

Unidad Didáctica

Ecuaciones e Inecuaciones

TRABAJO FIN DE MÁSTER que presenta Helena Civanto Rosales, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la Universidad de Granada, en Granada 2010.



Universidad de Granada

UNIDAD DIDÁCTICA: ECUACIONES E INECUACIONES

Memoria de TRABAJO FIN DE MÁSTER realizada bajo la tutela del Doctor Jose Luis Lupiáñez Gómez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Helena Civanto Rosales, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo.: Helena Civanto Rosales

VºBº del Tutor

Fdo: Jose Luis Lupiáñez Gómez

ÍNDICE

1. Introducción.....	3
2. Fundamentación.....	5
3. Elementos de la Unidad Didáctica.....	9
3.1. Análisis de contenido.....	10
3.1.1. Desarrollo histórico del tema.....	10
3.1.2. Estructura conceptual.....	11
3.1.3. Sistemas de representación.....	13
3.1.4. Fenomenología.....	15
3.2. Análisis cognitivo.....	18
3.2.1. Expectativas que se esperan desarrollar.....	18
3.2.2. Limitaciones de aprendizaje.....	22
3.3. Análisis de instrucción.....	23
3.3.1. Grados de complejidad y funcionalidad de las tareas.....	23
3.3.2. Secuenciación y organización de las tareas de la UD.	
Gestión del aula.....	25
4. Criterios e instrumentos de evaluación.....	27
5. Desarrollo de la secuencia de tareas de la unidad didáctica.....	30
6. Conclusiones.....	56
7. Bibliografía.....	58
Anexo I: Tareas de la secuenciación analizadas según los indicadores usuales	60
Anexo II: Transparencias.....	78
Anexo III: Dominó de conjuntos.....	81
Anexo IV: Relación de ejercicios.....	85
Anexo V: Prueba escrita.....	87

1. Introducción

Unidad Didáctica: Ecuaciones e Inecuaciones

La enseñanza está condicionada por la inmediatez y la imprevisibilidad, por lo que hace necesaria una planificación que nos permita reducir el nivel de incertidumbre y anticipar lo que sucederá en el desarrollo de las sesiones; así se otorga rigurosidad y coherencia a la tarea pedagógica.

En este caso el tema en que me centro son las Ecuaciones e Inecuaciones para el primer curso de bachillerato y dentro de este marco se toman las decisiones necesarias para organizar las distintas sesiones.

Para estructurar y organizar la propuesta educativa que se plantea se ha hecho énfasis en el estudio del Análisis de Contenido, Análisis Cognitivo y Análisis de Instrucción.

En el Análisis de Contenido se trata el desarrollo histórico del tema, su estructura conceptual, los sistemas de representación que se utilizan y la fenomenología en la que están implicadas las ecuaciones e inecuaciones.

En el Análisis Cognitivo se analizan las expectativas que se esperan desarrollar y las limitaciones que conlleva este aprendizaje. En cuanto a las expectativas que se esperan desarrollar se analizan tanto los objetivos que se quieren alcanzar como las competencias que se desarrollan por medio de dichos objetivos. El estudio sobre limitaciones se refiere a los errores y dificultades que puede tener el alumnado al realizar las distintas tareas que se proponen.

En el Análisis de Instrucción se planifican las secuencias y sesiones en las que se van a organizar las clases y la manera en la que se van a exponer los contenidos y tareas del tema.

Además de estos tres grandes bloques, en el desarrollo de la unidad se analiza también la fundamentación en la que me baso para su realización.

Por otra parte, se estudian los criterios e instrumentos de evaluación que se van a seguir para la superación de la unidad por parte del alumnado.

Para concluir el trabajo, se exponen las conclusiones a las que se han llegado con la culminación de la unidad.

2. Fundamentación

Unidad Didáctica: Ecuaciones e Inecuaciones

Partiendo de la noción de currículo que propone Rico (1997b), éste se organiza en torno a 4 componentes: contenidos, objetivos, metodología y evaluación.

Al estar organizado el currículo de esta forma se pueden encontrar una serie de inconvenientes, como son los siguientes:

- Al ser los objetivos generales, no se pueden diferenciar (con ellos) unas unidades didácticas de otras.
- Si se consideran las orientaciones metodológicas de los documentos también es complicado establecer diferencias entre los distintos bloques de contenido.
- Del mismo modo ocurre con los criterios de evaluación, que solo se encuentran criterios generales como única referencia.

Con todo esto se tiene que las unidades didácticas se distinguen unas de otras solo por sus contenidos específicos.

Para paliar esta carencia que supone que sólo se disponga de estas cuatro componentes (contenidos, objetivos, metodología y evaluación), se van a analizar con más detalle las matemáticas escolares de cara a su enseñanza y aprendizaje. Rico propone una serie de herramientas que denomina Organizadores del Currículo algunos de los cuales son los siguientes:

- Errores y dificultades, además de los problemas u obstáculos de aprendizaje que se detectan o plantean para cada concepto.
- Diversidad de representaciones utilizadas para cada sistema conceptual.
- Fenomenología de los conocimientos complicados
- Diversidad de materiales de tipo manipulativo y de los recursos que puedan emplearse.
- Evolución histórica de cada campo e, incluso de cada concepto.

Además de esto, se van a aplicar otros organizadores más que pueden ser útiles para profundizar mejor en todos los aspectos de la Unidad Didáctica que se quiere llevar a cabo (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009). Un esquema de todo lo que se va a estudiar es el siguiente:

- Análisis de contenido:
 - Estructura conceptual
 - Sistemas de representación
 - Fenomenología
- Análisis cognitivo:
 - Expectativas de aprendizaje (objetivos y competencias)
 - Limitaciones de Aprendizaje
 - Oportunidades de Aprendizaje
- Análisis de instrucción:
 - Grados de complejidad y funcionalidad de las tareas
 - Secuenciación y organización de las tareas

Esto se observa, por ejemplo, en el tratamiento del tema “*Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones*” en el currículo de Educación secundaria y en el de Bachillerato.

Unidad Didáctica: Ecuaciones e Inecuaciones

Para abordar la tarea de realizar la unidad didáctica de este tema, se parte de los conocimientos previos de los que disponen nuestros alumnos, para saberlos se recurre a los contenidos referentes al curso de 4º de E.S.O. entre los que se encuentran:

Opción A:

- *Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.*
- *Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.*
- *Desigualdades, usos y propiedades. Resolución de inecuaciones lineales sencillas. Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones lineales sencillas.*

Opción B:

- *Estudio de las soluciones de la ecuación de segundo grado. Ecuaciones reducibles a una ecuación de segundo grado. Sistemas de ecuaciones de segundo grado.*
- *Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas.*
- *Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.*
- *Resolución de inecuaciones. Interpretación gráfica. Planteamiento y resolución de problemas en diferentes contextos utilizando inecuaciones.*

En estos textos también se pueden observar algunas indicaciones metodológicas que considero oportunas a tener en cuenta en la unidad didáctica (Ministerio de Educación, 2007):

En la enseñanza de las matemáticas debemos disponer de diferentes herramientas que nos ayuden a motivar a los jóvenes a utilizarlas, dentro y fuera del aula, para encontrar soluciones a determinadas cuestiones relacionadas con su vida cotidiana o con su aplicación en otras áreas.

Las opciones metodológicas que se tomen van a ser fundamentales, incluso más que la propia introducción de unos u otros contenidos.

La utilización racional de las herramientas tecnológicas. El uso adecuado de calculadoras y software específico en el aprendizaje de los contenidos matemáticos mejora el desarrollo cognitivo en aspectos como el sentido numérico, la visualización o la relación entre diferentes contenidos.

El empleo de calculadoras y programas informáticos en la Educación secundaria obligatoria está especialmente indicado en la comparación, aproximación o las relaciones entre las diferentes formas de expresar los números, en el estudio de la geometría dinámica y en los contenidos relacionados con la utilización de gráficas y, en general, en la interpretación, tratamiento y representación de la información.

La fuerte abstracción simbólica, el saber matemático, deben tener en esta materia una relativa presencia. Las fórmulas, una vez que se las ha dotado de

significado, adoptan un papel de referencia que facilita la interpretación de los resultados pero, ni su obtención, ni su cálculo y mucho menos su memorización, deben ser objeto de estudio. Por su parte, las herramientas tecnológicas ofrecen la posibilidad de evitar tediosos cálculos que poco o nada aportan al tratamiento de la información. No por ello debe dejarse de trabajar la fluidez y la precisión en el cálculo manual simple, donde los estudiantes suelen cometer frecuentes errores que les pueden llevar a falsos resultados o inducirle a confusión en las conclusiones. (p. 31803)

3. Elementos de la Unidad Didáctica

3.1. Análisis de Contenido

3.1.1. Desarrollo histórico del tema

Se va a hacer un recorrido histórico, desde la antigua Babilonia hasta el siglo XVII, para conocer las distintas formas que tenían algunas culturas para resolver las diferentes ecuaciones e inecuaciones.

Con ello se quiere destacar los principales hechos que se han sucedido a lo largo de la historia y ver la relación con la actualidad.

La palabra ecuación viene del término latino *aequatio*, que a su vez se deriva de *aequare* (igualar) o *aequis* (igual).

A continuación se detalla un breve guión histórico de todas las épocas en las que se han estudiado las distintas expresiones algebraicas:

- La Matemática Prehelénica:
 - Mesopotamia: desde el punto de vista matemático, las novedades más importantes que se encuentran se refieren a la solución algebraica de las ecuaciones lineales y cuadráticas, y el conocimiento del Teorema de Pitágoras y de sus consecuencias numéricas.
 - Egipto: tiene un nivel inferior a la matemática mesopotámica. Sus conocimientos matemáticos se encuentran reflejados en papiros, los más importantes son los papiros de Kahun y de Berlín (XII Dinastía, 1991 a 1778 a.C.).
- La Matemática Helenística: Durante el primer siglo de la Época Helenística hubo tres matemáticos que sobresalen entre todos los de su tiempo, así como entre sus predecesores y sus sucesores. Estos matemáticos fueron Euclides, Arquímedes y Apolonio, y gracias a sus obras esta época se denomina la “Edad de Oro” de la matemática griega.
 - Euclides: en el Libro IV de Euclides de Figuras Semejantes aparecen varios resultados que equivalen geométricamente a la resolución de una ecuación cuadrática con una o las dos raíces positivas.
 - Arquímedes de Siracusa: estudia el cálculo del área de un segmento parabólico.
 - Apolonio de Perga: De sus libros podemos destacar en relación a la ecuación de segundo grado las ecuaciones que describen a las cónicas.
- El Período Grecorromano:
 - Diofanto de Alejandría (siglo III): Conoce la resolvente de la ecuación cuadrática aunque solo considera una sola raíz, la positiva, aun cuando la ecuación tiene dos raíces positivas.
- La Época Medieval:
 - Los Hindúes: La matemática hindú tiene su influencia en los campos de la aritmética, del álgebra y de la trigonometría, destaca Bhaskara (siglo XII) que establece la fórmula general para la resolución de la ecuación de segundo grado.

- Los Árabes: entre ellos destaca Al-khowarizmi, que pretende enseñar un álgebra aplicada a la resolución de problemas de la vida cotidiana del imperio islámico de entonces.
- Siglos XVI y XVII: destacan los matemáticos François Viète, René Descartes, Gauss y Newton. Se establece el método moderno de hallar las raíces racionales de una ecuación polinómica.
 - René Descartes enuncia sin demostración la regla de los signos, conocida como “Regla de Descartes”, además dijo que una ecuación puede tener tantas raíces como número de dimensiones (el grado) de la incógnita, usando la expresión “puede tener” por considerar las raíces negativas como falsas.
 - Newton descubrió la relación entre las raíces y el discriminante de la ecuación. Describió, sin demostración, otro método para determinar el número máximo de raíces positivas y negativas. Este método es más complicado de aplicar pero da mejores resultados que la regla de los signos de Descartes.

3.1.2. Estructura conceptual

Como se puede observar en el mapa conceptual que se presentará más tarde, este trabajo comprende ecuaciones, inecuaciones y su representación gráfica, cuya función principal es la resolución de problemas.

Para desarrollar el tema, lo he dividido en igualdades, desigualdades y representación.

Comienzo hablando de las **igualdades**, dónde se pueden distinguir los siguientes puntos:

- Identities: con esto me refiero a igualdades que se verifican para cualquier valor real, entre las que se pueden englobar las igualdades notables.
- Ecuaciones: donde se puede hacer una distinción atendiendo al número de incógnitas y a la naturaleza de las expresiones de sus miembros. Así se puede diferenciar entre:
 - Ecuaciones de primer grado: en las de una sola incógnita, la dificultad estará en el manejo de la jerarquía de las operaciones (paréntesis, denominadores, etc.). Y en las de dos incógnitas, habrá que tener en cuenta que la solución se dará en forma de recta en el plano.
 - Ecuaciones de segundo grado: en las que se puede diferenciar entre ecuaciones completas e incompletas, teniendo en cuenta que con la fórmula general se pueden resolver los dos tipos a pesar de que las segundas tienen su método propio de resolución. En este tipo, también se tiene que considerar el estudio del número de soluciones a partir del discriminante.
 - Ecuaciones de grado mayor que dos: dentro de esta categoría es especialmente importante la factorización, para la cual se abordará tanto el Algoritmo de Ruffini como el Teorema del Resto. Destacar las ecuaciones bicuadradas, que se resolverán a través de un cambio de variable como las ecuaciones de segundo grado.

- Ecuaciones racionales: para lo cual habrá que tener en cuenta el cálculo del mínimo común múltiplo de los denominadores. Así, la ecuación de partida se reducirá a uno de los tipos anteriores.
- Ecuaciones irracionales: hacer mención a la especial importancia de comprobar las soluciones, debido a que el método utilizado para su resolución implica la posible obtención de soluciones que no correspondan a la ecuación de partida. También en este caso, la ecuación se reduce a una de los tipos anteriores.
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas: se caracterizan porque sus funciones asociadas son inversas una de la otra, por lo que sus propiedades y formas de resolución siguen caminos paralelos. También porque existen diferentes tipos de ecuaciones, por lo que el método a emplear dependerá de éstos. La unicidad de solución está relacionada con la inyectividad de tales funciones.
- Ecuaciones trigonométricas: este tipo de ecuaciones se trataría con más profundidad en el tema de trigonometría pero queremos resaltar algunas de las herramientas que se utilizan para su resolución, como pueden ser: el Teorema Fundamental de la Trigonometría, las fórmulas del ángulo suma, diferencia, doble y mitad y las de transformación de sumas o diferencias en productos o divisiones. También debemos tener en cuenta que este tipo de ecuaciones tienen infinitas soluciones.

Al margen del tipo de ecuación, se trata también la equivalencia de ecuaciones, atendiendo a sus soluciones.

Las soluciones de este tipo de ecuaciones, excepto en el caso de ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya solución es una recta en el plano, son un número finito de puntos.

Con respecto a las **desigualdades**, esto es, inecuaciones, de nuevo se atiende al número de incógnitas para su clasificación. No obstante, para su resolución recurriremos a sus ecuaciones asociadas, por lo que la clasificación es la misma salvo en los tipos de soluciones que se obtienen, que será lo que se trata a continuación. Así, se localizan los siguientes tipos:

- Inecuaciones con una incógnita: me refiero a las de primer, segundo, tercer o mayor grado y a las racionales. En estos casos, el resultado obtenido será un intervalo real que se puede expresar de manera gráfica, en forma de desigualdad o como un conjunto. Resaltar que en el caso de inecuaciones con fracciones algebraicas, el procedimiento no se apoya tanto en la resolución de la ecuación asociada, sino que habrá que realizar la comprobación de signos del numerador y denominador.
- Inecuaciones con dos incógnitas: donde habrá que tener en cuenta que la ecuación asociada define una curva en el plano y el tipo de desigualdad nos determinará la región solución.

En lo referente a la **representación**, quiero resaltar el importante nexo de unión entre las ecuaciones e inecuaciones y las funciones, ya que la representación de las funciones asociadas favorece notablemente la visualización por parte de los alumnos/as de las soluciones. Los métodos para representar dichas funciones serán a través de una tabla de valores o a partir del estudio de sus propiedades algebraicas. Una vez realizada esta representación, habrá que estudiar los puntos de corte con el eje de abscisas para obtener las soluciones exactas. Por otro lado, si se representan las funciones asociadas a

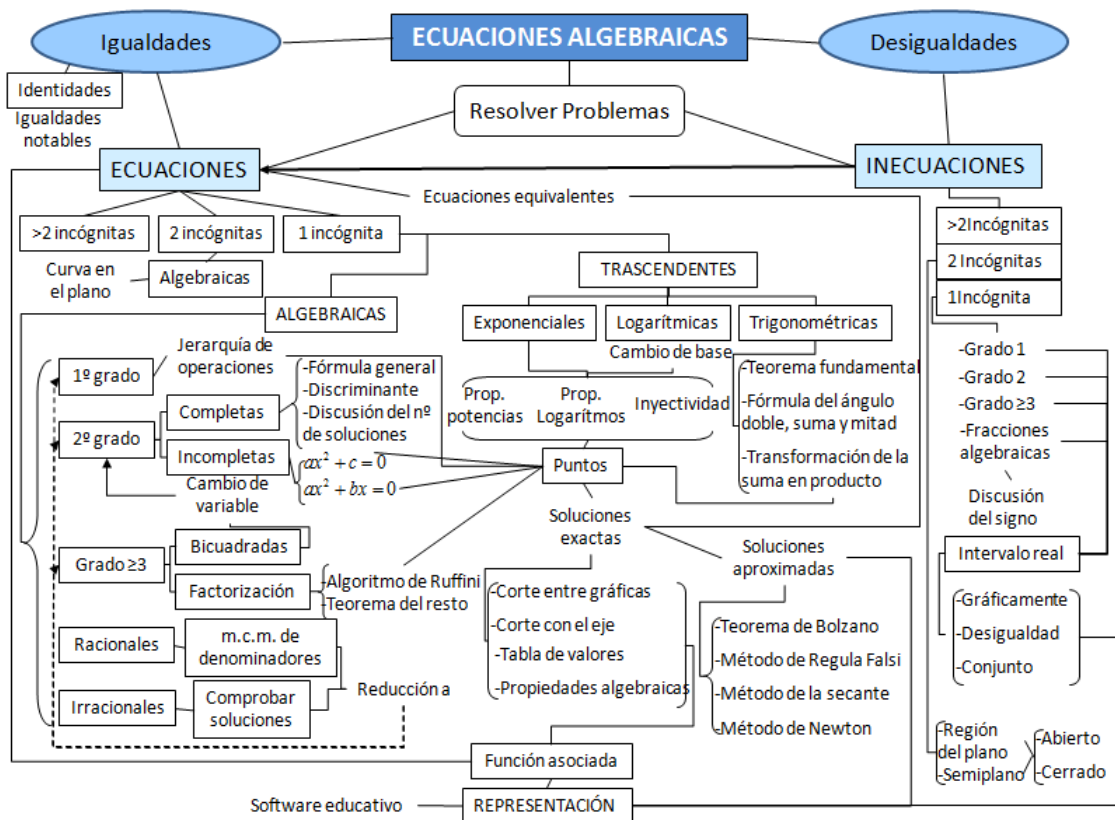
cada miembro de la expresión, las abscisas de los puntos de corte entre gráficas corresponderán a las soluciones de la ecuación de partida.

