectan a la forma, que describen por similitud con la “U” o diagramas con rasgos como la anchura o doblez, además de movimientos no arbitrarios como llegar a hablar de balanceo. En cuanto al nivel de detalle y concreción que manifiestan, salvo excepciones, es medio o alto por un estudio adecuado distinguiendo casos usando signos pivote.

Tabla 5.1.5

Análisis cualitativo del significado atribuido a los deslizadores en la segunda práctica, 2ºESO

		Signo			Nivel	
Usuario	Deslizador	Artefacto	Pivote	Matemático	Detalle	Corrección
[2_1]	*a*	Doblar	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Alto
	b	Movimiento	Positivo, izquierda Negativo, derecha		Alto	Medio
	c	Movimiento	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Alto
[2_2]		--	--	--	--	--
[2_3]	*a*	Forma	Positivo, “U” Negativo, montaña		Alto	Alto
	b		Positivo, diagrama homólogo a $y = x$ Negativo, diagrama homólogo a $y = -x$		Alto	Alto
	c	(Movimiento)	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Alto
[2_4]	*a*	(Forma)	Positivo, “U” Negativo, montaña		Alto	Alto
	b	Movimiento	Positivo, diagrama homólogo a $y = x$ Negativo, diagrama homólogo a $y = -x$		Alto	Alto
	c	Movimiento Vertical	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Alto
[2_5]	*a*	Movimiento Curva	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Medio
	b	Movimiento Línea	Positivo, diagrama homólogo a $y = x$ Negativo, diagrama homólogo a $y = -x$		Alto	Alto
	c	Movimiento Línea	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Alto
[2_6]	*a*	Movimiento Curva	Arriba o abajo		Medio	Medio
	b	Movimiento	De un lado a otro		Medio	Medio
	c	Distancia	Ensanchar o estrechar		Medio	Bajo
[2_7]	*a*	Doblez	Arriba y abajo		Medio	Medio
	b	Movimiento	De un lado a otro		Medio	Medio
	c	Movimiento	Arriba y abajo		Medio	Medio
[2_8]	*a*	Doblez	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Alto
	b	Balanceo	Positivo, derecha Negativo, izquierda		Alto	Alto

	c	Movimiento	Positivo, arriba Negativo, abajo	Alto	Alto
[2_9]	*a*	Doblez Línea Por el medio	Positivo, arriba Negativo, abajo	Alto	Alto
	b	Giro Línea		Bajo	Bajo
	c	Movimiento Línea	Arriba y abajo	Medio	Medio
[2_10]	*a*	Giro	Arriba y abajo	Bajo	Bajo
	b	Giro Deslizador	A la izquierda	Bajo	Bajo
	c	Ampliación		Bajo	Bajo
[2_11]	*a*	Movimiento Doblez Línea	Dentro o fuera	Medio	Medio
	b	Movimiento Línea	Horizontal	Medio	Medio
	c	Movimiento Línea	Vertical	Medio	Medio
[2_12]	*a*	Giro o doblez Línea	Positivo, sube Negativo, baja	Alto	Alto
	b	Movimiento	Izquierda o derecha	Medio	Medio
	c	Movimiento Línea	Sube o baja	Medio	Medio
[2_13]	*a*	Apertura Línea		Bajo	Medio
	b	Movimiento Línea	Izquierda y derecha	Medio	Medio
	c	Movimiento Línea	Arriba y abajo	Medio	Medio
[2_14]	*a*	Línea Puntas Orientación	Arriba o abajo	Medio	Medio
	b	Movimiento Curva	De lado a lado	Medio	Medio
	c	Movimiento Curva	Arriba o abajo	Medio	Medio

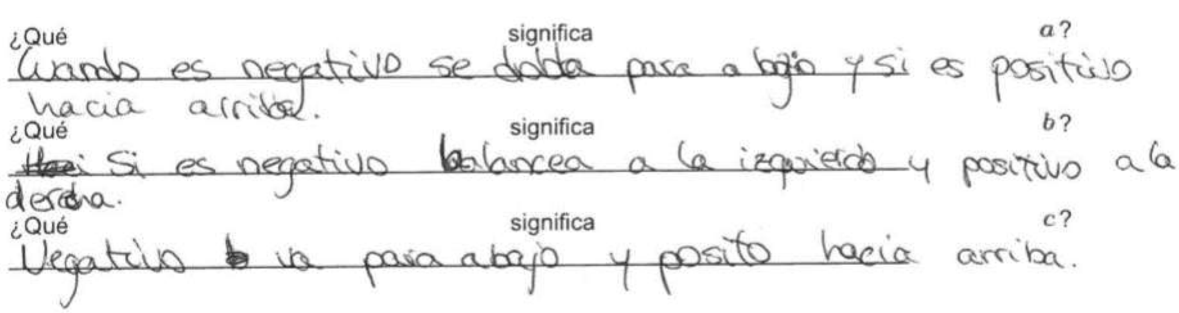


Figura 9. *Respuesta del alumno [2_8] en tarea [A.2] de la familia cuadrática*

Otra vez contrastan estas observaciones con el grupo de 2ºESO como se recoge en la Tabla 5.1.6 del alumnado de 4ºESO, que se inclina por incluir signos matemáticos por mayoría en sus descripciones. Observamos que aquellos que usan términos no gráficos como coeficientes, pendiente o número, no llegan a descripciones con detalle y corrección, mientras que el alumnado que incorpora el vocabulario específico de la familia como ramas y su orientación es capaz de describir con mayor detalle y precisión. En este caso, entendemos por tanto que es clave el conocimiento o no de la terminología matemática para hacer una buena descripción del significado de los parámetros si se opta por signos matemáticos.

Tabla 5.1.6

Análisis cualitativo del significado atribuido a los deslizadores en la segunda práctica, 4ºESO

		Signo			Nivel	
Usuario	Deslizador	Artefacto	Pivote	Matemático	Detalle	Corrección
[4_1]		--	--	--	--	--
[4_2]	*a*	Curva			Bajo	Bajo
	b			Punto de pendiente	Bajo	Medio
	c			Punto de corte	Bajo	Medio
[4_3]	*a*			Coeficiente	Bajo	Bajo
	b			Coeficiente	Bajo	Bajo
	c			Número	Bajo	Bajo
[4_4]	*a*	Deslizador		Coeficiente	Bajo	Bajo
	b	Deslizador		Coeficiente	Bajo	Bajo
	c	Deslizador		Número	Bajo	Bajo
[4_5]	*a*		Positiva, arriba Negativa, abajo	Mirar	Alto	Alto
	b			Pendiente	Bajo	Medio
	c		Creciente o decreciente	Mirar	Medio	Medio
[4_6]	*a*		Positivo, arriba Negativo, abajo	Mirar Ramas	Alto	Alto
	b		Positivo, creciente Negativo, decreciente	Raíz Crecimiento	Alto	Medio
	c	Recta	Positivo, sube Negativo, baja		Alto	Medio
[4_7]	*a*		Positivo, arriba Negativo, abajo	Mirar Ramas	Alto	Alto
	b	Línea	Positivo, creciente Negativo, decreciente		Alto	Medio
	c	Línea	Movimiento	Eje Y	Medio	Medio
[4_8]	*a*	Curva			Bajo	Bajo
	b	Movimiento	Derecha o izquierda		Medio	Medio
	c		Negativo o positivo		Bajo	Medio
[4_9]	*a*	Curva	Positiva, asciende Negativa, desciende		Alto	Medio
	b	Recta	Positiva, asciende Negativa, desciende		Alto	Bajo
	c	Recta	Positiva, sube Negativa, desciende		Alto	Medio

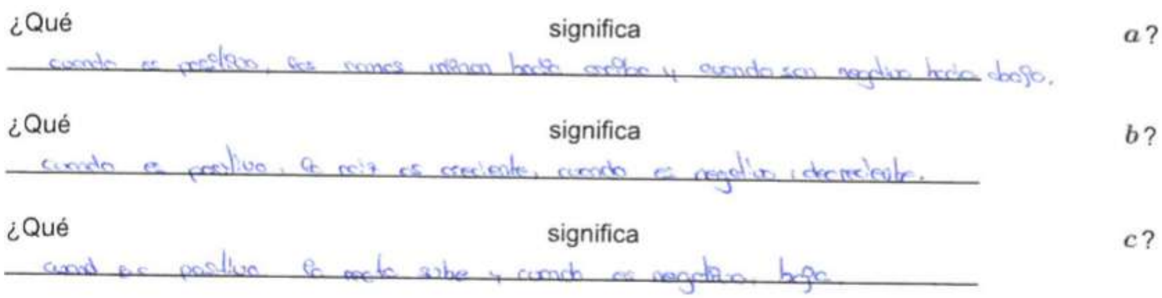


Figura 10. *Respuesta del alumno [4_6] en tarea [A.2] de la familia cuadrática*

[A.2] Familia de función exponencial

El signo predominante manifestado en el alumnado de 2ºESO sigue siendo el de artefacto (véase Tabla 5.1.7), cosa que no nos debe extrañar pues desconocen vocabulario específico. El vocabulario que se sigue usando hace referencia a curvas o líneas, incorporando en caso de usar diagramas incluso el uso de flechas, cuando estas gráficamente no están presentes. Pese a tener dos deslizadores que afectan en este caso a la forma de gráfica, y uno por el signo a su orientación, nos encontramos que el nivel de detalle y concreción que manifiestan es mayormente medio, con tendencia en los casos restantes a altos detalles.

Tabla 5.1.7
Análisis cualitativo del significado atribuido a los deslizadores en la tercera práctica, 2ºESO

		Signo			Nivel	
Usuario	Deslizador	Artefacto	Pivote	Matemático	Detalle	Corrección
[2_1]		--	--	--	--	--
[2_2]		--	--	--	--	--
[2_3]	*a*	Movimiento	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Medio
	b		Menor que 1, diagrama homólogo a $y = -0{,}5^x$ Mayor que 1, diagrama homólogo a $y = -2^x$		Alto	Medio
	c	Movimiento	Positivo, sube Negativo, baja		Alto	Alto
[2_4]	*a*	Movimiento	Positivo, flecha de volteo hacia arriba Negativo, flecha de volteo hacia abajo		Alto	Alto
	b		Con $a < 0$: Entre 0 y 1, vertical hacia abajo por la izquierda y horizontal por la derecha Mayor que 1, al revés	(Dependencia)	Alto	Alto

	c	Movimiento	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Alto
[2_5]	*a*	Movimiento Línea	Positiva, diagrama homólogo a $y = 0{,}5^x$ Negativa, diagrama homólogo a $y = -0{,}5^x$		Alto	Medio
	b		Positiva, se acerca al eje	Eje	Medio	Bajo
	c	Movimiento	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Alto
[2_6]	*a*	Doblarse	Arriba o abajo		Medio	Medio
	b	Giro	Izquierda o derecha		Medio	Medio
	c	Movimiento	Arriba y abajo		Medio	Medio
[2_7]	*a*	Doblar			Bajo	Medio
	b	Movimiento	De un lado a otro		Medio	Medio
	c	Movimiento	Arriba y abajo		Medio	Medio
[2_8]	*a*	Línea	Positivo, arriba Negativo, abajo		Medio	Medio
	b	Curva	Mayor que 1, izquierda horizontal y derecha arriba		Medio	Medio
	c	Movimiento	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Alto
[2_9]	*a*	Doblar Línea Por un punto	Arriba o abajo		Medio	Bajo
	b	Doblar Línea	Precisión para unir puntos		Media	Medio
	c	Línea	Subir o bajar		Media	Medio
[2_10]	*a*	Giro Línea	Vertical Arriba y abajo		Medio	Medio
	b	Giro Línea	Horizontal Arriba y abajo		Medio	Medio
	c	Movimiento	Arriba y abajo		Medio	Medio
[2_11]	*a*	Recta	Parte izquierda, arriba y abajo		Medio	Bajo
	b		Parte derecha, arriba y abajo		Medio	Bajo
	c	Movimiento	Arriba y abajo		Medio	Medio
[2_12]	*a*	Línea	Parte izquierda, positivo arriba, negativo abajo		Medio	Medio
	b	Movimiento	De un lado a otro		Medio	Medio
	c	Línea	Positivo, sube Negativo, abajo		Alto	Alto
[2_13]	*a*	Movimiento Línea	Línea curva		Medio	Bajo
	b	Línea	De un lado a otro		Medio	Medio
	c	Movimiento Línea	Arriba y abajo		Medio	Medio
[2_14]	*a*	Movimiento Línea	Parte izquierda, arriba y abajo		Medio	Bajo
	b	Movimiento Línea	Izquierda y derecha		Medio	Medio
	c	Movimiento Línea	Arriba o abajo.		Medio	Medio

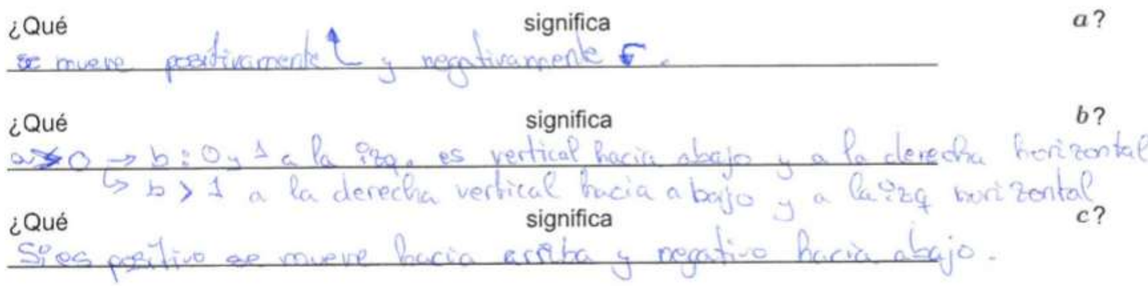


Figura 11. *Respuesta del alumno [2_4] en tarea [A.2] de la familia exponencial*

En el grupo de 4ºESO encontramos que con la familia exponencial no hay una inclinación clara en el uso de signos de artefacto o matemático, pero sí cierto carácter dicotómico en general tal como se ve en la Tabla 5.1.8. Así, el alumnado que se decanta por signos del artefacto hace referencia a la curva o línea, expresa con un nivel de detalle y corrección medio o alto el significado de los deslizadores, frente al alumnado que opta por signos matemáticos que obtiene niveles medios o bajos. Nos llama la atención el alumno [4_7] que muestra en su descripción un uso combinado de signos alcanzando altos niveles de detalle y corrección, por presentar en las distintas familias un mayor número de signos, además de usar descripciones escuetas y concisas (véase Figura 12).

Tabla 5.1.8

Análisis cualitativo del significado atribuido a los deslizadores en la tercera práctica, 4ºESO

		Signo			Nivel	
Usuario	Deslizador	Artefacto	Pivote	Matemático	Detalle	Corrección
[4_1]		--	--	--	--	--
[4_2]	*a*	Curva			Bajo	Bajo
	b	Desplazamiento			Bajo	Bajo
	c			Medida	Bajo	Bajo
[4_3]	*a*		Parte negativa Positiva	Eje X	Medio	Bajo
	b		Superior Negativa o positiva	Eje X Eje Y	Medio	Bajo
	c			Eje Y	Bajo	Bajo
[4_4]	*a*		Parte negativa Positiva	Eje X	Medio	Bajo
	b		Parte positiva Positiva o negativa	Eje X Eje Y	Medio	Bajo
	c			Eje Y	Bajo	Bajo
[4_5]	*a*		Parte negativa Positiva o negativa	Eje X Eje Y	Medio	Bajo
	b		Positiva o negativa	Eje Y Eje X	Medio	Bajo
	c			Eje Y	Bajo	Bajo

[4_6]	*a*	Línea Inclinación	Positivo, arriba Negativo, abajo Parte derecha en 0		Alto	Medio
	b	Levantamiento	Positivo, arriba por la derecha Negativo, arriba izquierda		Alto	Medio
	c	Línea	Positivo, sube Negativo, baja	Eje Y	Alto	Alto
[4_7]	*a*	Inclinación Lados	Positiva, arriba por izquierda y tiende 0 derecha Negativa, abajo por izquierda y tiende a 0 derecha	Tendencia	Alto	Alto
	b	Inclinación Lados	Positivo, lado derecho arriba Negativo, lado izquierdo arriba		Alto	Medio
	c	Línea Desplazamiento	Mover sobre	Eje X	Medio	Medio
[4_8]		--	--	--	--	--
[4_9]	*a*	Recta	Positivo, asciende Negativo, desciende		Medio	Medio
	b		Giro derecha o izquierda		Medio	Medio
	c	Recta	Bajar o subir		Medio	Medio

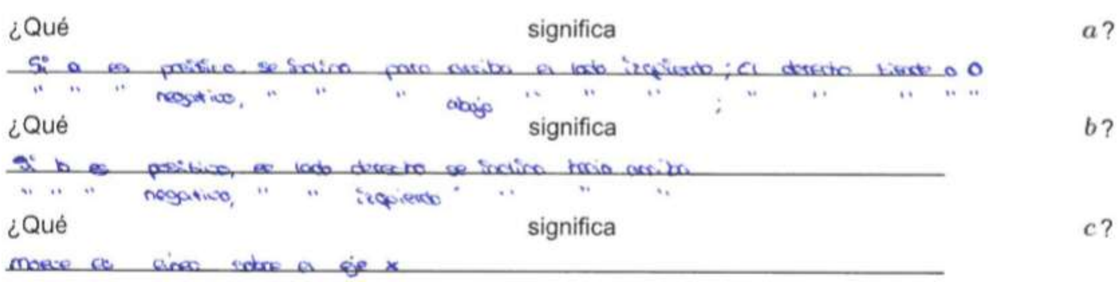


Figura 12. *Respuesta del alumno [4_7] en tarea [A.2] de la familia exponencial*

[A.2] Familia de función de proporcionalidad inversa

En las descripciones de esta última familia, seguimos corroborando que el signo artefacto no es ya predominante, es usado por todo el alumnado de 2ºESO como puede verse en la Tabla 5.1.9. La novedad de esta familia es la discontinuidad que el alumnado refleja mediante un sutil uso del plural, por ejemplo refiriéndose a las curvas, distinguiendo que están separadas. Las acciones que describen vuelven a usar estrategias vistas con anterioridad con algunos alumnos usando diagramas, o simplificando la situación al distinguir que pasa a derecha o izquierda.

