

ANEXOS

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO I: Cuestionario	87
ANEXO II: Respuestas de las actividades analizadas	93
1. Respuestas de la actividad 1: Explica verbalmente qué entiendes por número positivo.....	93
2. Respuestas de la actividad 2: Explica verbalmente qué entiendes por número negativo.....	99
3. Respuestas de la actividad 6: Describe una situación que se represente por -7 ..	105
4. Respuestas de la actividad 7 Describe una situación que se represente por $+3$..	113
5. Respuestas de la actividad 5: Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.....	121
ANEXO III: Tablas de descriptores	130
1. Tabla de respuestas de la actividad 1: Explica verbalmente qué entiendes por número positivo.	130
2. Tabla de respuestas de la actividad 2: Explica verbalmente qué entiendes por número negativo.	131
3. Tabla de respuestas de la actividad 6: Describe una situación que se represente por -7	132
4. Tabla de respuestas de la actividad 6: Describe una situación que se represente por -7	133
5. Tabla de respuestas de la actividad 5: Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.	134
ANEXO IV: Notas históricas sobre los números enteros	135

ANEXO I: Cuestionario

En este anexo se incluye el cuestionario completo que se aplicó para la recogida de datos.

--	--	--	--	--	--

Cuestionario Números Enteros



El grupo de Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática ha elaborado este cuestionario con el propósito de recoger información sobre ciertos aspectos relacionados con el concepto de número entero.

No es un examen. Es una encuesta sobre lo que conoces de los números enteros.

Contéstalo de forma individual, con creatividad e interés.

- Responde a cada actividad en los lugares facilitados para ello. Si te falta espacio escribe detrás de las hojas o solicita folios.
- Si te equivocas no borres, sino tacha la respuesta con una raya o ponla entre paréntesis. Esto es necesario para conocer tus respuestas.

Muchas gracias de antemano.

Edad: <input type="text"/>
Nombre: _____
Curso y grupo: _____
Centro: _____

Actividad 1:

Explica verbalmente qué entiendes por número positivo.

Actividad 2:

Explica verbalmente qué entiendes por número negativo.

Actividad 3:

Para cada acción se puede encontrar una acción contraria. Escribe en la primera columna de la tabla dos acciones y en la segunda columna sus acciones contrarias.

Acción	Acción contraria

Actividad 4:

Hay acciones cuyo resultado final se puede expresar mediante una cantidad.
Inventa un enunciado que describa una cantidad obtenida de una acción y otro enunciado que describa otra cantidad que resulte de la acción contraria.

**Enunciado con una cantidad
resultado de la acción**

**Enunciado con una cantidad
resultado de la acción contraria**

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Actividad 8:

Describe una comparación que muestre que -5 es menor que $+2$.

Actividad 9:

Describe una comparación que muestre que -4 es menor que 0 .

Actividad 10:

Describe una comparación que muestre que -5 es mayor que -2 .

Actividad 11:

Describe una comparación que muestre que -7 es menor que -3 .

Actividad 12:

En la siguiente tabla aparecen el antes y el después de cuatro acciones distintas. Redacta una explicación de qué pudo haber ocurrido en cada caso.

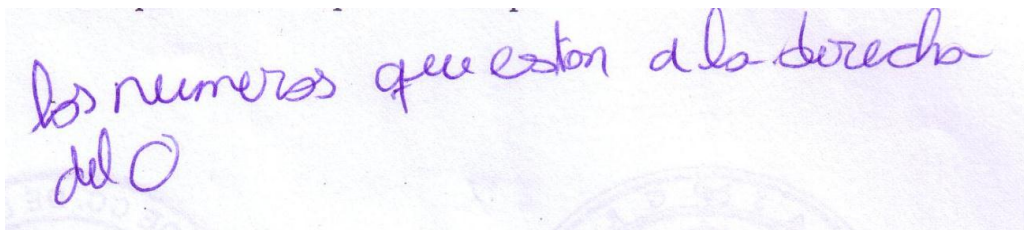
Antes	Después	¿Qué pudo ocurrir?
7€	2€	
7€	20€	
10 km	15 km	
22 km	15 km	

ANEXO II: Respuestas de las actividades analizadas

En este anexo presentamos el escaneado de las respuestas de los estudiantes a las 5 actividades analizadas en esta memoria.