También se podría abordar un proceso de obtención de soluciones diferente de los anteriores: se trata de la aproximación, que se puede explicar a partir del método de Regula-falsi, método de Newton, de la secante o por el Teorema de Bolzano.

Estos sistemas de representación se pueden observar con más detenimiento en el siguiente apartado.

Cabe destacar que en el estudio de la unidad no se va a hacer referencia a las ecuaciones trigonométricas, el motivo de estos es que ellas solas, debido a su complejidad y extensión, tienen cabida en una unidad didáctica independiente.

A continuación se relaciona la mayor parte de estas nociones en un mapa conceptual:



3.1.3. Sistemas de representación

Las ecuaciones e inecuaciones se pueden representar, según lo que más interese saber se ellas, empleando para ello sus distintos sistemas de representación. Veamos en qué medida se puede hacer:

- Se pueden representar en lenguaje analítico o simbólico, es el sistema de representación más formal y al que más se suele recurrir ya que permite hacer todos los cálculos que se quieran a la ecuación o inecuación concreta. Como ejemplo se pueden tomar las siguientes expresiones de ecuaciones e inecuaciones:

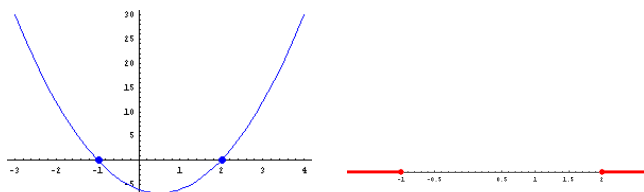
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0$$

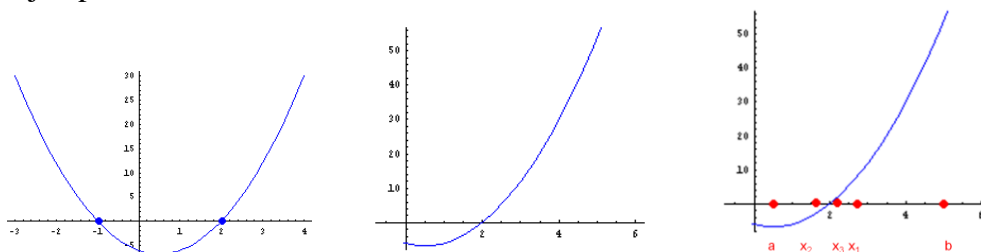
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$3x^2 - 3x - 6 \leq 0$$

- Otra forma de representar tanto a las ecuaciones como a las inecuaciones es gráficamente. Es el método más visual y por tanto el más fácil de entender por los alumnos. Generalmente se utiliza menos que el simbólico ya que se puede decir que es “menos formal”, nada más lejos de la realidad ya que se puede ser tan formales como con el sistema de representación anterior. Si se toman los ejemplos anteriores, se pueden ver sus representaciones gráficas:



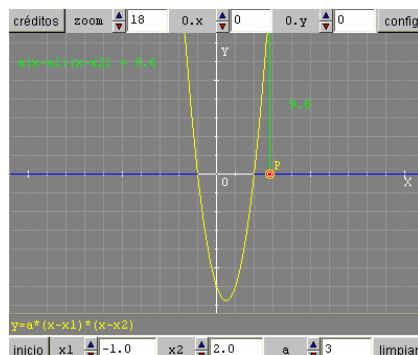
- También se puede utilizar el lenguaje numérico, se van a representar las ecuaciones e inecuaciones mediante tablas de valores y mediante sistemas de aproximación como son Bolzano, Newton, Secante y Regula-falsi. En particular, este va a ser el sistema de representación que menos se va a usar ya que, aunque con una tabla de valores se representan, el tema en el que me centro no me parece del todo representativo y además puede ser más confuso que explicativo. Por otro lado, los sistemas de aproximación enumerados son bastante complejos en su uso (excepto el de Regula-falsi) y puede que sea mejor explicarlos para entender mejor las ecuaciones y que los alumnos den una aproximación al método aunque no lleguen a dominarlo. Esto, se ve ejemplificado a continuación:



x	0.5	5	2.75	1.68	2.19
y	-6.75	54	8.43	-2.95	1.79

- Además se pueden observar las ecuaciones e inecuaciones mediante el sistema de representación verbal, se usa constantemente cuando se enuncia un problema, al leer una expresión simbólica,... Sin embargo esta forma de representarlas no se usa para su resolución. Esto se observa al leer el siguiente enunciado:
Halla el conjunto de números tales que, el triple de su cuadrado menos su triple son menores o iguales a seis.
- Por último, se ve que las ecuaciones e inecuaciones se representan también mediante las herramientas tecnológicas. Es una faceta muy importante de ellas, ya que con los diferentes softwares se puede tanto “escribirlas” como resolverlas. En la mayoría de los casos se resolverán gráficamente que, como ya se ha dicho, es la forma más intuitiva de hacerlo. De entre los programas

que se pueden utilizar, a continuación se observa una captación de uno de ellos:



3.1.4. Fenomenología

En el estudio de los fenómenos que responden al tema a tratar, se distinguen múltiples situaciones que se pueden encuadrar en los diferentes niveles del mapa conceptual. Así, me baso en una doble clasificación, la que atiende a la naturaleza de las expresiones algebraicas que aparecen en las ecuaciones e inecuaciones (algebraicas y trascendentes) y la que toma como referencia la naturaleza de las magnitudes del problema, tanto al referirse a ellas como cantidades fijas o como cantidades variables.

Si se analiza la primera clasificación, la que hace referencia a la naturaleza de las expresiones algebraicas, se pueden encontrar un amplio abanico de situaciones en las que observamos tanto las ecuaciones como las inecuaciones:

- Ecuaciones algebraicas: dichas ecuaciones se localizan en problemas de interpolación polinómica, problemas físicos como son los lanzamientos, los problemas gravitatorios y el movimiento, problemas numéricos como son los de edades, números consecutivos y repartos y problemas de perímetros, áreas y volúmenes.

Esto se puede ver reflejado en el siguiente problema físico:

Una pelota ha sido lanzada al aire a una velocidad de 25 m por segundo. ¿Al cabo de cuántos segundos se encontrará la pelota a 20 m de altura?

Este problema se modela mediante la ecuación: $h = vt - gt^2/2$.

- Ecuaciones trascendentes: dentro de ellas se observan las ecuaciones exponenciales, las logarítmicas y las trigonométricas. Aunque éstas últimas no las voy a tratar en mi unidad, hago mención a las situaciones en las que se pueden encontrar.

- o Ecuaciones exponenciales: se puede hacer una distinción entre problemas de crecimiento ilimitado (entre otros se observan los problemas de crecimiento de poblaciones, los de interés compuesto y los de reproducción de seres vivos) y decrecimiento limitado (entre otros se tienen los problemas de desintegración radiactiva, los de cantidad de carbono-14 y los de depreciación de un automóvil).

Como ejemplo de un problema de crecimiento ilimitado, se tiene:

Una ciudad del sur de Almería tenía en el 2008, 30.000 habitantes, si sabemos que el ritmo de crecimiento es del 2% anual, cuántos años han de pasar para que la ciudad tenga 33.500 habitantes.

Para resolver este problema se utiliza la ecuación: $P_t = P_0(1+r)^t$.

Referente al caso de decrecimiento limitado se puede ver:

Un elemento radioactivo se desintegra en función del tiempo t , medido en segundos, según $N(t)=N_0e^{-\lambda t}$, donde $N(t)$ es el número de átomos radiactivos existentes en el instante t , N_0 el número de átomos radiactivos en el instante inicial y la constante de desintegración λ del bario es igual a 0,0578. Calcula el tiempo que debe transcurrir para que se desintegre el 75% de una cierta cantidad de átomos.

- Ecuaciones logarítmicas: existen distintos problemas que se modelizan con estas ecuaciones, como son los de intensidad de un sismo, los de índice de PH y los que calculan la intensidad de una onda sonora.

Como ejemplo de este tipo de problemas, se tiene el siguiente:

La función que regula la intensidad de un sismo es $M=0.67\text{Log}(0.37*E)+1.46$ donde E es la energía del sismo en kw/h . Si el sismo de Haití se ha medido en la escala Richter con una intensidad de 7.0 grados, ¿cuál será la energía?*

- Ecuaciones trigonométricas: entre otros, los problemas que se estudian con estas ecuaciones son m.a.s de un muelle, funciones sinusoidales y cosinusoidales y los de onda viajera.

- Inecuaciones: éstas las podemos encontrar en problemas de optimización de cantidades, de cálculo de edades, de contraseñas de seguridad, de volúmenes, áreas y perímetros, en problemas económicos y de sueldo variables entre otros.

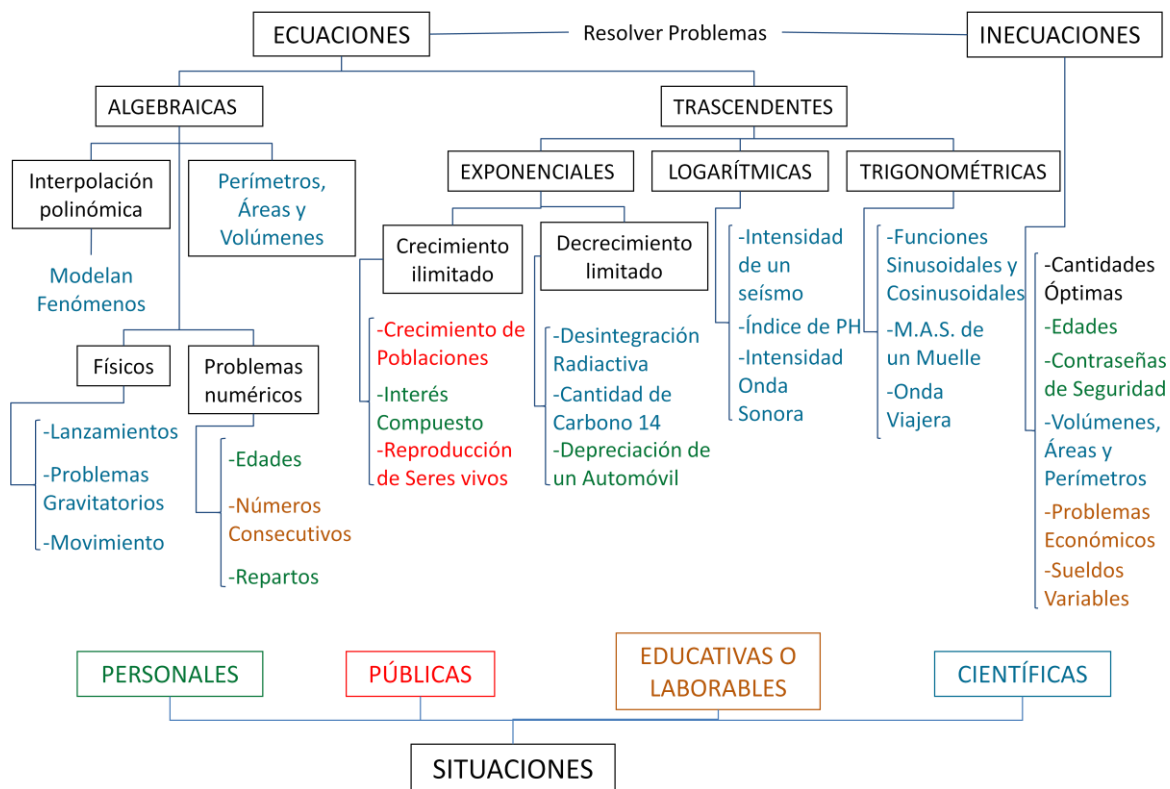
A modo de ejemplo se observan los siguientes problemas:

(Contraseñas de seguridad) *Cuando dos espías amigos contrastan sus respectivas claves numéricas de tres cifras, la suma de ambas ha de ser menor que mil y su diferencia mayor que 500. ¿Es posible que un espía posea la clave 400?*

(Sueldos variables) *Un empresario paga a un vendedor un sueldo fijo de 900 € al mes, más 0,6€ por producto vendido. Otro vendedor no tiene sueldo fijo pero cobra 1,8€ por cada producto que logra vender. ¿A partir de qué número de productos vendidos cobrará más el segundo empleado?*

Además, todo esto se puede clasificar en distintas situaciones (personales, públicas, educativas o laborales y científicas) (OCDE, 2005).

Atendiendo a esta clasificación, se muestra a continuación el siguiente esquema en que queda recogida la mayor parte de estas situaciones:



A continuación se hace el estudio de la segunda clasificación, la que hace referencia a la naturaleza de las magnitudes del problema, con un poco más de detalle:

- En las ecuaciones se observa que la indeterminada x puede ser un número o cantidad fija que se tiene que hallar, las expresiones que se manejan serán de la forma $f(x)=0$ ó $f(x)=g(x)$ donde en ambos casos se trata de encontrar los números exactos que hacen o bien que la cantidad $f(x)$ valga cero o bien que las cantidades $f(x)$ y $g(x)$ valgan lo mismo. Pero no importa la posible variación de las cantidades $f(x)$ o $g(x)$ que ocurre cuando x se mueve en un intervalo, pues aunque se sabe que pueden tomar varios, sólo interesa uno en concreto.

Por ejemplo, cuando se calcula la longitud de un lado de una superficie para que ésta tenga un área fija, no importa como varía el lado, sino que sólo se quiere encontrar la medida exacta para la que nuestra superficie mida una cierta cantidad.

- Por otra parte en las inecuaciones las situaciones que se tienen son de la forma $f(x)\leq 0$ ó $f(x)\leq g(x)$, donde aquí sí interesa como varían las cantidades $f(x)$ o $g(x)$ conforme varía x , ya que aunque x se mueva dentro del propio conjunto de soluciones y se esté cumpliendo la igualdad, se puede obtener una información más precisa del problema según el valor elegido para la variable.

Por ejemplo cuando se tiene un problema en el que se habla de dos métodos de obtener un sueldo y pregunta a partir de cuantas horas merece más la pena un método u otro, en esta situación aunque interesan todos los valores de x para los que un sueldo es mayor que otro en concreto, tienen especial importancia aquellos en los que ambos tipos de sueldo se encuentran igualados porque estarán diciendo hasta que cantidad de horas (x) interesa

una fórmula de calcular el sueldo $f(x)$ y a partir de cual interesa la otra forma $g(x)$. Aunque en este problema también importa que ambas cantidades de sueldo varían y por tanto se podrían hacer preguntas sobre la diferencia del sueldo según varía la x .

3.2. Análisis cognitivo

3.2.1. Expectativas que se esperan desarrollar

Al comenzar al desarrollar una Unidad Didáctica, todos tenemos unas expectativas de aprendizaje que queremos que los alumnos consigan alcanzar al término de ésta.

Dichas expectativas se van a materializar por medio de los objetivos y de las competencias PISA (OCDE, 2005).

Los objetivos que se pretenden alcanzar para el tema ecuaciones e inecuaciones, organizados entorno a tres focos, al finalizar el aprendizaje del tema, son los siguientes:

Identificar y Caracterizar

1. Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.
2. Modelizar procesos de crecimiento ilimitado y decrecimiento limitado.
3. Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.

Resolución y Representación Gráfica

4. Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.
5. Aproximar una función asociada a una ecuación y sus soluciones mediante una tabla de valores y viceversa.
6. Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.
7. Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.
8. Obtener soluciones aproximadas de una ecuación mediante el método de Bolzano.

Resolver Problemas

9. Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.
10. Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.
11. Obtener problemas que modelen una ecuación dada.
12. Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.

Para mí, el objetivo más importante, pero a la vez, el que veo con más dificultades de llegar a comprender por parte del alumnado es:

9. Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.

Unidad Didáctica: Ecuaciones e Inecuaciones

Esto es así porque es muy importante el reconocer las situaciones; además es lo que en un futuro el alumnado puede seguir usando en el estudio de las matemáticas, pero sobre todo en el desarrollo de su vida diaria. Lo veo complicado de conseguir ya que al alumnado le suele costar mucho trabajo abstraerse de la realidad para así poder enunciar un problema desde el punto de vista matemático.

Las competencias expresan un nivel de expectativa de aprendizaje a largo plazo, pero a cuyo desarrollo contribuye el trabajo de los escolares en los diferentes temas de las matemáticas escolares. Por tanto, es importante observar si cada uno de los objetivos mencionados colabora en una u otra medida a conseguirlas.