Evidentemente no mencionan discontinuidad, pero sí identifican con esta distinción la parte de la curva que separa a las dos curvas que observan. En general los niveles de detalle alcanzados son medios o altos, siendo la corrección más dispar que con la familia exponencial.

Tabla 5.1.9

Análisis cualitativo del significado atribuido a los deslizadores en la cuarta práctica, 2ºESO

		Signo			Nivel	
Usuario	Deslizador	Artefacto	Pivote	Matemático	Detalle	Corrección
[2_1]		--	--	--	--	--
[2_2]		--	--	--	--	--
[2_3]		--	--	--	--	--
[2_4]	*a*	(Curvas) Atracción	Positivo, atraer o separar en diagrama homólogo *y=1/x* Negativo, atraer o separar en diagrama homólogo *y=-1/x*		Alto	Alto
	b	Movimiento	Negativo, derecha Positivo, izquierda		Alto	Bajo
	c	Movimiento	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Alto
[2_5]	*a*		Positivo, diagrama homólogo *y=1/x* Negativo, diagrama homólogo *y=-1/x*		Alto	Alto
	b	Movimiento	Negativo, izquierda Positivo, derecha		Alto	Alto
	c	Movimiento	Positivo, arriba Negativo, abajo		Alto	Alto
[2_6]		--	--	--	--	--
[2_7]	*a*	Separación Dos líneas			Bajo	Bajo
	b	Recorrido del deslizador	De derecha a izquierda		Medio	Bajo
	c	Recorrido del deslizador	De arriba a abajo		Medio	Bajo
[2_8]	*a*	Separación Dos líneas			Bajo	Bajo
	b	Movimiento	Negativo, izquierda Positivo, derecha		Alto	Alto
	c	Movimiento	Negativo, abajo Positivo, arriba		Alto	Alto
[2_9]	*a*	Doblar Dos líneas	Negativo, la línea derecha hacia arriba y abajo Positivo, al contrario		Alto	Bajo
	b	Movimiento Línea	Izquierda y derecha		Medio	Medio
	c	Movimiento Línea	Arriba y abajo		Medio	Medio
[2_10]		--	--	--	--	--

[2_11]	*a*	Rectas	Acercar o alejar		Medio	Medio
	b	Movimiento Rectas	Derecha o izquierda		Medio	Medio
	c	Movimiento Rectas	Arriba o abajo		Medio	Medio
[2_12]	*a*	Movimiento Líneas	Positivo, diagrama homólogo *y=1/x* Negativo, diagrama homólogo *y=-1/x*		Alto	Alto
	b	Movimiento Líneas	Izquierda o derecha		Medio	Medio
	c	Movimiento Líneas	Arriba o abajo		Medio	Medio
[2_13]	*a*	Movimiento Líneas	Diagrama homólogo a *y=1/x*		Medio	Bajo
	b	Desplazamiento Líneas	Horizontal		Medio	Medio
	c	Desplazamiento Líneas	Arriba y abajo		Medio	Medio
[2_14]		--	--	--	--	--

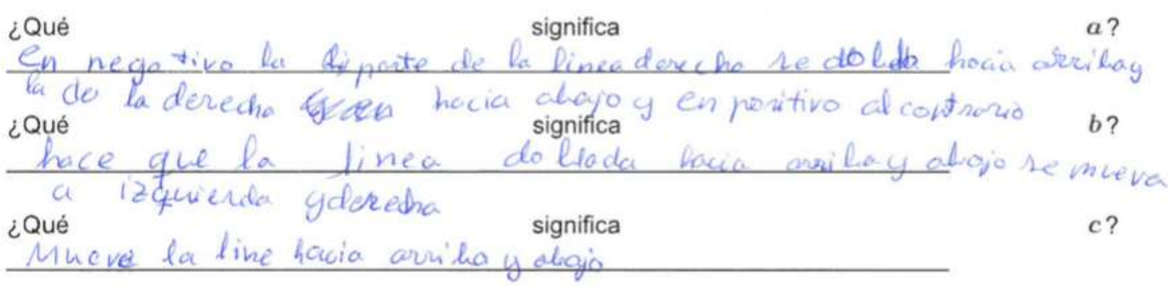


Figura 13. *Respuesta del alumno [2_9] en tarea [A.2] de la familia de prop. inversa*

Por su parte, en el grupo de 4ºESO se mantiene esa disparidad de elección entre signos de artefacto o matemáticos en la descripción del significado de los parámetros, si bien más limitada a cada deslizador (véase Tabla 5.1.10). De hecho, destaca que en el parámetro *b* identifican que tiene cierta relación con el eje X, pero no concretan que es el punto de discontinuidad de la gráfica, lo cual les hace describir con niveles de detalles bajos o medios este carácter. Por su parte, en el parámetro *a* aprecian que tiene relación con la amplitud o separación de las líneas que observan, con nivel de detalle y corrección dispar.

Comparativamente hablando, no obstante, no creemos que el alumnado de 4ºESO no sea capaz de hacerlo igual de bien que el del curso inferior usando signos artefacto. Conjeturamos que con esta cuarta práctica el alumnado de 2º ha desarrollado mejores estrategias descriptivas por el simple hecho de haberlas puesto en práctica al decantarse por signos próximos al artefacto.

Tabla 5.1.10

Análisis cualitativo del significado atribuido a los deslizadores en la cuarta práctica, 4ºESO

		Signo			Nivel	
Usuario	Deslizador	Artefacto	Pivote	Matemático	Detalle	Corrección
[4_1]		--	--	--	--	--
[4_2]	*a*	Amplitud			Bajo	Medio
	b			Eje X	Bajo	Bajo
	c	Desplazamiento			Bajo	Bajo
[4_3]	*a*	Amplitud			Bajo	Medio
	b			Eje X	Bajo	Bajo
	c	Desplazamiento	De arriba a abajo		Medio	Medio
[4_4]	*a*	Amplitud			Bajo	Medio
	b			Eje X	Bajo	Bajo
	c	Desplazamiento	Hacia arriba y abajo		Medio	Medio
[4_5]	*a*	Amplitud			Bajo	Medio
	b			Eje X	Bajo	Bajo
	c			Eje Y	Bajo	Bajo
[4_6]	*a*	Separación Líneas Punto O	Juntar o separar		Medio	Medio
	b	Movimiento Punto *b* (deslizador)	Izquierda o derecha		Medio	Bajo
	c	Desplazamiento Punto *c* (deslizador)	Positivo, Sube o baja		Medio	Medio
[4_7]	*a*	Lados	Positivo, decrece Negativo, crece	Crecimiento	Alto	Alto
	b	Curvas	Mover sobre	Eje Y	Medio	Bajo
	c	Curvas	Mover sobre	Eje X	Medio	Bajo
[4_8]		--	--	--	--	--
[4_9]	*a*	Cercanía Rectas	Cerca o lejos		Medio	Medio
	b	Desplazamiento Rectas	Izquierda a derecha		Medio	Alto
	c	Desplazamiento Rectas	Sube y baja		Medio	Medio

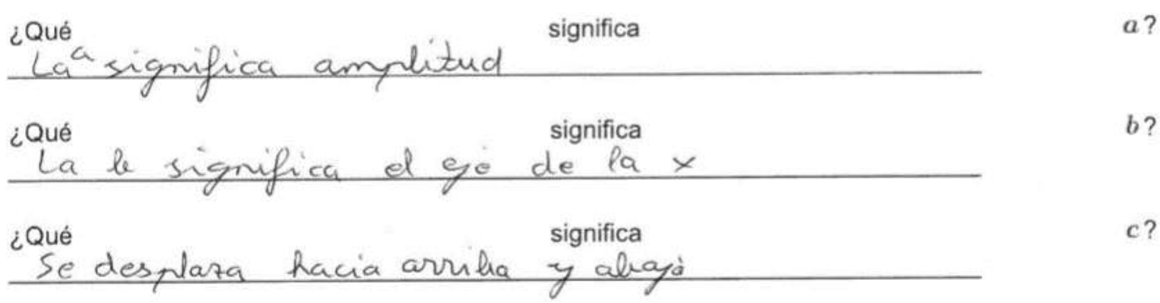


Figura 14. *Respuesta del alumno [4_4] en tarea [A.2] de la familia de prop. inversa*

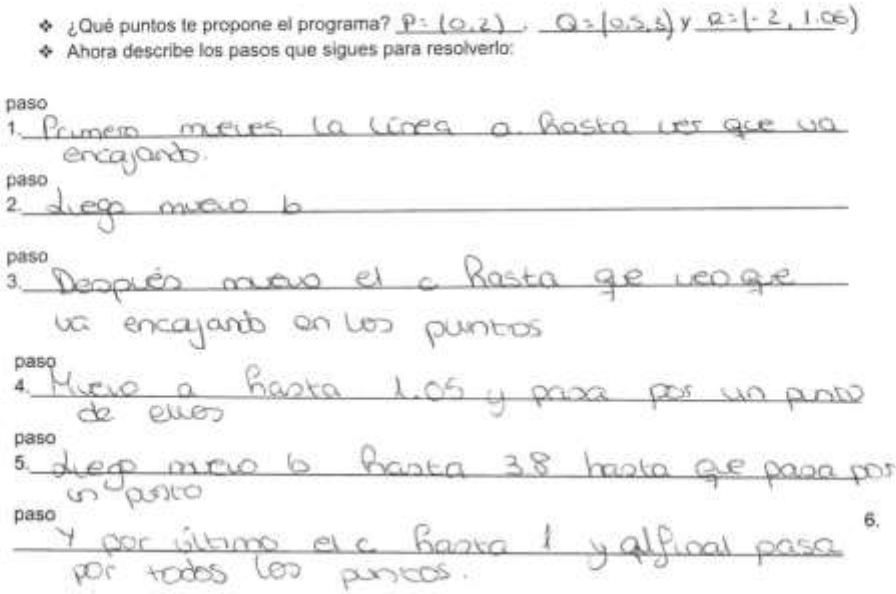
5.1.3 [A.3] Tarea aleatoria de interpolación con GeoGebra

En este apartado analizamos los pasos que destaca el alumnado en una tarea de interpolación con puntos escogidos aleatoriamente que deben anotar. Se trata de la quinta y última tarea en cada familia de funciones con GeoGebra. Se les pide dibujar la solución que lleguen a obtener en pantalla por escrito.

Respecto a los pasos que destaca el alumnado en la resolución de la tarea aleatoria, podemos agrupar según unos rasgos generales con las categorías que se describen a continuación y en la Tabla 5.1.11 recogemos para mejor apreciación las estrategias manifestadas por el alumnado.

Aproximaciones sucesivas

Los pasos descritos por el alumnado hacen referencia a una combinación del uso de los deslizadores para aproximar la curva en pantalla a la solución (véase Figura 15). Esta conducta es observable en todos los registros en los archivos de las prácticas, pues alternando el uso de deslizadores es la forma en que se lleva a la solución.

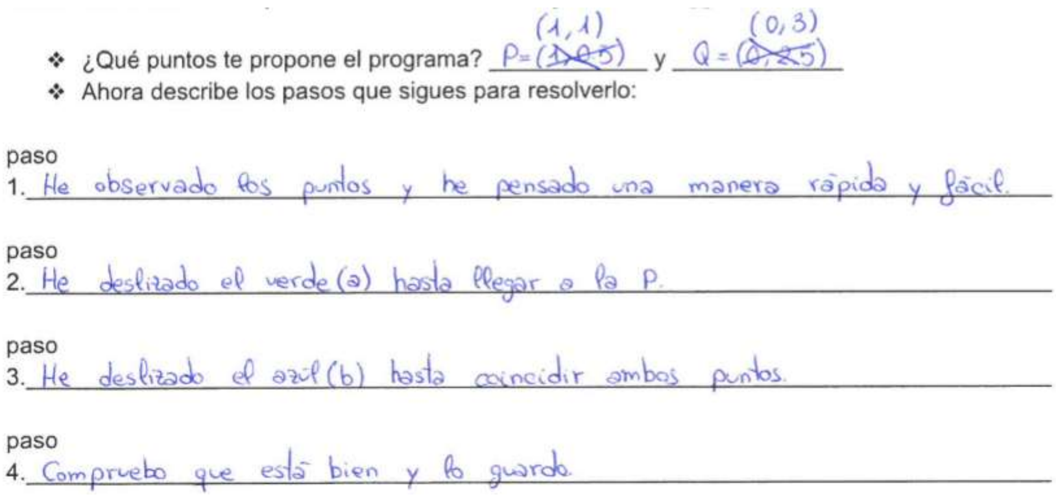

❖ ¿Qué puntos te propone el programa? P: (0,2) , Q=(0.5,5) y R=(-2, 1.06)
❖ Ahora describe los pasos que sigues para resolverlo:

paso 1. Primero mueves la línea a hasta ver que va encajando.
paso 2. luego muevo b
paso 3. Después muevo el c hasta qe veo qe va encajando en los puntos
paso 4. Muevo a hasta 1.05 y pasa por un punto de ellos
paso 5. luego muevo b hasta 3.8 hasta qe pasa por un punto
paso 6. Y por último el c hasta 1 y al final pasa por todos los puntos.

Figura 15. *Respuesta del alumno [2_12] en tarea [A.3] de la familia exponencial*

Referencia sólo a un uso secuencial de los deslizadores

Los pasos descritos por el alumnado hacen referencia sólo a un movimiento secuencial de los deslizadores no alternando el uso de unos u otros (véase Figura 16). Esta conducta queda refutada por los registros en los archivos de las prácticas, donde se observa al menos manipulación alternada de deslizadores.


❖ ¿Qué puntos te propone el programa? P = (1, 1) y Q = (0, 3)
❖ Ahora describe los pasos que sigues para resolverlo:

paso
1. He observado los puntos y he pensado una manera rápida y fácil.

paso
2. He deslizado el verde (a) hasta llegar a la P.

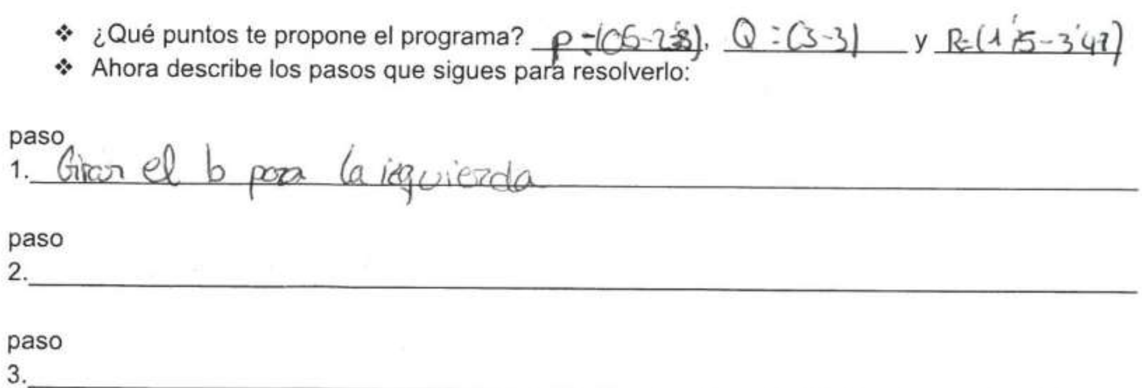
paso
3. He deslizado el azul (b) hasta coincidir ambos puntos.

paso
4. Compruebo que está bien y lo guardo.