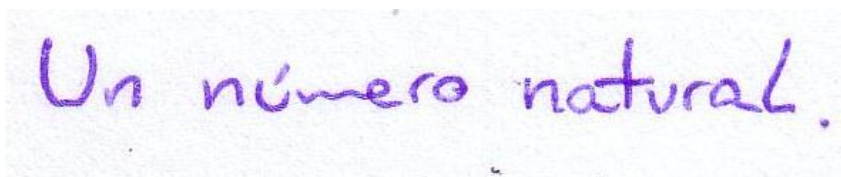
1. Respuestas de la actividad 1: Explica verbalmente qué entiendes por número positivo.

Cuestionario 1



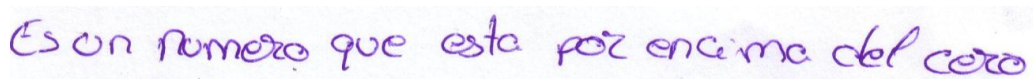
los numeros que estan a la derecha del 0

Cuestionario 2



Un número natural.

Cuestionario 3



Es un numero que esta por encima del cero

Cuestionario 4

- Que un número está por encima de 0.

Cuestionario 5

Es un número que normalmente no lleva ningún símbolo delante porque se sobreentiende que es positivo. Ejemplo: 5 el número $+$ se suele expresar sin signo aunque realmente sea $+1$.

Cuestionario 6

Un número por encima del cero.

Cuestionario 7

Un número positivo es un número mayor que cero que por lo tanto está a la derecha del cero.

Cuestionario 8

Un número positivo para mí es todo aquel número que no tiene signo.

Cuestionario 9

Cualquier número que comienza desde el 0 hacia arriba (y que no esté en negativo) $\Rightarrow -1, -2, -3, \dots$

Cuestionario 10

Un número positivo es el que está después del 0 y lleva un símbolo + no un - y expresa una cantidad positiva.

Cuestionario 11

Cualquier número que tiene ~~mas~~ delante del número

Cuestionario 12

Un número positivo es aquel que supera el valor de cero en la escala numérica.

Cuestionario 13

Lo que entiendo por número positivo es cualquier número que no tenga un menos delante.

Cuestionario 14

un número positivo es un número que está por encima de cero y por tanto no es negativo.

Cuestionario 15

Es cualquier número que no tiene el signo (-) = ~~no~~ negativo o cualquier número que está para arriba del 0 (10, 21, 5, etc)

Cuestionario 16

Es un número entero que siguen un orden a partir de 0.

Cuestionario 17

Con los ~~arriba~~ números que hay detrás del 0.

Cuestionario 18

Explica verbalmente qué entiendes por número positivo.
un número positivo es un número que está por encima del número cero. El número cero también es positivo.

Cuestionario 19

Números que están por encima del 0.

Cuestionario 20

Son los números 1, 2, 3, 4 ect... sin ningún símbolo negativo. Ejm: 1, +2, 3, 4, +50.

Cuestionario 21

Son los números que no tienen delante el signo negativo.

Cuestionario 22

Cualquier número que no tenga el signo - antes del número

Cuestionario 23

Número que tiene su valor por encima de 0.

Cuestionario 24

Los números que están antes del -
+5 +4 +3 +2 +1 +0

Cuestionario 25

Son los números que están por encima de el 0. Ejm: +1, +2, +3

Cuestionario 26

Es un número el cual, su valor es positivo

Cuestionario 27

Un número positivo son todos aquellos números que son superiores a 0.

Cuestionario 28

Es el número que tiene un + delante o no hace falta

Cuestionario 29

~~Que~~ Que es un número que no es negativo, es decir, que tiene un (\mathbb{N}^0) , o aparece sin signo cuando también lo es. $(+4)$ (4)

Cuestionario 30

Un número que no tiene el símbolo $-$, que está por encima del cero

Cuestionario 31

Un número positivo es cualquier número que suma o resta valor. ~~que~~ y son todos a partir del 0: 1-2-3-4...

2. Respuestas de la actividad 2: Explica verbalmente qué entiendes por número negativo.

Cuestionario 1

los números que están a la izquierda del 0

Cuestionario 2

Un número que no es natural

Cuestionario 3

Es un número que está por debajo de cero

Cuestionario 4

- Que un número está por debajo de 0.

Cuestionario 5

Es todo aquel número que hay por debajo de 0 y lleva el símbolo - delante.

Cuestionario 6

Un número por debajo del cero

Cuestionario 7

Un número negativo es un número menor que cero y está a la izquierda del cero.