Existen 8 competencias matemáticas PISA, que son:

- Pensar y Razonar (PR)
- Argumentar y Justificar (AJ)
- Comunicar (C)
- Modelizar (M)
- Plantear y Resolver Problemas (RP)
- Representar (R)
- Utilizar Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico y las Operaciones (LS)
- Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas (HT)

A continuación se muestra una tabla en la que se puede observar en qué medida cada objetivo contribuye a desarrollar una u otra competencia:

	Identificar y Caracterizar	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.		X	X				X	
2	Modelizar procesos de crecimiento ilimitado y decrecimiento limitado.	X			X		X	X	X
3	Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	X	X				X	X	X

	Resolución y Representación Gráfica	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
4	Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	X	X				X	X	X
5	Aproximar una función asociada a una ecuación y sus soluciones mediante una tabla de valores y viceversa.						X	X	X
6	Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	X	X				X	X	
7	Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.	X					X	X	X
8	Obtener soluciones aproximadas de una ecuación mediante el método de Bolzano.		X	X			X		X

Resolver Problemas		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
9	Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.		X	X	X	X			
10	Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	X			X	X		X	
11	Obtener problemas que modelen una ecuación o inecuación dada.	X			X	X		X	
12	Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	X	X	X					

RECuento FINAL	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
	8	7	4	4	3	7	9	6

A continuación se va a analizar con más detalle el objetivo que destaque anteriormente:

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
9	Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones		X	X	X	X			

Con este objetivo lo que se persigue en el alumnado es que aprenda a argumentar y justificar, que sea capaz de comunicarle tanto en forma oral como escrita lo que se pretende hacer con un determinado problema o que interprete bien una solución, que sepa pasar de una situación real a un enunciado matemático (modelizar) y también que sepa resolver problemas. Esto no quiere decir que no se vaya a utilizar el lenguaje simbólico, que no se pueda representar el problema o la solución o que las herramientas tecnológicas las dejemos de lado, nada más lejos de la realidad, lo que ocurre es que no se le va a dar la misma importancia a una cosa que a otra y por tanto, el énfasis que se va a dar va a ser distinto.

Estos objetivos y competencias, las vemos reflejados en actividades como las que siguen:

Actividad 1.- Identifica si las siguientes expresiones son ecuaciones o inecuaciones y di de qué tipo son:

$$\sqrt{(x+3)(x+4)} = x - 1$$

$$5 \log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 x$$

$$\frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} = 1$$

$$4x^4 + 2x^2 + 1 \geq 0$$

$$5^{x^2-x-20} = 1$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{x+1}} = 2$$

$$(x-2)(x+1) \geq 18y$$

$$\frac{3x+1}{x+2} = \frac{13}{5(x-2)}$$

Con esta actividad se muestra que se está desarrollando el objetivo 1 (Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección) y que ayuda a desarrollar las competencias Pensar y Razonar (PR) y Utilizar Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico y las Operaciones (LS).

Actividad 2.- Una ciudad del sur de Almería tenía en el 2008, 30.000 habitantes, si sabemos que el ritmo de crecimiento es del 2% anual, ¿cuántos años han de pasar para que la ciudad tenga 33.500 habitantes?

La fórmula que regula el crecimiento de poblaciones es: $P_t = P_0(1 + r)^t$.

a) Con ayuda del programa “Mathematica” resuélvelo gráficamente y discute el método utilizado con alguno de tus compañeros.

b) Utiliza el método de Bolzano para aproximar la solución con cuatro iteraciones, de forma numérica y gráfica, ayudándote con una hoja de cálculo para alcanzar mayor precisión.

Se observa que con esta actividad ayudamos a alcanzar los objetivos siguientes:

(2) Modelizar procesos de crecimiento ilimitado y decrecimiento limitado.

(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.

(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.

(5) Aproximar una función asociada a una ecuación y sus soluciones mediante una tabla de valores y viceversa.

(8) Obtener soluciones aproximadas de una ecuación mediante el método de Bolzano.

(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.

(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.

(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.

Además, con ella, se quiere colaborar a desarrollar las competencias:

- Argumentar y Justificar (AJ)
- Comunicar (C)
- Plantear y Resolver Problemas (RP)
- Representar (R)
- Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas (HT)

Actividad 3.-Una empresa automovilística fabrica el mismo modelo con dos motorizaciones similares: el TGi con motor de gasolina y el TDi con motor diésel. El coche de gasolina cuesta 26.000€ y el diésel 32.000€. Los gastos de mantenimiento son iguales en ambos modelos.

Suponiendo que el kilómetro del coche de gasolina tiene un precio medio de 10 céntimos y el del coche de gasóleo 5 céntimos, se pide a partir de qué kilómetros es rentable la compra del modelo diésel.

Utiliza la aplicación:

http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones_con_una_incognita/inecuaciones_con_una_incognita.htm

para resolverlo gráficamente y justifica tu respuesta.

Al analizar esta actividad se enfatiza que estamos contribuyendo al desarrollo de los siguientes objetivos:

(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.

(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.

(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.

Además, con ella estamos ayudando a alcanzar las siguientes competencias:

- Argumentar y Justificar (AJ)
- Plantear y Resolver Problemas (RP)
- Representar (R)
- Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas (HT)

3.2.2. Errores y dificultades posibles en el desarrollo de la UD

Una vez que se saben cuáles son las expectativas de aprendizaje que se tienen hacia el alumnado, lo que cabe preguntarse es cuáles son las Limitaciones de Aprendizaje que pueden surgir en su proceso de aprendizaje.

Para hallar dichos errores se utiliza el artículo de la revista SUMA (2004) “Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones” en el que se encuentra en qué consisten algunos de estos errores.

Además, si se observan los objetivos descritos, se puede ver la relación que existe entre éstos y los errores.

Se pueden hacer diferentes clasificaciones de los errores, aquí se va a utilizar la que hace Radatz (1979), desde la revisión de investigaciones, en la que establece cinco categorías según a qué sean debidos los errores:

Dificultades de Lenguaje:

- E1. No distinguir entre los distintos signos de desigualdad (\leq , \geq , $<$, $>$), este error se puede incurrir en los objetivos 3, 7, 10 y 11.
- E2. Dificultad para expresar algebraicamente un enunciado del lenguaje natural, objetivos 2, 9, 10 y 11.
- E3. No entienden ni saben leer el lenguaje matemático que se usa en la expresión conjuntista, objetivos 3, 4 y 7.
- E4. No reconocer ecuaciones ni inecuaciones si la variable no es “x”, objetivos 1, 4, 7 y 11.

Aprendizaje Deficiente de Conceptos y Procedimientos Previos

- E5. No cambiar el símbolo de la desigualdad cuando se multiplica por un número negativo, objetivo 7.
- E6. Se olvidan de comprobar las soluciones en las ecuaciones irracionales, objetivos 3, 4 y 12.
- E7. No entender las soluciones numéricas de las ecuaciones como puntos del plano o de la recta, objetivos 3, 4, 5, 6 y 8.
- E8. No entienden como solución un conjunto, objetivos 3, 6 y 7.
- E9. Tienen problemas al manejar expresiones infinitas (en intervalos y representación gráfica), objetivos 3, 5, 6 y 7.
- E10. No conocen la representación gráfica de las funciones elementales, objetivos 2, 5, 6, 7 y 8.

Asociaciones Incorrectas o Rigidez de Pensamiento

- E11. No distinguir las regiones solución en una inecuación, objetivos 3 y 7.

- E12. No diferenciar el tipo de método de resolución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales, objetivos 1, 4 y 12.
- E13. Resolver inecuaciones polinómicas de grado mayor o igual que dos sin utilizar la ecuación asociada, objetivos 1, 7 y 12.
- E14. Dificultad para expresar un mismo conjunto solución en sus distintas formas, objetivos 3, 5, 6 y 7.

Aplicación de Reglas o Estrategias Irrelevantes

- E15. No tener en cuenta los denominadores en inecuaciones con fracciones algebraicas, objetivos 3, 7 y 12.
- E16. Confusión al interpretar la solución de un problema, objetivos 2, 3, 9, 11 y 12.

Algunos de estos errores se pueden ver reflejados en problemas como los que siguen:

Actividad 1. Un móvil se desplaza de Murcia a Cartagena a una velocidad comprendida entre 80 km/h y 120 km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia a Murcia en cada instante?

Al analizar la actividad se observa que se pueden incurrir en los siguientes errores:

- (E1) No distinguir entre los distintos signos de desigualdad (\leq , \geq , $<$, $>$).
- (E2) Dificultad para expresar algebraicamente un enunciado del lenguaje natural.
- (E8) No entienden como solución un conjunto.

Actividad 2. Para que $\sqrt{1 - x^2}$ tenga sentido, los valores de x deben cumplir una condición. ¿A qué inecuación da lugar dicha condición? Resuélvela.

Si se observa la actividad, se enfatizan como posibles errores los siguientes:

- (E1) No distinguir entre los distintos signos de desigualdad (\leq , \geq , $<$, $>$).
- (E5) No cambiar el símbolo de la desigualdad cuando se multiplica por un número negativo.
- (E8) No entienden como solución un conjunto.
- (E11) No distinguir las regiones solución en una inecuación.
- (E13) Resolver inecuaciones polinómicas de grado mayor o igual que dos sin utilizar la ecuación asociada.

3.3. Análisis de instrucción

3.3.1. Grados de complejidad y funcionalidad de las tareas

En principio, es razonable pensar que la complejidad de las tareas usadas en el aula fuese avanzando a medida que avanzan las sesiones de clase. En este caso no se sigue esta lógica, ya que existen dos focos de aprendizaje (ecuaciones e inecuaciones), y dado que aunque para poder estudiar el segundo hay que dominar el primero, la complejidad de las tareas va a ir aumentando progresivamente desde el comienzo de las sesiones en las que se desarrollan las ecuaciones, pero luego volverá a bajar cuando se comience con las inecuaciones para después, nuevamente, aumentar progresivamente.

Los tres niveles de dificultad que vamos a utilizar para clasificar las tareas son: reproducción, conexión y reflexión (OCDE, 2005). Las tareas de reproducción son

aquellas cuya finalidad es asentar los conocimientos impartidos en clase. Las de conexión son para que los alumnos practiquen con los contenidos en contextos distintos, relacionando diferentes formas de representación o que justifiquen razonamientos con cierto rigor matemático. Por último, en las tareas de reflexión el alumno debe ampliar conocimientos, relacionar diversos procedimientos y estrategias, o dominar el proceso de construcción de modelos.

El análisis de instrucción se termina de concretar con la funcionalidad de las tareas elegidas en la secuenciación. Con esto se quiere decir la función que cada tarea desempeña dentro de la secuenciación.

Dichas funcionalidades se pueden clasificar de la siguiente forma:

- Diagnóstico de aprendizajes previos realizados por el alumno.
- Motivación y de relación con la realidad.
- Exploración para fomentar la interrogación y el cuestionamiento.
- Elaboración y construcción de significados.
- Descontextualización y de aplicación.
- Ejercitación.
- Síntesis.

A continuación se observan tres tareas como ejemplificación de ambas clasificaciones:

Actividad 1.- Identifica si las siguientes expresiones son ecuaciones o inecuaciones y di de qué tipo son:

$$\sqrt{(x+3)(x+4)} = x - 1$$

$$5^{x^2-x-20} = 1$$

$$5 \log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 x$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{x+1}} = 2$$

$$\frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} = 1$$

$$(x-2)(x+1) \geq 18y$$

$$4x^4 + 2x^2 + 1 \geq 0$$

$$\frac{3x+1}{x+2} = \frac{13}{5(x-2)}$$

El grado de complejidad de esta tarea es la reproducción, es una tarea que pone en juego pocos conocimientos nuevos, y los que emplea son muy sencillos, además apenas involucra procedimientos. Su finalidad es que los alumnos asienten los conocimientos previos y los nuevos. La funcionalidad a la que atiende la tarea es ejercitar y practicar.

Actividad 2.- Una ciudad del sur de Almería tenía en el 2008, 30.000 habitantes, si sabemos que el ritmo de crecimiento es del 2% anual, ¿cuántos años han de pasar para que la ciudad tenga 33.500 habitantes?

La fórmula que regula el crecimiento de poblaciones es: $P_t = P_0(1+r)^t$.

a) Con ayuda del programa “Mathematica” resuélvelo gráficamente y discute el método utilizado con alguno de tus compañeros.

b) Utiliza el método de Bolzano para aproximar la solución con cuatro iteraciones, de forma numérica y gráfica, ayudándote con una hoja de cálculo para alcanzar mayor precisión.

La complejidad de esta tarea es de conexión, en el primer apartado, y de reproducción en el segundo. Esta actividad responde a objetivos más complejos que la primera actividad, involucra el dominio de los diferentes sistemas de representación

(simbólico, gráfico, numérico), pretende que las competencias del alumno se pongan en juego a un mayor nivel. La funcionalidad es: sintetizar en el apartado a) y elaborar y construir significados en el apartado b).

Actividad 3.-Una empresa automovilística fabrica el mismo modelo con dos motorizaciones similares: el TGi con motor de gasolina y el TDi con motor diésel. El coche de gasolina cuesta 26.000€ y el diésel 32.000€. Los gastos de mantenimiento son iguales en ambos modelos.

Suponiendo que el kilómetro del coche de gasolina tiene un precio medio de 10 céntimos y el del coche de gasóleo 5 céntimos, se pide a partir de qué kilómetros es rentable la compra del modelo diésel.

Utiliza esta aplicación para resolverlo gráficamente. Justifica tu respuesta.

[http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones con una incognita/inecuaciones con una incognita.htm](http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones%20con%20una%20incognita/inecuaciones%20con%20una%20incognita.htm).

El grado de complejidad de esta tarea es de conexión. Con ella se persigue la concatenación de objetivos específicos y su funcionalidad es ejercitar y practicar.

3.3.2. Secuenciación y organización de las tareas de la UD. Gestión del aula

De forma general, cada sesión se organizará con el siguiente esquema metodológico:

- Corrección de uno de los ejercicios propuestos en la sesión anterior por parte de alguno de los alumnos. Este ejercicio, además de refuerzo para los demás alumnos, nos sirve para recapitular lo visto en la sesión anterior.
- Presentación de un ejemplo por parte del profesor a modo introductorio de los contenidos programados para esa sesión. Este ejercicio nos sirve de motivación para la asimilación de las explicaciones posteriores.
- Explicación de la materia.
- Resolución de algún ejemplo para consolidar los nuevos conocimientos. El primer ejemplo será resuelto por el profesor y los restantes se les pedirá ayuda a los alumnos.
- Por último, se les recomendará un conjunto de tareas a los alumnos, algunas serán obligatorias y otras serán voluntarias. Las tareas obligatorias las tendrán que entregar a modo de evaluación y las voluntarias pueden ser entregadas por el alumnado como refuerzo de la nota.

A continuación se expone, el contenido principal en el que se centra el desarrollo de cada una de las sesiones:

Sesión 1:

- Motivación de la unidad
- Repaso de los sistemas de representación

Sesión 2:

- Repaso de las ecuaciones polinómicas
- Ecuaciones racionales

Sesión 3:

- Ecuaciones irracionales

Unidad Didáctica: Ecuaciones e Inecuaciones

Sesión 4:

- Ecuaciones exponenciales

Sesión 5:

- Ecuaciones logarítmicas

Sesión 6:

- Introducción a las inecuaciones con actividades de motivación
- Inecuaciones con 1 incógnita de distintos grados

Sesión 7:

- Inecuaciones de 2 o más incógnitas

Sesión 8:

- Repaso de todos los contenidos vistos en la unidad

Sesión 9:

- Prueba escrita

Sesión 10:

- Exposición del trabajo

4. Criterios e Instrumentos de Evaluación

Unidad Didáctica: Ecuaciones e Inecuaciones

Para la evaluación del alumnado se va a considerar tanto el trabajo diario voluntario y obligatorio como la prueba escrita que se realiza al final de la unidad y un trabajo que deberán desarrollar en grupo para su posterior exposición, el desglose de la nota de cada apartado es el siguiente:

- Trabajo diario: 25% de la nota.
- Exposición del trabajo: 25% de la nota.
- Prueba escrito: 50% de la nota.

Además, a la nota obtenida se le suma 0,1 por cada ejercicio voluntario entregado, con un máximo de 1 punto por unidad.

Para poder aprobar la unidad, el alumnado deberá de superar la mitad de la nota de cada uno de los apartados anteriores.

A continuación se detalla cada una de estas partes:

- Trabajo voluntario: en algunas sesiones se recomendará algún ejercicio con carácter opcional, sirve para incentivar al alumnado; en la sesión siguiente se entregarán al profesor y éste, entre los que lo hayan realizado, designará a alguno para corregirlo en la pizarra y explicarlo al resto de los compañeros. Además, este ejercicio nos sirve para enlazar esta sesión con los contenidos vistos en la sesión anterior.

De esta forma, el resto del alumnado aprenderá tanto de las respuestas correctas como de los errores y dificultades que puedan surgir.

En caso de que nadie entregue estos ejercicios se elegirá a algún alumno para que lo realice en pizarra con ayuda del profesor.

El ejercicio se devolverá corregido en la sesión siguiente a cada persona.

Además se podrán entregar como ejercicios voluntarios cualquiera de la relación que se les da a los alumnos en la primera sesión y que se corregirán en la sesión previa a la prueba.

- Trabajo diario: dentro de este apartado vamos a diferenciar dos tipos de trabajos.
 - o El primero tiene las mismas características que los trabajos voluntarios, con la salvedad de su carácter obligatorio.
 - o El segundo es la corrección de la libreta del alumnado. Se pedirá el mismo día del examen, antes no para que puedan ir trabajando de forma diaria. Con esta corrección se valorará la cantidad de ejercicios, su corrección y la forma de resolverlos, además de la limpieza y el orden del cuaderno.
Con esto se contribuye a la nota final en un 40%, los ejercicios con carácter obligatorio contarán hasta un 60% y el 40% restante se completa con la corrección del cuaderno del alumno.

Con el trabajo diario lo que se pretende es hacer una evaluación continua, obligando así a que el alumnado repase todos los días la materia impartida, de forma que no lo dejen para el día anterior a la prueba final.