Figura 16. *Respuesta del alumno [4_2] en tarea [A.3] de la familia lineal*

Omisión manifiesta de pasos con la solución aportada

Los pasos descritos por el alumnado omiten los propios pasos dados (véase Figura 17). La contradicción radica en que el valor inicial en las prácticas de $a = 0$ hace la función constante.


❖ ¿Qué puntos te propone el programa? P = (0'5 - 2'8), Q = (3 - 3) y R = (1'5 - 3'47)
❖ Ahora describe los pasos que sigues para resolverlo:

paso
1. Girar el b para la izquierda

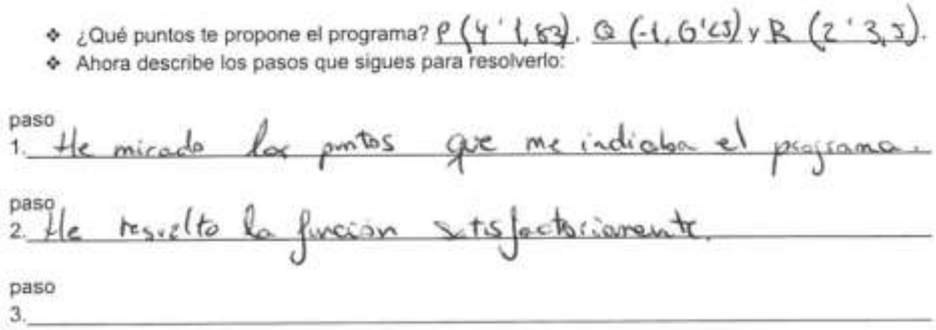
paso
2.

paso
3.

Figura 17. *Respuesta del alumno [2_10] en tarea [A.3] de la familia cuadrática*

Resolución ingenua

No se describe paso alguno con GeoGebra, se alude a que se observa la situación inicial (los puntos) y se resuelve con éxito (véase Figura 18).



❖ ¿Qué puntos te propone el programa? P (4'1,83), Q (-1, 6'25) y R (2'3,5).
❖ Ahora describe los pasos que sigues para resolverlo:

paso 1. He mirado los puntos que me indicaba el programa.

paso 2. He resuelto la funcion satisfactoriamente.

paso 3.

Figura 18. *Respuesta del alumno [4_3] en tarea [A.3] de la familia prop. inversa*

Indefinido

Se deja en blanco los pasos de las prácticas pese a resolver la práctica aleatoria.

Tabla 5.1.11

Estrategias de interpolación en cada una de las familias de funciones por el alumnado

	Aprox. sucesivas	Uso secuencial	Omisión de pasos	Resolución ingenua	Indefinido
Lineales	[2_3] [2_4] [2_5]	[2_1] [2_2]			
	[2_8] [2_9] [2_10]	[2_6] [2_7]			
	[2_12] [2_13] [2_14]	[2_11]			
	[4_1] [4_3] [4_4]	[4_2] [4_6]			
	[4_5]	[4_7] [4_8]			
		[4_9]			
Cuadráticas	[2_13]	[2_1] [2_3]	[2_10]		[2_6] [2_7]
	[4_1] [4_4] [4_5]	[2_4] [2_5]			[2_8] [2_14]
		[2_9] [2_11]			
		[2_12]			
		[4_2] [4_3]			
		[4_6] [4_7]			
		[4_8] [4_9]			
Exponencial	[2_4] [2_6] [2_12]	[2_3] [2_8]	[2_5]	[4_3] [4_4]	[2_1] [2_7]
	[2_13]	[2_9] [2_11]			[2_10]

	[4_5] [4_6] [4_9]	[2_14] [4_2] [4_7]		[4_1]
Prop. inversa	[2_4] [2_13] [4_6]	[2_5] [2_8] [2_9] [2_11] [2_12] [4_4] [4_5] [4_7] [4_9]	[4_3]	[2_7] [4_2]

Para cerrar el análisis de la tarea [A.3] en cada familia de funciones, pedíamos al alumnado reproducir la gráfica de interpolación solución que obtienen con GeoGebra. Tomamos como referente para analizar las gráficas dibujadas por el alumnado las categorías de Arce y Ortega (2013), desglosando a continuación por familias de funciones los errores que detectamos y remitimos a los Anexos 8.20 y 8.21 para ver ejemplos de algunas de estas deficiencias que se describen.

[A.3] Gráfica de la familia de función lineal

No encontramos errores significativos en el alumnado de 4ºESO, las gráficas se muestran con bastante fiabilidad a la gráfica solución. Sin embargo en el alumnado de 2ºESO, encontramos 5 casos (35,7%) que presentan deficiencias en la asignación y uso de escalas en los ejes cartesianos consistentes en representar en la abscisa y/o ordenada un punto con una unidad menos del que se mostraba en pantalla. En dos casos aislados encontramos deficiencias relacionadas con las características de las funciones, una relacionada con el dominio, limitándose a reproducir la parte positiva, y otra consistente en forzar que la recta pase por la cuadrícula de apoyo gráfico que implementamos.

[A.3] Gráfica de la familia de función cuadrática

En las reproducciones del alumnado encontramos que los errores más destacados son deficiencias relacionadas con las características de las funciones, en especial la pérdida de simetría, que en el caso de 2ºESO ha sido detectado en 10 casos (76,9%) y en 4 casos (44,4%) en 4º de ESO. Además, observamos otra deficiencia en esta categoría en el alumnado de 2ºESO consistente en redondear en exceso el vértice de la parábola en 6 casos (46,2%). Aunque en menor medida, también detectamos deficiencias relacionadas con el concepto de asíntota en alumnado de 2ºESO en 4 casos (30,8%) llegando al menos una de las ramas a ser representada verticalmente. Sólo un caso claro de deficiencias relacionadas con el concepto de función en 4ºESO, consistente en varias imágenes para una misma abscisa al cambiar una rama de tendencia horizontal.

[A.3] Gráfica de la familia de función exponencial

En el trazado de gráficas por parte del alumnado en esta familia, encontramos que las deficiencias son más homogéneas en el sentido que son detectadas tanto en 2º como 4ºESO, si bien el recuento arroja datos más favorables al curso inferior. Entre las deficiencias relacionadas con el concepto de asíntota, observamos representaciones gráficas con una tendencia horizontal exagerada en 4 casos en 2ºESO (36,4%) y 3 casos en 4ºESO (50%), así como la ausencia de tendencia asintótica vertical en 5 casos en 2º ESO (45,5%) y 4 casos en 4º (66,7%). Respecto a deficiencias relacionadas con las características de las funciones, llama la atención la restricción de la curva representada en un dominio muy restrictivo, aunque sí incluye los puntos dados en la tarea de interpolación, en 4 casos en 2ºESO (36,4%) y 3 casos en 4º (50%), lo cual podríamos interpretarlo como que una parte del alumnado evita de algún modo representar las zonas con tendencia asintótica ya que en las otras familias de funciones no se observaba este rasgo. Por último, en esa misma categoría aparece una rectificación de la gráfica de las exponenciales que reproduce el alumnado en 4 casos en 2ºESO (36,4%) y 3 casos en 4ºESO (50%). Cabe matizar respecto a estos datos que en ambos cursos, aleatoriamente, se podía dar la situación de que la curva solución fuera horizontal, lo cual ha influido en este recuento al no tener el alumnado que representar curvatura o tendencia asintótica alguna más allá de una recta, siendo 3 de las 11 muestras en 2ºESO y 1 de las 6 en 4ºESO. Aunque las muestras son limitadas, encontramos en nuestro caso que el alumnado de 2ºESO tiene un menor porcentaje de deficiencias gráficas con la familia exponencial, pese a que en ambos niveles se han detectado las mismas categorías y rasgos de deficiencias.

[A.3] Gráfica de la familia de función de proporcionalidad inversa

En esta última familia disponemos de 8 reproducciones en 2ºESO y 6 en 4ºESO, correspondientes a aquellos alumnos que acabaron completamente las prácticas. Con esta familia la mayor cantidad de deficiencias se encuentran en el alumnado de 2ºESO. Encontramos 4 casos

(50%) en 2ºESO de ramas de hipérbolas que se superponen, lo cual es una deficiencia relacionada con el concepto de función al tener varias imágenes un mismo valor origen. Esta misma deficiencia la encontramos en 2 casos (33,3%) en 4ºESO, siendo la única deficiencia destacable más allá de la habilidad en el trazado, que resulta complicado sin marcar las asíntotas. Al igual que con la exponencial, pero sólo en alumnado de 2ºESO, encontramos deficiencias relacionadas con el concepto de asíntota por la omisión en los trazados de al menos una de las ramas de las hipérbolas, siendo en mayor medida 4 casos (50%) la omisión de alguna rama vertical, frente a 2 casos (25%) de alguna horizontal. También encontramos 2 casos (25%) en 2ºESO de deficiencias relacionadas con las características de las funciones al representar las ramas separadas en exceso, dando lugar a un dominio que no incluiría todo un intervalo de la recta real.

5.2 ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO B

El cuestionario B recoge la asociación que hace el alumnado de tres funciones dadas por su fórmula, ítems, para cada una de las familias de funciones: lineal, cuadrática, exponencial y de proporcionalidad inversa. Para consultar la estructura, descripción y diseño de este cuestionario puede consultarse el Punto 4.3.2 y para consultar su organización y análisis, el Punto 4.6.2.

5.2.1 Fiabilidad del instrumento de recogida de información

Para el análisis de la fiabilidad recurrimos al software informático *IBM SPSS Statistics* en su versión 22, en lo sucesivo en este trabajo, SPSS. Los datos introducidos en el programa corresponden con las calificaciones a las que acabamos de hacer referencia.

Respecto a la fiabilidad de las puntuaciones obtenidas, obtenemos los valores del alfa de Cronbach que se muestra en la Tabla 5.2.1, lo que indica una buena consistencia interna.

Tabla 5.2.1

Estadísticas de fiabilidad de las variables de estudio del cuestionario B con SPSS

Alfa de Cronbach	Alfa de Cronbach basada en elementos estandarizados	N de elementos
,868	,866	12

Respecto a la idoneidad de las puntuaciones obtenidas a partir de los ítems nos atenemos a que la supresión de cualquiera de los rasgos que valoramos en la asociación que hace el alumnado de las funciones propuestas no modifica significativamente la fiabilidad del instrumento que aportamos (véase Tabla 5.2.2).

Tabla 5.2.2
Estadísticas de total de elemento de las variables de estudio del cuestionario B con SPSS

	Media de escala si el elemento se ha suprimido	Varianza de escala si el elemento se ha suprimido	Correlación total de elementos corregida	Correlación múltiple al cuadrado	Alfa de Cronbach si el elemento se ha suprimido
lineal: a (precisión)	18,17	55,605	,465	,516	,863
lineal: a (signo)	17,13	60,482	,292	,714	,870
lineal: b	17,17	57,605	,483	,535	,862
cuad: a (precisión)	18,91	59,174	,388	,638	,867
cuad: a (signo)	17,57	51,439	,708	,785	,847
cuad: b	18,22	52,632	,563	,721	,857
exp: a (precisión)	18,65	54,601	,651	,617	,853
exp: a (signo)	17,61	48,249	,784	,828	,840
exp: b	18,26	54,111	,468	,722	,864
inv: a (precisión)	18,65	50,783	,656	,859	,850
inv: a (signo)	18,09	48,992	,619	,850	,855
inv: b	18,70	54,040	,559	,853	,857

5.2.2 Análisis clúster jerárquico

En este trabajo hemos optado por realizar en primer lugar un análisis clúster jerárquico a la hora de organizar los datos. Dentro de las diferentes técnicas de análisis multivariantes, este tipo de análisis es adecuado para muestras pequeñas como la que manejamos en nuestra investigación y adecuado a nuestra metodología eminentemente exploratoria donde no tenemos predefinido un número de grupos sino que precisamente aspiramos a agrupar datos por su homogeneidad de forma que podamos estimar mejor características a priori no conocidas. Dentro de la inmensa cantidad de referencias posibles remitimos a Vilà, Rubio, Berlanga y Torrado (2014) como una referencia escueta, actualizada y bastante precisa de las motivaciones e idoneidad de esta técnica ilustrada usando el software SPSS en un ejemplo práctico.

Con vistas a que las figuras mostradas sean apreciables en este trabajo, se ha introducido en el programa nombres a las variables junto a un conjunto de etiquetas que las acortan, facilitando su lectura, referencias y manejo de los datos. En la Tabla 5.2.3 recogemos tal información.

Tabla 5.2.3
Relación de variables y etiquetas usadas en SPSS

Nombre de la variable	Etiqueta
Alumno	Alumno
lineal_a_p	lineal: a (precisión)
lineal_a_s	lineal: a (signo)
lineal_b	lineal: b
cuad_a_p	cuad: a (precisión)
cuad_a_s	cuad: a (signo)
cuad_b	cuad: b
exp_a_p	exp: a (precisión)
exp_a_s	exp: a (signo)
exp_b	exp: b
inv_a_p	inv: a (precisión)
inv_a_s	inv: a (signo)
inv_b	inv: b

En primer lugar, aplicamos en SPSS un análisis clúster jerárquico buscando maximizar la homogeneidad dentro de los grupos minimizando la varianza intragrupal. Así pues elegimos el método Ward y conglomeramos en primer lugar respecto a las variables dejando fuera las variables de precisión por el momento para estimar cómo se pueden agrupar por similitud los datos. El dendrograma resultante lo mostramos en la Figura 19.

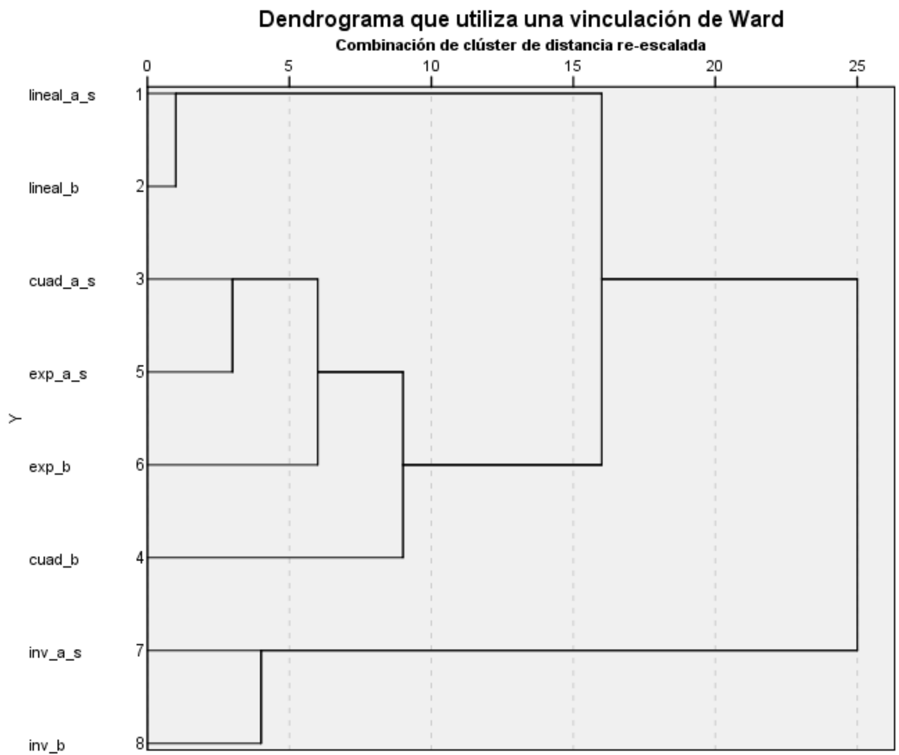


Figura 19. *Dendograma de variables de la tarea de asignación de gráficas del cuestionario B*

Teniendo en cuenta la jerarquía que se establece en el dendrograma, podemos apreciar que los datos se pueden agrupar si tomamos una recta vertical en grupos en función del desempeño con cada parámetro de las familias de funciones. La propia distribución del dendrograma mirando la puntuación obtenida por el alumnado en su estimación de cada parámetro, nos sugiere que una elección adecuada del número de clústeres sería tomar tres o cuatro. El propio dendrograma lo justifica, pues podemos interpretar el nivel de dificultad de la forma escalonada que se muestra:

- El desempeño en los parámetros de la función lineal no resulta distintivo. De hecho es un rasgo bastante común de ahí su cercanía en el dendrograma.
- La estimación del signo de los parámetros de la familia de la función de proporcionalidad inversa no tienen conexión rápida con los demás. Esto nos sugiere que deberíamos agruparlos aparte.
- La más tardía convergencia del parámetro b de la familia de funciones cuadráticas $(f(x) = ax^2 + bx)$ sugiere la opción de distinguirlo al ser un elemento distintivo.