Cuestionario 8

Un número negativo para mí es todo aquel número que tiene el signo - delante. Ejemplo: $-1, -2, -3, \dots$

Cuestionario 9

Cualquier número que comprende desde 0 hacia abajo (que no este en positivo) $1, 2, 3, \dots$

Cuestionario 10

Un número negativo es el que está (~~de~~) antes del 0 y lleva un símbolo - no un + y expresa una cantidad negativa.

Cuestionario 11

Cualquier número con un signo menos delante del número.

Cuestionario 12

Un número negativo es el que tiene un valor inferior a cero.

Cuestionario 13

Lo que entiendo por número negativo es: cualquier número que tenga un menos delante.

Cuestionario 14

Un número negativo es un número que está por debajo de cero y por tanto no puede ser positivo.

Cuestionario 15

Es cualquier número que está debajo del 0. (-1, -10, -8, etc)

Cuestionario 16

Es un número entero pero este sigue orden inverso a partir de 0.

Cuestionario 17

Son los números que hay delante del 0.
Se ~~(es)~~ escriben con un menos (-) delante.

Cuestionario 18

Explica verbalmente qué entiendes por número negativo.
Un número negativo es un número que está por debajo del número cero.

Cuestionario 19

Números que están por debajo del 0.

Cuestionario 20

Son los números que tienen símbolo (-) delante
Ej: -1, -2 ...

Cuestionario 21

Los números que delante tiene ~~en~~ el signo negativo.

Cuestionario 22

Cualquier número que tenga el signo
- antes del número

Cuestionario 23

Número que tiene su valor por debajo de 0.

Cuestionario 24

Los números que están después del +
0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5

Cuestionario 25

Son los números que están por debajo de el
0. Ejm: -1, -2, -3

Cuestionario 26

Es un número el cual, su valor es negativo.

Cuestionario 27

Un número negativo son todas aquellas números que son inferiores a 0.

Cuestionario 28

Es el número que tiene un - delante del número 0
Se hace falta

Cuestionario 29

Es un número que no es positivo, es decir, que
lleva un signo (-) acompañado de su número. -3

Cuestionario 30

Un número que tiene el símbolo $-$, que está por debajo de cero

Cuestionario 31

Un número negativo es lo contrario a uno positivo, su valor es menor al positivo y van desde el más grande menor: -1 , hasta el ~~mas~~ ~~par~~ infinito.

3. Respuestas de la actividad 6: Describe una situación que se represente por -7 .

Cuestionario 1

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

Le debes a tu tío ~~diez~~ siete euros

Cuestionario 2

Describe una situación que se represente por -7 .

Debes 7€

Cuestionario 3

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

El número de plantas de un centro comercial

Cuestionario 4

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

En una clase, hay 32 niños y hoy han faltado 7.

Cuestionario 5

Actividad 6:
Describe una situación que se represente por -7 .
Hace -7°C

Cuestionario 6

Actividad 6:
Describe una situación que se represente por -7 .
Me debes 7€

Cuestionario 7

Actividad 6:
Describe una situación que se represente por -7 .
Yo tengo 3 euros y me prestaron 10 euros
Mi situación económica es de -7 euros

Cuestionario 8

Describe una situación que se represente por -7 .
El otro día cuando fui a la pescadería
me gaste 7€

Cuestionario 9

Describe una situación que se represente por -7 .

Ayer le di siete euros a un amigo para que pudiera ir a una excursión

Cuestionario 10

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

En el banco tenía 10€, cogí 8 para comprar un pantalón y tomé prestado 9€ para una tela (~~se debe al banco~~)
Me quedan $-7€$

Cuestionario 11

Describe una situación que se represente por -7 .

Fui al cine con 15 euros. La entrada costaba 5 euros pero le tuve que comprar a mi hermano y una entrada. Mi hermano me devolvió 2 euros. Entonces me ~~me~~ gasté 7 euros y me queda con -7 euros

Cuestionario 12

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

En invierno, podemos llegar a -7° de temperatura.

Cuestionario 13

Describe una situación que se represente por -7 .

Los buzos están a -7 m por debajo del nivel del mar

Cuestionario 14

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

$$\frac{-7(2+10)}{2}$$

Cuestionario 15

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

Cuando un termómetro está a -7 grados bajo cero

Cuestionario 16

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

En un parking la planta -7

Cuestionario 17

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

- Si ~~(un piso tiene)~~ me debes 7 euros
se representaría que tu tienes $-7€$

Cuestionario 18

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

Tengo una deuda de $-7€$.