Además, ellos pueden autoevaluarse viendo donde presentan más carencias ya que al devolverles las tareas corregidas pueden observar sus errores.

Por otra parte, al ir viendo, sesión a sesión, los progresos de los alumnos y alumnas se pueden observar las dificultades que éstos presentan y así ir

modificando la manera de explicarles los contenidos, ponerles ejemplos más adaptados,...

Este tipo de evaluación es más justa, ya que una parte del alumnado aunque tiene un nivel adecuado para aprobar, no lo consigue a causa de los nervios durante el examen.

El problema que se presenta con este tipo de actividades es que no se tiene la certeza absoluta de que las realice el propio alumno (ya que se realizan en casa), por este motivo es necesaria la prueba escrita.

- Exposición del trabajo: al principio de la unidad se le explicará el alumnado en qué consiste esta tarea: deberán de elaborar en grupos de 4 o 5 personas un trabajo en el que aparezcan algunos de los contenidos del tema. Dicho trabajo podrá ir encaminado a ampliar alguna parte de la unidad, a estudiar sus aplicaciones o a introducir su carácter histórico (cuando se empezó a estudiar dicho tema, quién lo hizo,...). La exposición se llevará a cabo la sesión posterior al examen, cada grupo cuenta con 5 minutos.
- Prueba escrita: no veo conveniente suprimir este tipo de evaluación ya que una prueba final no solo evalúa los conocimientos de una unidad (o materia) sino que también contribuye a desarrollar valores en el alumnado, como enfrentarse a situaciones y dificultades que se le pueden presentar en distintos ámbitos.

Una de las mayores ventajas que presentan este tipo de pruebas es que el profesor puede asegurarse de si el alumnado ha asimilado el conjunto de los contenidos del tema y si han subsanado los errores en los que incurrieron en las sesiones de clase.

5. Desarrollo de la secuencia de tareas de la Unidad Didáctica

Sesión 1: Motivación de la unidad. Repaso de los sistemas de representación

1. Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:

En esta sesión lo que se pretende es introducir al alumnado en la unidad, para ello se utilizan actividades motivadoras. Además no se van a emplear conceptos nuevos, sino que ya los conocen de años anteriores.

De este modo los contenidos que se van a tratar son los más básicos:

- Relacionar las distintas situaciones cotidianas con las ecuaciones e inecuaciones.
- Distinguir entre ecuación e inecuación.
- Relacionar los distintos sistemas de representación.
- Corte con el eje de abscisas.
- Función asociada a una ecuación.
- Software educativo.

Estos contenidos hacen referencia a los objetivos que encontramos en los tres focos que se han marcado, que implican las competencias indicadas en la siguiente tabla:

Identificar y Caracterizar		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección		X	X				X	
3	Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión	X	X				X	X	X

Resolución y Representación Gráfica		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
6	Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	X	X				X	X	

Resolver Problemas		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
9	Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.		X	X	X				
11	Obtener problemas que modelen una ecuación o inecuación dada.	X			X			X	
12	Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	X	X	X					

Se irán introduciendo ejemplos, con la expectativa de que el alumnado vaya acercándose intuitivamente a los conceptos que se quieren alcanzar al finalizar la sesión.

Al término de la sesión se recomendarán unas actividades para casa que en la siguiente sesión se utilizaran como recordatorio de esta sesión.

2. Secuencia de tareas:

TAREA 1.- ¿Para qué sirven las ecuaciones y las inecuaciones? (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se le preguntará al alumnado qué situaciones reales creen ellos que se pueden resolver mediante ecuaciones e inecuaciones. Se comentarían dichas situaciones demostrándoles cuáles de las que se han dicho se pueden resolver de este modo y cuáles no.
Si los alumnos no proporcionan ningún ejemplo, se tendrá preparada una serie de situaciones como el lanzamiento de un balón de fútbol, la caída de alguien que se tira haciendo puenting, el conocimiento de la presión atmosférica (que permite saber la altura a la que se encuentra un avión un globo o un excursionista que escala una montaña), la comparación del gasto total invertido en un vehículo diesel y uno de gasolina, la intensidad de un sismo...
De esta manera se pretende provocar los comentarios.
- Material o recurso necesario:
Ninguno específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Tratar de motivar al alumnado y, además, se pueden observar sus conocimientos previos.

TAREA 2.- Bote de un balón (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se hacen grupos de tres personas y haciendo uso de la calculadora gráfica, con el sensor de movimiento incorporado se puede representar gráficamente la función asociada al bote de un balón. De esta manera se les hará preguntas tales como: si reconocen la ecuación asociada a esa gráfica (de forma genérica), si saben mostrar en la gráfica cuáles son las soluciones de dicha ecuación,...
- Material o recurso necesario:
Calculadora gráfica con el sensor de movimiento.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
Trabajo por tríos, un representante de cada grupo expone sus conclusiones.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado comprenda intuitivamente lo que es una ecuación y cuáles son sus soluciones.

TAREA 3.- ¿Ecuación o inecuación? (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se le propondrá al alumnado una serie de problemas en los que el enunciado sea prácticamente el mismo, pero al variar la cuestión cambia la forma de resolverlo de una ecuación a una inecuación.
Algunos ejemplos se muestran a continuación:
Las edades de un padre y su hijo difieren 27 años, ¿a qué edad tendrá el padre más del doble de la edad del hijo?
Las edades de un padre y su hijo difieren 27 años, ¿entre qué edades tendrá el padre más del doble de la edad del hijo?

¿Cuántos metros de tela metálica se necesitan para vallar una parcela cuadrada cuya área sea de 36 m^2 ?

¿Cuántos metros de tela metálica se necesitan para vallar una parcela cuadrada cuya área sea, **al menos**, de 36 m^2 ?

- Material o recurso necesario:
Ninguno específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Tratar de motivar al alumnado.

TAREA 4.- ¿Ecuación o inecuación? (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se le pide al alumnado que identifique en un conjunto de expresiones algebraicas, cuáles son ecuaciones y cuáles inecuaciones. Además, se les pide que digan de qué tipo son.
El listado de expresiones que se les podría sería como el siguiente:

$$\sqrt{(x+3)(x+4)} = x - 1$$

$$5^{x^2-x-20} = 1$$

$$5 \log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 x$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{x+1}} = 2$$

$$\frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} = 1$$

$$(x-2)(x+1) \geq 18y$$

$$4x^4 + 2x^2 + 1 \geq 0$$

$$\frac{3x+1}{x+2} = \frac{13}{5(x-2)}$$

- Material o recurso necesario:
Ninguno específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El fin de esta actividad es que el alumnado distinga con facilidad un tipo de expresiones del otro.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
El profesor explica las diferencias e interactúa con el grupo para saber si lo han comprendido.

TAREA 5.- ¿Cómo se pueden representar las ecuaciones y las inecuaciones? (Duración aproximada: 10 minutos).

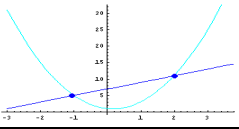
- Descripción de la actividad:
Se hacen grupos de 3 personas y se les muestra la gráfica asociada a una ecuación, posteriormente se les pide que digan dónde están sus soluciones.
A partir de ahí han de pensar el enunciado de un problema que se resuelva con esta ecuación.
Del mismo modo se hace con un ejemplo de una inecuación.
- Material o recurso necesario:
Ninguno específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
Trabajo por tríos, un representante de cada grupo expone sus conclusiones.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
El cometido de esta actividad es que el alumnado diferencie bien un sistema de representación de otro y que comprenda que todos son válidos.

Los últimos 10 minutos de la sesión se dedican a explicar el trabajo que se debe exponer la sesión siguiente a la prueba escrita, a comentar el ejercicio obligatorio que el grupo ha de entregar en la segunda sesión y a entregarles una relación de ejercicios que

se han de ir resolviendo poco a poco por los alumnos y se corregirán en la sesión previa al examen.

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Tabla incompleta.

Completa la siguiente tabla transformando cada expresión con los distintos sistemas de representación:

Representación Simbólica	Representación Gráfica	Representación verbal
$2x^3 - 5x + 3 = 0$		
		
		El triple de un número al cuadrado menos su quinta parte es 6

Sesión 2: Ecuaciones polinómicas. Ecuaciones racionales.

1. Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:

En esta sesión lo que se pretende es recordarle al alumnado como se resuelven las ecuaciones polinómicas de distintos grados e introducirles las ecuaciones racionales.

De este modo los contenidos que se van a tratar, aunque en un principio son conocidos para ellos ya que se repasa las ecuaciones polinómicas, a medida que transcurre la sesión se van complicando y son los siguientes:

- Concepto de ecuación polinómica.
- Resolución de las ecuaciones polinómicas de grado 1, 2 y superior a 2.
- Fórmula para la resolución de las ecuaciones de segundo grado.
- Regla de Ruffini.
- Concepto de ecuación racional.
- Mínimo común múltiplo.
- Resolución de ecuaciones racional.
- Interpretación gráfica de las ecuaciones racionales.
- Software educativo.
- Función asociada a una ecuación.

Estos contenidos hacen referencia a los objetivos que encontramos en los tres focos que se han marcado, implican las competencias indicadas en la siguiente tabla:

	Identificar y Caracterizar	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.		X	X				X	
3	Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	X	X				X	X	X

	Resolución y Representación Gráfica	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
4	Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	X	X				X	X	X
6	Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	X	X				X	X	

	Resolver Problemas	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
9	Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.		X	X	X	X			
10	Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	X			X	X		X	
11	Obtener problemas que modelen una ecuación o inecuación dada.	X			X	X		X	
12	Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	X	X	X					

Se irán introduciendo ejemplos, con la expectativa de que el alumnado vaya acercándose intuitivamente a los conceptos que se quieren alcanzar al finalizar la sesión.

Al término de la sesión se recomendarán unas actividades para casa que en la siguiente sesión se utilizaran como recordatorio de esta sesión.

2. Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores:

La primera parte de esta sesión sigue siendo un repaso de cursos anteriores, mientras que en la segunda parte se pasa a desarrollar las ecuaciones racionales, concepto nuevo para los alumnos. Por estos motivos, la presente sesión se sitúa en esta posición y no en otra.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1.- Corrección del ejercicio obligatorio de la sesión 1. (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se elige a un alumno o alumna para que exponga en la pizarra sus resultados en la tarea. A continuación se le preguntará al resto de los compañeros si están de acuerdo con dicha resolución y, en caso de que existan errores se llegará a una conclusión entre todos.
- Material o recurso necesario:
Ninguno específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se intenta motivar a los alumnos para que sean ellos mismos quienes se den cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todo el grupo un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

TAREA 2.- Problemas con ecuaciones polinómicas: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
A modo de recordatorio de las ecuaciones polinómicas se tratarán una serie de problemas que se modelicen con ecuaciones de primer y segundo grado. Se les mostrará distintos enunciados de problemas referidos perímetros, áreas y volúmenes, de interpolación polinómica, físicos (como son el lanzamiento de un balón, problemas gravitatorios y de movimiento) y problemas numéricos (como son los de edades, de números consecutivos y de repartos); todos estos tipos de problemas quedan referidos en el apartado de fenomenología.
Un ejemplo de este tipo de enunciados es el que se muestra a continuación:
Una pelota ha sido lanzada al aire a una velocidad de 25 m por segundo. ¿Al cabo de cuántos segundos se encontrará la pelota a 20 m de altura?
Dicho enunciado se modeliza con la ecuación: $h = vt - gt^2/2$.
- Material o recurso necesario:
Ninguno específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
Se interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado comprenda intuitivamente lo que es una ecuación polinómica y situaciones reales en las que éstas están implícitas.

TAREA 3.- Ecuaciones racionales (Duración aproximada: 20 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se explicará qué forma tienen las ecuaciones racionales y su forma de resolución, para ello hay que recordar cómo se calcula el mínimo común múltiplo de una expresión algebraica.
Para ello se harán diferentes ejemplos con distinta dificultad cada uno, un ejemplo de esto se muestra a continuación:

$$\frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} = 1$$
$$\frac{2x-3}{x^2-4} + \frac{3x+1}{x+2} = \frac{13}{5(x-2)}$$

- Material o recurso necesario:
Ninguno específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado aprenda a resolver ecuaciones racionales.

TAREA 4.- Representación y solución de una ecuación racional (Duración aproximada: 15 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se van a utilizar los ordenadores con el programa “Mathematica”, se pretende que en grupos de tres personas se dibujen distintas ecuaciones. Para ello se les entregará un guión con las órdenes necesarias para el correcto funcionamiento del programa.
Se les pedirá que dibujen la ecuación correspondiente y que mirando el dibujo nos digan las soluciones de la ecuación.

Unidad Didáctica: Ecuaciones e Inecuaciones

- Material o recurso necesario:
Ordenadores.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
Trabajo por tríos. Un representante de cada grupo expone sus conclusiones.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
- Se trata de que el alumnado comprenda intuitivamente lo que es una ecuación racional, su gráfica asociada y las soluciones de la misma.

Los últimos 5 minutos de la sesión se dedican a comentar el ejercicio obligatorio y el voluntario que el grupo ha de entregar en la tercera sesión.

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Resuelve las siguientes ecuaciones racionales y esboza su gráfica:

$$\frac{x-2}{5} + \frac{x}{x+2} = 3$$

$$\frac{x-3}{7x-3} - \frac{x}{x+3} = 3x$$

$$\frac{x-1}{x-1} + 2 = \frac{x}{x-2}$$

Da un posible enunciado cuya resolución se modelice con la ecuación: $2(3x-2)x = 2$.

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Problema geométrico.

Dos de los lados de un rectángulo son el triple que los otros dos. Si la superficie del rectángulo es de 75 m^2 . ¿Cuáles son sus dimensiones?

Sesión 3: Ecuaciones irracionales.

1. Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:

En esta sesión lo que se pretende es introducir al alumnado las ecuaciones irracionales, tanto su resolución como su gráfica asociada.

De este modo los contenidos que se van a tratar son nuevos para el alumnado y se detallan a continuación:

- Concepto de ecuación irracional.
- Resolución de ecuaciones irracionales.
- Interpretación gráfica de las ecuaciones irracionales.
- Software educativo.
- Función asociada a una ecuación.

Estos contenidos hacen referencia a los objetivos que encontramos en los tres focos que se han marcado, implican las competencias indicadas en la siguiente tabla:

	Identificar y Caracterizar	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.		X	X				X	
3	Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	X	X				X	X	X

	Resolución y Representación Gráfica	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
4	Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	X	X				X	X	X
6	Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	X	X				X	X	

	Resolver Problemas	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
12	Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	X	X	X					

Se irán introduciendo ejemplos, con la expectativa de que el alumnado vaya acercándose intuitivamente a los conceptos que se quieren alcanzar al finalizar la sesión.

Al término de la sesión se recomendarán unas actividades para casa que en la siguiente sesión se utilizaran como recordatorio de esta sesión.

2. Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores:

Esta es la primera sesión en la que no hay un repaso de cursos anteriores, todo lo que se estudia en ella es nuevo para el alumnado. Se sitúa en esta posición en el orden de secuenciación porque este tipo de ecuaciones es algebraica, pero de entre las algebraicas son las irracionales las más complicadas.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1.- Corrección de los ejercicios obligatorio y voluntario de la sesión 2. (Duración aproximada: 15 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se elige a un alumno o alumna para que exponga en la pizarra sus resultados en la tarea. A continuación se le preguntará al resto de los compañeros si están de acuerdo con dicha resolución y, en caso de que existan errores se llegará a una conclusión entre todos.
- Material o recurso necesario:
Ninguno específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se intenta motivar a los alumnos para que sean ellos mismos quienes se den cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todo el grupo un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

TAREA 2.- Ecuaciones irracionales (Duración aproximada: 25 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se explicará qué forma tienen las ecuaciones irracionales y su forma de resolución.
Además, hay que decirle al alumnado que al elevar al cuadrado pueden introducirse soluciones que no pertenezcan a la ecuación. Por eso es necesario comprobar las soluciones obtenidas.

Para ello se harán diferentes ejemplos con distinta dificultad cada uno, un ejemplo de esto se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+3)(x+4)} &= x-1 \\ x+3\sqrt{x+1} &= 17\end{aligned}$$

- Material o recurso necesario:
Ninguno específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado aprenda a resolver ecuaciones racionales.

TAREA 3.- Representación y solución de una ecuación racional (Duración aproximada: 15 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se van a utilizar los ordenadores con el programa “Mathematica”, se pretende que en grupos de tres personas se dibujen distintas ecuaciones. Para ello se les entregará un guión con las órdenes necesarias para el correcto funcionamiento del programa.
Se les pedirá que dibujen la ecuación correspondiente y que mirando el dibujo nos digan las soluciones de la ecuación.
- Material o recurso necesario:
Ordenadores.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
Trabajo por tríos. Un representante de cada grupo expone sus conclusiones.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado comprenda intuitivamente lo que es una ecuación racional, su gráfica asociada y las soluciones de la misma.

Los últimos 5 minutos de la sesión se dedican a comentar el ejercicio obligatorio y el voluntario que el grupo ha de entregar en la cuarta sesión.

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales y esboza su gráfica:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{x+1}} &= 2 \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{2x-1} &= 6 \\ \sqrt{x} + \sqrt{x+12} &= \sqrt{8x+4}\end{aligned}$$

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Resuelve analíticamente las siguientes ecuaciones irracionales y con el programa “Mathematica” realiza su representación gráfica y compara las soluciones obtenidas mediante los dos métodos.

$$\begin{aligned}2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{4x-3} + 5 &= 0 \\ \sqrt{x+2} - \sqrt{x-6} - 2 &= 0 \\ \frac{\sqrt{2x-2}}{x-5} &= 1\end{aligned}$$

Sesión 4: Ecuaciones exponenciales.

1. Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:

En esta sesión lo que se pretende es introducir al alumnado las ecuaciones exponenciales, tanto su resolución como su gráfica asociada y los problemas que se modelizan con estas ecuaciones.