Estas observaciones nos sugieren hacer un análisis idéntico al anterior en SPSS esta vez respecto a los casos y guardando como solución única el número de clústeres en 4. Esto último simplemente nos crea una nueva variable que nos etiqueta automáticamente la pertenencia del alumnado a cada clúster para un mejor análisis. La pertenencia queda ilustrada con el dendrograma de la Figura 20.

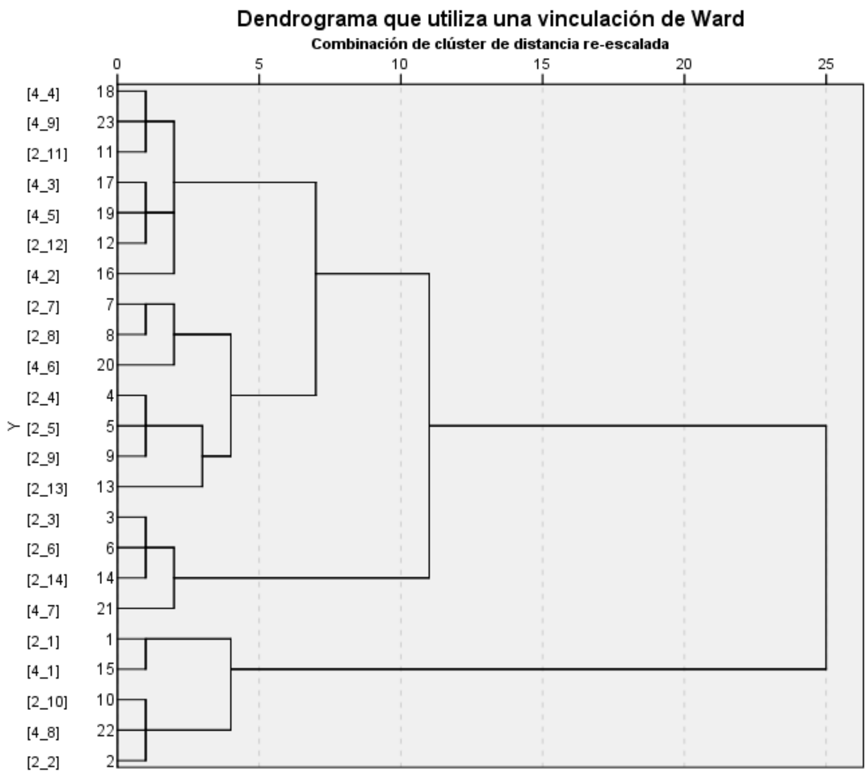


Figura 20. *Dendograma del alumnado en la tarea de asignación de gráficas del cuestionario B*

5.2.3 Características de los clúster: Análisis clúster de K-medias

En el apartado anterior llegamos a la conclusión que el número adecuado de agrupamientos clúster era cuatro. Podemos profundizar en las características de los diferentes clúster realizando un análisis de K-medias que nos proporciona información más precisa obteniendo un perfil de la información interna de los mismos. Aunque en nuestro caso, al tener pocos alumnos el análisis jerárquico ya nos no dejó claro (Figura 20) que la elección de cuatro clúster encuentra el aliciente de contar con un número similar de sujetos, algo que se suele buscar en estos tipos de análisis clasificatorios cuando lo que se busca es describir de forma general los rasgos más destacados de los mismos. Cabe remarcar que la asignación de este análisis coincide (salvo la etiqueta oportuna) con el agrupamiento que efectuaba el programa SPSS con el análisis jerárquico, es algo que encontramos destacar en este trabajo.

Mediante el análisis ANOVA de las variables que manejamos (Tabla 5.2.3) nos destaca que las diferencias significativas ($p \leq 0,05$) se dan a partir del signo de la función cuadrática, lo cual tiene sentido, pues encontraremos menos diferencias en la familia lineal donde el alumno obtiene mejores resultados y no es una variable distintiva en sí misma de los clúster.

Tabla 5.2.3 *Análisis ANOVA de las variables estudiadas en el cuestionario B*

	Clúster		Error			
	Media cuadrática	gl	Media cuadrática	gl	F	Sig.
lineal: a (precisión)	2,229	3	,788	19	2,829	,066
lineal: a (signo)	,671	3	,288	19	2,331	,107
lineal: b	,895	3	,472	19	1,897	,164
cuad: a (precisión)	,213	3	,456	19	,466	,709
cuad: a (signo)	4,279	3	,656	19	6,522	**,003**
cuad: b	4,124	3	,914	19	4,512	**,015**
exp: a (precisión)	3,209	3	,326	19	9,833	**,000**
exp: a (signo)	10,547	3	,156	19	67,550	**,000**
exp: b	6,535	3	,533	19	12,254	**,000**
inv: a (precisión)	9,664	3	,149	19	64,807	**,000**
inv: a (signo)	11,950	3	,493	19	24,241	**,000**
inv: b	3,363	3	,677	19	4,967	**,010**

Nota. Las pruebas F sólo se deben utilizar con fines descriptivos porque los clústeres se han elegido para maximizar las diferencias entre los casos de distintos clústeres. Los niveles de significación observados no están corregidos para esto y, por lo tanto, no se pueden interpretar como pruebas de la hipótesis de que los medias de clúster son iguales.

Respecto a los perfiles en los distintos clúster, la Figura 21 obtenida a partir de centros de clústeres finales del análisis de K-medias, nos muestra de forma explícita el perfil del alumnado en cada uno de los clúster que pasamos a comentar a continuación.

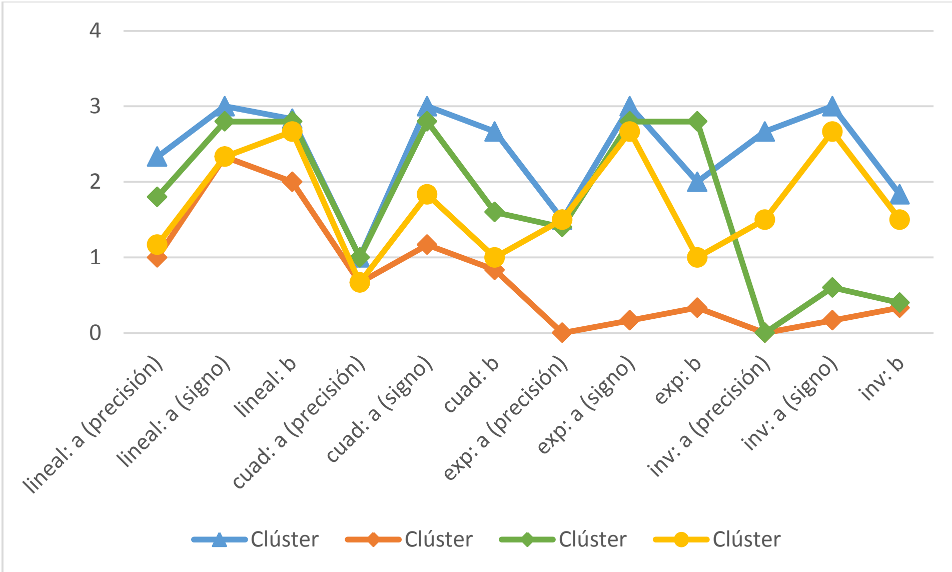


Figura 21. *Perfil del alumnado en la asignación de gráficas*

A rasgos generales podemos distinguir dos clúster extremos, el clúster 1 y 2 (ambos con seis alumnos). El clúster 1 demuestra altos niveles en la asociación de familias de funciones destacando el nivel de precisión en percibir el parámetro a en la familia de las funciones inversas. Por el contrario el clúster 2 estaría formado por alumnado que tiene dificultades en casi todas las asociaciones que se les piden o no acaban la tarea de asociación. Por medio encontramos el clúster 3 (cinco alumnos) que habría encontrado dificultades para afrontar las asociaciones pedidas en la familia de la función inversa y el clúster 4 (seis alumnos) formado por aquellos que encontraron más dificultades en la familia de funciones cuadráticas que en la inversa o exponencial, si bien este mejor desempeño estaría enfocado en la distinción del signo del parámetro a pero no del parámetro b.

Desde un punto de vista didáctico, por la secuenciación de contenidos que reflejamos en el Punto 2.1, vemos que tiene sentido el alto desempeño que muestran estos perfiles en la asociación de gráficas en la función lineal, pues ha sido trabajada en mayor medida por el alumnado, el uso de dos deslizadores en lugar de tres de las siguientes familias de funciones y vemos una mayor similitud en los resultados. Destaca en negativo la precisión de estimar el parámetro a de las funciones cuadráticas en general en el alumnado, que vendría a señalar dificultades para estimar la amplitud de las ramas de las parábolas que observan, teniendo éxito óptimo en averiguar la orientación de las ramas los clúster 1 y 3.

6 CONCLUSIONES

En este último apartado presentamos aquellas conclusiones que nos parecen relevantes junto a algunas reflexiones personales que pueden ser de utilidad para futuras líneas de trabajo. Nos parece apropiado en primer lugar ceñirnos a los objetivos marcados y las hipótesis planteadas, introducidas al principio del trabajo. En segundo lugar comentaremos posibles limitaciones de este trabajo, reflexionando sobre el alcance de algunos resultados así como el interés en completarlos o ampliarlos con análisis posteriores y posibles nuevas muestras. Por último, se presenta un comentario personal sobre la experiencia de aula con el alumnado, que añade información sobre la actitud del alumnado ante este tipo de tareas.

6.1 CONCLUSIONES RESPECTO A LOS OBJETIVOS Y LAS HIPÓTESIS DE TRABAJO

Al partir en nuestro caso de la tesis de Puerta (2009), teníamos la certeza que con una instrucción adecuada las tareas de interpolación gráfica son asequibles mediante el uso de plantillas a nivel de 1º de Bachillerato para el alumnado con ciertas familias de funciones (lineales, circulares, cuadráticas, elípticas, hiperbólicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas), incluso pese a no poder resolverlas mediante procedimientos algebraicos, debido a la dificultad de las ecuaciones que se obtenían o la no posesión de los conocimientos necesarios. En nuestro trabajo adaptamos las tareas de interpolación con GeoGebra mediante el uso de deslizadores de manera que el alumnado, hipotéticamente, no necesitara instrucción específica más allá de familiarizarse con el programa y la manipulación de los deslizadores. Restringimos las familias de funciones a las que son parte del currículo de la etapa secundaria obligatoria (lineales, cuadráticas, exponenciales y de proporcionalidad inversa) marcándonos un gran objetivo junto a otros específicos que lo concretan y recordamos a continuación:

Describir las conductas del alumnado de 2º y 4ºESO cuando realizan tareas de interpolación lineal, cuadrática, exponencial y de proporcionalidad inversa usando GeoGebra con ayuda de deslizadores.

a. *Inducir experimentalmente el significado que asignan los estudiantes a los parámetros en la expresión general de las funciones.*

b. *Identificar estrategias y conjeturas de ajuste de la función entre cada una de las familias de funciones.*
c. *Detectar errores de reproducción de gráficas de funciones.*
d. *Medir cierto grado de aprendizaje en la asociación de funciones dadas por su expresión algebraica con su gráfica.*

Estos objetivos fueron revisados conforme se elaboraban los cuestionarios A y B. Mientras que los objetivos *a*, *b* y *c* están en correspondencia con las tareas a rellenar del cuestionario A sobre una secuencia de tareas de interpolación, el objetivo *d* se corresponde con el cuestionario B de asociar funciones dadas mediante su expresión algebraica con sus gráficas sin ordenador, para cada familia de funciones propuestas.

Aunque esta correspondencia creíamos que era lo suficientemente coherente por construcción, formulamos algunas hipótesis que era necesario responder con el desarrollo del estudio y que pasamos a responder a continuación basándonos en los resultados expuestos en la anterior sección.

H.1. Sin más que una instrucción básica en el manejo de GeoGebra y manipulando con deslizadores familias de funciones, el alumnado es capaz de realizar tareas de interpolación gráfica.

Como se pone de manifiesto en el trabajo (Punto 5.1.1), el alumnado con un medio tecnológico adecuado es capaz de realizar tareas de interpolación con un éxito muy destacado y sin instrucción específica más que una sesión previa de presentación, indicando el objetivo de las tareas y de los cuestionarios (Punto 4.4.1). La explicación a ese éxito creemos que se debe a que las tareas de interpolación se reducen a un juego de tipo visual manipulativo donde el usuario adquiere cierto conocimiento de cómo cada deslizador modifica la curva que se muestra en pantalla con el objetivo elemental de unir puntos. En nuestra opinión, lo que se consigue es permitir al alumnado acceder a características globales de las gráficas de funciones sin necesidad de haber adquirido conocimientos previos desarrollados a nivel curricular cuya adquisición requiere trabajar y relacionar diferentes sistemas de representación. En concreto nos referimos a una posible secuencia didáctica que empezaría por que los estudiantes aprendan a evaluar valores en expresiones algebraicas, obtener pares de puntos, representarlos en unos ejes cartesianos con una escala adecuada para, comparativamente, llegar a conclusiones gráficas globales sobre el significado de los parámetros de las funciones dadas por su expresión.

Los conocimientos gráficos previos sobre los tipos de curvas que se usan en las tareas (rectas, parábolas, exponenciales o hipérbolas) es tenido en cuenta por el alumnado en las tareas, pues hemos visto que en la descripción que hacen de los significados de los parámetros (Punto 5.1.2) identifican al menos rasgos de las dos primeras familias. Por ejemplo, en la familia de funciones lineales hay alumnado que habla de rectas y su inclinación o su pendiente, así como en el caso de las funciones cuadráticas algunos estudiantes usan el término ramas y aluden a la orientación de estas. Sin embargo, queremos ante todo destacar el hecho que alumnado de 2ºESO que ni siquiera ha sido instruido con familias de gráficas de funciones más que cierta familiaridad con la lineal o haber trabajado algo con la cuadrática a nivel puntual, obtiene éxito con familias desconocidas por completo como la exponencial y la de proporcionalidad inversa.

H.2. La dificultad de interpolar una función depende del tipo de familia, del número de parámetros y su tipología (traslación, forma, orientación…).

En primer lugar, podemos hablar a grandes rasgos de la complejidad de las tareas que realizó el alumnado por las diferencias intrínsecas de cada familia de funciones. La tarea de interpolar con la familia lineal se limita a orientar la recta que se muestra en pantalla mediante el uso de dos deslizadores, pues no altera la forma de la recta inicial. En el resto de las familias, es necesario que el alumnado sea capaz de combinar el uso de tres deslizadores para realizar la tarea, que tienen efectos diferentes sobre la familia de funciones, alterando la forma, posición u orientación de la curva. En la cuadrática, el primer parámetro afecta a la forma y orientación, el segundo y tercero es una traslación. En la exponencial, el primer parámetro afecta a la forma y orientación, el segundo a la forma y el tercero es una traslación. En la de proporción inversa, el primer parámetro afecta a la forma y la orientación, el segundo y tercero es una traslación.

En segundo lugar, nos encontramos con la descripción de las estrategias que aplican los estudiantes en las tareas de interpolación. Pese a que la tarea que usan es un tanteo basado en aproximaciones sucesivas de la curva gráfica que manipulan en cada familia, nos encontramos que el alumnado no siempre describe esta estrategia teniendo pudiendo describir un uso secuencial de los deslizadores sin alternancia junto a otro tipo de errores. Mientras que en la lineal todo el alumnado describe aproximaciones sucesivas o secuenciales como la estrategia seguida, esto no es constante en las siguientes familias, alternando entre ellas o pasar a ser incapaces de dar una respuesta, por omisión de pasos o llegando a una estrategia que catalogamos de ingenua.

En tercer lugar, tenemos otro indicio de que la dificultad de interpolar gráficamente es inherente a cada familia por el uso del lenguaje que manifiesta el alumnado para describir los parámetros (deslizadores). Por ejemplo, encontramos que el más fácilmente identificable para el alumnado es el parámetro de traslación vertical (Punto 5.1.2), que es el último de los deslizadores en cada una de las familias. Sin embargo, aquellos que afectan a la forma son descritos con más errores sobre todo si se opta por un lenguaje cercano al matemático, por la precisión que se requiere en su uso frente a un lenguaje puramente descriptivo basado en la observación.

Por último, ya hemos hablado en la anterior hipótesis sobre el éxito del alumnado en las tareas de interpolación, cuyos resultados (Punto 5.1) refutan estas diferencias.

H.3. El alumnado manifiesta una percepción dinámica de las familias de funciones.

Esta hipótesis escrita como una afirmación, viene a destacar que el uso de GeoGebra no es inocuo para el alumnado, debido a que altera la forma en que el alumnado percibe las gráficas de las familias de funciones. La mayor evidencia de que se verifica tal afirmación la encontramos en la descripción del significado personal que hace el alumnado de cada uno de los deslizadores (Punto 5.1.2), haciendo referencia a que la curva cambia de forma, se desplaza o se mueve sobre todo cuando usa un lenguaje cercano al artefacto GeoGebra. Estas transformaciones descritas tienen rasgos propios en cada una de las familias, en algunos casos se describen rasgos que podríamos calificar como dinámicos como aludir a rotaciones, doblez o tendencia asintótica de una parte de la gráfica.