Cuestionario 19

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

Un libro cuesta $30€$ y solo tengo $23€$. Pago con los $23€$ y le debo $7€$ al vendedor.

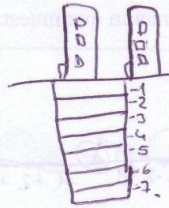
Cuestionario 20

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

$$\begin{aligned} & \cancel{14} - 7 \\ & \cancel{14} - (7) = -7 \end{aligned}$$

El sótano planta -7



Cuestionario 21

Describe una situación que se represente por -7 .

-7°

Cuestionario 22

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

(Una camiseta cuesta 30€ y la compro cuánto me deben?)

Una camiseta vale 30€ y tengo 23€
le pago y le debo 7€

Cuestionario 23

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

la séptima planta de un parking

Cuestionario 24

Describe una situación que se represente por -7 .

vajar -7 m bajo el mar

Cuestionario 25

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

Estamos a -7°C

Cuestionario 26

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

quis le debe a Juan 7€ , pero él no los tiene.

Cuestionario 27

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

$-7 - 2 + 4 = -5$.

Cuestionario 28

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

$$-7 - 1 = -8$$

Cuestionario 29

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

Mañana hará frío y estaremos a \leftarrow menos 7°C .

Cuestionario 30

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

Tengo el coche aparcado en la planta -7

Cuestionario 31

Actividad 6:

Describe una situación que se represente por -7 .

Voy a aparcar el coche en la planta -7 de ese parking.

4. Respuestas de la actividad 7 Describe una situación que se represente por +3.

Cuestionario 1

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

tienes tres €

Cuestionario 2

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Planta 3.

Cuestionario 3

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

La planta de la casa

Cuestionario 4

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

-Me encuentro 3€ en la calle.

Cuestionario 5

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

He tenido 3.
He ganado 3€

Cuestionario 6

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Gané 3 pelotas en la tumbola

Cuestionario 7

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Yo no tengo bolígrafos y me
madre me regala 3 bolígrafos
Ahora tengo +3 bolígrafos

Cuestionario 8

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Done 3€ en la iglesia pero
luego me encuentro 3€ en el suelo

Cuestionario 9

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Ayer por la calle me encontré tres
euros.

Cuestionario 10

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Tengo 2 caramelos y me dieron
1 más. Tengo 3 caramelos

Cuestionario 11

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

En un partido metí 2 goles pero me anularon
2 goles y me quedé con +3 goles

Cuestionario 12

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Nos metimos en el ascensor y pulsamos
el botón de +3 para ir a la tercera planta.

Cuestionario 13

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Tengo +3 años más que tú

Cuestionario 14

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

+3 (20 - 8)

Cuestionario 15

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

cuando estas en el sótano 2 y subes al piso 3

Cuestionario 16

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Cumplir 3 años

Cuestionario 17

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Si tengo 10 naranjas y me compro 3, son +3 naranjas.

Cuestionario 18

Actividad 7:
Describe una situación que se represente por +3.
En el ejercicio Debías coger números positivos y que sumados dieran +12 yo utilice +3, +4 y +5

Cuestionario 19

Actividad 7:
Describe una situación que se represente por +3.
Subir de la 1ª planta a la 4ª planta.

Cuestionario 20

Actividad 7:
Describe una situación que se represente por +3.
En un hotel le planté +3 hacia arriba.

Cuestionario 21

Actividad 7:
Describe una situación que se represente por +3.
tengo 3€

Cuestionario 22

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Un libro cuesta 2€ y pago con un billete de 5€. Me debe 3€

Cuestionario 23

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

La tercera planta

Cuestionario 24

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

En un centro comercial cuando vas a subir en el ascensor a la planta 3

Cuestionario 25

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

$2+3=5$

Cuestionario 26

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Jose en el banco tiene 7€ y le ingresan 3

Cuestionario 27

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

$$+3 - 5 = -2.$$

Cuestionario 28

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

$$+3 + 2 = +5$$

Cuestionario 29

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Tenia 7€ y me regalaron 3€ más.

Cuestionario 30

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Hace +3°C de temperatura en la calle

Cuestionario 31

Actividad 7:

Describe una situación que se represente por +3.