De este modo los contenidos que se van a tratar son nuevos para el alumnado y se detallan a continuación:

- Concepto de ecuación exponencial.
- Resolución de ecuaciones exponenciales.
- Interpretación gráfica de las ecuaciones exponenciales.
- Resolución de problemas que se modelizan con las ecuaciones exponenciales.
- Aproximación a la solución por el método de Bolzano.
- Función asociada a una ecuación.
- Tabla de valores.
- Soluciones aproximadas.
- Software educativo.

Estos contenidos hacen referencia a los objetivos que encontramos en los tres focos que se han marcado, que implican las competencias indicadas en la siguiente tabla:

	Identificar y Caracterizar	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.		X	X				X	
2	Modelizar procesos de crecimiento ilimitado y decrecimiento limitado.	X			X		X	X	X
3	Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	X	X				X	X	X

	Resolución y Representación Gráfica	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
4	Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	X	X				X	X	X
5	Aproximar una función asociada a una ecuación y sus soluciones mediante una tabla de valores y viceversa.						X	X	X
6	Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	X	X				X	X	
8	Obtener soluciones aproximadas de una ecuación mediante el método de Bolzano.		X	X			X		X

	Resolver Problemas	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
9	Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.		X	X	X	X			
10	Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	X			X	X		X	
12	Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	X	X	X					

Se irán introduciendo ejemplos, con la expectativa de que el alumnado vaya acercándose intuitivamente a los conceptos que se quieren alcanzar al finalizar la sesión.

Al término de la sesión se recomendarán unas actividades para casa que en la siguiente sesión se utilizaran como recordatorio de esta sesión.

2. Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores:

En esta sesión se comienza con las ecuaciones trascendentes: exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, aunque éstas últimas se ven en una unidad independiente. Es la primera vez que el alumnado se enfrenta a este tipo de ecuaciones, por tanto, todo lo que se estudia en ella es nuevo para el alumnado. Por este motivo situamos las ecuaciones trascendentes después de haber estudiado las algebraicas.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1.- Corrección de los ejercicios obligatorio y voluntario de la sesión 3. (Duración aproximada: 15 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se elige a un alumno o alumna para que exponga en la pizarra y mediante el ordenador, sus resultados en las tareas. A continuación se le preguntará al resto de los compañeros si están de acuerdo con dicha resolución y, en caso de que existan errores se llegará a una conclusión entre todos.
- Material o recurso necesario:
Ordenadores.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se intenta motivar a los alumnos para que sean ellos mismos quienes se den cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todo el grupo un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

TAREA 2.- Ecuaciones exponenciales (Duración aproximada: 20 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se explicará qué forma tienen las ecuaciones exponenciales y su forma de resolución. Además se resolverán distintos problemas de la vida cotidiana que se modelizan con este tipo de ecuaciones.
Hay que distinguir los dos tipos de ecuaciones exponenciales que existen: las de crecimiento ilimitado y las de decrecimiento limitado.

Para ello se harán diferentes ejemplos con distinta dificultad cada uno, un ejemplo de esto se muestra a continuación:

$$2^{3x-5} = 1024$$

$$5^{x^2-x-20} = 1$$

$$6^{-x} + 6^{1-x} + 6^{2-x} + 6^{3-x} = 259$$

- Material o recurso necesario:
Nada específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado aprenda a resolver ecuaciones exponenciales.

TAREA 3.- Ecuaciones exponenciales (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales representándolas gráficamente con el programa “Mathematica” y resuélvelas analíticamente para comparar ambas soluciones:

$$9 \cdot 3^{x-1} = 243$$

$$125 \cdot 5^{3x} = 1$$

$$4^x + 4^{x-1} - 4^{x+1} + 44 = 0$$

- Material o recurso necesario:
Ordenadores.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado aprenda a resolver ecuaciones exponenciales tanto analítica como gráficamente.

TAREA 4.- Resolución de problemas con ecuaciones exponenciales (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad: Problemas de crecimiento ilimitado y de decrecimiento limitado como el que se expone a continuación:
Un elemento radioactivo se desintegra en función del tiempo t , medido en segundos, según $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, donde $N(t)$ es el número de átomos radiactivos existentes en el instante t , N_0 el número de átomos radiactivos en el instante inicial y la constante de desintegración λ del bario es igual a 0,0578. Calcula el tiempo que debe transcurrir para que se desintegre el 75% de una cierta cantidad de átomos de bario. Utiliza el método de Bolzano para aproximar la solución con cuatro iteraciones, de forma numérica y gráfica, ayudándote con una hoja de cálculo para alcanzar mayor precisión.
Para resolverlo los alumnos formarán grupos de 3 personas.
- Material o recurso necesario:
Ordenadores.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
Trabajo por tríos. Un representante de cada grupo expone sus conclusiones.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado comprenda intuitivamente lo que es una ecuación exponencial, su gráfica asociada, la solución exacta y aproximada y algunos problemas que se modelizan con esta ecuación.

Los últimos 5 minutos de la sesión se dedican a comentar el ejercicio obligatorio y el voluntario que el grupo ha de entregar en la quinta sesión.

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Problema de crecimiento ilimitado. Una ciudad del sur de Almería tenía en el 2008, 30.000 habitantes, si sabemos que el ritmo de crecimiento es del 2% anual, ¿cuántos años han de pasar para que la ciudad tenga 33.500 habitantes?

La fórmula que regula el crecimiento de poblaciones es: $P_t = P_0(1 + r)^t$.

a) Con ayuda del programa “Mathematica” resuélvelo gráficamente y discute el método utilizado con alguno de tus compañeros.

b) Utiliza el método de Bolzano para aproximar la solución con cuatro iteraciones, de forma numérica y gráfica, ayudándote con una hoja de cálculo para alcanzar mayor precisión.

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el método más conveniente:

$$3^{2x} + 81 = 2 \cdot 3^{x+2}$$

$$2^{x^2-9} = \frac{1}{32}$$

$$3^{x-2} = 27$$

Sesión 5: Ecuaciones logarítmicas.

1. Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:

En esta sesión lo que se pretende es introducir al alumnado las ecuaciones logarítmicas, tanto su resolución como su gráfica asociada.

De este modo los contenidos que se van a tratar son nuevos para el alumnado y se detallan a continuación:

- Concepto de ecuación logarítmica.
- Resolución de ecuaciones logarítmicas.
- Interpretación gráfica de las ecuaciones logarítmicas.
- Resolución de problemas empleando ecuaciones logarítmicas.
- Función asociada a una ecuación.
- Software educativo.

Estos contenidos hacen referencia a los objetivos que encontramos en los tres focos que se han marcado, que implican las competencias indicadas en la siguiente tabla:

	Identificar y Caracterizar	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.		X	X				X	
3	Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	X	X				X	X	X

	Resolución y Representación Gráfica	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
4	Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	X	X				X	X	X
6	Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	X	X				X	X	

	Resolver Problemas	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
9	Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.		X	X	X	X			
10	Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	X			X	X		X	
12	Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	X	X	X					

Se irán introduciendo ejemplos, con la expectativa de que el alumnado vaya acercándose intuitivamente a los conceptos que se quieren alcanzar al finalizar la sesión.

Al término de la sesión se recomendarán unas actividades para casa que en la siguiente sesión se utilizaran como recordatorio de esta sesión.

2. Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores:

Esta es la segunda sesión en la que se estudian ecuaciones trascendentes, se ha puesto las ecuaciones logarítmicas en la sesión siguiente a las exponenciales y no al revés porque considero que las ecuaciones exponenciales son más intuitivas y más fáciles de comprender para el alumnado.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1.- Corrección de los ejercicios obligatorio y voluntario de la sesión 4. (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se elige a un alumno o alumna para que exponga en la pizarra y con el ordenador sus resultados en las tareas. A continuación se le preguntará al resto de los compañeros si están de acuerdo con dicha resolución y, en caso de que existan errores se llegará a una conclusión entre todos.
- Material o recurso necesario:
Ordenadores.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se intenta motivar a los alumnos para que sean ellos mismos quienes se den cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todo el grupo un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

TAREA 2.- Ecuaciones logarítmicas (Duración aproximada: 20 minutos).

- Descripción de la actividad:

Se explicará qué forma tienen las ecuaciones logarítmicas y su forma de resolución.

Antes de pasar a la resolución de las ecuaciones propiamente dichas hay que recordarle al alumnado las reglas de las operaciones de los logaritmos:

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \quad \log(x^n) = n \cdot \log x$$

Para ello se harán diferentes ejemplos con distinta dificultad cada uno, un ejemplo de esto se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \log(x + \sqrt{6}) + \log(x - \sqrt{6}) &= 1 \\ (x - 1)\log 2 + \log 8 &= \log 4 \end{aligned}$$

- Material o recurso necesario:

Ninguno específico.

- Previsiones sobre la gestión del aula:

El profesor interactuará con el grupo.

- Comentarios sobre las intenciones del profesor:

Se trata de que el alumnado aprenda a resolver ecuaciones logarítmicas.

TAREA 3.- Resolución de problemas que se modelizan con una ecuación logarítmica (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:

Se les muestran a los alumnos distintos problemas cuya resolución pasa por una ecuación logarítmica, como se estudió en el apartado de fenomenología estos son la intensidad de un sismo, el índice de PH y la intensidad de la onda sonora. A continuación se muestra un problema de intensidad de un sismo:

La función que regula la intensidad de un sismo es $M = 0.67 * \text{Log}(0.37 * E) + 1.46$ donde E es la energía del sismo en kw/h. Si el sismo de Haití se ha medido en la escala Richter con una intensidad de 7.0 grados, ¿cuál será la energía? Explica el procedimiento que has utilizado para resolverlo.

- Material o recurso necesario:

Ninguno en particular.

- Previsiones sobre la gestión del aula:

El profesor interactuará con el grupo.

- Comentarios sobre las intenciones del profesor:

Se trata de que el alumnado comprenda intuitivamente lo que es una ecuación logarítmica y en qué situaciones se las pueden encontrar.

Los últimos 5 minutos de la sesión se dedican a comentar el ejercicio obligatorio y el voluntario que el grupo ha de entregar en la sexta sesión.

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas y esboza su gráfica:

$$\log x^3 - \log 30 = \log \frac{x^2}{5}$$

$$2\log x = \log(-6 + 5x)$$

$$2\log x - \log 45 = \log \frac{x}{3}$$

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Con el programa “Mathematica” realiza la representación de la función asociada a las siguientes ecuaciones y di cuales son sus soluciones aproximadas:

$$\begin{aligned} \log x - \log(22 - x) &= 1 \\ \log\left(\frac{5x + 4}{2}\right) &= \frac{1}{2} \log(x + 4) \\ \log(x^2) + \log 10 &= 1 + \log(10x + 11) \end{aligned}$$

Sesión 6: Introducción a las inecuaciones. Inecuaciones con una incógnita de distintos grados.

1. Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:

En la primera parte de esta sesión lo que se pretende es introducir al alumnado en las inecuaciones, para ello se utilizan actividades motivadoras. Además, no se van a emplear conceptos nuevos, sino que ya los conocen de cursos anteriores.

En la segunda parte de la sesión se tratan las inecuaciones con una incógnita, esto también lo han visto en cursos anteriores por lo que el alumnado solo tiene que recordar lo que ya aprendieron con anterioridad.

De este modo los contenidos que se van a tratar son básicos:

- Distinguir y relacionar los distintos sistemas de representación.
- Resolución de inecuaciones de primer grado.
- Interpretación gráfica de las inecuaciones y de la región solución.
- Resolución de problemas empleando inecuaciones de primer grado.

Estos contenidos hacen referencia a los objetivos que encontramos en los tres focos que se han marcado, que implican las competencias indicadas en la siguiente tabla:

	Identificar y Caracterizar	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
3	Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	X	X				X	X	X

	Resolución y Representación Gráfica	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
7	Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.	X					X	X	X

	Resolver Problemas	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
9	Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.		X	X	X	X			
10	Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	X			X	X		X	
12	Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	X	X	X					

Se irán introduciendo ejemplos, con la expectativa de que el alumnado vaya acercándose intuitivamente a los conceptos que se quieren alcanzar al finalizar la sesión.

Al término de la sesión se recomendarán unas actividades para casa que en la siguiente sesión se utilizaran como recordatorio de esta sesión.

2. Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores:

Esta es la primera sesión que se le dedica a las inecuaciones, por este motivo se hace con actividades de motivación a modo de introducción a esta parte de la unidad.

Lo normal sería, dada la complejidad de las sesiones anteriores, que esta sesión fuese la segunda o tercera en el orden de secuenciación, pero se ha colocado en sexto lugar por dos motivos: uno es que el alumnado diferencie las ecuaciones de las inecuaciones y el otro es que para resolver las inecuaciones es necesario el dominio de la resolución de ecuaciones.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1.- Corrección de los ejercicios obligatorio y voluntario de la sesión 5. (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se elige a un alumno o alumna para que exponga en la pizarra y con el ordenador sus resultados en las tareas. A continuación se le preguntará al resto de los compañeros si están de acuerdo con dicha resolución y, en caso de que existan errores se llegará a una conclusión entre todos.
- Material o recurso necesario:
Ordenadores.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se intenta motivar a los alumnos para que sean ellos mismos quienes se den cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todo el grupo un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

TAREA 2.- ¿Para qué sirven las inecuaciones? (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Esta tarea ya se hizo al inicio de la sesión para las ecuaciones e inecuaciones, pero para comenzar la parte de la unidad relacionada con las inecuaciones creo necesario volver a incidir sobre ello.
Se le preguntará al alumnado que recuerde qué situaciones reales se pueden resolver mediante inecuaciones. Como ya se vio en su momento en la primera sesión y en el estudio de la fenomenología, las inecuaciones pueden resolver problemas de cantidades óptimas, de edades, de contraseñas de seguridad, de volúmenes, áreas y perímetros, problemas económicos y de sueldos variables entre otros.
De esta manera se pretende provocar los comentarios.
- Material o recurso necesario:
Ninguno específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.

- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Tratar de motivar al alumnado y, además, se pueden observar sus conocimientos previos.

TAREA 3.- Regiones solución de las inecuaciones (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se reparte el alumnado en grupos de tres personas, a cada uno de los grupos se les va a repartir unas transparencias en las que vienen dibujados diferentes conjuntos soluciones que pueden tener las inecuaciones. Si se superponen las dos transparencias se obtienen nuevos conjuntos soluciones.
Se les puede repartir un guión de preguntas sobre esas transparencias, como son que digan cuántas soluciones hay, que enuncien un problema que tenga alguna de esas soluciones, cuando se superponen dos regiones solución cuál es la nueva región solución.
- Material o recurso necesario:
Traspapeos que se adjuntan en el Anexo II.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado distinga las distintas regiones solución que pueden tener las inecuaciones y que sepa interpretarlas.

TAREA 4.- Inecuaciones de primer grado (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Como los alumnos ya saben resolver inecuaciones de primer grado de cursos anteriores, se les muestra una serie de inecuaciones y con ayuda de todos se va recordando cómo se resolvían y cómo se interpretaban las regiones solución de cada una de ellas.
- Material o recurso necesario:
Ninguno en particular.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado recuerde qué es una inecuación, que sepa resolver las inecuaciones e interpretar los conjuntos soluciones.

TAREA 5.- Problemas con inecuaciones de primer grado (Duración aproximada: 15 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se hacen grupos de tres personas se van a utilizar los ordenadores con la aplicación del programa Descartes:

[http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones con una incógnita/inecuaciones con una incógnita.htm](http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones%20con%20una%20incognita/inecuaciones%20con%20una%20incognita.htm)

Además, para las inecuaciones de dos incógnitas se utilizará la aplicación “GrafEq”. La ventaja de esta aplicación es que es muy sencilla de utilizar ya que basta con introducir una inecuación con dos incógnitas, para que el programa nos muestre la región del plano solución de la misma. Cabe destacar que en el caso de que lo que se pretenda resolver sea una inecuación con una incógnita, el proceso a seguir pasa por representar su inecuación con dos incógnitas asociada y, a continuación, estudiar el corte de esta región con el eje de abscisas y así determinar el intervalo solución; lo que nos permite

aumentar parcialmente el nivel de complejidad y, por tanto, potenciar las capacidades cognitivas de los alumnos.

Para poder introducir la inecuación los alumnos y alumnas deberán transformarla, pasando todo a un mismo miembro, basta con que introduzcan los coeficientes para que el programa muestre la gráfica de su función asociada. A su vez el programa permite mover un punto en el eje de abscisas y muestra el valor exacto que toma la función para esa abscisa. Teniendo en cuenta el signo de la inecuación, los alumnos deberán decidir la región del plano o el intervalo solución.

Se tratarán una serie de problemas que se pueden resolver bien de forma analítica, bien con las aplicaciones anteriores. Consiste en resolverlos de las dos formas para comprobar sus analogías.

A continuación se muestra algunos problemas de este tipo:

Las edades de un padre y su hijo difieren 27 años, ¿entre qué edades tendrá el padre más del doble de la edad del hijo?

Una fábrica paga a cada agente comercial 1€ por artículo vendido más una cantidad fija de 1000€. Otra fábrica de la competencia paga 150 céntimos por artículo y 400€ fijos. ¿Cuántos artículos debe vender un agente comercial de la competencia para ganar más dinero que el primero?

- Material o recurso necesario:

Ordenadores.

- Previsiones sobre la gestión del aula:

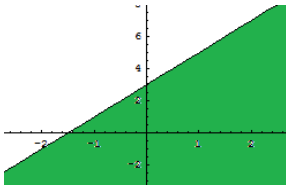
El profesor interactuará con el grupo.

- Comentarios sobre las intenciones del profesor:

Se trata de que el alumnado sepa trasladar un enunciado al lenguaje algebraico y posteriormente que sepa interpretar la solución.

Los últimos 5 minutos de la sesión se dedican a comentar el ejercicio obligatorio y el voluntario que el grupo ha de entregar en la siguiente sesión.

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Completa la tabla siguiente:

Intervalos / Regiones	Conjunto	Gráfico
$(-5,4]$		
	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$	
		

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Problema con inecuaciones.