Si bien hemos encontrado que es el alumnado de 2ºESO el que manifiesta en mayor medida estos signos en el lenguaje marcados por el artefacto tal como los definimos. Esta elección en su caso está condicionada ya que no disponen del lenguaje matemático específico, frente al alumnado de 4ºESO que lo elige cuando ha tenido mayor contacto como observamos hasta la función cuadrática, donde detectamos vocabulario específico que nos lo indica. Creemos que esta elección es pues condicionada por su mayor presencia en la docencia recibida, como apuntan en sus conclusiones Acevedo, Van Dooren y Verschaffel (2014), refutado al encontrar casos en 4ºESO que al inclinarse por signos más cercanos al artefacto, lo hacen con altos niveles de detalle y corrección.

6.2 LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN, OPORTUNIDADES DE MEJORA Y CUESTIONES ABIERTAS

En primer lugar, una primera limitación del estudio tiene que ver con el tamaño y elección de la muestra, que además en nuestro caso se encontraba condicionada además por el factor de disponibilidad de un aula de informática en el centro con equipos que se encuentren en un adecuado estado, así como la preparación oportuna o de configuración para controlar factores externos que influyeran en las respuestas del alumnado. Aunque en todo estudio aumentar la muestra de población es deseable incluyendo criterios estadísticos para la elección de una muestra que permitan extender las conclusiones a una mayor población, encontramos difícil aumentar el número de muestras sin colaboradores externos que han de ser instruidos en la organización previa necesaria tanto de los equipos como de la gestión de los cuestionarios. No obstante, si se pudiera garantizar el acceso a internet, una opción plausible podría ser presentar las tareas en una plataforma como Moodle, donde se guardarían las tareas de interpolación teniendo un control similar de acceso a la tarea, tiempos y registros que se irían desbloqueando conforme se guardaran las anteriores, permitiendo una gestión más desatendida.

Respecto a los cuestionarios, puede que la extensión de los mismos en este estudio exploratorio tenga sentido con los fines descriptivos que nos marcamos, si bien nos deja preguntas sin responder que podemos situar en cada una de sus secciones y objetivos relacionados:

a. *Inducir experimentalmente el significado que asignan los estudiantes a los parámetros en la expresión general de las funciones.* [A.1]

Aunque queda justificado en este trabajo que el uso de GeoGebra en las tareas de interpolación propuestas influye en los significados que asignan los estudiantes a los parámetros de las familias de funciones con las que trabajan, el análisis del lenguaje podría profundizarse más centrado en el contenido y no tan estructural como hemos realizado. De hecho, creemos que el lenguaje manifestado por el alumnado más cercano a los signos de artefacto que definimos nos indica posibles líneas de estudio. Así, sin haber insistido mucho en su presencia, encontramos en el lenguaje usado por parte del alumnado trazos iconográficos mediante bocetos, identificación de casos o abstracciones del movimiento observado que son susceptibles de una mayor atención, quizás acercándonos a describir registros dinámicos dentro del sistema de representación gráfico en familias de funciones.

Por otro lado, modificando el desarrollo de las sesiones, podríamos optar por estudiar si estos significados atribuidos son también observables promoviendo interacciones entre alumnado y puestas en común, ya que observamos que sobre todo el alumnado de 4ºESO optaba por un lenguaje con más signos matemáticos pese a no alcanzar gran detalle y corrección, puede que influidos por la docencia recibida pese a no poder llegar a niveles de detalle y corrección altos.

b. *Identificar estrategias y conjeturas de ajuste de la función entre cada una de las familias de funciones.* [A.2]

Respecto a las estrategias manifestadas por los estudiantes, creemos que esta parte del cuestionario cumple su función y permite apreciar como una misma estrategia no es perceptible influida por las características inherentes a cada familia.

c. *Detectar errores de reproducción de gráficas de funciones.* [A.3]

Respecto a las reproducciones que analizamos nos surge una cuestión relacionada con la presencia de los puntos de interpolación. Nos preguntamos si la ausencia de estos puntos mejora o empeora las reproducciones por parte del alumnado. Desde luego, hemos visto que centra en algunos casos la atención, limitando la región representada u obviando algunas ramas.

d. *Medir cierto grado de aprendizaje en la asociación de funciones dadas por su expresión algebraica con su gráfica.* [B.1] y [B.2]

Este objetivo está limitado por el diseño del cuestionario B, basado en una rejilla de gráficas, que creemos que tiene la virtud de tener un diseño cercano a la experiencia de manipulación con GeoGebra, siendo una sucesión de imágenes. Creemos que una limitación de la misma está en que es bidimensional, teniendo que prescindir de uno de los parámetros, aunque al ser reiterativo y estar identificado por el alumnado con facilidad creemos que es una variable controlada. Una posible mejora sería que este cuestionario fuera dado en soporte digital, pudiendo simplemente manipular una gráfica inicial, si bien el papel creemos que minimiza la pérdida de datos.

Para cerrar este apartado, recogemos algunas cuestiones que podrían motivar nuevos trabajos:

- Aunque no se haya remarcado, en este estudio se observa como alumnado que describe con buen nivel de detalle y corrección, no asigna correctamente expresiones y gráficas. Algunas causas podrían (conjeturamos), ubicarse en el cambio de sistema de representación, quizás una instrucción específica ayudase.
- En este trabajo los puntos de interpolación son dados dando un máximo de tres puntos. Sería interesante ampliar el número de puntos para ver si mejora el éxito del alumnado, incluso desarrollar secuencias didácticas donde el alumnado obtenga datos experimentalmente y modele situaciones en contextos cercanos.

6.3 SOBRE LA EXPERIENCIA DE AULA Y VALORACIÓN PERSONAL

En este último apartado, quería hacer una reflexión no medible, de esos diálogos que mantiene uno consigo mismo. Pese a las certezas que creía tener, el alumnado siempre sorprende, en este caso para bien, por la respuesta positiva y su concentración. En cierta forma, temía que estas actividades pasaran desapercibidas, por aquello de que no eran actividades evaluables con una calificación, y que los docentes entenderán sin tener que añadir nada más.

Esta secuencia de trabajo pretendía ante todo dejar al alumnado trabajar, sin guías marcadas, mientras el profesor hacía de aprendiz de gestor de cuestionarios, que incluía preguntar antes de dar un nuevo cuestionario si habían guardado y recordarles que debían cerrar o abrir el programa dado el caso. También surgieron dudas no previstas, como que todo se movía en pantalla por un uso inesperado de la rueda del ratón, que producía un alejamiento o acercamiento en la zona gráfica, junto a bloqueos de ordenadores o ralentizaciones.

Lo mejor de la experiencia de aula fue que sólo tuve que preocuparme por aprender a gestionar el proceso, pudiendo dejar a un lado la docencia, aunque agobiado por los intercambios continuos de cuestionarios sobre todo con el grupo de 2ºESO que era más numeroso, con los consecuentes ritmos diferentes.

7 BIBLIOGRAFÍA

Acevedo, A., Van Dooren, W., y Verschaffel, L. (2014). Improving students' representational flexibility in linear-function problems: an intervention. *Educational Psychology*, *34*(6), pp. 763-786.

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, *8*(2), pp. 61-73. [http://hdl.handle.net/10481/29576]

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990): *Funciones y gráficas. Matemáticas, cultura y aprendizaje*. Síntesis, Madrid.

Bartolini, B. M., y Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education, Nueva York*, 746-783.

Berciano, A., Ortega del Rincón, T., Puerta Rebuel, M., (2015) Aprendizajes de las interpolaciones gráficas y algebraicas. Análisis comparativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.3, pp. 43-58.

Borba, M., y Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. Nueva York: Springer.

Bracho, L. A. C., Araujo, R. E. G., y González, J. L. P. (2014). Una perspectiva de análisis de las transformaciones geométricas en curvas de la función $f(x) = e^{ax}$ utilizando el GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657*, *2*(2), 81-92.

Bryan, J. A. (2005). Video Analysis: Real-World Explorations for Secondary Mathematics. *Learning & Leading with Technology*, *32*(6), 22-24.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona, España: ICE/Horsori.

Cazau, P. (2006). Introducción a la investigación en ciencias sociales. *Buenos Aires*.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Colera, J., y Gaztelu, I. (2011). *Matemáticas 2. Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.

Colera, J., Oliveira, M. J., Gaztelu, I., Colera, L., y Martínez, M. M. (2011). *Matemáticas 4 opción B. Educación Secundaria*. Madrid: Anaya.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th anual meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57-63). Blacksburg, VA: Conference Committee.

Descartes, R. (2002). *Discurso del método. Meditaciones metafísicas* (Manuel García, trad.). Madrid: Austral. (Obra original publicada en 1637).

Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivos del pensamiento. *Anales de Didáctica y de Ciencias Cognitivas, IREM de Strasbourg*, 5, 37-65.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle, Colombia.

Duval, R. (2006). A cognitive análisis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Durán, A. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza editorial.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), pp. 105-121.

Gutiérrez, R. E., y Prieto, J. L. (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión $g(x) = ax^2$. *Números*, 88, 115-126.

Hadeler, K. P. (1982). *Matemáticas para biólogos*. Barcelona: Reverté.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(1), pp. 123-134.

Hitt, F. (2014). Nuevas tendencias en la enseñanza del cálculo: la derivada en ambientes TICE. *Revista AMIUTEM*, *2*(2).

Hopkins, D. (1989). *Investigación en el aula. Guía del profesor*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitaria.

Iranzo, N., y Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las ciencias*, *27*(3), pp. 433-446.

Izar, J. M. (1998). *Elementos de métodos numéricos para ingeniería*. México: Editorial Universitaria Potosina.

Janvier, C. (1987). Representations and understanding: The notion of function as an example. En C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-71). Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum.

Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 79–103.

Junta de Andalucía, JA (2007). *ORDEN de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía*. Sevilla: Autor.

Kaput, J.J. (1987). Representation Systems and Mathematics. En Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics*, pp. 19-26. Hillsdale: LEA.

Koklu, O., y Topcu, A. (2012). Effect of Cabri-assisted instruction on secondary school students' misconceptions about graphs of quadratic functions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*,*43*(8), 999-1011.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M.K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

Ley orgánica de educación (LOE) (Ley Orgánica 2/2006, 3 de mayo). *Boletín Oficial del Estado, nº 106*, 2006, 4 mayo.

Ley orgánica para la mejora de la calidad educativa (LOMCE) (Ley Orgánica 8/2013, 9 de diciembre). *Boletín Oficial del Estado, nº 295*, 2013, 10 diciembre.

Linés, E. (1991). *Principios de Análisis Matemático*. Barcelona: Reverté.

Luzin, N. (1998). The evolution of… function: Part 2. *American Mathematical Monthly*, *105*, 263–270.

Ministerio de Educación y Ciencias, MEC (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

Pérez, C. R. (2014). Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática. *Perspectiva educacional, 2*(53), 129-150.

Puerta, M. (2009). Interpolación y extrapolación gráfica y algebraica. Estudio de contraste (tesis doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.) *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35) México: Trillas.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (Martín Acosta, trad.). Colombia (Obra original publicada en 1995).

Rico, L., Castro, E., y Romero, I. (2000). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. En Beltrán, J. et al. (Eds.): *Intervención psicopedagógica y currículum escolar*, (pp. 153-182) Madrid: Pirámide.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Rogers, L. T. (1995). The computer as an aid for exploring graphs. *School Science Review*, *76*, 31-31.

Romero, L., y Serrano, J. M. (1997). *Desarrollo histórico del concepto de límite: Un ensayo de aplicación del análisis filogenético a la enseñanza*. Murcia: Servicio de Publicaciones Universidad de Murcia.

Ruiz, N., Bosch, M., y Gascón, J. (2007). Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Spivak, M. (2006). *Calculus*. Barcelona: Editorial Reverté.

Underwood, J., Hoadley, C., Lee, H. S., Hollebrands, K. F., DiGiano, C. y Renninger, K. A. (2005). IDEA: Identifying design principles in educational applets. *Educational Technology Research and Development*, *53*(2), 99-112.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. En T. Nunes y P. Bryant (Eds.): *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 5–28). Hove: Psychology Press.

Vilà-Baños, R. Rubio-Hurtado, M. J., Berlanga-Silvente, V., y Torrado-Fonseca, M. (2014). Cómo aplicar un cluster jerárquico en SPSS. [En línea] *REIRE, Revista d'Innovació i Recerca en Educació*, *7*(1), 113-127. Accesible en: http://www.ub.edu/ice/reire.htm

Zaslavsky, O. (1997). Conceptual Obstacles in the Learning of Quadratic Functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *19*(1), 20-44.

8 ANEXOS

8.1 CONTENIDOS DE FUNCIONES PARA 1º Y 2ºESO AMPLIADA

Tabla 2.1.3

Contenidos de funciones presentes en MECD (2015, p. 412) para los cursos de 1º y 2ºESO

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
• Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados. • El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas. • Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta. • Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.	• Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas. • Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto. • Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales. • Reconocer, representar y analizar las funciones lineales, utilizándolas para resolver problemas.	• Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas. • Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto. • Reconoce si una gráfica representa o no una función. • Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características. • Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente. • Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores. • Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y la representa. • Estudia situaciones reales sencillas y, apoyándose en recursos tecnológicos, identifica el modelo matemático funcional (lineal o afín) más adecuado para explicarlas y realiza predicciones y simulaciones sobre su comportamiento.

8.2 CONTENIDOS DE FUNCIONES PARA 3ºESO (ACADÉMICAS) AMPLIADA

Tabla 2.1.4

Contenidos de funciones presentes en MECD (2015, p. 394) para 3ºESO (académicas)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
• Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. • Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. • Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. • Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. • Expresiones de la ecuación de la recta. • Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.	• Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. • Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. • Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.	• Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. • Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto. • Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. • Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente. • Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (Ecuación punto pendiente, general, explicita y por dos puntos), identifica puntos de corte y pendiente, y la representa gráficamente. • Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. • Formula conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica. • Calcula los elementos característicos de una función polinómica de grado dos y la representa gráficamente. • Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

8.3 CONTENIDOS DE FUNCIONES PARA 3ºESO (APLICADAS) AMPLIADA

Tabla 2.1.5

Contenidos de funciones presentes en MECD (2015, p. 402) para 3ºESO (aplicadas)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
• Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias. • Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente. • Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. • Utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica. • Expresiones de la ecuación de la recta • Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.	• Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y su representación gráfica. • Identificar relaciones de la vida cotidiana y de otras materias que pueden modelizarse mediante una función lineal valorando la utilidad de la descripción de este modelo y de sus parámetros para describir el fenómeno analizado. • Reconocer situaciones de relación funcional que necesitan ser descritas mediante funciones cuadráticas, calculando sus parámetros y características.	• Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas. • Identifica las características más relevantes de una gráfica, interpretándolos dentro de su contexto. • Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto. • Asocia razonadamente expresiones analíticas sencillas a funciones dadas gráficamente. • Determina las diferentes formas de expresión de la ecuación de la recta a partir de una dada (ecuación punto- pendiente, general, explícita y por dos puntos) e identifica puntos de corte y pendiente, y las representa gráficamente. • Obtiene la expresión analítica de la función lineal asociada a un enunciado y la representa. • Representa gráficamente una función polinómica de grado dos y describe sus características. • Identifica y describe situaciones de la vida cotidiana que puedan ser modelizadas mediante funciones cuadráticas, las estudia y las representa utilizando medios tecnológicos cuando sea necesario.

8.4 CONTENIDOS DE FUNCIONES PARA 4ºESO (ACADÉMICAS) AMPLIADA

Tabla 2.1.6

Contenidos de funciones presentes en MECD (2015, p. 397) para 4ºESO (académicas)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
• Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados. • La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. • Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.	• Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. • Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.	• Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional y asocia las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas. • Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica, empleando medios tecnológicos, si es preciso. • Identifica, estima o calcula parámetros característicos de funciones elementales. • Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno a partir del comportamiento de una gráfica o de los valores de una tabla. • Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica. • Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales, cuadráticas, de proporcionalidad inversa, definidas a trozos y exponenciales y logarítmicas. • Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales. • Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y

Tabla 2.1.6

Contenidos de funciones presentes en MECD (2015, p. 397) para 4ºESO (académicas)

	unidades adecuadas. • Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios tecnológicos. • Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes.