Ella vive en la planta +3 de esos bloques

5. Respuestas de la actividad 5: Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

Cuestionario 1

Actividad 5:
Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

quinta planta del garaje
cinco metros por debajo del suelo
debes cinco €

Cuestionario 2

Actividad 5:
Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$-10 + 5 = -5$
 $-11 + 6 = -5$
 $-14 + 9 = -5$

Cuestionario 3

Actividad 5:
Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

- Bajar a la -5 planta
- Beber 5 botellas de agua
- Correr tantas ~~70~~ kilómetros y te quedan 5 Km

Cuestionario 4

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

Estoy en un parking, mi coche está en la planta -5 .

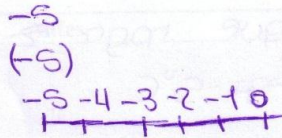
Voy al centro comercial y me gasto 5€ .

Me sumerge a 5 metros de profundidad buscando.

Cuestionario 5

Actividad 5:

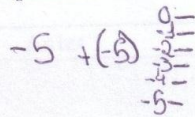
Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.



Cuestionario 6

Actividad 5:

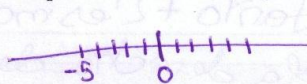
Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.



Cuestionario 7

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.



Cuestionario 8

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$-5, +5, \pm 5, 5'7, \dots$$

Cuestionario 9

Actividad 5:

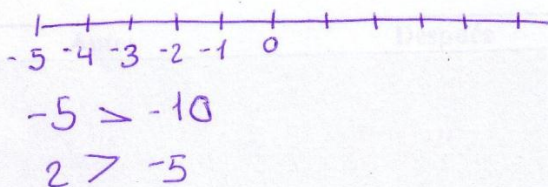
Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$\begin{aligned} 1) & -3 - 2 = -5 \\ 2) & -1 - 4 = -5 \\ 3) & 6 - 11 = -5 \end{aligned}$$

Cuestionario 10

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.



Cuestionario 11

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$\begin{aligned} -2 - 3 &= -5 \\ -10 + 5 &= -5 \\ -80 + 45 &= -5 \end{aligned}$$

Cuestionario 12

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$\begin{array}{l} -10 + 5 \\ \cancel{(-5-5)} - 3 - 2 \\ 5 - 10 \end{array}$$

Cuestionario 13

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

Planta: -5
Estamos a -5 m por debajo del nivel del mar.
Ahora hay -5° grados.

Cuestionario 14

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

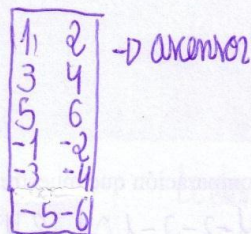
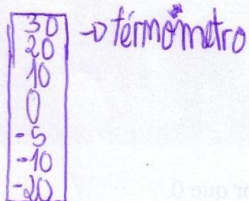
$$-5 \quad / \quad \frac{-5}{1} \quad / \quad (-5)$$

Cuestionario 15

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$-10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 10$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



Cuestionario 16

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$\begin{aligned} & -(-5), 5, -5^2, -5^3, -5^4, -5^5, -5^6, -5^7, -5^8, -5^9, \\ & \frac{-5}{-5}, (-5)^2, (-5)^3, (-5)^4, (-5)^5, (-5)^6, (-5)^7, (-5)^8, (-5)^9, \\ & \left(\frac{-5}{-5}\right)^2, -5x, -5y, \sqrt{-5}, \sqrt{-5^2}, \sqrt{-5^3}, \sqrt{-5^4}, \sqrt{-5^5} \end{aligned}$$

Cuestionario 17

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$5-10$$

$$-2-3$$

$$-6+1$$

Cuestionario 18

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

1ª = La sanción consistía en que tuviera -5 puntos.

2ª = Dejamos el coche en el ~~tercer~~ ^{quinto} piso del parking. Si coges el ascensor para bajar debíamos pulsar el botón -5 .

3ª = El ejercicio consistía en escribir en una tabla desde el número 10 hasta el -5 .

Cuestionario 19

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

Baje de la planta 0 al sótano 5.

Deber 5€ a alguien.

Tienes que correr 10 Km y llevas 5 Km.

Cuestionario 20

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

-5

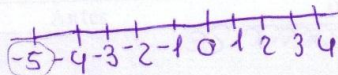
$-(+5)$

$+5$

Cuestionario 21

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.