A partir del siguiente problema construye la inecuación que lo modeliza, resuélvela analítica y gráficamente.

Dos hermanos se llevan seis años. Durante cierto período de sus vidas, la edad del mayor excede en más de tres años al doble de la del menor. ¿Cuál es dicho período?

Sesión 7: Inecuaciones con dos o más incógnitas.

1. Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:

En esta sesión lo que se persigue es que el alumnado recuerde la resolución de inecuaciones de grado superior a dos, los problemas en los que aparecen dichas inecuaciones y la interpretación del conjunto solución obtenido al resolverlas. Como ya lo han tratado en cursos anteriores, el alumnado solo tiene que recordar lo que ya aprendieron con anterioridad.

De este modo los contenidos los contenidos que se van a tratar son básicos:

- Distinguir y relacionar los distintos sistemas de representación.
- Resolución de inecuaciones de grado superior o igual a dos.
- Interpretación gráfica de las inecuaciones y de la región solución.
- Resolución de problemas empleando inecuaciones de grado superior o igual a dos.

Estos contenidos hacen referencia a los objetivos que encontramos en los tres focos que se han marcado, que implican las competencias indicadas en la siguiente tabla:

Identificar y Caracterizar		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
3	Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	X	X				X	X	X

Resolución y Representación Gráfica		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
7	Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.	X					X	X	X

Resolver Problemas		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
9	Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.		X	X	X	X			
10	Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	X			X	X		X	
12	Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	X	X	X					

Se irán introduciendo ejemplos, con la expectativa de que el alumnado vaya acercándose intuitivamente a los conceptos que se quieren alcanzar al finalizar la sesión.

Al término de la sesión se recomendarán unas actividades para casa que en la siguiente sesión se utilizaran como recordatorio de esta sesión.

2. Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores:

Esta sesión al dedicarse a inecuaciones más complicadas que las de la sesión anterior no puede ir delante de la sesión 6. Por otra parte, como se ha comentado en la sesión

anterior, al necesitar las ecuaciones asociadas a estas inecuaciones para resolverlas esta sesión ha de ser posterior a las ecuaciones.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1.- Corrección de los ejercicios obligatorio y voluntario de la sesión 6. (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se elige a un alumno o alumna para que exponga en la pizarra sus resultados en las tareas. A continuación se le preguntará al resto de los compañeros si están de acuerdo con dicha resolución y, en caso de que existan errores se llegará a una conclusión entre todos.
- Material o recurso necesario:
Ninguno en particular.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se intenta motivar a los alumnos para que sean ellos mismos quienes se den cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todo el grupo un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

TAREA 2.- Regiones solución de las inecuaciones (Duración aproximada: 15 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se hacen grupos de 4 personas, a cada grupo se le entrega un dominó de conjuntos: las piezas de este juego son análogas a las del dominó tradicional con la salvedad de que, en lugar de emparejar dos números iguales, se deberá emparejar dos de las distintas expresiones de un mismo conjunto, que puede ser un intervalo o una región del plano. Los diferentes sistemas de representación que utilizaríamos serían: gráfico, simbólico (tanto en forma de desigualdad como en su forma conjuntista) y verbal.
La actividad consiste en jugar al dominó, para ello necesitan haber entendido la sesión anterior.
- Material o recurso necesario:
Dominó de conjuntos que se adjunta en el Anexo III.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado distinga las distintas regiones solución que pueden tener las inecuaciones y que sepa interpretarlas. Además, en esta sesión, se muestra si el alumnado ha entendido los conjuntos solución, si no lo ha hecho se puede retomar el tema.

TAREA 3.- Inecuaciones de grado superior a dos (Duración aproximada: 15 minutos).

- Descripción de la actividad:
Como los alumnos ya saben resolver inecuaciones de grado superior a dos de cursos anteriores, se les muestra una serie de inecuaciones y con ayuda de todos se va recordando cómo se resolvían y cómo se interpretaban las regiones solución de cada una de ellas.
Las inecuaciones que se les puede mostrar son de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}4x^4 + 2x^2 + 1 &\geq 0 \\2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 &< 0 \\ \frac{2x(x - 3) + x^2}{x - 1} &\leq 3(x - 1)\end{aligned}$$

- Material o recurso necesario:
Ninguno en particular.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado recuerde qué es una inecuación, que sepa resolver las inecuaciones e interpretar los conjuntos soluciones.

TAREA 4.- Problemas con inecuaciones de grado superior a dos (Duración aproximada: 15 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se hacen grupos de tres personas se van a utilizar los ordenadores con las aplicación usadas en la sesión anterior.
Se tratarán una serie de problemas que se pueden resolver bien de forma analítica, bien con las aplicaciones anteriores. Consiste en resolverlos de las dos formas para comprobar sus analogías.
A continuación se muestran algunos problemas de este tipo:
Halla la edad de una persona sabiendo que si al cuadrado se le resta el triple de la edad resulta nueve veces ésta.
Si un lado de un cuadrado se le alarga 2m y al contiguo 7m, obtenemos un rectángulo cuya área es 22 m² más que el doble del cuadrado. Calcula las dimensiones del cuadrado.
- Material o recurso necesario:
Ordenadores.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumnado sepa trasladar un enunciado al lenguaje algebraico y posteriormente que sepa interpretar la solución.

Los últimos 5 minutos de la sesión se dedican a comentar el ejercicio obligatorio y el voluntario que el grupo ha de entregar en la siguiente sesión.

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Resuelve el siguiente problema con alguno de las aplicaciones utilizadas en la sesión y explica la solución obtenida:

Halla un número con dos cifras sabiendo que éstas son dos números consecutivos y que el cuadrado del número invertido es 209 unidades mayor que 10 veces el número primitivo

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Resuelve el siguiente problema analíticamente y explica la solución obtenida:

Calcula el perímetro de un triángulo isósceles cuya área es 60 m² y los lados iguales miden 13m.

Sesión 8: Repaso de todos los contenidos vistos en la unidad.

1. Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:

Al ser la sesión previa a la prueba escrita, los contenidos que se van a utilizar son todos los de la unidad.

A su vez, estos contenidos hacen referencia a todos los objetivos estudiados en la unidad, que implican las competencias indicadas en la siguiente tabla:

Identificar y Caracterizar		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.		X	X				X	
2	Modelizar procesos de crecimiento ilimitado y decrecimiento limitado.	X			X		X	X	X
3	Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	X	X				X	X	X

Resolución y Representación Gráfica		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
4	Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	X	X				X	X	X
6	Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	X	X				X	X	
7	Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.	X					X	X	X

Resolver Problemas		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
9	Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.		X	X	X	X			
10	Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	X			X	X		X	
11	Obtener problemas que modelen una ecuación o inecuación dada.	X			X	X		X	
12	Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	X	X	X					

En esta sesión de repaso se tratará de corregir algunas de las actividades propuestas en la relación que se entregó en la primera sesión de la unidad para que se fuesen resolviendo a lo largo de la unidad. La finalidad de esta sesión es terminar de afianzar los conocimientos.

Los alumnos que hayan hecho algunas de las actividades (resueltas al completo o parcialmente) pueden salir de forma voluntaria a la pizarra y se contará como un ejercicio voluntario.

2. Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores:

Al ser la última sesión antes de la prueba escrita, se corregirá los ejercicios recomendados en la sesión anterior y los de la relación entregada en la primera sesión.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1.- Corrección de los ejercicios obligatorio y voluntario de la sesión 7. (Duración aproximada: 10 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se elige a un alumno o alumna para que exponga en la pizarra y con el ordenador sus resultados en las tareas. A continuación se le preguntará al resto de los compañeros si están de acuerdo con dicha resolución y, en caso de que existan errores se llegará a una conclusión entre todos.
- Material o recurso necesario:
Ordenadores.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se intenta motivar a los alumnos para que sean ellos mismos quienes se den cuenta de sus propios errores. Además, corregir entre todo el grupo un ejercicio fomenta la comunicación en el aula.

TAREA 2.- Actividades de la relación entregada en la primera sesión (Duración aproximada: 50 minutos).

- Descripción de la actividad:
Los alumnos que tengan alguna actividad de la relación pueden salir de forma voluntaria a corregirlos en la pizarra.
La relación se adjunta en el Anexo IV.
- Material o recurso necesario:
Ninguno en concreto.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se trata de que el alumno pueda subsanar cualquier duda que tenga antes de la prueba escrita.

Sesión 9: Prueba escrita.

1. Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:

Se pondrán en práctica todos los contenidos que se han utilizado a lo largo de la unidad y que se repasaron en la sesión 8.

A su vez, estos contenidos hacen referencia a los mismos objetivos y competencias que los implicados en la sesión anterior.

Se trata de una parte fundamental pero no única en la evaluación de los alumnos. La intención es cuantificar el nivel de comprensión de los conceptos impartidos en las sesiones previas.

2. Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores:

En la sesión anterior, se realizaron una serie de problemas referentes a los mismos conceptos que se manejan en los problemas del examen. De este modo, los alumnos verán que una prueba de evaluación como esta no es algo distinto a lo enfocado durante el tema.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1.- Prueba escrita. (Duración aproximada: 55 minutos).

- Descripción de la actividad:
Los alumnos realizan de forma individual una serie de tareas propuestas, pudiendo preguntar al profesor dudas referentes a enunciados. Adjunto en el Anexo V.
- Material o recurso necesario:
Ninguno específico.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
Ninguna específica.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Comprobar el nivel de asimilación de los conceptos impartidos.

Sesión 10: Exposición de trabajos.

1. Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:

Los temas propuestos en la primera sesión de la unidad son diversos, por tanto los contenidos involucrados también lo son. Dichos contenidos son de un nivel superior a los impartidos en la unidad ya que estos trabajos son de ampliación.

2. Enmarque de la sesión de trabajo en relación con las sesiones anteriores y posteriores:

Esta sesión está situada en último lugar para que el alumnado tenga tiempo suficiente para realizar el trabajo, además para algunos trabajos es necesario haber terminado de impartir los conceptos básicos de la unidad. Además, es mejor que sea la última para que el alumnado se haya quitado la presión de la prueba escrita.

3. Secuencia de tareas:

TAREA 1.- Exposición de los trabajos. (Duración aproximada: 55 minutos).

- Descripción de la actividad:
Se expondrán uno a uno cada trabajo de los alumnos agrupados en equipos de 5 personas. Cada grupo tendrá como máximo 5 minutos de exposición y 3 de preguntas de los compañeros o del mismo profesor.
- Material o recurso necesario:
Proyector si los grupos lo necesitan para las exposiciones.
- Previsiones sobre la gestión del aula:
El profesor interactuará con el grupo.
- Comentarios sobre las intenciones del profesor:
Se intenta motivar a los alumnos para que sean ellos mismos quienes expliquen a sus compañeros los diferentes temas.

6. Conclusiones

La realización de la Unidad Didáctica (U.D.) es un trabajo que se ha dilatado en el tiempo, desde que se empezó en la asignatura de *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* con los primeros esbozos del mapa conceptual hasta el resultado final. Se ha pasado por un proceso de modificaciones cambiando los problemas surgidos e incluyendo las nuevas ideas que han ido surgiendo, dichas ideas, en algunas ocasiones, le daban al tema un enfoque totalmente distinto al que inicialmente se había iniciado.

Soy consciente de que aunque de por terminada la U.D., cuando se vuelva a revisar surgirán nuevas ideas. Por lo que una U.D. siempre admite modificaciones o arreglos que la vayan perfeccionando debido a la experiencia personal.

En el desarrollo de la U.D. la máxima complicación la he tenido a la hora de seleccionar las tareas destinadas a la secuenciación de las clases. También hubo ciertas complicaciones a la hora de concretar los objetivos de la unidad y el estudio de las competencias a las que se contribuye a desarrollar con cada objetivo, el enfoque de los objetivos ha cambiado tanto desde que se empezó que son completamente diferentes a los iniciales.

Una vez hecho este trabajo el enfoque que normalmente se tiene de que las clases no hay que prepararlas, que con ir al Instituto, abrir el libro y ceñirse a lo que allí pone es suficiente, a quedado totalmente obsoleto. Contraria a esta forma de pensar está la que tengo una vez hecho el trabajo, las clases hay que tenerlas totalmente cerradas antes de comenzar con la unidad concreta (más allá de que una vez que se empieza te des cuenta de que se han cometido algunos fallos en la concreción de actividades o si no te has adecuado lo suficiente al tipo de alumnado al que te enfrentas).

No es suficiente con realizar una unidad didáctica de un tema concreto una vez en la vida, uno de los motivos por los que esto no es posible es que en la actualidad la situación de los centros no es la que había hace años, pues se ha visto condicionada por un avance tecnológico, social y de poder adquisitivo que ha influido directamente en la motivación del alumnado. Este hecho, quizá sea el motivo de utilizar nuevos recursos y materiales que despierten interés. Otra de las razones es que no todos los grupos de alumnos a los que nos vamos a enfrentar son iguales, de hecho cada colectivo va a ser distinto. Por todo esto hay que adecuar cada unidad en el momento de ser usada.

El trabajar en grupo me ha supuesto una experiencia enriquecedora a lo largo del curso, ya que nuestros distintos puntos de vista se han complementado gracias a todos los debates y discusiones que han ido surgiendo al trabajar la materia.

Para terminar, no es fácil pensar como profesora cuando aún pienso como alumna, pero con grandes esfuerzos creo haber avanzado en este campo, gracias a la formación adquirida en esta asignatura.

7. Bibliografía

Garrote, M.; Hidalgo, M. J.; Blanco, L. J. (2004). *Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones*. *Suma* (núm. 46, págs. 37-44).

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. *BOE*, 174, 31680-31828.

Monteagudo, M. F.; Paz, J.; Cámara, M. T. (1997). *Matemáticas I*. Zaragoza: Editorial Edelvives.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.

Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 163-172.

Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.

<http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones con una incognita/inecuaciones con una incognita.htm>

<http://www.pdfqueen.com/html/aHR0cDovL3d3dy5tYXRlYnJ1bmNhLmNvbS9Db250ZW5pZG9zL01hdGVtYXRpY2EvRnVuY2lvcnVzL2V4cG8tbG9nLWFwbGljYWVcGRm>

<http://www.sectormatematica.cl/index.htm>

Anexo I: Tareas de la secuenciación analizadas

Sesión 1: Motivación de la unidad. Repaso de los sistemas de representación

TAREA 2.- Bote de un balón. En grupos de tres personas y haciendo uso de la calculadora gráfica, con el sensor de movimiento incorporado se puede representar gráficamente la función asociada al bote de un balón. Responde a las siguientes preguntas:

- a. ¿Reconoces la ecuación asociada a la gráfica (de forma genérica)?
- b. Muestra, observando la gráfica, las soluciones de la ecuación asociada.

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(6) Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	
(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.	
(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	
Contenidos:	
- Relacionar las distintas situaciones cotidianas con las ecuaciones e inecuaciones.	- Software educativo - Corte con el eje de abscisas - Función asociada a una ecuación
Sistemas de Representación:	Gráfico
Competencias:	AJ C R LS HT
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Motivación

TAREA 4.- ¿Ecuación o inecuación? (Duración aproximada: 10 minutos).

Se le pide al alumnado que identifique en un conjunto de expresiones algebraicas, cuáles son ecuaciones y cuáles inecuaciones. Además, se pide que digan de qué tipo son. El listado de expresiones que se les podría sería como el siguiente:

$$\sqrt{(x+3)(x+4)} = x - 1$$

$$5^{x^2-x-20} = 1$$

$$5 \log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 x$$

$$\sqrt{1 + \sqrt{x+1}} = 2$$

$$\frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} = 1$$

$$(x-2)(x+1) \geq 18y$$

$$4x^4 + 2x^2 + 1 \geq 0$$

$$\frac{3x+1}{x+2} = \frac{13}{5(x-2)}$$

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.	
Contenidos:	
- Diferencia entre igualdad y desigualdad	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	PR LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA 5.- ¿Cómo se pueden representar las ecuaciones y las inecuaciones?

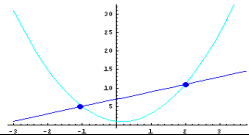
En grupos de 3 personas se les muestra la gráfica asociada a una ecuación, posteriormente se les pide que digan dónde están sus soluciones.

A partir de ahí han de pensar el enunciado de un problema que se resuelva con esta ecuación. Del mismo modo se hace con un ejemplo de una inecuación.

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(6) Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	
(11) Obtener problemas que modelen una ecuación o inecuación dada.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Diferencia entre igualdad y desigualdad - Clasificación de expresiones algebraicas 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	AJ LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Tabla incompleta.

Completa la siguiente tabla transformando cada expresión con los distintos sistemas de representación:

Representación Simbólica	Representación Gráfica	Representación verbal
$2x^3 - 5x + 3 = 0$		
		
		El triple de un número al cuadrado menos su quinta parte es 6

Objetivos:			
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.			
(6) Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.			
Contenidos:			
<ul style="list-style-type: none"> - Diferencia entre igualdad y desigualdad - Clasificación de expresiones algebraicas 		<ul style="list-style-type: none"> - Función asociada a una ecuación - Relacionar los distintos sistemas de representación 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico	Verbal	Gráfico
Competencias:	PR R LS		
Situación/Contexto:	Científica		
Grado de complejidad:	Reproducción		
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar		

Sesión 2: Ecuaciones polinómicas. Ecuaciones racionales.

TAREA 2.- Problemas con ecuaciones polinómicas:

Una pelota ha sido lanzada al aire a una velocidad de 25 m por segundo. ¿Al cabo de cuántos segundos se encontrará la pelota a 20 m de altura?

Dicho enunciado se modeliza con la ecuación: $h = vt - gt^2/2$.