8.5 CONTENIDOS DE FUNCIONES PARA 4ºESO (APLICADAS) AMPLIADA

Tabla 2.1.7

Contenidos de funciones presentes en MECD (2015, p. 406) para 4ºESO (aplicadas)

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
• Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. • Estudio de otros modelos funcionales y descripción de sus características, usando el lenguaje matemático apropiado. Aplicación en contextos reales. • La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.	• Identificar relaciones cuantitativas en una situación, determinar el tipo de función que puede representarlas, y aproximar e interpretar la tasa de variación media a partir de una gráfica, de datos numéricos o mediante el estudio de los coeficientes de la expresión algebraica. • Analizar información proporcionada a partir de tablas y gráficas que representen relaciones funcionales asociadas a situaciones reales, obteniendo información sobre su comportamiento, evolución y posibles resultados finales.	• Identifica y explica relaciones entre magnitudes que pueden ser descritas mediante una relación funcional, asociando las gráficas con sus correspondientes expresiones algebraicas. • Explica y representa gráficamente el modelo de relación entre dos magnitudes para los casos de relación lineal, cuadrática, proporcional inversa y exponencial. • Identifica, estima o calcula elementos característicos de estas funciones (cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, continuidad, simetrías y periodicidad). • Expresa razonadamente conclusiones sobre un fenómeno, a partir del análisis de la gráfica que lo describe o de una tabla de valores. • Analiza el crecimiento o decrecimiento de una función mediante la tasa de variación media, calculada a partir de la expresión algebraica, una tabla de valores o de la propia gráfica. • Interpreta situaciones reales que responden a funciones sencillas: lineales,

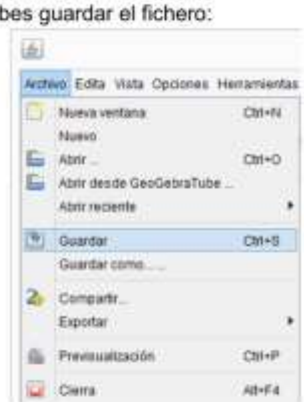
	cuadráticas, de proporcionalidad inversa, y exponenciales • Interpreta críticamente datos de tablas y gráficos sobre diversas situaciones reales. • Representa datos mediante tablas y gráficos utilizando ejes y unidades adecuadas. • Describe las características más importantes que se extraen de una gráfica, señalando los valores puntuales o intervalos de la variable que las determinan utilizando tanto lápiz y papel como medios informáticos. • Relaciona distintas tablas de valores y sus gráficas correspondientes en casos sencillos, justificando la decisión. • Utiliza con destreza elementos tecnológicos específicos para dibujar gráficas.

8.6 CUESTIONARIO A DE LA FAMILIA LINEAL (ANVERSO)

Cuestionario A: función lineal $y = ax + b$

Dentro de la carpeta de tu curso hay otra llamada *Practica_1*. Ábrela y dentro tienes varios archivos: 001.ggb, 002.ggb y 003.ggb que abrirás por orden.

- Tu objetivo es usar los deslizadores a y b para interpolar los puntos dados en cada caso.
- Puedes reiniciar un fichero dándole al botón Comienza.
- Al terminar cada ejercicio debes guardar el fichero:



Ahora abre el fichero libre.ggb para seguir practicando y reflexiona sobre estas preguntas:

¿Qué significa a? ____

¿Qué significa b? ____

Ahora vas a describir el proceso de resolución del ejercicio azar.ggb que hagas:

- ¿Qué puntos te propone el programa? ____________ y ____________
- Ahora describe los pasos que sigues para resolverlo:

paso 1.____

paso 2.____

paso 3.____

paso 4.____

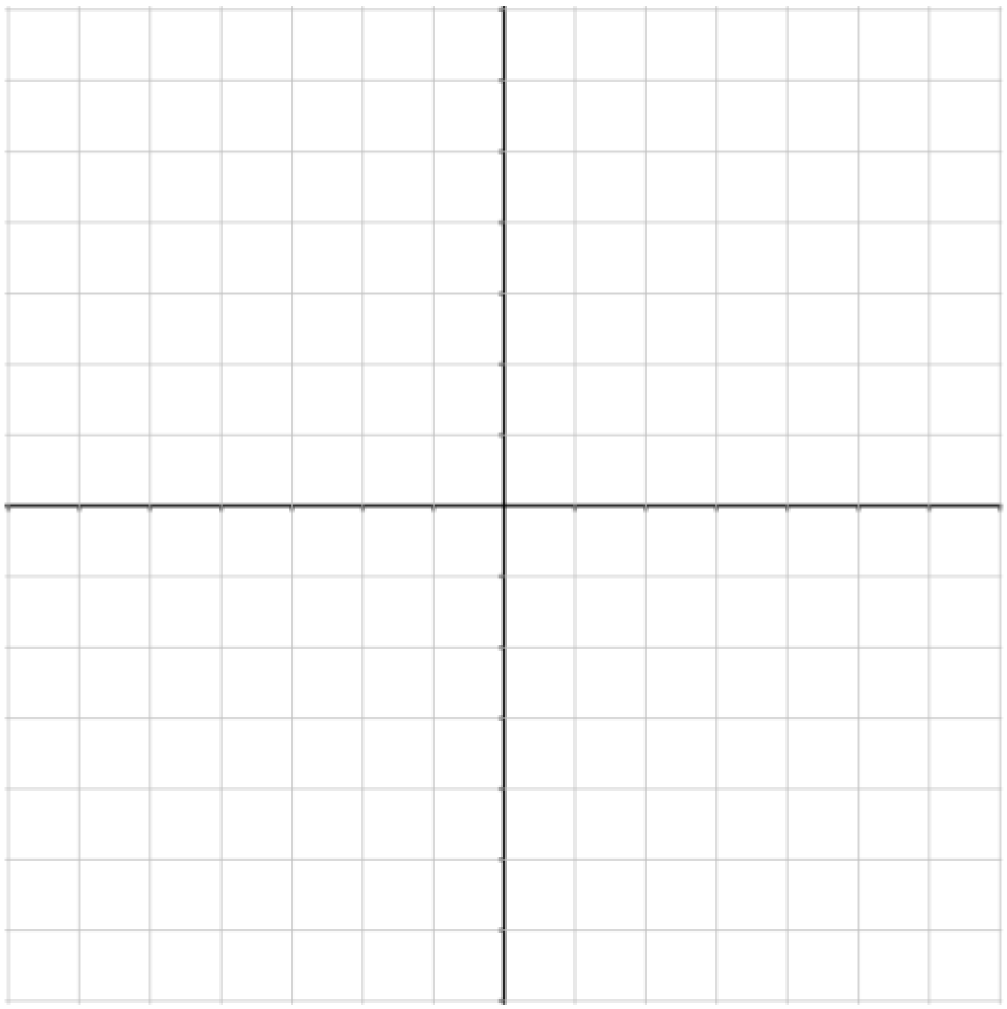
paso 5.____

paso 6. ____

8.7 CUESTIONARIO A DE LA FAMILIA LINEAL (REVERSO)

- ¿Qué solución te sale? Escribe su expresión: $y =$

Dibuja la gráfica que obtienes a mano alzada lo mejor que puedas:



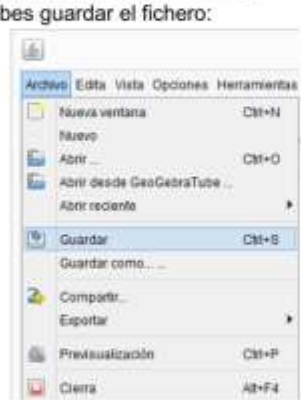
Ahora cierra Geogebra y pide a tu profesor el <u>cuestionario B</u>.

8.8 CUESTIONARIO A DE LA FAMILIA CUADRÁTICA (ANVERSO)

Cuestionario A: función $y = ax^2 + bx + c$

Dentro de la carpeta de tu curso hay otra llamada *Practica_2*. Ábrela y dentro tienes varios archivos: 001.ggb, 002.ggb y 003.ggb que abrirás por orden.

- Tu objetivo es usar los deslizadores a, b y c para interpolar los puntos dados en cada caso.
- Puedes reiniciar un fichero dándole al botón Comienza.
- Al terminar cada ejercicio debes guardar el fichero:



Ahora abre el fichero practica_libre.ggb para seguir practicando y reflexiona sobre estas preguntas:

¿Qué significa a? ______________________________

¿Qué significa b? ______________________________

¿Qué significa c? ______________________________

Ahora vas a describir el proceso de resolución del ejercicio azar.ggb que hagas:

- ¿Qué puntos te propone el programa? __________, __________ y __________
- Ahora describe los pasos que sigues para resolverlo:

paso 1.______________________________

paso 2.______________________________

paso 3.______________________________

paso 4.______________________________

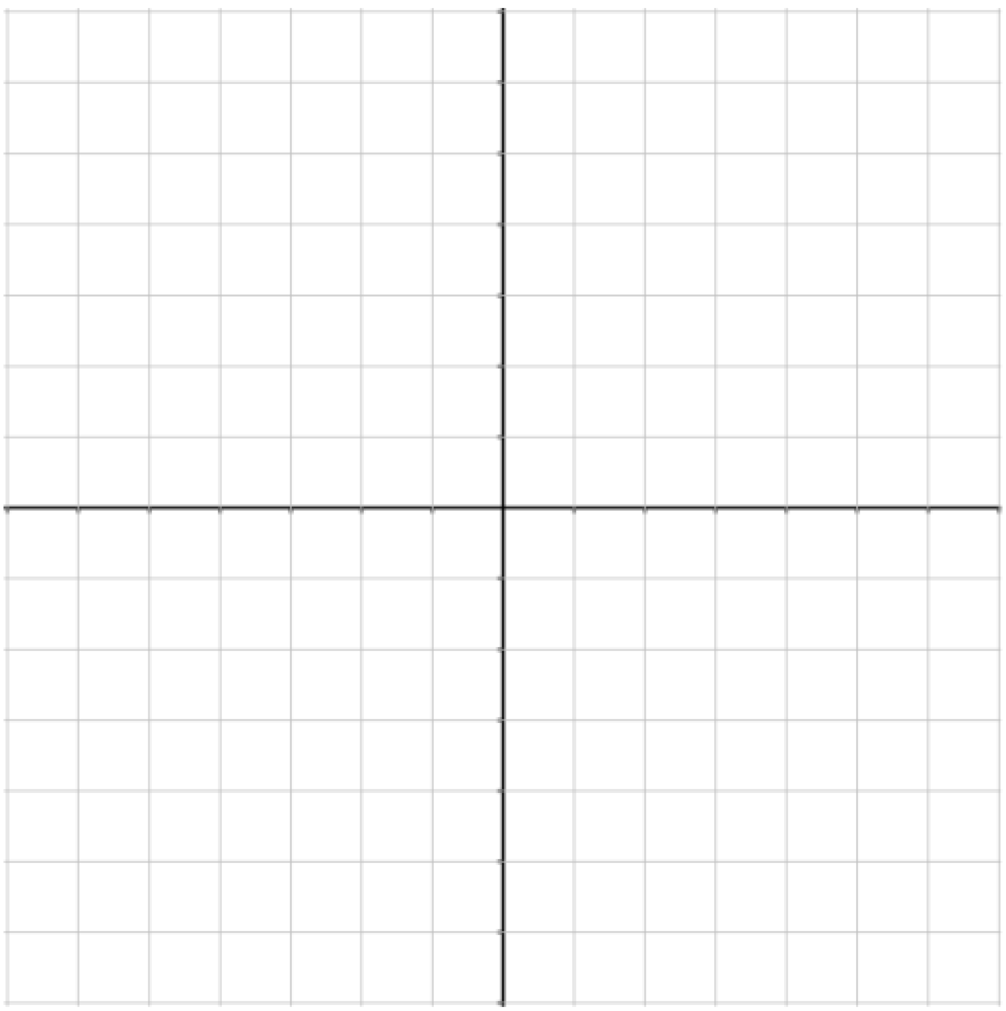
paso 5.______________________________

paso 6. ______________________________

8.9 CUESTIONARIO A DE LA FAMILIA CUADRÁTICA (REVERSO)

- ¿Qué solución te sale? Escribe su expresión: $y =$

Dibuja la gráfica que obtienes a mano alzada lo mejor que puedas:



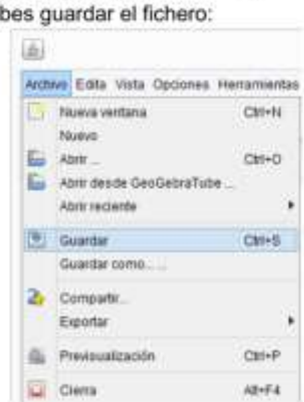
Ahora cierra Geogebra y pide a tu profesor el cuestionario B.

8.10 CUESTIONARIO A DE LA FAMILIA EXPONENCIAL (ANVERSO)

Cuestionario A: función $y = ab^x + c$

Dentro de la carpeta de tu curso hay otra llamada *Práctica_3*. Ábrela y dentro tienes varios archivos: 001.ggb, 002.ggb y 003.ggb que abrirás por orden.

- Tu objetivo es usar los deslizadores a, b y c para interpolar los puntos dados en cada caso.
- Puedes reiniciar un fichero dándole al botón Comienza.
- Al terminar cada ejercicio debes guardar el fichero:



Ahora abre el fichero libre.ggb para seguir practicando y reflexiona sobre estas preguntas:

¿Qué significa a? ____

¿Qué significa b? ____

¿Qué significa c? ____

Ahora vas a describir el proceso de resolución del ejercicio azar.ggb que hagas:

- ¿Qué puntos te propone el programa? __________, __________ y __________
- Ahora describe los pasos que sigues para resolverlo:

paso 1.____

paso 2.____

paso 3.____

paso 4.____

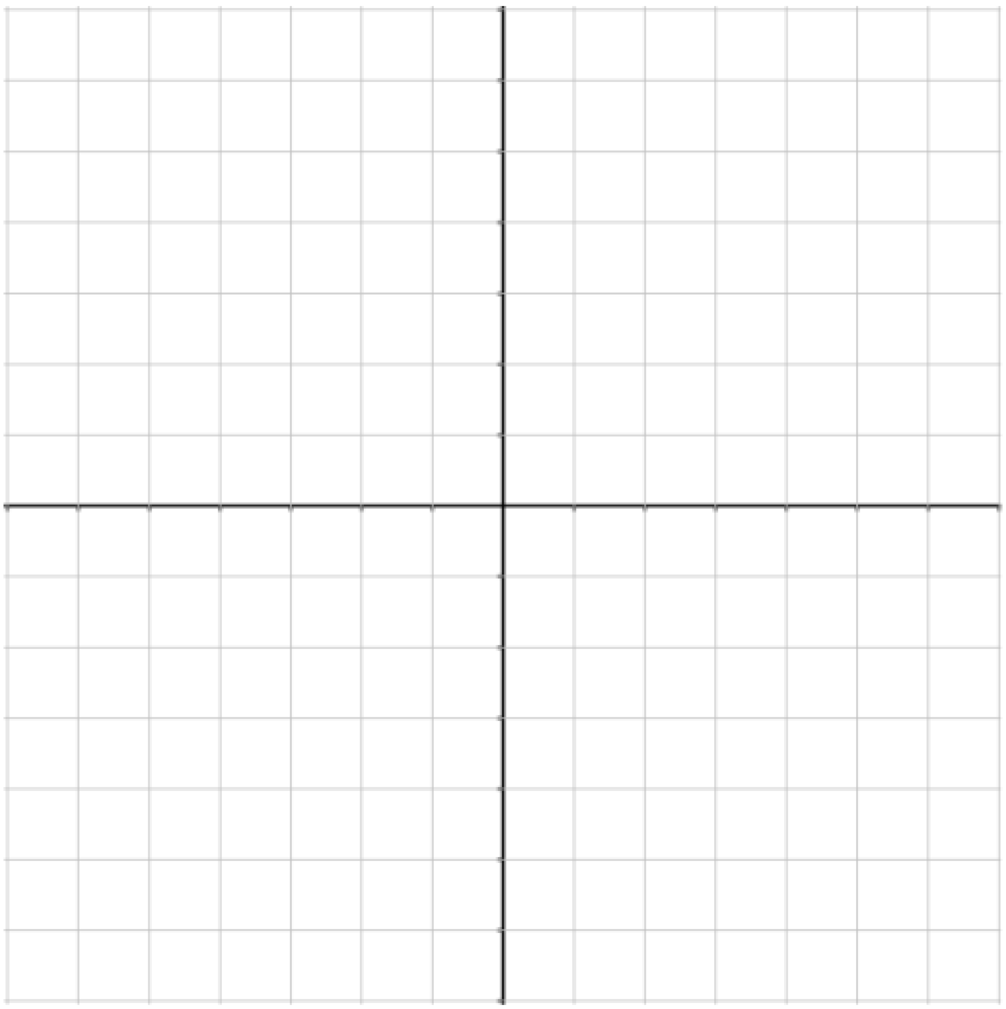
paso 5.____

paso 6. ____

8.11 CUESTIONARIO A DE LA FAMILIA EXPONENCIAL (REVERSO)

- ¿Qué solución te sale? Escribe su expresión: $y =$

Dibuja la gráfica que obtienes a mano alzada lo mejor que puedas:



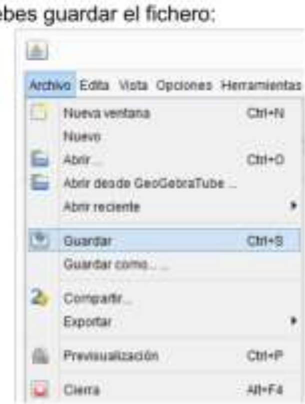
Ahora cierra Geogebra y pide a tu profesor el <u>cuestionario B</u>.