-5 (-5)

Cuestionario 22

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

Bajas 5 plantas

Deber 5€

He corrido 30 km y me quedan 5 km

Cuestionario 23

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$\begin{aligned} -3 - 2 &= -5 \\ -7 + 2 &= -5 \\ -15 + 10 &= -5 \end{aligned}$$

Bajar 5 plantas

Deber 5 euros

Te rebajan 5 euros.

Cuestionario 24

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

- Correr 40 kilómetros y me quedan 5

= Vajar ~~ala~~ planta -5

- Retrasarse -5 minutos

Cuestionario 25

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

Ascensor
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5

Termómetro
 -5°C

Por ciento
 -5%

Cuestionario 26

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$-5 - 5 = 0$$

$$-5 - 5 = -10$$

$$-5 - (-5) = 0$$

Cuestionario 27

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$+5, -\frac{5}{1}, +\frac{5}{1}, +7-12, \text{~~(-5)}~~, -3-2.$$

Cuestionario 28

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$\text{0/5} \quad \text{#} \quad \text{■}$$

Cuestionario 29

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$\text{#}5, 5, -(5)$$

$$-(5), (-5), -(-5) + (-5).$$

Cuestionario 30

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

$$-10 + 5 = -5$$

$$-11 + 6 = -5$$

$$-12 + 7 = -5$$

Cuestionario 31

Actividad 5:

Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

- La planta del sótano -5
- Un cartel de descuento de $-5€$
- Un Deber $-5€$ a alguien.

ANEXO III: Tablas de descriptores

En este apartado presentamos las tablas que utilizamos para el desglose de las respuestas de las actividades analizadas. En estas se puede ver como encabezado los diferentes descriptores y marcados con x aquellos con los que se identifica la respuesta.

1. Tabla de respuestas de la actividad 1: Explica verbalmente qué entiendes por número positivo.

Cuestionario	Términos Clave	Posición	Orden	+	No –	Sin signo	0
1		x					x
2	x						
3		x					x
4		x					x
5				x		x	
6		x					x
7		x	x				x
8						x	
9	x	x					x
10	x	x		x	x		x
11				x			
12		x	x				x
13					x		
14	x	x					x
15	x	x			x		x
16	x		x				x
17		x					x
18		x					x
19		x					x
20					x		
21					x		
22					x		
23	x	x					x
24		x					
25		x					x
26	x						
27			x				x
28				x		x	
29	x			x		x	
30		x			x		x
31	x						x

2. Tabla de respuestas de la actividad 2: Explica verbalmente qué entiendes por número negativo.

Cuestionario	Términos Clave	Posición	Orden	No +	-	0
1		x				x
2	x					
3		x				x
4		x				x
5		x			x	x
6		x				x
7		x	x			x
8					x	
9	x	x				x
10	x	x		x	x	x
11					x	
12			x			x
13					x	
14	x	x				x
15		x				x
16	x		x			x
17		x			x	x
18		x				x
19		x				x
20					x	
21					x	
22					x	
23	x	x				x
24		x				
25		x				x
26	x					
27			x			x
28					x	
29	x				x	
30		x			x	x
31	x		x			

3. Tabla de respuestas de la actividad 6: Describe una situación que se represente por -7 .

Cuestionario	Verbos	Longitud sobre un nivel	Temperatura	Operaciones
1	×			
2	×			
3		×		
4	×			
5			×	
6	×			
7	×			
8	×			
9	×			
10	×			
11	×			
12			×	
13		×		
14				×
15			×	
16		×		
17	×			
18	×			
19	×			
20		×		
21			×	
22	×			
23		×		
24		×		
25			×	
26	×			
27				×
28				×
29			×	
30		×		
31		×		

4. Tabla de respuestas de la actividad 6: Describe una situación que se represente por -7 .

Cuestionario	Verbos	Longitud sobre un nivel	Temperatura	Operaciones
1	×			
2		×		
3		×		
4	×			
5	×			
6	×			
7	×			
8	×			
9	×			
10	×			
11	×			
12		×		
13	×			
14				×
15				×
16	×			
17	×			
18				×
19	×			
20		×		
21	×			
22	×			
23		×		
24		×		
25				×
26	×			
27				×
28				×
29	×			
30			×	
31		×		

5. Tabla de respuestas de la actividad 5: Representa el número negativo -5 , al menos de tres formas diferentes.

Cuestionario	Punto de referencia	Verbos	Simbólico	Recta Real
1	x	x		
2			x	
3	x	x		
4	x	x		
5			x	x
6			x	x
7			x	x
8			x	
9			x	
10			x	x
11			x	
12			x	
13	x			
14			x	
15	x			x
16			x	
17			x	
18	x	x		
19	x	x		
20			x	
21			x	x
22	x	x		
23	x	x		
24	x	x		
25	x	x		
26			x	
27			x	
28				
29			x	
30			x	
31	x	x		

ANEXO IV: Notas históricas sobre los números enteros

Como complemento de este estudio así como apoyo para comprender mejor las posibles interpretaciones de las respuestas de los estudiantes y para proporcionar evidencias de que no es, ni ha sido trivial darle sentido a los números negativos, hemos optado por presentar un resumen que proporcione un rápido repaso por la historia que ha recorrido el concepto de número negativo.