Objetivos:	
(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.	
(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	
(11) Obtener problemas que modelen una ecuación o inecuación dada.	
(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Concepto de ecuación polinómica. - Resolución de las ecuaciones polinómicas de grado 1, 2 y superior a 2. - Fórmula para la resolución de las ecuaciones de segundo grado. 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	PR M RP
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Conexión
Funcionalidad:	Descontextualización y de aplicación

TAREA 3.- Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

$$\frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x^2-1} = 1$$

$$\frac{2x-3}{x^2-4} + \frac{3x+1}{x+2} = \frac{13}{5(x-2)}$$

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Concepto de ecuación racional. - Mínimo común múltiplo. - Resolución de ecuaciones racional. 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	PR LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA 4.- Representación y solución de una ecuación racional.

Se van a utilizar los ordenadores con el programa “Mathematica”, se pretende que en grupos de tres personas se dibujen distintas ecuaciones. Para ello se les entregará un guión con las órdenes necesarias para el correcto funcionamiento del programa.

Unidad Didáctica: Ecuaciones e Inecuaciones

Se les pedirá que dibujen la ecuación correspondiente y que mirando el dibujo nos digan las soluciones de la ecuación.

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
(6) Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Concepto de ecuación racional. - Interpretación gráfica de las ecuaciones racionales. - Función asociada a una ecuación. - Mínimo común múltiplo. - Resolución de ecuaciones racional. - Software educativo. 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico Tecnológico
Competencias:	AJ R LS HT
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Resuelve las siguientes ecuaciones racionales y esboza su gráfica:

$$\frac{x-2}{x} + \frac{x}{x+2} = 3$$

$$\frac{x}{5} - \frac{x}{2x} = 3x$$

$$\frac{x-3}{7x-3} + 2 = \frac{x}{x-2}$$

Da un posible enunciado cuya resolución se modelice con la ecuación: $2(3x - 2)x = 2$.

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
(6) Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	
(11) Obtener problemas que modelen una ecuación o inecuación dada.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Concepto de ecuación racional. - Interpretación gráfica de las ecuaciones racionales. - Función asociada a una ecuación. - Mínimo común múltiplo. - Resolución de ecuaciones racional. 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico Verbal
Competencias:	AJ M RP R LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Problema geométrico.

Dos de los lados de un rectángulo son el triple que los otros dos. Si la superficie del rectángulo es de 75 m^2 . ¿Cuáles son sus dimensiones?

Objetivos:	
(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.	
(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	
Contenidos:	
- Concepto de ecuación polinómica.	- Fórmula para la resolución de las ecuaciones de segundo grado.
- Resolución de las ecuaciones polinómicas de grado 1, 2 y superior a 2.	- Función asociada a una ecuación.
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	PR M RP
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Conexión
Funcionalidad:	Descontextualizar y de aplicación

Sesión 3: Ecuaciones irracionales.

TAREA 2.- Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

$$\sqrt{(x+3)(x+4)} = x - 1$$

$$x + 3\sqrt{x+1} = 17$$

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
Contenidos:	
- Concepto de ecuación irracional.	- Resolución de ecuaciones irracionales.
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	AJ LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA 3.- Representación y solución de una ecuación racional.

Se van a utilizar los ordenadores con el programa “Mathematica”, se pretende que en grupos de tres personas se dibujen distintas ecuaciones. Para ello se les entregará un guión con las órdenes necesarias para el correcto funcionamiento del programa.

Se les pedirá que dibujen la ecuación correspondiente y que mirando el dibujo nos digan las soluciones de la ecuación.

Objetivos:	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
(6) Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	
(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	
Contenidos:	
- Concepto de ecuación irracional.	- Interpretación gráfica de las ecuaciones irracionales.
- Resolución de ecuaciones irracionales.	- Función asociada a una ecuación.
- Software educativo.	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico Tecnológico
Competencias:	AJ R LS HT
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales y esboza su gráfica:

$$\sqrt{1 + \sqrt{x + 1}} = 2$$

$$\sqrt{x + 4} + \sqrt{2x - 1} = 6$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x + 12} = \sqrt{8x + 4}$$

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
Contenidos:	
- Concepto de ecuación irracional.	- Interpretación gráfica de las ecuaciones irracionales.
- Resolución de ecuaciones irracionales.	
- Función asociada a una ecuación.	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico
Competencias:	AJ LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Resuelve analíticamente las siguientes ecuaciones irracionales y con el programa “Mathematica” realiza su representación gráfica y compara las soluciones obtenidas mediante los dos métodos.

$$2\sqrt{x + 1} - 3\sqrt{4x - 3} + 5 = 0$$

$$\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 6} - 2 = 0$$

$$\frac{\sqrt{2x - 2}}{x - 5} = 1$$

Objetivos:	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
(6) Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	
Contenidos:	
- Concepto de ecuación irracional.	- Interpretación gráfica de las ecuaciones irracionales.
- Resolución de ecuaciones irracionales.	- Función asociada a una ecuación.
- Software educativo.	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico Tecnológico
Competencias:	AJ R LS HT
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

Sesión 4: Ecuaciones exponenciales.

TAREA 2.- Ecuaciones exponenciales.

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$2^{3x-5} = 1024$$

$$5^{x^2-x-20} = 1$$

$$6^{-x} + 6^{1-x} + 6^{2-x} + 6^{3-x} = 259$$

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes.	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
Contenidos:	
- Concepto de ecuación exponencial.	
- Resolución de ecuaciones exponenciales.	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	AJ LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA 3.- Ecuaciones exponenciales.

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales representándolas gráficamente con el programa “Mathematica” y resuélvelas analíticamente para comparar ambas soluciones:

$$9 \cdot 3^{x-1} = 243$$

$$125 \cdot 5^{3x} = 1$$

$$4^x + 4^{x-1} - 4^{x+1} + 44 = 0$$

Objetivos:	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
(6) Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	
Contenidos:	
- Concepto de ecuación exponencial. - Resolución de ecuaciones exponenciales. - Software educativo.	- Función asociada a una ecuación. Interpretación gráfica de las ecuaciones irracionales.
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico Tecnológico
Competencias:	AJ R LS HT
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA 4.- Resolución de problemas con ecuaciones exponenciales.

Un elemento radioactivo se desintegra en función del tiempo t , medido en segundos, según $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, donde $N(t)$ es el número de átomos radiactivos existentes en el instante t , N_0 el número de átomos radiactivos en el instante inicial y la constante de desintegración λ del bario es igual a 0,0578. Calcula el tiempo que debe transcurrir para que se desintegre el 75% de una cierta cantidad de átomos de bario.

Utiliza el método de Bolzano para aproximar la solución con cuatro iteraciones, de forma numérica y gráfica, ayudándote con una hoja de cálculo para alcanzar mayor precisión.

Para resolverlo los alumnos formarán grupos de 3 personas.

Objetivos:	
(2) Modelizar procesos de crecimiento ilimitado y decrecimiento limitado.	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
(5) Aproximar una función asociada a una ecuación y sus soluciones mediante una tabla de valores y viceversa.	
(8) Obtener soluciones aproximadas de una ecuación mediante el método de Bolzano.	
(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.	
(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	
(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Concepto de ecuación exponencial. - Resolución de ecuaciones exponenciales. - Interpretación gráfica de las ecuaciones irracionales. - Software educativo. - Resolución de problemas que se modelizan con las ecuaciones exponenciales. - Aproximación a la solución por el método de Bolzano. - Software educativo. - Función asociada a una ecuación. - Tabla de valores. - Soluciones aproximadas. 	

Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico Tecnológico
Competencias:	AJ C RP HT
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reflexión
Funcionalidad:	Sintetizar

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Problema de crecimiento ilimitado.

Una ciudad del sur de Almería tenía en el 2008, 30.000 habitantes, si sabemos que el ritmo de crecimiento es del 2% anual, ¿cuántos años han de pasar para que la ciudad tenga 33.500 habitantes?

La fórmula que regula el crecimiento de poblaciones es: $P_t = P_0(1 + r)^t$.

a) Con ayuda del programa "Mathematica" resuélvelo gráficamente y discute el método utilizado con alguno de tus compañeros.

b) Utiliza el método de Bolzano para aproximar la solución con cuatro iteraciones, de forma numérica y gráfica, ayudándote con una hoja de cálculo para alcanzar mayor precisión.

Objetivos:	
(2) Modelizar procesos de crecimiento ilimitado y decrecimiento limitado.	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
(5) Aproximar una función asociada a una ecuación y sus soluciones mediante una tabla de valores y viceversa.	
(8) Obtener soluciones aproximadas de una ecuación mediante el método de Bolzano.	
(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.	
(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	
(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> <li style="width: 50%;">- Concepto de ecuación exponencial <li style="width: 50%;">- Método de Bolzano <li style="width: 50%;">- Resolución de ecuaciones exponenciales <li style="width: 50%;">- Software educativo <li style="width: 50%;">- Interpretación gráfica de las ecuaciones exponenciales <li style="width: 50%;">- Soluciones aproximadas <li style="width: 50%;">- Función asociada a una ecuación 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Verbal Gráfico Tecnológico Numérico
Competencias:	AJ C RP R HT
Situación/Contexto:	Pública/Crecimiento ilimitado (crecimiento de poblaciones)
Grado de complejidad:	Conexión (apartado a) Reflexión (apartado b)
Funcionalidad:	Sintetizar (apartado a) Elaborar y construir significados (aptdo. b)

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el método más conveniente:

$$3^{2x} + 81 = 2 \cdot 3^{x+2}$$

$$2^{x^2-9} = \frac{1}{32}$$

$$3^{x-2} = 27$$

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. (4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido. (Lo normal es que se haga una resolución analítica, por eso se ponen los objetivo 1 y 4, aunque puede resolverse de forma distinta y se incluirían otros objetivos).	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Concepto de ecuación exponencial - Resolución de ecuaciones exponenciales 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	AJ LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

Sesión 5: Ecuaciones logarítmicas.

TAREA 2.- Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

$$\log(x + \sqrt{6}) + \log(x - \sqrt{6}) = 1$$

$$(x - 1)\log 2 + \log 8 = \log 4$$

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. (4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Concepto de ecuación logarítmica - Resolución de ecuaciones logarítmicas 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	AJ LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA 3.- Intensidad de un sismo.

La función que regula la intensidad de un sismo es $M = 0.67 * \log(0.37 * E) + 1.46$ donde E es la energía del sismo en kw/h. Si el sismo de Haití se ha medido en la escala Richter con una intensidad de 7.0 grados, ¿cuál será la energía? Explica el procedimiento que has utilizado para resolverlo.

Objetivos:	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.	
(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	
(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	
Contenidos:	
- Concepto de ecuación polinómica.	- Fórmula para la resolución de las ecuaciones de segundo grado.
- Resolución de las ecuaciones polinómicas de grado 1, 2 y superior a 2.	- Función asociada a una ecuación.
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	PR M RP
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Conexión
Funcionalidad:	Descontextualización y de aplicación

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas y esboza su gráfica:

$$\log x^3 - \log 30 = \log \frac{x^2}{5}$$

$$2\log x = \log(-6 + 5x)$$

$$2\log x - \log 45 = \log \frac{x}{3}$$

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
(6) Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	
Contenidos:	
- Concepto de ecuación logarítmica.	- Interpretación gráfica de las ecuaciones logarítmicas.
- Resolución de ecuaciones logarítmicas.	- Función asociada a una ecuación.
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico
Competencias:	AJ R LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Con el programa “Mathematica” realiza la representación de la función asociada a las siguientes ecuaciones y di cuáles son sus soluciones aproximadas:

$$\log x - \log(22 - x) = 1$$

$$\log\left(\frac{5x + 4}{2}\right) = \frac{1}{2} \log(x + 4)$$

$$\log(x^2) + \log 10 = 1 + \log(10x + 11)$$

Objetivos:	
(1) Reconocer los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar dicha elección.	
(4) Resolver los distintos tipos de ecuaciones algebraicas y trascendentes. Explicar y justificar el procedimiento seguido.	
(6) Relacionar ecuaciones con las gráficas de las funciones asociadas y viceversa.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Concepto de ecuación logarítmica. - Resolución de ecuaciones logarítmicas. - Interpretación gráfica de las ecuaciones logarítmicas. - Software educativo. - Función asociada a una ecuación. 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico Tecnológico
Competencias:	AJ R LS HT
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

Sesión 6: Introducción a las inecuaciones. Inecuaciones con una incógnita de distintos grados.

TAREA 3.- Regiones solución de las inecuaciones.

Se reparte el alumnado en grupos de tres personas, a cada uno de los grupos se les va a repartir unas transparencias en las que vienen dibujados diferentes conjuntos soluciones que pueden tener las inecuaciones. Si se superponen las dos transparencias se obtienen nuevos conjuntos soluciones.

Se les puede repartir un guión de preguntas sobre esas transparencias, como son que digan cuántas soluciones hay, que enuncien un problema que tenga alguna de esas soluciones, cuando se superponen dos regiones solución cuál es la nueva región solución.

Objetivos:	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Distinguir y relacionar los distintos sistemas de representación. - Interpretación gráfica de la región solución. 	
Sistemas de Representación:	Gráfico
Competencias:	PR R HT
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Aprendizajes previos

TAREA 4.- Inecuaciones de primer grado.

Como los alumnos ya saben resolver inecuaciones de primer grado de cursos anteriores, se les muestra una serie de inecuaciones y con ayuda de todos se va recordando cómo se resolvían y cómo se interpretaban las regiones solución de cada una de ellas.

Objetivos:	
(7) Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.	
Contenidos:	
- Resolución de inecuaciones de primer grado.	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	AJ LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Elaboración y construcción de significados

TAREA 5.- Problemas con inecuaciones de primer grado.

Se hacen grupos de tres personas se van a utilizar los ordenadores con la aplicación del programa Descartes:

http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones_con_una_incognita/inecuaciones_con_una_incognita.htm

Además, para las inecuaciones de dos incógnitas se utilizará la aplicación “GrafEq”. La ventaja de esta aplicación es que es muy sencilla de utilizar ya que basta con introducir una inecuación con dos incógnitas, para que el programa nos muestre la región del plano solución de la misma. Cabe destacar que en el caso de que lo que se pretenda resolver sea una inecuación con una incógnita, el proceso a seguir pasa por representar su inecuación con dos incógnitas asociada y, a continuación, estudiar el corte de esta región con el eje de abscisas y así determinar el intervalo solución; lo que nos permite aumentar parcialmente el nivel de complejidad y, por tanto, potenciar las capacidades cognitivas de los alumnos.

Para poder introducir la inecuación los alumnos y alumnas deberán transformarla, pasando todo a un mismo miembro, basta con que introduzcan los coeficientes para que el programa muestre la gráfica de su función asociada. A su vez el programa permite mover un punto en el eje de abscisas y muestra el valor exacto que toma la función para esa abscisa. Teniendo en cuenta el signo de la inecuación, los alumnos deberán decidir la región del plano o el intervalo solución.

Se tratarán una serie de problemas que se pueden resolver bien de forma analítica, bien con las aplicaciones anteriores. Consiste en resolverlos de las dos formas para comprobar sus analogías.

A continuación se muestra algunos problemas de este tipo:

Las edades de un padre y su hijo difieren 27 años, ¿entre qué edades tendrá el padre más del doble de la edad del hijo?

Una fábrica paga a cada agente comercial 1€ por artículo vendido más una cantidad fija de 1000€. Otra fábrica de la competencia paga 150 céntimos por artículo y 400€ fijos. ¿Cuántos artículos debe vender un agente comercial de la competencia para ganar más dinero que el primero?

Objetivos:	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(7) Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.	
(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.	
(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	
(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	

Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Distinguir y relacionar los distintos sistemas de representación. - Resolución de inecuaciones de primer grado. - Interpretación gráfica de las inecuaciones y de la región solución. - Resolución de problemas empleando inecuaciones de primer grado. 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico Tecnológico
Competencias:	PR M RP HT
Situación/Contexto:	Personal
Grado de complejidad:	Reflexión
Funcionalidad:	Descontextualización y de aplicación

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Completa la tabla siguiente:

Intervalos / Regiones	Conjunto	Gráfico
$(-5,4]$		
	$\{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$	

Objetivos:	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Interpretación gráfica de la región solución. - Distinguir y relacionar los distintos sistemas de representación. 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico
Competencias:	PR R LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Problema con inecuaciones.

A partir del siguiente problema construye la inecuación que lo modeliza, resuélvela analítica y gráficamente.

Dos hermanos se llevan seis años. Durante cierto período de sus vidas, la edad del mayor excede en más de tres años al doble de la del menor. ¿Cuál es dicho período?

Objetivos:
(7) Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.
(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.
(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.
(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.

Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Distinguir y relacionar los distintos sistemas de representación. - Resolución de inecuaciones de primer grado. - Interpretación gráfica de las inecuaciones y de la región solución. - Resolución de problemas empleando inecuaciones de primer grado. 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico
Competencias:	PR M R RP
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Conexión
Funcionalidad:	Descontextualización y de aplicación

Sesión 7: Inecuaciones con dos o más incógnitas.

TAREA 2.- Regiones solución de las inecuaciones.

Se hacen grupos de 4 personas, a cada grupo se le entrega un dominó de conjuntos: las piezas de este juego son análogas a las del dominó tradicional con la salvedad de que, en lugar de emparejar dos números iguales, se deberá emparejar dos de las distintas expresiones de un mismo conjunto, que puede ser un intervalo o una región del plano. Los diferentes sistemas de representación que utilizaríamos serían: gráfico, simbólico (tanto en forma de desigualdad como en su forma conjuntista) y verbal. La actividad consiste en jugar al dominó, para ello necesitan haber entendido la sesión anterior.

Objetivos:	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Distinguir y relacionar los distintos sistemas de representación. - Interpretación gráfica de la región solución. 	
Sistemas de Representación:	Gráfico Simbólico
Competencias:	PR R HT
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Motivación

TAREA 3.- Inecuaciones de grado superior a dos.

Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$4x^4 + 2x^2 + 1 \geq 0$$

$$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 < 0$$

$$\frac{2x(x - 3) + x^2}{x - 1} \leq 3(x - 1)$$

Objetivos:	
(7) Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.	
Contenidos:	
- Resolución de inecuaciones de grado superior a dos.	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	AJ LS
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA 4.- Problemas con inecuaciones de grado superior a dos.