8.12 CUESTIONARIO A DE LA FAMILIA DE PROP. INVERSA (ANVERSO)

Cuestionario A: función $y = \frac{a}{x-b} + c$

Dentro de la carpeta de tu curso hay otra llamada *Practica_4*. Ábrela y dentro tienes varios archivos: 001.ggb, 002.ggb y 003.ggb que abrirás por orden.

- Tu objetivo es usar los deslizadores a, b y c para interpolar los puntos dados en cada caso.
- Puedes reiniciar un fichero dándole al botón Comienza.
- Al terminar cada ejercicio debes guardar el fichero:



Ahora abre el fichero libre.ggb para seguir practicando y reflexiona sobre estas preguntas:

¿Qué significa a? ____

¿Qué significa b? ____

¿Qué significa c? ____

Ahora vas a describir el proceso de resolución del ejercicio azar.ggb que hagas:

- ¿Qué puntos te propone el programa? __________, __________ y __________
- Ahora describe los pasos que sigues para resolverlo:

paso 1.____

paso 2.____

paso 3.____

paso 4.____

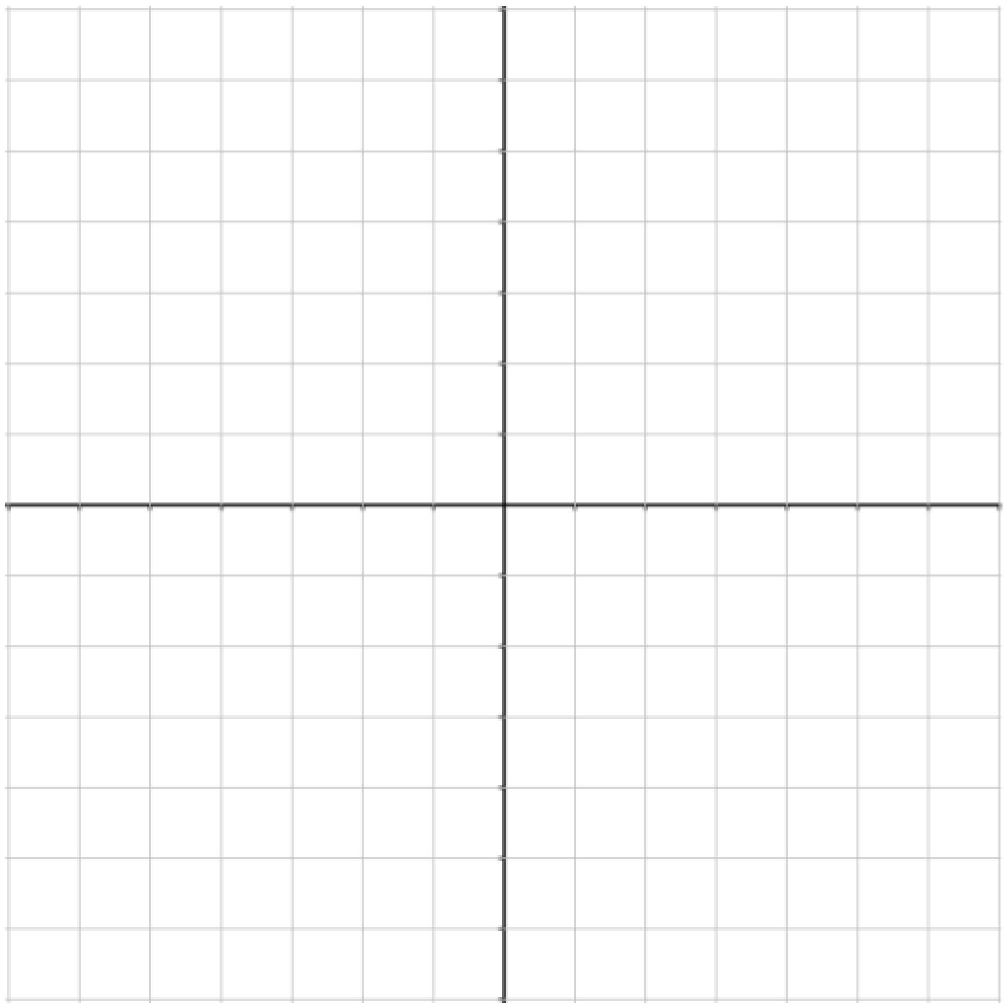
paso 5.____

paso 6. ____

8.13 CUESTIONARIO A DE LA FAMILIA DE PROP. INVERSA (REVERSO)

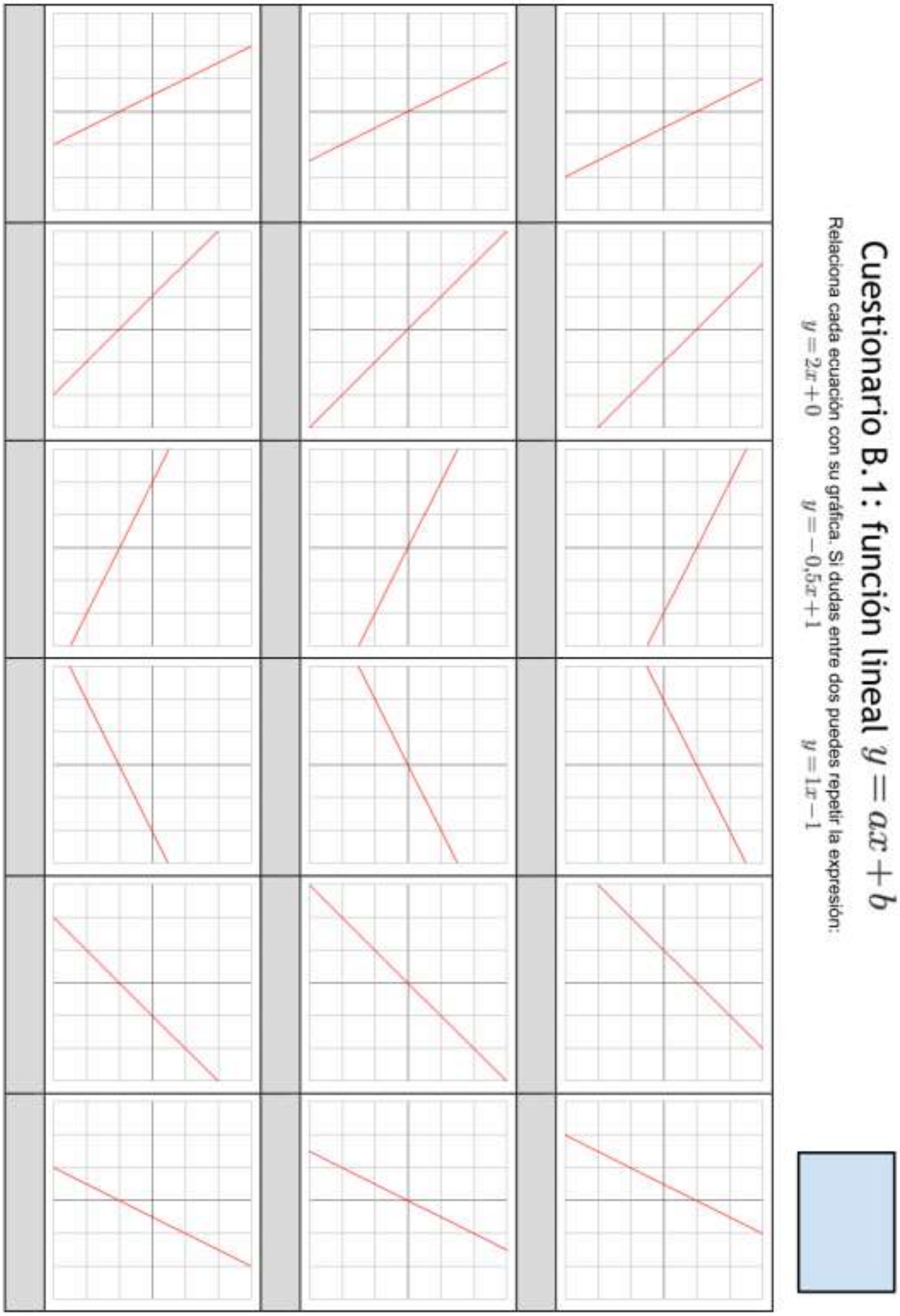
- ¿Qué solución te sale? Escribe su expresión: $y =$

Dibuja la gráfica que obtienes a mano alzada lo mejor que puedas:

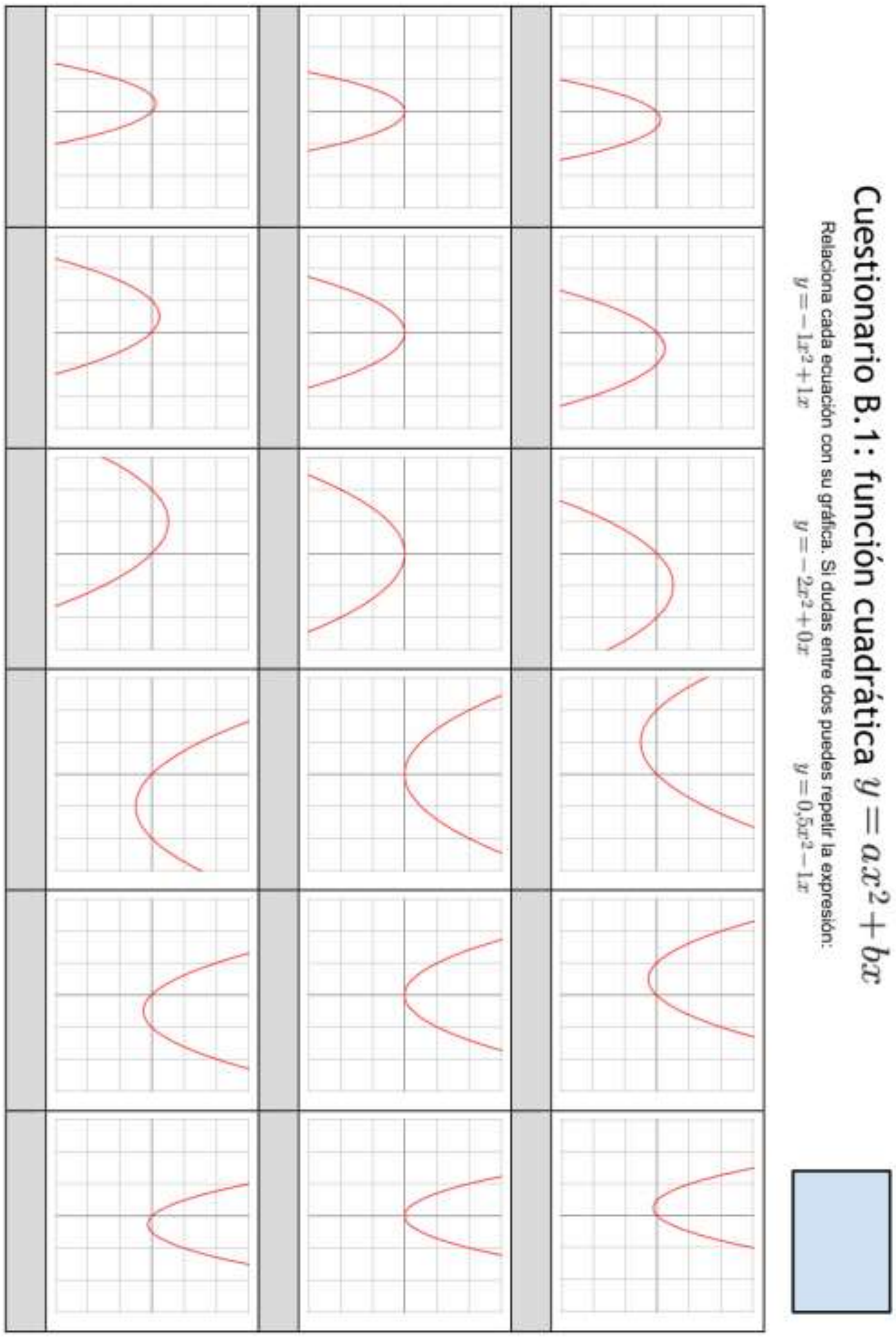


Ahora cierra Geogebra y pide a tu profesor el <u>cuestionario B</u>.

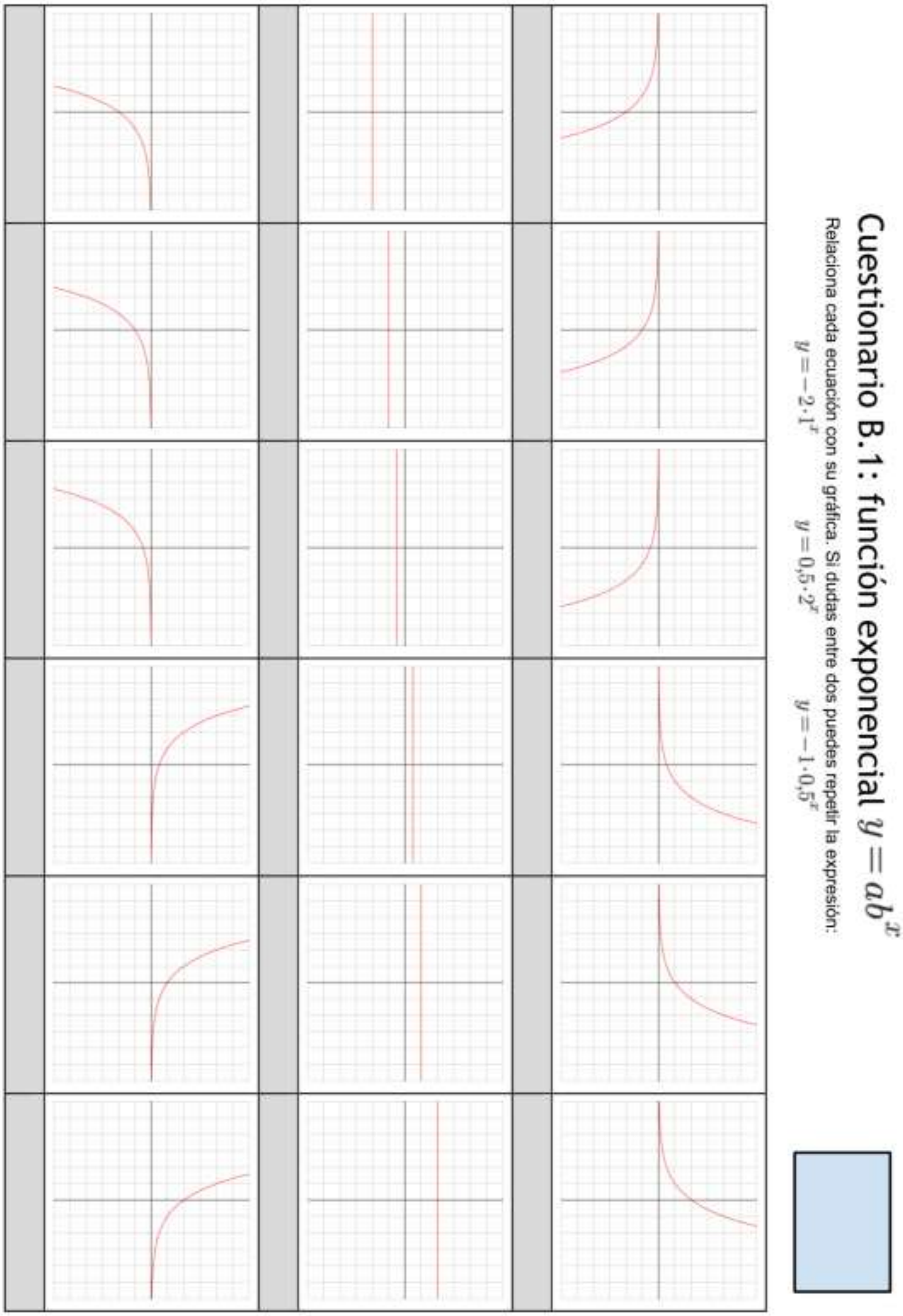
8.14 CUESTIONARIO B.1 DE LA FAMILIA LINEAL