Antiguas civilizaciones

Las civilizaciones que se va considerar son aquellas que manifestaron reconocimiento o evitación de los números negativos. Generalmente, este dilema les surgía en el contexto de la resolución de ecuaciones.

Los babilonios utilizaban un álgebra descrita por lenguaje natural comunicando las reglas a seguir para resolver problemas. Ya en esta civilización, se aprecia la presencia de los números negativos en algunas situaciones. Pero ellos la trataban de tal manera que hacían que no aparecieran raíces negativas. Por lo que nunca utilizaban un concepto parecido al de negativo.

En el siglo VI a.C., los filósofos griegos no habían sentido la necesidad de concebir algo parecido a lo negativo, ya que tomaron a la geometría como soporte del álgebra. Por lo que si llegaban a una situación en la que tenían que sustraer un segmento mayor de otro menor, la cuestión quedaba zanjada por la imposibilidad de realizar aquella operación. Podemos aventurar a decir que lo que probablemente obstaculizó la aparición de un nuevo tipo de números fue que en la práctica cotidiana los negativos no son imprescindibles.

En la antigua China, realizaban sus cálculos aritméticos utilizando pequeñas varillas. Colocaban estos numerales concretos sobre una superficie plana (tablero de cálculo) llegando así a la creación de numerales posicionales decimales que mostraron

desde un principio su gran potencialidad. Se utilizaron varillas de color rojo para representar los números positivos y varillas de color negro para los números negativos.

Se han encontrado escritos en los que aparecen sistemas de ecuaciones de hasta 5 incógnitas. A lo largo de los procedimientos de resolución, se puede apreciar un uso operativo bastante avanzado de los números negativos, que muestra cómo en la China antigua e tenía un claro concepto de estos números y se les utilizaba en consideraciones matemáticas, tal y como se haría hoy en día.

En la civilización hindú, allá por el siglo V, el matemático Brahmagupta escribió una obra donde aparecen por primera vez, las reglas para realizar las operaciones con números enteros, a los que llamaba “bienes”, “deudas” y “nada”, en referencia, a los positivos, los negativos y el cero, respectivamente. Estos logros hindúes fueron posibles gracias a su despreocupación por el rigor y la fundamentación lógica.

En la tabla 1 se esquematiza la presencia de los números negativos en las civilizaciones antiguas.

Tabla 1

Cuadro-resumen de la presencia de los negativos en las civilizaciones antiguas

	Nivel sintáctico	Nivel semántico	Planteamiento de la ecuación	Aceptación de n° negativo
Babilonios	Operaciones con diferencias	Deudas	Segundo miembro de la ecuación negativo	No hay indicios de solución negativa
Griegos	Sustraendos	Deudas	Todos los términos positivo	Imposibilidad de solución negativa
Chinos	Planteamiento y proceso de resolución de ecuaciones	Deudas	Admiten coeficientes negativos	No hay indicios de solución negativa
Hindúes	Planteamiento y proceso de resolución de ecuaciones	Deudas y negación de acuerdo al lugar, tiempo y objeto	Admiten coeficientes negativos	Aceptación de solución negativa

De la Edad Media hasta su legitimación

Con la expansión de la cultura islámica, los progresos de los hindúes sobre los números enteros cayeron en el olvido. Por su parte, los árabes tropezaron con el obstáculo que impidió la aceptación de los negativos como números: la identificación de número con magnitud. Así que se limitaron a ignorar a estos elementos que no tenían soporte real.

Durante la Edad Media, a consecuencia del fanatismo religioso, la matemática se mantuvo en estado de letargo en toda Europa. En cuanto a los números negativos, se puede decir que, ni la matemática árabe, ni la europea recogieron el avance hindú de considerar las restas “imposibles” como posibles. En este sentido la época medieval supone un retroceso en este ámbito. Los números negativos sólo se consideraban como restas indicadas. No sólo no se consideran a los negativos como entidades aisladas sino que comienza a aceptarse que tales entes no se deben considerar.