Se hacen grupos de tres personas se van a utilizar los ordenadores con las aplicación usadas en la sesión anterior.

Se tratarán una serie de problemas que se pueden resolver bien de forma analítica, bien con las aplicaciones anteriores. Consiste en resolverlos de las dos formas para comprobar sus analogías.

A continuación se muestran algunos problemas de este tipo:

Halla la edad de una persona sabiendo que si al cuadrado se le resta el triple de la edad resulta nueve veces ésta.

Si un lado de un cuadrado se le alarga 2m y al contiguo 7m, obtenemos un rectángulo cuya área es 22 m^2 más que el doble del cuadrado. Calcula las dimensiones del cuadrado.

Objetivos:	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(7) Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.	
(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.	
(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	
(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Distinguir y relacionar los distintos sistemas de representación. - Resolución de inecuaciones de grado superior a dos. - Interpretación gráfica de las inecuaciones y de la región solución. - Resolución de problemas empleando inecuaciones de grado superior a dos. 	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico Tecnológico
Competencias:	PR M R RP HT
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reflexión
Funcionalidad:	Descontextualización y de aplicación

TAREA OBLIGATORIA PARA CASA: Resuelve el siguiente problema con alguno de las aplicaciones utilizadas en la sesión y explica la solución obtenida:

Halla un número con dos cifras sabiendo que éstas son dos números consecutivos y que el cuadrado del número invertido es 209 unidades mayor que 10 veces el número primitivo.

Objetivos:	
(3) Interpretar y reconocer los conjuntos solución de ecuaciones e inecuaciones. Trabajar con sus distintas formas de expresión.	
(7) Resolver analítica y gráficamente los distintos tipos de inecuaciones.	
(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	
(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	
Contenidos:	
<ul style="list-style-type: none"> - Distinguir y relacionar los distintos sistemas de representación. - Resolución de inecuaciones de grado superior a dos. - Interpretación gráfica de las inecuaciones y de la región solución. - Resolución de problemas empleando inecuaciones de grado superior a dos. 	

Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico Gráfico Tecnológico
Competencias:	PR M R RP HT
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Reproducción
Funcionalidad:	Ejercitar y practicar

TAREA VOLUNTARIA PARA CASA: Resuelve el siguiente problema analíticamente y explica la solución obtenida:

Calcula el perímetro de un triángulo isósceles cuya área es 60 m^2 y los lados iguales miden 13m.

Objetivos:	
(9) Reconocer situaciones del entorno que se puedan resolver mediante el uso de ecuaciones e inecuaciones.	
(10) Transformar al lenguaje algebraico distintos problemas de ecuaciones e inecuaciones.	
(12) Interpretar y expresar los procesos usados en la resolución de problemas.	
Contenidos:	
- Resolución de inecuaciones de grado superior a dos.	
- Resolución de problemas empleando inecuaciones de grado superior a dos.	
Sistemas de Representación:	Simbólico o algebraico
Competencias:	PR M RP
Situación/Contexto:	Científica
Grado de complejidad:	Conexión
Funcionalidad:	Descontextualización y de aplicación

Sesión 10: Exposición de trabajos.

TAREA 1.- Exposición de los trabajos.

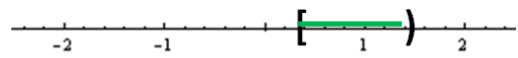
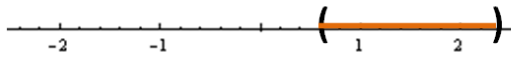
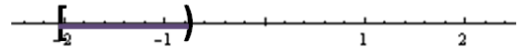
Se expondrán uno a uno cada trabajo de los alumnos agrupados en equipos de 5 personas. Cada grupo tendrá como máximo 5 minutos de exposición y 3 de preguntas de los compañeros o del mismo profesor.

Objetivos:	
Dependerá del trabajo elegido, puede estar cualquier objetivo involucrado.	
Contenidos:	
Dependerá del trabajo elegido, puede estar cualquier contenido involucrado.	
Sistemas de Representación:	Verbal, aunque dependiendo del trabajo pueden incluirse otros sistemas
Competencias:	AJ C
Situación/Contexto:	Dependerá del trabajo elegido
Grado de complejidad:	Reflexión
Funcionalidad:	Síntesis

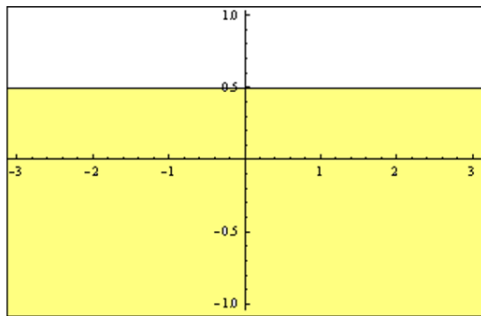
Anexo II: Transparencias

Este documento sería impreso en una transparencia.

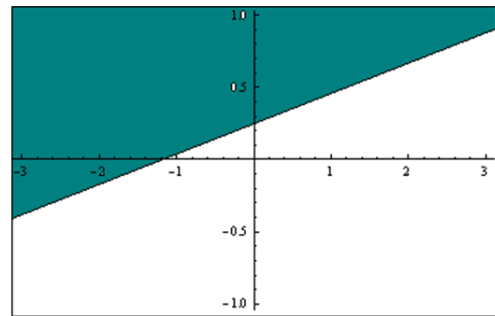
INTERVALOS



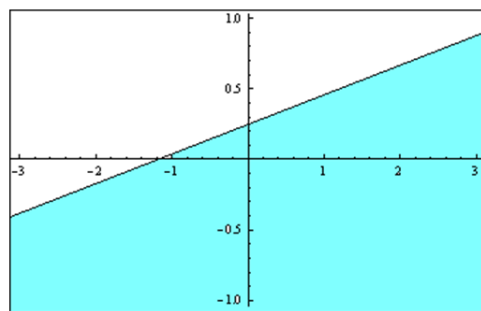
REGIONES DEL PLANO



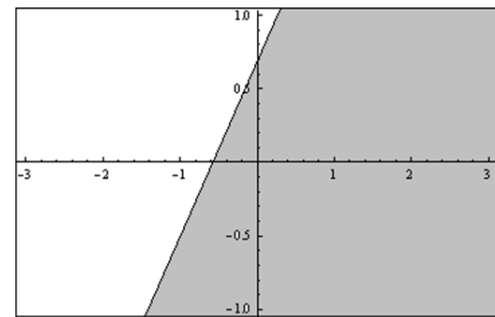
Región 1



Región 2

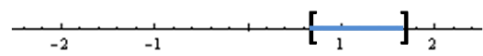
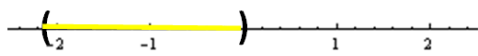
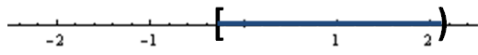


Región 3

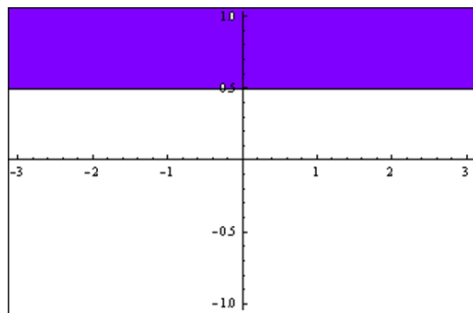


Región 4

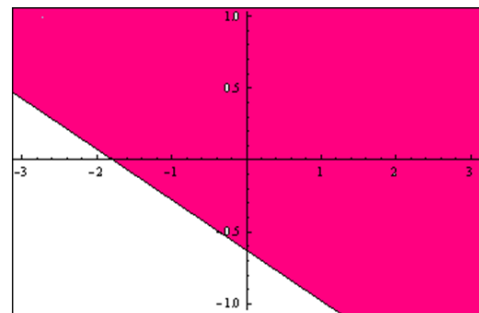
INTERVALOS



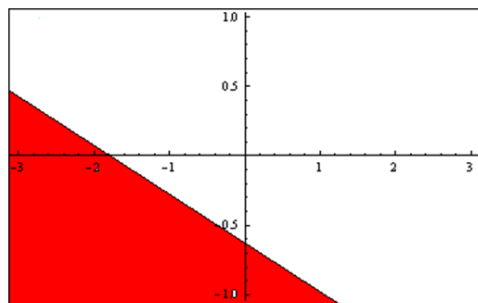
REGIONES DEL PLANO



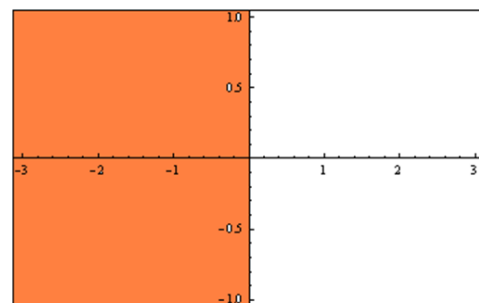
Región 5



Región 6



Región 7

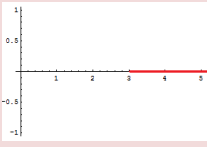
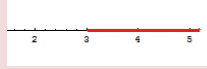
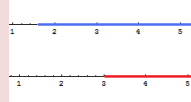
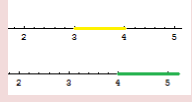
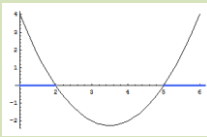




Región 8

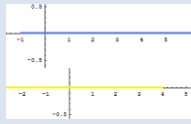

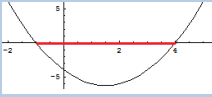
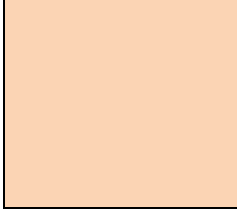
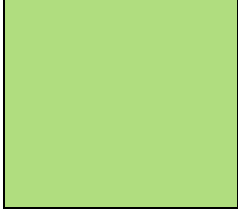
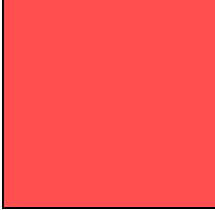
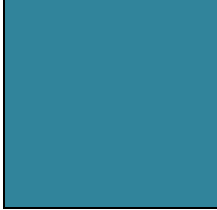



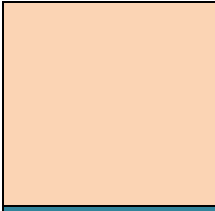



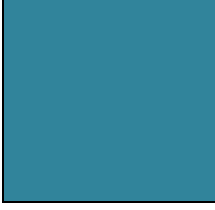



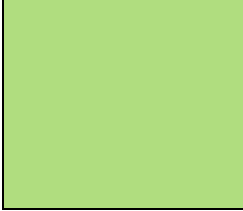
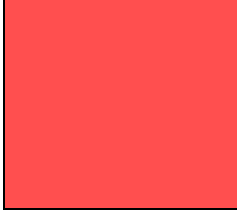

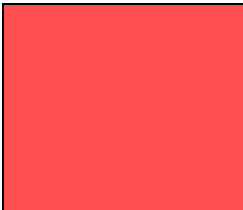
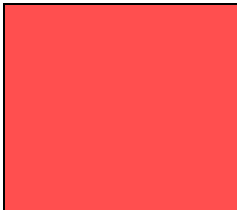
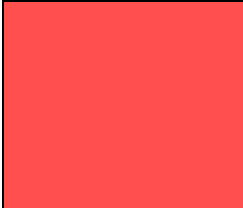

Anexo III: Dominó

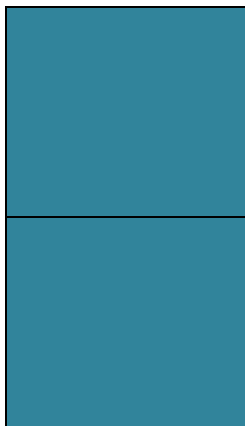
Unidad Didáctica: Ecuaciones e Inecuaciones

En este anexo se plasma cómo habría que crear el dominó, poniendo las fichas y añadiéndoles color para remarcar que las casillas del mismo color han de corresponder con intervalos o regiones del plano iguales pero escritos de formas diferentes. Además, a modo de ejemplo, se han rellenado algunas de las casillas para que se entienda mejor la intención.

$x > 3$ 	$x - 3 > 0$ $(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$	 $-1 < x < 4$	 Intersección de conjuntos	 Unión de conjuntos
$(3, +\infty)$	$-x < -3$			
$x^2 - 7x + 10 \geq 0$ 	$(x - 2)(x - 5) \geq 0$ $x^2 - 3x - 4 < 0$	 Intersección de conjuntos	 Unión de conjuntos	$x^2 + 10 \geq 7x$
$(x \leq 2) \cup (x \geq 5)$				

Unidad Didáctica: Ecuaciones e Inecuaciones

$(x + 1)(x - 4) < 0$	$0 < x + 1 < 5$	$-x^2 + 3x + 4 > 0$	 <p>Intersección de conjuntos</p>	 <p>Unión de conjuntos</p>
				
				
				
				
				
				
				



Anexo IV: Relación de ejercicios

Ejercicio 1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{2x-3}{x^2-1} - \frac{3-x}{x+1} = 0$

b. $\frac{x}{x^2-4} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{3}{x-2} - 2$

c. $\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-5} + 1 = 0$

d. $x + \sqrt{2x+3} = 6$

e. $4 \cdot 2^{2x} + 2^{x+3} = 320$

f. $3^{9x+3} = 9^2 \cdot 81^{2x}$

g. $\log(x^3) - \log(x^2) = \log 6$

h. $\log \frac{75x-25}{2x+3} = 1$

Ejercicio 2. Escribe un posible enunciado para un problema que se modelice con la ecuación $2x + 2(x - 3) = 25$.

Ejercicio 3. Una bola de nieve pesa inicialmente 300g rueda por una montaña nevada incrementando su peso en un 40% cada 100m.

a. ¿Cuánto pesará la bola después de descender 400?

b. La función que permite expresar el peso de la bola de nieve en función de la distancia recorrida por la misma es: $P = 300 \cdot 1.4^{\frac{x}{100}}$. Si en un momento determinado la bola pesa 23.811Kg, ¿cuántos metros ha descendido hasta ese momento?

Ejercicio 4. La siguiente fórmula, que es válida para los terremotos en el este de Estados Unidos, relaciona la magnitud R del seísmo con el área, A , en millas cuadradas que lo rodea que es afectada por el temblor.

$$R = \log(A + 34000) - 7.5$$

a. Calcula el área afectada (A) en función de la magnitud del seísmo (R).

b. ¿Cuál será el área si el sismo tiene una intensidad de 8 grados?

Ejercicio 5. Cuando dos espías amigos contrastan sus respectivas claves numéricas de tres cifras, la suma de ambas ha de ser menor que mil y su diferencia mayor que 500. ¿Es posible que un espía posea la clave 400?

Ejercicio 6. Un móvil se desplaza de Murcia a Cartagena a una velocidad comprendida entre 80 km/h y 120 km/h. ¿Entre qué valores oscila la distancia a Murcia en cada instante?

Utiliza la aplicación:

http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones_con_una_incognita/inecuaciones_con_una_incognita.htm

para resolverlo gráficamente y justifica tu respuesta.

Anexo V: Prueba escrita

Ejercicio 1. [2 puntos] Resuelve las siguientes ecuaciones:

- $\frac{-x+3}{x-1} - \frac{9-x}{x^2-1} = 0$
- $\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x + 8} = 0$
- $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 13$
- $\log(16 - x^2) = 2 \cdot \log(3x - 4)$

Ejercicio 2. [1 punto] Escribe un posible enunciado para un problema que se modelice con la ecuación $(x - 3)x = 85$.

Ejercicio 3. [2 puntos] El crecimiento de una colonia de mosquitos sigue un crecimiento exponencial que puede ser modelado con la siguiente ecuación $A(t) = A_0 e^{kt}$. Si inicialmente habían 1000 mosquitos y después de un día la población de éstos aumenta a 1800, ¿cuántos mosquitos habrá en la colonia después de 3 días? ¿Cuánto tiempo tendría que pasar para que la colonia tenga 10000 mosquitos?

Ejercicio 4. [2 puntos] En la mayoría de los aviones, los instrumentos utilizados para medir la altitud a en metros sobre el nivel del mar, lo hace mediante la siguiente expresión que relaciona la altitud con la temperatura del aire, T , en grados Celsius, con la presión atmosférica, P_0 , al nivel del mar: $a = (30T + 800) \ln\left(\frac{P_0}{P}\right)$.

Suponga que la presión atmosférica a cierta altitud es 24.9 cm de mercurio, la temperatura es de -3°C y la presión atmosférica a nivel del mar es de 76 cm de mercurio.

- ¿Qué altitud marcará el instrumento?
- Si el instrumento marca una altitud de 10000 metros, para las mismas condiciones de temperatura y presión a nivel del mar, ¿qué presión atmosférica hay a esa altura?

Ejercicio 5 [1 punto]. Un empresario paga a un vendedor un sueldo fijo de 900 € al mes, más 0,6€ por producto vendido. Otro vendedor no tiene sueldo fijo pero cobra 1,8€ por cada producto que logra vender. ¿A partir de qué número de productos vendidos cobrará más el segundo empleado?

Ejercicio 6 [2 puntos]. Una empresa automovilística fabrica el mismo modelo con dos motorizaciones similares: el TGi con motor de gasolina y el TDi con motor diésel. El coche de gasolina cuesta 26.000€ y el diésel 32.000€. Los gastos de mantenimiento son iguales en ambos modelos.

Suponiendo que el kilómetro del coche de gasolina tiene un precio medio de 10 céntimos y el del coche de gasóleo 5 céntimos, se pide a partir de qué kilómetros es rentable la compra del modelo diésel.

Utiliza la aplicación:

http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/Descartes/Algebra/Inecuaciones_con_una_incognita/inecuaciones_con_una_incognita.htm

para resolverlo gráficamente y justifica tu respuesta.