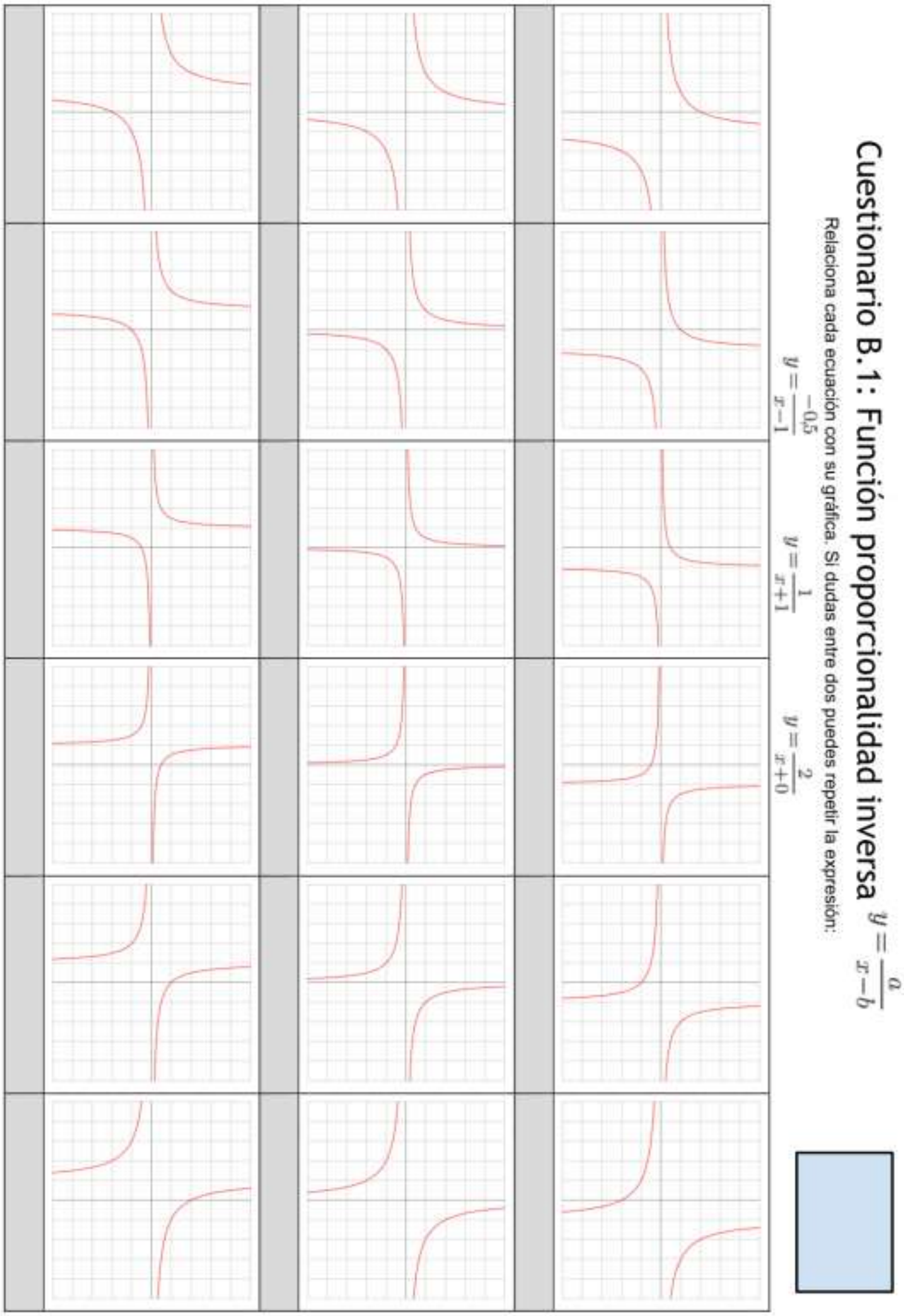
8.15 CUESTIONARIO B.1 DE LA FAMILIA CUADRÁTICA



8.16 CUESTIONARIO B.1 DE LA FAMILIA EXPONENCIAL



8.17 CUESTIONARIO B.1 DE LA FAMILIA DE PROPORCIONALIDAD INVERSA



8.18 CUESTIONARIO B ADJUNTO A LA FAMILIA LINEAL Y CUADRÁTICA

Explica cómo has relacionado cada expresión del cuestionario B con su gráfica:

Cuestionario B: función lineal $y = ax + b$	
$y = 2x + 0$	
$y = -0,5x + 1$	
$y = 1x - 1$	

Explica cómo has relacionado cada expresión del cuestionario B con su gráfica:

Cuestionario B: función cuadrática $y = ax^2 + bx$	
$y = -1x^2 + 1x$	
$y = -2x^2 + 0x$	
$y = 0,5x^2 - 1x$	

8.19 CUESTIONARIO B ADJUNTO A LA FAMILIA LINEAL Y CUADRÁTICA

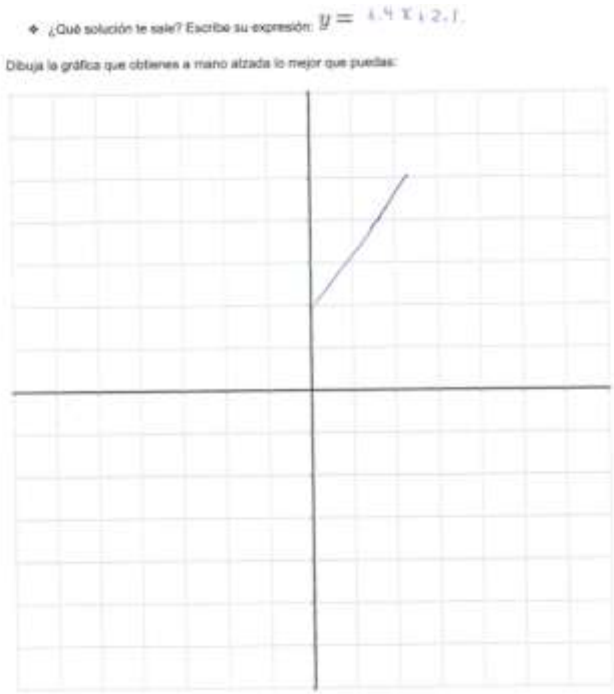
Explica cómo has relacionado cada expresión del cuestionario B con su gráfica:

Cuestionario B: Función proporcionalidad inversa $y=\frac{a}{x-b}$	
$y=\frac{-0{,}5}{x-1}$	
$y=\frac{1}{x+1}$	
$y=\frac{2}{x+0}$	

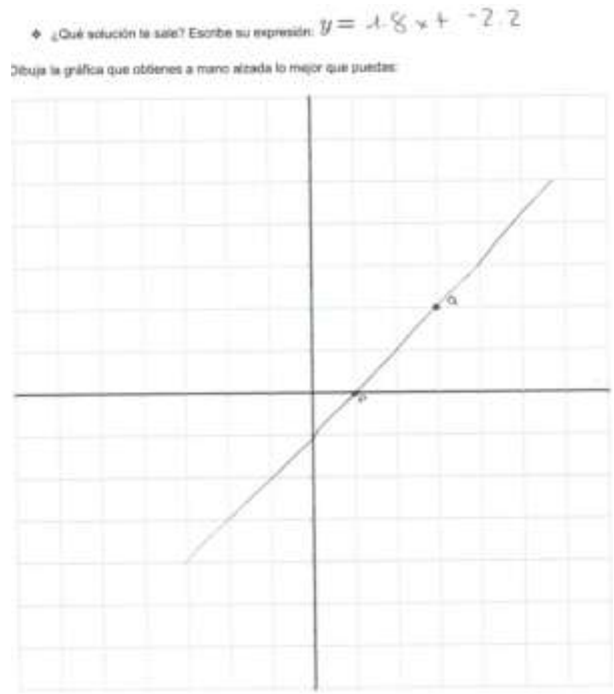
Explica cómo has relacionado cada expresión del cuestionario B con su gráfica:

Cuestionario B: función exponencial $y=ab^{x}$	
$y=-2\cdot 1^{x}$	
$y=0{,}5\cdot 2^{x}$	
$y=-1\cdot 0{,}5^{x}$	

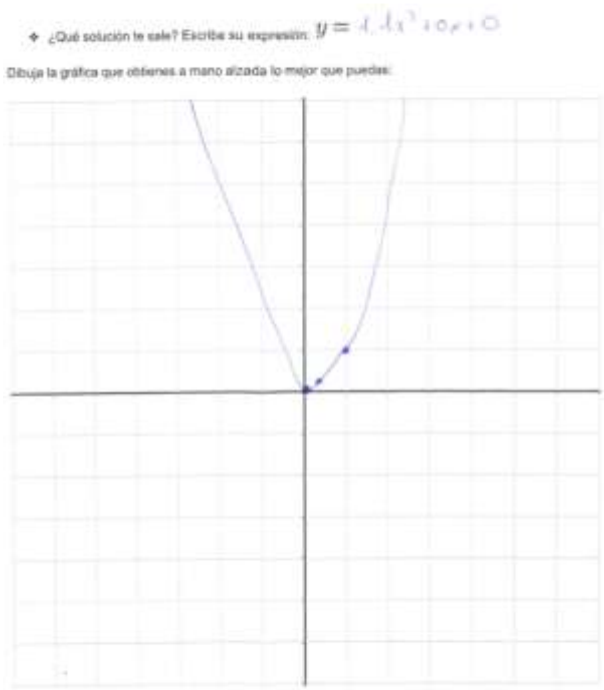
8.20 MUESTRAS DE DEFICIENCIAS EN LA REPRODUCCIÓN DE GRÁFICAS (1/2)



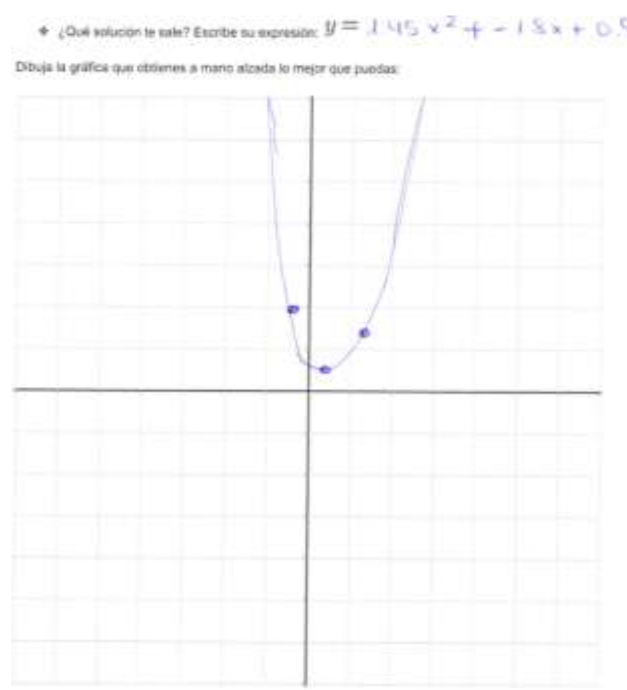
Restricción del dominio [2_1]



Problema de escala [2_2]

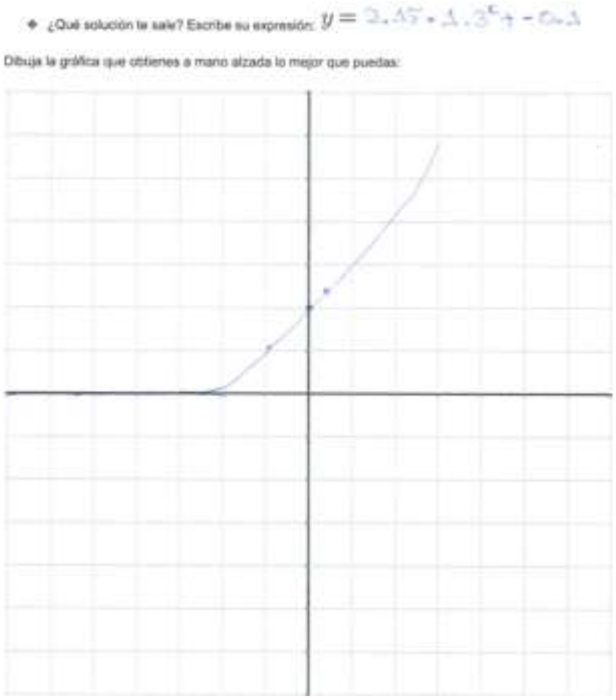


Pérdida de simetría [2_6]

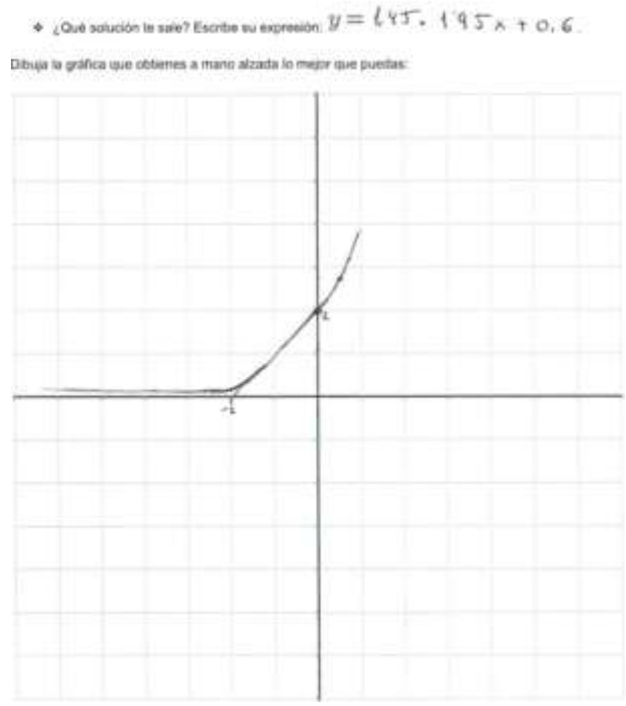


Exceso de redondez, pérdida de simetría [2_12]

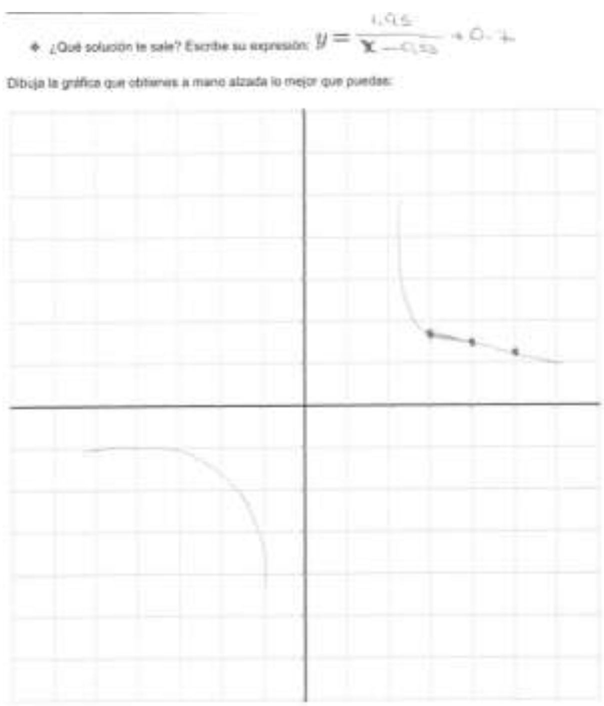
8.21 MUESTRAS DE DEFICIENCIAS EN LA REPRODUCCIÓN DE GRÁFICAS (2/2)



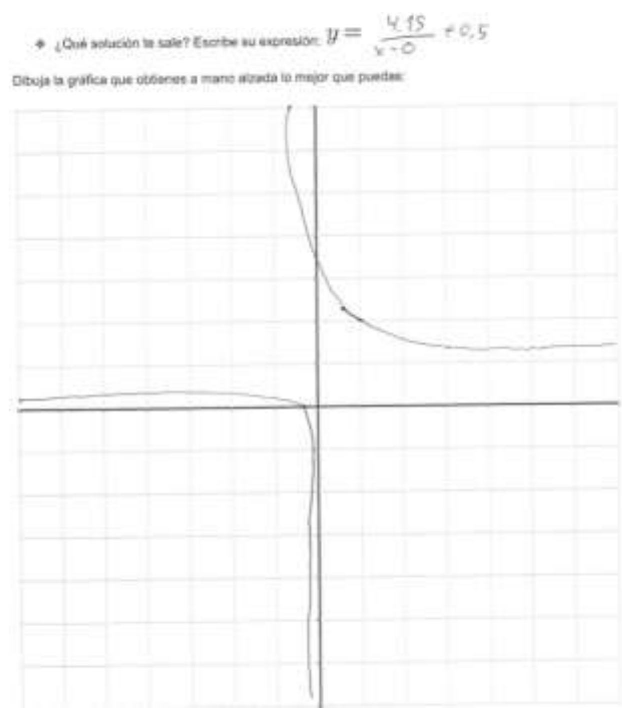
No tendencia vertical, rectificación [2_4]



Restricción del dominio, rectificación [4_3]



Dominio, omisión de ramas [2_5]



Superposición ramas [4_4]