En el Renacimiento, con el desarrollo del algebra, los negativos aparecen de nuevo en escena, provocando entre los algebristas reacciones diversas que van desde el rechazo a la aceptación, pasando por el espanto que hace que se les califique de falsos. Pero este rechazo ya hace que los matemáticos de la época se detuvieran y reflexionaran sobre el concepto. El obstáculo que se presentaba esta vez era la idea vigente de número como expresión de cantidad absoluta, cosa que este concepto no cumplía. Fueron llamados números ficticios, absurdos, cuando se obtenían como solución de una ecuación raíces falsas y valores negados. Quizás el término “negativo” provenga de esta época, ya que eran elementos negados.

Durante los siglos siguientes siguió esa lucha por que se aceptaran pero su difícil justificación como concepto de número contribuyó a que persistiera su rechazo. Aun así, su probada eficacia hizo que se mantuviera la búsqueda por encontrar esa justificación y surgieron las primeras interpretaciones que conducirían a legitimarlos.

En el siglo XVIII los negativos son entendidos como cantidad negativa opuesta a la positiva. El desarrollo de la Geometría analítica hizo posible el encontrar una interpretación concreta a los negativos como abscisas de puntos en la recta de coordenadas. El desarrollo de la mecánica permitió que se le interpretara como una cantidad relativa y como movimiento: “La cantidad negativa es tan real como la positiva, pero orientada en sentido opuesto”; “Lo negativo es retroceso, mientras que lo

positivo es avance”. Se imponen los términos de cantidades negativas y positivas, pero las interpretaciones concretas que admiten todas estas cantidades no permiten explicar todas sus reglas de cálculo. En esta época se tuvo el empeño de demostrar la regla de los signos.

Y no es hasta el siglo XIX, cuando los negativos son aceptados como números porque se entienden como una ampliación de los naturales donde se siguen cumpliendo las leyes de la aritmética. En este marco, inaugurado por Hankel, deja de preocupar la demostración de la regla de los signos, que pasa a ser considerada como un convenio que hace que se conserven las leyes de la aritmética. Se habla de enteros negativos como extensión de los naturales y opuestos a ellos. La fundamentación de los sistemas numéricos se convierte en objeto de estudio y con ello los negativos se estudian al margen de su posible utilidad algebraico-geométrica. Por tanto esto también dificulta la aceptación de los negativos como la que hoy en día tenemos, ya que se trataba de encontrarle una significación al entero negativo.

A partir de esto se intenta construir diversas teorías para dar significado a los números enteros. Unas pretenden que el nuevo conjunto constituya una extensión de la aritmética natural y priman por ello el aspecto ordinal del número entero. Otras pretenden que el conjunto de los enteros sea una extensión del orden lineal de los naturales y priman el aspecto ordinal del número. En cualquier caso, el número negativo desaparece como categoría numérica y es integrado en la jerarquía de los sistemas numéricos.

En este marco, se señala la diferencia entre número natural y número entero positivo, pues de acuerdo con estas teorías son objetos diferentes: “los números que no tienen signo son radicalmente distintos de los que son positivo” decía B. Russell.

Aunque todas estas teorías tienen un trasfondo intuitivo, se pretende desarrollarlas con el máximo de rigor, y por ello se elaboran sin hacer uso de ningún soporte geométrico o intuitivo. Por tanto, la diversidad de teorías y diferentes definiciones sobre este tipo de números, dificultaba la unificación del concepto.

Este problema queda subsanado con la noción de estructura que unifica las diversas teorías. Con todas ellas el conjunto de los enteros resulta ser un modelo de anillo de integridad totalmente ordenado. El concepto de isomorfismo entre estructuras

algebraicas permite identificar a los naturales con los enteros positivos, con lo que de nuevo es posible considerar a Z como una ampliación de N , y escribir $N \subset Z$, aunque con la coletilla de que esta inclusión se hace bajo un isomorfismo.

Como vemos la historia del número negativo, ha sido larga y se puede decir que el concepto de número entero es relativamente joven. Ha planteado importantes problemas a los matemáticos a lo largo de la historia, por lo que no es de extrañar que los alumnos de hoy en día tengan sus dificultades y sus dudas acerca de lo que es un número entero y qué sentido darle.